Métodos Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Antecedentes.

La siguiente ecuación basada en la segunda ley de Newton, para calcular la velocidad v del paracaidista en caída como una función del tiempo t

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v$$

donde g es la constante gravitacional, m es la masa y c es el coeficiente de arrastre.

Tales ecuaciones, que se componen de una función desconocida y de sus derivadas, se conocen como ecuaciones diferenciales.

En esta, la cantidad que se está derivando, v, se conoce como variable dependiente. La cantidad con respecto a la cual v se está derivando, t, se conoce como variable independiente.

Cuando la función tiene una variable independiente, la ecuación se llama ecuación diferencial ordinaria *(o* EDO). Esto contrasta con una ecuación diferencial parcial (o EDP) que involucra dos o más variables independientes.

Franco Salcedo López.
2021

Métodos Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Antecedentes.

Las ecuaciones diferenciales se clasifican también en cuanto a su orden.

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v$$

EDO de PRIMER orden, ya que la derivada mayor es una primera derivada.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

EDO de SEGUNDO orden, ya que la derivada mayor es una segunda derivada.

Métodos Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Reducción de Orden.

Las ecuaciones de orden superior pueden reducirse a un sistema de ecuaciones de primer orden.

Esta EDO de SEGUNDO orden, se reduce a una de primer orden, así:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0$$

$$y=\frac{dx}{dt}$$

que al derivar con respecto a t se obtiene

$$\frac{dy}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{dy}{dt}+cy+kx=0$$

o

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{cy+kx}{m}$$

Esto genera un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden: así:

$$y=\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{cy+kx}{m}$$

Métodos Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Las EDO y la práctica en ingeniería

Las leyes fundamentales de la física: la mecánica, la electricidad y la termodinámica con frecuencia se basan en observaciones empíricas que explican las variaciones de las propiedades físicas y los estados de los sistemas. Las leyes, se expresan en términos de los cambios del espacio y del tiempo.

Tabla PT7.1 Ejemplos de las leyes fundamentales que se escriben en términos de la razón de cambio de variables (t = tiempo y x = posición).

Ley	Expresión matemática	Variables y parámetros
Segunda ley de Newton del movimiento	$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$	Velocidad (v), fuerza (F) y masa (m)
Ley del calor de Fourier	$q = -k'\frac{dT}{dx}$	Flujo de calor (q), conductividad térmica (k') y temperatura (T)
Ley de difusión de Fick	$J = -D\frac{dc}{dx}$	Flujo másico (J), coeficiente de difusión (D) y concentración (c)
Ley de Faraday (caída de voltaje a través de un inductor)	$\Delta V_L = L\frac{di}{dt}$	Caída de voltaje (ΔV_L), inductancia (L) y corriente (i)

Métodos Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Las EDO y la práctica en ingeniería

Estas leyes definen mecanismos de cambio. Cuando se combinan con las leyes de conservación de la energía, masa o momentum, resultan ecuaciones diferenciales.

La integración subsecuente de estas ecuaciones diferenciales origina funciones matemáticas que describen el estado espacial y temporal de un sistema en términos de variaciones de energía, masa o velocidad

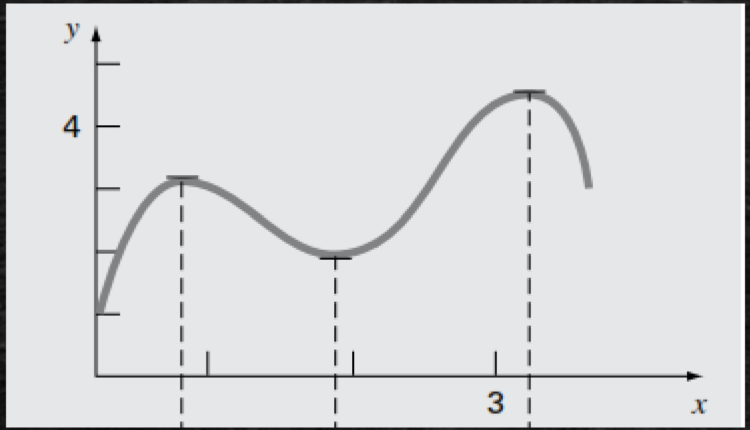
Sin embargo, muchas de las ecuaciones diferenciales de importancia práctica NO se pueden resolver utilizando los métodos analíticos de cálculo. Así que acudimos a los métodos numéricos para obtener su solución

Métodos Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Ejemplo

La solución de una ecuación diferencial ordinaria es una función en términos de la variable independiente y de parámetros que satisfacen la ecuación diferencial original.
Por ejemplo, consideremos la siguiente función:

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$$



Franco Salcedo López.
2021

Métodos Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Ejemplo

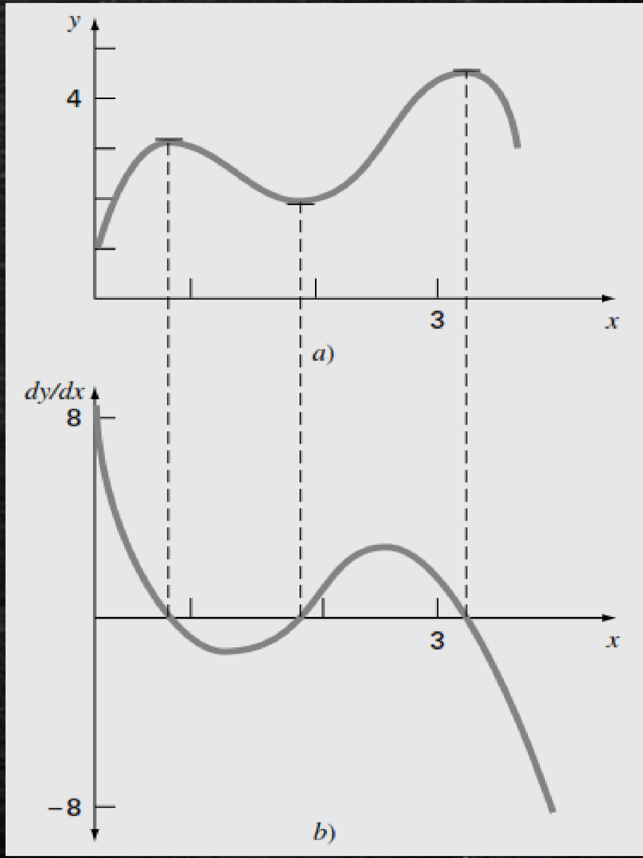
Derivando esta ecuación con respecto de x,
se obtiene una EDO

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

Esta ecuación también describe el comportamiento del polinomio, pero de una manera diferente.

da la razón de cambio de y con respecto a x (es decir, la pendiente) para cada valor de x

Observe cómo el valor cero en la derivada corresponde al punto en el cual la función original es plana; es decir, tiene una pendiente cero. Note también que los valores absolutos máximos de la derivada están en los extremos del intervalo donde las pendientes de la función son mayores



Métodos Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Ejemplo

Aunque es posible determinar una ecuación diferencial dando la función original, en esencia el objetivo es determinar la función original dada la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

$$y = \int (-2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5)\, dx$$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + C$$

la cual es idéntica a la función original con una notable excepción. En el proceso de la diferenciación y después en la integración, se pierde el valor constante de 1 en la ecuación original y ganamos el valor C. Esta C es llama constante de integración, que hace que la SOLUCIÓN NO ES ÚNICA. Se genera una familia de soluciones

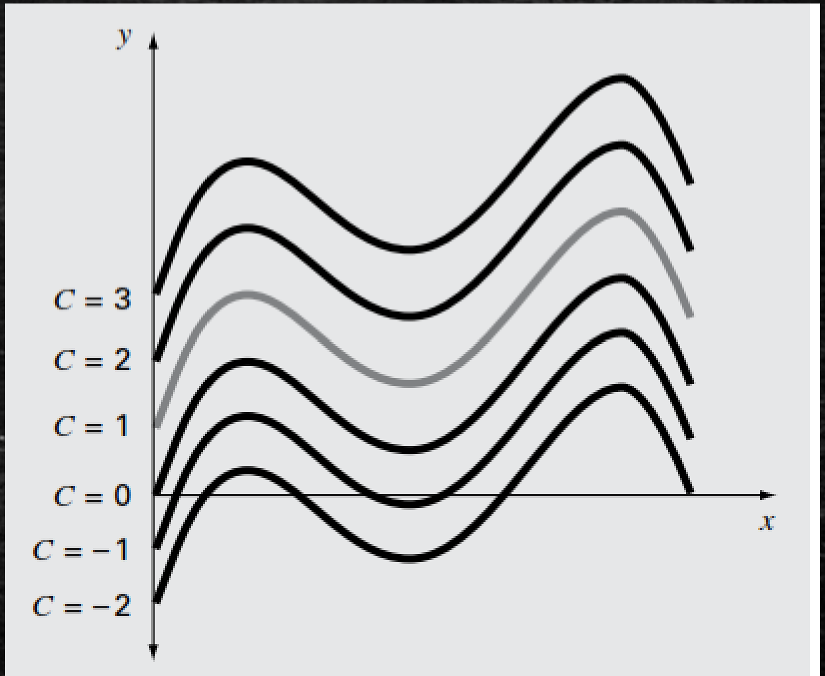
Franco Salcedo López.
2021

Métodos Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Ejemplo

La figura muestra seis funciones posibles que satisfacen la ecuación

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + C$$



Para especificar la solución por completo, la ecuación diferencial usualmente se encuentra acompañada por condiciones auxiliares.

Para las EDO de primer orden, se requiere un tipo de condición auxiliar, llamada valor inicial, para determinar la constante y obtener una solución única.

Métodos Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Ejemplo

Por ejemplo: si la condición inicial es y(0) = 1   (x=0)

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + C$$

$$1 = -0.5(0)^4 + 4(0)^3 - 10(0)^2 + 8.5(0) + C$$

$$C = 1$$

Por consiguiente, la solución única que satisface tanto a la ecuación diferencial como la condición inicial especificada se obtiene al sustituir C = 1 en la ecuación

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$$

Franco Salcedo López.
2021

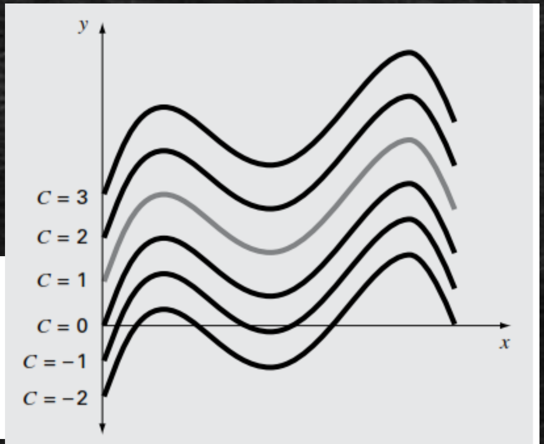
Métodos Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

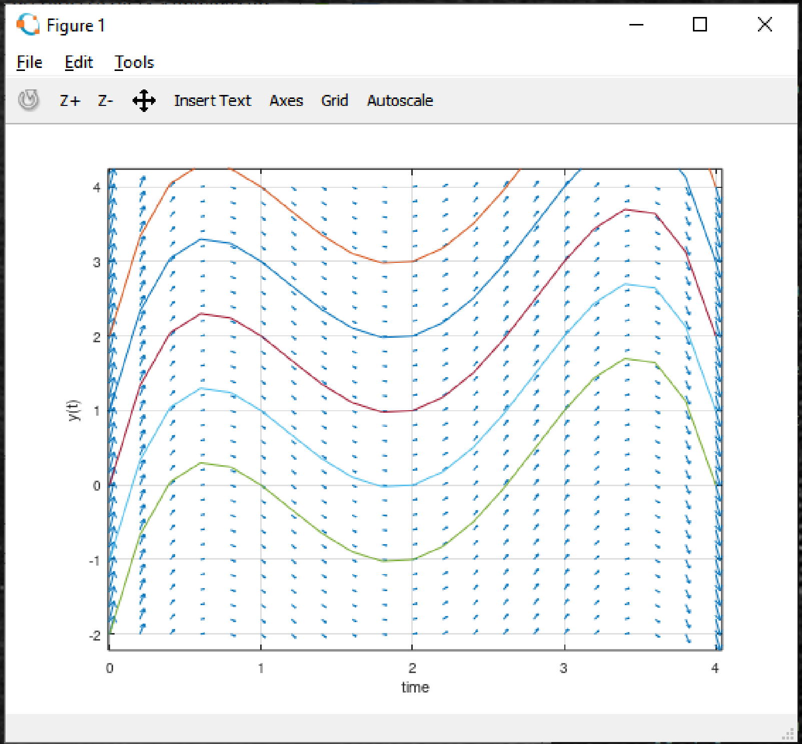
Ejemplo

Por ejemplo: si la condición inicial es y(0) = 1   (x=0)

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + C$$

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$$





Franco Salcedo López.
2021

Métodos Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Métodos de Runge - Kutta

Permiten dar solución a ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Los métodos numéricos, que estudiaremos para resolver una ecuación como la anterior, tiene la forma general:

Nuevo valor = valor anterior + pendiente × tamaño de paso

o, en términos matemáticos,

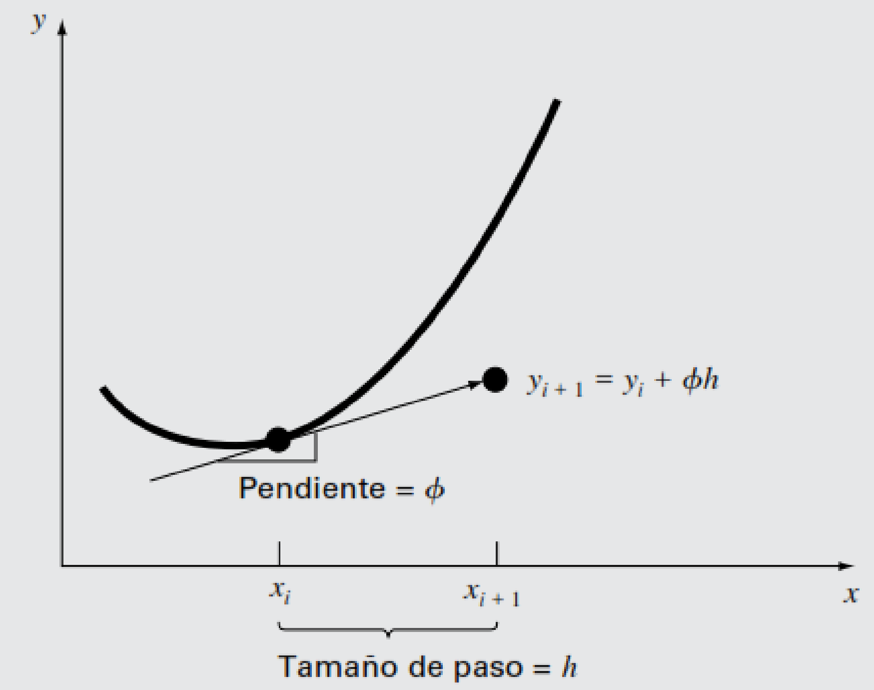
$$y_{i+1} = y_i + \phi h$$

Métodos Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Métodos de Runge - Kutta

La pendiente estimada ϕ se usa para extrapolar desde un valor anterior y_i a un nuevo valor y_{i+1} en una distancia h (figura).:

$$y_{i+1} = y_i + \phi h$$



Esta fórmula se aplica paso a paso para calcular un valor posterior y, por lo tanto, para trazar la trayectoria de la solución.

Todos los métodos de un paso, tan sólo van a diferir en la manera en la que se estima la pendiente. El procedimiento más simple consiste en usar la ecuación diferencial, para estimar la pendiente, en la forma de la primera derivada en x_i, es decir, se toma la pendiente al inicio del intervalo como una aproximación de la pendiente promedio sobre todo el intervalo. Tal procedimiento se denomina,***método de Euler***,

Franco Salcedo López.
2021