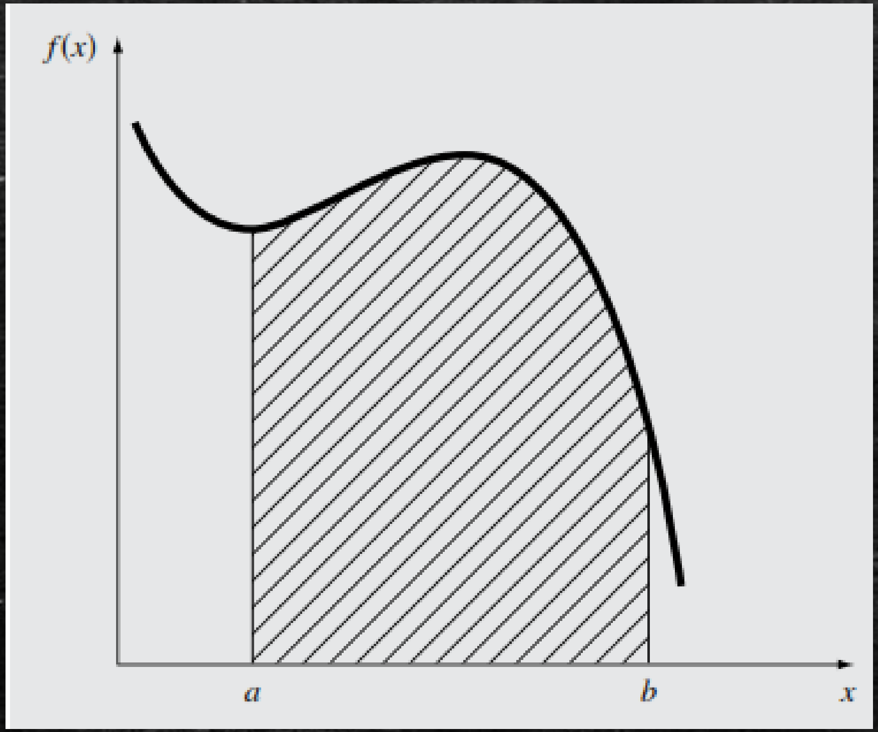
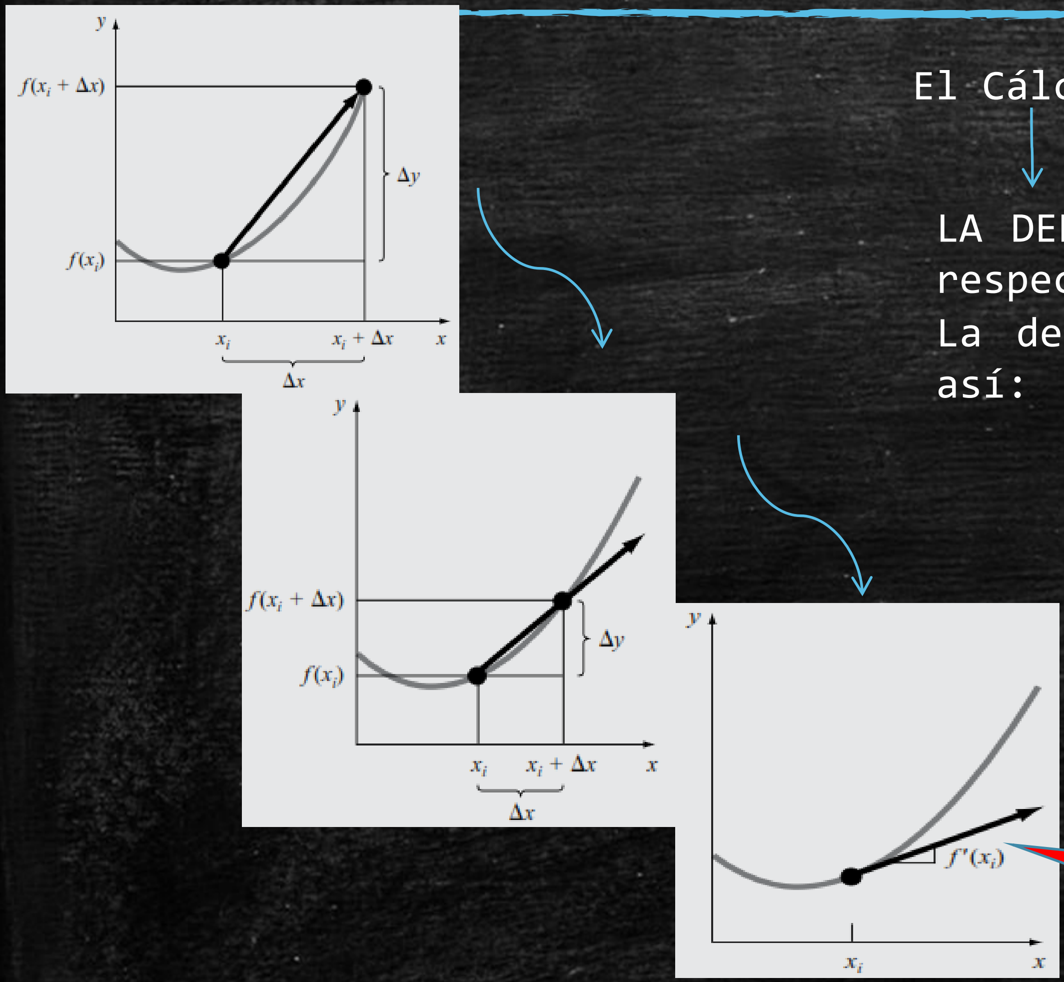
MÉTODOS NUMÉRICOS: TEMA: *Diferenciación e Integración Numéricas*



Franco Salcedo López.
2021

MOTIVACIÓN:



El Cálculo $\rightarrow$ Matemática del Cambio

LA DERIVADA: *Razón de cambio* de una variable dependiente con respecto a una variable independiente.
La definición empieza con una aproximación por diferencias, así:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}$$

Si se hace que Δx se aproxime a cero, entonces, el cociente de las diferencias se convierte en una derivada

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}$$

La derivada evaluada es la pendiente de la recta tangente a la curva en x_i

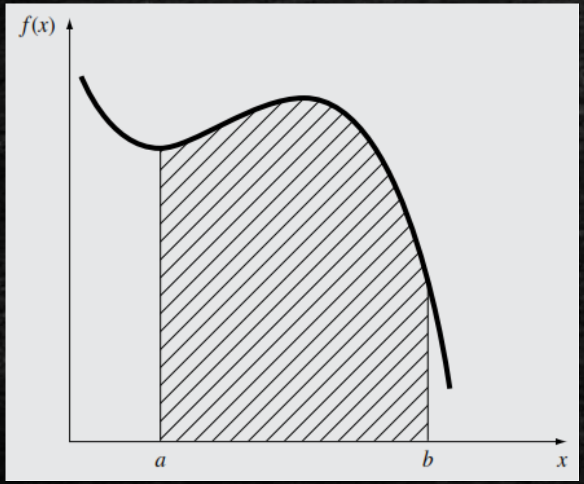
Franco Salcedo López.
2021

MOTIVACIÓN:

En cálculo, *el proceso inverso de la diferenciación* es la integración. Integrar significa "juntar partes en un todo; unir; indicar la cantidad total ...". Matemáticamente, la integración se representa por:

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

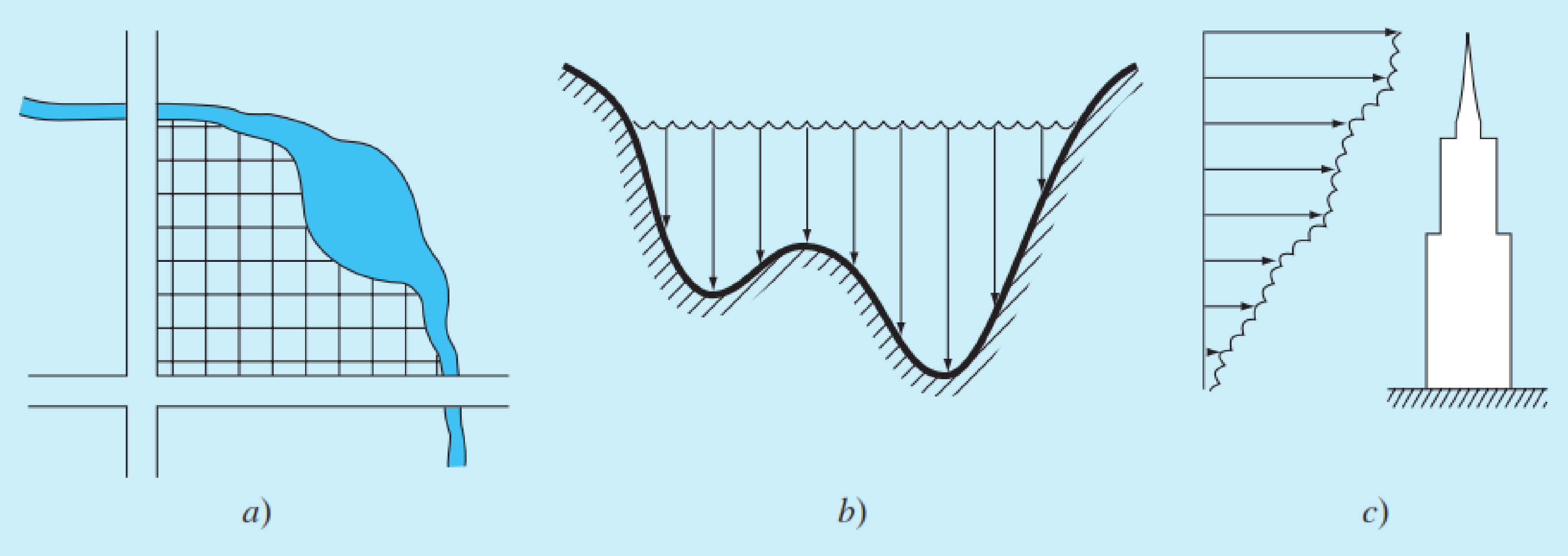
Que representa la integral de la función f(x) con respecto a la variable independiente x, evaluada entre los límites x = a y x = b.



Representación gráfica de la integral de $f(x)$ entre los límites $x = a$ y $x = b$. La integral es equivalente al área bajo la curva.

MOTIVACIÓN:

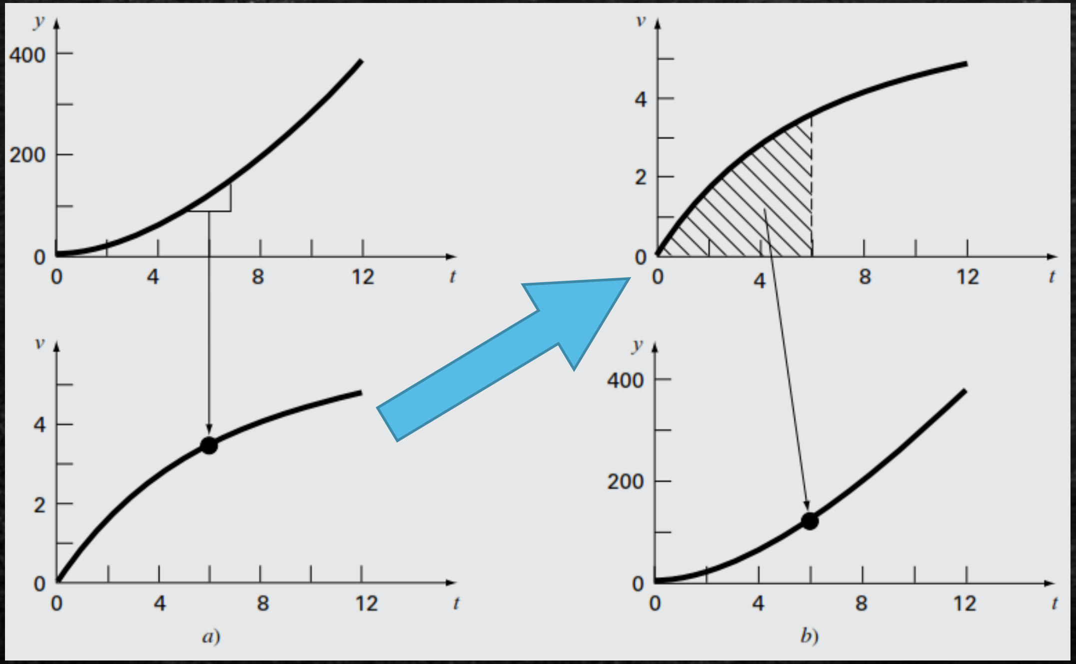
Aplicaciones de la Diferenciación e Integración en Ingeniería:



Ejemplos de cómo se utiliza la integración para evaluar áreas en problemas de ingeniería. *a)* Un topógrafo podría necesitar saber el área de un campo limitado por una corriente zigzagueante y dos caminos. *b)* Un ingeniero en hidráulica tal vez requiera conocer el área de la sección transversal de un río. *c)* Un ingeniero en estructuras quizá necesite determinar la fuerza neta ejercida por un viento no uniforme que sopla contra un lado de un rascacielos.

MOTIVACIÓN:

Como se dijo: La diferenciación y la integración, son procesos estrechamente relacionados, es decir, inversamente relacionados, así:



Como ejemplo, si se tiene una función dada y(t) que especifica la posición de un objeto en función del tiempo, la diferenciación proporciona un medio para determinar su velocidad (figura a),

$$v(t) = \frac{d}{dt} y(t)$$

De manera inversa, si se tiene la velocidad como una función del tiempo, la integración se utilizará para determinar su posición (figura b),

$$y(t) = \int_0^t v(t)\, dt$$

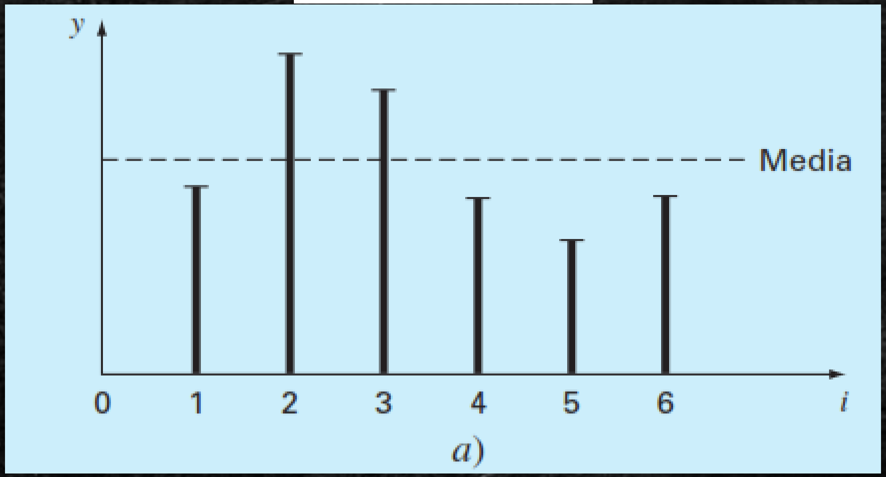
Franco Salcedo López.
2021

MOTIVACIÓN:

Otras aplicaciones comunes relacionan la analogía entre integración y sumatoria.
Por ejemplo: Para determinar la media de funciones discretas y continuas.

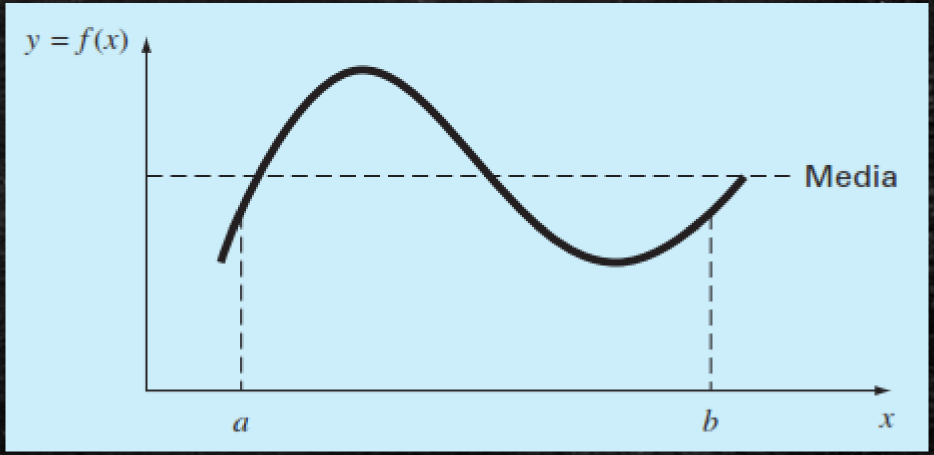
La media de *n* datos discretos:

$$\text{Media} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$



media o promedio de la función continua y = f(x) en el intervalo de a … b

$$\text{Media} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$



Franco Salcedo López.
2021

Métodos de Integración de Newton-Cotes

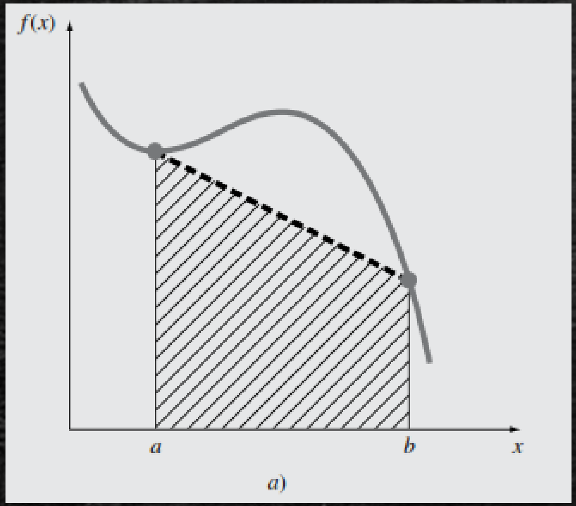
Las fórmulas de Newton-Cotes son los tipos de integración numérica más comunes. Se basan en la estrategia de reemplazar una función complicada o datos tabulados por un polinomio de aproximación que es fácil de integrar:

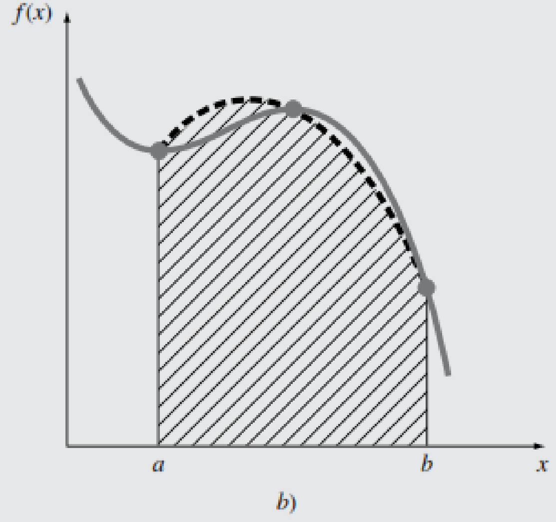
$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_n(x)\,dx$$

Donde $f_n(x)$ es un polinomio de la forma:

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

Métodos de Integración de Newton-Cotes

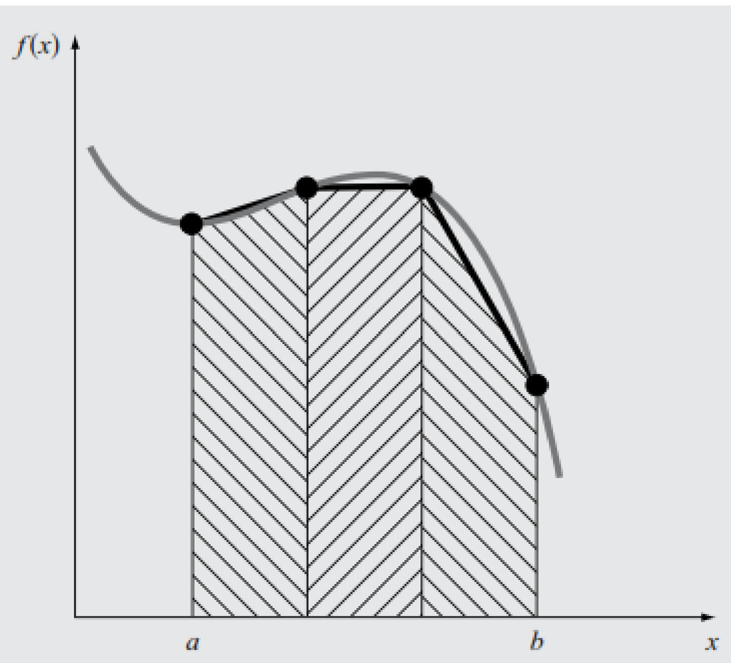




Por ejemplo, en la figura (a), se utiliza un polinomio de primer grado (una línea recta) como una aproximación.

En la figura (b), se emplea una parábola con el mismo propósito

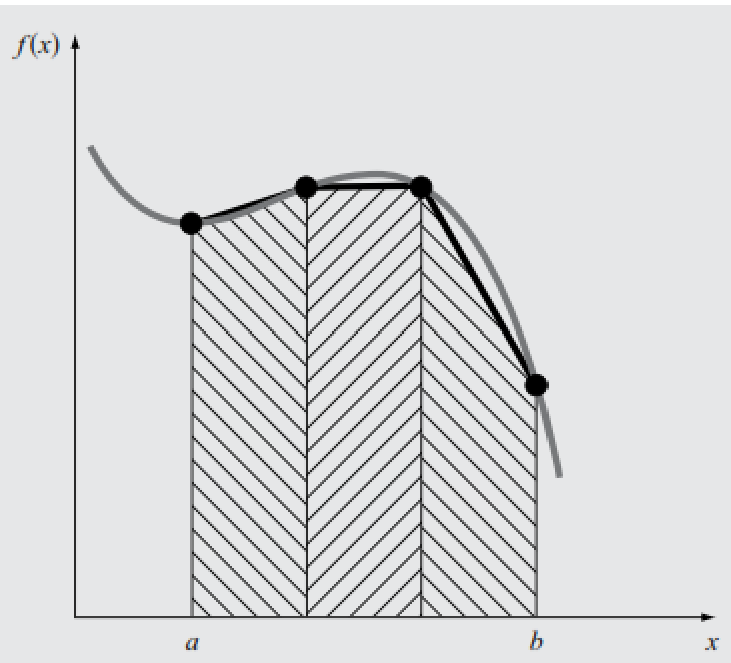
Métodos de Integración de Newton-Cotes



La aproximación de una integral mediante el área bajo tres segmentos de línea recta.

La integral también se puede aproximar usando un conjunto de polinomios aplicados por pedazos a la función o datos, sobre segmentos de longitud constante.

Métodos de Integración de Newton-Cotes



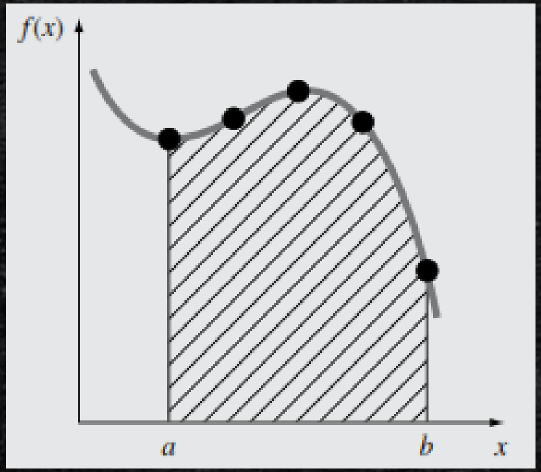
La aproximación de una integral mediante el área bajo tres segmentos de línea recta.

La integral también se puede aproximar usando un conjunto de polinomios aplicados por pedazos a la función o datos, sobre segmentos de longitud constante.

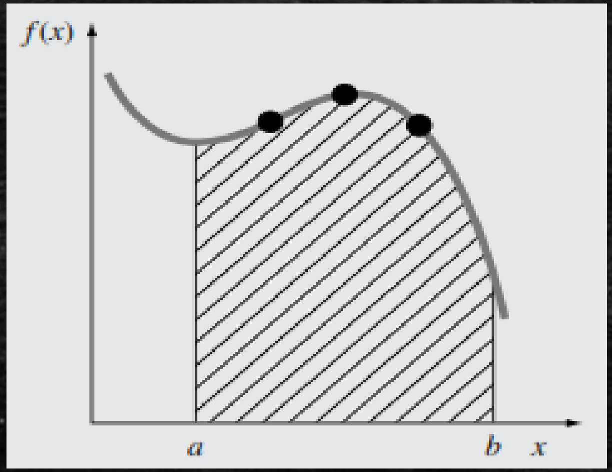
Métodos de Integración de Newton-Cotes

Formas cerradas y abiertas de las fórmulas de Newton-Cotes

Las formas cerradas son aquellas donde se conocen los datos al inicio y al final de los límites de integración



Las formas abiertas tienen límites de integración que se extienden más allá del intervalo de los datos



Franco Salcedo López.
2021

Métodos de Integración de Newton-Cotes

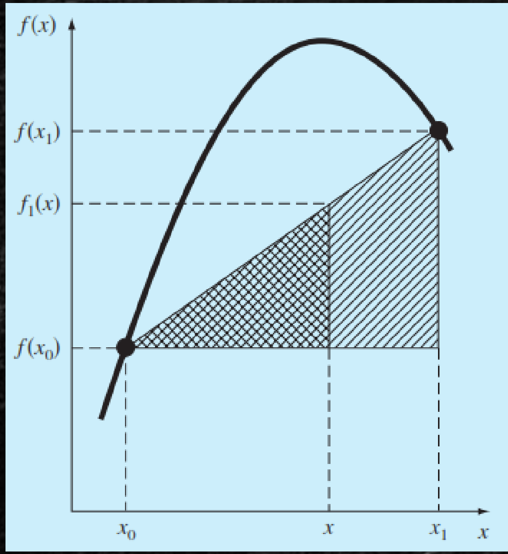
REGLA DEL TRAPECIO

La regla del trapecio es la primera de las fórmulas cerradas de integración de Newton-Cotes.
Corresponde al caso donde el polinomio de la ecuación

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_n(x)\,dx$$

es de primer grado:

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$



$$\frac{f_1(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

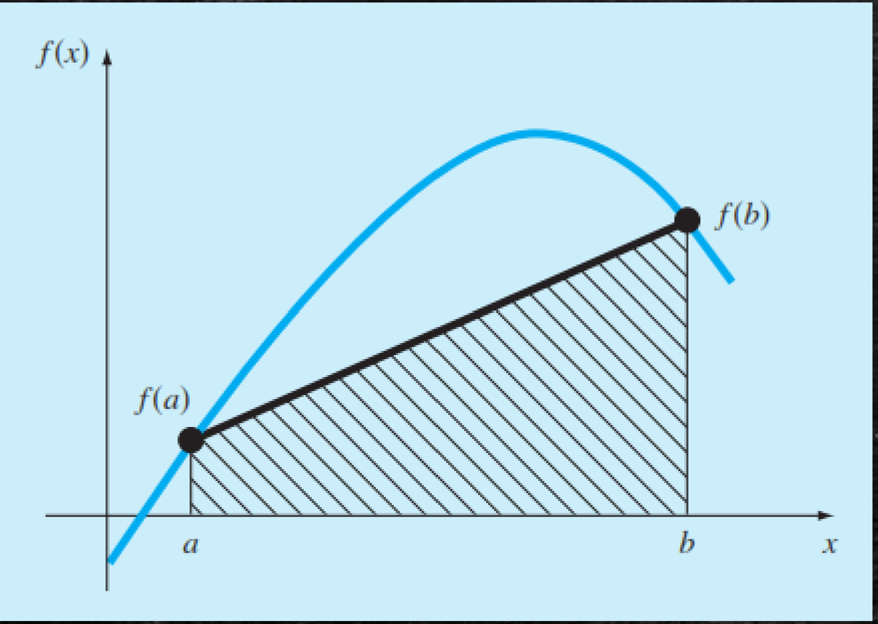
Haciendo: $x_0=a$ y $x_1=b$, se tiene que una línea recta se puede representar:

$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Franco Salcedo López.
2021

Métodos de Integración de Newton-Cotes

REGLA DEL TRAPECIO



El área bajo esta línea recta es una aproximación de la integral de f(x) entre los límites a y b:

$$I = \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right] dx$$

Integrando, resultaría:

$$I = (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

BASE

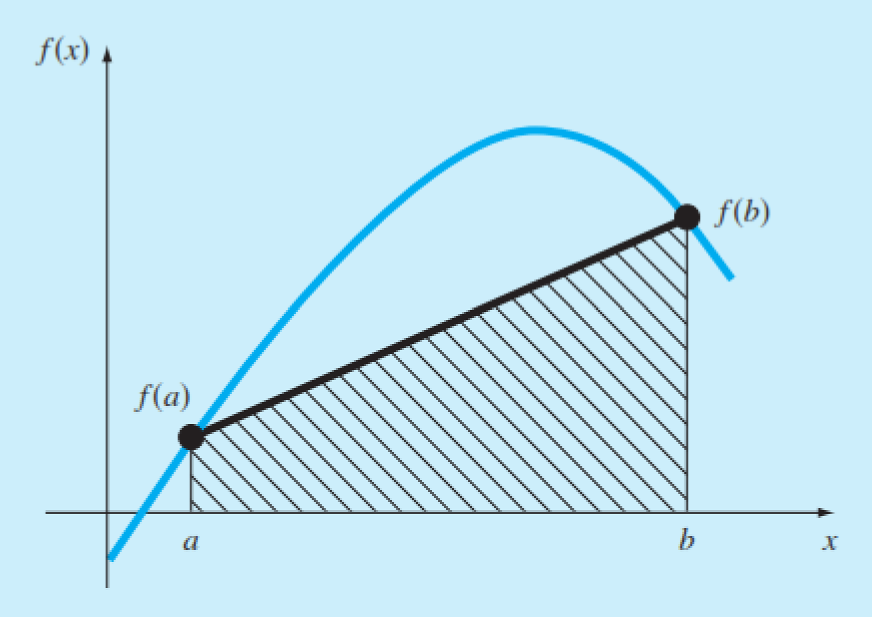
ALTURA

Franco Salcedo López.
2021

Métodos de Integración de Newton-Cotes

REGLA DEL TRAPECIO

Por lo tanto, la integral aproximada se representa como:



$$I = (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

$$I \cong \text{ancho} \times \text{altura promedio}$$

o

$$I \cong (b - a) \times \text{altura promedio}$$

Franco Salcedo López.
2021

Métodos de Integración de Newton-Cotes

ERROR EN LA REGLA DEL TRAPECIO

Una manera alternativa para obtener la regla del trapecio consiste en integrar el polinomio de interpolación hacia delante de Newton-Gregory. Recuerde que para la versión de primer grado con el término del error, la integral será:

$$I = \int_a^b \left[f(a) + \Delta f(a)\alpha + \frac{f''(\xi)}{2}\alpha(\alpha - 1)h^2 \right] dx$$

Considere que si $\alpha = (x - a)/h$, entonces --- > $dx = h\, d\alpha$

Ya que $h = b - a$ (para un segmento de la regla del trapecio), los límites de integración a y b corresponden a 0 y 1, respectivamente. Por lo tanto,

$$I = h\int_0^1 \left[f(a) + \Delta f(a)\alpha + \frac{f''(\xi)}{2}\alpha(\alpha - 1)h^2 \right] d\alpha$$

Métodos de Integración de Newton-Cotes

ERROR EN LA REGLA DEL TRAPECIO

Integrando:

$$I = h\int_0^1 \left[f(a) + \Delta f(a)\alpha + \frac{f''(\xi)}{2}\alpha(\alpha-1)h^2 \right] d\alpha$$

Se tiene;

$$I = h\left[\alpha\, f(a) + \frac{\alpha^2}{2}\Delta f(a) + \left(\frac{\alpha^3}{6} - \frac{\alpha^2}{4}\right) f''(\xi)h^2 \right]_0^1$$

$$I = h\left[f(a) + \frac{\Delta f(a)}{2} \right] - \frac{1}{12} f''(\xi)h^3$$

Como $\Delta f(a) = f(b) - f(a)$,

$$I = \underbrace{h\,\frac{f(a)+f(b)}{2}}_{\text{Regla del trapecio}} \underbrace{-\frac{1}{12} f''(\xi)h^3}_{\text{Error de truncamiento}}$$

$$\text{Media} = \frac{\int_a^b f''(x)\,dx}{b-a} = f''(\xi)$$

Franco Salcedo López.
2021

Métodos de Integración de Newton-Cotes

EJERCICIO BASE REGLA DEL TRAPECIO

Integre numéricamente, la siguiente función, desde a = 0 hasta b = 0.8

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

$$f(0) = 0.2$$

$$f(0.8) = 0.232$$

$$I = h\underbrace{\frac{f(a)+f(b)}{2}}_{\text{Regla del trapecio}} \underbrace{- \frac{1}{12}f''(\xi)h^3}_{\text{Error de truncamiento}}$$

$$I \cong 0.8\,\frac{0.2 + 0.232}{2} = 0.1728$$

Si el valor exacto de la integral se puededeterminar en forma analítica y es 1.640533. Entonces, el Error relativo porcentual, sería:

$$E_t = 1.640533 - 0.1728 = 1.467733$$

Para determinar el Error aproximado (Error de Truncamiento) cuando se desconoce el valor exacto de la integral:

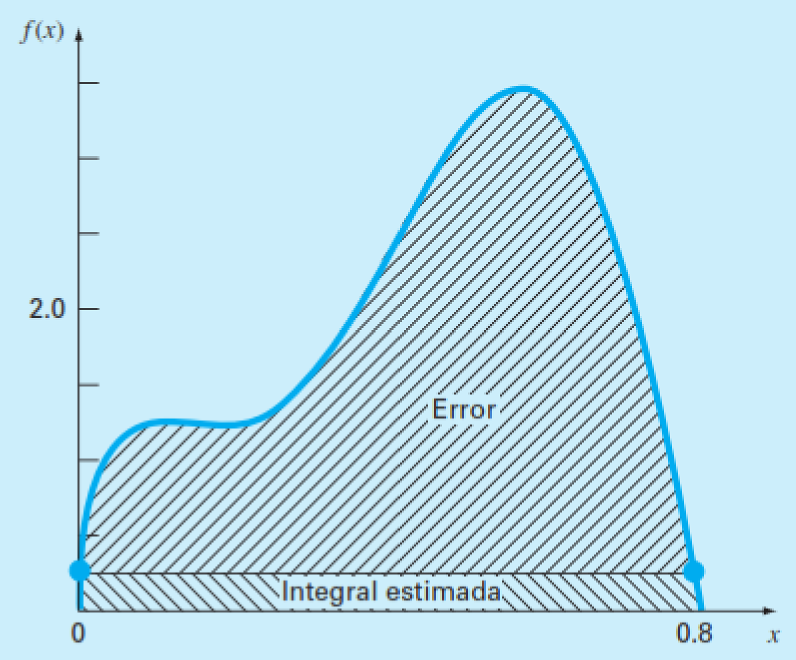
$$\bar{f}''(x) = \frac{\int_0^{0.8} (-400 + 4\,050x - 10\,800x^2 + 8\,000x^3)\,dx}{0.8 - 0} = -60$$

$$E_a = -\frac{1}{12}(-60)(0.8)^3 = 2.56$$

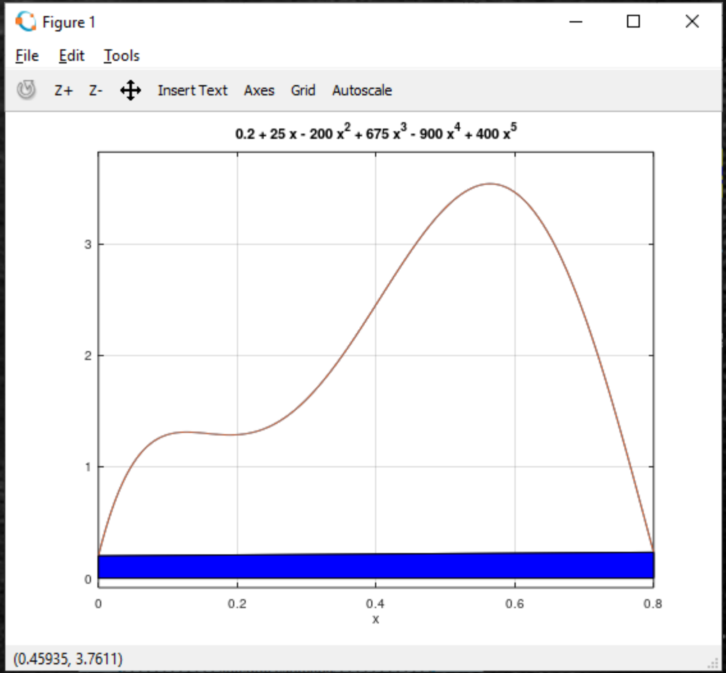
Métodos de Integración de Newton-Cotes

EJERCICIO BASE REGLA DEL TRAPECIO

El error es tan grande, que se puede evidenciar en la siguiente gráfica:



Representación gráfica del empleo de una sola aplicación de la regla del trapecio para aproximar la integral de $f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ de $x = 0$ a 0.8.



Franco Salcedo López.
2021

Métodos de Integración de Newton-Cotes

EJERCICIO BASE REGLA DEL TRAPECIO

Como lo hacemos en Octave:

```
%Cargar la libreria simbolica solo la primera vez
>>pkg load symbolic
>>syms x
>>fx=0.2+25*x -200*x^2 +675*x^3 -900*x^4 +400*x^5
>>primera = diff(fx,1)
>>ezplot(primera,[0,1])
%Para integrar debe estar vectorizada, la funcion incluida en octave
>>fx1 = @(x) 0.2+25*x -200*x.^2 +675*x.^3 -900*x.^4 +400*x.^5
>>q = integral (fx1, 0, 0.8)  %valor real
>>int = trapint(fx1, 0, 0.8)  % valor aproximado
%Error absoluto
>>q-int
% error relativo porcentual
>>(q-int)/q
```

Métodos de Integración de Newton-Cotes

EJERCICIO BASE REGLA DEL TRAPECIO

```
%para encontrar el error de truncamiento,  se vectoriza la funcion de la primera
derivada
>>h = function_handle(primera)
>>interror = integral (h, 0, 0.8)
>>interror/0.8

%Error de truncamiento de la formula encontrada por Newton-Gregory
>> -(1/12)*(interror/0.8)*(0.8)^3

%analisis del error
%graficamos la curva inicial
>>ezplot(fx,[0,0.8])
>>p1=feval(function_handle(fx),0)
>>p2=feval(function_handle(fx),0.8)
>>hold on
>>plot([0,0.8],[p1,p2],'r-','linewidth',1)
```

Métodos de Integración de Newton-Cotes

REGLA DEL TRAPECIO MULTIPLE

Una forma de mejorar la precisión de la regla del trapecio consiste en dividir el intervalo de integración de *a* a *b* en varios segmentos, y aplicar el método a cada uno de ellos. Las áreas de los segmentos se suman después para obtener la integral en todo el intervalo. Las ecuaciones resultantes se llaman *fórmulas de integración, de aplicación múltiple o compuestas.*

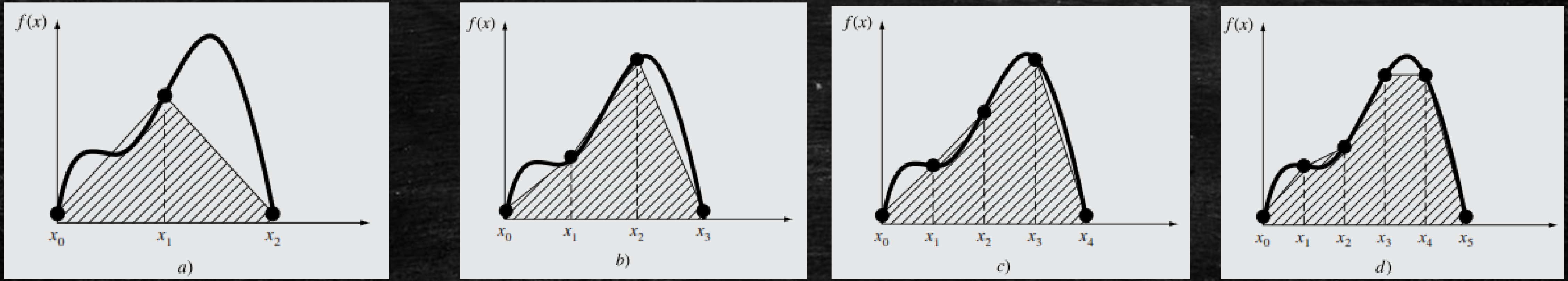


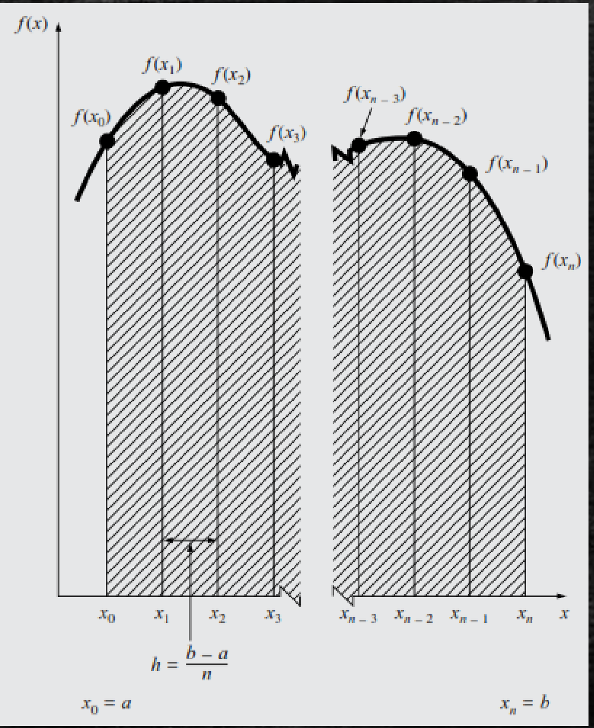
Ilustración de la regla del trapecio de aplicación múltiple. *a*) Dos segmentos, *b*) tres segmentos, c) cuatro segmentos y *d*) cinco segmentos.

Franco Salcedo López.
2021

Métodos de Integración de Newton-Cotes

REGLA DEL TRAPECIO MULTIPLE

Hay n+1 puntos igualmente espaciados (x_0, x_1, x_2, ..., x_n). En consecuencia, existen *n* segmentos del mismo ancho:



$$h = \frac{b-a}{n}$$

Si a y b se designan como x_0 y x_n, respectivamente, la integral completa se representará como

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

Sustituyendo la regla del trapecio en cada integral se obtiene

$$I = h\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + h\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \cdots + h\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}$$

o, agrupando términos,

$$I = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

$$I = \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}}\underbrace{\frac{f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n}}_{\text{Altura promedio}}$$

Franco Salcedo López.
2021

Métodos de Integración de Newton-Cotes

REGLA DEL TRAPECIO MULTIPLE

Se tiene un error con la regla del trapecio de aplicación múltiple al sumar los errores individuales de cada segmento, así

$$E_t = -\frac{(b-a)^3}{12n^3}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)$$

donde $f''(\xi_i)$, es la segunda derivada en un punto ξ_i, localizado en el segmento i. Este resultado se simplifica al estimar la media o valor promedio de la segunda derivada en todo el intervalo como

$$\bar{f}'' \cong \frac{\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)}{n}$$

Por lo tanto, $\Sigma f''(\xi_i) \cong n\bar{f}''$

Se reescribe como

$$E_a = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}\bar{f}''$$

Métodos de Integración de Newton-Cotes

EJERCICIO BASE REGLA DEL TRAPECIO MULTIPLE

Integre numéricamente, la siguiente función, desde a = 0 hasta b = 0.8 , considerando dos trozos.

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

h = (0.8-0)/2 = 0.4

$$f(0) = 0.2 \qquad f(0.4) = 2.456 \qquad f(0.8) = 0.232$$

$$I = \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}}\underbrace{\frac{f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n}}_{\text{Altura promedio}}$$

$$I = 0.8\frac{0.2 + 2(2.456) + 0.232}{4} = 1.0688$$

Si el valor exacto de la integral se puede determinar en forma analítica y es 1.640533. Entonces, el Error relativo porcentual, sería:

$$E_t = 1.640533 - 1.0688 = 0.57173 \qquad \varepsilon_t = 34.9\%$$

Error aproximado (Error de Truncamiento):

$$\bar{f}'' \cong \frac{\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)}{n}$$

$$\bar{f}''(x) = \frac{\int_0^{0.8} (-400 + 4\,050x - 10\,800x^2 + 8\,000x^3)\,dx}{0.8 - 0} = -60$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}\bar{f}$$

$$E_a = -\frac{0.8^3}{12(2)^2}(-60) = 0.64$$

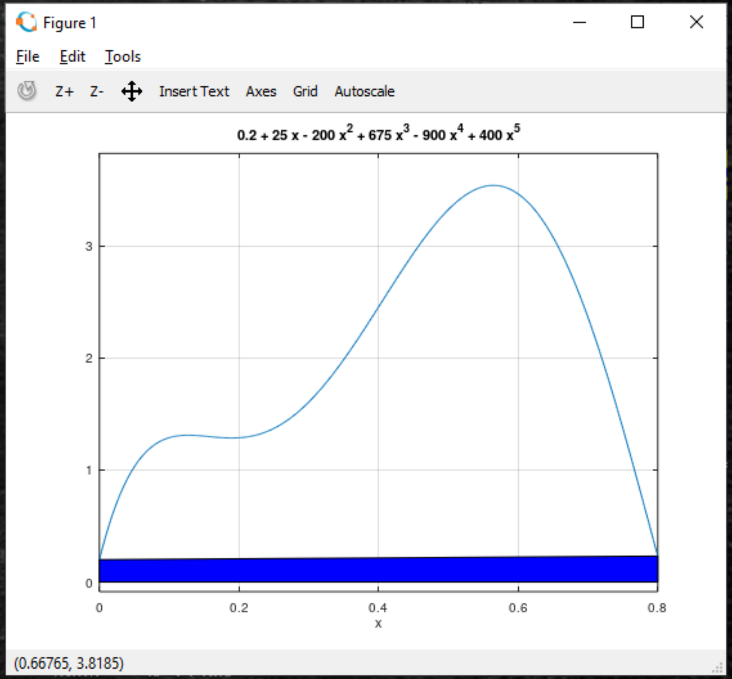
Franco Salcedo López.
2021

Métodos de Integración de Newton-Cotes

EJERCICIO BASE REGLA DEL TRAPECIO

Como lo hacemos en Octave:

```
%VECTORIZAR LA FUNCION ORIGINAL:
>>pkg load symbolic
>>syms x
>> fx9=@(x) 0.2+25*x -200*x.^2 + 675*x.^3 -900*x.^4 +400*x.^5;
>> [area] = trapeciogeneral(fx9,1,0,0.8)  %Divisiones 1
h =  0.80000
Valor verdadero 1.640533333333
Valor aprox: 0.172800000000
Error verdadero: 1.467733333333
Error porcentual: 89.47
Error aproximado: 22.6133333
area =  0.17280
```



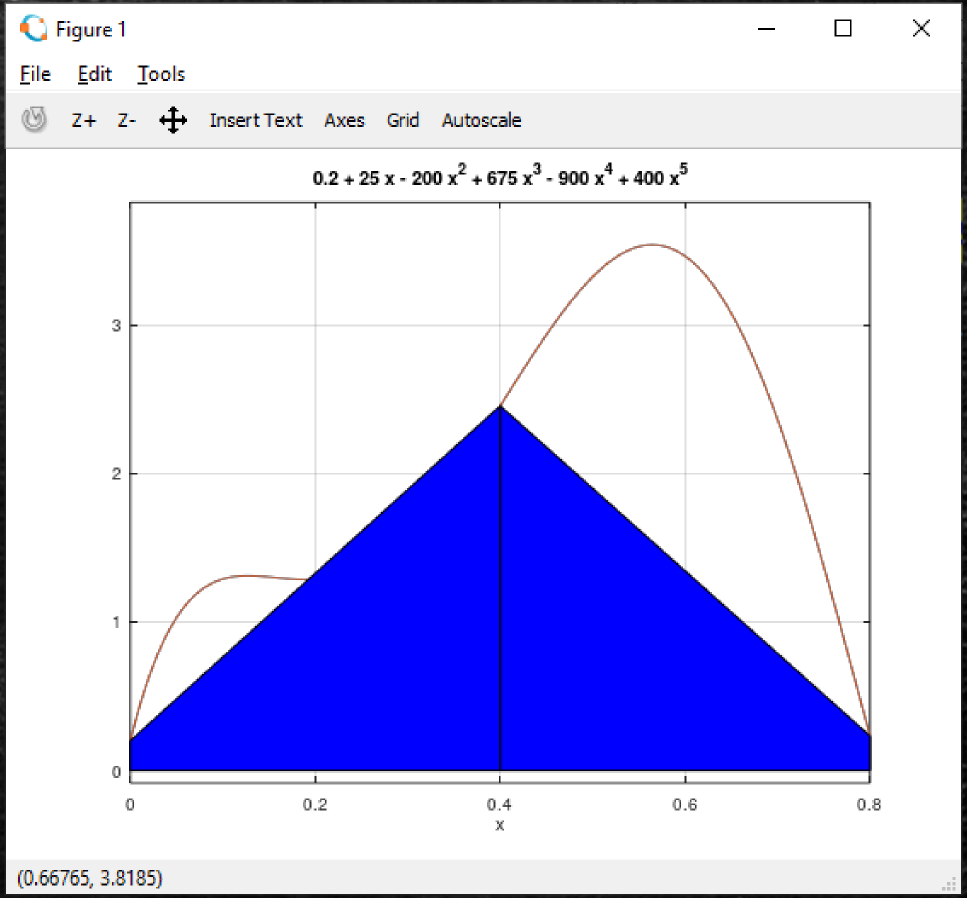
Franco Salcedo López.
2021

Métodos de Integración de Newton-Cotes

EJERCICIO BASE REGLA DEL TRAPECIO

Como lo hacemos en Octave:

```
>> [area] = trapeciogeneral(fx9,2,0,0.8)  %Divisiones 2
h =  0.40000
Valor verdadero 1.640533333333
Valor aprox: 1.068800000000
Error verdadero: 0.571733333333
Error porcentual: 34.85
Error aproximado: 5.6533333
area =  1.0688
```

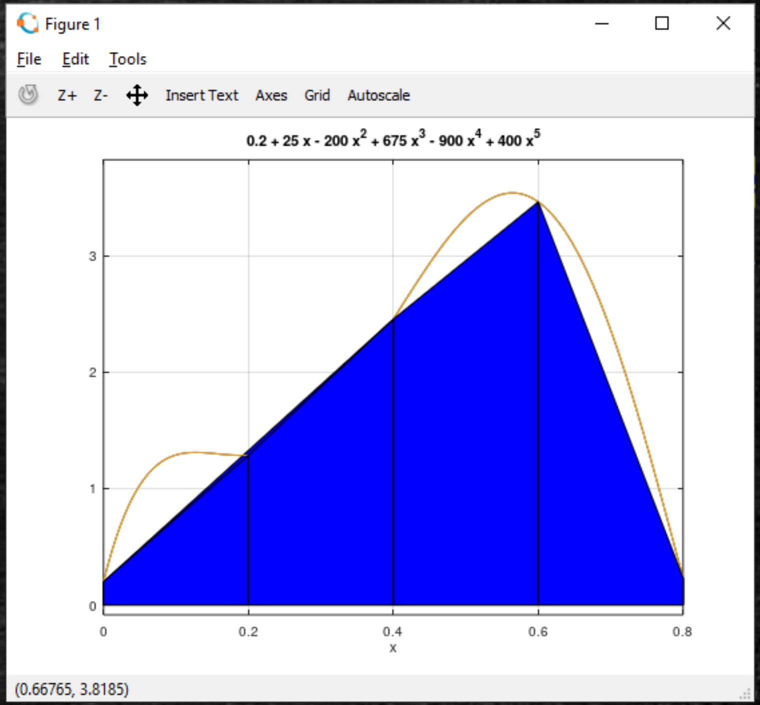


Métodos de Integración de Newton-Cotes

EJERCICIO BASE REGLA DEL TRAPECIO

Como lo hacemos en Octave:

```
>> [area] = trapeciogeneral(fx9,4,0,0.8)  %Divisiones 4
h =  0.20000
Valor verdadero 1.640533333333
Valor aprox: 1.484800000000
Error verdadero: 0.155733333333
Error porcentual: 9.49
Error aproximado: 1.4133333
area =  1.4848
```



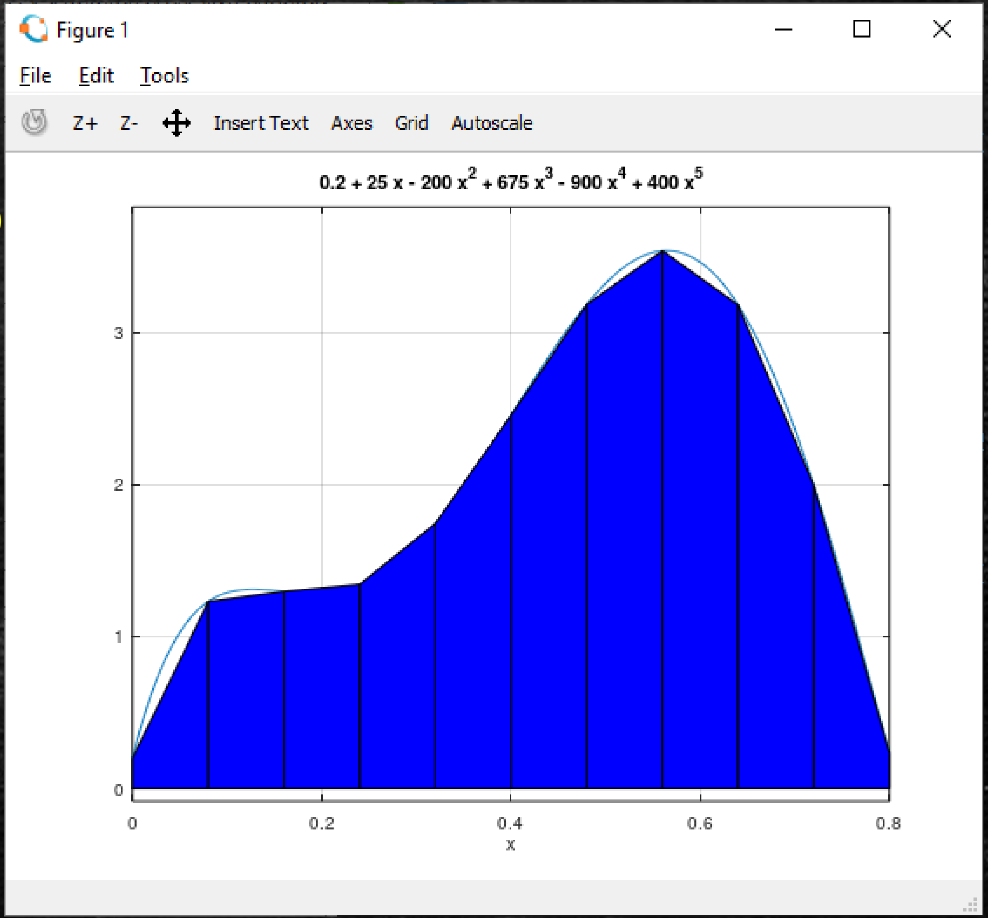
Franco Salcedo López.
2021

Métodos de Integración de Newton-Cotes

EJERCICIO BASE REGLA DEL TRAPECIO

Como lo hacemos en Octave:

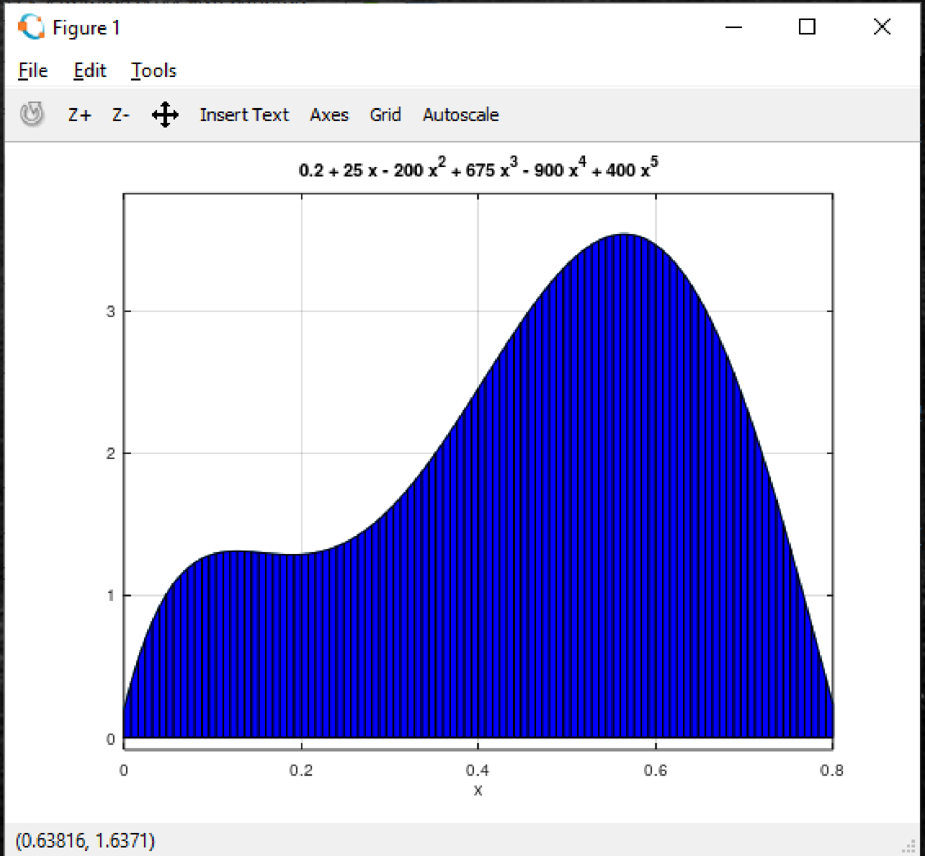
```
>> [area] = trapeciogeneral(fx9,4,0,0.8)  %divisiones 10
h =  0.080000
Valor verdadero 1.640533333333
Valor aprox: 1.615042560000
Error verdadero: 0.025490773333
Error porcentual: 1.55
Error aproximado: 0.2261333
area =  1.6150
```



Métodos de Integración de Newton-Cotes

RESUMEN DE VARIOS TAMAÑOS DE PASO

n	h	I	ε_t (%)
2	0.4	1.0688	34.9
3	0.2667	1.3695	16.5
4	0.2	1.4848	9.5
5	0.16	1.5399	6.1
6	0.1333	1.5703	4.3
7	0.1143	1.5887	3.2
8	0.1	1.6008	2.4
9	0.0889	1.6091	1.9
10	0.08	1.6150	1.6



Franco Salcedo López.
2021

Métodos de Integración de Newton-Cotes

EJERCICIOS POR RESOLVER

Evalue la siguiente integral:

$$\int_{-2}^{4} (1 - x - 4x^3 + 2x^5)\, dx$$

a) en forma analítica; b) con una sola aplicación de la regla del trapecio; c) con la regla del trapecio compuesta, con n = 2,4,6;

Métodos de Integración de Newton-Cotes

EJERCICIOS POR RESOLVER

Evalue la siguiente integral:

$$\int_1^2 (x + 1/x)^2 \, dx$$

a) en forma analítica; b) con una sola aplicación de la regla del trapecio; c) con la regla del trapecio compuesta, con n = 1,2,3,4.

Métodos de Integración de Newton-Cotes

EJERCICIOS POR RESOLVER

Evalue la siguiente integral:

$$\int_0^3 (1 - e^{-x})\, dx$$

a) en forma analítica; b) con una sola aplicación de la regla del trapecio; c) con la regla del trapecio compuesta, con n = 2,4,6;

Franco Salcedo López.
2021