

Alkalmazott fizikai módszerek laboratórium

III.: Folyadékszcintillációs Spektroszkópia

Pál Balázs*
Somogyfoki Réka*,^m, Tuhári Richárd*,^m

2019. október 14.

Abstract

Az *Alkalmazott fizikai módszerek laboratórium* harmadik alkalmán a radiokarbon (^{14}C izotóp) β -spektrumát mértük ki folyadékszcintillációs spektroszkópia segítségével. A mérőműszer és a mérési feladatok természetéből fakadóan a labor során elsődlegesen nem aktív mérési munkát végeztünk, hanem megismerkedtünk a β -bomlás azon elméleti alapjaival, melyek az eredmények kiértékeléséhez elengedhetetlenül szükségesek. Levezettük a β -spektrum leírásának egy közelítő, nemrelativisztikus modelljét és kiszámítottuk annak átlagos energiáját. A mérés kiértékelése során ellenőriztük a modell helyességét az adatokra történő illesztéssel, valamint hasonlóan vizsgáltuk ezen modell módosított változatát is a Fermi-függvény felhasználásával. Megállapítottuk, hogy a β -spektrum energiájának várható értéke $\langle E \rangle = Q/3$, valamint bebizonyítottuk, hogy $\sqrt{N} \approx \sigma$, ahol N a mérési értékek darabszáma, σ pedig azok szórása. Végül a méréshez használt minta megadott *DPM*, és a mérési adatainkból számolt *CPM* értékek segítségével kiszámítottuk a detektor η detektálási hatásfokának mértékét is.

I. BEVEZETÉS

A β -bomlás ismerete minden fizikával foglalkozó számára alapvetően szükséges kell, hogy legyen. Ez már önmagában jelentős belátást nyújt mind a gyenge kölcsönhatás, mind pedig a neutrínók mi-benlétére, mely közül az első az alapvető kölcsönhatások, a második pedig az elemi részekék egyike. Mindkettő az ismert fizikai világot alapvetően meghatározó jelenség és objektum, így ismeretük elengedhetetlen.

A mérés során a ^{14}C – hétköznapi nevén radiokarbon – β -spektrumát vizsgáltuk ún. folyadékszcintillációs spektroszkópia segítségével. A mérés során az alábbi kérdésekre kerestük a választ:

- Mennyire követik a nemrelativisztikus, valamint a Fermi-függvénnyel kibővített nemrelativisztikus és relativisztikus elméleti modellek a mérés során kimért spektrumot? Mik okozhatják az esetleges eltéréseket?
- Igaz-e, hogy az energia várható értéke az adott mag Q -faktorának harmadával egyenlő, tehát

$$\langle E \rangle = \frac{Q}{3} ?$$

- Igaz-e, hogy a mérési adatok számának gyöke (\sqrt{N}) közelít-e azok szórásának (σ) értékéhez?

II. TECHNIKAI LEÍRÁS

A mérésben használt minta oldott formában, egy lezárt üvegfolyában helyezkedett el, mely mellett az üvegen belül volt megtalálható a három összetevőből álló szcintillációs „koktél” is. Ezt a mintát összerázva helyeztük egy már előre kalibrált

szcintillációs számláló két, egymással szemben elhelyezkedő fotoelektron-sokszorozója közé. Minden egyéb feladatot innentől a gép végzett el helyettünk.

A ^{14}C mintával végül összesen 50 darab, egyenként 2 perc hosszú mérést végeztünk, így végeredményben 50 teljes spektrumot kaptunk, melyeket így már statisztikai módszerekkel elemezni tudtunk. A sokcsatornás analizátorra kapcsolt számítógép hibájából fakadóan ezen 50 mérés közül csak 49-ből szereztünk felhasználható eredményeket, azonban szerencsére a kötelező egyetemi labormunkák esetén nem várt el akkora pontosság, hogy ez az apró hiány a végeredményeink minőségét negatívan befolyásolná.

III. ELMÉLETI ALAPOK

A mérés – az I. rész felsorolásában is olvasható – első számú célja a β -bomlás Fermi-féle modelljének vizsgálata volt. Ehhez meg kellett értenünk a β -spektrum lehetséges leírását. Kiindulásként a Fermi-féle arany szabályt vehetjük, mely az átmeneti valószínűséget adja meg két kvantumállapot között:

$$w_{k \rightarrow v} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \Psi_v | H_\beta | \Psi_k \rangle|^2 \varrho_v(E_v) \quad (1)$$

Ahol a k és v indexek sorrendben a kezdő és végállapotra utalnak.

III.1. ALKALMAZOTT KÖZELÍTÉSEK

Hogy a számításainkat el tudjuk végezni, a Fermi-szabály kapcsán 5 különböző közelítéssel élünk, melyből következtetünk majd a β -bomlás $dn(E)/dE$ végállapot-i állapotsűrűségére. Ezek a közelítések az alábbiak:

*Eötvös Loránd Tudományegyetem

^mMérőtársak

1. Csak megengedett átmenetekről beszélünk.

Ez esetben a neutrínó és az elektron teljes pályaperdülete $L = 0$. Ekkor a Fermi-féle arany-szabályban szereplő mátrixelem értéke:

$$|\langle \Psi_v | H_\beta | \Psi_k \rangle|^2 = |H_{kv}|^2 \approx \text{const.} \quad (2)$$

Továbbiakban ebből levezethető a mátrixelem pontos értéke is, mely indikálni fogja a különbséget a Fermi- (F) és a Gamow-Teller-típusú (GT) átmenetek között:

$$|H_{kv}|^2 = (g_V^2 M_F^2 + g_A^2 M_{GT}^2) \frac{1}{V^2} \quad (3)$$

Ahol g_V a vektor típusú, míg g_A az axiálvektor típusú kölcsönhatás csatolási állandója.

2. Az elektron, valamint a neutrínó hullámfüggvényét nemrelativisztikus síkhullámként kezeljük.

β -bomlás során a mag vonzása a maghoz közel az elektron hullámfüggvényét valós esetben torzítaná, azonban ebben a közelítésben ettől eltekintünk. Ezt az eltérést a Fermi-függvény bevezetésével korrigáljuk. Ekkor a két részecske hullámfüggvénye kifejezhető az alábbi módokon:

$$\phi_e(\mathbf{r}_e) = N_e e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_e \cdot \mathbf{r}_e} \quad (4)$$

$$\phi_\nu(\mathbf{r}_\nu) = N_\nu e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_\nu \cdot \mathbf{r}_\nu} \quad (5)$$

Az állapotok száma egy fázistérfogatban ekkor könnyen felírható mindkét részecske esetére:

$$dn_e(E) = \frac{V \cdot 4\pi p_e^2 dp_e}{h^2} \quad (6)$$

$$dn_\nu(E_\nu) = \frac{V \cdot 4\pi p_\nu^2 dp_\nu}{h^2} \quad (7)$$

3. Az e^- és ν kirepülési irányát függetlennek vesszük.

Ekkor az állapotszám adott fázistérfogatban a következő:

$$\begin{aligned} dn(E, E_\nu) &= dn_e dn_\nu \propto p_e^2 dp_e p_\nu^2 dp_\nu = \\ &= p_e^2 \frac{dp_e}{dE} p_\nu^2 \frac{dp_\nu}{dE_\nu} dE dE_\nu \end{aligned} \quad (8)$$

Ahol felhasználtam a 6. és 7. egyenletekben szereplő azonosságot. Itt csak arányosságot írtam fel, az egyenlet jobb oldala valójában egy sok tagból álló konstanssal van megszorozva még.

4. A leánymag visszalökődését elhanyagoljuk. A bomlás Q faktorát ekkor az elektron és neutrínó energiájának összegeként kapjuk:

$$Q = E + E_\nu \quad (9)$$

5. A neutrínó nyugalmi tömegét zérusnak vesszük.

Ekkor a neutrínót ún. „ultrarelativisztikus” módon kezeljük, impulzusát és annak energia szerinti deriváltját ilyenkor az alábbi összefüggések adják:

$$p_\nu = \frac{E_\nu}{c} \quad (10)$$

$$\frac{dp_\nu}{dE} = \frac{1}{c} \quad (11)$$

Ezek alapján mind a nemrelativisztikus, mind pedig a relativisztikus esetre levezethetjük az állapotsűrűséget és így a β -bomlás energiaspektrumát, attól függően, hogy az elektron impulzusára a nemrelativisztikus, vagy relativisztikus összefüggést használjuk. Első esetben az impulzus a következő:

$$p_e = \sqrt{2mE} \quad (12)$$

$$\frac{dp_e}{dE} = \frac{m}{\sqrt{2mE}} \quad (13)$$

Míg második esetben az alábbi:

$$p_e = \frac{1}{c} \sqrt{(E + m_e c^2)^2 - m_e^2 c^4} \quad (14)$$

$$\frac{dp_e}{dE} = \frac{1}{c} \frac{E + m_e c^2}{\sqrt{(E + m_e c^2)^2 - m_e^2 c^4}} \quad (15)$$

A részletesen számolások az A. függelékben találhatóak.

III.2. VÁRHATÓ ENERGIAÉRTÉK

A várható érték definíciója alapján megadható a β -spektrum energiájának várható értéke az alábbi módon:

$$\langle E \rangle = \int_0^Q EP(E) dE \quad (16)$$

Ahol $P(E)$ az adott energiájú átmenet valószínűsége. Ez kiszámítható a $dn(E)/dE$ állapotsűrűség, teljes spektrumra vett összegével történő normálással:

$$P(E) = \frac{dn(E)/dE}{\int_0^Q [dn(E)/dE] dE} \quad (17)$$

Az energia várható értéke a nemrelativisztikus esetből kapott számítás alapján:

$$\langle E \rangle = \frac{Q}{3} \quad (18)$$

A teljes számítás az A. függelékben található.

IV. KIÉRTÉKELÉS

V. DISZKUSSZIÓ

APPENDIX A.

APPENDIX A.1. AZ ÁLLAPOTSŰRŰSÉG NEMRELATIVISZTIKUS SZÁMÍTÁSA

Keressük a 8. egyenletben leírt $dn(E, E_\nu)$ állapotszám egyváltozós alakját. Ezt a minden E_ν -re történő kiintegrálással és egy $(E_\nu - E - Q)$ argumentumú Dirac-deltával kaphatjuk meg, ahol az utóbbi az energiamegmaradást érvényesítendő jelenik meg az egyenletben. Az integrál alakja a következő ebben az esetben:

$$dn(E) = \int_{E_\nu} dn(E, E_\nu) \cdot \delta(E_\nu - E - Q) \quad (19)$$

$$dn(E) = C_1 \cdot \int_{E_\nu} \left(p_e^2 \frac{dp_e}{dE} p_\nu^2 \frac{dp_\nu}{dE_\nu} \right) \cdot \delta(E_\nu - E - Q) dE dE_\nu \quad (20)$$

Ahol C_1 egy soktagú konstans. Ennek az integrálnak az értéke a Dirac-delta azonosságai alapján egyből felírható:

$$dn(E) = C_1 \cdot p_e^2 \frac{dp_e}{dE} p_\nu^2 \frac{dp_\nu}{dE_\nu} \Big|_{E_\nu=Q-E} dE \quad (21)$$

Melyből az állapotsűrűség dE -vel történő leosztás után kapható:

$$\frac{dn(E)}{dE} = C_1 \cdot p_e^2 \frac{dp_e}{dE} p_\nu^2 \frac{dp_\nu}{dE_\nu} \Big|_{E_\nu=Q-E} \quad (22)$$

nemrelativisztikus esetben a 12. és 13. egyenletek helyettesítjük be az elektronra, valamint felhasználjuk a neutrínóra vonatkozó 10. és 11. képleteket is.

$$\frac{dn(E)}{dE} = C_1 \cdot \left(\sqrt{2m_e E} \right)^2 \frac{m_e}{\sqrt{2m_e E}} \cdot \left(\frac{E_\nu}{c} \right)^2 \Big|_{E_\nu=Q-E} \frac{1}{c} = C_1 \cdot \frac{2m_e^2 E}{\sqrt{2m_e E}} \cdot \frac{(Q-E)^2}{c^3} \quad (23)$$

A konstans értékeket (beleértve C_1 -et is) egy C_2 konstansba összevonva a végleges állapotsűrűséget nemrelativisztikus esetben az alábbi függvény adja:

$$\boxed{\frac{dn(E)}{dE} = C_2 \cdot \sqrt{E} (Q-E)^2} \quad (24)$$

APPENDIX A.2. AZ ÁLLAPOTSŰRŰSÉG RELATIVISZTIKUS SZÁMÍTÁSA

Relativisztikus esetben a 21. egyenletbe a neutrínóra vonatkozó egyenletek mellett az elektronra a 14. és 15. alakokat használjuk. Elvégezve a behelyettesítést a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{dn(E)}{dE} &= C_1 \cdot \left(\frac{1}{c} \sqrt{(E + m_e c^2)^2 - m_e^2 c^4} \right)^2 \cdot \frac{1}{c} \frac{E + m_e c^2}{\sqrt{(E + m_e c^2)^2 - m_e^2 c^4}} \cdot \left(\frac{E_\nu}{c} \right)^2 \Big|_{E_\nu=Q-E} \frac{1}{c} = \\ &= C_1 \cdot \frac{1}{c^2} \left((E + m_e c^2)^2 - m_e^2 c^4 \right) \cdot \frac{1}{c} \frac{E + m_e c^2}{\sqrt{(E + m_e c^2)^2 - m_e^2 c^4}} \cdot \frac{(Q-E)^2}{c^3} = \\ &= C_1 \cdot \frac{1}{c^6} \cdot \underbrace{\sqrt{(E + m_e c^2)^2 - m_e^2 c^4}}_{cp_e} \cdot \underbrace{(E + m_e c^2)}_{E_{tot}} \cdot (Q-E)^2 \end{aligned} \quad (25)$$

A konstans értékeket újból összevonva (C_1 -el együtt) egy C_3 konstansba a végleges eredményre a következőt kapjuk:

$$\boxed{\frac{dn(E)}{dE} = C_3 \cdot p_e \cdot E_{tot} \cdot (Q-E)^2} \quad (26)$$

APPENDIX A.3. A NEMRELATIVISZTIKUS ESETBEN ILLESZTETT GÖRBE

Mind a nemrelativisztikus, mind pedig a relativisztikus esetben az $n(E)$ állapotszám függvényét szükséges illeszteni az elméleti görbére. Ezt a $dn(E)$ integrálásából kaphatjuk meg. Nemrelativisztikus esetben a 24. egyenletet felhasználva:

$$\begin{aligned} n(E) &= \int dn(E) = C_2 \cdot \int \sqrt{E} \cdot (Q-E)^2 dE = \\ &= C_2 \cdot \left(\int \sqrt{E} \cdot Q^2 dE - \int \sqrt{E} \cdot 2QE dE + \int \sqrt{E} \cdot E^2 dE \right) \end{aligned} \quad (27)$$

Az integrálokat elvégezve a következő alakot kapjuk:

$$n(E) = C_2 \cdot \left(\frac{2}{3} E^{3/2} Q^2 - \frac{2}{5} E^{5/2} \cdot 2Q + \frac{2}{7} E^{7/2} \right) \quad (28)$$

Az illesztéshez ez alapján az alábbi paraméteres görbét használtam:

$$f(E) = p_1 + p_2 \cdot E^{3/2} - p_3 \cdot E^{5/2} + p_4 \cdot E^{7/2} \quad (29)$$

A Fermi-függvénnyel kibővített esetben ez kissé változott:

$$\boxed{p_1 + \left(p_2 + p_3 \cdot E^{2/3} - p_4 \cdot E^{5/2} + p_5 \cdot E^{7/2} \right) \cdot F(E)} \quad (30)$$

APPENDIX A.4. A RELATIVISZTIKUS ESETBEN ILLESZTETT GÖRBE

Relativisztikus esetben az állapotszám $n(E)$ függvénye jóval bonyolultabb képet öltött, mint a nemrelativisztikus esetben. Itt a 26. egyenlet eredményét kell behelyettesítsük az integrandusba:

$$n(E) = \int dn(E) = C_3 \cdot \int p_e \cdot E_{tot} \cdot (Q - E)^2 dE \quad (31)$$

Mely a p_e és E_{tot} értékekkel behelyettesítve:

$$n(E) = C_3 \cdot \frac{1}{c} \cdot \int \sqrt{(E + m_e c^2)^2 - m_e^2 c^4} \cdot (E + m_e c^2) \cdot (Q - E)^2 dE \quad (32)$$

Kibontva a zárójeleket ezt az alakot több integrál összegére bonthatjuk, azonban az átláthatóság és a számolás egyszerűsége kedvéért, előbb rendezzük át a gyökös formában szereplő p_e alakját:

$$\sqrt{(E + m_e c^2)^2 - m_e^2 c^4} = \sqrt{E^2 + 2Em_e c^2} = \sqrt{E(E + 2m_e c^2)} \quad (33)$$

Ezt felhasználva 6 integrál összegére bontjuk a 66. egyenletben szereplő integrált:

$$I_1 = \int \sqrt{E(E + 2m_e c^2)} \cdot E \cdot Q^2 dE = Q^2 \cdot \int \sqrt{E^3(E + 2m_e c^2)} dE \quad (34)$$

$$I_2 = - \int \sqrt{E(E + 2m_e c^2)} \cdot E \cdot 2QE dE = -2Q \cdot \int \sqrt{E^5(E + 2m_e c^2)} dE \quad (35)$$

$$I_3 = \int \sqrt{E(E + 2m_e c^2)} \cdot E \cdot E^2 dE = \int \sqrt{E^7(E + 2m_e c^2)} dE \quad (36)$$

$$I_4 = \int \sqrt{E(E + 2m_e c^2)} \cdot m_e c^2 \cdot Q^2 dE = m_e c^2 \cdot Q^2 \cdot \int \sqrt{E(E + 2m_e c^2)} dE \quad (37)$$

$$I_5 = - \int \sqrt{E(E + 2m_e c^2)} \cdot m_e c^2 \cdot 2QE dE = -m_e c^2 \cdot 2Q \cdot \int \sqrt{E^3(E + 2m_e c^2)} dE \quad (38)$$

$$I_6 = \int \sqrt{E(E + 2m_e c^2)} \cdot m_e c^2 \cdot E^2 dE = m_e c^2 \cdot \int \sqrt{E^5(E + 2m_e c^2)} dE \quad (39)$$

Az $n(E)$ állapotszám értéke ekkor felírható ezek segítségével az alábbi módon:

$$n(E) = C_3 \cdot \frac{1}{c} \cdot \sum_{k=1}^6 I_k \quad (40)$$

Az I_k függvények mindegyike hasonló alakú, megoldásuk egzakt alakra hozható:

$$\int \sqrt{x^n \cdot (x + a)} = \frac{2x \sqrt{x^n \cdot (x + a)} \cdot {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{n+2}{2}; \frac{n+4}{2}; -\frac{x}{a}\right)}{(n+2) \sqrt{\frac{x+a}{a}}} + C \quad (41)$$

Ahol ${}_2F_1(a; b; c; z)$ a hipergeometrikus függvény. Átírva az egyes integrálokat a következőket kapjuk:

$$I_1 = \frac{2E \sqrt{E^3 \cdot (E + 2m_e c^2)} \cdot {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{3+2}{2}; \frac{3+4}{2}; -\frac{E}{2m_e c^2}\right)}{(3+2) \sqrt{\frac{E+2m_e c^2}{2m_e c^2}}} + C_{I_1} \quad (42)$$

$$I_2 = - \frac{2E \sqrt{E^5 \cdot (E + 2m_e c^2)} \cdot {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{5+2}{2}; \frac{3+4}{2}; -\frac{E}{2m_e c^2}\right)}{(5+2) \sqrt{\frac{E+2m_e c^2}{2m_e c^2}}} + C_{I_2} \quad (43)$$

$$I_3 = \frac{2E \sqrt{E^7 \cdot (E + 2m_e c^2)} \cdot {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{7+2}{2}; \frac{3+4}{2}; -\frac{E}{2m_e c^2}\right)}{(7+2) \sqrt{\frac{E+2m_e c^2}{2m_e c^2}}} + C_{I_3} \quad (44)$$

$$I_4 = \frac{2E\sqrt{E \cdot (E + 2m_e c^2)} \cdot {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{1+2}{2}; \frac{3+4}{2}; -\frac{E}{2m_e c^2}\right)}{(1+2)\sqrt{\frac{E+2m_e c^2}{2m_e c^2}}} + C_{I_4} \quad (45)$$

$$I_5 = -\frac{2E\sqrt{E^3 \cdot (E + 2m_e c^2)} \cdot {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{3+2}{2}; \frac{3+4}{2}; -\frac{E}{2m_e c^2}\right)}{(3+2)\sqrt{\frac{E+2m_e c^2}{2m_e c^2}}} + C_{I_5} \quad (46)$$

$$I_6 = \frac{2E\sqrt{E^5 \cdot (E + 2m_e c^2)} \cdot {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{5+2}{2}; \frac{3+4}{2}; -\frac{E}{2m_e c^2}\right)}{(5+2)\sqrt{\frac{E+2m_e c^2}{2m_e c^2}}} + C_{I_6} \quad (47)$$

Jelöljük minden hipergeometrikus függvényt az adott I_k -hoz tartozó n értékkel. Így tehát

$${}_2F_1(a; b; c; z) \equiv {}_2F_1(n) \quad (48)$$

Elhagyva a konstans értékeket, egyszerűsítsük a fenti kifejezéseket:

$$I_1 = \frac{2E^{5/2} \cdot \sqrt{E + 2m_e c^2}}{5\sqrt{\frac{E+2m_e c^2}{2m_e c^2}}} \cdot {}_2F_1(3) \quad (49) \quad I_4 = \frac{2E^{3/2} \cdot \sqrt{E + 2m_e c^2}}{3\sqrt{\frac{E+2m_e c^2}{2m_e c^2}}} \cdot {}_2F_1(1) \quad (52)$$

$$I_2 = \frac{2E^{7/2} \cdot \sqrt{E + 2m_e c^2}}{7\sqrt{\frac{E+2m_e c^2}{2m_e c^2}}} \cdot {}_2F_1(5) \quad (50) \quad I_5 = \frac{2E^{5/2} \cdot \sqrt{E + 2m_e c^2}}{5\sqrt{\frac{E+2m_e c^2}{2m_e c^2}}} \cdot {}_2F_1(3) \quad (53)$$

$$I_3 = \frac{2E^{9/2} \cdot \sqrt{E + 2m_e c^2}}{9\sqrt{\frac{E+2m_e c^2}{2m_e c^2}}} \cdot {}_2F_1(7) \quad (51) \quad I_6 = \frac{2E^{7/2} \cdot \sqrt{E + 2m_e c^2}}{7\sqrt{\frac{E+2m_e c^2}{2m_e c^2}}} \cdot {}_2F_1(5) \quad (54)$$

Az kifejezésekben szereplő törtek $\sqrt{E + 2m_e c^2}$ -el egyszerűsíthetők, valamint átrendezhetők:

$$I_1 = \frac{2}{5} \cdot E^{5/2} \sqrt{2m_e c^2} \cdot {}_2F_1(3) \quad (55) \quad I_4 = \frac{2}{3} \cdot E^{5/2} \sqrt{2m_e c^2} \cdot {}_2F_1(1) \quad (58)$$

$$I_2 = \frac{2}{7} \cdot E^{5/2} \sqrt{2m_e c^2} \cdot {}_2F_1(5) \quad (56) \quad I_5 = \frac{2}{5} \cdot E^{5/2} \sqrt{2m_e c^2} \cdot {}_2F_1(3) \quad (59)$$

$$I_3 = \frac{2}{9} \cdot E^{5/2} \sqrt{2m_e c^2} \cdot {}_2F_1(7) \quad (57) \quad I_6 = \frac{2}{7} \cdot E^{5/2} \sqrt{2m_e c^2} \cdot {}_2F_1(5) \quad (60)$$

APPENDIX A.5. A VÁRHATÓ ENERGIA NEMRELATIVISZTIKUS SZÁMÍTÁSA

A számításhoz a 16. egyenletben szereplő összefüggést használjuk, melybe a 24. egyenletben kapott eredmény helyettesítjük be. Ilyenformán a következő alakot kapjuk:

$$\langle E \rangle = \int_0^Q EP(E) dE = \int_0^Q E \cdot \frac{dn(E)/dE}{\int_0^Q [dn(E)/dE] dE} dE \quad (61)$$

Előbb a $P(E)$ értékét számítjuk ki, mely a következő lesz:

$$P(E) = \frac{dn(E)/dE}{\int_0^Q [dn(E)/dE] dE} = \frac{C_2 \cdot \sqrt{E} (Q - E)^2}{\int_0^Q [C_2 \cdot \sqrt{E} (Q - E)^2] dE} \quad (62)$$

A számlálóban és nevezőben megjelenő két konstans kiejti egymást. A végeredmény megadásához valójában csak a nevezőben szereplő integrál értékét kell kiszámítanunk:

$$\begin{aligned} \int_0^Q \sqrt{E} (Q - E)^2 dE &= \int_0^Q \sqrt{E} \cdot (Q^2 - 2QE + E^2) dE = \\ &= \int_0^Q \sqrt{E} Q^2 dE - \int_0^Q \sqrt{E} 2QE dE + \int_0^Q \sqrt{E} E^2 dE = \\ &= \left[\frac{2}{3} \cdot E^{3/2} Q^2 \right]_0^Q - \left[2 \cdot \frac{2}{5} \cdot E^{5/2} \cdot Q \right]_0^Q + \left[\frac{2}{7} \cdot E^{7/2} \right]_0^Q = \\ &= \frac{2}{3} \cdot Q^{3/2} Q^2 - 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot Q^{5/2} \cdot Q + \frac{2}{7} \cdot Q^{7/2} = \frac{2}{3} \cdot Q^{7/2} - \frac{4}{5} \cdot Q^{7/2} + \frac{2}{7} \cdot Q^{7/2} = Q^{7/2} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{2}{7} \right) \end{aligned} \quad (63)$$

Tehát végeredményben a nevezőben levő integrál értéke:

$$\int_0^Q \sqrt{E} (Q - E)^2 dE = \frac{16}{105} Q^{7/2} \quad (64)$$

Ebból a $P(E)$ értéke kiszámítható a 61. egyenletbe behelyettesítve:

$$P(E) = \frac{\sqrt{E}(Q-E)^2}{\frac{16}{105}Q^{7/2}} = \frac{105}{16} \frac{\sqrt{E}Q^2 - \sqrt{E}2QE + \sqrt{E}E^2}{Q^{7/2}}$$

$$P(E) = \frac{105}{16} \left(E^{1/2}Q^{-3/2} - E^{3/2}2Q^{-5/2} + E^{5/2} \cdot Q^{-7/2} \right) \quad (65)$$

Ezen eredmény segítségével végre kiszámíthatjuk az energia várható értékének nagyságát:

$$\langle E \rangle = \int_0^Q E \cdot \frac{105}{16} \left(E^{1/2}Q^{-3/2} - E^{3/2}2Q^{-5/2} + E^{5/2} \cdot Q^{-7/2} \right) dE$$

$$\langle E \rangle = \int_0^Q \frac{105}{16} \left(E^{3/2}Q^{-3/2} - E^{5/2}2Q^{-5/2} + E^{7/2} \cdot Q^{-7/2} \right) dE$$

$$\langle E \rangle = \frac{105}{16} \cdot \left(Q^{-3/2} \int_0^Q E^{3/2} dE - 2Q^{-5/2} \int_0^Q E^{5/2} dE + Q^{-7/2} \int_0^Q E^{7/2} dE \right) \quad (66)$$

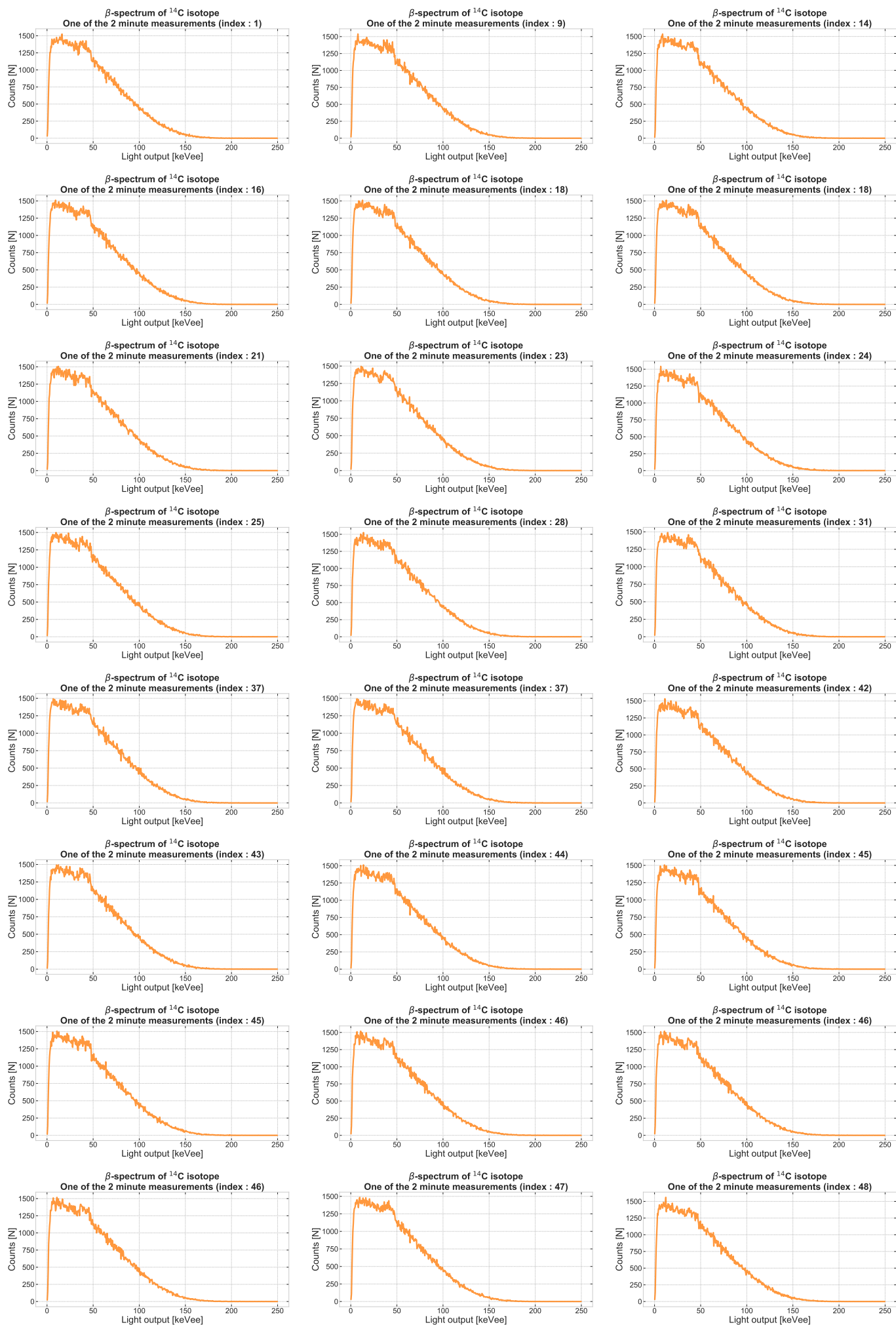
Az itteni egyszerű integrálok során csak a felső integrálási határhoz tartozó értékek lesznek nem zérusak, így egyszerűen egy $E \rightarrow Q$ helyettesítéssel kapjuk meg a végleges eredményt az integrálok elvégzése után:

$$\langle E \rangle = \frac{105}{16} \cdot \left(Q^{-3/2} \frac{2}{5} Q^{5/2} - 2Q^{-5/2} \frac{2}{7} Q^{7/2} + Q^{-7/2} \frac{2}{9} Q^{9/2} \right) = \frac{105}{16} \cdot \left(\frac{2}{5} Q - \frac{4}{7} Q + \frac{2}{9} Q \right) \quad (67)$$

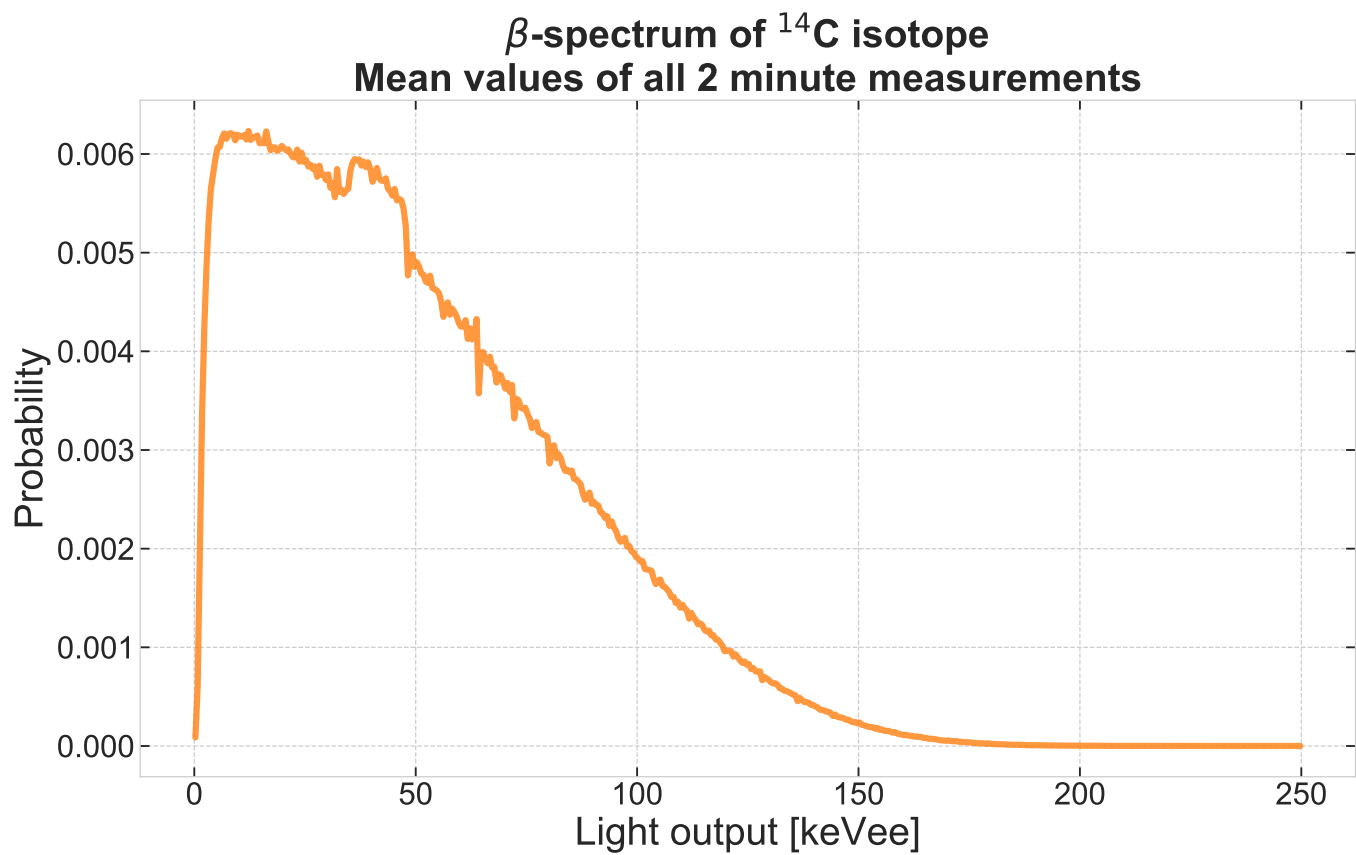
Így az $\langle E \rangle$ végleges értéke nemrelativisztikus közelítésben:

$$\langle E \rangle = \frac{105}{16} \cdot \frac{16}{315} \cdot Q = \frac{Q}{3} \quad (68)$$

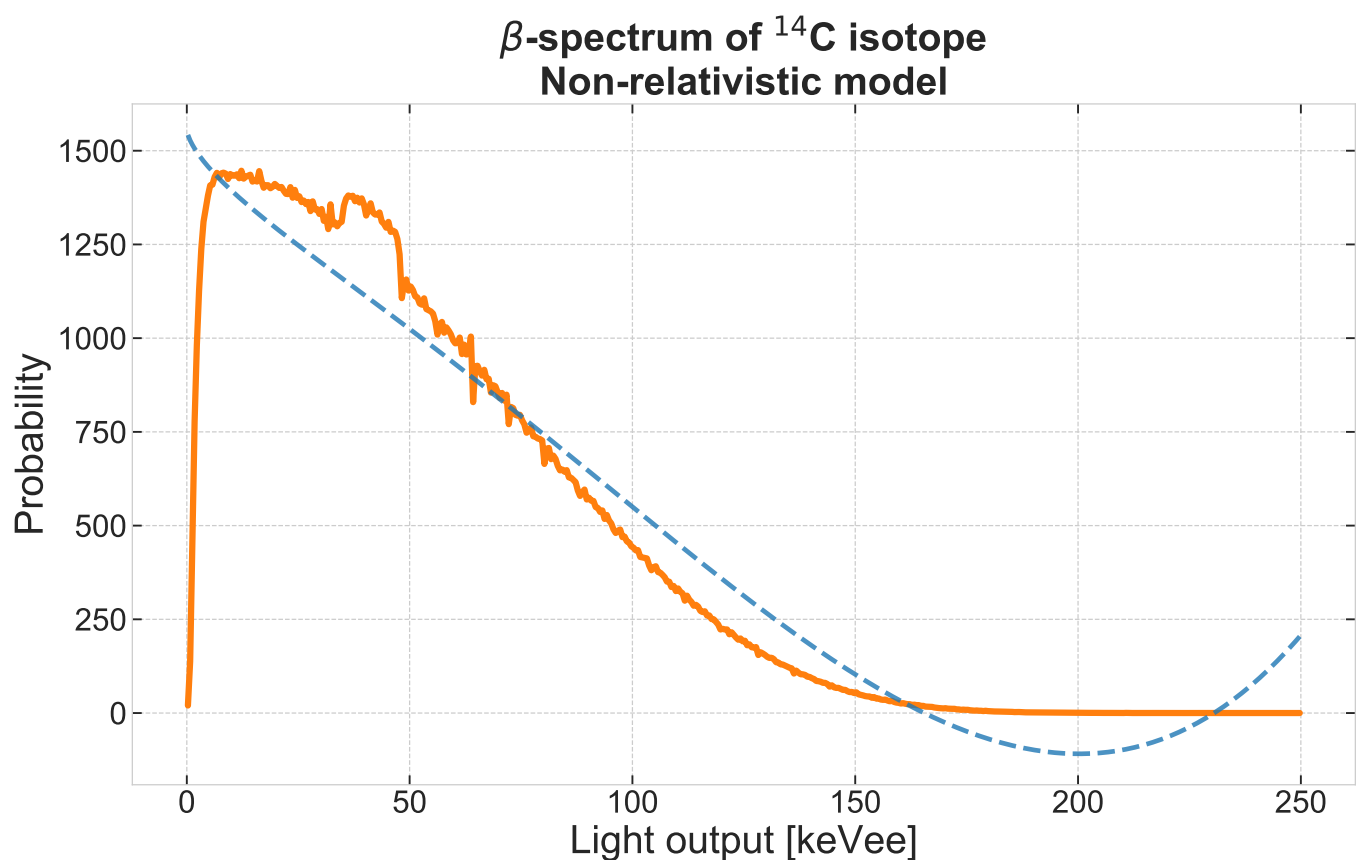
APPENDIX B.



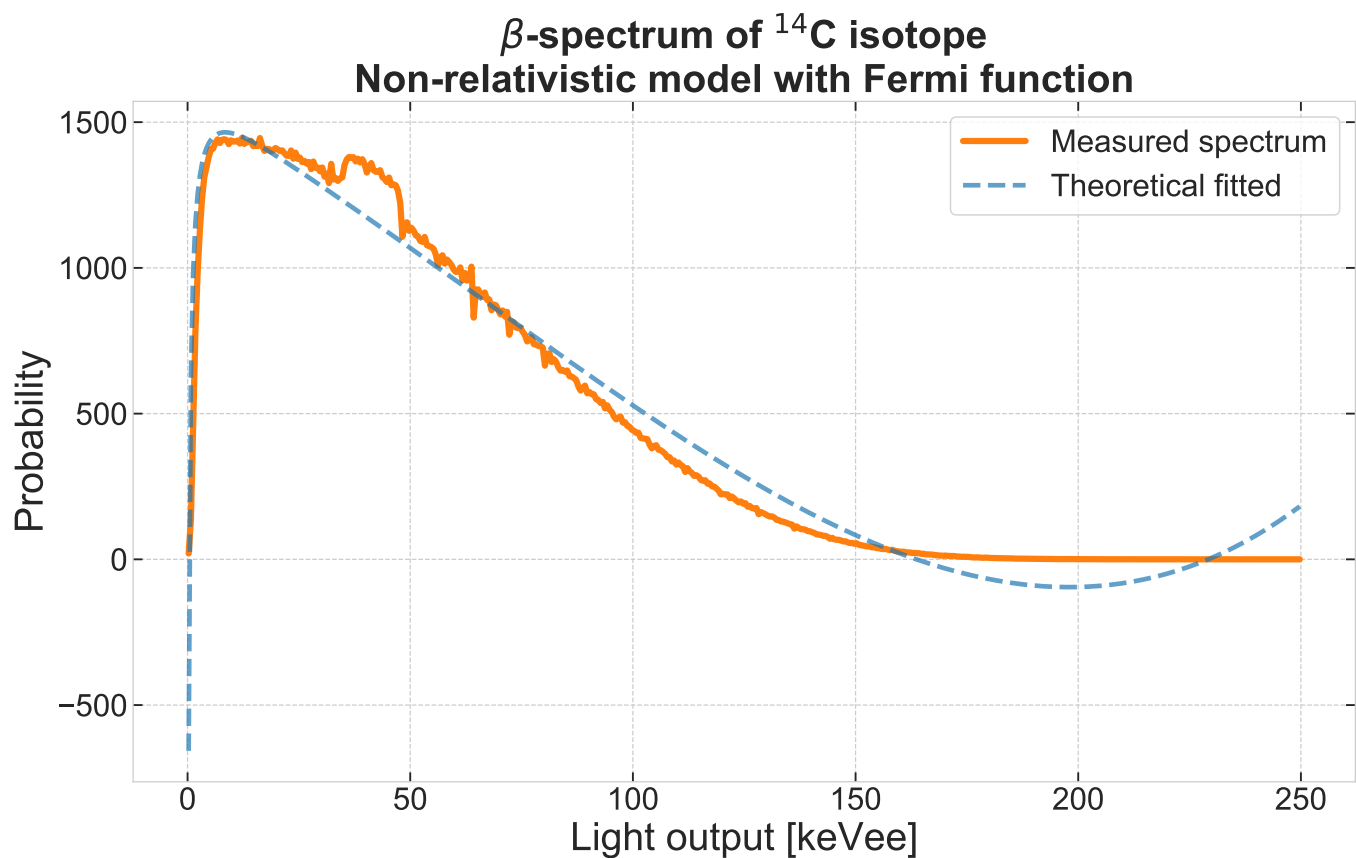
1. ábra. Az általunk vizsgált ^{14}C különböző, egymás utáni 2 perces mérésekből származó β -spektrumai. Az összes 49 sikeres mérés közül 24 darab van az ábrára véletlenszerűen kiválasztva.



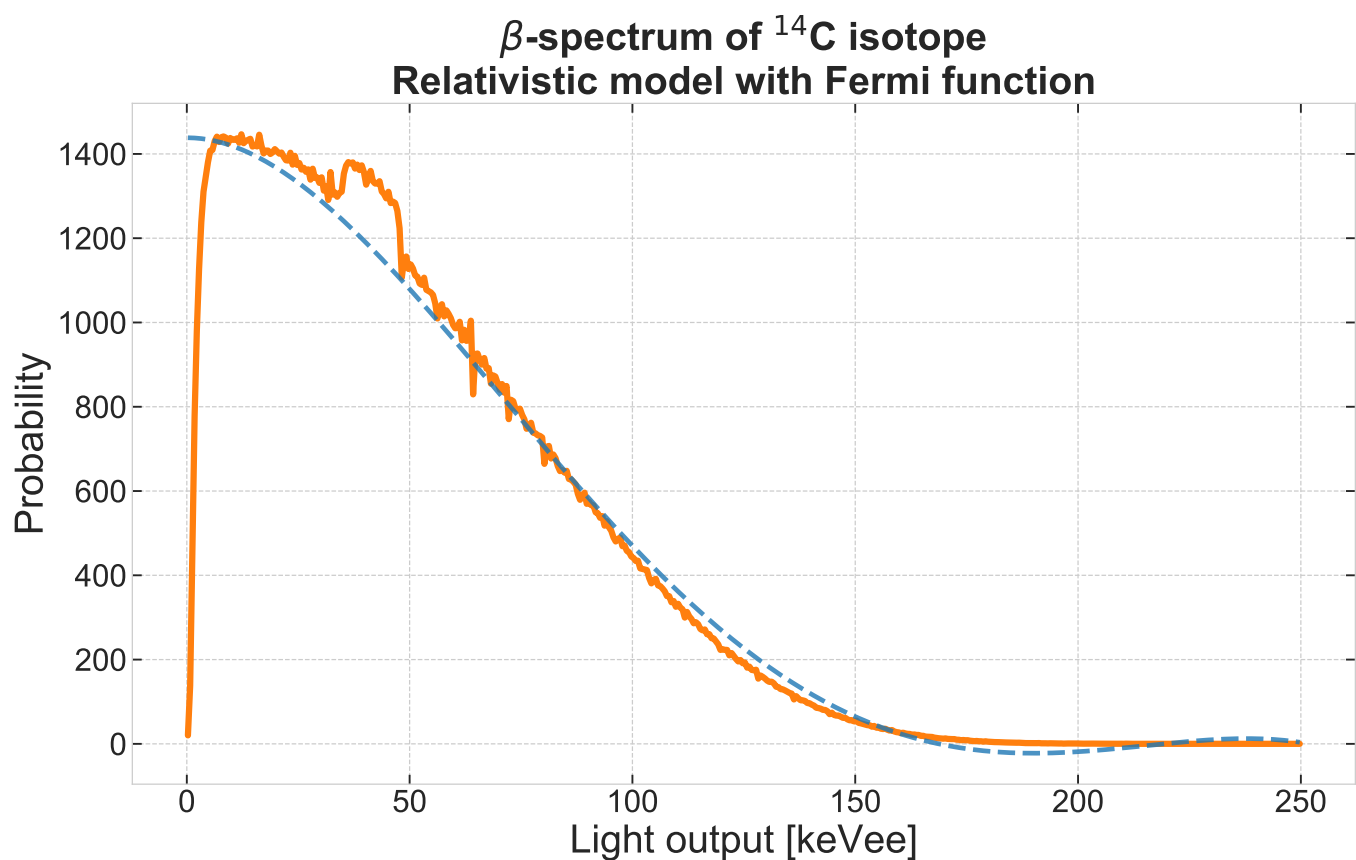
2. ábra. Az általunk vizsgált ^{14}C különböző, egymás utáni 2 perces mérésekből származó β -spektrumainak átlagolt értéke.



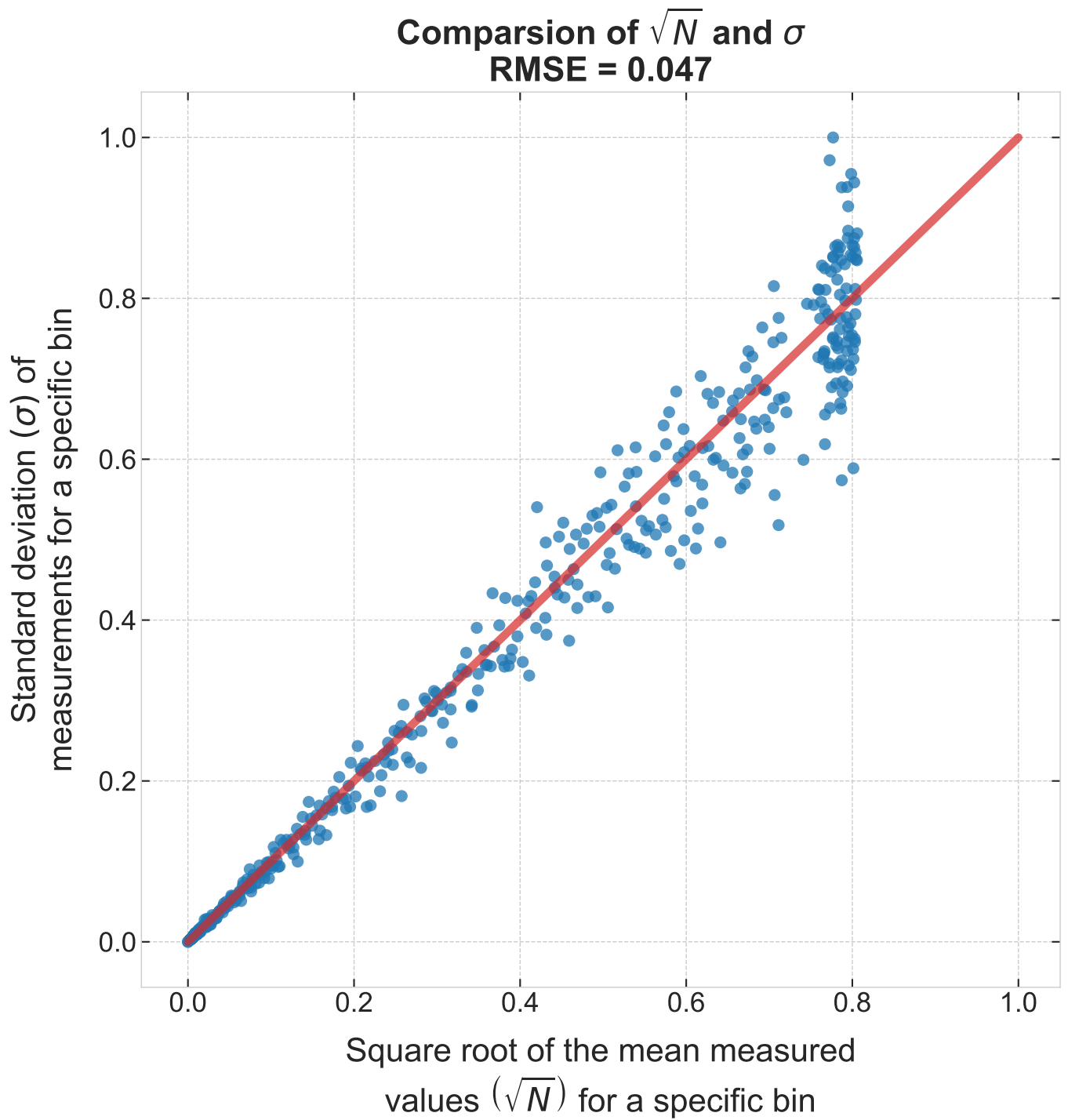
3. ábra. Az általunk vizsgált ^{14}C kiátlagolt spektrumára illesztett nemrelativisztikus függvény, mely egy túl jó közelítésben, de láthatóan visszaadja a β -spektrum kezdetben lecsengő alakját. Zérushelye a ^{14}C karakterisztikus 156.5 keV-es Q értéke körül van.



4. ábra. Az általunk vizsgált ^{14}C kiátlagolt spektrumára illesztett nemrelativisztikus függvény, mely a Fermi-függvény által nyújtott korrekciót felhasználva, az előzőnél sokkal jobban megközelíti a β -spektrum görbéjét. A zérushely itt is a ^{14}C karakterisztikus 156.5 keV-es Q érték körül van.



5. ábra. Az általunk vizsgált ^{14}C kiátlagolt spektrumára illesztett relativisztikus függvény, melyet a Fermi-függvénnyel korrigáltam. Zérushelye szintén a ^{14}C karakterisztikus 156.5 keV-es Q értéke körül van és az előzőekkel ellentétben a nagyobb energiáknál már nem látszik felfutó él.



6. ábra. Az egyes $N(E)$ értékek hibáját (szórását) közelíthetjük az \sqrt{N} formulával. Ideális esetben a $\sqrt{N} - \sigma$ függvény a 45° -os egyenesre illeszkedik. Az ábrán ezen függvény ábrázoltam a meghatározott \sqrt{N} és σ értékek segítségével. Az illeszkedés hibáját a machine learning modelleknél bevett átlag négyzetes hiba gyökének kiszámításával vizsgáltam, mely értéke szintén az ábrán látható.