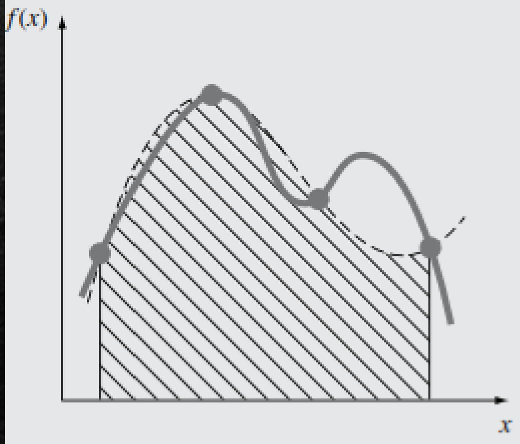
Métodos de Integración de Newton-Cotes

REGLA DE SIMPSON 3/8.

Si hay dos puntos igualmente espaciados entre f(a) y f(b), los cuatro puntos se pueden unir mediante un polinomio de tercer grado



Las fórmulas que resultan de tomar las integrales bajo un polinomio de Grado 3 se conocen como *reglas de Simpson 3/8*

Franco Salcedo López.
2021

Métodos de Integración de Newton-Cotes

REGLA DE SIMPSON 3/8

La regla de Simpson 3/8 resulta cuando se aproxima la función f(x) con un polinomio de Lagrange de tercer grado a cuatro puntos e integrarlo:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_3(x)\,dx$$

$f_3(x)$ se representa por un polinomio de Lagrange de tercer grado, el cuál al hacer manipulaciones algebraicas e integrarlo, se obtiene:

$$I \cong \frac{3h}{8}[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)]$$

$$h = (b-a)/3.$$

Esta ecuación se llama *regla de Simpson 3/8 debido a que h se multiplica por 3/8*

La regla 3/8 se expresa también en la forma:

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}}\underbrace{\frac{f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)}{8}}_{\text{Altura promedio}}$$

Franco Salcedo López.
2021

Métodos de Integración de Newton-Cotes

ERROR ESTIMADO REGLA DE SIMPSON 3/8

Se puede demostrar que la aplicación a un solo segmento de la regla de Simpson 3/8 tiene un error de truncamiento de:

$$E_t = -\frac{3}{80} h^5 f^{(4)}(\xi)$$

como $h = (b - a)/3$,

$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{6\,480} f^{(4)}(\xi)$$

promedio de la cuarta derivada en el intervalo.

Por lo cumún, se prefiere la regla de Simpson 1/3, ya que alcanza una exactitud de tercer orden con tres puntos en lugar de los cuatro puntos requeridos en la versión 3/8. No obstante, la regla de 3/8 es útil cuando el número de segmentos es impar.

Muy importante

Franco Salcedo López.
2021

Métodos de Integración de Newton-Cotes

EJERCICIO BASE REGLA DE SIMPON 3/8

Integre numéricamente, la siguiente función, desde a = 0 hasta b = 0.8

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

h= (b - a)/3 = (0.8)/3 =0.26667

$$I \cong \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

Una sola aplicación de la regla de Simpson 3/8 requiere cuatro puntos equidistantes:

$$f(0) = 0.2 \qquad f(0.2667) = 1.432724$$
$$f(0.5333) = 3.487177 \qquad f(0.8) = 0.232$$

Utilizando la ecuación (21.20),

$$I \cong 0.8\frac{0.2 + 3(1.432724 + 3.487177) + 0.232}{8} = 1.519170$$

Se sabe que la integral exacta es 1.640533, entonces el *error absoluto seria*

$$E_t = 1.640533 - 1.519170 = 0.1213630 \qquad \varepsilon_t = 7.4\%$$

El Error aproximado (Error de Truncamiento), sería:

$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{6\,480} f^{(4)}(\xi) \qquad E_a = -\frac{(0.8)^5}{6\,480}(-2\,400) = 0.1213630$$

donde -2 400 es el promedio de la cuarta derivada en el intervalo.

Franco Salcedo López.
2021

Métodos de Integración de Newton-Cotes

EJERCICIO BASE REGLA DE SIMPON 3/8

Como lo hacemos en Octave:

```
%Cargar la libreria simbolica solo la primera vez
>>pkg load symbolic
>>syms x
>>fx=0.2+25*x -200*x^2 +675*x^3 -900*x^4 +400*x^5
>>  [area] = simpson38general(fx,3,a,b)
```

```
vv = 1.6405
Valor aprox: 1.519170370370
Error verdadero: 0.121362962963
Error relativo %: 7.40
Error Aproximado: 0.1213630
area = 1.5192
```

Métodos de Integración de Newton-Cotes

EJERCICIO BASE REGLA DE SIMPSON 3/8 DE APLICACIÓN MULTIPLE

Integre numéricamente con la Regla de Simpson 3/8 de aplicación múltiple, basta con utilizar el método de aplicación simple, en intervalos de múltiplos de 3 (3,6,9 . . . .)

$$h = \frac{b-a}{n}$$

b= límite superior; a= límite inferior;
n = 3,6,9 … …..

$$I \cong \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

Si n =3 → repetimos 1 sola vez;
Si n=6 → repetimos 2 veces .
Si n=9………..

$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{6\,480} f^{(4)}(\xi)$$

promedio de la cuarta derivada en el intervalo.

Franco Salcedo López.
2021

Métodos de Integración de Newton-Cotes

EJERCICIO BASE REGLA DE SIMPON 3/8

Como lo hacemos en Octave:

```
%Cargar la libreria simbolica solo la primera vez
>>pkg load symbolic
>>syms x
>>fx=0.2+25*x -200*x^2 +675*x^3 -900*x^4 +400*x^5
>>  [area] = simpson38general(fx,6,a,b)
```

vv = 1.6405
Valor aprox: 1.632948148148
Error verdadero: 0.007585185185
Error relativo %: 0.46
Error Aproximado: 0.0113778
area = 1.6329

Franco Salcedo López.
2021

Métodos de Integración de Newton-Cotes

EJERCICIOS POR RESOLVER

Evalue la siguiente integral:

$$\int_{-2}^{4} (1 - x - 4x^3 + 2x^5)\, dx$$

Aplique la regla de Simpson 3/8), con n = 3,6,9;

Métodos de Integración de Newton-Cotes

EJERCICIOS POR RESOLVER

Evalue la siguiente integral:

$$\int_1^2 (x + 1/x)^2 dx$$

Aplique la regla de Simpson 3/8), con n = 3,6,9;

Franco Salcedo López.
2021

Métodos de Integración de Newton-Cotes

EJERCICIOS POR RESOLVER

Evalue la siguiente integral:

$$\int_0^3 (1 - e^{-x})\, dx$$

Aplique la regla de Simpson 3/8), con n = 3,6,9;

Franco Salcedo López.
2021