Alkalmazott fizikai módszerek laboratórium III.: Folyadékszcintillációs Spektroszkópia

Pál Balázs*
Somogyfoki Réka*,m, Tuhári Richárd*,m

2019. október 14.

Abstract

Az *Alkalmazott fizikai módszerek laboratórium* harmadik alkalmán a radiokarbon (^{14}C izotóp) β-spektrumát mértük ki folyadékszcintillációs spektroszkópia segítségével. A mérőműszer és a mérési feladatok természetéből fakadóan a labor során elsődlegesen nem aktív mérési munkát végeztünk, hanem megismerkedtünk a β-bomlás azon elméleti alapjaival, melyek az eredmények kiértékeléséhez elengedhetetlenül szükségesek. Levezettük a β-spektrum leírásának egy közelítő, nemrelativisztikus modelljét és kiszámítottuk annak átlagos energiáját. A mérés kiértékelése során ellenőriztük a modell helyességét az adatokra történő illesztéssel, valamint hasonlóan vizsgáltuk ezen modell módosított változatát is a Fermi-függvény felhasználásával. Megállapítottuk, hogy a β-spektrum energiájának várható értéke $\langle E \rangle = Q/3$, valamint bebizonyítottuk, hogy $\sqrt{N} \approx \sigma$, ahol N a mérési értékek darabszáma, σ pedig azok szórása. Végül a méréshez használt minta megadott DPM, és a mérési adatainkból számolt CPM értékek segítségével kiszámítottuk a detektor η detektálási hatásfokának mértékét is.

I. BEVEZETÉS

A β-bomlás ismerete minden fizikával foglakozó számára alapvetően szükséges kell, hogy legyen. Ez már önmagában jelentős belátást nyújt mind a gyenge kölcsönhatás, mind pedig a neutrínók mibenlétére, mely közül az első az alapvető kölcsönhatások, a második pedig az elemi részekék egyike. Mindkettő az ismert fizikai világot alapvetően meghatározó jelenség és objektum, így ismeretük elengedhetetlen.

A mérés során a ^{14}C – hétköznapi nevén radiokarbon – β-spektrumát vizsgáltuk ún. folyadékszcintillációs spektroszkópia segítségével. A mérés során az alábbi kérdésekre kerestük a választ:

- Mennyire követik a nemrelativisztikus, valamint a Fermi-függvénnyel kibővített nemrelativisztikus és relativisztikus elméleti modellek a mérés során kimért spektrumot? Mik okozhatják az esetleges eltéréseket?
- Igaz-e, hogy az energia várható értéke az adott mag Q-faktorának harmadával egyenlő, tehát
$$\langle E \rangle = \frac{Q}{3} \, ?$$
- Igaz-e, hogy a mérési adatok számának gyöke $\left(\sqrt{N}\right)$ közelít-e azok szórásának (σ) értékéhez?

II. TECHNIKAI LEÍRÁS

A mérésben használt minta oldott formában, egy lezárt üvegfiolában helyezkedett el, mely mellett az üvegen belül volt megtalálható a három összetevőből álló szcintillációs „koktél" is. Ezt a mintát összerázva helyeztük egy már előre kalibrált szcintillációs számláló két, egymással szemben elhelyezkedő fotoelektron-sokszorozója közé. Minden egyéb feladatot innentől a gép végzett el helyettünk.

A ^{14}C mintával végül összesen 50 darab, egyenként 2 perc hosszú mérést végeztünk, így végeredményben 50 teljes spektrumot kaptunk, melyeket így már statisztikai módszerekkel elemezni tudtunk. A sokcsatornás analizátorra kapcsolt számítógép hibájából fakadóan ezen 50 mérés közül csak 49-ből szereztünk felhasználható eredményeket, azonban szerencsére a kötelező egyetemi labormunkák esetén nem várt el akkora pontosság, hogy ez az apró hiány a végeredményeink minőségét negatívan befolyásolná.

III. ELMÉLETI ALAPOK

A mérés – az I. rész felsorolásában is olvasható – első számú célja a β-bomlás Fermi-féle modelljének vizsgálata volt. Ehhez meg kellett értenünk a β-spektrum lehetséges leírását. Kiindulásként a Fermi-féle aranyszabályt vehetjük, mely az átmeneti valószínűséget adja meg két kvantumállapot között:

$$w_{k \to v} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle \Psi_v \left| H_\beta \right| \Psi_k \rangle \right|^2 \varrho_v \left(E_v \right) \qquad (1)$$

Ahol a k és v indexek sorrendben a kezdő és végállapotra utalnak.

III.1. ALKALMAZOTT KÖZELÍTÉSEK

Hogy a számításainkat el tudjuk végezni, a Fermi-szabály kapcsán 5 különböző közelítéssel élünk, melyből következtetünk majd a β-bomlás $dn\left(E\right)/dE$ végállapoti állapotsűrűségére. Ezek a közelítések az alábbiak:

[*] Eötvös Loránd Tudományegyetem
[m] Mérőtársak

1. Csak megengedett átmenetekről beszélünk.

   Ez esetben a neutrínó és az elektron teljes pályaperdülete $L = 0$. Ekkor a Fermi-féle aranyszabályban szereplő mátrixelem értéke:

$$|\langle\Psi_v\,|H_\beta|\,\Psi_k\rangle|^2 = |H_{kv}|^2 \approx \text{const.} \tag{2}$$

   Továbbiakban ebből levezethető a mátrixelem pontos értéke is, mely indikálni fogja a különbséget a Fermi– (F) és a Gamow–Teller-típusú (GT) átmenetek között:

$$|H_{kv}|^2 = \left(g_V^2 M_F^2 + g_A^2 M_{GT}^2\right)\frac{1}{V^2} \tag{3}$$

   Ahol g_V a vektor típusú, míg g_A az axiálvektor típusú kölcsönhatás csatolási állandója.

2. Az elektron, valamint a neutrínó hullámfüggvényét nemrelativisztikus síkhullámként kezeljük.

   β-bomlás során a mag vonzása a maghoz közel az elektron hullámfüggvényét valós esetben torzítaná, azonban ebben a közelítésben ettől eltekintünk. Ezt az eltérést a Fermi-függvény bevezetésével korrigáljuk. Ekkor a két részecske hullámfüggvénye kifejezhető az alábbi módokon:

$$\phi_e\left(\underline{r}_e\right) = N_e e^{-\frac{i}{\hbar}\underline{p}_e\underline{r}_e} \tag{4}$$

$$\phi_\nu\left(\underline{r}_\nu\right) = N_\nu e^{-\frac{i}{\hbar}\underline{p}_\nu\underline{r}_\nu} \tag{5}$$

   Az állapotok száma egy fázistérfogatban ekkor könnyen felírható mindkét részecske esetére:

$$dn_e\left(E\right) = \frac{V\cdot 4\pi p_e^2 dp_e}{h^2} \tag{6}$$

$$dn_\nu\left(E_\nu\right) = \frac{V\cdot 4\pi p_\nu^2 dp_\nu}{h^2} \tag{7}$$

3. Az e^- és ν kirepülési irányát függetlennek vesszük.

   Ekkor az állapotszám adott fázistérfogatban a következő:

$$\begin{aligned} dn\left(E,E_\nu\right) &= dn_e dn_\nu \propto p_e^2 dp_e p_\nu^2 dp_\nu = \\ &= p_e^2\frac{dp_e}{dE}p_\nu^2\frac{dp_\nu}{dE_\nu}dEdE_\nu \end{aligned} \tag{8}$$

   Ahol felhasználtam a 6. és 7. egyenletekben szereplő azonosságot. Itt csak arányosságot írtam fel, az egyenlet jobb oldala valójában egy sok tagból álló konstanssal van megszorozva még.

4. A leánymag visszalökődését elhanyagoljuk. A bomlás Q faktorát ekkor az elektron és neutrínó energiájának összegeként kapjuk:

$$Q = E + E_\nu \tag{9}$$

5. A neutrínó nyugalmi tömegét zérusnak vesszük.

   Ekkor a neutrínót ún. „ultrarelativisztikus” módon kezeljük, impulzusát és annak energia szerinti deriváltját ilyenkor az alábbi összefüggések adják:

$$p_\nu = \frac{E_\nu}{c} \tag{10}$$

$$\frac{dp_\nu}{dE} = \frac{1}{c} \tag{11}$$

Ezek alapján mind a nemrelativisztikus, mind pedig a relativisztikus esetre levezethetjük az állapotsűrűséget és így a β-bomlás energiaspektrumát, attól függően, hogy az elektron impulzusára a nemrelativisztikus, vagy relativisztikus összefüggést használjuk. Első esetben az impulzus a következő:

$$p_e = \sqrt{2mE} \tag{12}$$

$$\frac{dp_e}{dE} = \frac{m}{\sqrt{2mE}} \tag{13}$$

Míg második esetben az alábbi:

$$p_e = \frac{1}{c}\sqrt{\left(E+m_ec^2\right)^2 - m_e^2c^4} \tag{14}$$

$$\frac{dp_e}{dE} = \frac{1}{c}\frac{E+m_ec^2}{\sqrt{\left(E+m_ec^2\right)^2 - m_e^2c^4}} \tag{15}$$

A részletesen számolások az A. függelékben találhatóak.

III.2. VÁRHATÓ ENERGIAÉRTÉK

A várható érték definíciója alapján megadható a β-spektrum energiájának várható értéke az alábbi módon:

$$\langle E\rangle = \int_0^Q EP\left(E\right)dE \tag{16}$$

Ahol $P\left(E\right)$ az adott energiájú átmenet valószínűsége. Ez kiszámítható a $dn\left(E\right)/dE$ állapotsűrűség, teljes spektrumra vett összegével történő normálásával:

$$P\left(E\right) = \frac{dn\left(E\right)/dE}{\int_0^Q\left[dn\left(E\right)/dE\right]dE} \tag{17}$$

Az energia várható értéke a nemrelativisztikus esetből kapott számítás alapján:

$$\langle E\rangle = \frac{Q}{3} \tag{18}$$

A teljes számítás az A. függelékben található.

IV. KIÉRTÉKELÉS

V. DISZKUSSZIÓ

APPENDIX A.

APPENDIX A.1. AZ ÁLLAPOTSŰRŰSÉG NEMRELATIVISZTIKUS SZÁMÍTÁSA

Keressük a 8. egyenletben leírt $dn\left(E,E_\nu\right)$ állapotszám egyváltozós alakját. Ezt a minden E_ν-re történő kiintegrálással és egy $\left(E_\nu - E - Q\right)$ argumentumú Dirac-deltával kaphatjuk meg, ahol az utóbbi az energiamegmaradást érvényesítendő jelenik meg az egyenletben. Az integrál alakja a következő ebben az esetben:

$$dn\left(E\right) = \int_{E_\nu} dn\left(E,E_\nu\right)\cdot\delta\left(E_\nu - E - Q\right) \tag{19}$$

$$dn\left(E\right) = C_1\cdot\int_{E_\nu}\left(p_e^2\frac{dp_e}{dE}p_\nu^2\frac{dp_\nu}{dE_\nu}\right)\cdot\delta\left(E_\nu - E - Q\right)dEdE_\nu \tag{20}$$

Ahol C_1 egy soktagú konstans. Ennek az integrálnak az értéke a Dirac-delta azonosságai alapján egyből felírható:

$$dn\left(E\right) = C_1\cdot p_e^2\frac{dp_e}{dE}p_\nu^2\frac{dp_\nu}{dE_\nu}\bigg|_{E_\nu=Q-E}dE \tag{21}$$

Melyből az állapotsűrűség dE-vel történő leosztás után kapható:

$$\frac{dn\left(E\right)}{dE} = C_1\cdot p_e^2\frac{dp_e}{dE}p_\nu^2\frac{dp_\nu}{dE_\nu}\bigg|_{E_\nu=Q-E} \tag{22}$$

nemrelativisztikus esetben a 12. és 13. egyenletek helyettesítjük be az elektronra, valamint felhasználjuk a neutrínóra vonatkozó 10. és 11. képleteket is.

$$\frac{dn\left(E\right)}{dE} = C_1\cdot\left(\sqrt{2m_eE}\right)^2\frac{m_e}{\sqrt{2m_eE}}\cdot\left(\frac{E_\nu}{c}\right)^2\bigg|_{E_\nu=Q-E}\frac{1}{c} = C_1\cdot\frac{2m_e^2E}{\sqrt{2m_eE}}\cdot\frac{\left(Q-E\right)^2}{c^3} \tag{23}$$

A konstans értékeket (beleértve C_1-et is) egy C_2 konstansba összevonva a végleges állapotsűrűséget nemrelativisztikus esetben az alábbi függvény adja:

$$\boxed{\frac{dn\left(E\right)}{dE} = C_2\cdot\sqrt{E}\left(Q-E\right)^2} \tag{24}$$

APPENDIX A.2. AZ ÁLLAPOTSŰRŰSÉG RELATIVISZTIKUS SZÁMÍTÁSA

Relativisztikus esetben a 21. egyenletbe a neutrínóra vonatkozó egyenletek mellett az elektronra a 14. és 15. alakokat használjuk. Elvégezve a behelyettesítést a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned}\frac{dn\left(E\right)}{dE} &= C_1\cdot\left(\frac{1}{c}\sqrt{\left(E+m_ec^2\right)^2 - m_e^2c^4}\right)^2\cdot\frac{1}{c}\frac{E+m_ec^2}{\sqrt{\left(E+m_ec^2\right)^2 - m_e^2c^4}}\cdot\left(\frac{E_\nu}{c}\right)^2\bigg|_{E_\nu=Q-E}\frac{1}{c} = \\ &= C_1\cdot\frac{1}{c^2}\left(\left(E+m_ec^2\right)^2 - m_e^2c^4\right)\cdot\frac{1}{c}\frac{E+m_ec^2}{\sqrt{\left(E+m_ec^2\right)^2 - m_e^2c^4}}\cdot\frac{\left(Q-E\right)^2}{c^3} = \\ &= C_1\cdot\frac{1}{c^6}\cdot\underbrace{\sqrt{\left(E+m_ec^2\right)^2 - m_e^2c^4}}_{cp_e}\cdot\underbrace{\left(E+m_ec^2\right)}_{E_{\text{tot}}}\cdot\left(Q-E\right)^2\end{aligned} \tag{25}$$

A konstans értékeket újból összevonva (C_1-el együtt) egy C_3 konstansba a végleges eredményre a következőt kapjuk:

$$\boxed{\frac{dn\left(E\right)}{dE} = C_3\cdot p_e\cdot E_{tot}\cdot\left(Q-E\right)^2} \tag{26}$$

APPENDIX A.3. A NEMRELATIVISZTIKUS ESETBEN ILLESZTETT GÖRBE

Mind a nemrelativisztikus, mind pedig a relativisztikus esetben az $n\left(E\right)$ állapotszám függvényét szükséges illeszteni az elméleti görbére. Ezt a $dn\left(E\right)$ integrálásából kaphatjuk meg. Nemrelativisztikus esetben a 24. egyenletet felhasználva:

$$\begin{aligned}n\left(E\right) &= \int dn\left(E\right) = C_2\cdot\int\sqrt{E}\cdot\left(Q-E\right)^2dE = \\ &= C_2\cdot\left(\int\sqrt{E}\cdot Q^2dE - \int\sqrt{E}\cdot 2QEdE + \int\sqrt{E}\cdot E^2dE\right)\end{aligned} \tag{27}$$

Az integrálokat elvégezve a következő alakot kapjuk:

$$\boxed{n\left(E\right) = C_2 \cdot \left(\frac{2}{3}E^{3/2}Q^2 - \frac{2}{5}E^{5/2} \cdot 2Q + \frac{2}{7}E^{7/2}\right)} \tag{28}$$

Az illesztéshez ez alapján az alábbi paraméteres görbét használtam:

$$\boxed{f\left(E\right) = p_1 + p_2 \cdot E^{3/2} - p_3 \cdot E^{5/2} + p_4 \cdot E^{7/2}} \tag{29}$$

A Fermi-függvénnyel kibővített esetben ez kissé változott:

$$\boxed{f\left(E\right) = p_1 + \left(p_2 + p_3 \cdot E^{2/3} - p_4 \cdot E^{5/2} + p_5 \cdot E^{7/2}\right) \cdot F\left(E\right)} \tag{30}$$

APPENDIX A.4. A RELATIVISZTIKUS ESETBEN ILLESZTETT GÖRBE

Relativisztikus esetben az állapotszám $n\left(E\right)$ függvénye jóval bonyolultabb képet öltött, mint a nemrelativisztikus esetben. Itt a 26. egyenlet eredményét kell behelyettesítsük az integrandusba:

$$n\left(E\right) = \int dn\left(E\right) = C_3 \cdot \int p_e \cdot E_{tot} \cdot \left(Q - E\right)^2 dE \tag{31}$$

Mely a p_e és E_{tot} értékekkel behelyettesítve:

$$n\left(E\right) = C_3 \cdot \frac{1}{c} \cdot \int \sqrt{\left(E + m_e c^2\right)^2 - m_e^2 c^4} \cdot \left(E + m_e c^2\right) \cdot \left(Q - E\right)^2 dE \tag{32}$$

Kibontva a zárójeleket ezt az alakot több integrál összegére bonthatjuk, azonban az átláthatóság és a számolás egyszerűsége kedvéért, előbb rendezzük át a gyökös formában szereplő p_e alakját:

$$\sqrt{\left(E + m_e c^2\right)^2 - m_e^2 c^4} = \sqrt{E^2 + 2E m_e c^2} = \sqrt{E\left(E + 2m_e c^2\right)} \tag{33}$$

Ezt felhasználva 6 integrál összegére bontjuk a 32. egyenletben szereplő integrált:

$$I_1 = \int \sqrt{E\left(E + 2m_e c^2\right)} \cdot E \cdot Q^2\, dE = Q^2 \cdot \int \sqrt{E^3\left(E + 2m_e c^2\right)}\, dE \tag{34}$$

$$I_2 = -\int \sqrt{E\left(E + 2m_e c^2\right)} \cdot E \cdot 2QE\, dE = -2Q \cdot \int \sqrt{E^5\left(E + 2m_e c^2\right)}\, dE \tag{35}$$

$$I_3 = \int \sqrt{E\left(E + 2m_e c^2\right)} \cdot E \cdot E^2\, dE = \int \sqrt{E^7\left(E + 2m_e c^2\right)}\, dE \tag{36}$$

$$I_4 = \int \sqrt{E\left(E + 2m_e c^2\right)} \cdot m_e c^2 \cdot Q^2\, dE = m_e c^2 \cdot Q^2 \cdot \int \sqrt{E\left(E + 2m_e c^2\right)}\, dE \tag{37}$$

$$I_5 = -\int \sqrt{E\left(E + 2m_e c^2\right)} \cdot m_e c^2 \cdot 2QE\, dE = -m_e c^2 \cdot 2Q \cdot \int \sqrt{E^3\left(E + 2m_e c^2\right)}\, dE \tag{38}$$

$$I_6 = \int \sqrt{E\left(E + 2m_e c^2\right)} \cdot m_e c^2 \cdot E^2\, dE = m_e c^2 \cdot \int \sqrt{E^5\left(E + 2m_e c^2\right)}\, dE \tag{39}$$

Az $n\left(E\right)$ állapotszám értéke ekkor felírható ezek segítségével az alábbi módon:

$$n\left(E\right) = C_3 \cdot \frac{1}{c} \cdot \sum_{k=1}^{6} I_k \tag{40}$$

Az I_k függvények mindegyike hasonló alakú, megoldásuk egzakt alakra hozható:

$$\int \sqrt{x^n \cdot (x + a)} = \frac{2x\sqrt{x^n \cdot (x+a)} \cdot {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{n}{2} + 1; \frac{n}{2} + 2; -\frac{x}{a}\right)}{(n+2)\sqrt{\frac{x+a}{a}}} + C \tag{41}$$

Ahol ${}_2F_1\left(a; b; c; z\right)$ a hipergeometrikus függvény. Átírva az egyes integrálokat a következőket kapjuk:

$$I_1 = Q^2 \cdot \frac{2E\sqrt{E^3 \cdot \left(E + 2m_e c^2\right)} \cdot {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2} + 1; \frac{3}{2} + 2; -\frac{E}{2m_e c^2}\right)}{(3+2)\sqrt{\frac{E + 2m_e c^2}{2m_e c^2}}} + C_{I_1} \tag{42}$$

$$I_2 = -2Q \cdot \frac{2E\sqrt{E^5 \cdot \left(E + 2m_e c^2\right)} \cdot {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2} + 1; \frac{5}{2} + 2; -\frac{E}{2m_e c^2}\right)}{(5+2)\sqrt{\frac{E + 2m_e c^2}{2m_e c^2}}} + C_{I_2} \tag{43}$$

$$I_3 = \frac{2E\sqrt{E^7 \cdot (E+2m_ec^2)} \cdot {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}+1; \frac{7}{2}+2; -\frac{E}{2m_ec^2}\right)}{(7+2)\sqrt{\frac{E+2m_ec^2}{2m_ec^2}}} + C_{I_3} \tag{44}$$

$$I_4 = m_ec^2 \cdot Q^2 \cdot \frac{2E\sqrt{E \cdot (E+2m_ec^2)} \cdot {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}+1; \frac{1}{2}+2; -\frac{E}{2m_ec^2}\right)}{(1+2)\sqrt{\frac{E+2m_ec^2}{2m_ec^2}}} + C_{I_4} \tag{45}$$

$$I_5 = -m_ec^2 \cdot 2Q \cdot \frac{2E\sqrt{E^3 \cdot (E+2m_ec^2)} \cdot {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}+1; \frac{3}{2}+2; -\frac{E}{2m_ec^2}\right)}{(3+2)\sqrt{\frac{E+2m_ec^2}{2m_ec^2}}} + C_{I_5} \tag{46}$$

$$I_6 = m_ec^2 \cdot \frac{2E\sqrt{E^5 \cdot (E+2m_ec^2)} \cdot {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}+1; \frac{5}{2}+2; -\frac{E}{2m_ec^2}\right)}{(5+2)\sqrt{\frac{E+2m_ec^2}{2m_ec^2}}} + C_{I_6} \tag{47}$$

Jelöljünk minden hipergeometrikus függvényt az adott I_k-hoz tartozó n értékkel. Így tehát

$${}_2F_1\left(a;b;c;z\right) \equiv {}_2F_1\left(n\right) \tag{48}$$

Elhagyva a konstans értékeket, egyszerűsítsük a fenti kifejezéseket:

$$I_1 = Q^2 \cdot \frac{2E^{5/2} \cdot \sqrt{E+2m_ec^2}}{5\sqrt{\frac{E+2m_ec^2}{2m_ec^2}}} \cdot {}_2F_1\left(3\right) \tag{49}$$

$$I_2 = -2Q \cdot \frac{2E^{7/2} \cdot \sqrt{E+2m_ec^2}}{7\sqrt{\frac{E+2m_ec^2}{2m_ec^2}}} \cdot {}_2F_1\left(5\right) \tag{50}$$

$$I_3 = \frac{2E^{9/2} \cdot \sqrt{E+2m_ec^2}}{9\sqrt{\frac{E+2m_ec^2}{2m_ec^2}}} \cdot {}_2F_1\left(7\right) \tag{51}$$

$$I_4 = m_ec^2 \cdot Q^2 \cdot \frac{2E^{3/2} \cdot \sqrt{E+2m_ec^2}}{3\sqrt{\frac{E+2m_ec^2}{2m_ec^2}}} \cdot {}_2F_1\left(1\right) \tag{52}$$

$$I_5 = -m_ec^2 \cdot 2Q \cdot \frac{2E^{5/2} \cdot \sqrt{E+2m_ec^2}}{5\sqrt{\frac{E+2m_ec^2}{2m_ec^2}}} \cdot {}_2F_1\left(3\right) \tag{53}$$

$$I_6 = m_ec^2 \cdot \frac{2E^{7/2} \cdot \sqrt{E+2m_ec^2}}{7\sqrt{\frac{E+2m_ec^2}{2m_ec^2}}} \cdot {}_2F_1\left(5\right) \tag{54}$$

Az kifejezésekben szereplő törtek $\sqrt{E+2m_ec^2}$-el egyszerűsíthetőek, valamint átrendezhetőek:

$$I_1 = Q^2 \cdot \frac{2}{5} \cdot E^{5/2}\sqrt{2m_ec^2} \cdot {}_2F_1\left(3\right) \tag{55}$$

$$I_2 = -2Q \cdot \frac{2}{7} \cdot E^{7/2}\sqrt{2m_ec^2} \cdot {}_2F_1\left(5\right) \tag{56}$$

$$I_3 = \frac{2}{9} \cdot E^{9/2}\sqrt{2m_ec^2} \cdot {}_2F_1\left(7\right) \tag{57}$$

$$I_4 = m_ec^2 \cdot Q^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot E^{3/2}\sqrt{2m_ec^2} \cdot {}_2F_1\left(1\right) \tag{58}$$

$$I_5 = -m_ec^2 \cdot 2Q \cdot \frac{2}{5} \cdot E^{5/2}\sqrt{2m_ec^2} \cdot {}_2F_1\left(3\right) \tag{59}$$

$$I_6 = m_ec^2 \cdot \frac{2}{7} \cdot E^{7/2}\sqrt{2m_ec^2} \cdot {}_2F_1\left(5\right) \tag{60}$$

Innentől kézzel átláthatatlan lenne tovább számolni, így a `Wolfram|Alpha` szoftverét hívtam segítségül, mely egyedi, szimbolikus számítási módjával viszonylag könnyen ki tudta hozni $n\left(E\right)$ végleges alakját. Az egyszerűség és átláthatóság kedvéért használjuk fel, hogy $m_ec^2 \approx 511keV$ és $Q = 156.5keV$. Ekkor a végleges formula a következőképp fest:

$$n\left(E\right) = -C_3 \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{E(E+1022)}} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(E\left(E+1022\right) \cdot A\left(E\right) - \sqrt{E\left(E+1022\right)} \cdot B\left(E\right)\right)$$

$$n\left(E\right) = -C_3 \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{E\left(E+1022\right)}}{\sqrt{E(E+1022)}} \cdot \left(\sqrt{E\left(E+1022\right)} \cdot A\left(E\right) - B\left(E\right)\right)$$

$$\rightarrow \boxed{n\left(E\right) = -C_3 \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{E\left(E+1022\right)} \cdot A\left(E\right) - B\left(E\right)\right) \quad \text{Mert } E > 0} \tag{61}$$

Ahol $A\left(E\right)$ és $B\left(E\right)$ értéke:

$$A\left(E\right) = E^3 + 643E^2 - 256778 \cdot E + 6.67164 \cdot 10^7 \tag{62}$$

$$B\left(E\right) = -6.81842 \cdot 10^{10} \cdot \operatorname{arcsinh}\left(0.0312806 \cdot \sqrt{E}\right) \tag{63}$$

A nemrelativisztikus esethez hasonló módon a következő függvényt illesztettem relativisztikus esetben:

$$\boxed{f\left(E\right) = p_1 + p_2 \cdot \left(\sqrt{p_3 + p_4 \cdot E^2 + p_5 \cdot E} \cdot A\left(E\right) - B\left(E\right)\right)} \tag{64}$$

Ahol most A és B a következő függvények voltak:

$$A\left(E\right) = p_6 \cdot E^3 + p_7 \cdot E^2 + p_8 \cdot E \tag{65}$$

$$B(E) = p_9 \cdot \operatorname{arcsinh}\left(p_{10} \cdot \sqrt{E} + p_{11}\right) \tag{66}$$

A Fermi-függvényt is felhasználva a relativisztikus $f(E)$ függvény következő formát öltötte:

$$\boxed{f(E) = p_1 \cdot F(E) + p_2 \cdot F(E) \cdot \left(\sqrt{p_3 + p_4 \cdot E^2 + p_5 \cdot E} \cdot A(E) - B(E)\right) + p_{+1}} \tag{67}$$

APPENDIX A.5. A VÁRHATÓ ENERGIA NEMRELATIVISZTIKUS SZÁMÍTÁSA

A számításhoz a 16. egyenletben szereplő összefüggést használjuk, melybe a 24. egyenletben kapott eredmény helyettesítjük be. Ilyenformán a következő alakot kapjuk:

$$\langle E \rangle = \int_0^Q EP(E)\,dE = \int_0^Q E \cdot \frac{dn(E)/dE}{\int_0^Q [dn(E)/dE]\,dE} dE \tag{68}$$

Előbb a $P(E)$ értékét számítjuk ki, mely a következő lesz:

$$P(E) = \frac{dn(E)/dE}{\int_0^Q [dn(E)/dE]\,dE} = \frac{C_2 \cdot \sqrt{E}(Q-E)^2}{\int_0^Q \left[C_2 \cdot \sqrt{E}(Q-E)^2\right] dE} \tag{69}$$

A számlálóban és nevezőben megjelenő két konstans kiejti egymást. A végeredmény megadásához valójában csak a nevezőben szereplő integrál értékét kell kiszámítanunk:

$$\begin{aligned}
&\int_0^Q \sqrt{E}(Q-E)^2\,dE = \int_0^Q \sqrt{E} \cdot \left(Q^2 - 2QE + E^2\right) dE = \\
=&\int_0^Q \sqrt{E}Q^2 dE - \int_0^Q \sqrt{E}2QE dE + \int_0^Q \sqrt{E}E^2 dE = \\
=&\left[\frac{2}{3} \cdot E^{3/2}Q^2\right]_0^Q - \left[2 \cdot \frac{2}{5} \cdot E^{5/2} \cdot Q\right]_0^Q + \left[\frac{2}{7} \cdot E^{7/2}\right]_0^Q = \\
=&\frac{2}{3} \cdot Q^{3/2}Q^2 - 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot Q^{5/2} \cdot Q + \frac{2}{7} \cdot Q^{7/2} = \frac{2}{3} \cdot Q^{7/2} - \frac{4}{5} \cdot Q^{7/2} + \frac{2}{7} \cdot Q^{7/2} = Q^{7/2} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{2}{7}\right)
\end{aligned} \tag{70}$$

Tehát végeredményben a nevezőben levő integrál értéke:

$$\int_0^Q \sqrt{E}(Q-E)^2\,dE = \frac{16}{105} Q^{7/2} \tag{71}$$

Ebből a $P(E)$ értéke kiszámítható a 27. egyenletbe behelyettesítve:

$$\begin{aligned}
P(E) &= \frac{\sqrt{E}(Q-E)^2}{\frac{16}{105}Q^{7/2}} = \frac{105}{16} \frac{\sqrt{E}Q^2 - \sqrt{E}2QE + \sqrt{E}E^2}{Q^{7/2}} \\
P(E) &= \frac{105}{16}\left(E^{1/2}Q^{-3/2} - E^{3/2}2Q^{-5/2} + E^{5/2} \cdot Q^{-7/2}\right)
\end{aligned} \tag{72}$$

Ezen eredmény segítségével végre kiszámíthatjuk az energia várható értékének nagyságát:

$$\begin{aligned}
\langle E \rangle &= \int_0^Q E \cdot \frac{105}{16}\left(E^{1/2}Q^{-3/2} - E^{3/2}2Q^{-5/2} + E^{5/2} \cdot Q^{-7/2}\right) dE \\
\langle E \rangle &= \int_0^Q \frac{105}{16}\left(E^{3/2}Q^{-3/2} - E^{5/2}2Q^{-5/2} + E^{7/2} \cdot Q^{-7/2}\right) dE \\
\langle E \rangle &= \frac{105}{16} \cdot \left(Q^{-3/2}\int_0^Q E^{3/2}dE - 2Q^{-5/2}\int_0^Q E^{5/2}dE + Q^{-7/2}\int_0^Q E^{7/2}dE\right)
\end{aligned} \tag{73}$$

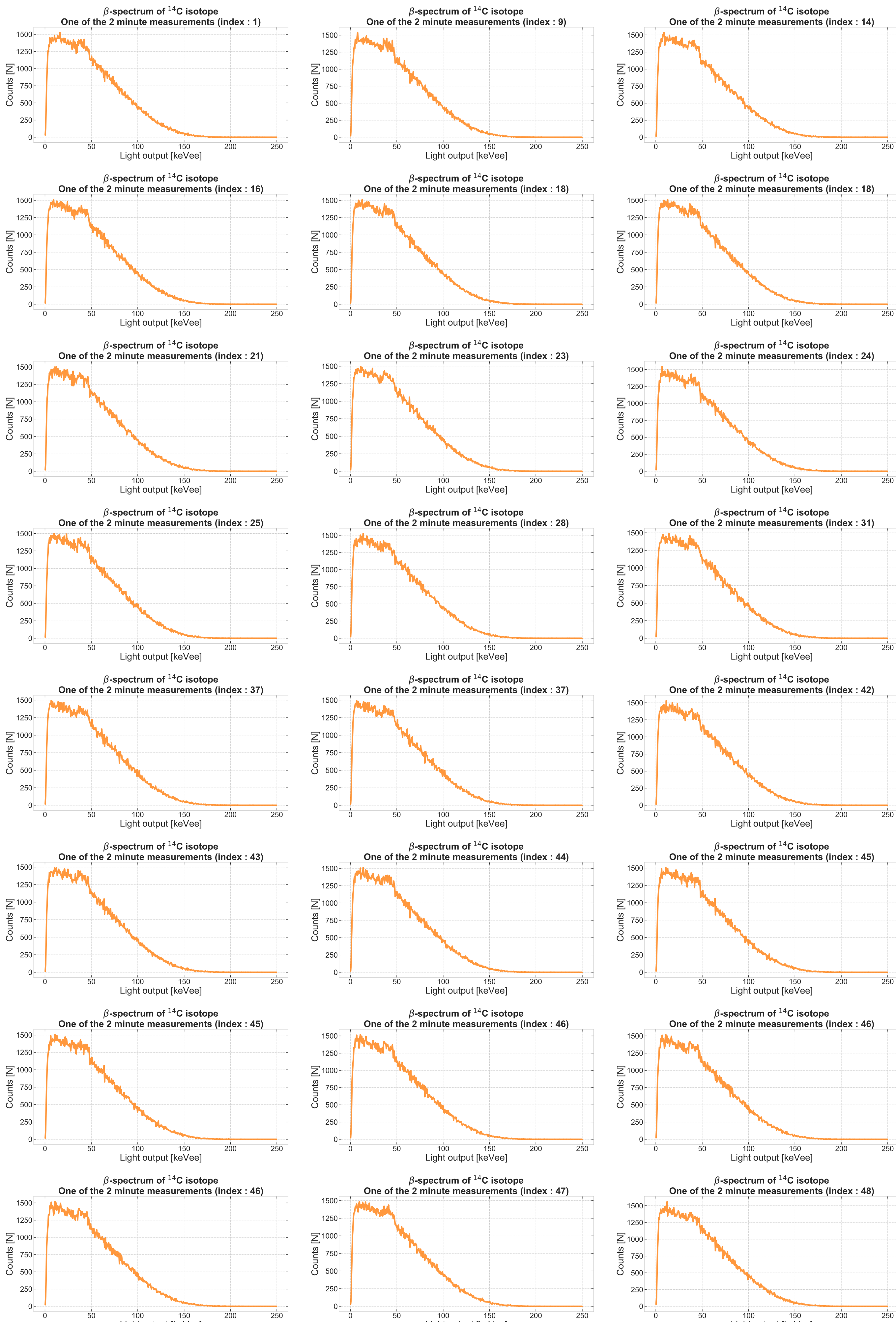
Az itteni egyszerű integrálok során csak a felső integrálási határhoz tartozó értékek lesznek nem zérusak, így egyszerűen egy $E \to Q$ helyettesítéssel kapjuk meg a végleges eredményt az integrálok elvégzése után:

$$\langle E \rangle = \frac{105}{16} \cdot \left(Q^{-3/2}\frac{2}{5}Q^{5/2} - 2Q^{-5/2}\frac{2}{7}Q^{7/2} + Q^{-7/2}\frac{2}{9}Q^{9/2}\right) = \frac{105}{16} \cdot \left(\frac{2}{5}Q - \frac{4}{7}Q + \frac{2}{9}Q\right) \tag{74}$$

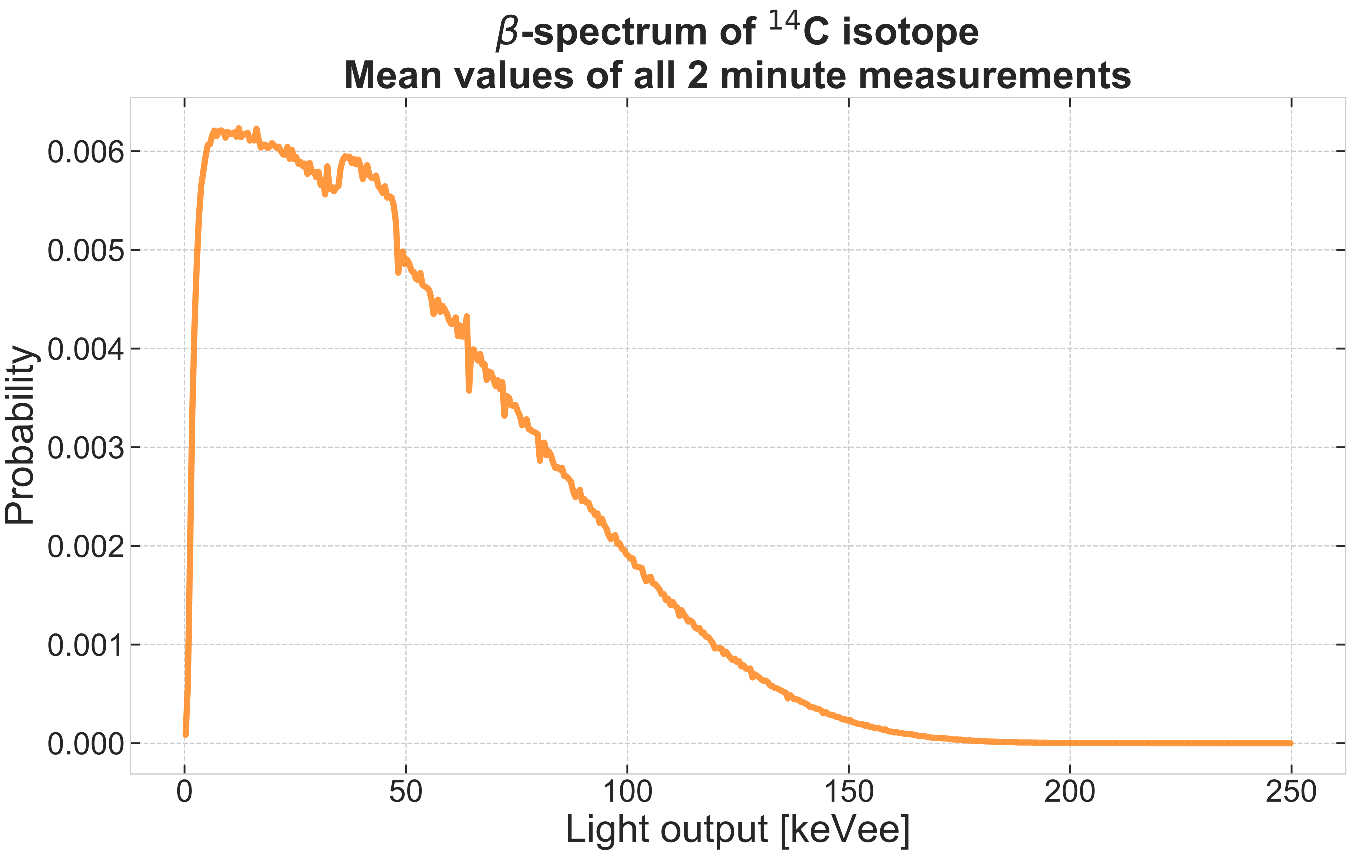
Így az $\langle E \rangle$ végleges értéke nemrelativisztikus közelítésben:

$$\boxed{\langle E \rangle = \frac{105}{16} \cdot \frac{16}{315} \cdot Q = \frac{Q}{3}} \tag{75}$$

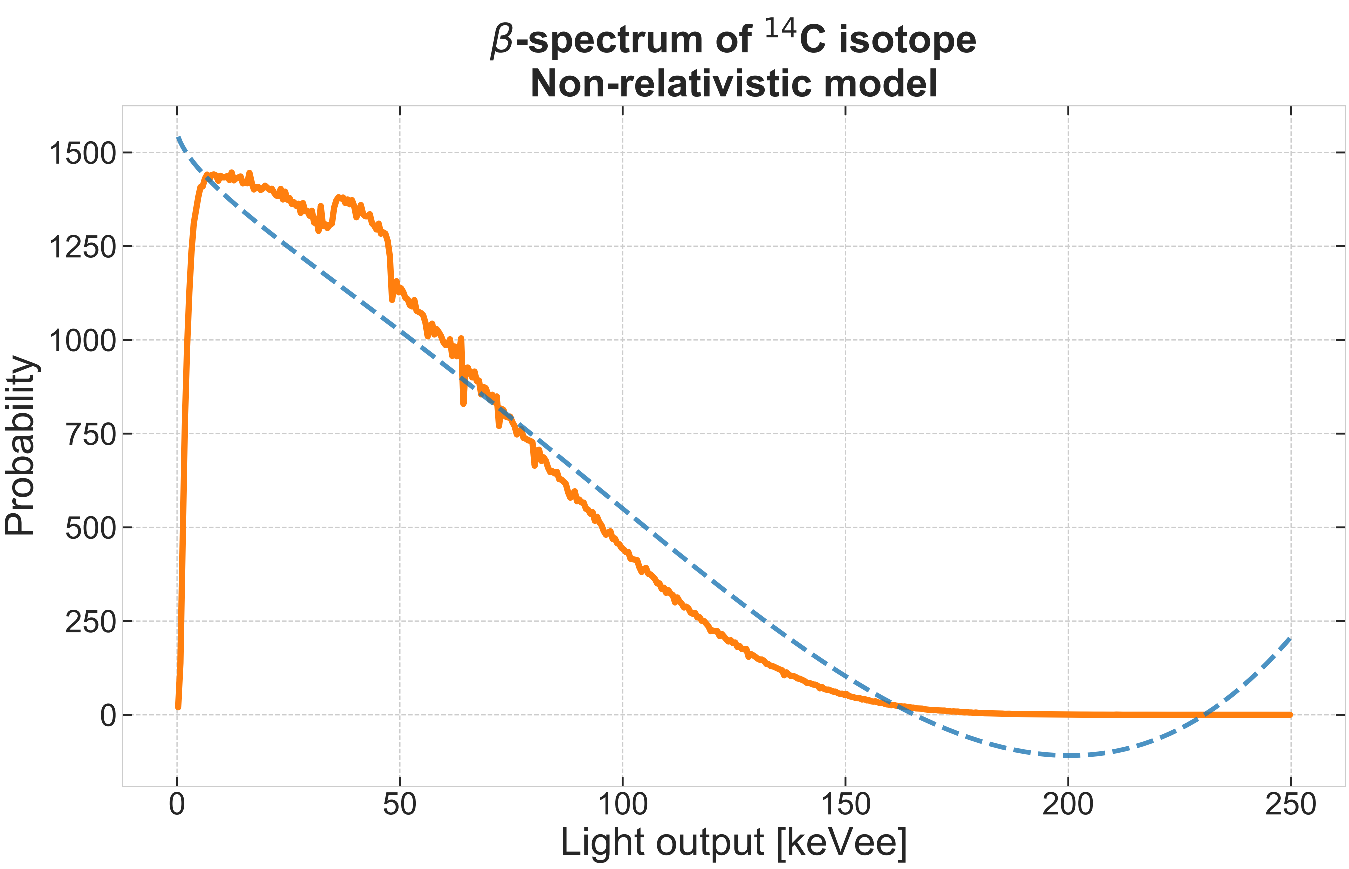
APPENDIX B.



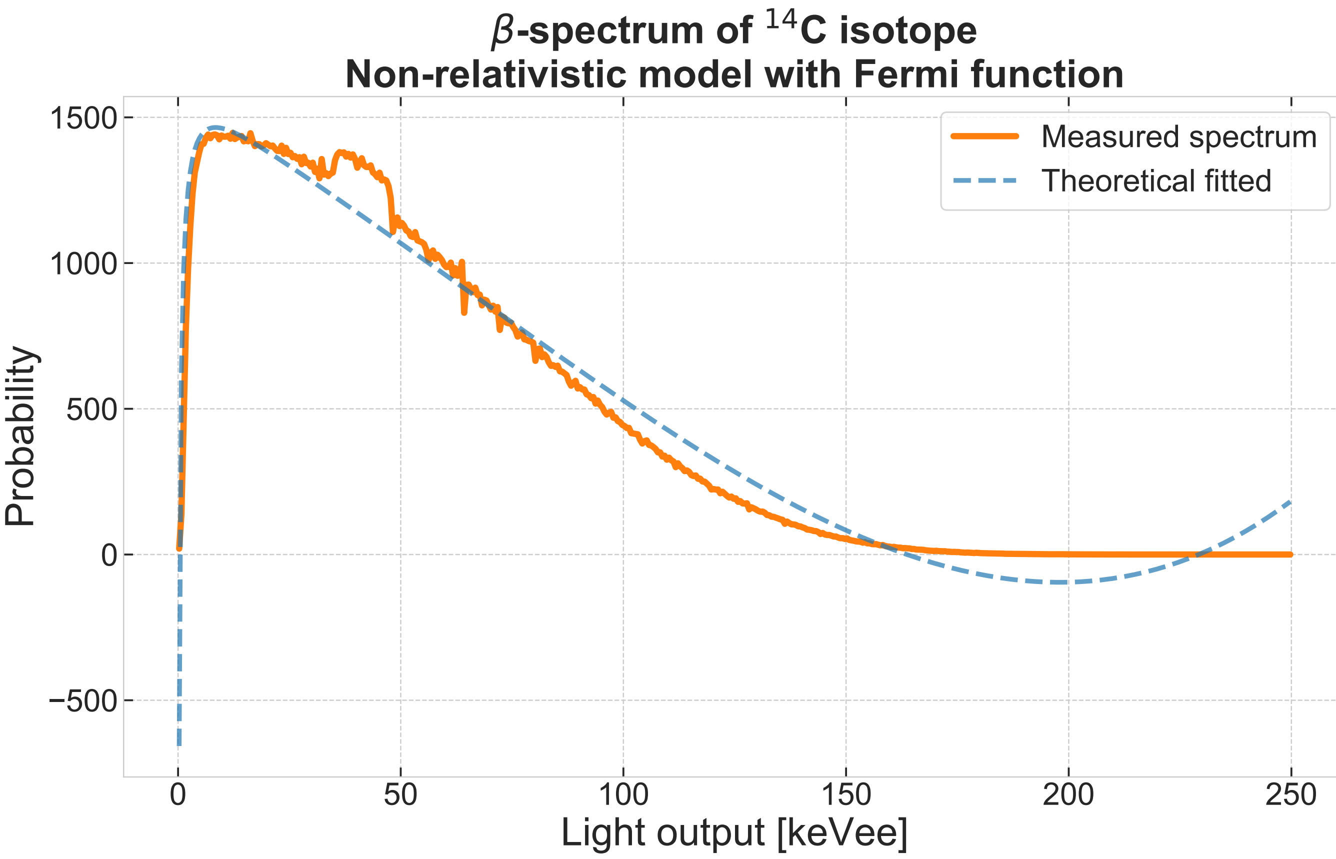
1. ábra. Az általunk vizsgált ^{14}C különböző, egymás utáni 2 perces mérésekből származó β-spektrumai. Az összes 49 sikeres mérés közül 24 darab van az ábrára véletlenszerűen kiválasztva.



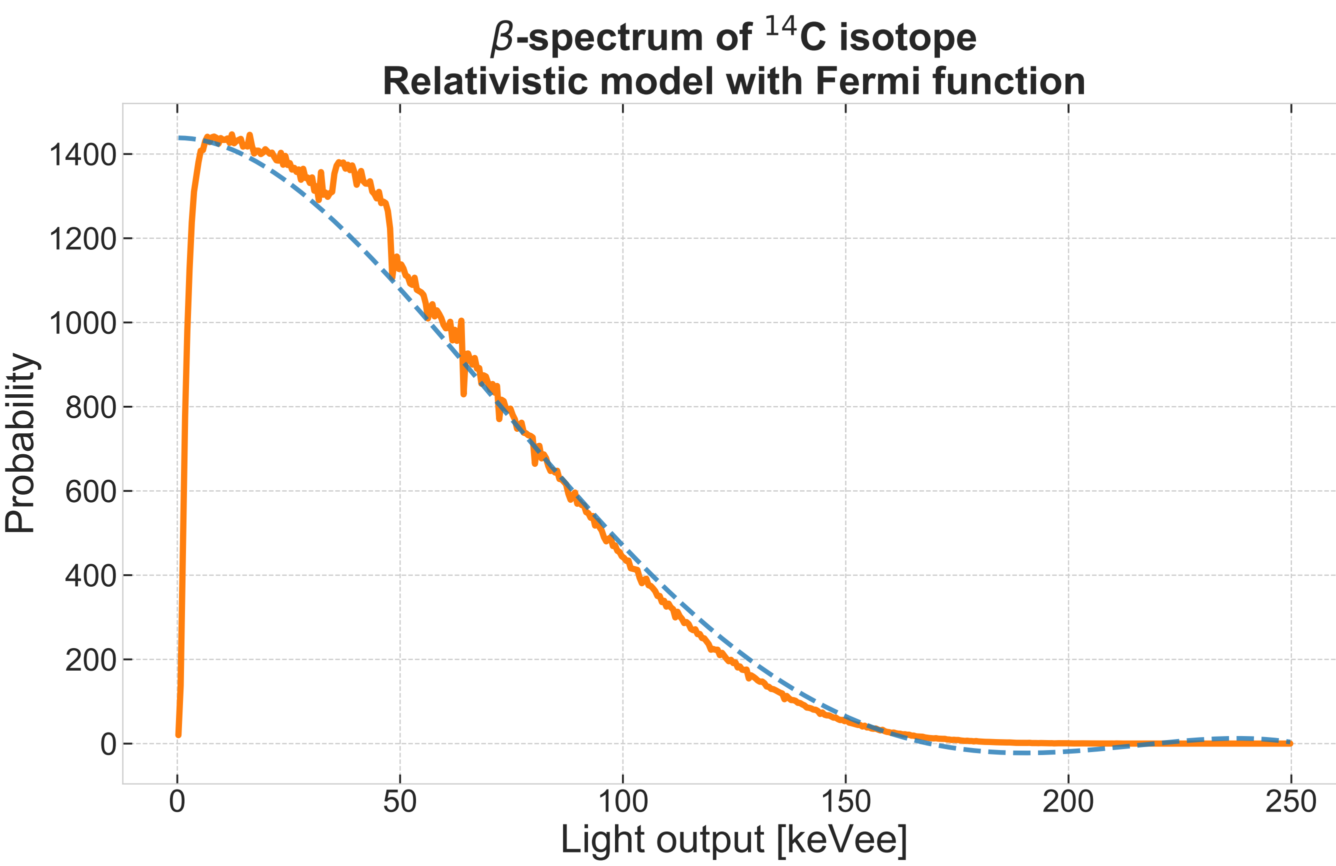
2. ábra. Az általunk vizsgált ^{14}C különböző, egymás utáni 2 perces mérésekből származó β-spektrumainak átlagolt értéke.



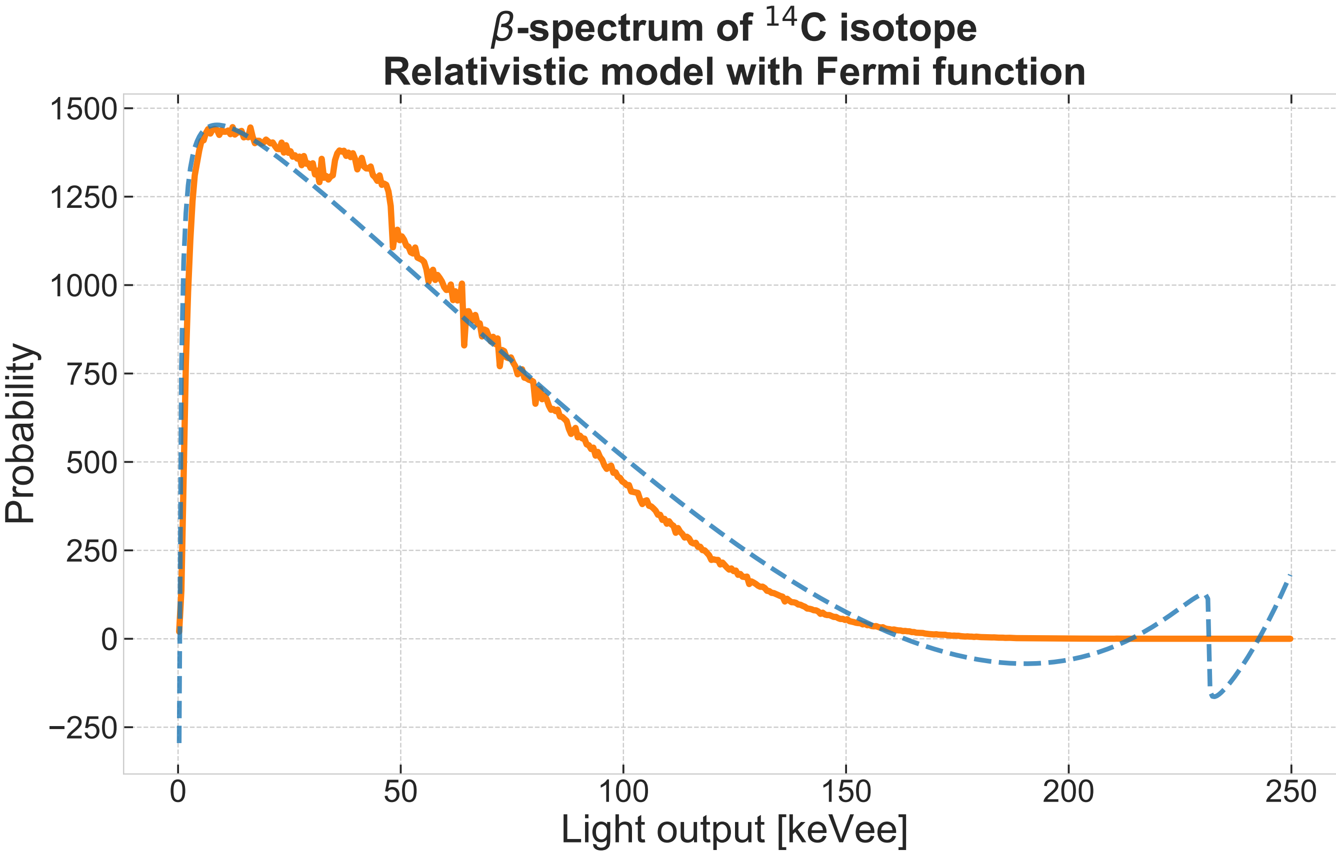
3. ábra. Az általunk vizsgált ^{14}C kiátlagolt spektrumára illesztett nemrelativisztikus függvény, mely egy túl jó közelítésben, de láthatóan visszaadja a β-spektrum kezdetben lecsengő alakját. Zérushelye a ^{14}C karakterisztikus 156.5 keV-es Q értéke körül van.



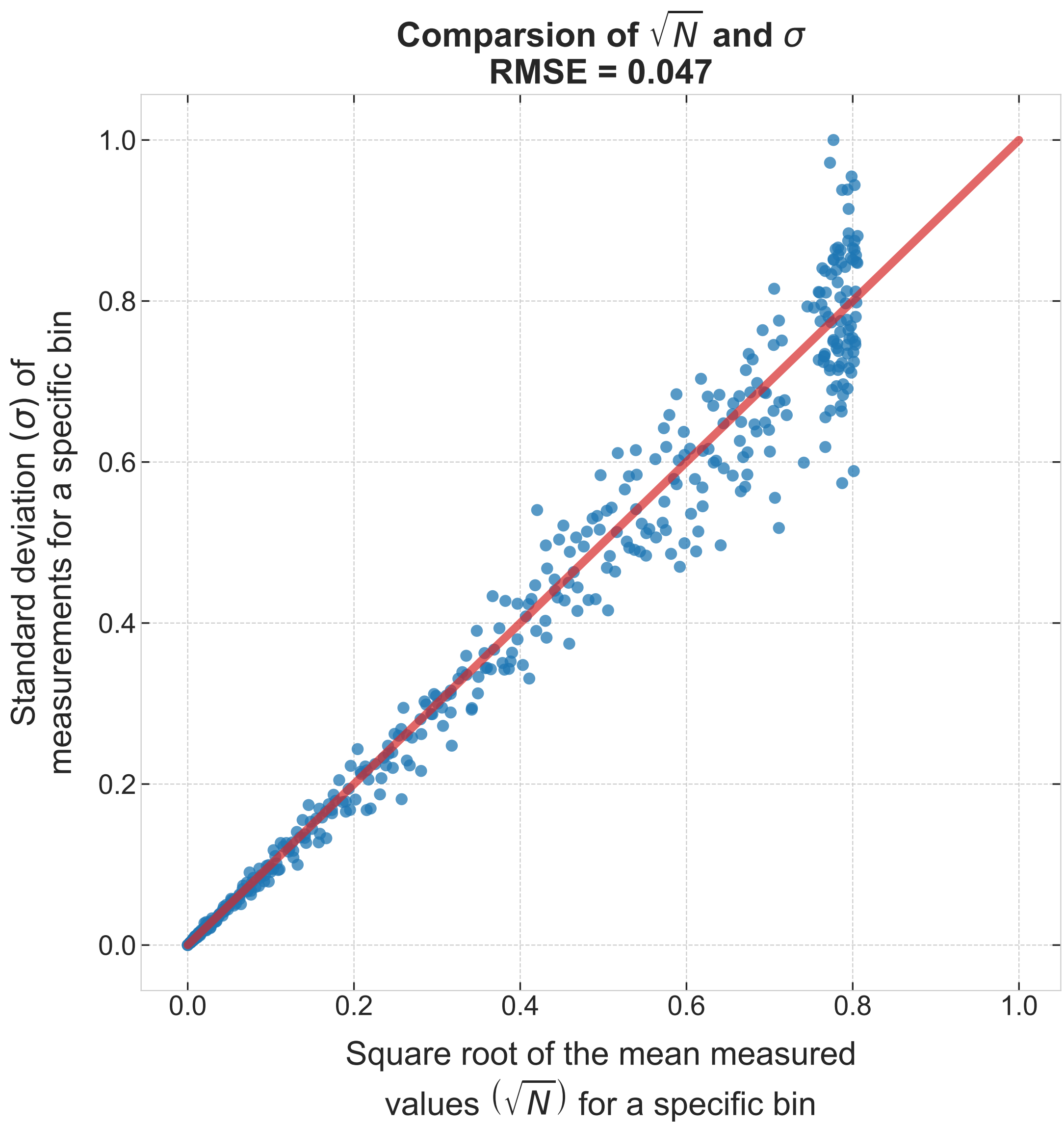
4. ábra. Az általunk vizsgált ^{14}C kiátlagolt spektrumára illesztett nemrelativisztikus függvény, mely a Fermi-függvény által nyújtott korrekciót felhasználva, az előzőnél sokkal jobban megközelíti a β-spektrum görbéjét. A zérushely itt is a ^{14}C karakterisztikus 156.5 keV-es Q érték körül van.



5. ábra. Az általunk vizsgált ^{14}C kiátlagolt spektrumára illesztett relativisztikus függvény, melyet a Fermi-függvénnyel korrigáltam. Zérushelye szintén a ^{14}C karakterisztikus 156.5 keV-es Q értéke körül van és az előzőekkel ellentétben a nagyobb energiáknál már nem látszik felfutó él. Ennek az illesztett egyenletét `Wolfram|Alpha`-val számítottam ki egyenesen a 32. egyenletből. A jegyzőkönyvben ennek értéke nem szerepel, mivel külsőre erősen felvállalhatatlan. Az illesztéshez használt programkód azonban megtalálható a GitHubomon, melynek linkje a hivatkozások között érhető el.



6. ábra. Az általunk vizsgált ^{14}C kiátlagolt spektrumára illesztett relativisztikus függvény, melyet a Fermi-függvénnyel korrigáltam. Ennek értékét számítottam ki az A. függelékben. Míg a függvény elejét sokkal megfelelőbben leírja, mint a 5. ábrán látható verzió, addig ennek a Q-érték körül már súlyos gondjai vannak.



7. ábra. Az egyes $N(E)$ értékek hibáját (szórását) közelíthetjük az $\sqrt{N}$ formulával. Ideális esetben a $\sqrt{N} - \sigma$ függvény a 45°-os egyenesre illeszkedik. Az ábrán ezen függvény ábrázoltam a meghatározott $\sqrt{N}$ és σ értékek segítségével. Az illeszkedés hibáját a machine learning modelleknél bevett átlag négyzetes hiba gyökének kiszámításával vizsgáltam, mely értéke szintén az ábrán látható.