Unidad No.
Polinomio de interpolación de Newton en diferencias divididas

Polinomio de interpolación de Newton en diferencias divididas

$$
\begin{aligned}
f_n(x) = f(x_0) &+ (x - x_0)\, f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)\, f[x_2, x_1, x_0] \\
&+ \cdots + (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})\, f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0]
\end{aligned}
$$

i	x_i	$f(x_i)$	Primero	Segundo	Tercero
0	x_0	$f(x_0)$	$f[x_1, x_0]$	$f[x_2, x_1, x_0]$	$f[x_3, x_2, x_1, x_0]$
1	x_1	$f(x_1)$	$f[x_2, x_1]$	$f[x_3, x_2, x_1]$	
2	x_2	$f(x_2)$	$f[x_3, x_2]$		
3	x_3	$f(x_3)$			

Franco H. Salcedo L. 2020

Unidad No.4
Diferencias divididas

Diferencias divididas

La derivada en el punto x_0 de una función analítica f (x) es:

$$f'(x)\Big|_{x=x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Pero, cuando la función está en forma tabular:

Puntos	0	1	2	...	n
x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$

La derivada sólo puede obtenerse aproximadamente.

Unidad No.4
Diferencias divididas

Diferencias divididas

Por ejemplo, si se desea la derivada en el punto x, ($x_0 < x < x_1$), puede estimarse como sigue

Puntos	0	1	2	...	n
x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$

$$f'(x) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \quad x_0 < x < x_1$$

El lado derecho de la expresión, se conoce como la primera diferencia dividida de f (x) respecto a los argumentos x_0 y x_1, y generalmente se denota como f [x_0 ,x_1] ; así:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Unidad No.4
Diferencias divididas

Diferencias divididas

Para obtener aproximaciones de derivadas de orden más alto, se extiende el concepto de diferencias divididas a órdenes más altos como se ve en la tabla

Información		**Diferencias divididas**			
x	$f(x)$	**Primeras**	**Segundas**	**Terceras**	...
x_0	$f[x_0]$				
		$f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$		
		$f[x_1, x_2] = \dfrac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$	...
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$		
		$f[x_2, x_3] = \dfrac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \dfrac{f[x_2, x_3, x_4] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_1}$	...
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4] = \dfrac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2}$		
		$f[x_3, x_4] = \dfrac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3}$		$f[x_2, x_3, x_4, x_5] = \dfrac{f[x_3, x_4, x_5] - f[x_2, x_3, x_4]}{x_5 - x_2}$	...
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3, x_4, x_5] = \dfrac{f[x_4, x_5] - f[x_3, x_4]}{x_5 - x_3}$		
		$f[x_4, x_5] = \dfrac{f[x_5] - f[x_4]}{x_5 - x_4}$			
x_5	$f[x_5]$				

Unidad No.4
Diferencias divididas

Diferencias divididas

Por lo tanto la diferencia de *orden i* sería:

$$f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_i] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_i] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}]}{x_i - x_0}$$

Observando lo siguiente:

- Para formarla se requieren *i + 1* puntos.
- El numerador es la resta de dos diferencias de orden *i – 1*
- El denominador la resta de los argumentos no comunes en el numerador.

Unidad No.4
Diferencias divididas

Diferencias divididas

Ejemplo: Elaborar la Tabla de Diferencias divididas, a partir de los siguientes datos dados en forma tabular:

Puntos	0	1	2	3	4	5
x	–2	–1	0	2	3	6
$f(x)$	–18	–5	–2	–2	7	142

Unidad No.4
Diferencias divididas

Puntos	0	1	2	3	4	5
x	−2	−1	0	2	3	6
$f(x)$	−18	−5	−2	−2	7	142

Información		Diferencias divididas			
x	$f(x)$	Primeras	Segundas	Terceras	...
x_0	$f[x_0]$				
		$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2]-f[x_0, x_1]}{x_2-x_0}$		
		$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3]-f[x_0, x_1, x_2]}{x_3-x_0}$	...
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3]-f[x_1, x_2]}{x_3-x_1}$		
		$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_2, x_3, x_4]-f[x_1, x_2, x_3]}{x_4-x_1}$	...
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_3, x_4]-f[x_2, x_3]}{x_4-x_2}$		
		$f[x_3, x_4] = \frac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$		$f[x_2, x_3, x_4, x_5] = \frac{f[x_3, x_4, x_5]-f[x_2, x_3, x_4]}{x_5-x_2}$	...
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3, x_4, x_5] = \frac{f[x_4, x_5]-f[x_3, x_4]}{x_5-x_3}$		
		$f[x_4, x_5] = \frac{f[x_5]-f[x_4]}{x_5-x_4}$			
x_5	$f[x_5]$				

Diferencias divididas

diferencias divididas mediante los puntos (0), (1)

$$f[x_0, x_1] = \frac{-5-(-18)}{-1-(-2)} = 13$$

diferencias divididas mediante los puntos (1), (2)

$$f[x_1, x_2] = \frac{-2-(-5)}{0-(-1)} = 3$$

La segunda diferencia dividida mediante los puntos (0), (1) y (2)

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{3-13}{0-(-2)} = -5$$

Unidad No.4
Diferencias divididas

Diferencias divididas

Puntos	x	$f(x)$	1er orden	2do orden	3er orden	4º orden
0	−2	−18				
			13			
1	−1	−5		−5		
			3		1	
2	0	−2		−1		0
			0		1	
3	2	−2		3		0
			9		1	
4	3	7		9		
			45			
5	6	142				

Notemos: que las diferencias divididas de cuarto orden son todas cero, lo cual concuerda con que la tercera y cuarta derivada de un polinomio de tercer grado.
si al construir una tabla de diferencias divididas en alguna de las columnas el valor es constante (y en la siguiente columna es cero), la información proviene de un polinomio de grado igual al orden de las diferencias que tengan valores constantes.

```
x=[-2 -1 0 2 3 6]
fx=[-18 -5 -2 -2 7 142]
```

```
>> m=DifDiv(x,fx)
m =

  -2   -18   NaN   NaN   NaN   NaN   NaN
  -1    -5    13   NaN   NaN   NaN   NaN
   0    -2     3    -5   NaN   NaN   NaN
   2    -2     0    -1     1   NaN   NaN
   3     7     9     3     1     0   NaN
   6   142    45     9     1     0     0
```