

# Számítógépes szimulációk

## III.: Bolygómozgás

Pál Balázs\*

\*Eötvös Loránd Tudományegyetem

2019. március 13.

### Abstract

A Számítógépes szimulációk laboratórium harmadik alkalmával az egyszerű bolygómozgással és a Kepler-problémával kapcsolatos numerikus módszereket vizsgáltuk. Összehasonlítottuk, hogy az eddigi szimulációkban is már használt adaptív lépéshosszváltó módszer milyen körülmények mellett alkalmas az említett problémák differenciálegyenleteinek megoldására és hogy viselkedik különböző kezdőparaméterek hatására. Emellett megvizsgáltuk futásidejét is a fix lépéshosszal integráló módszerrel kontrasztba állítva. Modelleztük az egy-, a két- és háromtest-problémát, valamint megvizsgáltuk a Merkúr perihélium-precesszióját, kiegészítve a mozgásegyenleteket relativisztikus effektusokkal is. Végül a háromtest-probléma esetén modelleztük a Nap-Jupiter rendszerben található aszteroidák és meteorrajok mozgását és a Lagrange-pontokban kialakuló egyensúlyát.

### 1. FELADATOK

A kurzus harmadik alkalmával a bolygómozgás témáját jártuk részletesen körül, vizsgálva annak mind a kepleri, mind pedig az einsteini, relativisztikus hatásokkal kibővített modelljét is.

Előzetesen az egytest probléma kepleri mozgásegyenletét megoldani képes keretrendszer volt számunkra megadva. Ezt felhasználva kellett első lépésben ellenőriznünk, hogy a szimuláció mennyire stabil a numerikus hibákra, tehát az integrálási módszer, a lépésköz és az adaptív pontosság megválasztására. Én ezt vizsgálandó, a Nap-Merkúr rendszer keringését vizsgáltam, azon belül is pontosan a Merkúr ellipszispályájának potenciális elfordulását. Triviálisan azt várnánk, hogy a gravitációs kölcsönhatás klasszikus leírását alkalmazva, egy periódus megtétele után ugyanabba a pontba érkezik vissza egy bolygó keringése során. Ezzel szemben a relativisztikus tárgyalás esetén az égitestek mozgása erős gravitációs térben másabb, így pl. a Merkúr nagytengelye időben elfordul nem záródik. A Merkúr esetében ez a modern adatok ismeretében 100 év ( $\approx 415$  periódus) alatt  $\approx 43''$ -es precessziót jelent (Magnan, 2007[1]; Biesel, 2008[2]) az eredeti állapothoz képest. Ennek alakulását vizsgálva megfelelő számú, különböző esetre, kellően informatív képet kaphatunk az előforduló numerikus hibákról.

A második feladatban az adaptív lépéshosszváltó módszerek összehasonlítását végeztük el, amiket azok adaptív pontosságuk különféle értékeire kellett vizsgálnunk. A kérdés az volt, hogy a megkövetelt pontosság hogy befolyásolja a szimuláció során a lépéshossz változását? Szintén a lépéshossz precizitásával kapcsolatos kérdés az integrálási módszerek futásideje közti különbség. Az adaptív pontosságot és a fix lépéshosszakat azonosra választva össze kellett hasonlítani az egyes iteratív módszerek futásidejét.

Következő feladatként a már fentebb is említett jelenséget, a Merkúr perihélium-elfordulását kellett vizsgálnunk, egy bizonyos relativisztikus korrekcióval kibővítve a mozgásegyenletünket.

Utolsó feladatunk a többtest-probléma megvalósítása és vizsgálata volt. A kiírás alapján az eredeti kódot úgy kellett módosítanunk, hogy az a háromtest-problémát is képes legyen kezelni. Ezután ennek segítségével meg kellett vizsgálnunk a Nap-Jupiter rendszer Lagrange-pontjainak stabilitását, melyekbe az elmélet alapján egy behelyezett és magára hagyott tömegpont a két másik keringő testhez képest mozdulatlan marad. A Naprendszerben emiatt ezekben a pontokban összegyűlnek kisbolygók és aszteroidák: az L5 pontban a Trójai-csoport helyezkedik el, az L4-ben a Görög-csoport, míg az L3-ban a Hilda-csoport névre keresztelt aszteroida halmaz.

### 2. ELMÉLETI ALAPOK

#### 2.1. KEPLERI/NEWTONI MODELL

Johannes Kepler a bolygómozgásra vonatkozó törvényeit Tycho Brahe és a saját, pusztán megfigyelésekből származó adataira alapozta. Ezeknek a törvényeknek picivel később Newton adta meg a részletesen levezetett matematikai és fizikai hátterét.

Az már Kepler számára is ismert volt, hogy a Naprendszer bolygói nem tökéletes kör-, hanem nagyon kis excentricitású ellipszispályán keringenek a Nap körül. Első törvénye kimondja, hogy a bolygók keringési pályája egy olyan ellipszis, melynek egyik gyújtópontjában a Nap áll. Egy égitest távolsága a keringési középponttól tehát minden esetben megadható a következő képlettel:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \quad (1)$$

Kepler második törvénye értelmében a bolygók vezérsugara (tehát a bolygót a Nappal összekötő szakasz) azonos idők alatt azonos területeket sűrol, tehát

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} \right) = \text{const.} \quad (2)$$

Harmadik törvénye alapján a bolygópályák fél-nagy-tengelyeinek köbei úgy aránylanak egymáshoz,

mint keringési periódusidejük négyzetei. Kepler megfigyelései alapján azt vette észre, hogy az arány mindig konstans:

$$\frac{a^3}{T^2} \approx 7.496 \cdot 10^{-6} \frac{\text{CsE}^3}{\text{nap}^2} = 1 \frac{\text{CsE}^3}{\text{év}^2} \quad (3)$$

Az utóbbiról Newton gravitációs elméletének segítségével egyszerűen megmagyarázhatjuk a látottakat. Felismerve, hogy a gravitációs erő ebben a centrális mozgásban a centripetális erő szerepét tölti be, felírhatjuk az egyensúly feltételét körmozgásra:

$$m r \omega^2 = \frac{G M m}{r^2} \quad (4)$$

Amiben  $M$  a központi égitest (jelen esetben a Nap), míg  $m$  a körülötte keringő égitest tömege.  $G$  a gravitációs állandó,  $r$  pedig a két test tömegközéppontjának távolsága. Az  $\omega$  szögsebességet kifejezhetjük a periódusidővel,  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , amit visszahelyettesítve a következő alakot kapjuk  $T$ -re:

$$m r \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 = \frac{G M m}{r^2} \rightarrow T^2 = \left( \frac{4\pi^2}{G M} \right) \cdot r^3 \quad (5)$$

Tehát ténylegesen igaz a feltevés, hogy

$$T^2 \propto r^3 \quad (6)$$

Ezt módosítva azzal, hogy elliptikus pályákat feltételezünk ( $a \rightarrow r$ ,  $G M m \rightarrow G (M + m)$ ), felírhatjuk a fentebb is ismertetett arány:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G (M + m)}{4\pi^2} = 7.496 \cdot 10^{-6} \frac{\text{CsE}^3}{\text{nap}^2} = 1 \frac{\text{CsE}^3}{\text{év}^2} \quad (7)$$

## 2.2. RELATIVISZTIKUS MODELL

Egy lehetséges és egyszerű megközelítése a kepleri bolygómozgás relativisztikus bővítésének, egy olyan Lagrange-függvény bevezetése, ami a speciális relativitáselméletben is megjelenő

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (8)$$

Lorentz-faktort és a newtoni gravitációs elméletből ismert

$$V(r) = \frac{G M m}{r} \quad (9)$$

gravitációs potenciált is tartalmazza, konzisztens módon (Lemmon *et al.*, 2010[3]). Ez a megközelítés ismert és alkalmazott. Egy relativisztikus rendszer mozgásegyenlete, melyben  $\mathbf{r} = (t, q_1, q_1, q_1)$ , felírható a következő módon, általános koordinátákat használva:

$$\sum_{n=1}^3 \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right] q_i = 0 \quad (10)$$

Amiben  $q_i$  koordináták független bázist alkotnak és így a mozgásegyenlet a következő formára (név szerint az Euler–Lagrange-egyenletre) egyszerűsödik:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (11)$$

Melyben szereplő  $L$ , az említett, relativisztikus korrekciókkal ellátott Lagrange-függvény (Potgieter, 1983[4]):

$$L = -m c^2 \gamma^{-1} + V(r) \quad (12)$$

Amiben  $V(r)$  helyére a newtoni gravitációs potenciált írjuk. Így a Lagrange-függvény végleges alakja:

$$L = -m c^2 \gamma^{-1} + \frac{G M m}{r} \quad (13)$$

Természetesen, hogy valóban relativisztikus korrekciókkal tudjuk ellátni a rendszert és megoldani a mozgásegyenletét, szükségünk van ennek a potenciálnak is a relativisztikus formájára is. A teljes Lagrange-függvényt, tehát egyszerre a kinetikus energiát és potenciális energiát is ilyen korrekciókkal ellátni egy aktívan kutatott téma (Singh *et al.*, 2015[5]; Vayenas *et al.*, 2015[6]; Kurucz, 2006[7]), leírása nem egyszerű. Emiatt ahhoz a trükkhöz folyamodunk, hogy a relativisztikus gravitációs potenciál felírása helyett egyből felhasználjuk a relativisztikus gravitációs erő ismert formáját. Definíciója szerint ez ekvivalens a newtoni gravitációs erővel, azonban benne  $m$  tömeg  $m\gamma$  korrekcióval szerepel (Lemmon *et al.*, 2010[3]). A gravitációs erő alakja a következő lesz ez alapján:

$$\mathbf{F}_g = -\gamma \frac{G M m}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (14)$$

Melyben maga a newtoni rész abból az ismert összefüggésből fakad, miszerint egy konzervatív erőterben mozgó testre ható erő kifejezhető a potenciál negatív gradiensevel:

$$\mathbf{F} = -\nabla V(r) \quad (15)$$

Így tehát:

$$\mathbf{F}_{gN} = -\nabla \frac{G M m}{r} = -\frac{G M m}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (16)$$

$$\mathbf{F}_{gRel} = -\gamma \frac{G M m}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (17)$$

## 2.3. TÖBBTEST-PROBLÉMA

A többtest-probléma a fizika számtalan területén megjelenő, analitikusan csak néhány speciális esetben megoldható probléma. Motivációja a jelenlegi szimuláció által is körüljárt témakörből, az égitestek mozgásának vizsgálatából származik. A konkrét csillagászati kérdés, hogy több, egymással gravitációsan kölcsönható test mozgását hogyan tudjuk előrejelezni? Míg a kéttest-probléma könnyen megoldható és visszavezethető az egytest-problémára, addig a háromtest-probléma már csak néhány, az ennél több testet tartalmazó rendszerek pedig már semmilyen esetben nem oldhatók meg analitikusan.

Itt a két- és háromtest-probléma vizsgálatát végeztem el, melyek közül az első mozgásegyenleteit tömegközépponti, míg a másodikat relatív koordináta rendszerben írtam fel.

A kéttest-probléma mozgásegyenleteit előbb írjuk

fel egymáshoz képesti, relatív viszonyítási rendszerben, majd váltsuk azt át tömegközéppontira:

$$\ddot{\mathbf{R}}_1 = -\frac{Gm_2}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (18)$$

$$\ddot{\mathbf{R}}_2 = -\frac{Gm_1}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (19)$$

Ahol jelölje  $r$  az két test távolságát,  $\mathbf{R}_1$  és  $\mathbf{R}_2$  a keringési középpont (ez a tömegközéppont (TKP)) felé mutató vektort. Ekkor  $\mathbf{r} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$ . Ennek a TKP-nak a pozíciója kiszámítható egyszerűen a testek tömegéből és azok távolságából:

$$\mathbf{R}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \mathbf{r} \quad (20)$$

$$\mathbf{R}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \mathbf{r} \quad (21)$$

Ahol  $m_1$  és  $m_2$  az egyes testek tömegét jelöli, a fenti távolságoknak megfelelő indexekkel. Az (19) és (20)-as egyenleteket felhasználva és behelyettesítve a (18)-as mozgásegyenletekbe, könnyen megkaphatjuk azok tömegközépponti rendszerben felírt alakját:

$$\ddot{\mathbf{R}}_1 = -G \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \cdot \frac{\mathbf{R}_1}{|\mathbf{R}_1|^3} \quad (22)$$

$$\ddot{\mathbf{R}}_2 = -G \frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2} \cdot \frac{\mathbf{R}_2}{|\mathbf{R}_2|^3} \quad (23)$$

A háromtest-probléma hasonló levezetést igényel, azonban egyszerűen az  $n$ -test-probléma ismert, általános képletét fogjuk felhasználni, érthetően három test esetére. Ez az általános formula a következőképp fest:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -G \sum_{j=1; j \neq i}^N \frac{m_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} \quad (24)$$

Aminek segítségével a háromtest-probléma mozgásegyenletei azonnal megfogalmazhatók:

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -Gm_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} - Gm_3 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^3} \quad (25)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -Gm_1 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} - Gm_3 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|^3} \quad (26)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = -Gm_1 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3} - Gm_2 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|^3} \quad (27)$$

### 3. MEGVALÓSÍTÁS

- 
- [1] C. Magnan. “Complete calculations of the perihelion precession of Mercury and the deflection of light by the Sun in General Relativity”. In: *arXiv e-prints* (Dec. 2007). arXiv: [0712.3709](https://arxiv.org/abs/0712.3709) [gr-qc].
  - [2] Owen Biesel. “The Precession of Mercury’s Perihelion”. In: (2008).
  - [3] T. J. Lemmon and A. R. Mondragon. “Kepler’s Orbits and Special Relativity in Introductory Classical Mechanics”. In: *arXiv e-prints* (Dec. 2010). arXiv: [1012.5438](https://arxiv.org/abs/1012.5438) [astro-ph.EP].
  - [4] J. M. Potgieter. “Derivation of the equations of Lagrange for a relativistic particle”. In: *American Journal of Physics* 51.1 (1983), pp. 77–77. DOI: [10.1119/1.13441](https://doi.org/10.1119/1.13441). eprint: <https://doi.org/10.1119/1.13441>. URL: <https://doi.org/10.1119/1.13441>.
  - [5] Ashmeet Singh and Binoy Krishna Patra. “Relativistic corrections to the central force problem in a generalized potential approach”. In: *Canadian Journal of Physics* 93 (May 2015), pp. 549–555. DOI: [10.1139/cjp-2014-0261](https://doi.org/10.1139/cjp-2014-0261). arXiv: [1404.2940](https://arxiv.org/abs/1404.2940) [physics.class-ph].
  - [6] Constantinos G Vayenas, Athanasios Fokas, and Dimitrios Grigoriou. “Gravitational mass and Newton’s universal gravitational law under relativistic conditions”. In: *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 633. 1. IOP Publishing. 2015, p. 012033.
  - [7] Robert L Kurucz. “The precession of Mercury and the deflection of starlight by special relativity alone”. In: *arXiv preprint astro-ph/0608434* (2006).