METODO DE GAUSS-JORDAN

Franco Salcedo López.
2020

INTRODUCCIÓN

La solución de los sistemas de ecuaciones encuentra una amplia aplicación en la ciencia y la tecnología. En particular, se puede afirmar, que en cualquier rama de la ingeniería existe al menos una aplicación que requiera del planteamiento y solución de tales sistemas. Es por eso que en esta presentación nos enfocamos en aquel método que sirve para resolver sistemas de ecuaciones expresados en matrices, operando con sus filas y columnas. Sin mas que decir, empezaremos con el recorrido de esta temática.

METODO DE GAUSS

Resolver un sistema consiste en encontrar los valores de todas las incógnitas para los cuales se verifican todas las ecuaciones que conforman el sistema. Si alguna de las ecuaciones no se verifica, entonces no se trata de una solución. El método de eliminación de Gauss, consiste simplemente en realizar operaciones elementales fila o columna sobre la matriz ampliada del sistema hasta obtener la forma escalonada o escalonada reducida (Gauss-Jordan).

METODO DE GAUSS-JORDAN

Consiste en hacer transformaciones elementales en las filas de la matriz para llegar a obtener la matriz identidad. Realizando estas mismas transformaciones con la matriz identidad llegamos a la matriz A^{-1}.

Franco Salcedo López.
2020

¿GAUSS Y GAUSS-JORDAN?

La diferencia entre los métodos de Gauss y de Gauss-Jordan es que el primero finaliza al obtener un sistema equivalente en forma escalonada, mientras que el segundo finaliza al obtener un sistema equivalente en forma escalonada reducida.

Franco Salcedo López.
2020

METODO DE GAUSS- JORDAN PARA RESOLVER UN SISTEMA DE M ECUACIONES Y N ICOGNITAS:

Este método sirve para encontrar todas las soluciones (si estas existen) de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Al hacerlo se verá que, igual que en el caso de 2 x 2, tales sistemas o bien no tienen solución, tienen una solución o tienen un número infinito de soluciones. Se verán algunos ejemplos sencillos antes de llegar al método general . Como variables, se usarán X1 , X2 , X3 , etc., en lugar de x, y, z, . . . porque la generalización es más sencilla si se usa la notación con subíndices

EJEMPLO:

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned} \qquad (1)$$

En este caso se buscan tres números x_1, x_2, x_3, tales que las tres ecuaciones en (1) se satisfagan. El método de solución que se estudiará será el de simplificar las ecuaciones como se hizo en la sección 1.2, de manera que las soluciones se puedan identificar de inmediato. Se comienza por dividir la primera ecuación entre 2. Esto da

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned} \qquad (2)$$

Como se vio en la sección 1.2, al sumar dos ecuaciones se obtiene una tercera ecuación correcta. Esta nueva ecuación puede sustituir a cualquiera de las dos ecuaciones del sistema que se usaron para obtenerla. Primero se simplifica el sistema (2) multiplicando ambos lados de la primera ecuación de (2) por -4 y sumando esta nueva ecuación a la segunda. Esto da

EJEMPLO:

$$
\begin{array}{r}
-4x_1 - 8x_2 - 12x_3 = -36 \\
4x_1 + 5x_2 + \ \ 6x_3 = 24 \\
\hline
-3x_2 - \ \ 6x_3 = -12
\end{array}
$$

La ecuación $-3x_2 - 6x_3 = -12$ es la nueva segunda ecuación y el sistema ahora es

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\
-3x_2 - 6x_3 &= -12 \\
3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4
\end{aligned}
$$

Nota. Como se puede ver por el desarrollo anterior, se ha *sustituido* la ecuación $4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24$ por la ecuación $-3x_2 - 6x_3 = -12$. En este ejemplo y otros posteriores se sustituirán ecuaciones con otras más sencillas hasta obtener un sistema cuya solución se pueda identificar de inmediato.

Entonces, la primera ecuación se multiplica por -3 y se suma a la tercera, lo que da por resultado:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\
-3x_2 - 6x_3 &= -12 \\
-5x_2 - 11x_3 &= -23
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

Observe que en el sistema (3) se ha eliminado la variable x_1 de la segunda y tercera ecuaciones. Después se divide la segunda ecuación por -3:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\
x_2 + 2x_3 &= 4 \\
-5x_2 - 11x_3 &= -23
\end{aligned}
$$

Tomado de: Álgebra lineal por Stanley Grossman 6 edición en español.

EJEMPLO:

Se multiplica la segunda ecuación por -2 y se suma a la primera; después se multiplica la segunda ecuación por 5 y se suma a la tercera:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - \quad x_3 &= 1 \\ x_2 + \ 2x_3 &= 4 \\ - \quad x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Ahora se multiplica la tercera ecuación por -1:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - \quad x_3 &= 1 \\ x_2 + \ 2x_3 &= 4 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Por último, se suma la tercera ecuación a la primera y después se multiplica la tercera ecuación por -2 y se suma a la segunda para obtener el siguiente sistema, el cual es equivalente al sistema (1):

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 4 \\ x_2 \qquad &= -2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Tomado de: Algebra lineal por Stanley Grossman 6 edición en español.

Ésta es la solución única para el sistema. Se escribe en la forma (4, -2, 3). El método que se usó se conoce como eliminación de Gauss-Jordan.

En resumen, lo que se hizo en éste:

1) Se dividió la primera ecuación, entre una constante, para hacer el coeficiente de x1 igual a 1.

2) Se "eliminaron" los términos en x1 de la segunda y tercera ecuaciones. Esto es, los coeficientes de estos términos se hicieron cero al multiplicar la primera ecuación por las constantes adecuadas y sumándola a la segunda y tercera ecuaciones, respectivamente, de manera que al sumar las ecuaciones una de las incógnitas se eliminaba.

3) Se dividió la segunda ecuación entre una constante, para hacer el coeficiente de x2 igual a 1 y después se usó la segunda ecuación para "eliminar" los términos en x2 de la primera y tercera ecuaciones, de manera parecida a como se hizo en el paso anterior.

4) Se dividió la tercera ecuación entre una constante, para hacer el coeficiente de x3 igual a 1 y después se usó esta tercera ecuación para "eliminar" los términos de x3 de la primera y segunda ecuaciones.

Cabe resaltar el hecho de que, en cada paso, se obtuvieron sistemas equivalentes. Es decir, cada sistema tenía el mismo conjunto de soluciones que el precedente

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES HOMOGENEAS

Un sistema de ecuaciones lineales homogéneas es un sistema de la forma $Ax = 0$, esto es, con columna de constantes nula.

Todo sistema de ecuaciones lineales homogéneas es compatible, porque el vector cero es una de sus soluciones, llamada solución trivial. Para un sistema de ecuaciones lineales hay dos casos posibles:

(a) puede ser compatible determinado, esto es, tener solamente una solución (la trivial);

(b) puede ser compatible indeterminado, esto es, tener por lo menos una solución no trivial. En cada ejemplo hay que determinar cuál situación tiene caso y describir el conjunto de todas las soluciones

EJEMPLO:

3. Ejemplo. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneas:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & 0; \\ 8x_1 & - & 5x_2 & - & 4x_3 & + & x_4 & = & 0; \\ -2x_1 & + & x_2 & + & 6x_3 & + & 7x_4 & = & 0. \end{array}\right. .$$

Solución. La columna de constantes es nula y sigue siendo nula al aplicar operaciones elementales. Por eso no es necesario escribir la matriz aumentada, es suficiente trabajar con la matriz de coeficientes.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 8 & -5 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 6 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 *= \frac{1}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 1/3 & 4/3 \\ 8 & -5 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 6 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 += 2R_1]{R_2 += -8R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 1/3 & 4/3 \\ 0 & 1/3 & -20/3 & -29/3 \\ 0 & -1/3 & 20/3 & 29/3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 *= 3} \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 1/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & -20 & -29 \\ 0 & -1/3 & 20/3 & 29/3 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 += \frac{1}{3}R_2]{R_1 += \frac{2}{3}R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -13 & -18 \\ 0 & 1 & -20 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Franco Salcedo López.
2020

EJEMPLO:

Por ser un sistema de ecuaciones lineales *homogéneas*, el sistema es *compatible*. Como $r = 2$ y $n = 4$, es compatible *indeterminado*. Tenemos $n - r = 2$ variables libres. Los pivotes están en las columnas 1 y 2, por eso expresamos x_1 y x_2 a través de las variables x_3 y x_4:

$$\begin{cases} x_1 &= 13x_3 + 18x_4; \\ x_2 &= 20x_3 + 29x_4. \end{cases}$$

Solución general:

$$x = \begin{bmatrix} 13x_3 + 18x_4 \\ 20x_3 + 29x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \qquad x_3, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Notemos que la solución general se puede expandir en una *combinación lineal* de dos vectores constantes:

$$x = x_3 \begin{bmatrix} 13 \\ 20 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 18 \\ 29 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad x_3, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Se dice que los vectores

$$u_1 = \begin{bmatrix} 13 \\ 20 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad u_2 = \begin{bmatrix} 18 \\ 29 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO:

son *soluciones básicas* de este sistema de ecuaciones. Hay que hacer la comprabación para los vectores u_1 y u_2. La hacemos en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 8 & -5 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 & 18 \\ 20 & 29 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 39-40+1+0 & 54-58+0+4 \\ 104-100-4+0 & 144-145+0+1 \\ -26+20+6+0 & -36+29+0+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \checkmark \qquad \square$$

VEAMOS OTRO EJEMPLO:

4. Ejemplo.

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0; \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 0; \\ 6x_1 - x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Solución.

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & -3 \\ 6 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 6 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 += 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 9 & 7 \\ -2 & 4 & 5 \\ 6 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 += -6R_1]{R_2 += 2R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 0 & 22 & 19 \\ 0 & -55 & -38 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 *= 2} \begin{bmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 0 & 22 & 19 \\ 0 & -110 & -76 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 += 5R_2} \begin{bmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 0 & 22 & 19 \\ 0 & 0 & 19 \end{bmatrix}.$$

Ahora la matriz del sistema es escalonada, y el número de los renglones no nulos es $r = 3 = n$. Por eso el sistema es compatible determinado, esto es, la única solución es la trivial: $x = \mathbf{0}$.

En este ejemplo no hay sentido hacer la comprobación para $x = \mathbf{0}$. Sería más importante comprobar que la matriz del sistema en forma escalonada efectivamente tiene 3 renglones no nulos (en otras palabras, que *el rango del sistema* es igual a 3), pero en este momento del curso no tenemos métodos para comprobarlo. $\square$

VEAMOS OTRO EJEMPLO:

5. Ejemplo.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0; \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Solución.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 7 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 += -2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 *= \frac{1}{3}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{11}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 += -2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{34}{3} \\ 0 & 1 & \frac{11}{3} \end{bmatrix}.$$

Aquí $r = 2$, $n = 3$, $r < n$, por lo tanto el sistema es compatible indeterminado.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{34}{3}x_3; \\ x_2 = -\frac{11}{3}x_3. \end{cases}$$

La solución general se puede escribir en forma:

$$x = \begin{bmatrix} \frac{34}{3}x_3 \\ -\frac{11}{3}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{x_3}{3}\begin{bmatrix} 34 \\ -11 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad x_3 \in \mathbb{R}.$$