

# Számítógépes szimulációk

## III.: Bolygómozgás

Pál Balázs\*

\*Eötvös Loránd Tudományegyetem

2019. március 13.

### Abstract

A Számítógépes szimulációk laboratórium harmadik alkalmával az egyszerű bolygómozgással és a Kepler-problémával kapcsolatos numerikus módszereket vizsgáltuk. Összehasonlítottuk, hogy az eddigi szimulációkban is már használt adaptív lépéshosszváltó módszer milyen körülmények mellett alkalmas az említett problémák differenciálegyenleteinek megoldására és hogy viselkedik különböző kezdőparaméterek hatására. Emellett megvizsgáltuk futásidejét is a fix lépéshosszal integráló módszerrel kontrasztba állítva. Modelleztük az egy-, a két- és háromtest-problémát, valamint megvizsgáltuk a Merkúr perihélium-precesszióját, kiegészítve a mozgásegyenleteket relativisztikus effektusokkal is. Végül a háromtest-probléma esetén modelleztük a Nap-Jupiter rendszerben található aszteroidák és meteorrajok mozgását és a Lagrange-pontokban kialakuló egyensúlyát.

### 1. FELADATOK

A kurzus harmadik alkalmával a bolygómozgás témáját jártuk részletesen körül, vizsgálva annak mind a kepleri, mind pedig az einsteini, relativisztikus hatásokkal kibővített modelljét is.

Előzetesen az egytest probléma kepleri mozgásegyenletét megoldani képes keretrendszer volt számunkra megadva. Ezt felhasználva kellett első lépésben ellenőriznünk, hogy a szimuláció mennyire stabil a numerikus hibákra, tehát az integrálási módszer, a lépésköz és az adaptív pontosság megválasztására. Én ezt vizsgálandó, a Nap-Merkúr rendszer keringését vizsgáltam, azon belül is pontosan a Merkúr ellipszispályájának potenciális elfordulását. Triviálisan azt várnánk, hogy a gravitációs kölcsönhatás klasszikus leírását alkalmazva, egy periódus megtétele után ugyanabba a pontba érkezik vissza egy bolygó keringése során. Ezzel szemben a relativisztikus tárgyalás esetén az égitestek mozgása erős gravitációs térben másabb, így pl. a Merkúr nagytengelye időben elfordul nem záródik. A Merkúr esetében ez a modern adatok ismeretében 100 év ( $\approx 415$  periódus) alatt  $\approx 43''$ -es precessziót jelent (Magnan, 2007[1]; Biesel, 2008[2]) az eredeti állapothoz képest. Ennek alakulását vizsgálva megfelelő számú, különböző esetre, kellően informatív képet kaphatunk az előforduló numerikus hibákról.

A második feladatban az adaptív lépéshosszváltó módszerek összehasonlítását végeztem el, amiket azok adaptív pontosságuk különféle értékeire kellett vizsgálnunk. A kérdés az volt, hogy a megkövetelt pontosság hogy befolyásolja a szimuláció során a lépéshossz változását? Szintén a lépéshossz precizitásával kapcsolatos kérdés az integrálási módszerek futásideje közti különbség. Az adaptív pontosságot és a fix lépéshosszakat azonosra választva össze kellett hasonlítani az egyes iteratív módszerek futásidejét.

Következő feladatként a már fentebb is említett jelenséget, a Merkúr perihélium-elfordulását kellett vizsgálnunk, egy bizonyos relativisztikus korrekcióval kibővítve a mozgásegyenletünket.

Utolsó feladatunk a többtest-probléma megvalósítása és vizsgálata volt. A kiírás alapján az eredeti kódot úgy kellett módosítanunk, hogy az a háromtest-problémát is képes legyen kezelni. Ezután ennek segítségével meg kellett vizsgálnunk a Nap-Jupiter rendszer Lagrange-pontjainak stabilitását, melyekbe az elmélet alapján egy behelyezett és magára hagyott tömegpont a két másik keringő testhez képest mozdulatlan marad. A Naprendszerben emiatt ezekben a pontokban összegyűlnek kisbolygók és aszteroidák: az L5 pontban a Trójai-csoport helyezkedik el, az L4-ben a Görög-csoport, míg az L3-ban a Hilda-csoport névre keresztelt aszteroida halmaz.

### 2. ELMÉLETI ALAPOK

#### 2.1. KEPLERI/NEWTONI MODELL

Johannes Kepler a bolygómozgásra vonatkozó törvényeit Tycho Brahe és a saját, pusztán megfigyelésekből származó adataira alapozta. Ezeknek a törvényeknek picivel később Newton adta meg a részletesen levezetett matematikai és fizikai hátterét.

Az már Kepler számára is ismert volt, hogy a Naprendszer bolygói nem tökéletes kör-, hanem nagyon kis excentricitású ellipszispályán keringenek a Nap körül. Első törvénye kimondja, hogy a bolygók keringési pályája egy olyan ellipszis, melynek egyik gyújtópontjában a Nap áll. Egy égitest távolsága a keringési középponttól tehát minden esetben megadható a következő képlettel:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \quad (1)$$

Kepler második törvénye értelmében a bolygók vezérsugara (tehát a bolygót a Nappal összekötő szakasz) azonos idők alatt azonos területeket sűrol, tehát

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} \right) = \text{const.} \quad (2)$$

Harmadik törvénye alapján a bolygópályák fél-nagy-tengelyeinek köbei úgy aránylanak egymáshoz,

mint keringési periódusidejük négyzetei. Kepler megfigyelései alapján azt vette észre, hogy az arány mindig konstans:

$$\frac{a^3}{T^2} \approx 7.496 \cdot 10^{-6} \frac{\text{CsE}^3}{\text{nap}^2} = 1 \frac{\text{CsE}^3}{\text{év}^2} \quad (3)$$

Az utóbbiról Newton gravitációs elméletének segítségével egyszerűen megmagyarázhatjuk a látottakat. Felismerve, hogy a gravitációs erő ebben a centrális mozgásban a centripetális erő szerepét tölti be, felírhatjuk az egyensúly feltételét körmozgásra:

$$m r \omega^2 = \frac{G M m}{r^2} \quad (4)$$

Amiben  $M$  a központi égitest (jelen esetben a Nap), míg  $m$  a körülötte keringő égitest tömege.  $G$  a gravitációs állandó,  $r$  pedig a két test tömegközéppontjának távolsága. Az  $\omega$  szögsebességet kifejezhetjük a periódusidővel,  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , amit visszahelyettesítve a következő alakot kapjuk  $T$ -re:

$$m r \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 = \frac{G M m}{r^2} \rightarrow T^2 = \left( \frac{4\pi^2}{G M} \right) \cdot r^3 \quad (5)$$

Tehát ténylegesen igaz a feltevés, hogy

$$T^2 \propto r^3 \quad (6)$$

Ezt módosítva azzal, hogy elliptikus pályákat feltételezünk ( $a \rightarrow r$ ,  $G M m \rightarrow G (M + m)$ ), felírhatjuk a fentebb is ismerttetett arány:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G (M + m)}{4\pi^2} = 7.496 \cdot 10^{-6} \frac{\text{CsE}^3}{\text{nap}^2} = 1 \frac{\text{CsE}^3}{\text{év}^2} \quad (7)$$

## 2.2. RELATIVISZTIKUS MODELL

Egy lehetséges és egyszerű megközelítése a kepleri bolygómozgás relativisztikus bővítésének, egy olyan Lagrange-függvény bevezetése, ami a speciális relativitáselméletben is megjelenő

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (8)$$

Lorentz-faktort és a newtoni gravitációs elméletből ismert

$$V(r) = \frac{G M m}{r} \quad (9)$$

gravitációs potenciált is tartalmazza, konzisztens módon (Lemmon *et al.*, 2010[3]). Ez a megközelítés ismert és alkalmazott. Egy relativisztikus rendszer mozgásegyenlete, melyben  $\mathbf{r} = (t, q_1, q_1, q_1)$ , felírható a következő módon, általános koordinátákat használva:

$$\sum_{n=1}^3 \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right] q_i = 0 \quad (10)$$

Amiben  $q_i$  koordináták független bázist alkotnak és így a mozgásegyenlet a következő formára (név szerint az Euler–Lagrange-egyenletre) egyszerűsödik:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (11)$$

Melyben szereplő  $L$ , az említett, relativisztikus korrekciókkal ellátott Lagrange-függvény (Potgieter, 1983[4]):

$$L = -m c^2 \gamma^{-1} + V(r) \quad (12)$$

Amiben  $V(r)$  helyére a newtoni gravitációs potenciált írjuk. Így a Lagrange-függvény végleges alakja:

$$L = -m c^2 \gamma^{-1} + \frac{G M m}{r} \quad (13)$$

Természetesen, hogy valóban relativisztikus korrekciókkal tudjuk ellátni a rendszert és megoldani a mozgásegyenletét, szükségünk van ennek a potenciálnak is a relativisztikus formájára is. A teljes Lagrange-függvényt, tehát egyszerre a kinetikus energiát és potenciális energiát is ilyen korrekciókkal ellátni egy aktívan kutatott téma (Singh *et al.*, 2015[5]; Vayenas *et al.*, 2015[6]; Kurucz, 2006[7]), leírása nem egyszerű. Emiatt ahhoz a trükkhöz folyamodunk, hogy a relativisztikus gravitációs potenciál felírása helyett egyből felhasználjuk a relativisztikus gravitációs erő ismert formáját. Definíciója szerint ez ekvivalens a newtoni gravitációs erővel, azonban benne  $m$  tömeg  $m\gamma$  korrekcióval szerepel (Lemmon *et al.*, 2010[3]). A gravitációs erő alakja a következő lesz ez alapján:

$$\mathbf{F}_g = -\gamma \frac{G M m}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (14)$$

Melyben maga a newtoni rész abból az ismert összefüggésből fakad, miszerint egy konzervatív erőterben mozgó testre ható erő kifejezhető a potenciál negatív gradiensevel:

$$\mathbf{F} = -\nabla V(r) \quad (15)$$

Így tehát:

$$\mathbf{F}_{gN} = -\nabla \frac{G M m}{r} = -\frac{G M m}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (16)$$

$$\mathbf{F}_{gRel} = -\gamma \frac{G M m}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (17)$$

## 2.3. TÖBBTEST-PROBLÉMA

A többtest-probléma a fizika számtalan területén megjelenő, analitikusan csak néhány speciális esetben megoldható probléma. Motivációja a jelenlegi szimuláció által is körüljárt témakörből, az égitestek mozgásának vizsgálatából származik. A konkrét csillagászati kérdés, hogy több, egymással gravitációsan kölcsönható test mozgását hogyan tudjuk előrejelezni? Míg a kéttest-probléma könnyen megoldható és visszavezethető az egytest-problémára, addig a háromtest-probléma már csak néhány, az ennél több testet tartalmazó rendszerek pedig már semmilyen esetben nem oldhatóak meg analitikusan.

Itt a két- és háromtest-probléma vizsgálatát végeztem el, melyek közül az első mozgásegyenleteit tömegközépponti, míg a másodikat relatív koordináta rendszerben írtam fel.

A kéttest-probléma mozgásegyenleteit előbb írjuk fel a testek egymáshoz képesti, relatív viszonyítási

rendszerében, majd váltsuk azt át tömegközéppontira:

$$\ddot{\mathbf{R}}_1 = -\frac{Gm_2}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (18)$$

$$\ddot{\mathbf{R}}_2 = -\frac{Gm_1}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (19)$$

Ahol jelölje  $r$  az két test távolságát,  $\mathbf{R}_1$  és  $\mathbf{R}_2$  a keringési középpont (ez a tömegközéppont (TKP)) felé mutató vektort. Ekkor  $\mathbf{r} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$ . Ennek a TKP-nak a pozíciója kiszámítható egyszerűen a testek tömegéből és azok távolságából:

$$\mathbf{R}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \mathbf{r} \quad (20)$$

$$\mathbf{R}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \mathbf{r} \quad (21)$$

Ahol  $m_1$  és  $m_2$  az egyes testek tömegét jelöli, a fenti távolságoknak megfelelő indexekkel. Az (19) és (20)-as egyenleteket felhasználva és behelyettesítve a (18)-as mozgásegyenletekbe, könnyen megkaphatjuk azok tömegközépponti rendszerben felírt alakját:

$$\ddot{\mathbf{R}}_1 = -G \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \cdot \frac{\mathbf{R}_1}{|\mathbf{R}_1|^3} \quad (22)$$

$$\ddot{\mathbf{R}}_2 = -G \frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2} \cdot \frac{\mathbf{R}_2}{|\mathbf{R}_2|^3} \quad (23)$$

A háromtest-probléma hasonló levezetést igényel, azonban egyszerűen az  $n$ -test-probléma ismert, általános képletét fogjuk felhasználni, érthetően három test esetére. Ez az általános formula a következőképp fest:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -G \sum_{j=1; j \neq i}^N \frac{m_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} \quad (24)$$

Aminek segítségével a háromtest-probléma mozgásegyenletei azonnal megfogalmazhatók:

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -Gm_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} - Gm_3 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^3} \quad (25)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -Gm_1 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} - Gm_3 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|^3} \quad (26)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = -Gm_1 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3} - Gm_2 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|^3} \quad (27)$$

### 3. MEGVALÓSÍTÁS

A kiírásban előzetesen az egytest-probléma mozgásegyenletét megoldó, C++ nyelven írt keretrendszer volt számunkra megadva, melyet az (1)-es pontban már tisztázott feladatok alapján, nekünk kellett bővítenünk.

A forráskódot az eddigiekhez hasonlóan egy saját batch file segítségével, benne a clang fordító felhasználásával fordítottam. Az eredeti kód módosításával elértem, hogy a lefordított exe program egy Jupyter Notebook-ban futó Python 3 kernel segítségével induljon. A szimuláció a kezdőfeltételeket

szintén ebből a környezetből várja, bemenő paraméterek formájában.

Az egytest-, a kéttest- és a háromtest-probléma szimulációja, három különböző main forrásfile alapján fordul. Az egyes lefordított exe-eket a kezdőfeltételek mellett megadott másik bementei paraméter segítségével lehet tetszőlegesen a fix lépéshossz, vagy az adaptív lépéshossz módszerek használatával lefuttatni. Ezek kimenete mindkét esetben egy-egy .dat file, mindhárom program esetében. Ezek minden esetben tartalmazzák egy egyes testek koordinátáit és sebességeit, időrendben. Ezeken felül már programonként különböző kimeneti paramétereket is tartalmaznak egy egyes file-ok, ezekért lásd a programkódot GitHub-on[8].

Az előző, ingás szimuláció hatására felbuzdulva, ez esetben is készítettem néhány videót a szimulált folyamatokról. Az előzőekhez hasonlóan, ezt szintén Pythonban valósítottam meg egy saját kód segítségével, ami a matplotlib és a imageio könyvtárakat használva generál megadott paraméterek alapján mp4 formátumú, kis méretű, de nagy felbontású videókat. Ezek YouTube-on megtekinthetők[9].

A végleges forráskód és a programot futtató Notebook file-ok szintén mind elérhetők GitHub-on[8].

## 4. KIÉRTÉKELÉS

### 4.1. NUMERIKUS STABILITÁS ÉS A MERKÚR PÁLYÁJÁNAK PRECESSZIÓJA

A numerikus hibák nagyságának elemzését és egyben a relativisztikus effektusokkal kibővített mozgásegyenletek vizsgálatát együttesen végeztem el. Ahogy a feladatok (1) leírásánál szerepelt, azt várjuk, hogy a klasszikus gravitációs modell alapján a Merkúr minden periódus megtétele után a kiinduló pontjába érkezik vissza. Ezzel ellentétesen a relativisztikus effektusokat is figyelembe véve a Merkúr pálya 43''-os elfordulását várjuk 100 év alatt. Ha nincsenek numerikus hibák, akkor ez azt jelenti, hogy a két módszer eltérése 100 év alatt pontosan el fogja érni a 43''-et.

Összehasonlításként a (1) - (9) ábrákon vizsgáltam ezt a jelenséget, a lépésköz  $dt = 10^{-3}$ ,  $dt = 10^{-4}$  és  $dt = 10^{-5}$  éves értékeire. Az adaptív lépéshosszal operáló módszerek megkövetelt adaptív pontossága minden esetben  $10^{-12}$  volt.

Minden esetben mértem pályaelfordulást, ami triviálisan a véges nagyságú lépésköz megválasztása miatt felbukkanó relativisztikus hibáknak köszönhető. Az adott kerületű ellipszist pontosan nem lehet felosztani a vizsgált lépésközökkel egyenlő részekre. Magyarán a választott lépésközöknek nem egész számú többszöröse a keringési pálya ellipszise, így diszkrét lépésekben haladva mindig lesz egy kis elcsúszás a kettő között, mely előre várhatóan időben egy folytonos, törésmentes egyenes lesz.

A fix lépéshosszal integráló módszerek között mind a klasszikus, mind pedig a relativisztikus esetben - szinte közel - azonos irányú elfordulás volt megfigyelhető. Ebből következtethetni lehet arra, hogy a Merkúr apró elfordulását nem lehet a vizsgált (fix) lépésközök mérettartományában kimutatni. Ellenben az említett és várt törésmentes egyenes alakot szemmel láthatóan visszakaptuk.

Az adaptív Runge-Kutta-Cash-Karp módszer  $dt = 10^{-5}$  előre megadott lépésköz felé haladva egyre jobban megközelítette, míg ott már el is érte a 43"-es elfordulási különbség nagyságrendjét. Mivel  $dt = 10^{-6}$  lépésköznél a program futtatása már túl sok időt igényelt volna, így nem tudom megállapítani, hogy pontosabb lépésközökre vizsgálva hogyan viselkedne ez az ígéretes eredményt szolgáltató iteratív módszer. Lehet, hogy a relativisztikus és klasszikus megközelítések közti differencia tovább csökkenne, ahelyett, hogy 43"-nél stabilizálódna. Ez további vizsgálatokat igényelne, amiket nem tudok jelen körülmények mellett elvégezni.

#### 4.2. AZ ADAPTÍV LÉPÉSHOSSZ VÁLTOZÁSA

Egy bolygó keringési pályájának integrálása közbeni adaptív lépéshosszváltozást az előző pontban hasonló körülmények mellett végeztem. Itt is a Merkúr-Nap egytest-problémát vizsgáltam. A kapott grafikonokat a (10) - (14) képeken ábrázoltam. Hasonlóan az előbbiekhez, itt is külön vizsgáltam az RK4 és RKCK módszereket mind a klasszikus, mind pedig a relativisztikus esetekben. Mind a négy különféle párosítás esetében  $10^{-4}$  adaptív pontosságtól indulva  $10^{-11}$  értékig haladtam, a hatványokat tizedelve minden futtatás előtt, így 8-8 darab grafikont kaptam minden egyes esetre. Ezekben különösebb érdekesség nem figyelhető meg néhány apróságon kívül. Az RKCK módszernél mind a klasszikus, mind pedig a relativisztikus esetben,  $10^{-4}$  pontosság esetén, a lépésközök periodikusan váltakozva, de folyamatosan csökkennek. Extrapolálva ezt úgy fest, mintha nagyon sok idő után a módszerben alkalmazott lépésköz elérné a nullát, ami a szimuláció leállításához vezetne és így egy felső korlátot jelent számára. A vizsgált mérettartományban a többi esetben nem volt ilyesmi megfigyelhető. Egyetlen másik megemlíthető karakterisztikája az ábrázolt grafikonoknak, hogy a pontosság növelésével a lépésköz váltakozásának oscilációja gyorsul. Ez feltehetően annak tudható be, hogy a megfelelő pontosságért cserébe a szimuláció gyakrabban korrigál, jobban „finomhangol”.

#### 4.3. KÉTTEST-PROBLÉMA

A gravitációs többtest-probléma megértéséhez először a kéttest-problémát vizsgáltam a megoldás so-

rán. A szimulációba az elméleti bevezető (2) részben is szereplő, tömegközépponti esetet implementáltam. Ezzel sikerült az egytest-problémánál ismert képet visszakapjam, és a középponti égitest apró perturbációit is megjelenítenem. Három konkrét esetet vizsgáltam meg alaposabban:

1. Nap-Merkúr rendszer
2. Nap-Jupiter rendszer
3. Föld-Hold rendszer

Ezek mindegyikéről animációkat készítettem az áttekinthetőség kedvéért. Mindegyik animáción megfigyelhető, hogy a két keringő égitest, habár azonos szögsebességgel kéne forogniuk, mégsem teszik azt. Ez annak tudható be valószínűleg, miszerint a vizsgált esetekben a központi égitest pályája nagyon apró, így a numerikus hibákra jóval érzékenyebb is. Az eltérés nem nagy, azonban hosszú futásidő után már jól látszik az aszinkron mozgás. Minden erről készült animáció - ahogy már említve volt - elérhető YouTube-on[9].

#### 4.4. HÁROMTEST-PROBLÉMA

A háromtest problémát az kéttesttel ellentétben a testek egymáshoz képesti relatív távolságának megadásával írtam le és implementáltam a szimulációban. Ezt a Nap-Jupiter rendszerre vizsgáltam, melybe a Jupiter pályájának környékére apró törmelékeket szórtam. Céлом ezen véletlenszerű törmelékhalmoz mozgásának és a Lagrange-pontokba feltételezett stabilitásának vizsgálata volt. A Nap-Jupiter kéttest problémáját sikeresen vissza is adja a program, azonban a törmelékek mozgását a ledaási határidőig nem sikerült még teljes mértékben jól szimulálnom. A probléma a random módon leszórt aszteroidák kezdősebességeinek megválasztásával van, melyre még nem sikerült pontos megoldást találnom. Az eddigi legjobb próbálkozásomról való szimuláció elérhető szintén YouTube-onn[9]. Egy teljes orbitokat mutató példakép megtekinthető a függelék végén (14). Minden egyéb nem említett kód és kép elérhető a már szintén említett GitHub-on[8].

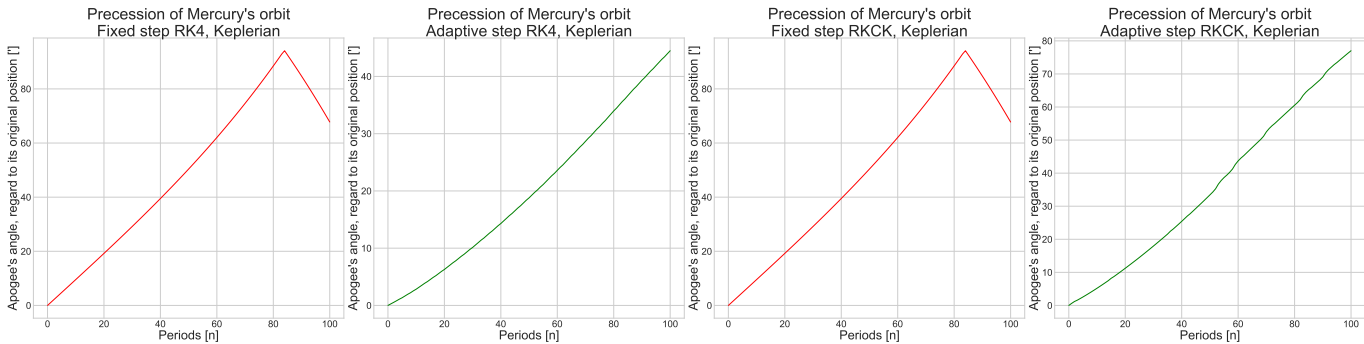
- 
- [1] C. Maignan. “Complete calculations of the perihelion precession of Mercury and the deflection of light by the Sun in General Relativity”. In: *arXiv e-prints* (Dec. 2007). arXiv: [0712.3709 \[gr-qc\]](#).
  - [2] Owen Biesel. “The Precession of Mercury’s Perihelion”. In: (2008).
  - [3] T. J. Lemmon and A. R. Mondragon. “Kepler’s Orbits and Special Relativity in Introductory Classical Mechanics”. In: *arXiv e-prints* (Dec. 2010). arXiv: [1012.5438 \[astro-ph.EP\]](#).
  - [4] J. M. Potgieter. “Derivation of the equations of Lagrange for a relativistic particle”. In: *American Journal of Physics* 51.1 (1983), pp. 77–77. DOI: [10.1119/1.13441](#). eprint: <https://doi.org/10.1119/1.13441>. URL: <https://doi.org/10.1119/1.13441>.
  - [5] Ashmeet Singh and Binoy Krishna Patra. “Relativistic corrections to the central force problem in a generalized potential approach”. In: *Canadian Journal of Physics* 93 (May 2015), pp. 549–555. DOI: [10.1139/cjp-2014-0261](#). arXiv: [1404.2940 \[physics.class-ph\]](#).
  - [6] Constantinos G Vayenas, Athanasios Fokas, and Dimitrios Grigoriou. “Gravitational mass and Newton’s universal gravitational law under relativistic conditions”. In: *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 633. 1. IOP Publishing. 2015, p. 012033.

- [7] Robert L Kurucz. “The precession of Mercury and the deflection of starlight by special relativity alone”. In: *arXiv preprint astro-ph/0608434* (2006).
- [8] Pál Balázs. *ELTE Computer Simulations 2019 — GitHub*. [Online; opened at March 17, 2019]. 2019. URL: [https://github.com/masterdesky/ELTE\\_Comp\\_Simulations\\_2019](https://github.com/masterdesky/ELTE_Comp_Simulations_2019).
- [9] *Pál Balázs’s Channel — YouTube*. [Online; opened at March 1, 2019]. 2019. URL: <https://www.youtube.com/channel/UCBDSB7PdQ3E919WSBsTy7cQ>.

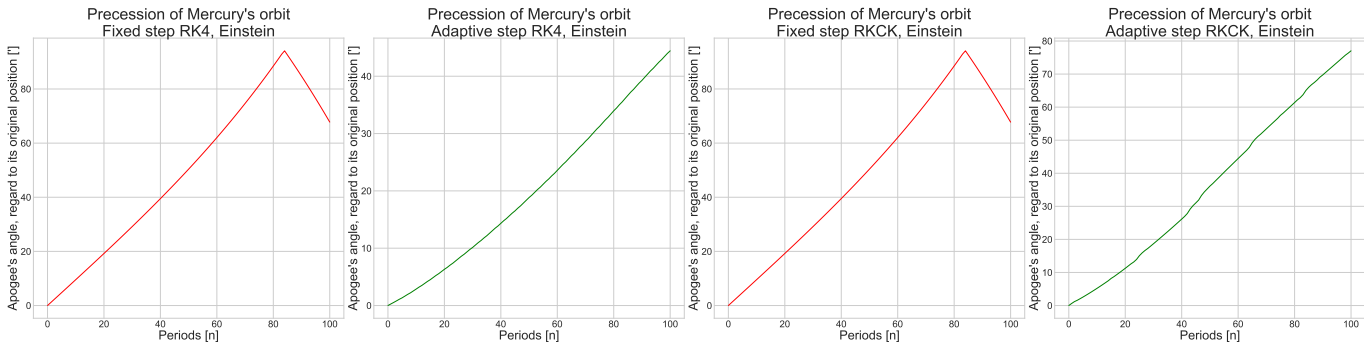


# APPENDIX A

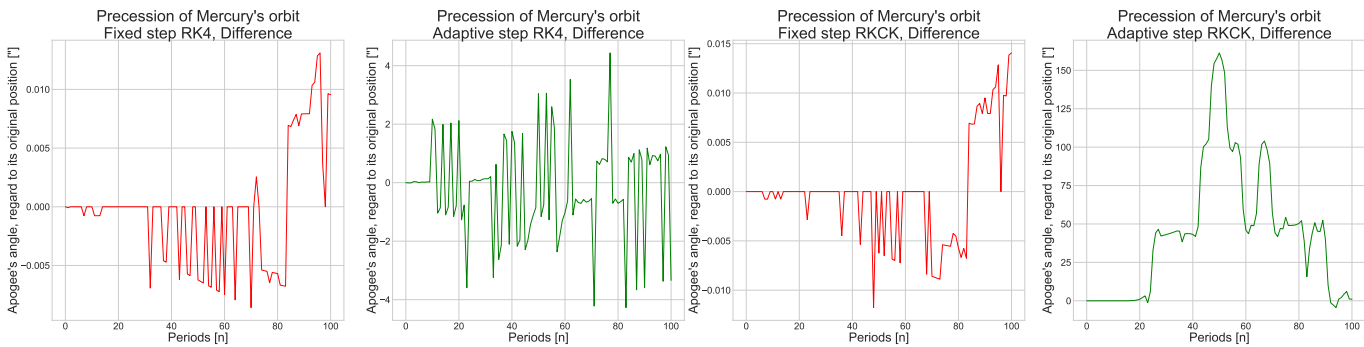
## A.1.1 NUMERIKUS STABILITÁS $DT = 10^{-3}$ ÉV ESETÉN



1. ábra. Kepleri dinamika  
Lépésköz nagysága  $0.001 = 10^{-3}$  év

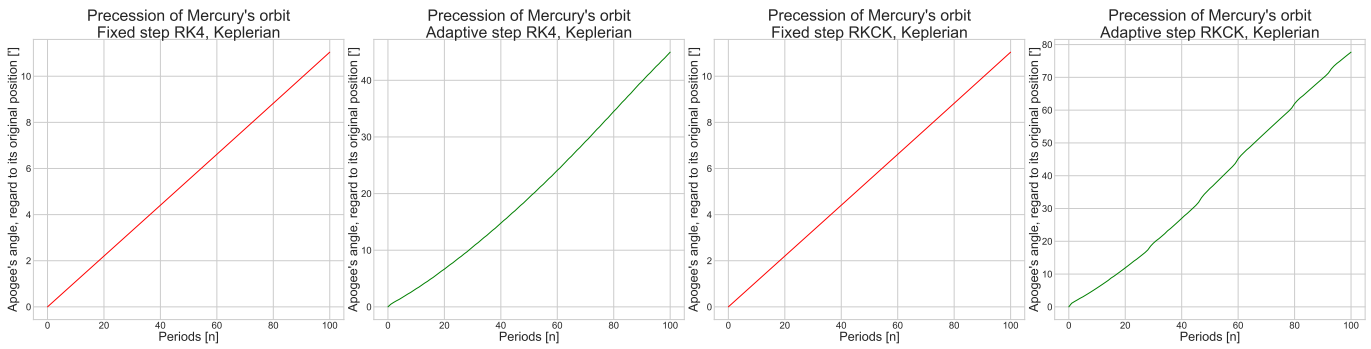


2. ábra. Relativisztikus dinamika  
Lépésköz nagysága  $0.001 = 10^{-3}$  év

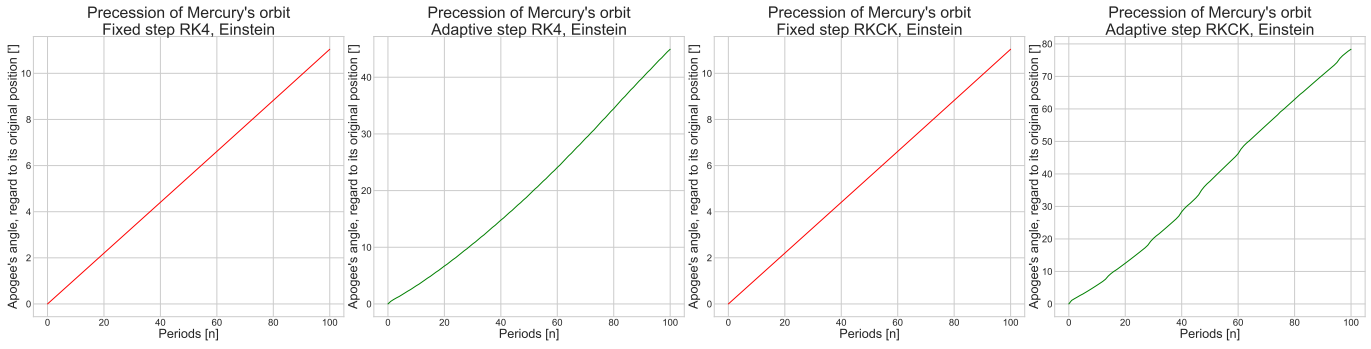


3. ábra. A relativisztikus és a kepleri dinamika különbsége  
Lépésköz nagysága  $0.001 = 10^{-3}$  év

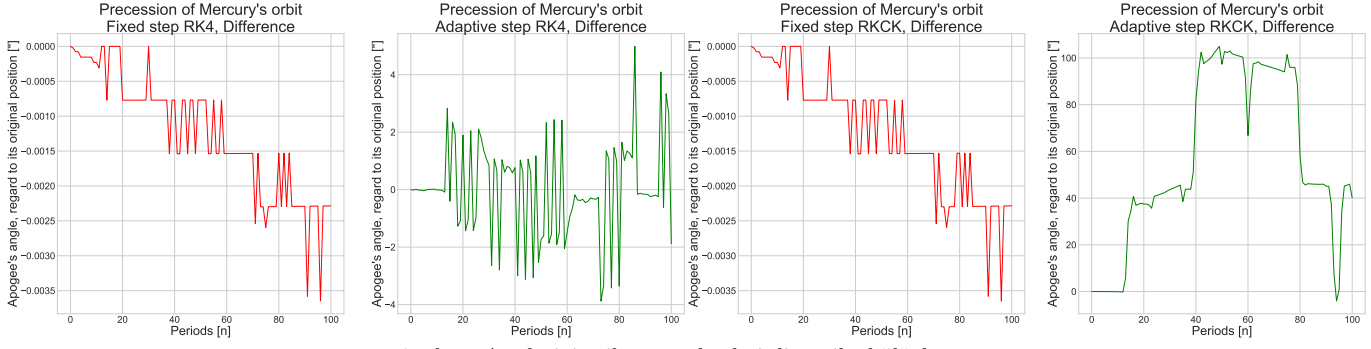
A.1.2 NUMERIKUS STABILITÁS  $DT = 10^{-4}$  ÉV ESETÉN



4. ábra. Kepleri dinamika  
Lépésköz nagysága  $0.0001 = 10^{-4}$  év

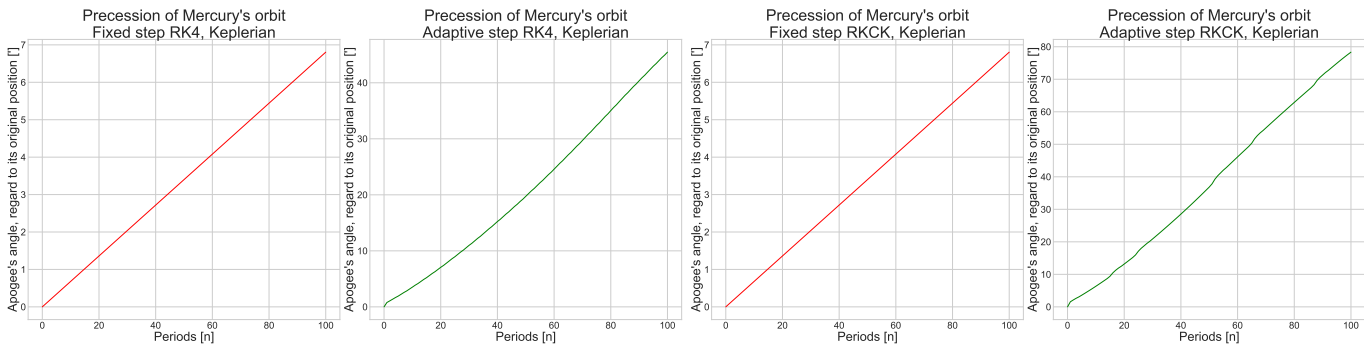


5. ábra. Relativisztikus dinamika  
Lépésköz nagysága  $0.0001 = 10^{-4}$  év

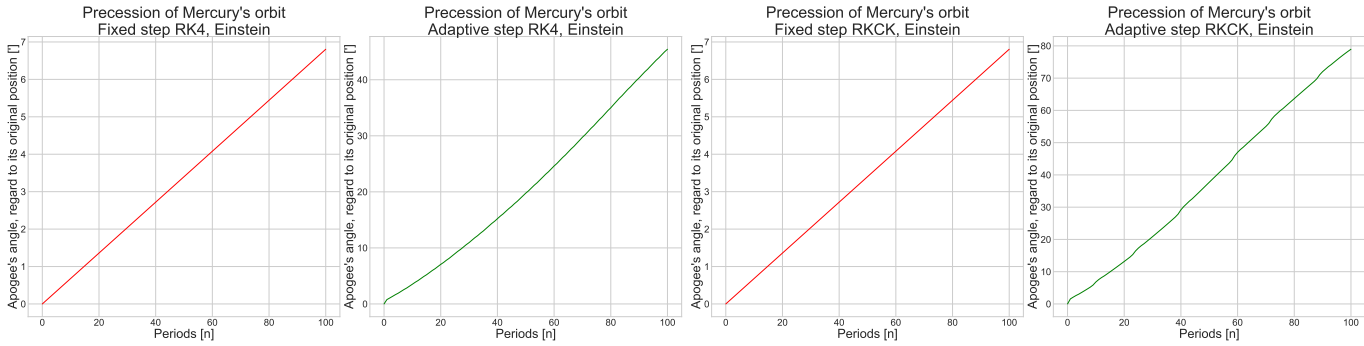


6. ábra. A relativisztikus és a kepleri dinamika különbsége  
Lépésköz nagysága  $0.0001 = 10^{-4}$  év

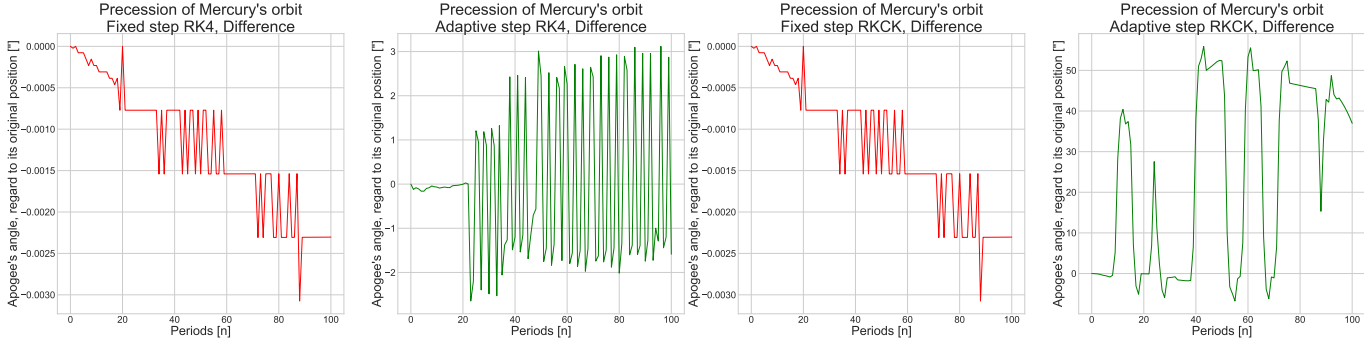
A.1.3 NUMERIKUS STABILITÁS  $DT = 10^{-5}$  ÉV ESETÉN



7. ábra. Kepleri dinamika  
Lépésköz nagysága  $0.00001 = 10^{-5}$  év



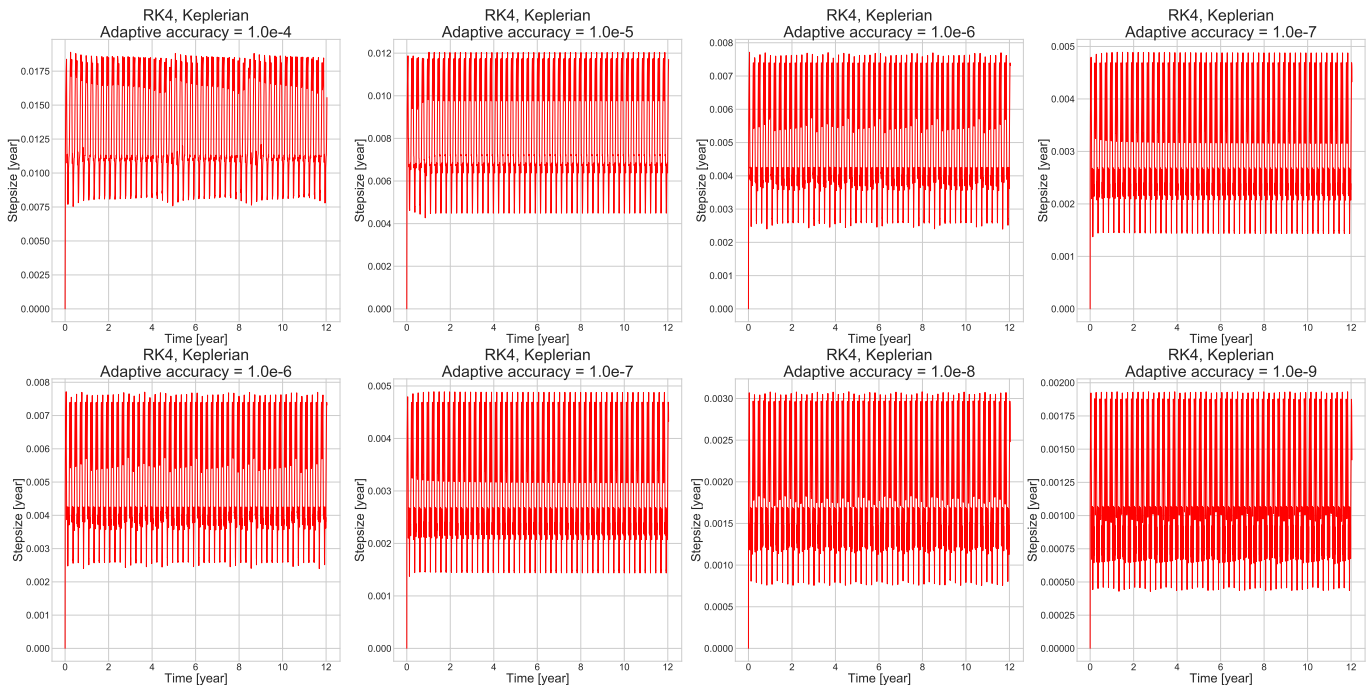
8. ábra. Relativisztikus dinamika  
Lépésköz nagysága  $0.00001 = 10^{-5}$  év



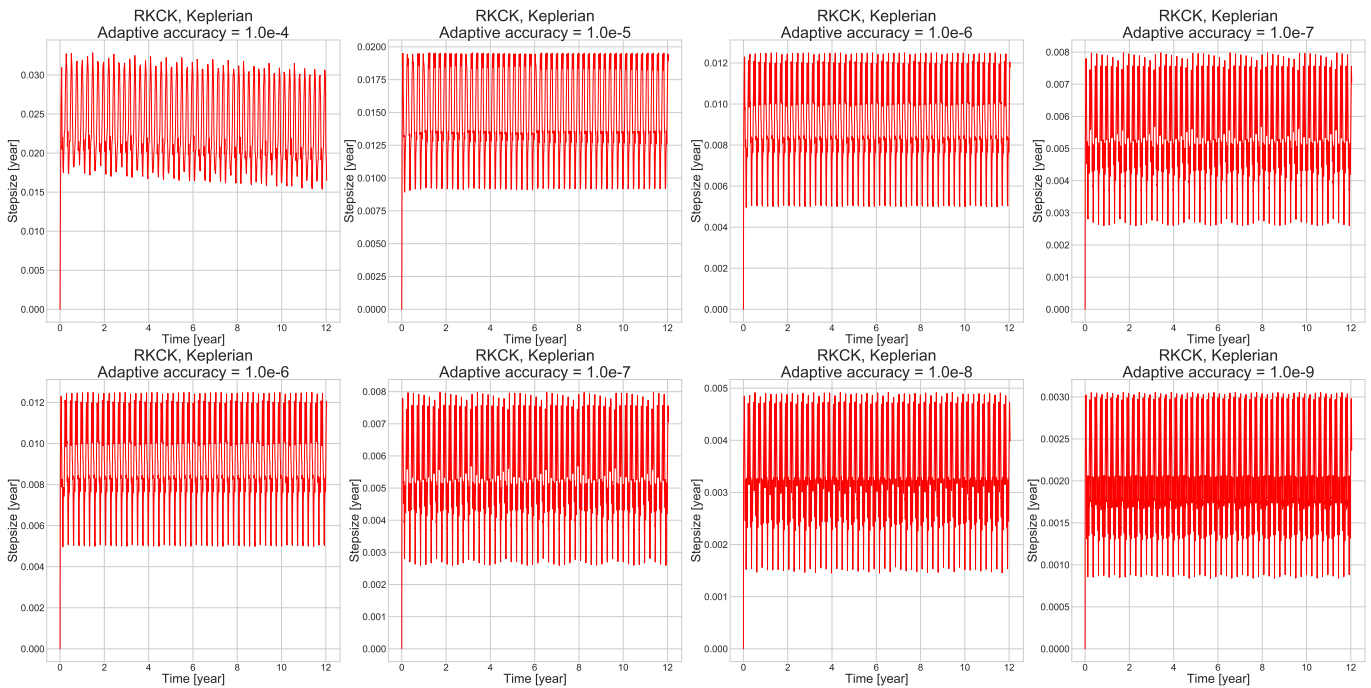
9. ábra. A relativisztikus és a kepleri dinamika különbsége  
Lépésköz nagysága  $0.00001 = 10^{-5}$  év



### A.2.1 AZ ADAPTÍV LÉPÉSHOSSZAK VÁLTOZÁSA KLASSZIKUS MOZGÁSEGYLETEK ESETÉN

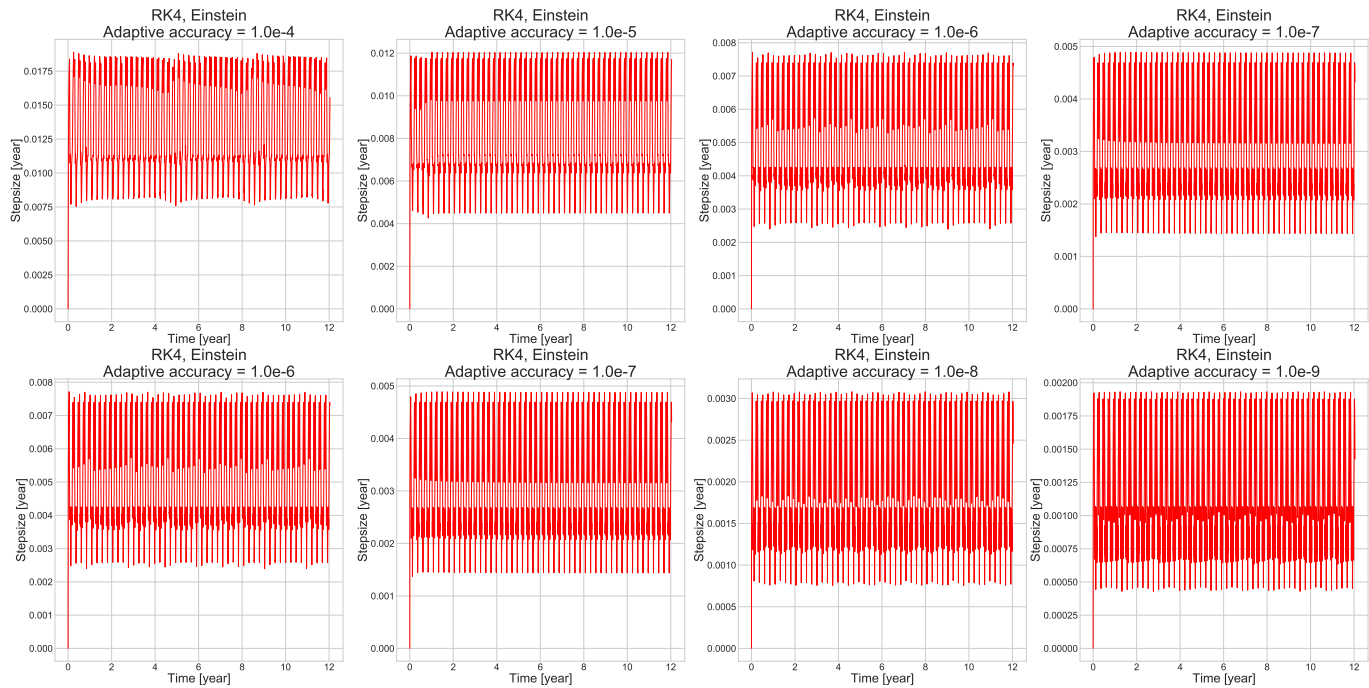


10. ábra. Kepleri dinamika  
RK4 módszer; Adaptív lépéshosszak változása az időben

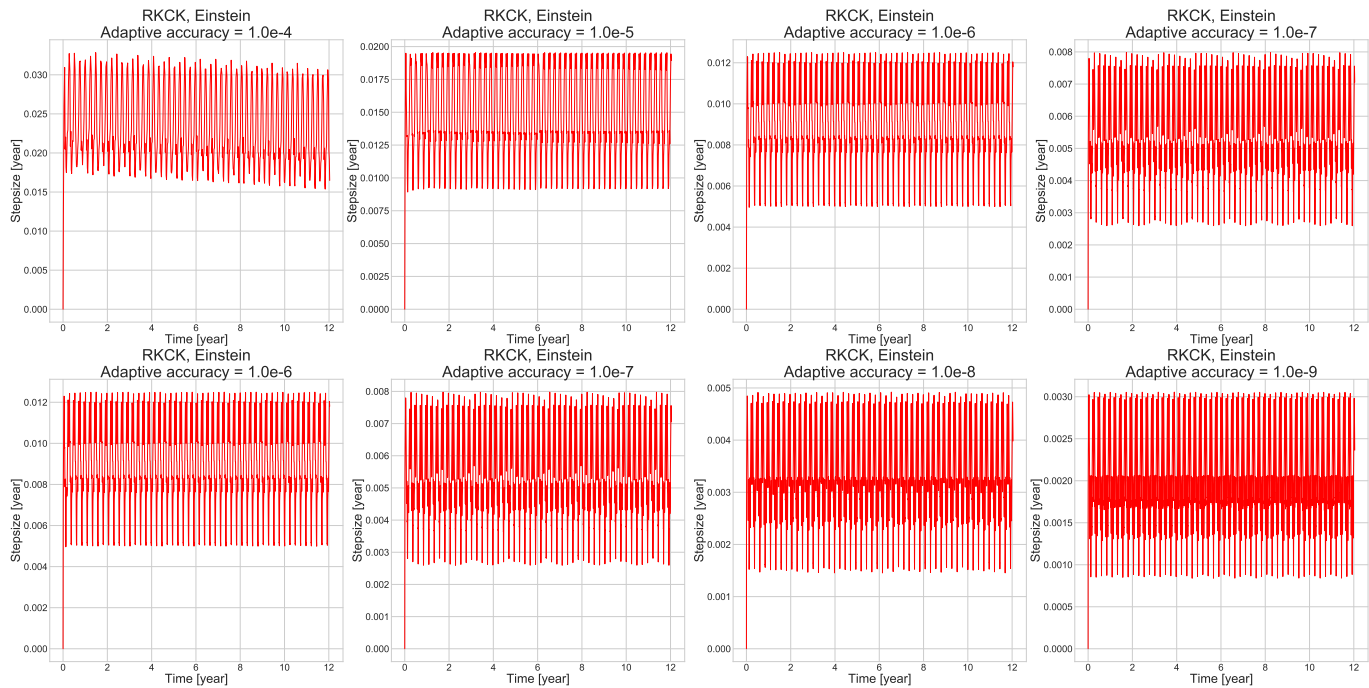


11. ábra. Kepleri dinamika  
RKCK módszer; Adaptív lépéshosszak változása az időben

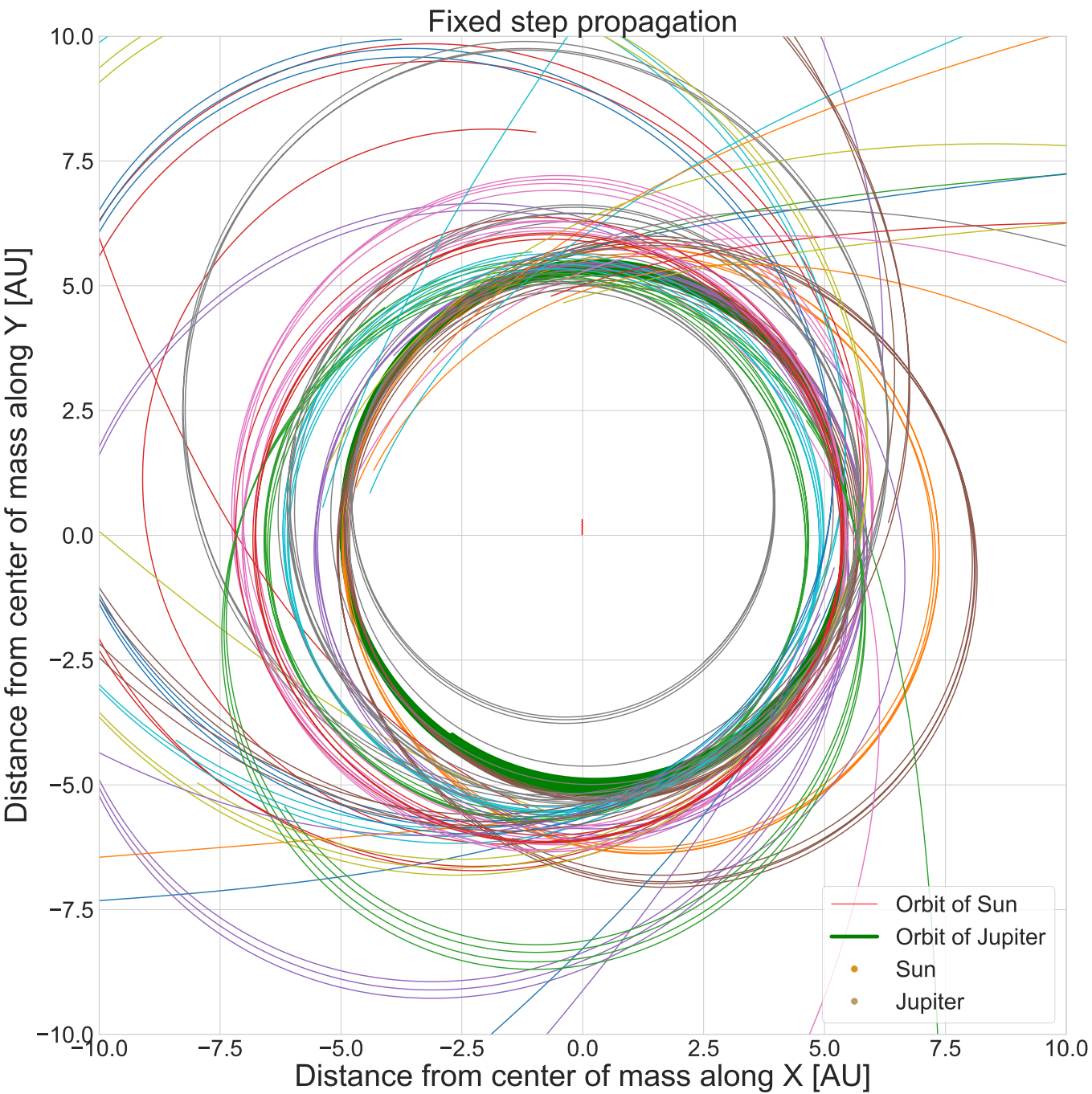
### A.2.2 AZ ADAPTÍV LÉPÉSHOSSZAK VÁLTOZÁSA RELATIVISZTIKUS MOZGÁSEGYENLETEK ESETÉN



12. ábra. Relativisztikus dinamika  
RK4 módszer; Adaptív lépéshosszak változása az időben



13. ábra. Relativisztikus dinamika  
RKCK módszer; Adaptív lépéshosszak változása az időben



14. ábra. A Jupiter-Nap rendszer mozgása 40, véletlenszerűen a Jupiter pályája köré szórt testtel szimulálva