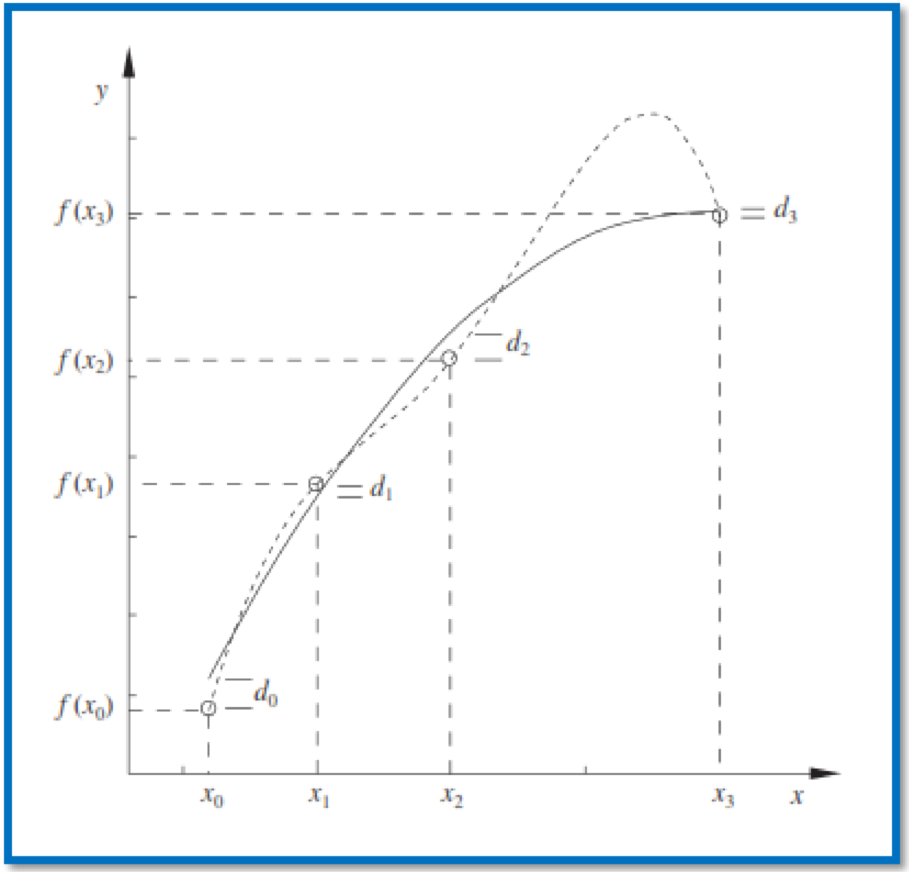
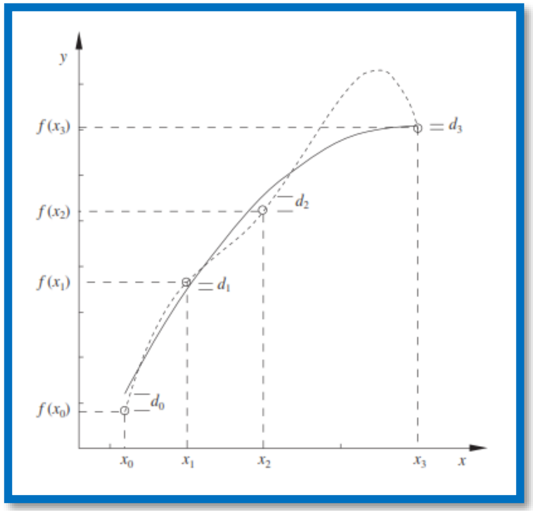
Unidad No.4
Aproximación funcional



Franco H. Salcedo L. 2020

Unidad No.4
Aproximación funcional

Puntos	0	1	2	...	n
x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$



Introducción

Sea una función f (x), dada en forma tabular, Para aproximar a f (x) por medio de un polinomio del tipo

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

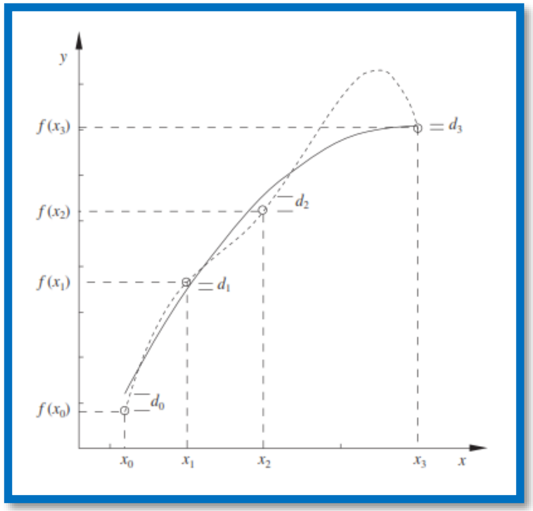
se aplica alguno de los criterios siguientes: el de ajuste exacto o el de mínimos cuadrados.

Ajuste Exacto: Consiste en encontrar una función polinomial que pase por los puntos dados en la tabla.
Mínimos cuadrados: Consiste en hallar un polinomio que pase entre los puntos y que satisfaga la condición de minimizar la suma de las desviaciones elevadas al cuadrado; es decir, que se cumpla

$$\sum_{i=0}^{n} (d_i)^2 = \text{mínimo}$$

Unidad No.4
Aproximación funcional

Puntos	0	1	2	...	n
x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$



Introducción

Cuando la información tabular de que se dispone es aproximada, se recomienda usar ajuste exacto.

Por otro lado, si la información tiene errores considerables, como en el caso de datos experimentales, no tiene sentido encontrar un polinomio que pase por esos puntos, sino más bien que pase entre los puntos, entonces que el método de mínimos cuadrados es aplicable.

Obtenido el polinomio de aproximación, éste puede usarse para obtener puntos adicionales a los existentes en la tabla, mediante su evaluación, lo que se conoce como interpolación, o extrapolación.

Unidad No.4
Aproximación funcional

Aproximación polinomial simple

Tabla 5.2 Temperatura de ebullición de la acetona a diferentes presiones.

Puntos	0	1	2	3
T (°C)	56.5	113.0	181.0	214.5
P (atm)	1	5	20	40

Aproximación Polinomial Simple

La interpolación es de gran importancia cuando no se tienen valores presentadas en forma tabular, ya que, con frecuencia no se encuentra el valor buscado como un punto en la tabla. Por ejemplo, las tablas 5.2 presenta la temperatura de ebullición de la acetona (C_3H_6O) a diferentes presiones.

Supongamos que se desea calcular la temperatura de ebullición de la acetona a 2 atm de presión.

Para empezar, se podría utilizar un polinomio de Grado 1:

$$p(x) = a_0 + a_1 x$$

Unidad No.4
Aproximación funcional

Aproximación polinomial simple

Tabla 5.2 Temperatura de ebullición de la acetona a diferentes presiones.

Puntos	0	1	2	3
T (°C)	56.5	113.0	181.0	214.5
P (atm)	1	5	20	40

Aproximación Polinomial Simple

Para resolver este problema, se sustituyen los puntos (0) y (1) de la Tabla 5.2 (Entre 1 atm y 5 atm), en la ecuación de la línea recta:

$$p\,(x) = a_0 + a_1 x$$

Lo que resultan dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$56.5 = a_0 + 1\,a_1$$

$$113 = a_0 + 5\,a_1$$

Métodos de solución:

- Inversa
- Reducción Gauss-Jordan
- Crammer-Determinantes

sistema que al resolverse da $a_0 = 42.375$ y $a_1 = 14.125$

Unidad No.4
Aproximación funcional

Aproximación polinomial simple

Tabla 5.2 Temperatura de ebullición de la acetona a diferentes presiones.

Puntos	0	1	2	3
T (°C)	56.5	113.0	181.0	214.5
P (atm)	1	5	20	40

Aproximación Polinomial Simple

sistema que al resolverse da $a_0 = 42.375$ y $a_1 = 14.125$

Que generan la ecuación:

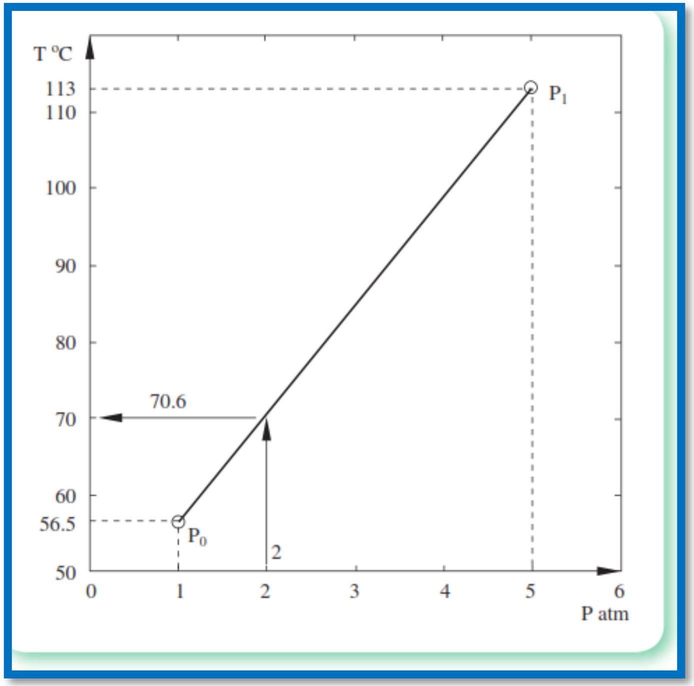
$$p\,(x) = a_0 + a_1 x$$

$$P(x) = 42.375 + 14.125\,x$$

Esta ecuación resultante puede emplearse para aproximar (interpolación) la temperatura cuando la presión es x = 2 atm, obteniéndose una temperatura de 70.6 °C.

Unidad No.4
Aproximación funcional

Aproximación polinomial simple

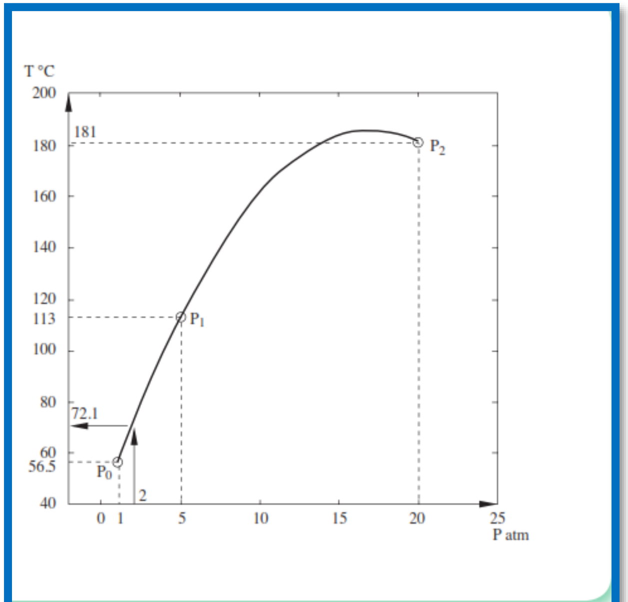


Aproximación Polinomial Simple

En realidad, esta interpolación sólo ha consistido en aproximar una función analítica desconocida [T = f (P)] dada en forma tabular, por medio de una línea recta que pasa por los puntos (0) y (1).

Unidad No.4
Aproximación funcional

Aproximación polinomial simple



Aproximación Polinomial Simple

Si se quisiera una aproximación mejor al valor "verdadero" de la temperatura buscada, podrían unirse más puntos de la tabla con una curva suave (sin picos), por ejemplo tres (0), (1), (2) y obtener T correspondiente a P = 2 atm.

Analíticamente, el problema se resuelve al aproximar la función desconocida [T = f (P)] con un polinomio que pase por los tres puntos (0), (1) y (2). Este polinomio es una parábola y tiene la forma general:

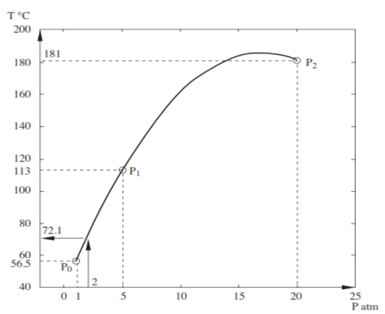
$$p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

Unidad No.4
Aproximación funcional

Aproximación polinomial simple

Tabla 5.2 Temperatura de ebullición de la acetona a diferentes presiones.

Puntos	0	1	2	3
T (°C)	56.5	113.0	181.0	214.5
P (atm)	1	5	20	40



Aproximación Polinomial Simple

Los parámetros a_0, a_1 y a_2, se determinan sustituyendo cada uno de los tres puntos conocidos en la ecuación

$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$\begin{aligned} 56.5 &= a_0 + a_1 1 + a_2 1^2 \\ 113 &= a_0 + a_1 5 + a_2 5^2 \\ 181 &= a_0 + a_1 20 + a_2 20^2 \end{aligned}$$

resolviendo el sistema se obtiene:

$$a_0 = 39.85, \qquad a_1 = 17.15, \qquad a_2 = -0.50482$$

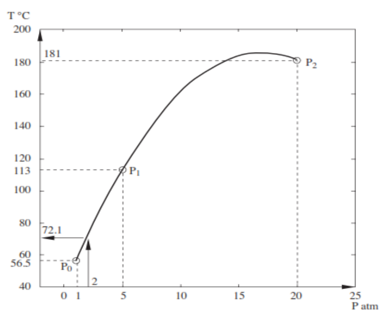
$$p_2(x) = 39.85 + 17.15x - 0.50482x^2$$

Unidad No.4
Aproximación funcional

Aproximación polinomial simple

Tabla 5.2 Temperatura de ebullición de la acetona a diferentes presiones.

Puntos	0	1	2	3
T (°C)	56.5	113.0	181.0	214.5
P (atm)	1	5	20	40



Aproximación Polinomial Simple

$$p_2(x) = 39.85 + 17.15x - 0.50482x^2$$

Si x = 2 atm, que es lo que nos interesa, entonces:

$$T \approx p_2(2) = 39.85 + 17.15(2) - 0.50482(2)^2 \approx 72.1\ °C$$

Unidad No.4
Aproximación funcional

Aproximación polinomial simple

Aproximación Polinomial Simple

Generalizando, se podría aproximar una función con un polinomio de grado n, se necesitan ***n + 1*** puntos, que sustituidos en la ecuación polinomial de grado ***n***

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

generan un sistema de ***n + 1*** ecuaciones lineales en las incógnitas a , i ***= 0, 1, 2…, n.***

Resolviendo el sistema se sustituyen los valores de ***a*** en la ecuación general, se obtiene el polinomio de aproximación. A este método se le conoce como ***aproximación polinomial simple***.

Unidad No.4
Aproximación funcional

Aproximación polinomial simple

Aproximación Polinomial Simple

Ejercicios:

T (°C)	0	10	20	30	40	50	60
p (atm.)	0.94	0.96	1.0	1.05	1.07	1.09	1.14
T (°C)	70	80	90	100			
p (atm.)	1.17	1.21	1.24	1.28			

Encontrar polinomios de grado 1, grado 2 y grado 3, y Obtener la temperatura para p=1.19 atm.

Unidad No.4
Aproximación funcional

Aproximación polinomial simple

Aproximación Polinomial Simple

Ejercicios:

Year	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Population (in thousands)	151,326	179,323	203,302	226,542	249,633	281,422

Encontrar polinomios de grado 1, grado 2 y grado 3,