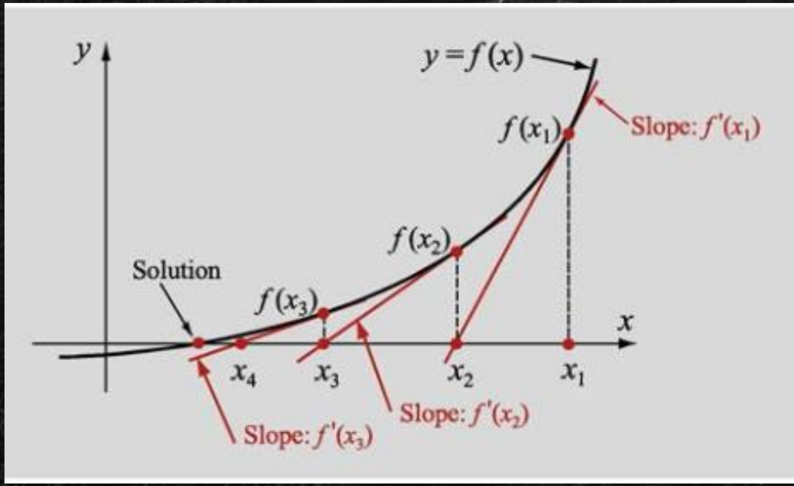
UNIDAD No.

Raíces de Ecuaciones No Lineales

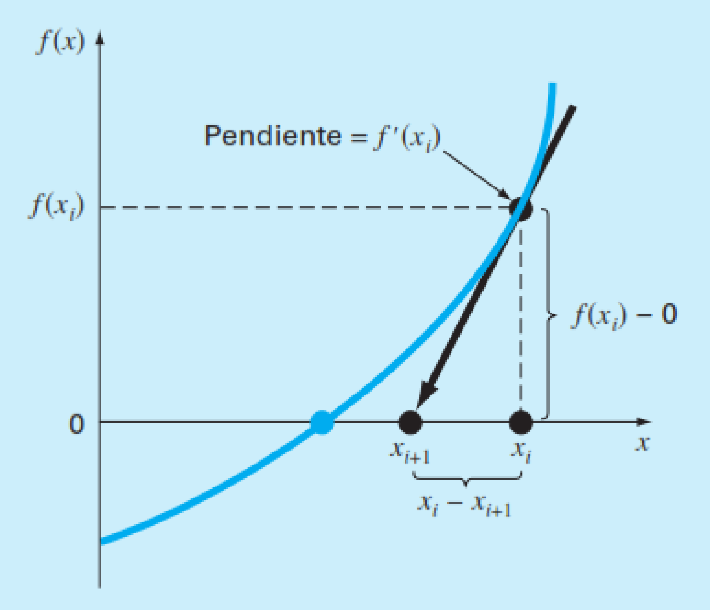
MÉTODO NEWTON RAPHSON



Método NEWTON RAPHSON

El método Newton-Raphson es un esquema para encontrar una solución numérica de una ecuación de la forma f (x) = 0 donde f (x) es continua y diferenciable y la ecuación se sabe que tiene una solución cerca de un punto dado.

El proceso comienza eligiendo el punto x1 como la primera estimación de la solución. La segunda estimación x2 se obtiene tomando la recta tangente a y=f(x) en el punto (x1, f (x1)) encontrando el punto de intersección de la tangente con el eje x. La siguiente estimación x3 es la intersección de la recta tangente a f (x) en el punto (x2, f (x2)) con el eje x, y así sucesivamente…

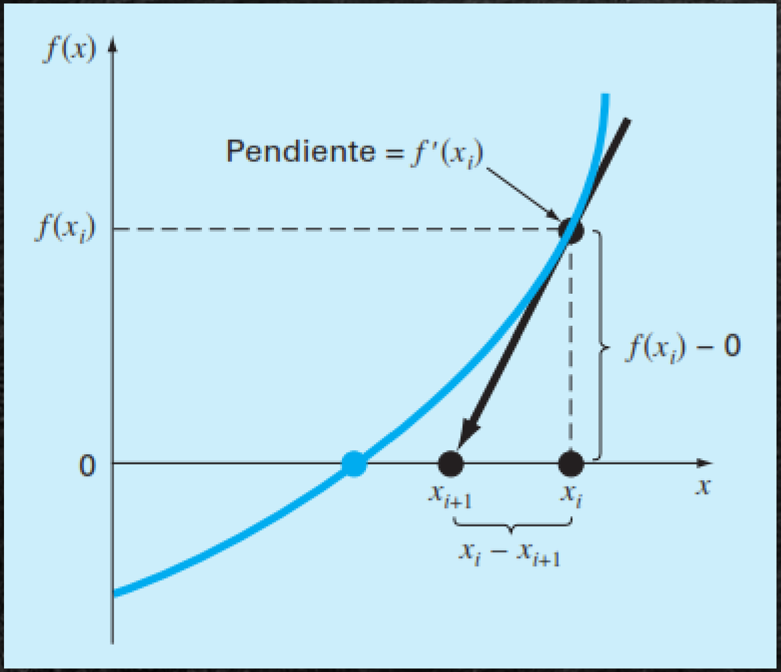


Método NEWTON RAPHSON

Matemáticamente, El método de Newton-Raphson se deduce a partir de esta interpretación geométrica de la figura adjunta. Se tiene que la primera derivada en x es equivalente a la pendiente:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$



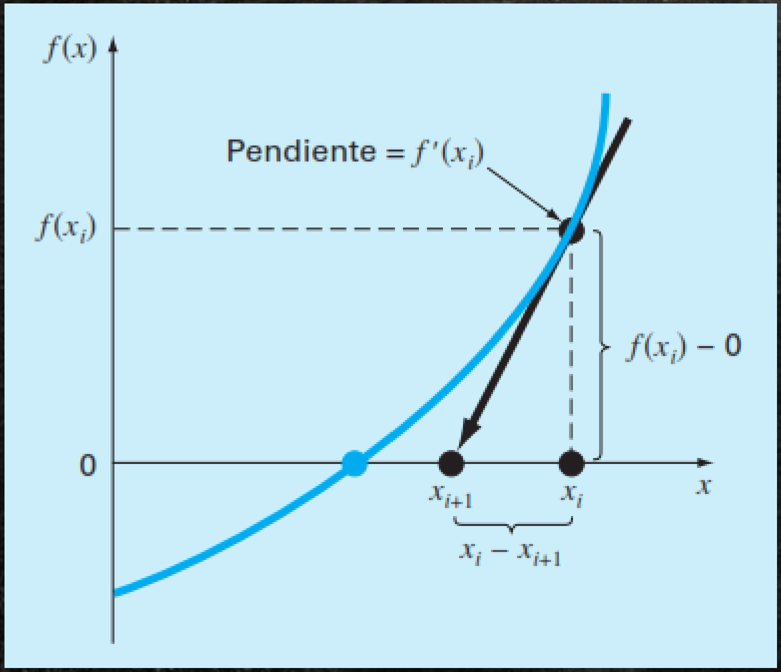
Método NEWTON RAPHSON

El método de Newton también se puede derivar mediante el uso de la serie de Taylor. La expansión de la serie de Taylor de viene dada por:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}(x_{i+1} - x_i)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}(x_{i+1} - x_i)^n + R_n$$

Para encontrar la aproximación con Newton Raphson, se toma:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2$$



Método NEWTON RAPHSON

Truncando la serie de Taylor después del término de la primera derivada,

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

La intersección con el eje x, f(xi+1) debe ser igual a cero:

$$0 = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Algoritmo de para método de Newton

1) Elija un punto xi como suposición inicial de la solución.
2) Para i = 1, 2, ..., hasta que el error sea menor que un valor especificado, calcular X i+1 usando la ecuación:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

¿Cuándo se detienen las iteraciones?
Idealmente, las iteraciones deberían detenerse cuando una solución exacta es adquirido.
Esto significa que el valor de x es tal que f (x) = 0.

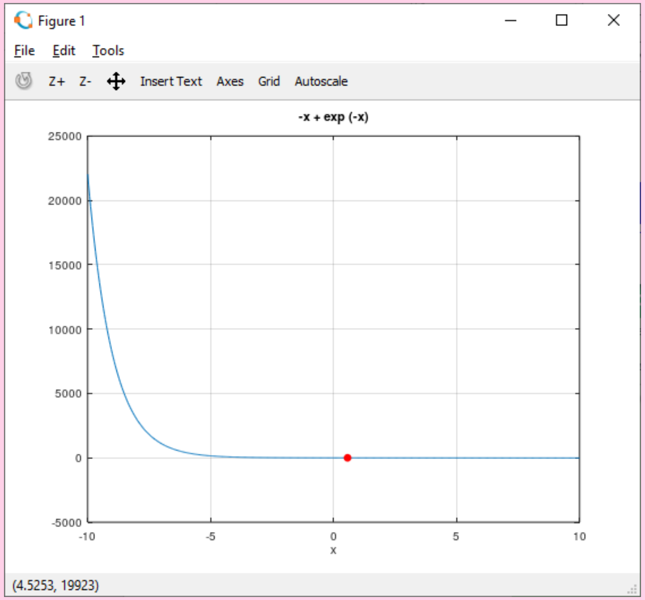
Error relativo estimado: las iteraciones se detienen cuando el error relativo aproximado sea menor que un valor especificado ε:

$$\left|\frac{x_{i+1} - x_i}{x_i}\right| \leq \varepsilon$$

Tolerancia en f (x): las iteraciones se detienen cuando el valor absoluto de f (x) es menor que algún número δ:

$$|f(x_i)| \leq \delta$$

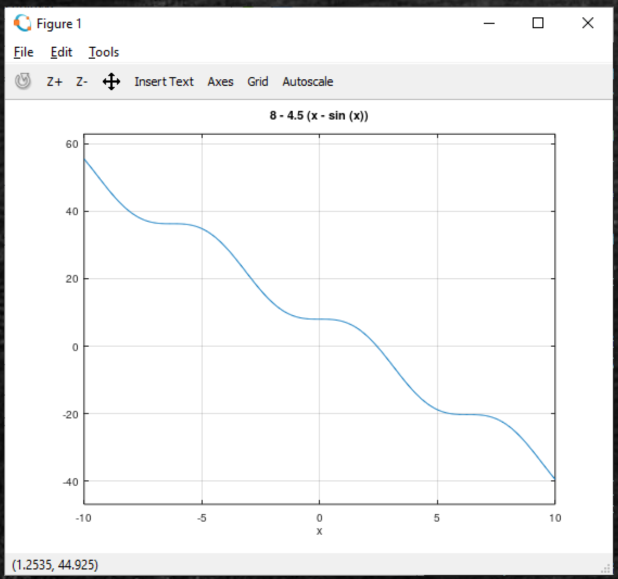
Interpretación:



Ejemplo: Método Newton Raphson

Utilice el Método de Newton Rahpson para localizar la raíz de f(x)= e-x –x
f'(x)= -e-x –1
Utilizar el método de Punto Fijo con un valor inicial: xi = 0
fx = @(x) exp (-x) - x
fpx = @(x) -exp (-x) -1

```
>> [i,xr,fun,error]=newton2(fx,fpx,0)
Método de NEWTO-RAPHSON
vv =    5.671432904097833e-01
Valor para épsilon: 0.0001
valor para número máximo de iteraciones: 20
  k     x            Everdadero     Eaprox(%)
  0 0.000000000 0.567143290 0.000000000
  1 0.500000000 0.067143290 100.000000000
  2 0.566311003 0.000832287 11.709290977
  3 0.567143165 0.000000125 0.146728708
  4 0.567143290 0.000000000 0.000022106
i =  4
xr =    5.671431650348622e-01
fun =    2.220446049250313e-15
error =    2.210639198439762e-05
```



Ejemplo: Método Newton Raphson

Encuentre una aproximación a una raíz real de la ecuación:

f(x) = 8 – 4.5 (x - sin(x)   xi = 2; max error relative= 0.0001; 10 iteraciones.

Análisis del error para método de Newton

El método de Newton-Raphson es de naturaleza convergente en forma cuadrática. Es decir, el error es proporcional al cuadrado del error anterior:

$$E_{t,\,i+1} \cong \frac{-f''(x_r)}{2f'(x_r)} E_{t,i}^2$$

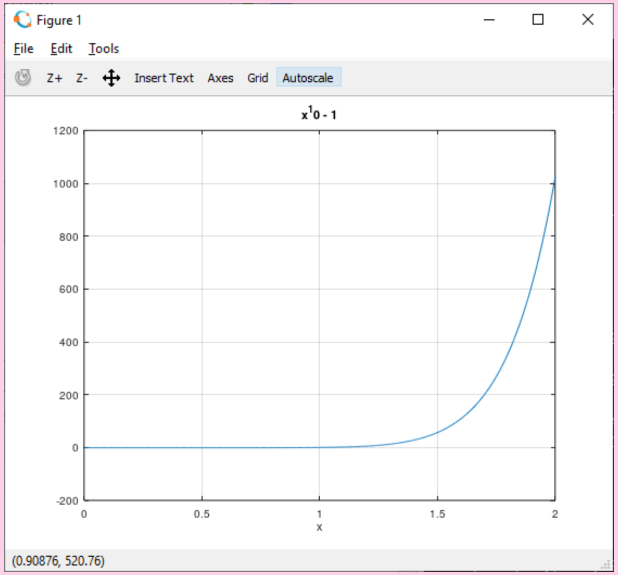
Análisis: de fx = @(x) exp (-x) – x fpx = @(x) -exp (-x) -1 fppx = @(x) exp (-x)

Valor verdadero:
>> fzero(fx,0) -→ xr = 0.56714329

>> fpx(xr)
ans = -1.567143290409784
>> fppx(xr)
ans = 0.56714329

$$E_{t,i+1} \cong -\frac{0.56714329}{2(-1.56714329)} E_{t,i}^2 = 0.18095E_{t,i}^2$$

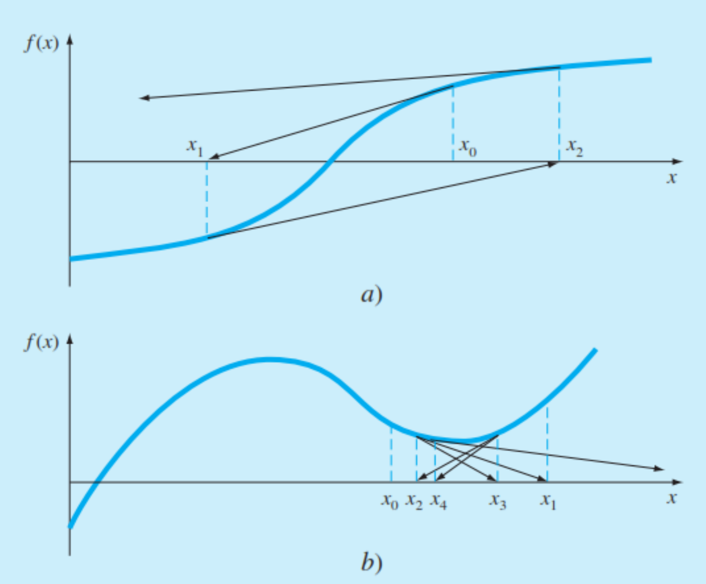
Interpretación:



Desventajas Método Newton Raphson

Utilice el Método de Newton Rahpson para localizar la raíz de
hx=@(x) x.^10 -1
*hxp =@(x) 10 * x .^ 9*
Utilizar el método de Punto Fijo con un valor inicial: xi = 0.5

Interpretación:

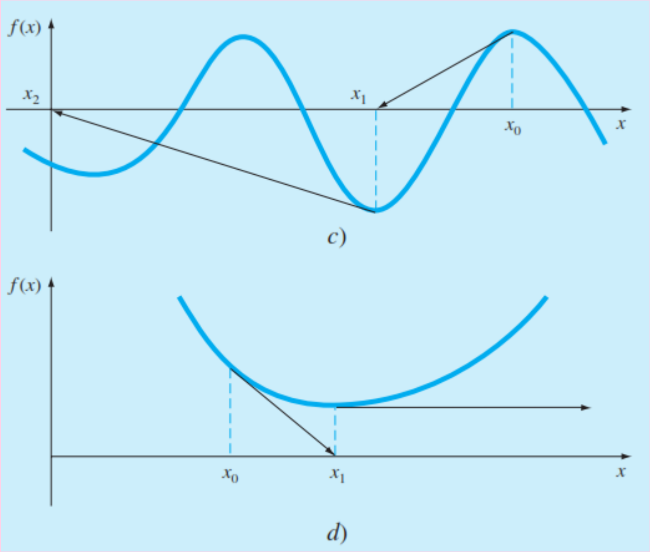


Desventajas Método Newton Raphson

La figura 6.6a muestra el caso donde un punto de inflexión [esto es, f″(x) = 0] ocurre en la vecindad de una raíz. Observe que las iteraciones que empiezan con x divergen progresivamente de la raíz.

En la figura 6.6b se ilustra la tendencia del método de Newton-Raphson a oscilar alrededor de un mínimo o máximo local. Tales oscilaciones pueden persistir o, alcanzar una pendiente cercana a cero, después de lo cual la solución se aleja del área de interés.

Interpretación:



Desventajas Método Newton Raphson

En la figura 6.6c se muestra cómo un valor inicial cercano a una raíz salta a una posición varias raíces más lejos. Esta tendencia a alejarse del área de interés se debe a que se encuentran pendientes cercanas a cero.

Una pendiente cero [f'(x) = 0] es un verdadero desastre, ya que causa una división entre cero en la fórmula de Newton-Raphson. Esto sucede en la figura 6.6d, esto significa que la solución se dispara horizontalmente y jamás toca al eje x..