Tworzenie i optymalizacja filtrów IIR

Raport 2 (12.11.2016)

Uniwersytet Jagielloński – Zakład Fotoniki

1 Wstęp

1.1 Metoda tworzenia filtrów IIR

Najpopularniejszą metodą tworzenia filtrów cyfrowych ze sprzężeniem zwrotnym (Infinite Impule Response – IIR) jest metoda polegająca na stworzeniu wpierw ich analogowych prototypów, a następnie przejściu (za pomocą transformaty biliniowej) do ich cyfrowych odpowiedników.
Wśród powszechnie znanych typów filtrów analogowych znajdują się:

- filtry Butterworth'a
- filtry Czebyszewa I/II
- filtry Eliptyczne

1.2 Badanie stabilności filtrów - porównanie filtrów analogowych i cyfrowych

Układ analogowy jet stabilny, jeżeli bieguny jego transmitancji leżą w lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny zespolonej.

Układ dyskretny jest stabilny, jeżeli bieguny jego transmitancji leżą wewnątrz okręgu jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej.

Dla układu analogowego osią częstotliwości jest oś urojona $s = j\omega$.
Dla układu dyskretnego częstotliwość zmiania się po okręgu jednostkowym $z = e^{j\Omega}$.

W przypadku biegunów na osi (dla analogowych) lub na okręgu (dla dyskretnych) stabilność jest warunkowa, a układ odpowiada oscylacją.

Część I

1 Projektowanie filtrów analogowych Butterwortha i Czebyszewa

Podczas projektowania korzystamy z oznaczeń przedstawionych na rysunku poniżej

- Częstotliwość końca pasma przepustowego (f_P) w dB
- Największe dopuszczalne tłumienie w paśmie przepustowym (A_p) dla filtru Czebyszewa ten parametr określa jednocześnie dopuszczalne zafalowanie charakterystyki amplitudowej w paśmie przepustowym (w kHz)
- Częstotliwość początku pasma zaporowego (f_R) w dB
- Wymagane minimalne tłumienie w paśmie zaporowym (A_R) (w kHz)

1.1 Obliczenie rzędu filtra

1.1.1 Współczynnik selektywności k

$$k = \frac{f_P}{f_R}$$

1.1.2 Współczynnik dyskryminacji d

$$d = \sqrt{\frac{10^{0.1\,A_P} - 1}{10^{0.1\,A_R} - 1}}$$

Rząd filtra Butterwortha oblicza się ze współczynników k i d

$$n = \frac{|\log d|}{|\log k|} \tag{1.1}$$

```
3.95298
```

Rząd filtra Czebyszewa określa się z podobnego wzoru:

$$n = \frac{\mathrm{arc\,cosh}\left(\frac{1}{d}\right)}{\mathrm{arc\,cosh}\left(\frac{1}{k}\right)} \tag{1.2}$$

```
2.71107 + 0. i
```

Rząd filtru nie może być ułamkowy, więc zaokrąglamy w górę.

```
4
```

```
3
```

Rząd filtr Czebyszewa będzie zawsze mniejszy lub równy rzędowi filtru Butterwortha.

1.2 Częstotliwość graniczna

W dolnoprzepustowym filtrze Czebyszewa jest to częstotliwość, dla której tłumienie filtru nie przekracza założonych zafalowań charakterystyki. A więc poprostu f_P

$$f_g = f_P \tag{1.3}$$

Dla filtru Butterwortha, częstotliwość graniczna to taka dla której następuje spadek wzmocnienia o 3 dB względem sygnału stałego (o częstotliowści 0). Jest ona większa od f_P jeżeli A_P jest mniejsze niż 3 dB. Można ją określić ze wzoru

$$f_g = \frac{f_P}{\left(10^{0.1\,A_P} - 1\right)^{\frac{1}{2\,n}}} \tag{1.4}$$

```
3.90228
```

1.3 Filtr prototypowy

Definition 1.1

> Filtr prototypowy ≡ filtr anaologowy którego częstotliwość graniczna wynosi 1 Hz.

1.3.1 Butterworth

Kradrat charakterystyki amplitudowej definiuje się następująco

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (j\omega\,/\,j\omega_{3\,\mathrm{dB}})^{2\,N}} \tag{1.5}$$

$$|H(j\omega)| = \sqrt{\frac{1}{1 + (j\omega\,/\,j\omega_{3\,\mathrm{dB}})^{2\,N}}} \tag{1.6}$$

gdzie $\omega_{3\,\mathrm{dB}}$ jest pulsacją, dla której charakterystyka amplitudowa opada do poziomu $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (3 dB w skali decybelowej $20\log_{10}\left(1\Big/\sqrt{2}\right) = -3\,\mathrm{dB}$. Rozważając zera mianownika:

$$1 + (s\,/\,j\omega_{3\,\mathrm{dB}})^{2\,N} = 0$$

Otrzymujemy bieguny transmitancji filtra Butterwortha:

$$\left\{\left\{s \to \text{ConditionalExpression}\left[i\, e^{\frac{i(\pi+2\pi C[1])}{2 NN}}\omega,\ (C[1] \in \text{Integers} \,\&\&\, -1+2NN-2C[1] \geq 0 \,\&\&\, C[1] \geq 0) \,||\, (C[1] \in \text{Integers} \,\&\&\, C[1] \leq -1 \,\&\&\, 1+2NN+2C[1] > 0)\right]\right\}\right\}$$

$$i\, e^{\frac{i(\pi+2\pi C[1])}{2 NN}}\omega$$

$$\omega_{3\text{dB}}\, e^{j(\pi/(2N))(2k+N-1)} \tag{1.7}$$

Do filtra wybieramy tylko te znajdujące się w lewej półpłaszczyźnie

$$\frac{1}{((0.707107 - 0.707107\, i) + s)\ ((0.707107 + 0.707107\, i) + s)}$$

Z równania (1.6) otrzymujemy:

$$20 \log_{10}\left(1 \Big/ \sqrt{1 + (\omega_p/\omega_{3\text{dB}})^{2N}}\right) = -A_P \tag{1.8}$$

$$20 \log_{10}\left(1 \Big/ \sqrt{1 + (\omega_s/\omega_{3\text{dB}})^{2N}}\right) = -A_R \tag{1.9}$$

Skąd rząd filtru:

$$N = \frac{1}{2} \log_{10}\left(\frac{10^{A_P/10} - 1}{10^{A_R/10} - 1}\right) \Big/ \log_{10}\left(\frac{\omega_p}{\omega_s}\right) \tag{1.10}$$

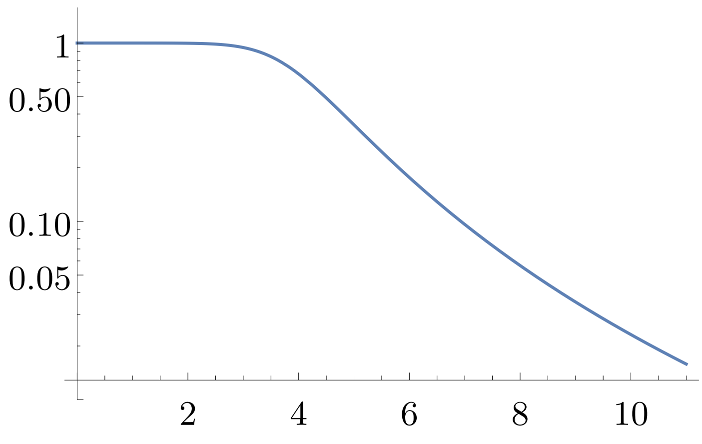
$$\omega_{3\text{dB}} = \frac{\omega_{\text{pass}}}{\left(10^{A_P/10} - 1\right)^{1/(2N)}} \tag{1.11}$$

1.4 Całość dla filtru Butterworth

4

3.90228

$$231.885 / (((1.49334 - 3.60523\, i) + i\,\omega)\ ((1.49334 + 3.60523\, i) + i\,\omega)\ ((3.60523 - 1.49334\, i) + i\,\omega)\ ((3.60523 + 1.49334\, i) + i\,\omega))$$



1.5 Filtr Czebyszewa

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2\ V_N^2(i\omega\,/\,i\omega_{3\mathrm{dB}})} \tag{1.12}$$

Gdzie

$$V_N(x) = \begin{cases} \cos(N\arccos(x)) & |x| \le 1 \\ \cosh(N\mathrm{arccosh}(x)) & |x| > 1 \end{cases} \tag{1.13}$$

Jest to filtr I typu. Charakterystyka jest równomiernie falista w paśmie przepustowym.
Amplituda zafalowania jest regulowana parametrem ϵ.
W paśmie zaporowym charakterystyka opada monotonicznie

Dla filtru typu II jest odwrotnie. Charakterystyka jest płaska w paśmie przepustowym i równomiernie falista w paśmie zaporowym.
Parametr ϵ reguluje amplitudę zafalowania charakterystyki amplitudowej w paśmie zaporowym.

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\frac{1}{\epsilon^2\ V_N^2(i\omega_{3\mathrm{dB}}/i\omega)}} \tag{1.14}$$

1.6 Filtr eliptyczny

Do aproksymacji idealnej, prostokątnej charakterystyki częstotliwościowej w przypadku filtra eliptycznego stosuje się eliptyczną funkcję Jacobiego.
Charakterystyka amplitudowa filtra eliptycznego jest równomiernie falista w paśmie przepustowym i zaporowym. Filtr eliptyczny opisują 4 parametry: N – rząd filtra, ω - krawędź pasma przepustowego, A_P oraz A_R.

1.7 Transformacja częstotliwości

Po zaprojektowaniu analogowego filtru dolnoprzepustowego możemy utworzyć inne filtry korzystając z następującej tabeli:

$$\begin{array}{ll} \text{Low pass} & s' = s\,/\,\omega_0 \\ \text{High pass} & s' = \omega_0\,/\,s \\ \text{Band pass} & s' = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}\ \frac{(s/\omega_0)^2+1}{s/\omega_0} \\ \text{Band stop} & s' = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\ \frac{s/\omega_0}{(s/\omega_0)^2+1} \end{array}$$

where $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ and $\omega_0 = \sqrt{\omega_1\,\omega_2}$

2 Przykładowy projekt filtru dolnoprzepustowego

Zakładamy wartości parametrów filtru:

- częstotliwość próbkowania $f_{\mathrm{pr}} = 100\,\mathrm{Hz}$
- krawędź pasma przepustowego $f_1 = 20\,\mathrm{Hz}$
- krawędź pasma zaporowego $f_2 = 25\,\mathrm{Hz}$
- nieliniowość charakterystyki w paśmie przepustowym $A_p = 3\,\mathrm{dB}$
- nieliniowość charakterystyki w paśmie zaporowym $A_s = 30\,\mathrm{dB}$

Przeliczenie częstotliwości filtra cyfrowego f_1 i f_2 na pulsację Ω w radianach:

$$\Omega_1 = 2\,\pi\,\frac{f_1}{f_{\mathrm{pr}}} = 2\,\pi\,\frac{20}{100} = 1.2566\,\mathrm{rad}$$

$$\Omega_2 = 2\,\pi\,\frac{f_2}{f_{\mathrm{pr}}} = 2\,\pi\,\frac{25}{100} = 1.5708\,\mathrm{rad}$$

```
1.25664
```

```
1.5708
```

2.1 Krawędź pasma filtru analogowego

$$\omega_1 = \frac{2}{2\,\Delta\mathrm{t}}\tan(\Omega_1 / 2) = \frac{2}{1/100}\tan(1.2566/2) = 145.3085\,\mathrm{rad}/s$$

$$\omega_2 = 200\,\mathrm{rad}/s$$

```
145.309
```

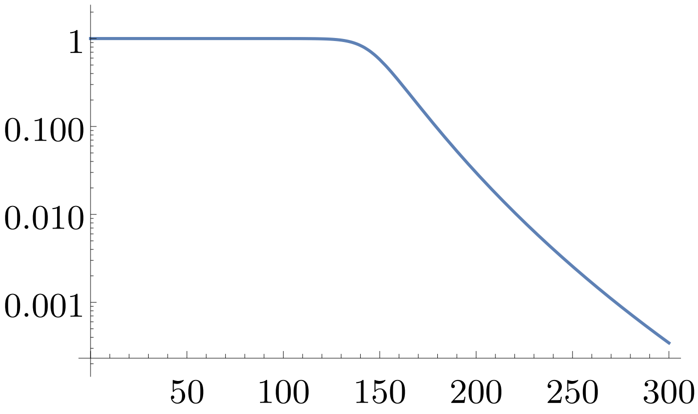
```
200.
```

2.2 Określenie parametrów filtru analogowego na podstawie podanych wymagań

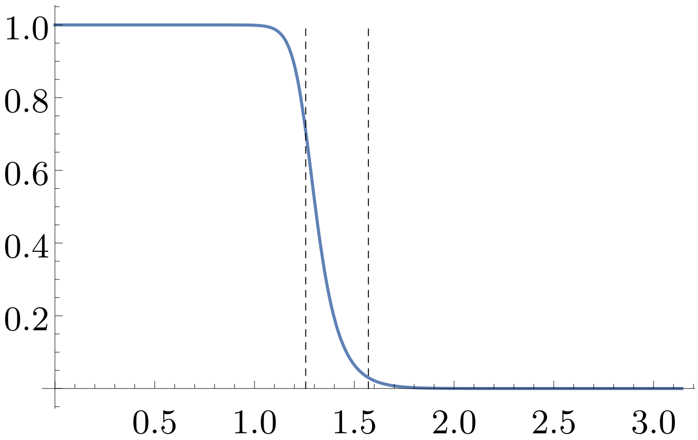
```
11
```

```
145.34
```

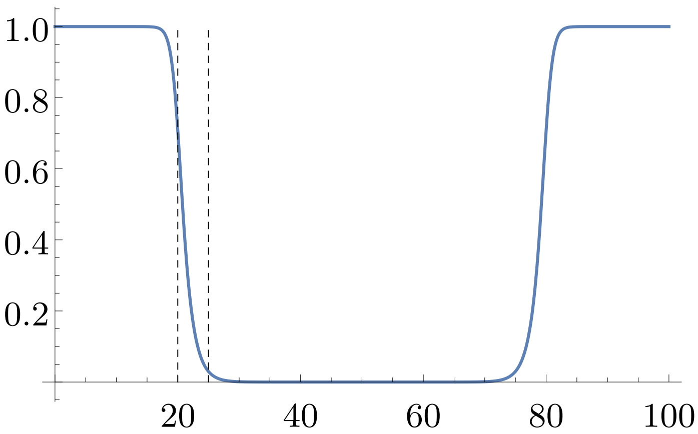
2.3 Filtr analogowy



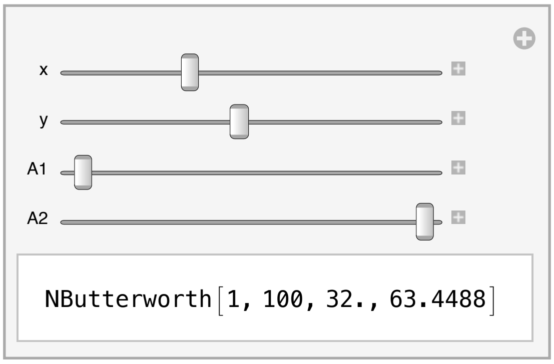
2.4 Przejście na filtr cyfrowy (w dziedzienie pulsacji/częstości)



2.5 Filtr cyfrowy w dziedzinie częstotliwości



3 Badanie reakcji filtru Butterworth na zmianę częstotliwości odcięcia



Obserwacja: im częstotliwości bliższe sobie, a za tem im bardziej stromy filtr tym wyższy rząd filtru Butterworth'a jest wymagany.

Oprócz tego dla:
$(2.2,\ 2.3) \to N = 78$
$(22.2,\ 22.3) \to N = 769$
$(82.2,\ 82.3) \to N = 2843$
a więc rząd filtru rośnie także z częstotliwością przy stałej różnicy $f_2 - f_1$.

Cześć II

1 Badanie błędów dyskretyzacji filtrów cyfrowych

1.1 Definicje

1.1.1 Funkcje dyskretyzujące

1.1.2 Funkcja błędu

Szybsza wersja:

1.2 Ustalenie postaci filtrów cyfrowych

Poniżej znajdują się definicje filtrów analogowych i ich cyfrowych odpowiedników w postaci tabel dla rzędu N={1,2,...7} oraz częstości ω={ωmin, ωmax, $\Delta\omega$}

1.2.1 Butterworth

1.2.2 Chebyshev 1

1.2.3 Chebyshev 2

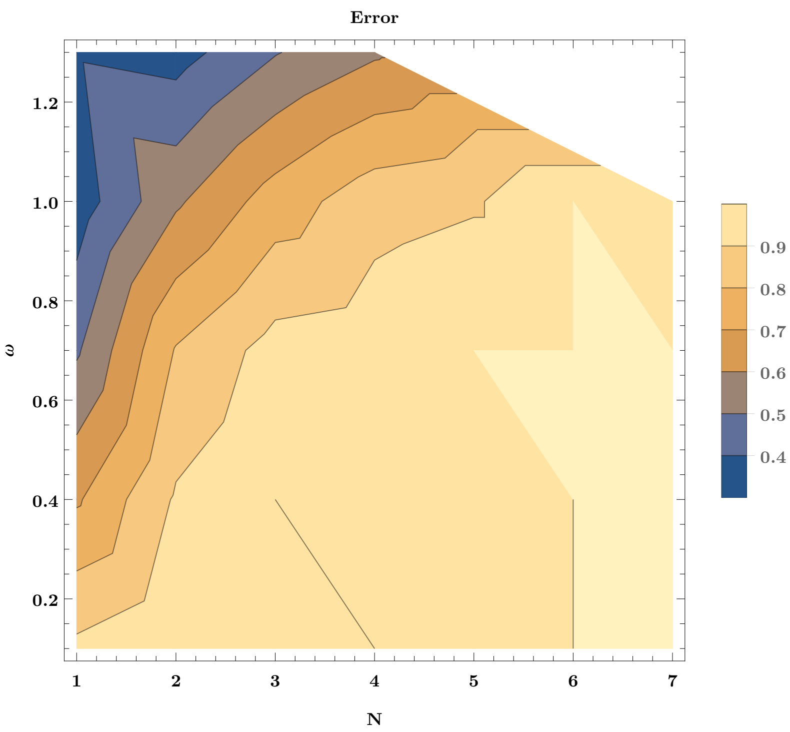
1.2.4 Eliptic

1.3 Dyskretyzacja

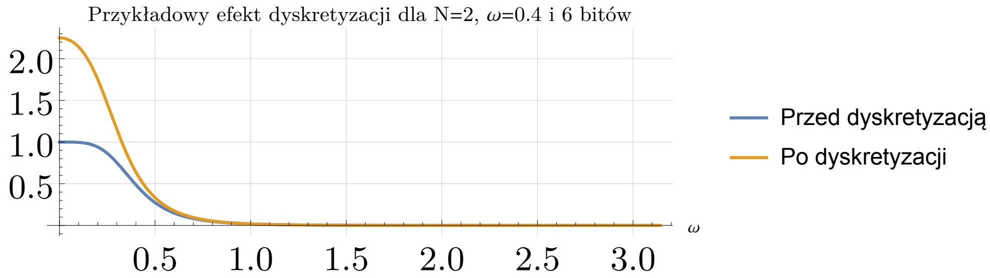
1.4 Wyniki

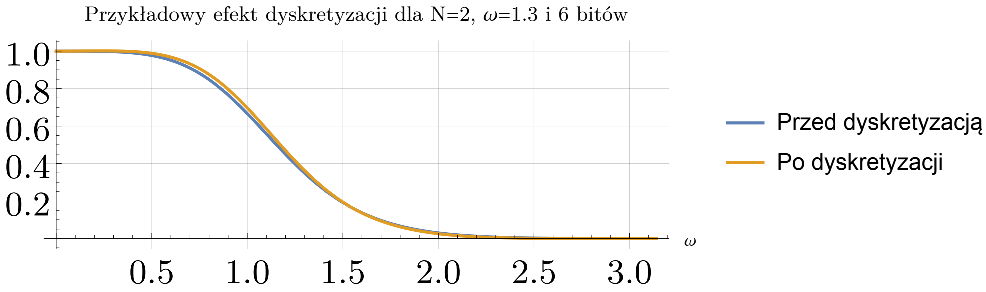
1.4.1 Butterworth

Funkcje błędu w zależności od rzędu filtra i częstości granicznej:



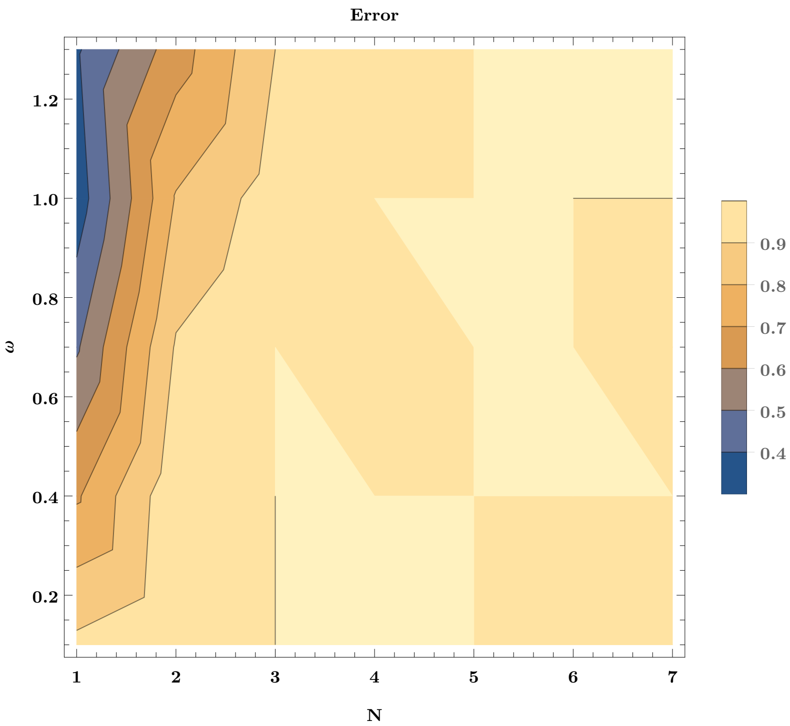
Poniżej dwa przykłady:



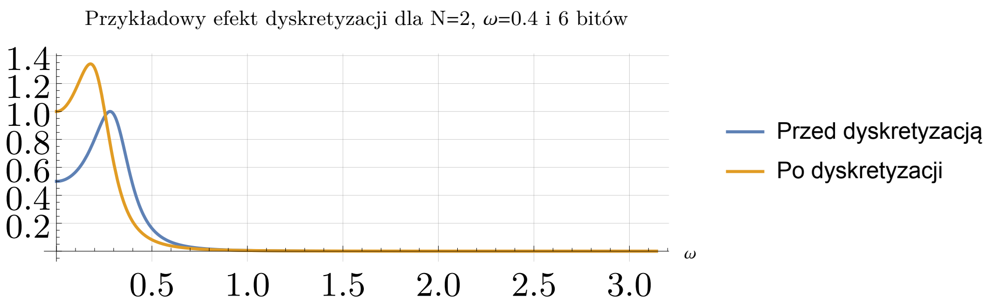


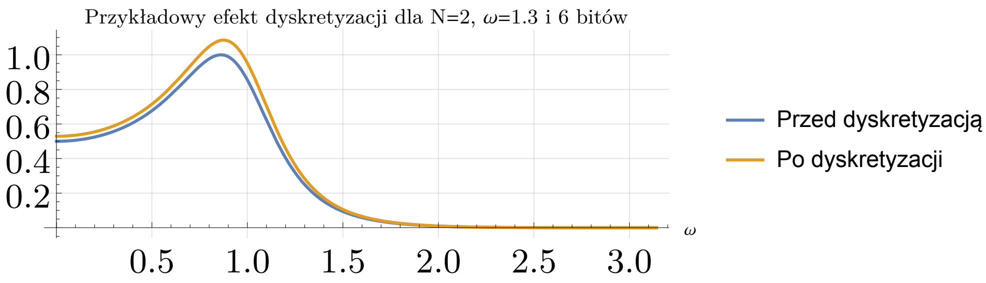
1.4.2 Chebyshev 1

Funkcje błędu w zależności od rzędu filtra i częstości granicznej:



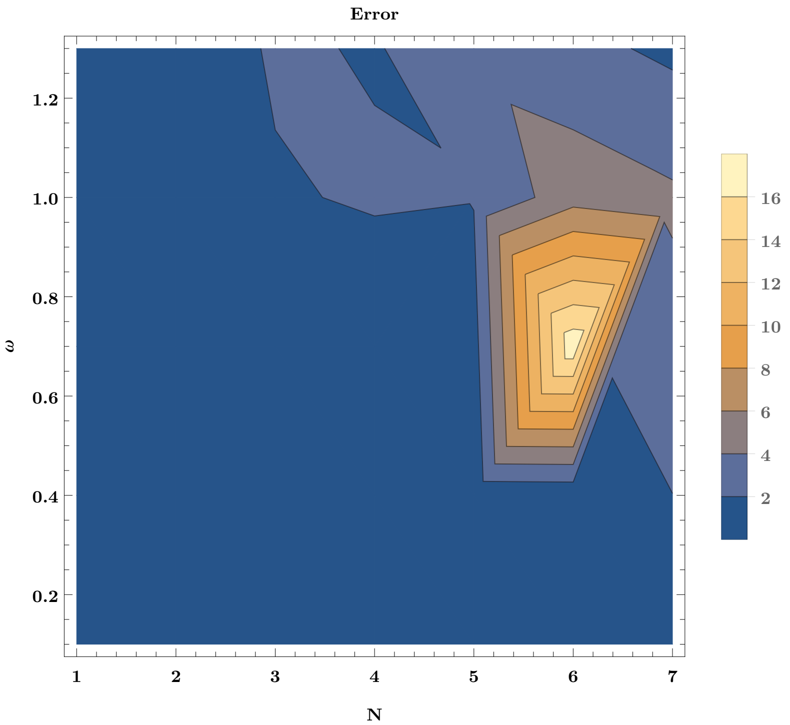
Poniżej dwa przykłady:



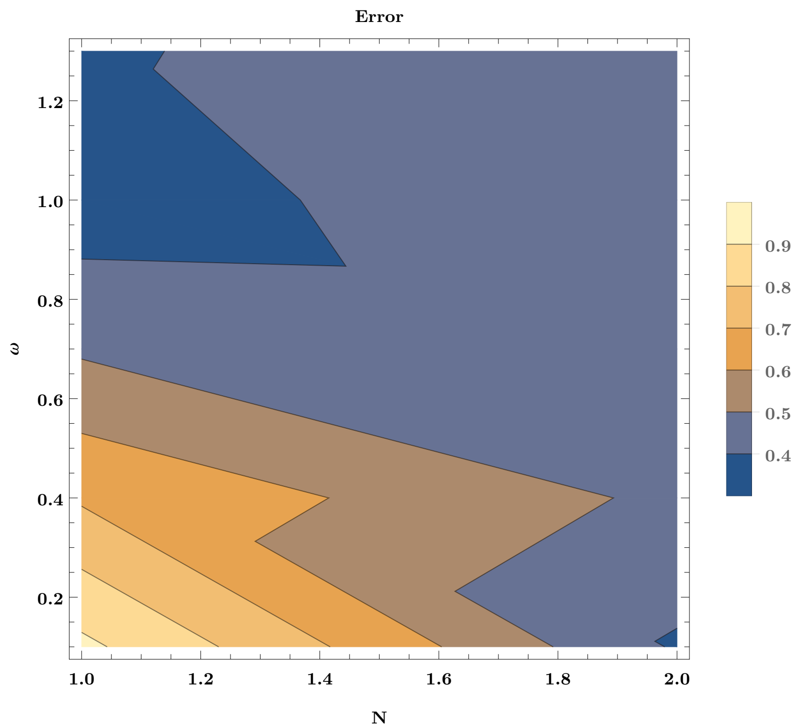


1.4.3 Chebyshev 2

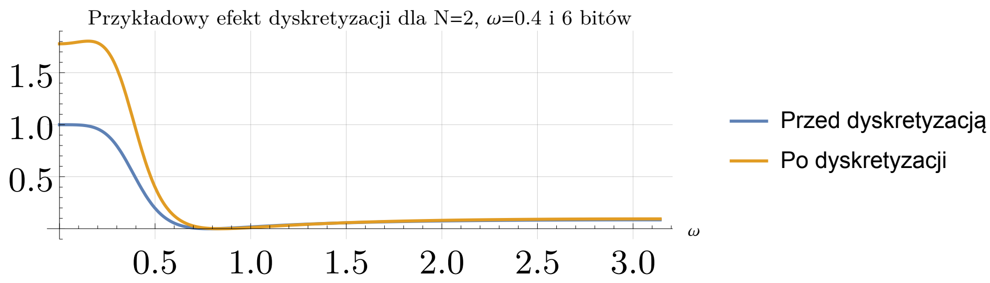
Funkcje błędu w zależności od rzędu filtra i częstości granicznej:

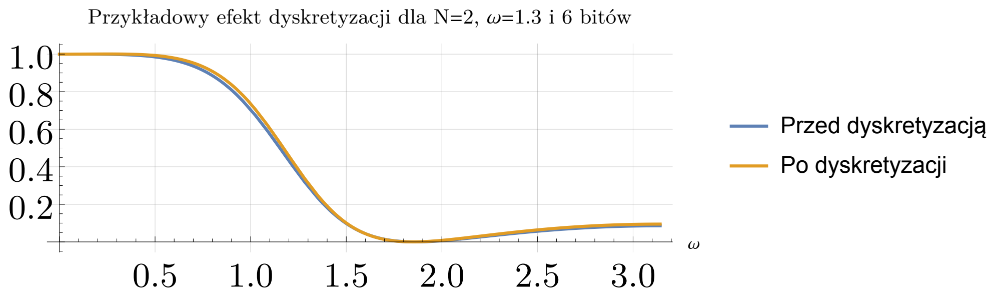


Powiększam fragment w okolicy małych częstości gdzie błędy są mniejsze od 1.



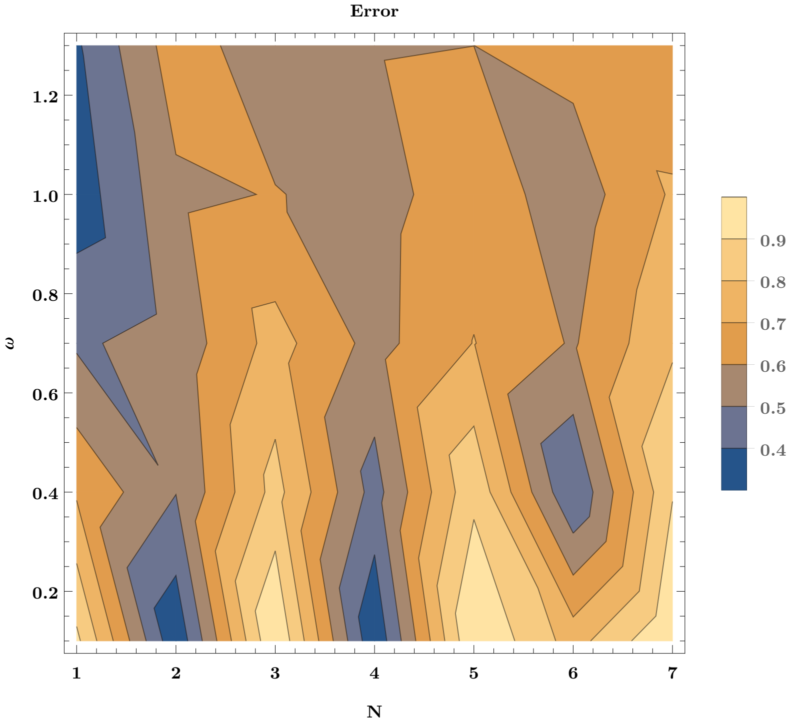
Poniżej dwa przykłady:



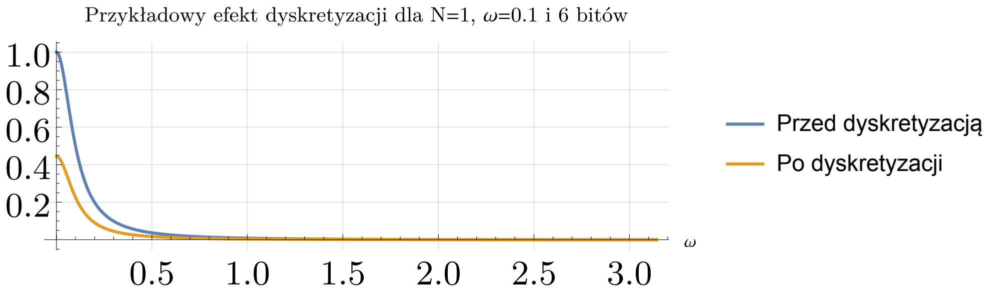


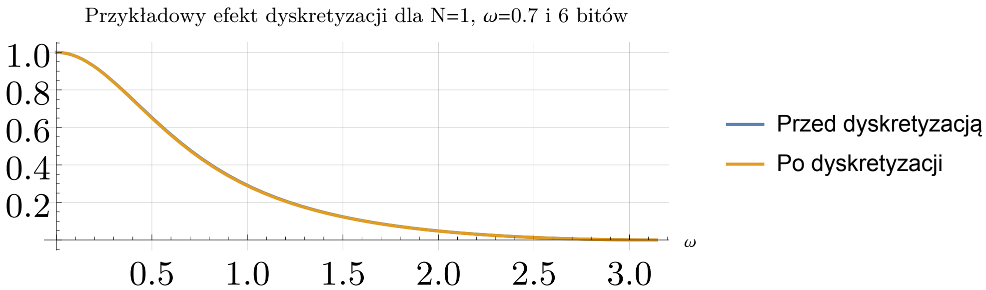
1.4.4 Eliptic

Funkcje błędu w zależności od rzędu filtra i częstości granicznej:



Poniżej dwa przykłady:





2 Badanie stabilności dyskretyzowanych filtrów cyfrowych

2.1 Ustalenie postaci filtrów cyfrowych

Poniżej znajdują się definicje filtrów analogowych i ich cyfrowych odpowiedników w postaci tabel dla rzędu N={1,2,...7} oraz częstości ω={ωmin, ωmax, $\Delta\omega$}

2.1.1 Definicje

2.1.2 Butterworth

2.1.3 Chebyshev 1

2.1.4 Chebyshev 2

2.1.5 Eliptic

2.2 Funkcje pomocnicze

Pomocnicza funkcja by pobrać bieguny zdyskretyzowanych filtrów

Ustalamy ilość bitów do symulacji

Przygotowywuję funkcję rysującą bieguny i zaznaczającą na czerwono te w których bieguny filtru zdyskretyzowanego wychodzą poza okrąg jednostkowy.

2.3 Dyskretyzacja współczynników filtru cyfrowego

2.3.1 Definicje

2.3.2 Testy

$\{\{0, 3, 3\}, \{0, 3\,i, 3\,i\}\}$

Dyskretyzujemy na poziomie filtrów cyfrowych

$$\left(\frac{0.0302379 + 0.0604758\, z + 0.0302379\, z^2}{(0.572371 + 0.\, i) - (1.45142 + 0.\, i)\, z + z^2}\right)_1^{\mathcal{T}}$$

$\{0.72571 - 0.213814\, i, 0.72571 + 0.213814\, i\}$

$$\frac{0.04682 + 0.04682\, z + 0.04682\, z^2}{0.56184 - 1.45142\, z + 0.98322\, z^2}$$

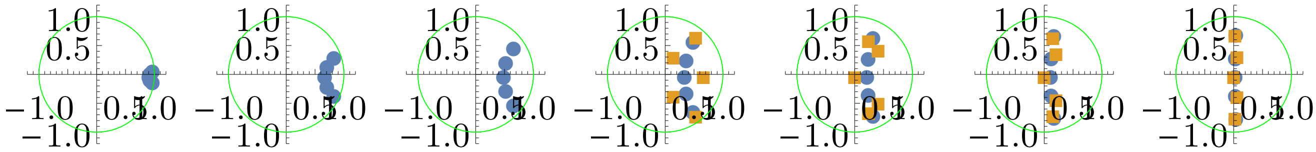
$\{0.738095 - 0.16323\, i, 0.738095 + 0.16323\, i\}$

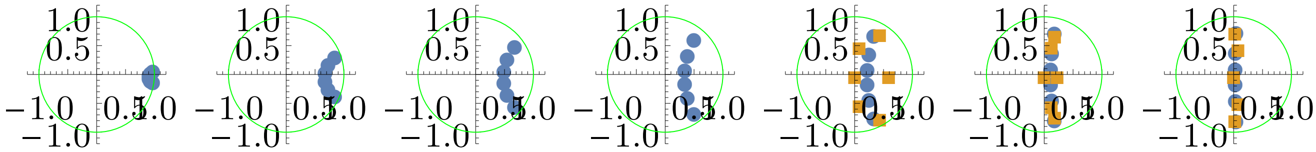
2.3.3 Dyskretyzacja

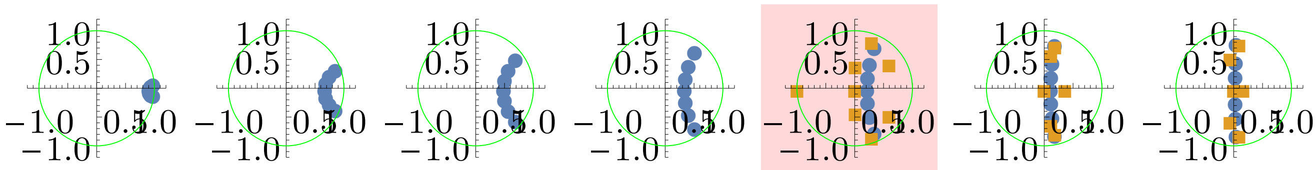
2.3.4 Porównanie położenia biegunów

★ Butterworth

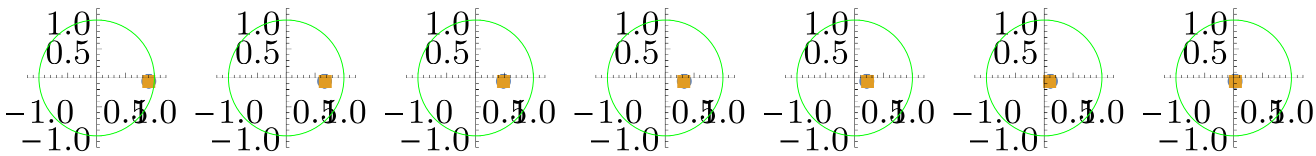
W prawo rośnie częstotliwość, w dół rośnie rząd filtra.

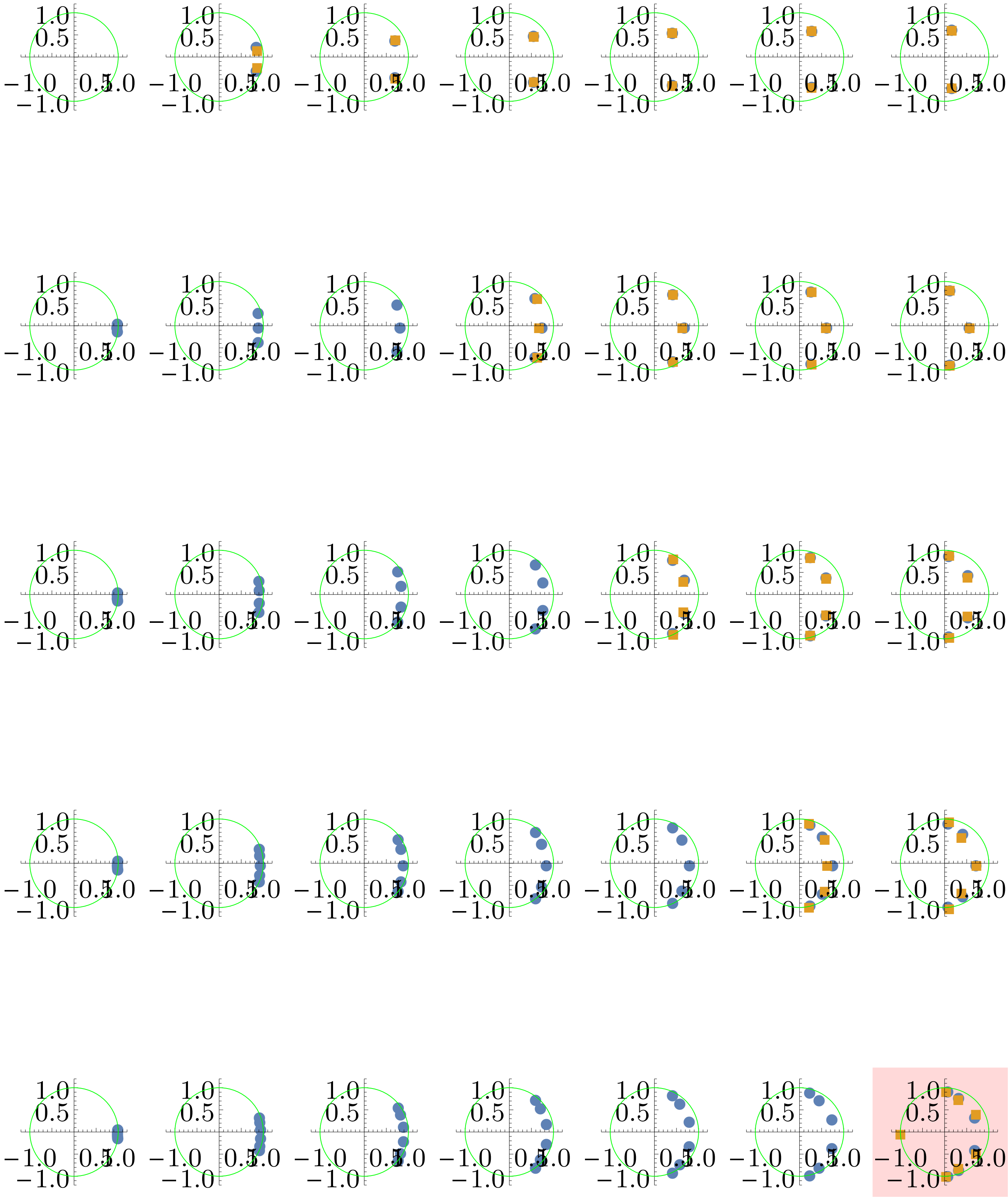


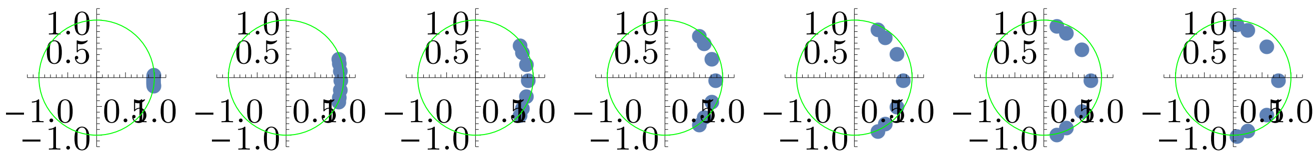




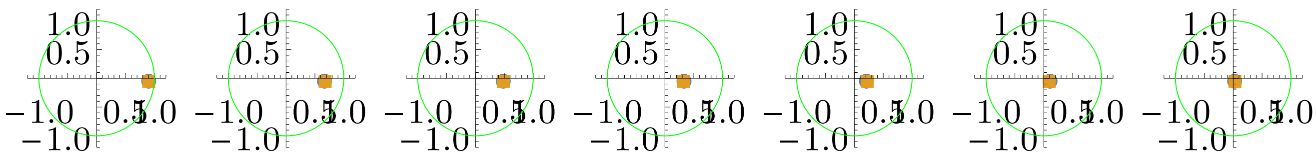
★ Chebyshev 1

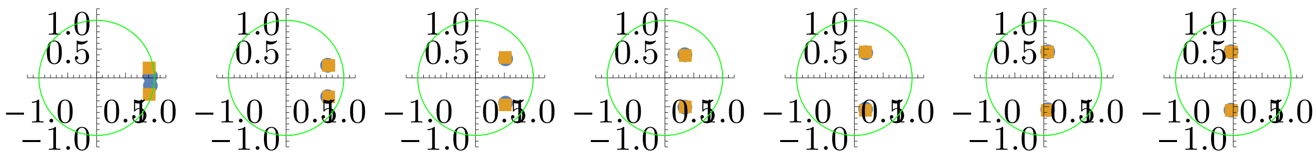


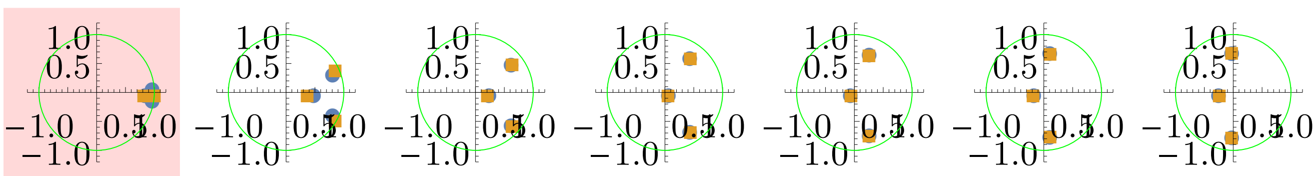


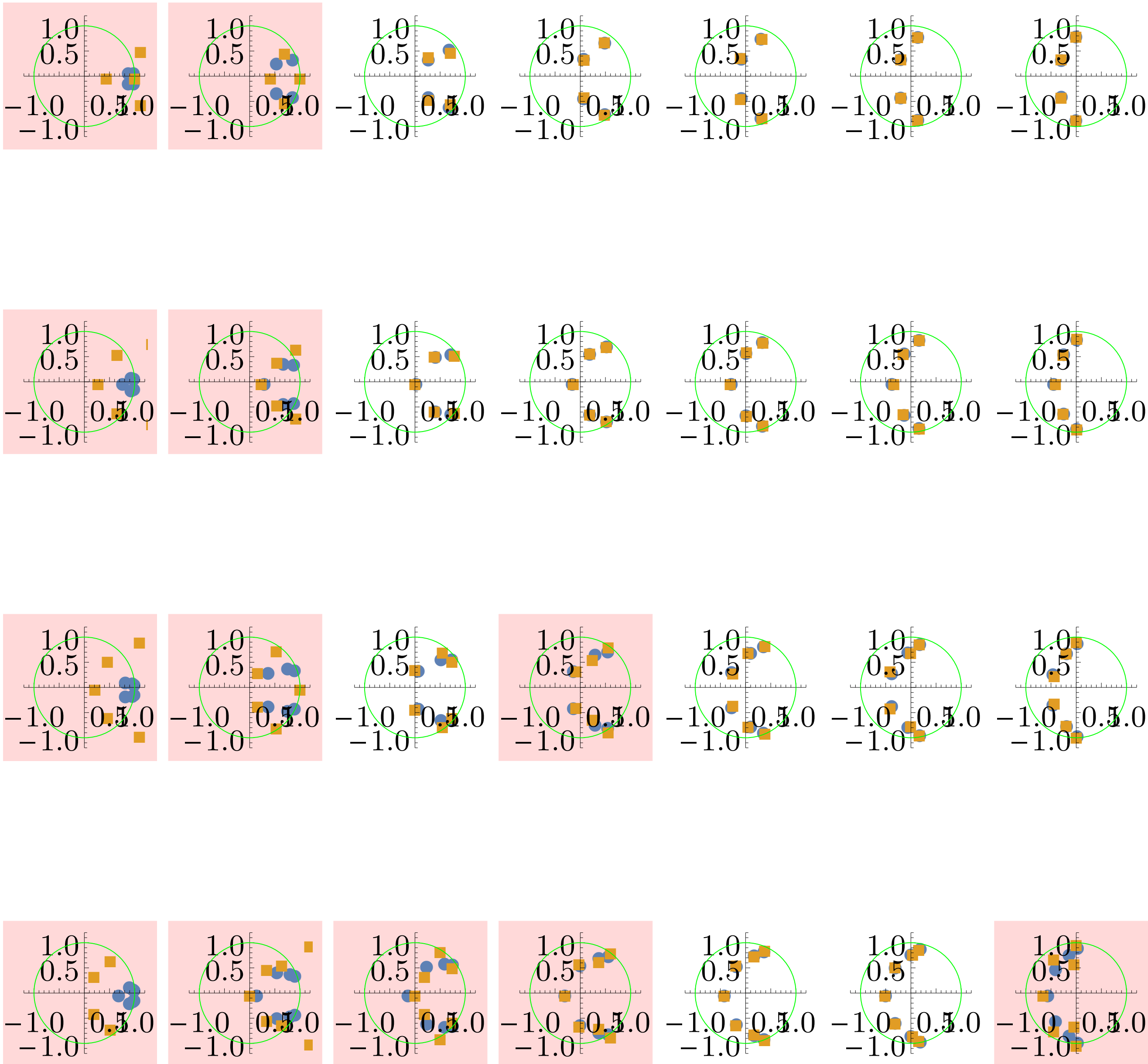


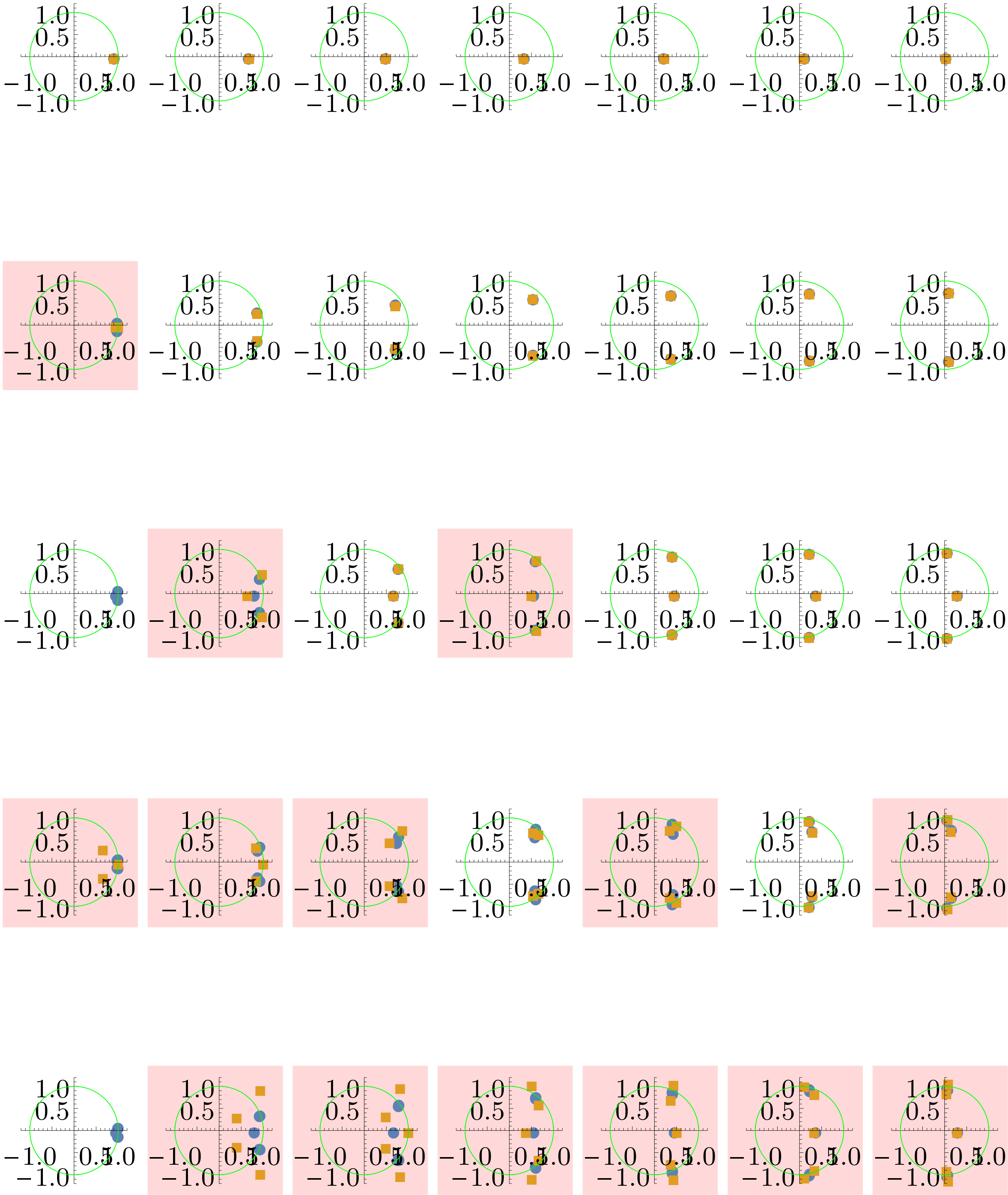
★ Chebyshev 2

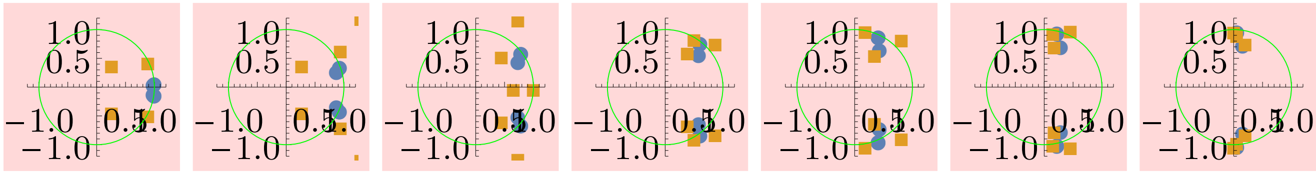


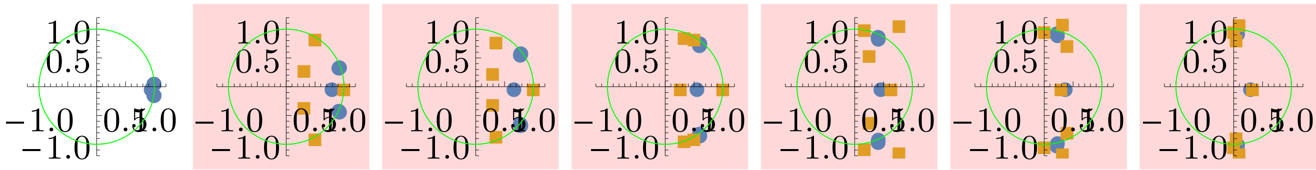





1.0
0.5
−1.0
0.5
1.0
−1.0







2.4 Dyskusja

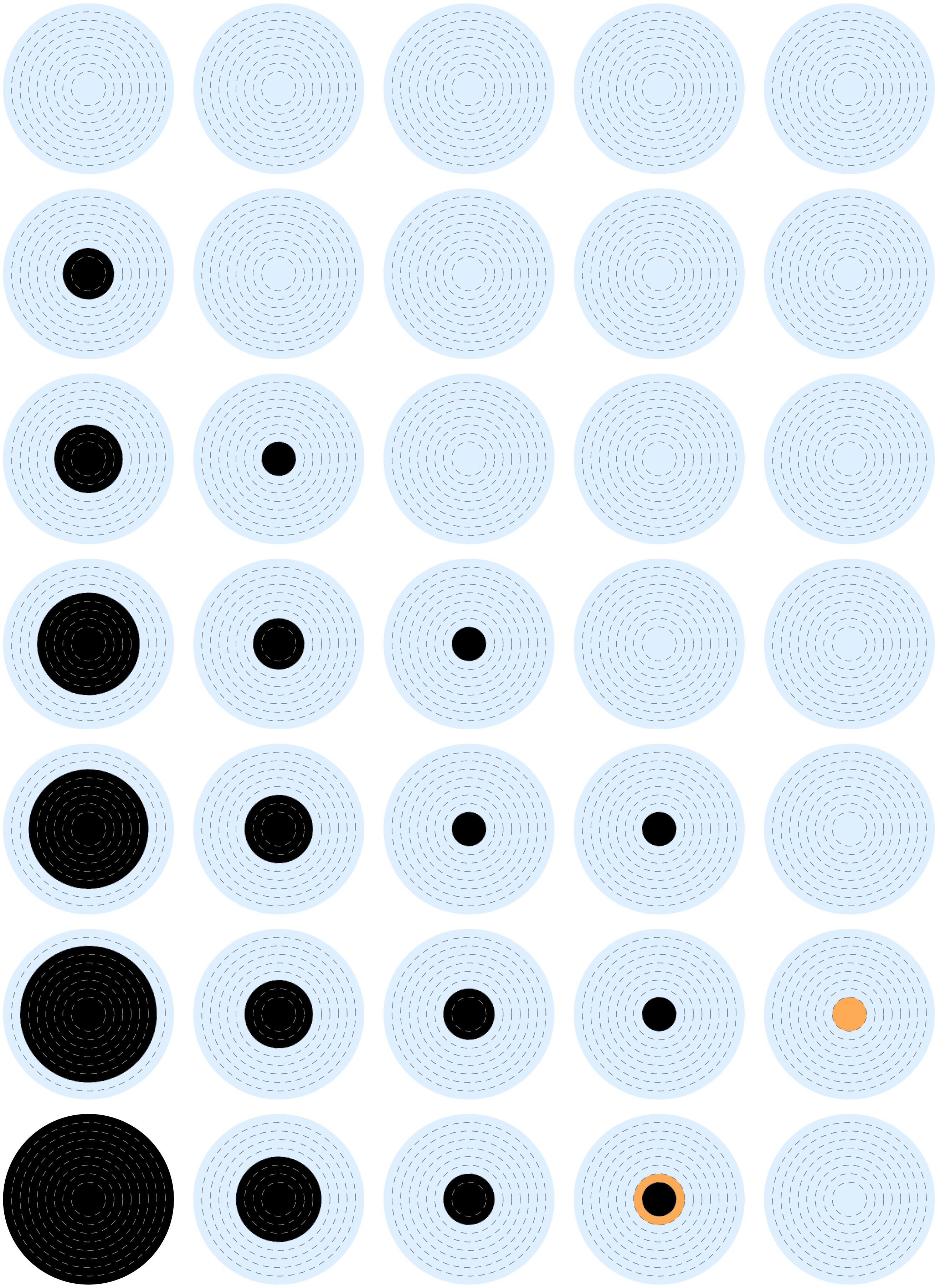
Istnieje problem polegający na znikaniu licznika (a więc również całego filtru) widoczny jest on przy niskich częstotliwościach filtru Butterwortha i Chebysheva 1
Ponadto widać, iż filtry eliptyczne powyżej 3 rzędu robią się bardzo niestabilne (niektóre nie są zaznaczone na czerwono bo filtr przestał działać z powodów wspomnianych wyżej)

3 Główne wyniki dotyczące stabilności

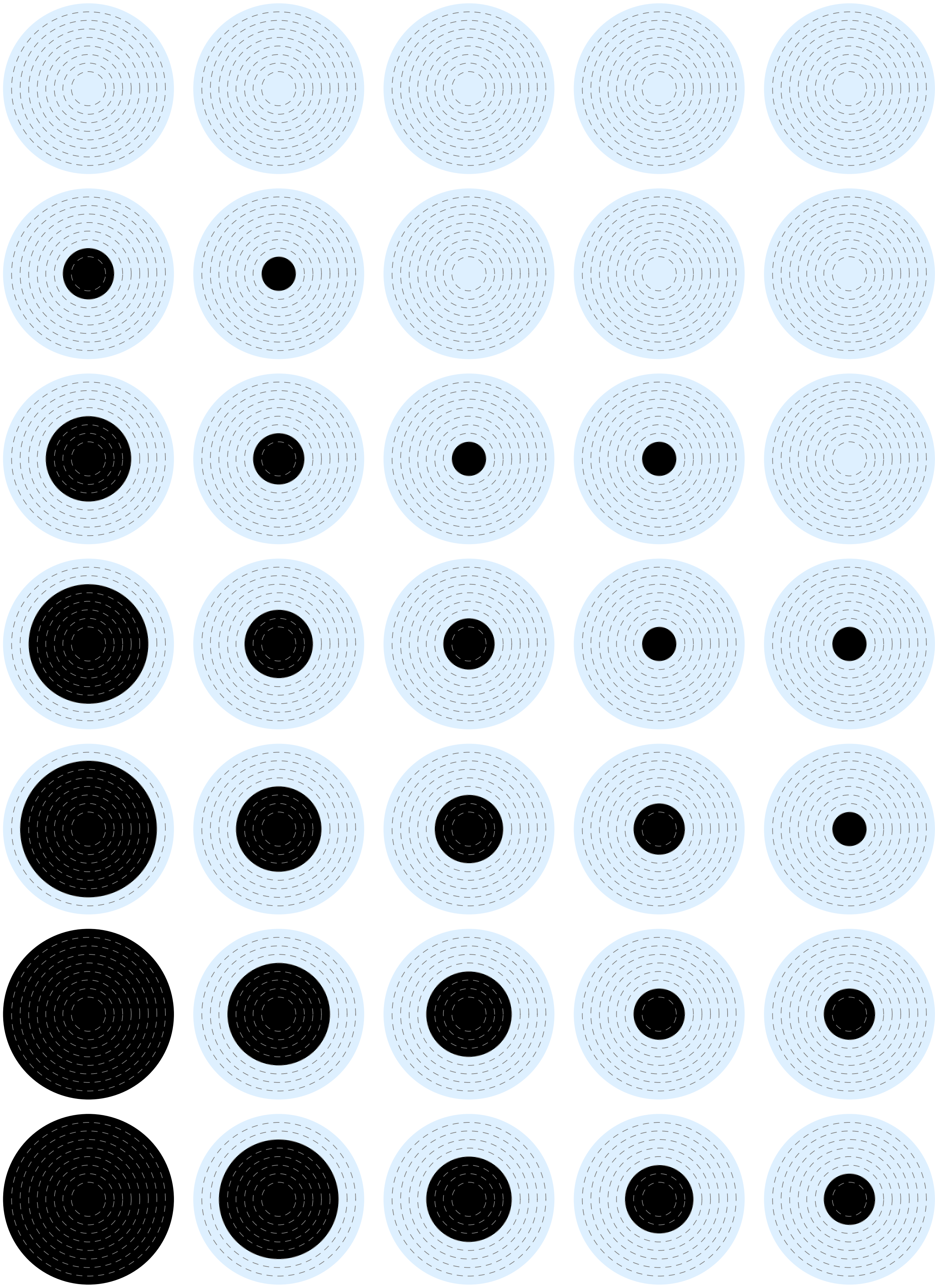
W tej części zostaną przedstawione najważniejsze wyniki dla dyskretyzacji w której wpółczynniki licznika i mianownika są dyskretyzowane razem.

Wizualizacja stabilności filtrów rządzi się zasada jest ta sama - w dół rośnie rząd, w prawo rośnie częstość graniczna.
Promień pierścienia jest związany z liczbą bitów. Środkowy okrąg jest 5 bitowy, każdy kolejny 3 bity więcej, okręgów jest 9, zatem ostatni okrąg reprezentuje $5 + 9 * 3 = 5 + 27 = 32$ bity. Kolor niebieski oznacza filtr stabilny, kolor pomarańczowy - niestabilny.

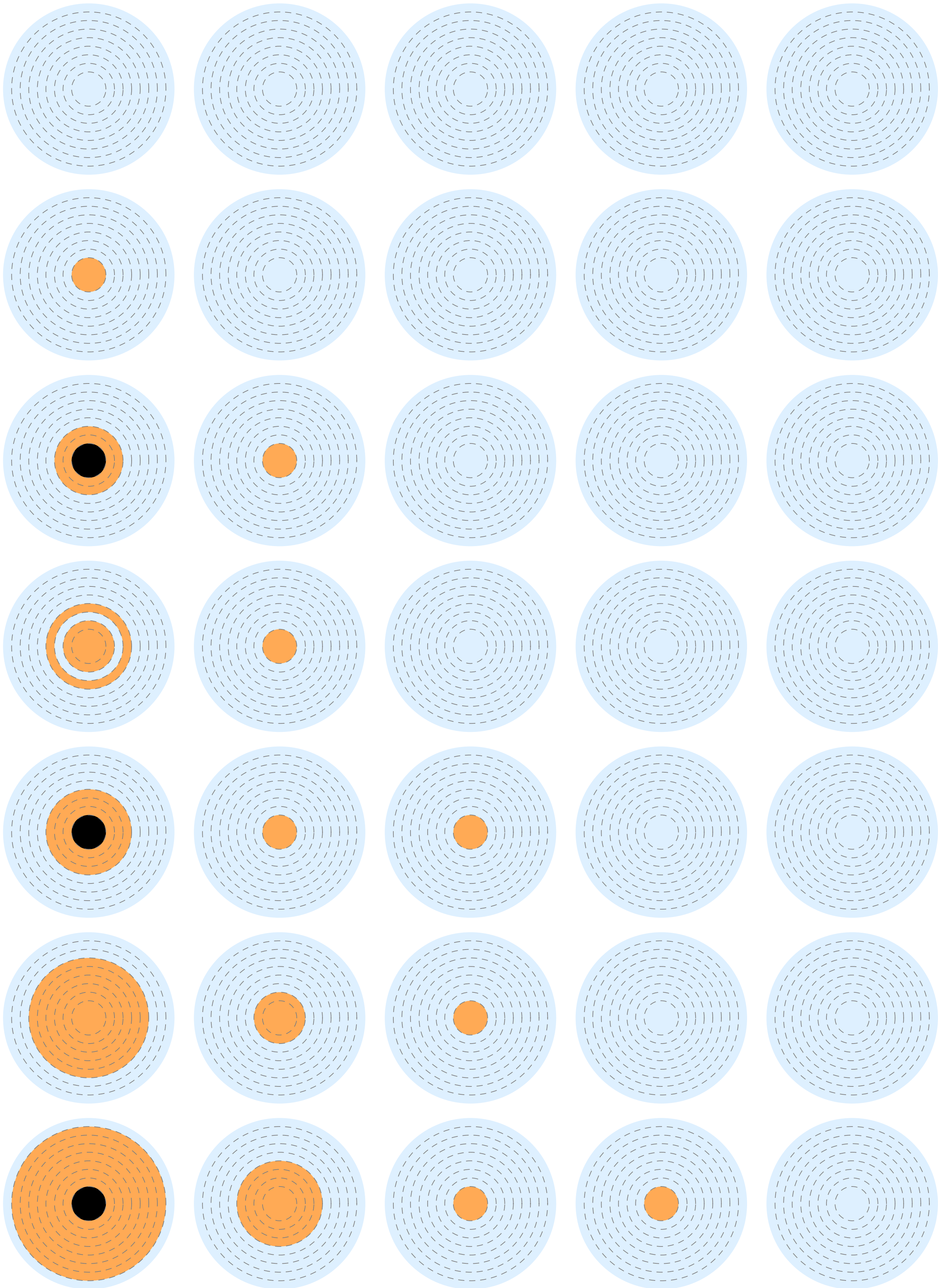
3.1 Butterworth



3.2 Chebyshev 1



3.3 Chebyshev 2



3.4 Eliptyczny