Unidad No.
Polinomio de interpolación de Newton en Polinomio Newton Dif FINITAS

Polinomio Newton Dif FINITAS

Cuando la distancia, entre dos argumentos consecutivos cualesquiera es la misma a lo largo de la tabla, el polinomio de Newton en diferencias divididas puede expresarse de manera más sencilla.

Para ello, introducimos nuevos parámetros **S**, definido

$$\boxed{x = x_0 + sh}$$

h → distancia, entre dos argumentos consecutivos

con el cual se puede expresar el producto del polinomio de Newton en Diferencias Divididas

$$\boxed{\prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i)}$$

$$\boxed{p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i)}$$

, en términos de ***s*** y ***h***

Unidad No.4
Polinomio Newton Dif FINITAS

Polinomio Newton Dif FINITAS

Para esto, se tiene que:

$$x_1 - x_0 = h,$$

$$x_2 - x_0 = 2h,$$

$$\ldots$$

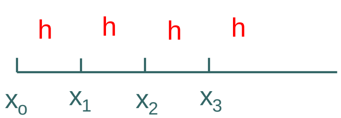
$$x_i - x_0 = ih$$

Restando x_i (0 <= i <= n)por ambos lados en:

s → *1,2,3 ….. i*

$$x = x_0 + sh,$$

$$x - x_i = \underline{x_0 - x_i} + sh = \underline{-ih} + sh = h(s - i) \qquad \text{para } (0 \le i \le n)$$



Si *i=0* ----------- > x – x_0 = h(s)

Si *i=1* ----------- > x – x_1 = h(s - 1)

Si *i=2* ----------- > x – x_2 = h(s - 2)

Si *i=2* ----------- > ……..

Unidad No.4
Polinomio Newton Dif FINITAS

Polinomio Newton Dif FINITAS

Si $i=0$ ------------ > $x - x_0 = h(s)$
Si $i=1$ ------------ > $x - x_1 = h(s - 1)$
Si $i=2$ ------------ > $x - x_2 = h(s - 2)$

$(x-x_0)\ (x-x_1) = h(s)\ h(s-1) = h^2(s-1)$
$(x-x_0)\ (x-x_1)\ (x-x_2) = h(s)\ h(s-1)\ h(s-2) = h^3(s-1)\ (s-2)$
....
$(x-x_0)\ (x-x_1)\ (x-x_2)\ \ldots\ (x-x_n) = h(s)\ h(s-1)\ h(s-2)\ldots\ h(s-n) = h^n(s-1)\ (s-2)\ldots(s-n)$

Si esto, reemplazamos en el polinomio de Newton en Dif Divididas:

$$\boxed{p_n(x) = a_0 + a_1\,(x-x_0) + a_2\,(x-x_0)\,(x-x_1) + \ldots + a_n\,(x-x_0)\,(x-x_1)\,\ldots\,(x-x_{n-1})}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= f[x_0] \\ a_1 &= f[x_0, x_1] \\ a_2 &= f[x_0, x_1, x_2] \\ &\ \ \vdots \\ a_n &= f[x_0, x_1, x_2, \ldots , x_n] \end{aligned}$$

Entonces, se tiene:

$x = x_0 + sh,$

$$\boxed{\begin{aligned} p_n(x) = p_n(x_0 + sh) &= f[x_0] + hs\,f[x_0, x_1] + h^2 s(s-1)\,f[x_0, x_1, x_2] \\ &+ h^3\,s(s-1)(s-2) f[x_0, x_1, x_2, x_3] + \ldots \\ &+ h^n\,s(s-1)(s-2)\,\ldots\,(s-(n-1))\,f[x_0, x_1, \ldots x_n] \end{aligned}}$$

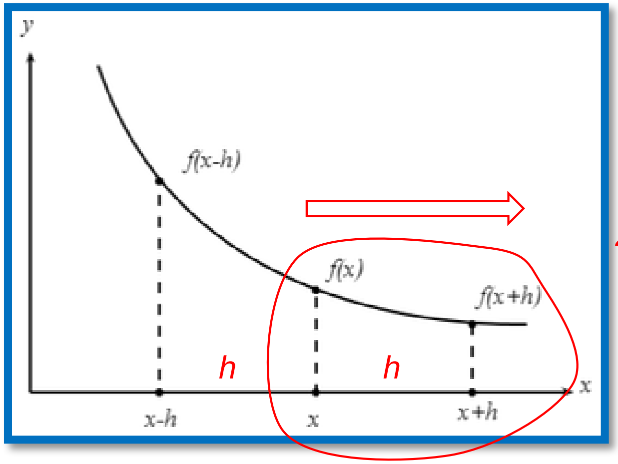
O en forma compacta:

$$\boxed{p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\,h^k \prod_{i=0}^{k-1} (s-i)}$$

Unidad No.4
Polinomio Newton Dif FINITAS

Polinomio Newton Dif FINITAS

Esta última ecuación puede simplificarse aún más si se introduce el *operador lineal Δ,* conocido como operador lineal en diferencias finitas hacia adelante y definido sobre f (x) como:



1era Diferencia finite hacia adelante →

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

2da Diferencia finite hacia adelante

$$\begin{aligned}\Delta\left(\Delta f(x)\right) &= \Delta^2 f(x) = \Delta\left(f(x+h) - f(x)\right)\\ &= \Delta f(x+h) - \Delta f(x)\\ &= f(x+h+h) - f(x+h) - f(x+h) + f(x)\\ &= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)\end{aligned}$$

Diferencias finita hacia adelante de orden superior

$$\Delta^i f(x) = \Delta\left(\Delta^{i-1} f(x)\right)$$

Unidad No.4
Polinomio Newton Dif FINITAS

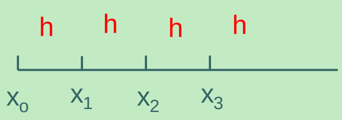
Polinomio Newton Dif FINITAS

Al aplicar Δ al primer valor funcional f $[x_0]$ de una tabla se tiene

$$\boxed{\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)}$$

$$\Delta f(x_0) = f(x_0+h) - f(x_0)$$

$$\Delta f(x_0) = f[x_1] - f[x_0] = h\, f[x_0, x_1]$$



$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

h

Ya que:

$$h\, f[x_0, x_1] = f[x_1] - f[x_0]$$

Entonces:

$$\boxed{f[x_0, x_1] = \frac{1}{h} \Delta f(x_0)}$$

Unidad No.4
Polinomio Newton Dif FINITAS

Polinomio Newton Dif FINITAS

Del mismo modo:

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{\dfrac{f[x_2] - f[x_1]}{h \;\; x_2 - x_1} - \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{h \;\; x_1 - x_0}}{2h \;\; x_2 - x_0} = \frac{f[x_2] - 2f[x_1] + f[x_0]}{2\, h^2}$$

Quedando:

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{1}{2h^2} \Delta^2 f(x_0)$$

$$\begin{aligned} \Delta\,(\Delta f(x)) &= \Delta^2 f(x) = \Delta\,(f(x+h) - f(x)) \\ &= \Delta f(x+h) - \Delta f(x) \\ &= f(x+h+h) - f(x+h) - f(x+h) + f(x) \\ &= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) \end{aligned}$$

GENERALIZANDO:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{1}{n!\; h^n} \Delta^n f(x_0)$$

Unidad No.4
Polinomio Newton Dif FINITAS

Polinomio Newton Dif FINITAS

Consecuentemente, al sustituir f $[x_0, x_1, \ldots x_n]$, ($0 <= i <= n$) en términos de diferencias finitas, la ecuación

$$\boxed{\begin{aligned} p_n(x) = p_n(x_0 + sh) &= f[x_0] + hs\, f[x_0, x_1] + h^2 s(s-1)\, f[x_0, x_1, x_2] \\ &+ h^3 s(s-1)(s-2) f[x_0, x_1, x_2, x_3] + \ldots \\ &+ h^n s(s-1)(s-2) \ldots (s-(n-1))\, f[x_0, x_1, \ldots x_n] \end{aligned}}$$

Se tiene:

$$\boxed{\begin{aligned} p_n(x) = p_n(x_0 + sh) = f[x_0] + s\Delta f[x_0] + \frac{s(s-1)}{2!} \Delta^2 f[x_0] + \\ + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!} \Delta^3 f[x_0] + \ldots \\ + \frac{s(s-1)(s-2) \ldots (s-(n-1))}{n!} \Delta^n f[x_0] \end{aligned}}$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{1}{h} \Delta f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{1}{2h^2} \Delta^2 f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{1}{n!\, h^n} \Delta^n f(x_0)$$

Con lo que encontramos el polinomio de Newton en diferencias finitas hacia adelante

Unidad No.4
Polinomio Newton Dif FINITAS

Polinomio Newton Dif FINITAS

La siguiente tabla proporciona las presiones de vapor en lb/plg² a diferentes temperaturas para el 1-3 butadieno

Puntos	0	1	2	3	4	5
T °F	50	60	70	80	90	100
P lb/plg²	24.94	30.11	36.05	42.84	50.57	59.30

h = 10

Aproxime la función tabulada por el polinomio de Newton en diferencias hacia adelante e interpole la presión a la temperatura de 64 °F.

Unidad No.4
Polinomio Newton Dif FINITAS

Polinomio Newton Dif FINITAS

Solución

Primero se construye la tabla de diferencias hacia adelante

Punto	x_i	$f[x_i]$	$\Delta f[x_i]$	$\Delta^2 f[x_i]$	$\Delta^3 f[x_i]$	$\Delta^4 f[x_i]$
0	50	24.94				
			$\Delta f[x_0] = 5.17$			
1	60	30.11		$\Delta^2 f[x_0] = 0.77$		
			$\Delta f[x_1] = 5.94$		$\Delta^3 f[x_0] = 0.08$	
2	70	36.05		$\Delta^2 f[x_1] = 0.85$		$\Delta^4 f[x_0] = 0.01$
			$\Delta f[x_2] = 6.79$		$\Delta^3 f[x_1] = 0.09$	
3	80	42.84		$\Delta^2 f[x_2] = 0.94$		$\Delta^4 f[x_1] = -0.03$
			$\Delta f[x_3] = 7.73$		$\Delta^3 f[x_2] = 0.06$	
4	90	50.57		$\Delta^2 f[x_3] = 1.00$		
			$\Delta f[x_4] = 8.73$			
5	100	59.30				

Unidad No.4
Polinomio Newton Dif FINITAS

Polinomio Newton Dif FINITAS

Observe que en esta información, $h=10$, el valor por interpolar es 64 y que el valor de s se obtiene de la expresión $x = x_0 + sh$; esto es

$$s = \frac{x - x_0}{h} = \frac{64 - 50}{10} = 1.4$$

Si se deseara aproximar con un polinomio de primer grado, se tomarían sólo los dos primeros términos de la ecuación

$$p_n(x) = p_n(x_0 + sh) = f[x_0] + s\Delta f[x_0] + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f[x_0] + $$
$$+ \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f[x_0] + \dots$$
$$+ \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-(n-1))}{n!}\Delta^n f[x_0]$$

Osea:

$$p(x) = f[x_0] + s\,\Delta f[x_0] = 24.94 + 1.4(5.17) = 32.18$$

Unidad No.4
Polinomio Newton Dif FINITAS

Polinomio Newton Dif FINITAS

ya que el valor de x=64 queda fuera del intervalo de los puntos que se usaron para formar el polinomio de aproximación, *utilizando como pivote del polinomio a X_0*

Para poder aplicar los puntos 1 y 2, en los que si se encuentra x=64, debe modificarse la ecuación utilizando como pivote X_1

$$p_n(x) = f[x_1 + sh] = f[x_1] + s\Delta f[x_1] + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f[x_1] + \ldots + \frac{s(s-1)\ldots(s-(n-1))}{n!}\Delta^n f[x_1]$$

Quedando:

$$p(x) = f[x_1] + s\Delta f[x_1], \text{ donde ahora } s = \frac{x - x_1}{h} = \frac{64 - 60}{10} = 0.4$$

Unidad No.4

Polinomio Newton Dif FINITAS

Polinomio Newton Dif FINITAS

al sustituir valores de la tabla se tiene

$$f(64) \approx p(64) = 30.11 + 0.4(5.94) = 32.49$$

Corresponde al siguiente valor
$\Delta f(x_1)$

En cambio, si se deseara aproximar con un polinomio de segundo grado, se requerirían tres puntos y sería aconsejable tomar (0), (1) y (2), en lugar de (1), (2) y (3), ya que el argumento por interpolar está más al centro de los primeros.

Quedando:

$$p_2(x) = f[x_0] + s\Delta f[x_0] + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f[x_0]$$

$$s = \frac{x - x_0}{h} = \frac{64 - 50}{10} = 1.4$$

$$p_2(64) = 24.94 + 1.4(5.17) + \frac{1.4(1.4-1)}{2!}0.77 = 32.39$$