

# Alkalmazott fizikai módszerek laboratórium

## III.: Folyadékszcintillációs Spektroszkópia

Pál Balázs\*  
Somogyfoki Réka\*,<sup>m</sup>, Tuhári Richárd\*,<sup>m</sup>

2019. október 14.

### Abstract

Az *Alkalmazott fizikai módszerek laboratórium* harmadik alkalmán a radiokarbon ( $^{14}\text{C}$  izotóp)  $\beta$ -spektrumát mértük ki folyadékszcintillációs spektroszkópia segítségével. A mérőműszer és a mérési feladatok természetéből fakadóan a labor során elsődlegesen nem aktív mérési munkát végeztünk, hanem megismerkedtünk a  $\beta$ -bomlás azon elméleti alapjaival, melyek az eredmények kiértékeléséhez elengedhetetlenül szükségesek. Levezettük a  $\beta$ -spektrum leírásának egy közelítő, nemrelativisztikus modelljét és kiszámítottuk annak átlagos energiáját. A mérés kiértékelése során ellenőriztük a modell helyességét az adatokra történő illesztéssel, valamint hasonlóan vizsgáltuk ezen modell módosított változatát is a Fermi-függvény felhasználásával. Megállapítottuk, hogy a  $\beta$ -spektrum energiájának várható értéke  $\langle E \rangle = Q/3$ , valamint bebizonyítottuk, hogy  $\sqrt{N} \approx \sigma$ , ahol  $N$  a mérési értékek darabszáma,  $\sigma$  pedig azok szórása. Végül a méréshez használt minta megadott *DPM*, és a mérési adatainkból számolt *CPM* értékek segítségével kiszámítottuk a detektor  $\eta$  detektálási hatásfokának mértékét is.

### I. BEVEZETÉS

A  $\beta$ -bomlás ismerete minden fizikával foglalkozó számára alapvetően szükséges kell, hogy legyen. Ez már önmagában jelentős belátást nyújt mind a gyenge kölcsönhatás, mind pedig a neutrínók mi-benlétére, mely közül az első az alapvető kölcsönhatások, a második pedig az elemi részekék egyike. Mindkettő az ismert fizikai világot alapvetően meghatározó jelenség és objektum, így ismeretük elengedhetetlen.

A mérés során a  $^{14}\text{C}$  – hétköznapi nevén radiokarbon –  $\beta$ -spektrumát vizsgáltuk ún. folyadékszcintillációs spektroszkópia segítségével. A mérés során az alábbi kérdésekre kerestük a választ:

- Mennyire követik a nemrelativisztikus, valamint a Fermi-függvénnyel kibővített nemrelativisztikus és relativisztikus elméleti modellek a mérés során kimért spektrumot? Mik okozhatják az esetleges eltéréseket?
- Igaz-e, hogy az energia várható értéke az adott mag  $Q$ -faktorának harmadával egyenlő, tehát

$$\langle E \rangle = \frac{Q}{3} ?$$

- Igaz-e, hogy a mérési adatok számának gyöke ( $\sqrt{N}$ ) közelít-e azok szórásának ( $\sigma$ ) értékéhez?

### II. TECHNIKAI LEÍRÁS

A mérésben használt minta oldott formában, egy lezárt üvegfolyában helyezkedett el, mely mellett az üvegen belül volt megtalálható a három összetevőből álló szcintillációs „koktél” is. Ezt a mintát összerázva helyeztük egy már előre kalibrált

szcintillációs számláló két, egymással szemben elhelyezkedő fotoelektron-sokszorozója közé. Minden egyéb feladatot innentől a gép végzett el helyettünk.

A  $^{14}\text{C}$  mintával végül összesen 50 darab, egyenként 2 perc hosszú mérést végeztünk, így végeredményben 50 teljes spektrumot kaptunk, melyeket így már statisztikai módszerekkel elemezni tudtunk. A sokcsatornás analízatorra kapcsolt számítógép hibájából fakadóan ezen 50 mérés közül csak 49-ből szereztünk felhasználható eredményeket, azonban szerencsére a kötelező egyetemi labormunkák esetén nem várt el akkora pontosság, hogy ez az apró hiány a végeredményeink minőségét negatívan befolyásolná.

### III. ELMÉLETI ALAPOK

A mérés – az I. rész felsorolásában is olvasható – első számú célja a  $\beta$ -bomlás Fermi-féle modelljének vizsgálata volt. Ehhez meg kellett értenünk a  $\beta$ -spektrum lehetséges leírását. Kiindulásként a Fermi-féle arany szabályt vehetjük, mely az átmeneti valószínűséget adja meg két kvantumállapot között:

$$w_{k \rightarrow v} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \Psi_v | H_\beta | \Psi_k \rangle|^2 \varrho_v(E_v) \quad (1)$$

Ahol a  $k$  és  $v$  indexek sorrendben a kezdő és végállapotra utalnak.

#### III.1. ALKALMAZOTT KÖZELÍTÉSEK

Hogy a számításainkat el tudjuk végezni, a Fermi-szabály kapcsán 5 különböző közelítéssel élünk, melyből következtetünk majd a  $\beta$ -bomlás  $dn(E)/dE$  végállapot-i állapotsűrűségére. Ezek a közelítések az alábbiak:

\*Eötvös Loránd Tudományegyetem

<sup>m</sup>Mérőtársak

1. Csak megengedett átmenetekről beszélünk.

Ez esetben a neutrínó és az elektron teljes pályaperdüllete  $L = 0$ . Ekkor a Fermi-féle arany-szabályban szereplő mátrixelem értéke:

$$|\langle \Psi_v | H_\beta | \Psi_k \rangle|^2 = |H_{kv}|^2 \approx \text{const.} \quad (2)$$

Továbbiakban ebből levezethető a mátrixelem pontos értéke is, mely indikálni fogja a különbséget a Fermi- (F) és a Gamow-Teller-típusú (GT) átmenetek között:

$$|H_{kv}|^2 = (g_V^2 M_F^2 + g_A^2 M_{GT}^2) \frac{1}{V^2} \quad (3)$$

Ahol  $g_V$  a vektor típusú, míg  $g_A$  az axiálvektor típusú kölcsönhatás csatolási állandója.

2. Az elektron, valamint a neutrínó hullámfüggvényét nemrelativisztikus síkhullámként kezeljük.

$\beta$ -bomlás során a mag vonzása a maghoz közel az elektron hullámfüggvényét valós esetben torzítaná, azonban ebben a közelítésben ettől eltekintünk. Ezt az eltérést a Fermi-függvény bevezetésével korrigáljuk. Ekkor a két részecske hullámfüggvénye kifejezhető az alábbi módokon:

$$\phi_e(r_e) = N_e e^{-\frac{i}{\hbar} \underline{p}_e r_e} \quad (4)$$

$$\phi_\nu(r_\nu) = N_\nu e^{-\frac{i}{\hbar} \underline{p}_\nu r_\nu} \quad (5)$$

Az állapotok száma egy fázistérfogatban ekkor könnyen felírható mindkét részecske esetre:

$$dn_e(E) = \frac{V \cdot 4\pi p_e^2 dp_e}{h^2} \quad (6)$$

$$dn_\nu(E_\nu) = \frac{V \cdot 4\pi p_\nu^2 dp_\nu}{h^2} \quad (7)$$

3. Az  $e^-$  és  $\nu$  kirepülési irányát függetlennek vesszük.

Ekkor az állapotszám adott fázistérfogatban a következő:

$$\begin{aligned} dn(E, E_\nu) &= dn_e dn_\nu \propto p_e^2 dp_e p_\nu^2 dp_\nu = \\ &= p_e^2 \frac{dp_e}{dE} p_\nu^2 \frac{dp_\nu}{dE_\nu} dE dE_\nu \end{aligned} \quad (8)$$

Ahol felhasználtam a 6. és 7. egyenletekben szereplő azonosságot. Itt csak arányosságot írtam fel, az egyenlet jobb oldala valójában egy sok tagból álló konstanssal van megszorozva még.

4. A leánymag visszalökődését elhanyagoljuk. A bomlás  $Q$  faktorát ekkor az elektron és neutrínó energiájának összegeként kapjuk:

$$Q = E + E_\nu \quad (9)$$

5. A neutrínó nyugalmi tömegét zérusnak vesszük.

Ekkor a neutrínót ún. „ultrarelativisztikus” módon kezeljük, impulzusát és annak energia szerinti deriváltját ilyenkor az alábbi összefüggések adják:

$$p_\nu = \frac{E_\nu}{c} \quad (10)$$

$$\frac{dp_\nu}{dE} = \frac{1}{c} \quad (11)$$

Ezek alapján mind a nemrelativisztikus, mind pedig a relativisztikus esetre levezethetjük az állapotsűrűséget és így a  $\beta$ -bomlás energiaspektrumát, attól függően, hogy az elektron impulzusára a nemrelativisztikus, vagy relativisztikus összefüggést használjuk. Első esetben az impulzus a következő:

$$p_e = \sqrt{2mE} \quad (12)$$

$$\frac{dp_e}{dE} = \frac{m}{\sqrt{2mE}} \quad (13)$$

Míg második esetben az alábbi:

$$p_e = \frac{1}{c} \sqrt{(E + m_e c^2)^2 - m_e^2 c^4} \quad (14)$$

$$\frac{dp_e}{dE} = \frac{1}{c} \frac{E + m_e c^2}{\sqrt{(E + m_e c^2)^2 - m_e^2 c^4}} \quad (15)$$

A részletesen számolások az A. függelékben találhatók.

### III.2. VÁRHATÓ ENERGIAÉRTÉK

A várható érték definíciója alapján megadható a  $\beta$ -spektrum energiájának várható értéke az alábbi módon:

$$\langle E \rangle = \int_0^Q EP(E) dE \quad (16)$$

Ahol  $P(E)$  az adott energiájú átmenet valószínűsége. Ez kiszámítható a  $dn(E)/dE$  állapotsűrűség, teljes spektrumra vett összegével történő normálással:

$$P(E) = \frac{dn(E)/dE}{\int_0^Q [dn(E)/dE] dE} \quad (17)$$

Az energia várható értéke a nemrelativisztikus esetben kapott számítás alapján:

$$\langle E \rangle = \frac{Q}{3} \quad (18)$$

A teljes számítás az A. függelékben található.

## IV. KIÉRTÉKELÉS

### IV.1. ELMÉLETI MODELL VIZSGÁLATA

Első feladatunk az  $\beta$ -spektrumokra történő illesztés és annak vizsgálata volt. Ez explicite a  $dn(E)$  értékek integráltjából kapott  $n(E)$  állapotszámok energiafüggő illesztését takarta jelen esetben. A 3-6. ábrákon ezen illesztések láthatók, melyek közül a 3. és 4. ábra a nemrelativisztikus esetet, míg a 5. és 6. ábrák a relativisztikus eset illesztését ábrázolják. A nemrelativisztikus eset első ábrája kivételével mindegyik helyen igénybe vettem a Fermi-függvényt, hogy pontosítsam az illesztést. (Magyarán relativisztikus esetben nem is dolgoztam a Fermi-függvény nélküli verzióval.)

Az elméletből azt vártuk, hogy a legrosszabb illesztés a Fermi-függvény nélküli nemrelativisztikus

esethez tartozik. Ezt követi a Fermi-függvénnyel bővített verzió, majd a szimpla relativisztikus és legjobb illesztésként a Fermi-függvénnyel bővített relativisztikus formula. Míg szemmel is egyértelműen látható módon a valósághoz elméletben is legközelebb álló, relativisztikus, Fermi-függvénnyel kibővített, 5. ábrán látható görbe illeszkedik rá legjobban a kimért adatsorra, addig annak hibáját sajnos numerikusan nem tudtam meghatározni. Ennek oka az általam használt `curve_fit` függvény hiányossága, mely a Python 3.7-es verziójának `scipy` könyvtárának része. Ez egy, a nemlineáris négyzetes hibákat iteratív módon minimalizáló algoritmust takar, mely az optimalizált paraméterek konkrét értékei mellett kiszámolja azok kovarianciamátrixát is, mely diagonálisában található elemek gyökét tekinti az egyes paraméterek hibáinak. Míg a paraméterértékek kiszámítása viszonylag jól működik, addig bonyolultabb esetekben a kovarianciamátrixot – és így a hibák értékét – a függvény nem képes meghatározni. Kivételes szerencsénk van, hogy jelen esetben az illesztések közül egyértelműen el lehet dönteni, hogy az említett, 5. ábrán látható függvény a legjobb, ahogy azt az elmélet alapján el is vártuk. Ennek illesztett görbéje a GitHubomon megtalálható (Pál, 2019).

Az egyes spektrumokon egy darab markáns eltérés látható az elméleti görbétől a 35 – 50 keVee sávban. Ez a jól látható kiugrás a két fotoelektron sokszorozóval rendelkező mérőműszerek koincidencia vizsgálatának karakterisztikájából fakad és tipikusan az ábrákon is szereplő kiemelkedést okoz.

#### IV.2. A VÁRHATÓ ENERGIAÉRTÉK MÉRÉSE

Második feladatunk annak bizonyítása volt, hogy a  $\beta$ -spektrum energiájának várható értéke valóban körülbelül  $Q/3$ . Ehhez felhasználtam a 70. egyenletet, mely alapján bin szélességű téglalapokra felosztottam a 49 mérés átlagából kapott görbét, majd azok területét összeadva közelítettem a görbe alatti integrál értékét. Az egyenlet alapján ezt az átlagértékek összegével leosztva, megkapjuk a mérésekből számított végeredményünket. A  $^{14}\text{C}$  eseté-

ben  $Q = 156,5$  keVee érték mellett elméletileg a

$$\langle E \rangle_{\text{elm}} = \frac{Q}{3} = 52,1\bar{6} \text{ keVee} \quad (19)$$

értéket várjuk eredményül. A mérésekből a fenti számítás után ugyanezen értékre

$$\langle E \rangle_{\text{mér}} \approx 50,013 \text{ keVee} \quad (20)$$

eredményt kaptam. Ez 4,13%-al tér el az elméleti értéktől, így egyértelműen, hibahatáron belüli jó közelítésnek vehető.

#### IV.3. A SZÓRÁS KÖZELÍTŐ ÉRTÉKE

Harmadik és egyben utolsó feladatunk a szórással és a mintavételezési elemszám gyöke közti ekvivalencia feltárása volt. Ezt az egyes energia-*bin*ekbe kerülő elemek szórássának és a *bin*-be eső mérési értékek gyökének összehasonlításával vizsgáltam meg. Várakozásaink alapján, ha az adott *bin*-hez tartozó  $\sigma$  szórással, valamint  $\sqrt{N}$  darabszámértékeket egymás függvényében ábrázoljuk, akkor egy  $45^\circ$  egyenest fogunk eredményül kapni.

A kapott pontelhalmazt a 7. ábrán vizualizáltam, melyen jól látható a lineáris kapcsolat. Az adatpontokat a  $[0, 1]$  intervallumba normáltam, melyben az összefüggés jóságát vizsgálandó a pontok átlagtól vett négyzetes eltérésük gyökét számítottam ki. Ez az érték  $RMSE = 0,047$  lett, mely teljes mértékben elfogadhatónak számít.

#### V. DISZKUSSZIÓ

Habár az elméleti görbére történő illesztés során a manuális levezetésből kapott eredmény rosszabbul szerepelt, mint a géppel történő szimbolikus számítás, végeredményben nagyon jó közelítést sikerült adnom a  $\beta$ -spektrum alakjára (ld. 5. ábra).

Ezen kívül a kirótt feladataimat sikeresen elvégeztem, az  $\langle E \rangle = Q/3$  azonosságot és a  $\sigma = \sqrt{N}$  ekvivalenciát bebizonyítottam. (Végül de nem utolsósorban pedig remélhetőleg egy fél magfizika tételt is megtanultam.)

- 
- [1] Balázs Pál. *ELTE Applied Physics 2019 — GitHub*. [Online; opened at October 14, 2019]. 2019. URL: [https://github.com/masterdesky/ELTE\\_Applied\\_Physics\\_2019](https://github.com/masterdesky/ELTE_Applied_Physics_2019).
  - [2] Ákos Horváth. *A gyenge kölcsönhatás az atommagokban – órai jegyzet*. [Online; opened at October 14, 2019]. 2017. URL: <http://atomfizika.elte.hu/akos/orak/mfe/beta%20boml%C3%A1s.pdf>.

## APPENDIX A.

### APPENDIX A.1. AZ ÁLLAPOTSŰRŰSÉG NEMRELATIVISZTIKUS SZÁMÍTÁSA

Keressük a 8. egyenletben leírt  $dn(E, E_\nu)$  állapotszám egyváltozós alakját. Ezt a minden  $E_\nu$ -re történő kiintegrálással és egy  $(E_\nu - E - Q)$  argumentumú Dirac-deltával kaphatjuk meg, ahol az utóbbi az energia-megmaradást érvényesítendő jelenik meg az egyenletben (Horváth, 2017). Az integrál alakja a következő ebben az esetben:

$$dn(E) = \int_{E_\nu} dn(E, E_\nu) \cdot \delta(E_\nu - E - Q) \quad (21)$$

$$dn(E) = C_1 \cdot \int_{E_\nu} \left( p_e^2 \frac{dp_e}{dE} p_\nu^2 \frac{dp_\nu}{dE_\nu} \right) \cdot \delta(E_\nu - E - Q) dE dE_\nu \quad (22)$$

Ahol  $C_1$  egy soktagú konstans. Ennek az integrálnak az értéke a Dirac-delta azonosságai alapján egyből felírható:

$$dn(E) = C_1 \cdot p_e^2 \frac{dp_e}{dE} p_\nu^2 \frac{dp_\nu}{dE_\nu} \Big|_{E_\nu=Q-E} dE \quad (23)$$

Melyből az állapotsűrűség  $dE$ -vel történő leosztás után kapható:

$$\frac{dn(E)}{dE} = C_1 \cdot p_e^2 \frac{dp_e}{dE} p_\nu^2 \frac{dp_\nu}{dE_\nu} \Big|_{E_\nu=Q-E} \quad (24)$$

nemrelativisztikus esetben a 12. és 13. egyenletek helyettesítjük be az elektronra, valamint felhasználjuk a neutrínóra vonatkozó 10. és 11. képleteket is.

$$\frac{dn(E)}{dE} = C_1 \cdot \left( \sqrt{2m_e E} \right)^2 \frac{m_e}{\sqrt{2m_e E}} \cdot \left( \frac{E_\nu}{c} \right)^2 \Big|_{E_\nu=Q-E} \frac{1}{c} = C_1 \cdot \frac{2m_e^2 E}{\sqrt{2m_e E}} \cdot \frac{(Q-E)^2}{c^3} \quad (25)$$

A konstans értékeket (beleértve  $C_1$ -et is) egy  $C_2$  konstansba összevonva a végleges állapotsűrűséget nemrelativisztikus esetben az alábbi függvény adja:

$$\boxed{\frac{dn(E)}{dE} = C_2 \cdot \sqrt{E} (Q-E)^2} \quad (26)$$

### APPENDIX A.2. AZ ÁLLAPOTSŰRŰSÉG RELATIVISZTIKUS SZÁMÍTÁSA

Relativisztikus esetben a 23. egyenletbe a neutrínóra vonatkozó egyenletek mellett az elektronra a 14. és 15. alakokat használjuk. Elvégezve a behelyettesítést a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{dn(E)}{dE} &= C_1 \cdot \left( \frac{1}{c} \sqrt{(E + m_e c^2)^2 - m_e^2 c^4} \right)^2 \cdot \frac{1}{c} \frac{E + m_e c^2}{\sqrt{(E + m_e c^2)^2 - m_e^2 c^4}} \cdot \left( \frac{E_\nu}{c} \right)^2 \Big|_{E_\nu=Q-E} \frac{1}{c} = \\ &= C_1 \cdot \frac{1}{c^2} \left( (E + m_e c^2)^2 - m_e^2 c^4 \right) \cdot \frac{1}{c} \frac{E + m_e c^2}{\sqrt{(E + m_e c^2)^2 - m_e^2 c^4}} \cdot \frac{(Q-E)^2}{c^3} = \\ &= C_1 \cdot \frac{1}{c^6} \cdot \underbrace{\sqrt{(E + m_e c^2)^2 - m_e^2 c^4}}_{cp_e} \cdot \underbrace{(E + m_e c^2)}_{E_{tot}} \cdot (Q-E)^2 \end{aligned} \quad (27)$$

A konstans értékeket újból összevonva ( $C_1$ -el együtt) egy  $C_3$  konstansba a végleges eredményre a következőt kapjuk:

$$\boxed{\frac{dn(E)}{dE} = C_3 \cdot p_e \cdot E_{tot} \cdot (Q-E)^2} \quad (28)$$

### APPENDIX A.3. A NEMRELATIVISZTIKUS ESETBEN ILLESZTETT GÖRBE

Mind a nemrelativisztikus, mind pedig a relativisztikus esetben az  $n(E)$  állapotszám függvényét szükséges illeszteni az elméleti görbére. Ezt a  $dn(E)$  integrálásából kaphatjuk meg. Nemrelativisztikus esetben a 26. egyenletet felhasználva:

$$\begin{aligned} n(E) &= \int dn(E) = C_2 \cdot \int \sqrt{E} \cdot (Q-E)^2 dE = \\ &= C_2 \cdot \left( \int \sqrt{E} \cdot Q^2 dE - \int \sqrt{E} \cdot 2QE dE + \int \sqrt{E} \cdot E^2 dE \right) \end{aligned} \quad (29)$$

Az integrálokat elvégezve a következő alakot kapjuk:

$$n(E) = C_2 \cdot \left( \frac{2}{3} E^{3/2} Q^2 - \frac{2}{5} E^{5/2} \cdot 2Q + \frac{2}{7} E^{7/2} \right) \quad (30)$$

Az illesztéshez ez alapján az alábbi paraméteres görbét használtam:

$$f(E) = p_1 + p_2 \cdot E^{3/2} - p_3 \cdot E^{5/2} + p_4 \cdot E^{7/2} \quad (31)$$

A Fermi-függvénnyel kibővített esetben ez kissé változott:

$$f(E) = p_1 + \left( p_2 + p_3 \cdot E^{2/3} - p_4 \cdot E^{5/2} + p_5 \cdot E^{7/2} \right) \cdot F(E) \quad (32)$$

#### APPENDIX A.4. A RELATIVISZTIKUS ESETBEN ILLESZTETT GÖRBE

Relativisztikus esetben az állapotszám  $n(E)$  függvénye jóval bonyolultabb képet öltött, mint a nemrelativisztikus esetben. Itt a 28. egyenlet eredményét kell behelyettesítsük az integrandusba:

$$n(E) = \int dn(E) = C_3 \cdot \int p_e \cdot E_{tot} \cdot (Q - E)^2 dE \quad (33)$$

Mely a  $p_e$  és  $E_{tot}$  értékekkel behelyettesítve:

$$n(E) = C_3 \cdot \frac{1}{c} \cdot \int \sqrt{(E + m_e c^2)^2 - m_e^2 c^4} \cdot (E + m_e c^2) \cdot (Q - E)^2 dE \quad (34)$$

Kibontva a zárójeleket ezt az alakot több integrál összegére bonthatjuk, azonban az átláthatóság és a számolás egyszerűsége kedvéért, előbb rendezzük át a gyökös formában szereplő  $p_e$  alakját:

$$\sqrt{(E + m_e c^2)^2 - m_e^2 c^4} = \sqrt{E^2 + 2Em_e c^2} = \sqrt{E(E + 2m_e c^2)} \quad (35)$$

Ezt felhasználva 6 integrál összegére bontjuk a 34. egyenletben szereplő integrált:

$$I_1 = \int \sqrt{E(E + 2m_e c^2)} \cdot E \cdot Q^2 dE = Q^2 \cdot \int \sqrt{E^3(E + 2m_e c^2)} dE \quad (36)$$

$$I_2 = - \int \sqrt{E(E + 2m_e c^2)} \cdot E \cdot 2QE dE = -2Q \cdot \int \sqrt{E^5(E + 2m_e c^2)} dE \quad (37)$$

$$I_3 = \int \sqrt{E(E + 2m_e c^2)} \cdot E \cdot E^2 dE = \int \sqrt{E^7(E + 2m_e c^2)} dE \quad (38)$$

$$I_4 = \int \sqrt{E(E + 2m_e c^2)} \cdot m_e c^2 \cdot Q^2 dE = m_e c^2 \cdot Q^2 \cdot \int \sqrt{E(E + 2m_e c^2)} dE \quad (39)$$

$$I_5 = - \int \sqrt{E(E + 2m_e c^2)} \cdot m_e c^2 \cdot 2QE dE = -m_e c^2 \cdot 2Q \cdot \int \sqrt{E^3(E + 2m_e c^2)} dE \quad (40)$$

$$I_6 = \int \sqrt{E(E + 2m_e c^2)} \cdot m_e c^2 \cdot E^2 dE = m_e c^2 \cdot \int \sqrt{E^5(E + 2m_e c^2)} dE \quad (41)$$

Az  $n(E)$  állapotszám értéke ekkor felírható ezek segítségével az alábbi módon:

$$n(E) = C_3 \cdot \frac{1}{c} \cdot \sum_{k=1}^6 I_k \quad (42)$$

Az  $I_k$  függvények mindegyike hasonló alakú, megoldásuk egzakt alakra hozható:

$$\int \sqrt{x^n \cdot (x + a)} = \frac{2x \sqrt{x^n \cdot (x + a)} \cdot {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{n}{2} + 1; \frac{n}{2} + 2; -\frac{x}{a}\right)}{(n + 2) \sqrt{\frac{x+a}{a}}} + C \quad (43)$$

Ahol  ${}_2F_1(a; b; c; z)$  a hipergeometrikus függvény. Átírva az egyes integrálokat a következőket kapjuk:

$$I_1 = Q^2 \cdot \frac{2E \sqrt{E^3 \cdot (E + 2m_e c^2)} \cdot {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2} + 1; \frac{3}{2} + 2; -\frac{E}{2m_e c^2}\right)}{(3 + 2) \sqrt{\frac{E+2m_e c^2}{2m_e c^2}}} + C_{I_1} \quad (44)$$

$$I_2 = -2Q \cdot \frac{2E \sqrt{E^5 \cdot (E + 2m_e c^2)} \cdot {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2} + 1; \frac{5}{2} + 2; -\frac{E}{2m_e c^2}\right)}{(5 + 2) \sqrt{\frac{E+2m_e c^2}{2m_e c^2}}} + C_{I_2} \quad (45)$$

$$I_3 = \frac{2E\sqrt{E^7 \cdot (E + 2m_e c^2)} \cdot {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{2} + 1; \frac{7}{2} + 2; -\frac{E}{2m_e c^2}\right)}{(7 + 2) \sqrt{\frac{E + 2m_e c^2}{2m_e c^2}}} + C_{I_3} \quad (46)$$

$$I_4 = m_e c^2 \cdot Q^2 \cdot \frac{2E\sqrt{E \cdot (E + 2m_e c^2)} \cdot {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} + 1; \frac{1}{2} + 2; -\frac{E}{2m_e c^2}\right)}{(1 + 2) \sqrt{\frac{E + 2m_e c^2}{2m_e c^2}}} + C_{I_4} \quad (47)$$

$$I_5 = -m_e c^2 \cdot 2Q \cdot \frac{2E\sqrt{E^3 \cdot (E + 2m_e c^2)} \cdot {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2} + 1; \frac{3}{2} + 2; -\frac{E}{2m_e c^2}\right)}{(3 + 2) \sqrt{\frac{E + 2m_e c^2}{2m_e c^2}}} + C_{I_5} \quad (48)$$

$$I_6 = m_e c^2 \cdot \frac{2E\sqrt{E^5 \cdot (E + 2m_e c^2)} \cdot {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2} + 1; \frac{5}{2} + 2; -\frac{E}{2m_e c^2}\right)}{(5 + 2) \sqrt{\frac{E + 2m_e c^2}{2m_e c^2}}} + C_{I_6} \quad (49)$$

Jelöljük minden hipergeometrikus függvényt az adott  $I_k$ -hoz tartozó  $n$  értékkel. Így tehát

$${}_2F_1(a; b; c; z) \equiv {}_2F_1(n) \quad (50)$$

Nem elhagyva a konstans értékeket, egyszerűsítsük a fenti kifejezéseket:

$$I_1 = Q^2 \cdot \frac{2E^{5/2} \cdot \sqrt{E + 2m_e c^2}}{5\sqrt{\frac{E + 2m_e c^2}{2m_e c^2}}} \cdot {}_2F_1(3) \quad (51) \quad I_4 = m_e c^2 \cdot Q^2 \cdot \frac{2E^{3/2} \cdot \sqrt{E + 2m_e c^2}}{3\sqrt{\frac{E + 2m_e c^2}{2m_e c^2}}} \cdot {}_2F_1(1) \quad (54)$$

$$I_2 = -2Q \cdot \frac{2E^{7/2} \cdot \sqrt{E + 2m_e c^2}}{7\sqrt{\frac{E + 2m_e c^2}{2m_e c^2}}} \cdot {}_2F_1(5) \quad (52) \quad I_5 = -m_e c^2 \cdot 2Q \cdot \frac{2E^{5/2} \cdot \sqrt{E + 2m_e c^2}}{5\sqrt{\frac{E + 2m_e c^2}{2m_e c^2}}} \cdot {}_2F_1(3) \quad (55)$$

$$I_3 = \frac{2E^{9/2} \cdot \sqrt{E + 2m_e c^2}}{9\sqrt{\frac{E + 2m_e c^2}{2m_e c^2}}} \cdot {}_2F_1(7) \quad (53) \quad I_6 = m_e c^2 \cdot \frac{2E^{7/2} \cdot \sqrt{E + 2m_e c^2}}{7\sqrt{\frac{E + 2m_e c^2}{2m_e c^2}}} \cdot {}_2F_1(5) \quad (56)$$

Az kifejezésekben szereplő törtek  $\sqrt{E + 2m_e c^2}$ -el egyszerűsíthetők, valamint átrendezhetőek:

$$I_1 = Q^2 \cdot \frac{2}{5} \cdot E^{5/2} \sqrt{2m_e c^2} \cdot {}_2F_1(3) \quad (57) \quad I_4 = m_e c^2 \cdot Q^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot E^{3/2} \sqrt{2m_e c^2} \cdot {}_2F_1(1) \quad (60)$$

$$I_2 = -2Q \cdot \frac{2}{7} \cdot E^{7/2} \sqrt{2m_e c^2} \cdot {}_2F_1(5) \quad (58) \quad I_5 = -m_e c^2 \cdot 2Q \cdot \frac{2}{5} \cdot E^{5/2} \sqrt{2m_e c^2} \cdot {}_2F_1(3) \quad (61)$$

$$I_3 = \frac{2}{9} \cdot E^{9/2} \sqrt{2m_e c^2} \cdot {}_2F_1(7) \quad (59) \quad I_6 = m_e c^2 \cdot \frac{2}{7} \cdot E^{7/2} \sqrt{2m_e c^2} \cdot {}_2F_1(5) \quad (62)$$

Innentől kézzel átláthatatlan lenne tovább számolni, így a **Wolfram|Alpha** szoftverét hívtam segítségül, mely egyedi, szimbolikus számítási módjával viszonylag könnyen ki tudta hozni  $n(E)$  végleges alakját. Az egyszerűség és átláthatóság kedvéért használjuk fel, hogy  $m_e c^2 \approx 511 keV$  és  $Q = 156.5 keV$ . Ekkor a végleges formula a következőképp fest:

$$\begin{aligned} n(E) &= -C_3 \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{E(E + 1022)}} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left( E(E + 1022) \cdot A(E) - \sqrt{E(E + 1022)} \cdot B(E) \right) \\ n(E) &= -C_3 \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{E(E + 1022)}}{\sqrt{E(E + 1022)}} \cdot \left( \sqrt{E(E + 1022)} \cdot A(E) - B(E) \right) \\ \rightarrow n(E) &= -C_3 \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left( \sqrt{E(E + 1022)} \cdot A(E) - B(E) \right) \quad \text{Mert } E > 0 \end{aligned} \quad (63)$$

Ahol  $A(E)$  és  $B(E)$  értéke:

$$A(E) = E^3 + 643E^2 - 256778 \cdot E + 6.67164 \cdot 10^7 \quad (64)$$

$$B(E) = -6.81842 \cdot 10^{10} \cdot \operatorname{arcsinh}\left(0.0312806 \cdot \sqrt{E}\right) \quad (65)$$

A nemrelativisztikus esethez hasonló módon a következő függvényt illesztettem relativisztikus esetben:

$$f(E) = p_1 + p_2 \cdot \left( \sqrt{p_3 + p_4 \cdot E^2 + p_5 \cdot E} \cdot A(E) - B(E) \right) \quad (66)$$

Ahol most  $A$  és  $B$  a következő függvények voltak:

$$A(E) = p_6 \cdot E^3 + p_7 \cdot E^2 + p_8 \cdot E \quad (67)$$

$$B(E) = p_9 \cdot \operatorname{arcsinh} \left( p_{10} \cdot \sqrt{E} + p_{11} \right) \quad (68)$$

A Fermi-függvényt is felhasználva a relativisztikus  $f(E)$  függvény következő formát öltötte:

$$f(E) = p_1 \cdot F(E) + p_2 \cdot F(E) \cdot \left( \sqrt{p_3 + p_4 \cdot E^2 + p_5 \cdot E} \cdot A(E) - B(E) \right) + p_{+1} \quad (69)$$

#### APPENDIX A.5. A VÁRHATÓ ENERGIA NEMRELATIVISZTIKUS SZÁMÍTÁSA

A számításhoz a 16. egyenletben szereplő összefüggést használjuk, melybe a 26. egyenletben kapott eredmény helyettesítjük be. Ilyenformán a következő alakot kapjuk:

$$\langle E \rangle = \int_0^Q EP(E) dE = \int_0^Q E \cdot \frac{dn(E)/dE}{\int_0^Q [dn(E)/dE] dE} dE \quad (70)$$

Előbb a  $P(E)$  értékét számítjuk ki, mely a következő lesz:

$$P(E) = \frac{dn(E)/dE}{\int_0^Q [dn(E)/dE] dE} = \frac{C_2 \cdot \sqrt{E} (Q - E)^2}{\int_0^Q [C_2 \cdot \sqrt{E} (Q - E)^2] dE} \quad (71)$$

A számlálóban és nevezőben megjelenő két konstans kiejti egymást. A végeredmény megadásához valójában csak a nevezőben szereplő integrál értékét kell kiszámítanunk:

$$\begin{aligned} \int_0^Q \sqrt{E} (Q - E)^2 dE &= \int_0^Q \sqrt{E} \cdot (Q^2 - 2QE + E^2) dE = \\ &= \int_0^Q \sqrt{E} Q^2 dE - \int_0^Q \sqrt{E} 2QE dE + \int_0^Q \sqrt{E} E^2 dE = \\ &= \left[ \frac{2}{3} \cdot E^{3/2} Q^2 \right]_0^Q - \left[ 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot E^{5/2} \cdot Q \right]_0^Q + \left[ \frac{2}{7} \cdot E^{7/2} \right]_0^Q = \\ &= \frac{2}{3} \cdot Q^{3/2} Q^2 - 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot Q^{5/2} \cdot Q + \frac{2}{7} \cdot Q^{7/2} = \frac{2}{3} \cdot Q^{7/2} - \frac{4}{5} \cdot Q^{7/2} + \frac{2}{7} \cdot Q^{7/2} = Q^{7/2} \cdot \left( \frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{2}{7} \right) \end{aligned} \quad (72)$$

Tehát végeredményben a nevezőben levő integrál értéke:

$$\int_0^Q \sqrt{E} (Q - E)^2 dE = \frac{16}{105} Q^{7/2} \quad (73)$$

Ebből a  $P(E)$  értéke kiszámítható a 29. egyenletbe behelyettesítve:

$$\begin{aligned} P(E) &= \frac{\sqrt{E} (Q - E)^2}{\frac{16}{105} Q^{7/2}} = \frac{105}{16} \frac{\sqrt{E} Q^2 - \sqrt{E} 2QE + \sqrt{E} E^2}{Q^{7/2}} \\ P(E) &= \frac{105}{16} \left( E^{1/2} Q^{-3/2} - E^{3/2} 2Q^{-5/2} + E^{5/2} \cdot Q^{-7/2} \right) \end{aligned} \quad (74)$$

Ezen eredmény segítségével végre kiszámíthatjuk az energia várható értékének nagyságát:

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \int_0^Q E \cdot \frac{105}{16} \left( E^{1/2} Q^{-3/2} - E^{3/2} 2Q^{-5/2} + E^{5/2} \cdot Q^{-7/2} \right) dE \\ \langle E \rangle &= \int_0^Q \frac{105}{16} \left( E^{3/2} Q^{-3/2} - E^{5/2} 2Q^{-5/2} + E^{7/2} \cdot Q^{-7/2} \right) dE \\ \langle E \rangle &= \frac{105}{16} \cdot \left( Q^{-3/2} \int_0^Q E^{3/2} dE - 2Q^{-5/2} \int_0^Q E^{5/2} dE + Q^{-7/2} \int_0^Q E^{7/2} dE \right) \end{aligned} \quad (75)$$

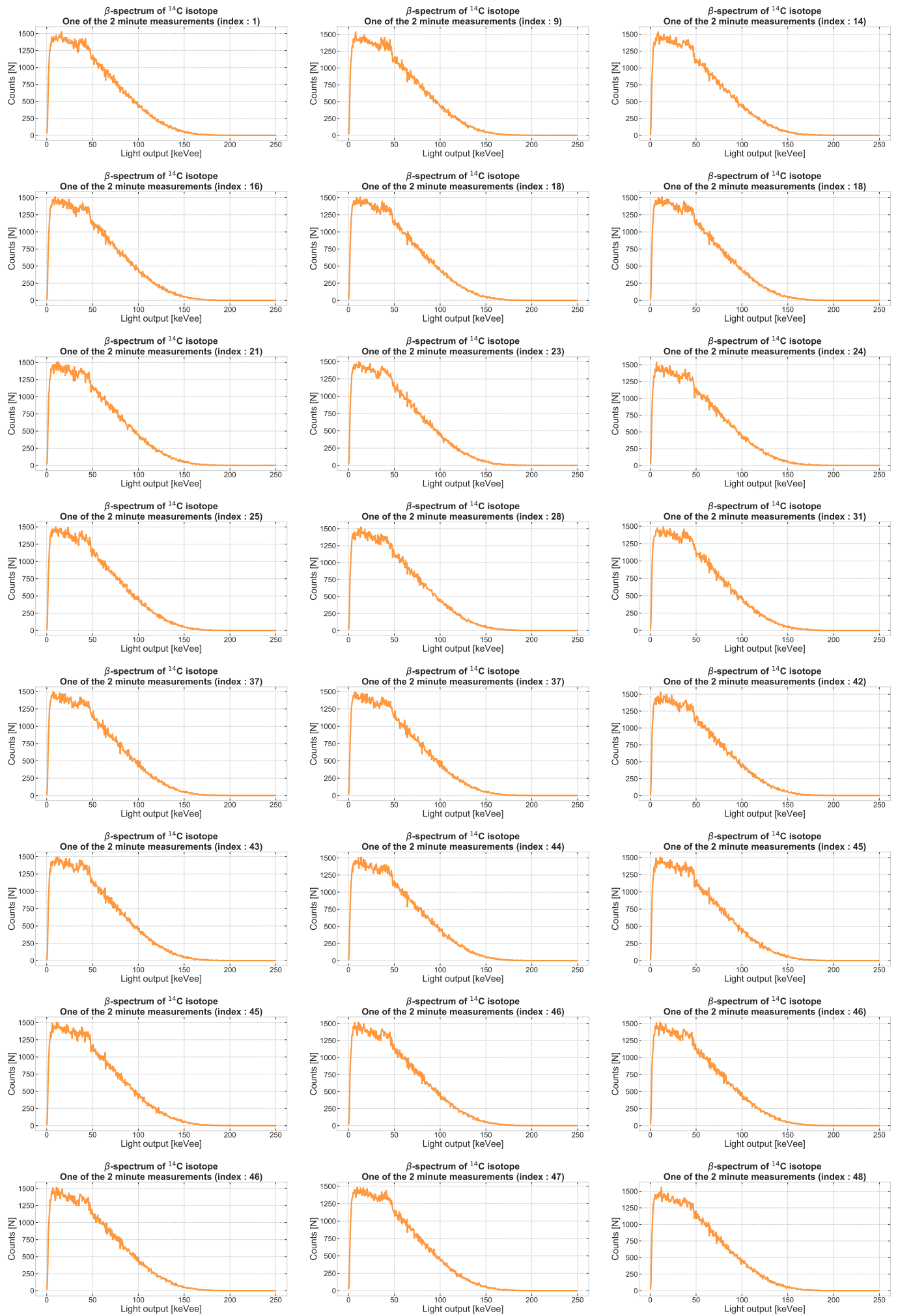
Az itteni egyszerű integrálok során csak a felső integrálási határhoz tartozó értékek lesznek nem zérusak, így egyszerűen egy  $E \rightarrow Q$  helyettesítéssel kapjuk meg a végleges eredményt az integrálok elvégzése után:

$$\langle E \rangle = \frac{105}{16} \cdot \left( Q^{-3/2} \frac{2}{5} Q^{5/2} - 2Q^{-5/2} \frac{2}{7} Q^{7/2} + Q^{-7/2} \frac{2}{9} Q^{9/2} \right) = \frac{105}{16} \cdot \left( \frac{2}{5} Q - \frac{4}{7} Q + \frac{2}{9} Q \right) \quad (76)$$

Így az  $\langle E \rangle$  végleges értéke nemrelativisztikus közelítésben:

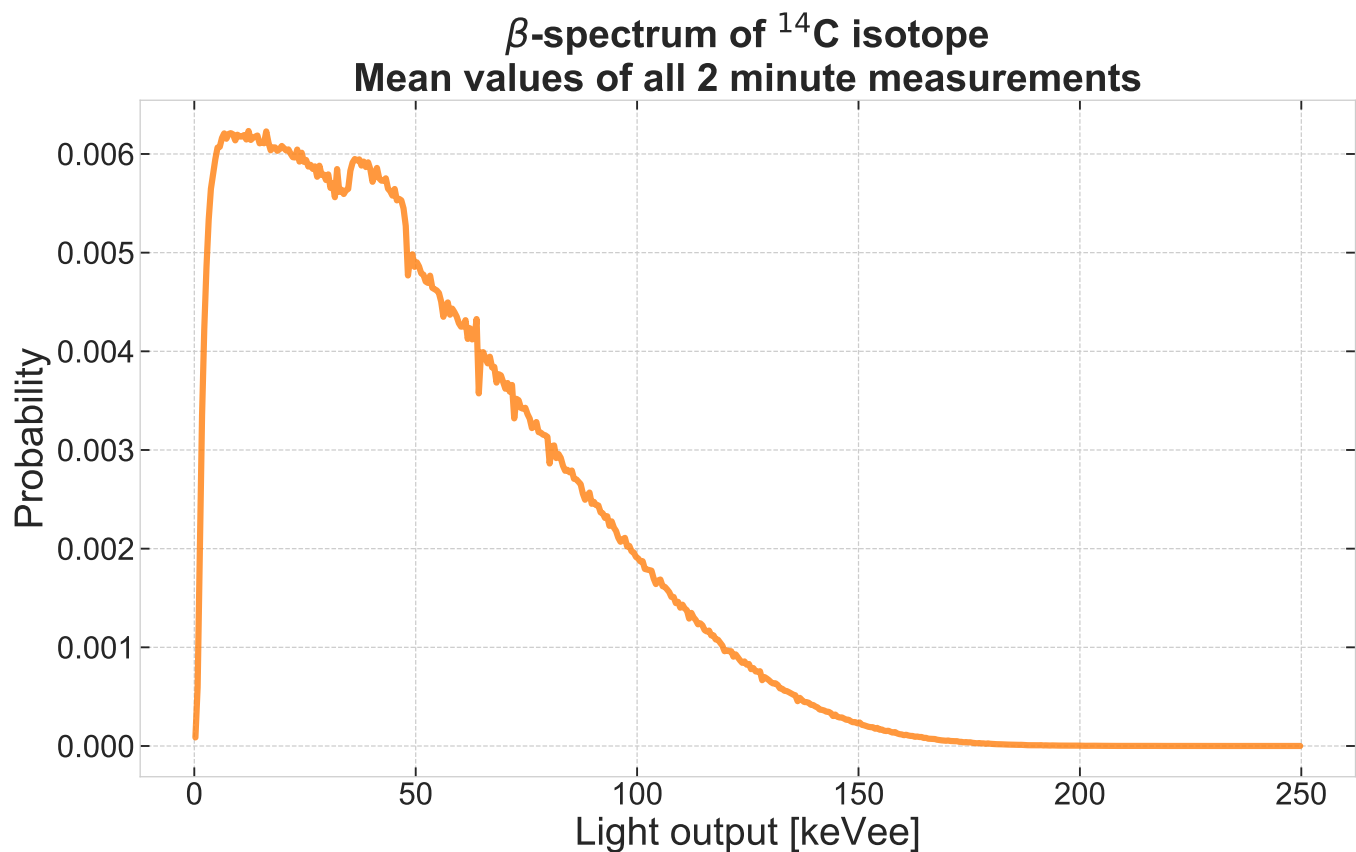
$$\boxed{\langle E \rangle = \frac{105}{16} \cdot \frac{16}{315} \cdot Q = \frac{Q}{3}} \quad (77)$$

## APPENDIX B.

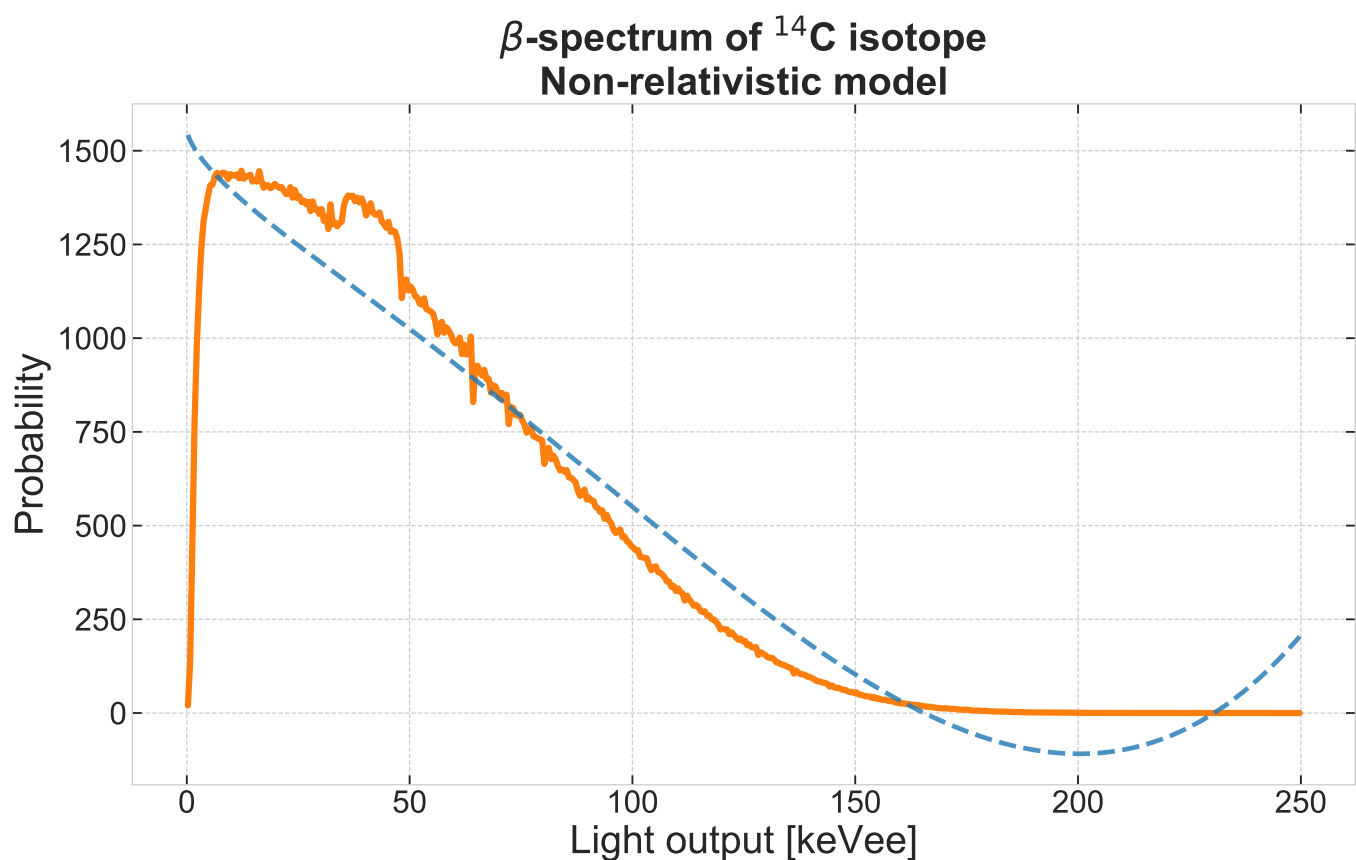


1. ábra. Az általunk vizsgált  $^{14}\text{C}$  különböző, egymás utáni 2 perces mérésekből származó  $\beta$ -spektrumai. Az összes 49 sikeres mérés közül 24 darab van az ábrára véletlenszerűen kiválasztva.

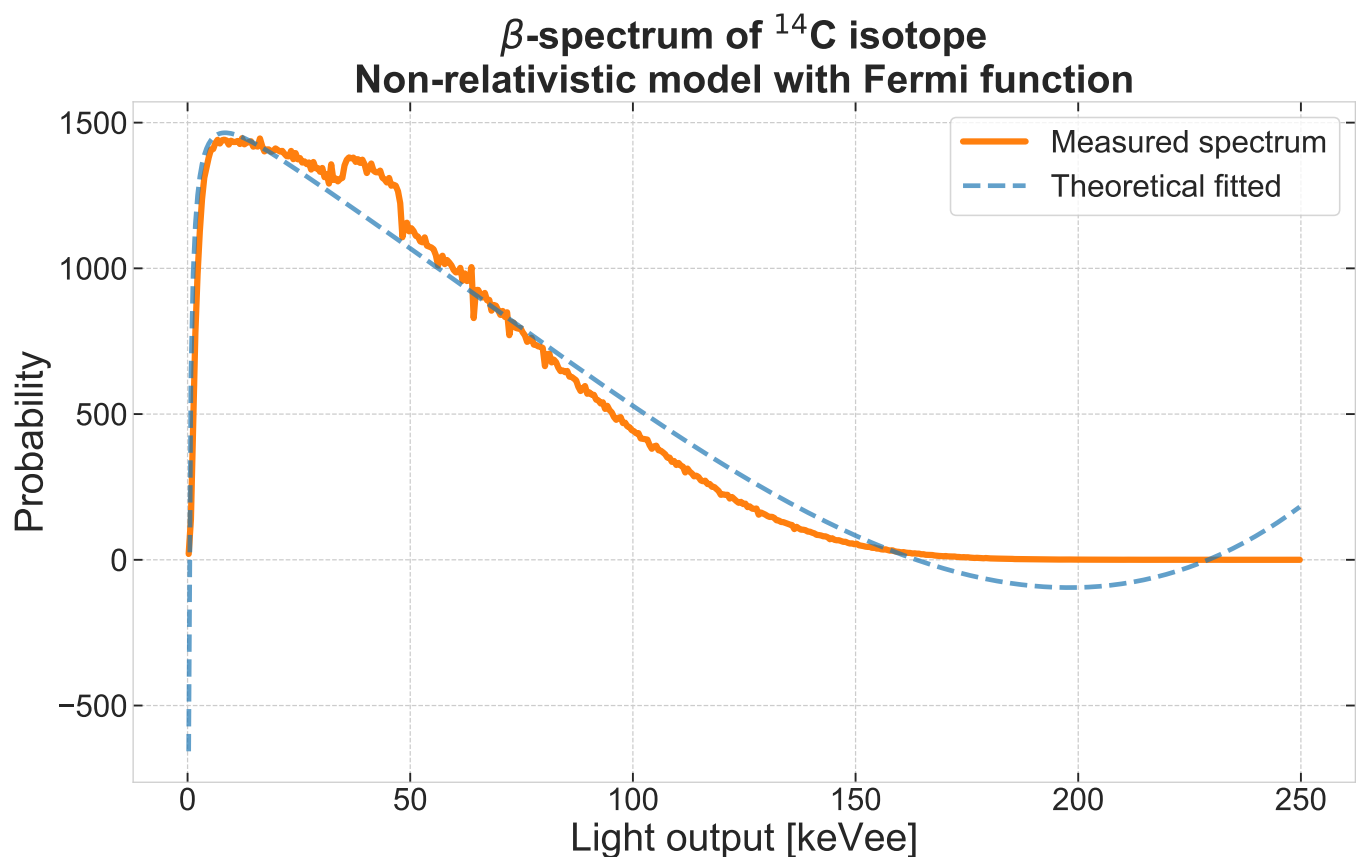




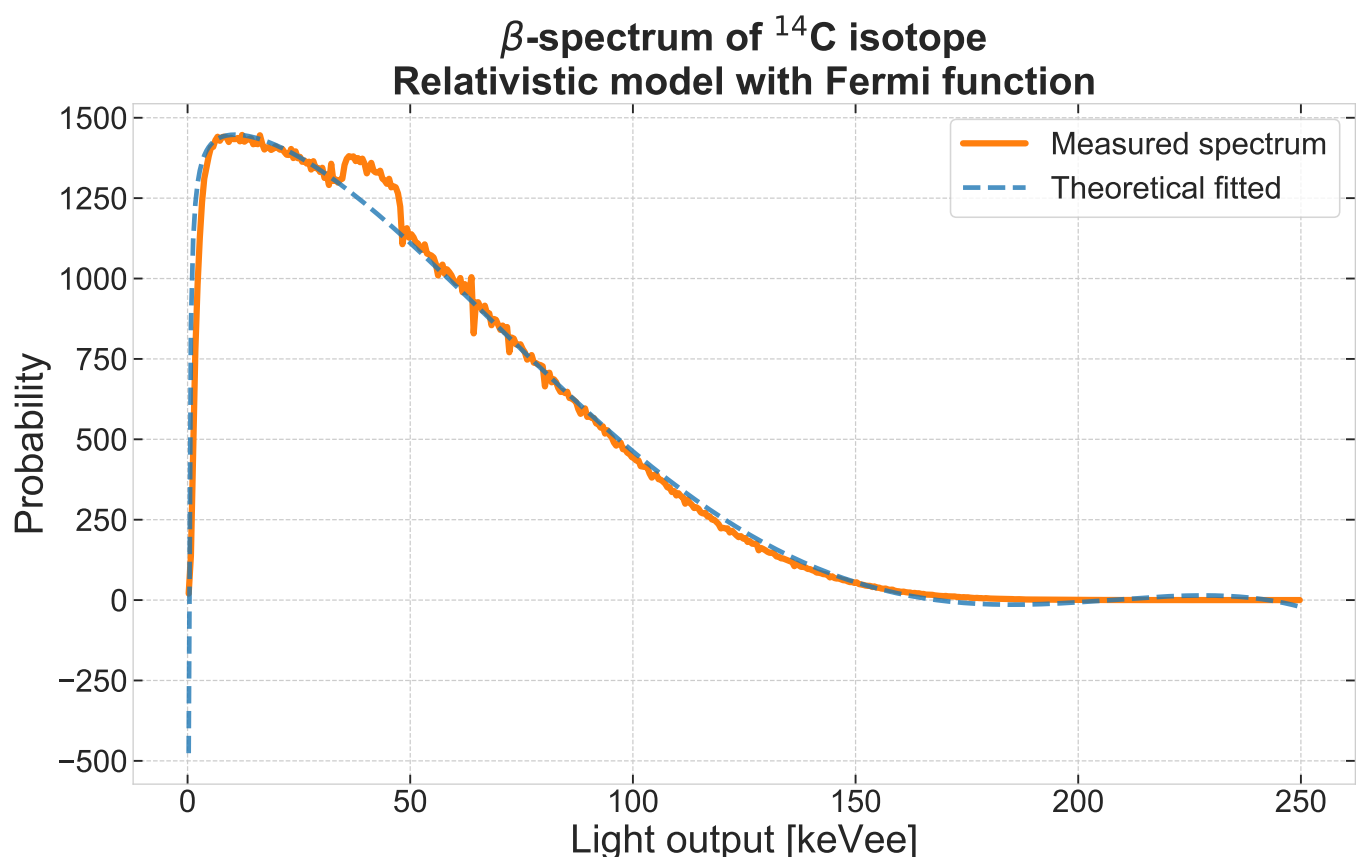
2. ábra. Az általunk vizsgált  $^{14}\text{C}$  különböző, egymás utáni 2 perces mérésekből származó  $\beta$ -spektrumainak átlagolt értéke.



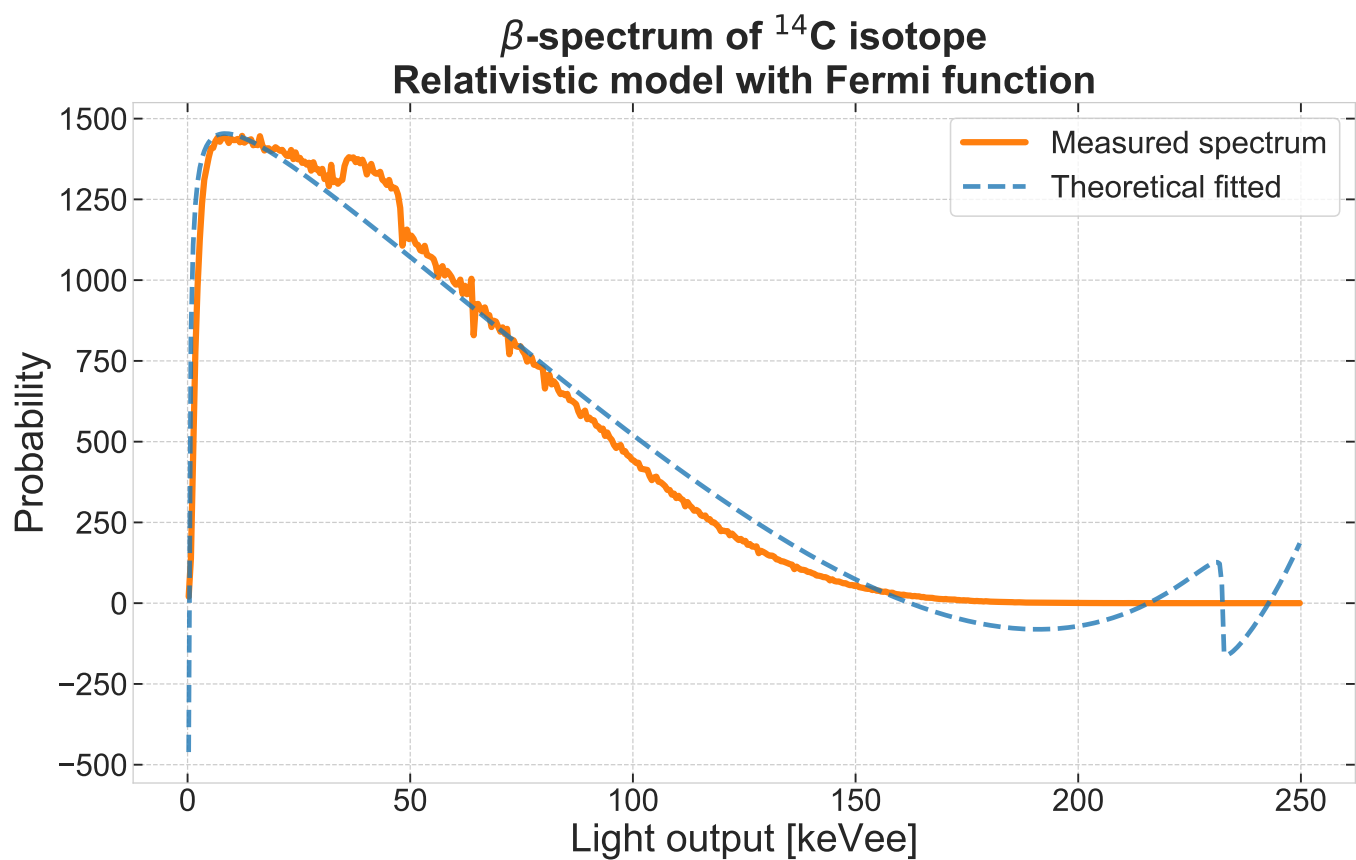
3. ábra. Az általunk vizsgált  $^{14}\text{C}$  kiátlagolt spektrumára illesztett nemrelativisztikus függvény, mely egy túl jó közelítésben, de láthatóan visszaadja a  $\beta$ -spektrum kezdetben lecsengő alakját. Zérushelye a  $^{14}\text{C}$  karakterisztikus 156.5 keV-es  $Q$  értéke körül van.



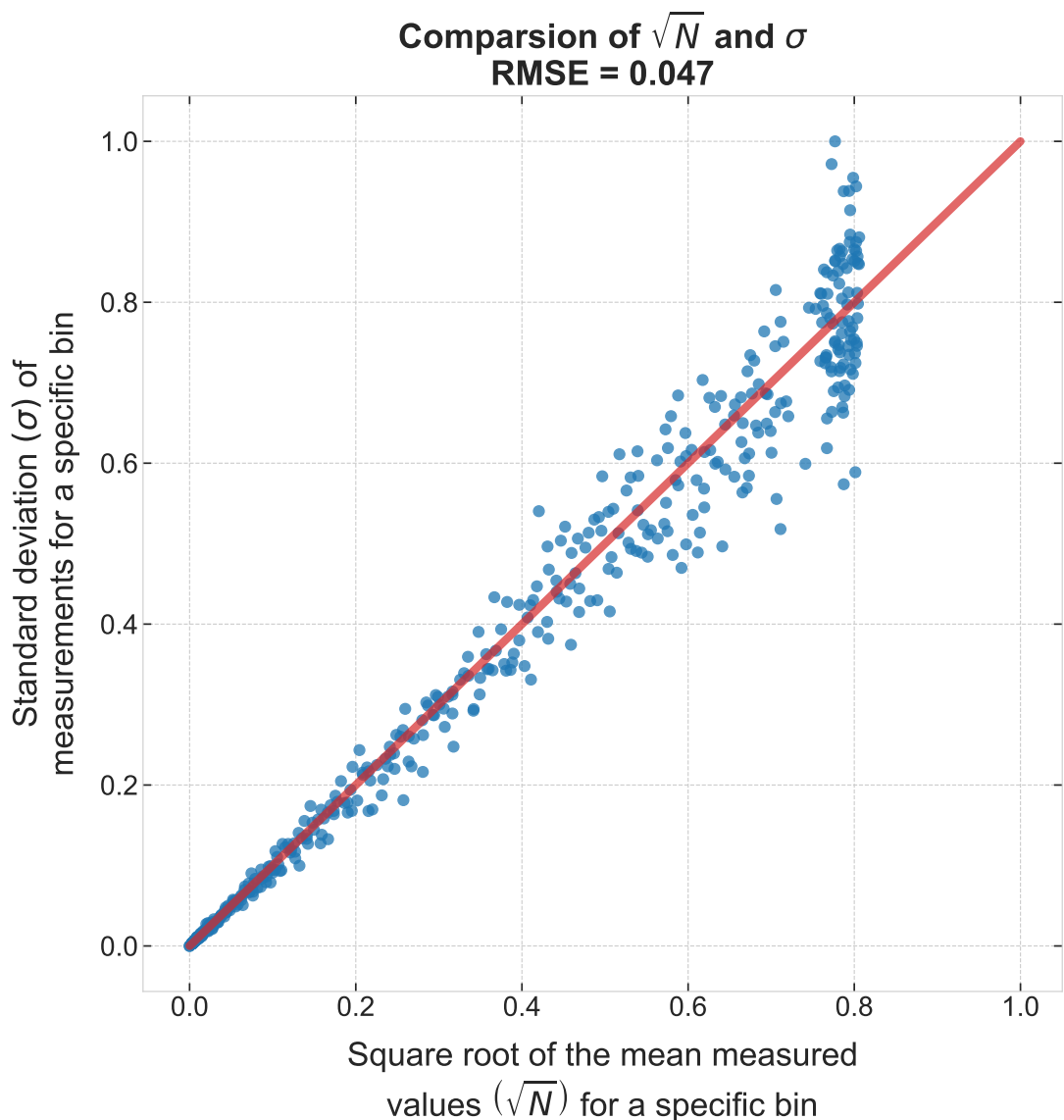
4. ábra. Az általunk vizsgált  $^{14}\text{C}$  kiátlagolt spektrumára illesztett nemrelativisztikus függvény, mely a Fermi-függvény által nyújtott korrekciót felhasználva, az előzőnél sokkal jobban megközelíti a  $\beta$ -spektrum görbét. A zérushely itt is a  $^{14}\text{C}$  karakterisztikus 156.5 keV-es  $Q$  érték körül van.



5. ábra. Az általunk vizsgált  $^{14}\text{C}$  kiátlagolt spektrumára illesztett relativisztikus függvény, melyet a Fermi-függvénnyel korrigáltam. Zérushelye szintén a  $^{14}\text{C}$  karakterisztikus 156.5 keV-es  $Q$  értéke körül van és az előzőekkel ellentétben a nagyobb energiáknál már nem látszik felfutó él. Ennek az illesztett egyenletét Wolfram|Alpha-val számítottam ki egyenesen a [34.](#) egyenletből. A jegyzőkönyvben ennek értéke nem szerepel, mivel külsőre erősen felvállalhatatlan. Az illesztéshez használt programkód azonban megtalálható a GitHubomon, melynek linkje a hivatkozások között érhető el.



6. ábra. Az általunk vizsgált  $^{14}\text{C}$  kiátlagolt spektrumára illesztett relativisztikus függvény, melyet a Fermi-függvénnyel korrigáltam. Ennek értékét számítottam ki az [A.](#) függelékben. Míg a függvény elejét sokkal megfelelőbben leírja, mint a [5.](#) ábrán látható verzió, addig ennek a  $Q$ -érték körül már súlyos gondjai vannak. Emellett erősen hasonlít a függvénymenet a nemrelativisztikus esethez.



7. ábra. Az egyes  $N(E)$  értékek hibáját (szórását) közelíthetjük az  $\sqrt{N}$  formulával. Ideális esetben a  $\sqrt{N} - \sigma$  függvény a 45°-os egyenesre illeszkedik. Az ábrán ezen függvény ábrázoltam a meghatározott  $\sqrt{N}$  és  $\sigma$  értékek segítségével. Az illeszkedés hibáját a machine learning modelleknél bevett átlag négyzetes hiba gyökének kiszámításával vizsgáltam, mely értéke szintén az ábrán látható.