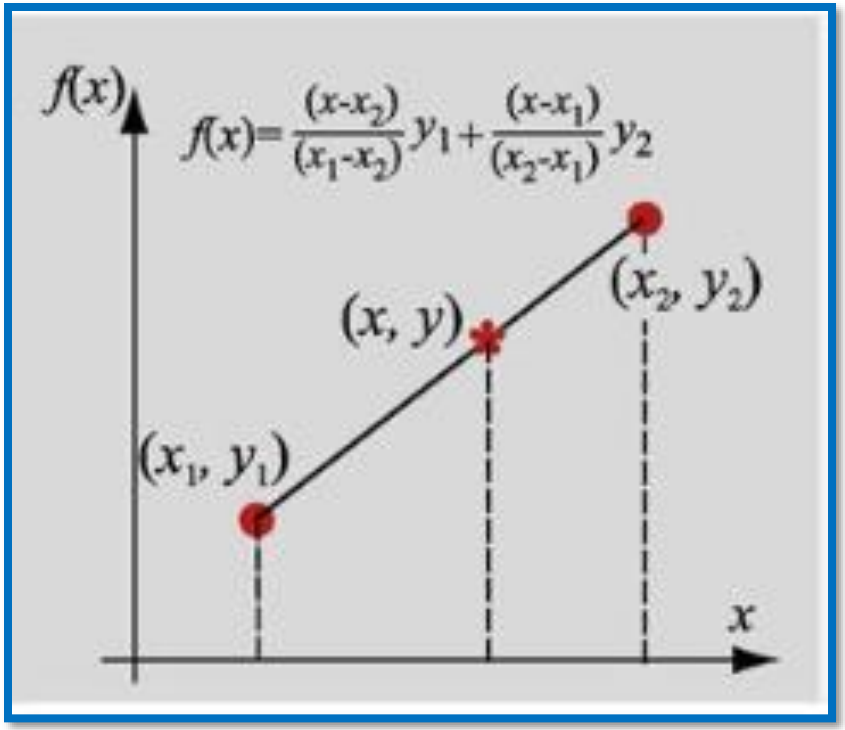
Unidad No.4
Aproximación funcional

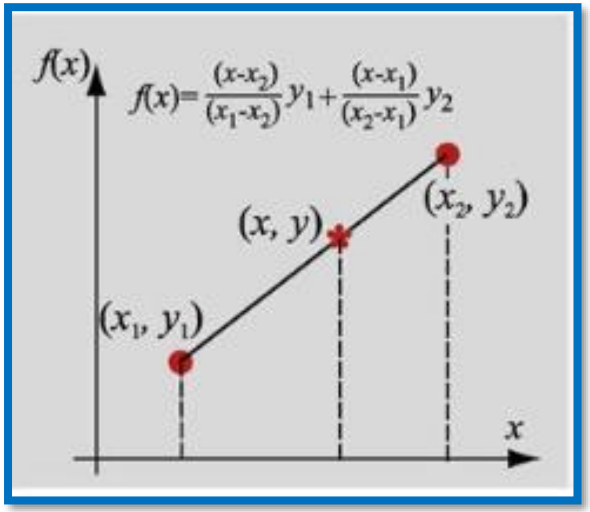
Polinomio de Lagrange



Franco H. Salcedo L. 2020

Unidad No.4
Aproximación funcional

Polinomio de Lagrange



Polinomio de Lagrange

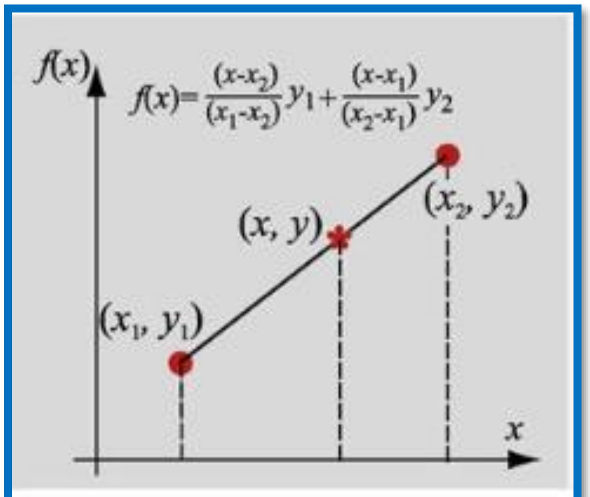
Sea una función f (x), dada en forma tabular, Para aproximar a

La aproximación polinomial simple, requiere la solución de un sistema de ecuaciones algebraicas lineales que, cuando el grado del polinomio es alto, puede presentar inconvenientes.

La aproximación polinomial de LAGRANGE y otros, no se requiere resolver un sistema de ecuaciones lineales y los cálculos se realizan directamente.

Unidad No.4
Aproximación funcional

Polinomio de Lagrange



Polinomio de Lagrange

Para encontrar el Polinomio de LAGRANGE, se parte de una función desconocida *f (x)* dada en forma tabular, y se asume que un polinomio de primer grado (ecuación de una línea recta) puede escribirse como:

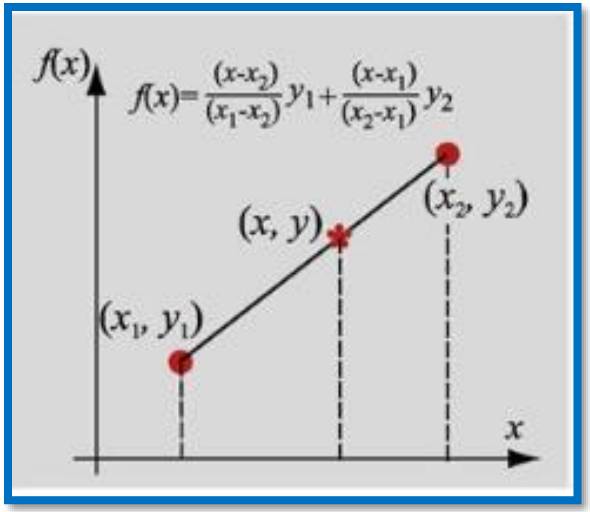
$$p(x) = a_0(x - x1) + a_1(x - x_0)$$

donde x_1 y x_0 son los argumentos de los puntos conocidos $[x_0, f(x_0)]$, $[x_1, f(x_1)]$, y a_0 y a_1 son dos coeficientes por determinar. Para encontrar el valor de a_0, se hace $x = x_0$ en la ecuación inicial,

$$a_0 = \frac{p(x_0)}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

Unidad No.4
Aproximación funcional

Polinomio de Lagrange



Polinomio de Lagrange

Para encontrar el valor de a_1, se hace $x = x_1$ en la ecuación inicial, que al despejar a1,

$$a_1 = \frac{p(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}$$

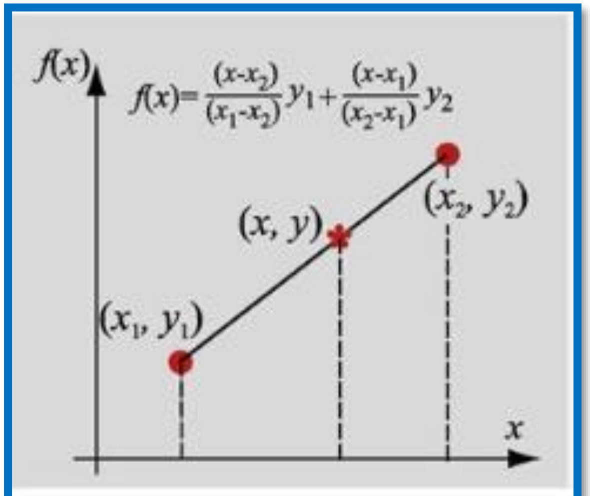
Sustituyendo en la ecuación inicial:

$$p(x) = a_0(x - x1) + a_1(x - x_0)$$

$$p(x) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}(x - x_1) + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Unidad No.4
Aproximación funcional

Polinomio de Lagrange



Polinomio de Lagrange

O en forma compacta para fines de la programación, se tiene:

$$p(x) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}(x - x_1) + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

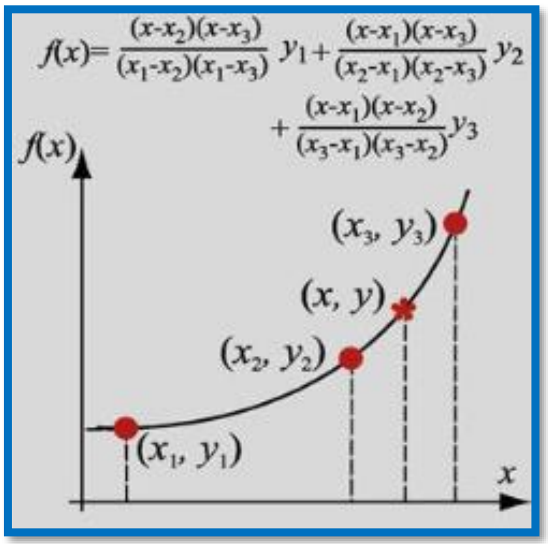
$$p(x) = L_0(x)\, f(x_0) + L_1(x)\, f(x_1)$$

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \text{y} \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

NOTA: Para un polinomio de grado 1, se requiere n+1 puntos

Unidad No.4
Aproximación funcional

Polinomio de Lagrange



Polinomio de Lagrange

Para un polinomio de grado 2, se parte de:

$$p_2(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) + a_1(x - x_0)(x - x_2) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

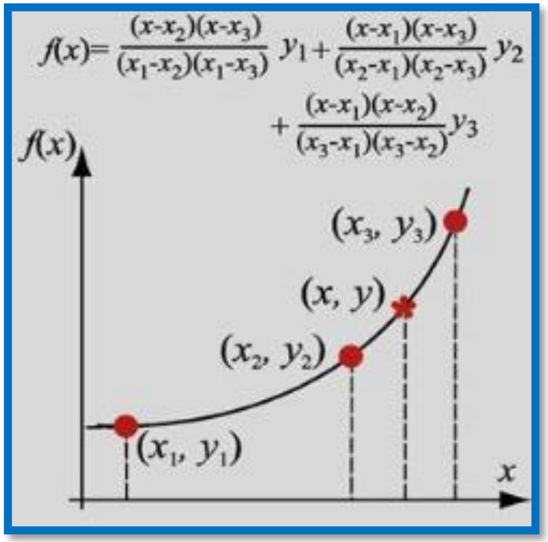
donde x_0 ,x_1 y x_2 , son los argumentos de los 3 puntos conocidos $[x_0,f(x_0)]$, $[x_1,f(x_1)]$, $[x_2,f(x_2)]$, y a_0, a_1 y a_2 son 3 coeficientes que se encuentran haciendo: para a_0, se hace $x = x_0$; a_1, se hace $x = x_1$, a_2, se hace $x = x_2$. Lo que se obtiene:

$$a_0 = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \qquad a_1 = \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$a_2 = \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Unidad No.4
Aproximación funcional

Polinomio de Lagrange



Polinomio de Lagrange

Reemplazando en la ecuación inicial

$$p_2(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) + a_1(x - x_0)(x - x_2) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$p_2(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + L_2(x) f(x_2)$$

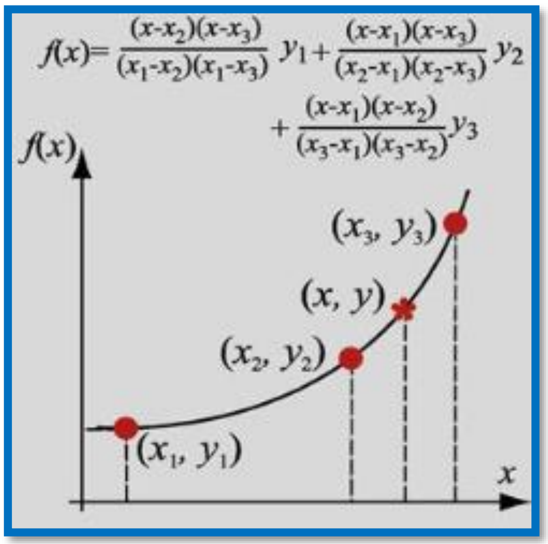
Con:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \qquad L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Unidad No.4
Aproximación funcional

Polinomio de Lagrange



Polinomio de Lagrange

Generalizando, por inducción, el lector puede obtener polinomios de tercero, cuarto o n-ésimo grado; este último queda como se indica a continuación

$$P_n(x) = L_0(x)\, f(x_0) + L_1(x)\, f(x_1) + \ldots + L_n(x)\, f(x_n)$$

Con:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_n)}$$

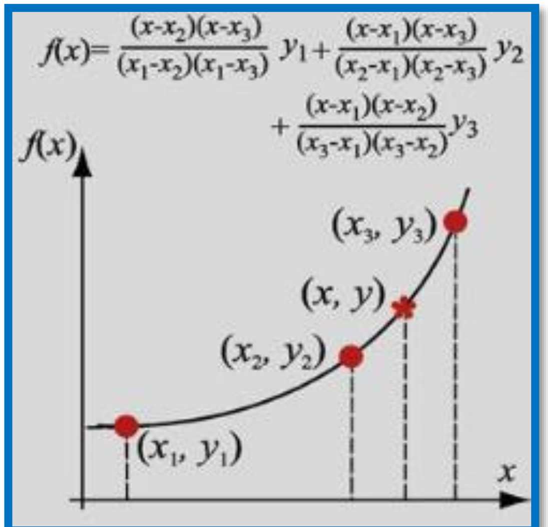
$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2) \ldots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \ldots (x_1 - x_n)}$$

$$\vdots$$

$$L_n(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \ldots (x_n - x_{n-1})}$$

Unidad No.4
Aproximación funcional

Polinomio de Lagrange



Polinomio de Lagrange

Que en forma más compacta y útil para programarse en un lenguaje de computadora quedaría

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, f(x_i)$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Unidad No.4
Aproximación funcional

Polinomio de Lagrange

i	0	1	2	3
$f(x_i)$	–3	0	5	7
x_i	0	1	3	6

Polinomio de Lagrange

Para la tabla que se presenta a continuación:

a) Obtenga la aproximación polinomial de Lagrange con todos los puntos.

b) Interpole el valor de la función $f(x)$ para $x = 1.8$.

$$p_3(x) = (x-1)(x-3)(x-6)\frac{-3}{(0-1)(0-3)(0-6)} +$$

Unidad No.4
Aproximación funcional

Polinomio de Lagrange

i	0	1	2	3
$f(x_i)$	-3	0	5	7
x_i	0	1	3	6

Polinomio de Lagrange

$$
\begin{aligned}
p_3(x) = {} & (x-1)(x-3)(x-6)\frac{-3}{(0-1)(0-3)(0-6)} + \\
& (x-0)(x-3)(x-6)\frac{0}{(1-0)(1-3)(1-6)} \\
& + (x-0)(x-1)(x-6)\frac{5}{(3-0)(3-1)(3-6)} \\
& + (x-0)(x-1)(x-3)\frac{7}{(6-0)(6-1)(6-3)}
\end{aligned}
$$

$$P_3(x) = (x^3 - 10x^2 + 27x - 18)(1/6) + (x^3 - 7x^2 + 6x)(-5/18) + (x^3 - 4x^2 + 3x)(7/90)$$

$$p_3(x) = -\frac{3}{90}x^3 - \frac{3}{90}x^2 + \frac{276}{90}x - 3$$

El valor de $x = 1.8$ se sustituye en la aproximación polinomial de Lagrange de tercer grado obtenida arriba y se tiene $f(1.8) \approx 2$.

Unidad No.4
Aproximación funcional

Polinomio de Lagrange

Tabla 5.2 Temperatura de ebullición de la acetona a diferentes presiones.

Puntos	0	1	2	3
T (°C)	56.5	113.0	181.0	214.5
P (atm)	1	5	20	40

Polinomio de Lagrange

Encontrar el polinomio de Lagrange. (Grado 3)

Unidad No.4
Aproximación funcional

Polinomio de Lagrange

Polinomio de Lagrange

Ejercicios:

Year	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Population (in thousands)	151,326	179,323	203,302	226,542	249,633	281,422

Encontrar polinomios de grado 3,