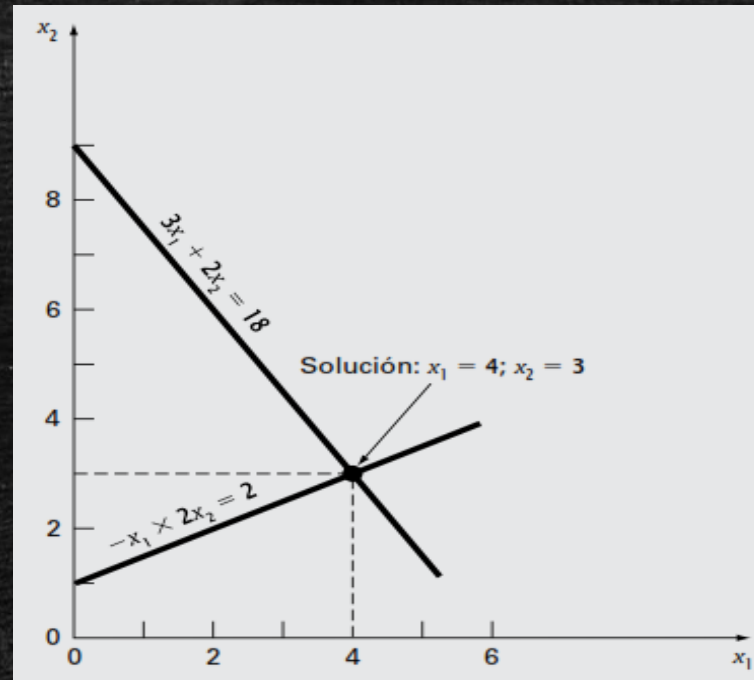


UNIDAD No. Sistemas de ecuaciones Lineales



1.1.1 – DEFINICIÓN: Una ecuación lineal es una ecuación polinómica de grado uno con una o varias incógnitas.

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n = b$$

coeficientes

incógnitas

Término independiente

1.1.2 – ECUACIONES EQUIVALENTES

Dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen la misma solución o soluciones.

“Si a los dos miembros de una ecuación los multiplicamos o dividimos por un mismo número, distinto de cero, la ecuación resultante es equivalente a la primera.”

$$2x + 4y = 6 \approx \begin{cases} 4x + 8y = 12 \\ x + 2y = 3 \\ \dots \end{cases}$$

1.1.3 – RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

Resolver una ecuación es hallar el valor o valores de las incógnitas que la cumplen.

Llamamos **grados de libertad** o de incertidumbre al número de incógnitas menos uno y es el número de parámetros que debemos utilizar para resolver la ecuación.

Solución general

$$2x = 5 \Rightarrow g.l = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow \exists! \text{ solución}$$

$$2x - y = 5 \Rightarrow g.l = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha - 5 \end{cases} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Existen infinitas soluciones}$$

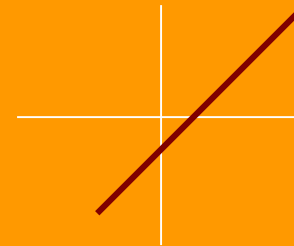
$$2x + 5y + z = 5 \Rightarrow g.l = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = 5 - 2\alpha - 5\beta \end{cases} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \text{ infinita soluciones}$$

Soluciones particulares: Dándoles valores a los parámetros obtenemos las soluciones particulares.

1.1.4 – INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

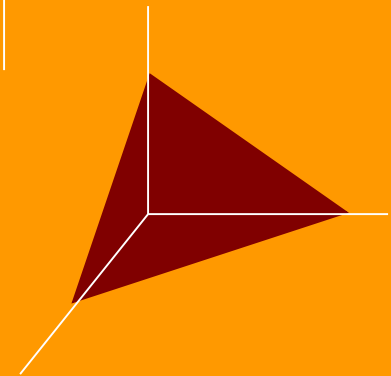
- Dos incógnitas: $ax + by = c$

Una recta en el plano



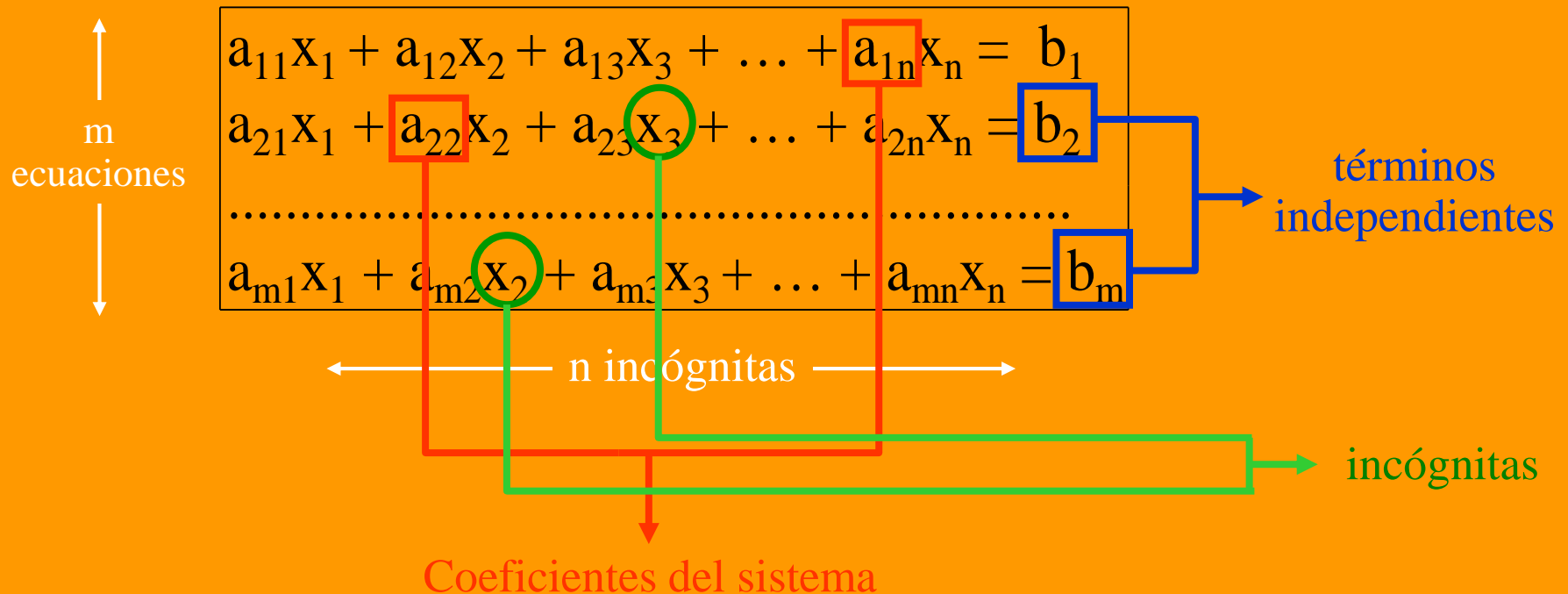
- Tres incógnitas: $ax + by + cz = d$

Un plano en el espacio



- Más de tres incógnitas “Hiperplanos”

1.2.1 - DEFINICIÓN



1.2.2 – SOLUCIÓN DE UN SISTEMA

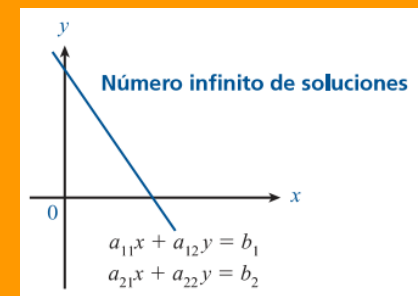
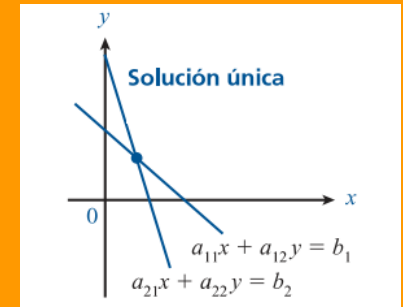
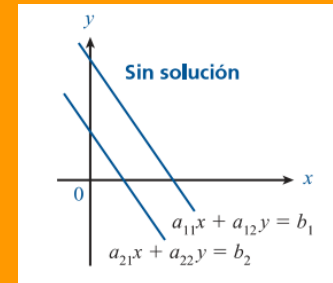
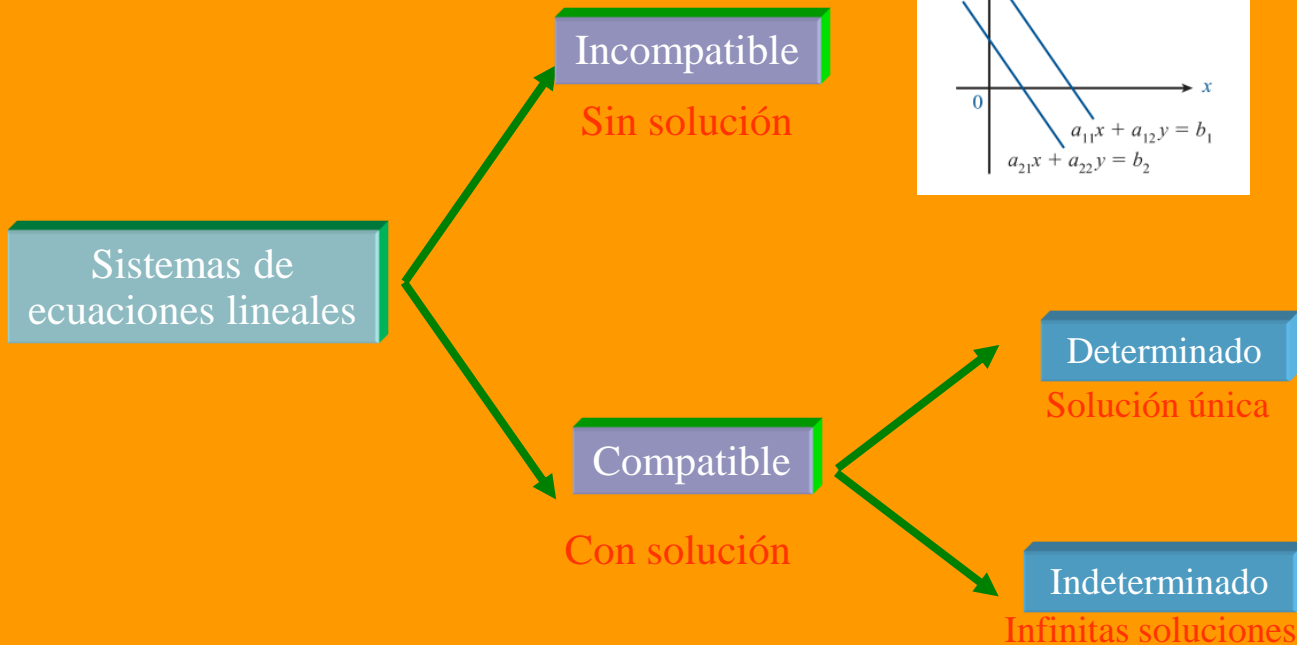
$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + \dots + a_{1n}.x_n = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + \dots + a_{2n}.x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + \dots + a_{mn}.x_n = b_m \end{cases}$$

Una solución de un sistema es un conjunto ordenado de números reales $(s_1, s_2, s_3, \dots, s_n)$ tales que

$$\begin{cases} a_{11}.s_1 + a_{12}.s_2 + \dots + a_{1n}.s_n = b_1 \\ a_{21}.s_1 + a_{22}.s_2 + \dots + a_{2n}.s_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}.s_1 + a_{m2}.s_2 + \dots + a_{mn}.s_n = b_m \end{cases}$$

Resolver un sistema es encontrar todas sus soluciones o decidir que no tiene ninguna

1.2.3 - SOLUCIONES



- Discutir un sistema es decidir a cuál de estas tres categorías pertenece
- Un sistema de ecuaciones lineales no puede tener exactamente dos soluciones, tres soluciones, cuatro soluciones, ...

- Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es **homogéneo** si todos los términos independientes son 0.
- En caso contrario se dice que es no **homogéneo**.

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + \dots + a_{1n}.x_n = 0 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + \dots + a_{2n}.x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + \dots + a_{mn}.x_n = 0 \end{cases}$$

- Estos sistemas **son siempre compatibles** ya que $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$ llamada solución trivial, es siempre solución del sistema.
- Será determinado si ésta es la única solución del sistema.

- **Sistemas equivalentes:** dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes si tienen las mismas soluciones. (Es necesario que tengan el mismo número de incógnitas).
- Para resolver un sistema es útil convertirlo en otro equivalente que sea fácilmente resoluble. (Sistemas escalonados)

Transformaciones que convierten un sistema en otro equivalente:

I. Intercambiar entre sí dos ecuaciones

II. Multiplicar ambos miembros de una ecuación por un número distinto de cero.

III. Sumar miembro a miembro una ecuación a otra ecuación.

Un sistema escalonado es aquel en el que los coeficientes de la incógnitas situados por debajo de la diagonal principal (elementos que repiten subíndice) son nulos.

$$\begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 0x - 3y + 8z = -14 \\ 0x + 0y + 2z = -5 \end{cases} \approx \begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ -3y + 8z = -14 \\ 2z = -5 \end{cases}$$

Los sistemas escalonados son fácilmente resolubles (De abajo a arriba)

• **Sistema escalonado compatible determinado**

$$\begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ -3y + 8z = -14 \\ 2z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 9 - y + 2z = 9 + 2 - 5 = 6 \\ y = \frac{-14 - 8z}{-3} = \frac{-14 + 20}{-3} = -2 \\ z = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$(x, y, z) = (6, -2, -5/2)$$

- **Sistemas escalonados compatibles indeterminados**

$$\begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ -3y + 8z = -14 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 9 - y + 2z = 9 - \frac{8\alpha + 14}{3} + 2\alpha = \frac{13 - 2\alpha}{3} \\ y = \frac{8z + 14}{3} = \frac{8\alpha + 14}{3} \\ z = \alpha \end{cases}$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{13 - 2\alpha}{3}, \frac{8\alpha + 14}{3}, \alpha \right) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

- **Sistemas incompatibles**

$$\begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 0x - 3y + 8z = -14 \\ 0x + 0y + 0z = -5 \end{cases} \approx \begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ -3y + 8z = -14 \\ 0 = -5 \end{cases}$$

Este sistema es incompatible porque no hay ninguna solución (x, y, z) que pueda cumplir la tercera ecuación (la última ecuación no tiene sentido)

Para convertir un sistema como:

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3 = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + a_{23}.x_3 = b_2 \\ a_{31}.x_1 + a_{32}.x_2 + a_{33}.x_3 = b_3 \end{cases}$$

en un sistema escalonado, se pueden dar los siguientes pasos:

- I. Si es necesario reordenar ecuaciones para que a_{11} sea distinto de cero.
- II. Dividir la primera ecuación por a_{11} y restar a cada ecuación un múltiplo de la primera para eliminar todos los elementos que quedan por debajo de $a_{11}x_1$.
- III. Repetir los pasos anteriores basados ahora en a_{22} (y si es necesario en cada a_{ii})
- IV. El proceso termina cuando no quedan más ecuaciones.

Nota: Si al hacer Gauss queda un “cuadrado” hay que seguir haciendo ceros.

$$\begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 2x - y + 6z = -1 \end{cases} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 9 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & 6 & -1 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & -3 & 8 & -14 \\ 0 & -3 & 10 & -19 \end{array} \right)$$

Hacer ceros $\rightarrow F_2 = F_2 - 2F_1$
 $F_3 = F_3 - 2F_1$

Hacer ceros $\rightarrow F_3 = F_3 - F_2$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & -3 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{array} \right) \quad \begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ -3y + 8z = -14 \\ 2z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 9 - y + 2z = 9 + 2 - 5 = 6 \\ y = \frac{-14 - 8z}{-3} = \frac{-14 + 20}{-3} = -2 \\ z = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Clasificación: Sistema compatible determinado $\Rightarrow \exists!$ solución

Solución: $(x, y, z) = (6, -2, -5/2)$

Interpretación geométrica: Tres planos que se cortan en un punto.

$$\begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 4x + y = 22 \end{cases} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 9 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 22 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & -3 & 8 & -14 \\ 0 & -3 & 8 & -14 \end{array} \right)$$

Hacer ceros

$$F_2 = F_2 - 2F_1$$

$$F_3 = F_3 - 4F_1$$

Hacer ceros

$$F_3 = F_3 - F_2$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & -3 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ -3y + 8z = -14 \end{cases} \begin{cases} x = 9 - y + 2z = 9 - \frac{8\alpha + 14}{3} + 2\alpha = \frac{13 - 2\alpha}{3} \\ y = \frac{8z + 14}{3} = \frac{8\alpha + 14}{3} \\ z = \alpha \end{cases}$$

Clasificación: Sistema Compatible indeterminado . Infinitas soluciones

Solución: $(x, y, z) = \left(\frac{13 - 2\alpha}{3}, \frac{8\alpha + 14}{3}, \alpha \right) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Interpretación geométrica: Tres planos que se cortan en una recta

$$\begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 2x - y + 4z = -1 \end{cases} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 9 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & -3 & 8 & -14 \\ 0 & -3 & 8 & -19 \end{array} \right)$$

Hacer ceros

$F_2 = F_2 - 2F_1$
 $F_3 = F_3 - 2F_1$

Hacer ceros

$F_3 = F_3 - F_2$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & -3 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array} \right) \quad \begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ -3y + 8z = -14 \\ 0 = -5 \end{cases}$$

Clasificación: Sistema Incompatible

Solución: No existe solución

Interpretación geométrica: Tres planos que no se cortan

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 2y + z = 5 \\ 3x + 3y - z = 5 \end{cases} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & -1 & 5 \end{array} \right)$$

Hacer ceros

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array} \right)$$

$$F_2 = F_2 - 2F_1$$

$$F_3 = F_3 - 3F_1$$

$$F_3 = F_3 - 4F_2$$

Hacer ceros

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ -z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - \alpha \\ y = \alpha \\ z = 1 \end{cases}$$

Clasificación: Sistema Compatible indeterminado . Infinitas soluciones

Solución: $(x, y, z) = (2 - \alpha, \alpha, 1) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Interpretación geométrica: Tres planos que se cortan en una recta

- 1.º Se identifican las incógnitas.
- 2.º Se expresa el enunciado del problema mediante sistemas de ecuaciones.
- 3.º Se resuelve el sistema.
- 4.º Se comprueba que las soluciones del sistema tienen sentido con respecto al enunciado del problema.

- 1.º Se ordenan las ecuaciones e incógnitas: El parámetro lo más abajo y la derecha posible.
- 2.º Se aplica el método de Gauss teniendo en cuenta que la fila que cambiamos no podemos multiplicarla por el parámetro
- 3.º Se igualan por separado los elementos de la diagonal a cero
- 4.º Un caso más que el número de valores del parámetro.

- Eliminación Gaussiana
 - **Usando ERO (operaciones Elementales en Filas)**, la matriz A es transformada en una **matriz triangular superior** (todos los elementos debajo de la diagonal son cero).
 - **Sustitución hacia atrás** es usada para resolver un sistema triangular superior
 - **Cuidado! --> División por cero**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

\Rightarrow
ERO

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \tilde{a}_{ii} & \cdots & \tilde{a}_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_i \\ \vdots \\ \tilde{b}_n \end{bmatrix}$$

Back substitution

1.9 Algoritmo Método de Gauss Simple

Sistema de ecuaciones lineales

Elemento pivotal

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} m_{2,1} &= a_{21}^{(1)} / a_{11}^{(1)} \\ m_{3,1} &= a_{31}^{(1)} / a_{11}^{(1)} \\ &\vdots \\ m_{n,1} &= a_{n1}^{(1)} / a_{11}^{(1)} \end{aligned} \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{bmatrix}$$

1.9 Algoritmo Método de Gauss Simple

Sistema de ecuaciones lineales

Elemento pivotal

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{bmatrix}$$


$$\begin{matrix} m_{2,1} = a_{21}^{(1)} / a_{11}^{(1)} \\ m_{3,1} = a_{31}^{(1)} / a_{11}^{(1)} \\ \vdots \\ m_{n,1} = a_{n1}^{(1)} / a_{11}^{(1)} \end{matrix} \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$m_{r,p} = a_{rp}^{(p)} / a_{pp}^{(p)}$$

$$a_{rp}^{(p)} = 0$$

$$b_r^{(p+1)} = b_r^{(p)} - m_{r,p} \times b_p^{(p)}$$

For c=p+1 to n


$$a_{rc}^{(p+1)} = a_{rc}^{(p)} - m_{r,p} \times a_{pc}^{(p)}$$

1.9 Algoritmo Método de Gauss Simple

Sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-1n-1}^{(n)} & a_{n-1n}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \vdots \\ b_{n-1}^{(n-1)} \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

$$x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}} \quad x_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1n-1}^{(n-1)}} \left[b_{n-1}^{(n-1)} - a_{n-1n}^{(n-1)} x_n \right]$$
$$x_i = \frac{1}{a_{ii}^{(i)}} \left[b_i^{(i)} - \sum_{k=i+1}^n a_{ik}^{(i)} x_k \right] \quad i = n-1, n-2, \dots, 1$$

Contador de Operaciones

- Número de operaciones aritméticas requeridas por el algoritmo para completar esta tarea.
- Generalmente solo multiplicaciones y divisiones son contadas.

- Proceso de Eliminación

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6}$$

- Sustitución hacia atrás

$$\frac{n^2 + n}{2}$$

- Total

$$\frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3}$$

- Resolver por Eliminación Gaussiana con pivoteo parcial de filas:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -14 \\ 9 \\ -4 \end{bmatrix}$$

- $E_2 - (3/4)E_1 \Rightarrow E_2$
- $E_3 - (1/2)E_1 \Rightarrow E_3$
- $E_4 - (-1/4)E_1 \Rightarrow E_4$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 0.5 & 0.75 \\ 0 & 4 & -2 & 2.5 \\ 0 & 1 & 1.5 & -1.75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -7.25 \\ 13.5 \\ -6.25 \end{bmatrix}$$

- Intercambiamos las Ecuaciones 2 y 3 ($E_2 \leftrightarrow E_3$)

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -2 & 2.5 \\ 0 & -2 & 0.5 & -0.75 \\ 0 & 1 & 1.5 & -1.75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 13.5 \\ -7.25 \\ -6.25 \end{bmatrix}$$

- $E_3 - (-1/2)E_2 \Rightarrow E_3$
- $E_4 - (1/4)E_2 \Rightarrow E_4$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -2 & 2.5 \\ 0 & 0 & 2 & -2.375 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -13.5 \\ -9.625 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

- $E_4 - (-1/4)E_3 \Rightarrow E_4$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -2 & 2.5 \\ 0 & 0 & 2 & -2.375 \\ 0 & 0 & 0 & -0.09375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -13.5 \\ -9.625 \\ -2.90625 \end{bmatrix}$$

- Resolviendo por sustitución hacia atrás:

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ 32 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

2.0 Algoritmo Método de Gauss CON PIVOTEO

Sistema de ecuaciones lineales

Para evitar las divisiones por cero, se deben intercambiar los renglones, tomando los elementos mayores para el pivoteo.

Si durante el procedimiento de eliminación de Gauss una ecuación pivote tiene un elemento pivote que es igual a cero, entonces si el sistema de ecuaciones que se está resolviendo tiene una solución, siempre se puede encontrar una ecuación con un elemento distinto de cero en la posición pivote.

After the first step, the second equation has a pivot element that is equal to zero.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \end{bmatrix}$$

Using pivoting, the second equation is exchanged with the third equation.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ 0 & 0 & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_3 \\ b'_2 \\ b'_4 \end{bmatrix}$$

Los elementos sobre la diagonal se convierten y por debajo y sobre de la diagonal son ceros.

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & 0 & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(3)} & b_n^{(3)} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & b_1^{(n-1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & 0 & b_2^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$