

# Számítógépes szimulációk

## II.: Egyszerű inga

Pál Balázs<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Eötvös Loránd Tudományegyetem

2019. február 19.

### Abstract

A *Számítógépes szimulációk* laboratórium második alkalmával az ingamodellek differenciálegyenleteinek numerikus megoldásait vizsgáltuk különböző közelítésekben (matematikai, csillapított, gerjesztett és fizikai). Összehasonlítottuk az egyenleteket megoldó negyedrendű Runge–Kutta, a lépéshossz-váltó (adaptív) negyedrendű Runge–Kutta, a Runge–Kutta–Cash–Karp és az adaptív Runge–Kutta–Cash–Karp, valamint az Euler és az Euler–Cromer módszereket. Kiegészítésként megvizsgáltuk ezek pontosságát és érzékenységét a kettős ingára vonatkozóan is.

## 1. FELADATOK

A laboratórium második feladatában az ingák mozgásegyenleteinek numerikus közelítésével foglalkoztunk. A feladatok magukba foglalták mind az egyszerű matematikai, mind a gerjesztett-csillapított, mind pedig a fizikai ingák egyenleteivel történő munkát is.

A fentiek megoldásához néhány ismert differenciálegyenlet megoldó algoritmust kellett alkalmaznunk, amik eredményeit több szempont alapján is összevetettük egymással. A szóban forgó algoritmusok között a már első feladtból is ismert Euler- és Euler–Cromer-módszer foglalt helyet, valamint újdonságként a negyedrendű Runge–Kutta (innenről RK4) és a Cash–Karp (innenről RKCK) módszerek is szerepeltek a többi mellett. Az utóbbi kettő módszer esetében egy adaptív lépéshossz-változtató metódus is implementálva volt. Vizsgálataink arra irányultak, hogy az egyenlet megoldó algoritmusok melyik módszer esetében hogyan viselkednek, valamint, hogy azok pontosan mikre érzékenyek. Ehhez monitoroznunk kellett az ingák kitérését, sebességét és kinetikus energiájuk változását minden módszer esetében.

Kiegészítésként implementálnunk kellett a kettős inga mozgásegyenleteit is, amiket szintén a fenti vizsgálatok alá volt szükséges vetnünk.

Megjegyzendő, hogy minden esetben az olyan mozgásokat vizsgáltuk, ahol minden ingát egy merev rúd rögzít a falhoz, vagy a kettős ingánál esetlegesen a másik ingához.

## 2. ELMÉLETI ALAPOK

A bonyolultabb klasszikus mechanikai rendszerek mozgásegyenletei legegyszerűbben az azokat leíró ún. *Lagrange-függvény* által definiált funkcionálok variációs problémájának megoldásával - az adott funkcionál stacionárius pontjainak keresésével - kaphatóak. Ezek a pontok az ún. Euler–Lagrange-egyenlet megoldásával kaphatóak, mely maga a rendszer mozgásegyenlete lesz[1]. Ez a klasszikus mechanika egyik alapvető formalizmusa,

így részletezésébe itt nem megyek bele. Míg a matematikai inga leírásához, annak egyszerűségéből kifolyólag ez a megközelítés értelmetlenül bonyolultabb a naiv felírásnál, addig a kettős ingához már elengedhetetlen eszközzé válik.

### 2.1. MATEMATIKAI INGA

A gerjesztett-csillapított matematikai inga mozgásegyenlete célszerűen levezethető - pontos megfogalmazás szerint átalakítható -, ha Newton II. törvényét felírva átváltjuk a benne szereplő mennyiségeket polárkoordinátákba. A kiinduló egyenletünk ekkor az ismert

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (1)$$

amit az inga esetében felírhatunk a kitérés szöge és a kötéel hosszának függvényében:

$$\mathbf{F} = -m\mathbf{g} \cdot \sin(\theta) \quad (2)$$

Ezt leosztva  $m$ -el kapjuk a következő alakot:

$$\mathbf{a} = -\mathbf{g} \cdot \sin(\theta) \quad (3)$$

A polárkoordinátákra történő átváltáshoz definiáljuk azt az ívhosszt, amit az inga leír. Ha ezt  $k$ -val jelöljük, akkor felírhatjuk az inga függőlegeshez viszonyított  $\theta$  kitérés szögének függvényében:

$$k = l \cdot \theta \quad (4)$$

ahol kis  $l$  az inga kötéelének (rúdjának) hossza. A kerületi sebesség ennek idő szerinti deriváltja:

$$\frac{dk}{dt} = l \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (5)$$

Ennek újabb idő szerinti deriváltja pedig a gyorsulás, aminek értékebe a fent kapott eredményt be tudjuk helyettesíteni:

$$\frac{d(l \cdot \frac{d\theta}{dt})}{dt} = l \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \cdot \sin(\theta) \quad (6)$$

Ebből pedig a végleges mozgásegyenlet:

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} \equiv \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \cdot \sin(\theta)} \quad (7)$$

## 2.2. FIZIKAI INGA

Tekintsünk egy  $M$  tömegű kiterjedt testet, melyen keresztül egy lyuk van fúrva, ezen a lyukon keresztül pedig a test egy olyan felfüggesztéssel van rögzítve, amin szabadon foroghat. Ezt a rendszert nevezzük *fizikai ingának*. Nevezzük el  $F$ -el a felfüggesztési pontot,  $T$ -vel pedig a test tömegközéppontját. Egyensúlyi pozícióban, ezen két pont által kijelölt egyenes párhuzamos a gravitációs mező lokális gradiensevel. Ha az inga kitérést ehhez az egyeneshez viszonyítjuk, azt mondhatjuk, hogy az inga kitérésének szöge,  $\theta = 0$ , ha  $\overline{FT} \parallel \nabla \Phi$ , ahol  $\Phi$  a mező skalárpotenciálja.

Ilyen feltételek mellett a síkban mozgó fizikai inga mozgásegyenlete felírható az alábbi[2] egyszerű módon:

$$I_P \cdot \ddot{\theta} = \tau_F \quad (8)$$

ahol  $\tau_F$  az  $F$  pontban ható forgatónyomaték,  $I_P$  pedig az ingatest skalár tehetetlenségi nyomatéka  $P$  pontban. Ha a matematikai ingához hasonlóan feltesszük, hogy minden tömege a tömegközéppontjában koncentrálódik, akkor felírhatjuk a forgatónyomatékokra az alábbi összefüggést:

$$\tau_F = -Mgd \cdot \sin \theta \quad (9)$$

Ahol  $d = |\overline{FT}|$ , tehát a felfüggesztés és a tömegközéppont távolsága. A kapott alakot az előző egyenletünkbe beírva a mozgásegyenlet az alábbi formát veszi fel:

$$\ddot{\theta} = -\frac{Mgd}{I_P} \cdot \sin \theta \quad (10)$$

Figyeljük meg, hogy bevezetve egy ún. *effektív*-, vagy *redukált hosszt*, melyet a következő módon definiálunk:

$$l_{eff} = \frac{I_P}{Md} \quad (11)$$

analóg módon visszkapjuk a matematikai inga mozgásegyenletét:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l_{eff}} \cdot \sin \theta \quad (12)$$

Vagyis a fizikai inga mozgását numerikusan a matematikai ingával azonos módon szimulálhatjuk. A különbség, hogy a fizikai inga esetében az inga redukált hosszával kell számolnunk, amely onnantól teljesen megegyezik egy eltérő kötéhhosszal rendelkező matematikai ingával, plusz információt azonban nem szolgáltat.

## 2.3. KETTŐS INGA

A kettős inga mozgásegyenletének levezetéséhez fel kell írunk a rendszer Lagrange-függvényét. Ennek segítségével a mozgásegyenlet kifejezhető a már említett variációs módszer és az Euler–Lagrange egyenlet kifejtésének segítségével. Ennek levezetése hosszú, így azt és a végleges mozgásegyenleteket az „A” függelékben csatolom.

## 3. MEGVALÓSÍTÁS

Előzetesen az egyszerű, gerjesztett-csillapított matematikai inga mozgásegyenletét megoldó, C++ nyelven írt keretrendszer volt számunkra megadva, melyet a kitűzött feladatok alapján nekünk kellett bővítenünk.

A forráskódot az első feladathoz hasonlóan egy saját batch file segítségével, benne a `clang` fordító felhasználásával fordítottam. Az eredeti kód módosításával elértem, hogy a lefordított `exe` program egy Jupyter Notebook-ban futó Python 3 kernel segítségével induljon. A szimuláció a kezdőfeltételeket szintén ebből a környezetből várja, bemenő paraméterek formájában.

A szimpla- és a kettős inga két különböző `main` forrásfile alapján fordul. Az előbbi outputja egy, míg utóbbi esetében két különböző `.dat` file. A különbség, hogy míg a szimpla inga esetében csak az inga aktuális kitérése, sebessége, valamint kinetikus energiája van az outputban monitorozva, addig a kettős ingánál egy külön adatfile szolgál a két inga aktuális x-y koordinátáinak tárolására.

Opcionális lehetőség volt, hogy egy előre megírt C++ OpenGL környezetet használjunk a mozgások ábrázolására, azonban esztétikai okokra hivatkozva ehelyett ezt Pythonban valósítottam meg egy saját kód segítségével. Ez a `matplotlib` és a `imageio` könyvtárakat használva generál megadott paraméterek alapján `mp4` formátumú, kis méretű, de nagy felbontású videókat az ingák mozgásáról.

A végleges forráskód és a programot futtató Notebook file-ok elérhetőek GitHub-on[3].

## 4. KIÉRTÉKELÉS

### 4.1. A MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI INGA MOZGÁSA

Az előzetesen megadott kódban szereplő gerjesztett-csillapított ingát több esetre is megvizsgáltam. Mivel a fizikai inga mozgása - ahogy azt a 4.2-es fejezetben tárgyaltam - nem tér el a matematikai ingától, ezért a fentiekre hivatkozva a szimulációk során nem tárgyaltam külön őket. Minden esetben az  $l = 1$  m-es effektív hosszal dolgoztam.

A vizsgált szimulációs feltételek a következők voltak:

1. Gerjesztés és csillapítás nélküli eset (Mat.)
2. Kizárólag csillapított mozgás (Damp.)
3. Egyszerre csillapított és gerjesztett eset (Damp.-Driv.)
4. Kizárólag gerjesztett mozgás (Driv.)

Ezek mindegyikét, azonos paraméterekkel futtatam a (1)-es pontban felsorolt differenciálegyenlet megoldó algoritmusokon, és minden futtatás esetében felvettem a rendszer idő-kitérés és idő-sebesség, valamint a kitérés-sebesség és sebesség-energia grafikonját, 2-2 ábrára rendezve őket. Ilyen módon ez a 6 algoritmusra összesen 48 ábrát eredményezett. Ezeket a rendkívüli hosszuk miatt a „B” függelékben csatolom. A (4) - (27) ábrák (B.1. függelék) a szimpla ingára felvett kitérés-idő és sebes-

ség idő grafikonok a különböző esetekre és iterációs módszerekre vonatkozóan. A (28) - (51) ábrák (B.2. függelék) az ezekhez tartozó fázis-, valamint energia-sebesség diagramok, az előzőekkel azonos sorrendben és elhelyezkedésben.

A kezdeti feltételeket az ábrázoláshoz minden közelítés esetében - ahol természetesen a speciális feltételek ezt nem korlátozták - azonosan választottam meg. Ezt alább két táblázatban ismertetem:

Paraméter	$t$	$dt$	$m$	$l$	$\theta_0$
Érték	30 s	0.1 s	1 kg	1 m	80°

1. táblázat. A szimpla ingás szimulációk konstans kezdőfeltételei

Paraméter	$q$	$\Omega_D$	$F_D$
Mat.	0	0°	0 N
Damp.	0.4	0°	0 N
Damp.-Driv.	0.4	30°	4 N
Driv.	0	30°	4 N

2. táblázat. A szimpla ingás szimulációk változó kezdőfeltételei

Ahol az első táblázatban  $t$  a szimulált idő,  $dt$  pedig a lépésközök hosszát,  $m$  az inga tömegét,  $l$  az kötéel hosszát,  $\theta_0$  pedig az inga, függőlegeshez mért kezdeti kitérésének szögét jelöli. Hasonlóan a második táblázatban  $q$  a rendszer csillapítási tényezőjét,  $\Omega_D$  a gerjesztés frekvenciáját,  $F_D$  pedig a gerjesztő erő nagyságát jelenti.

A (4)-(51) ábrákon jól látható a különböző kezdőfeltételek és iteratív módszerek közti különbség. Míg az RKCK, RK4 és ezek adaptív változatai nem mutatnak szemmel látható eltérést, addig az Euler-Cromer-módszer pontatlansága könnyebben észlelhető rajtuk, míg az explicit Euler-módszer minden szempontból kilóg az eredmények közül. Az utóbbi használatánál - ismerve annak metodikáját - azt várnánk, hogy az energia nem marad meg, folyamatosan növekszik. Ez látható a róla készült ábrák esetében is, ahol az inga kitérése és sebessége, és így a rendszer energiája időben folyamatosan nő. Az ábrákból egyértelműen megállapítható, hogy alkalmatlan módszer az ingamozgás szimulálására.

A matematikai inga esetében a fázisdiagram egy ellipszis, amit mind a négy különböző Runge-Kutta-módszer helyesen visszad. Az Euler-Cromer-módszer esetében azonban a várt ellipszis kissé torzult, „csavart”. Ez az iterációs módszer ismerten pontatlanabb, mint az előbb említett függvénycsalád, ami ezen a feladaton keresztül szemléltethető is. Ez a torzulás azonban a lépésköz csökkentésével javítható,  $dt = 0.01$  s esetén ez a metódus is szemmel láthatólag tökéletes ellipszist ad eredményül (lásd a Notebook file-t GitHub-on[3]). Ebből következtethetünk rá, hogy a módszer nem alkalmazható rossz felbontású szimulációk esetén, azonban jó választás lehet a többi esetben (ami majd az 4.4-es pontban ismertetett futásideje miatt is igaz).

## 4.2. A KETTŐS INGA MOZGÁSA

A kettős inga mozgásegyenleteit és az azokat megoldó iteratív algoritmusokat - a már meglevőkre

építve, de - teljes egészében nekünk kellett implementálnunk. Ezt egy külön forrásfile-ban valószínűsítettem meg, aminek keretét az akkor már a saját változtatásaimmal együtt elkészült szimpla inga forrásfile-jából kölcsönöztem.

A kettős inga mozgását azonban kizárólag az RKCK és az RK4 módszerek segítségével elemeztem. Az adaptív módszerek szimplán túl lassú futásidőt eredményeztek ebben az esetben, míg a szimuláció az Euler- és Euler-Cromer-módszerrel futtatva már  $t \approx 1$  s esetén is elszállt. A többi ábra mellett teljesen értelmetlennek láttam egy olyan, maximum 3-4 lépésből álló szimulációt ábrázolni, amiben az 5-6. lépésnél az energia már a  $10^{18}$  nagyságrendnél tart.

Ennél a feladatnál már nem csak a szimpla ingánál ismertetett mennyiségeket vizsgáltam, hanem az ingák síkban történő mozgásának koordinátáinak változását is és egyéb effektusokat is. Ez összesen 52 db ábrát eredményezett, amiket az első feladathoz hasonlóan, a jelentős darabszámuk miatt a „B” függelékben csatoltam.

Az ábrák többek között a 4.1-ben olvasottakhoz hasonlóan helyezkednek el a B.3-as és B.4-es függelékben. A (52) - (59) ábrák az RK4 és RKCK algoritmusokhoz tartozó kitérés-idő és sebesség-idő diagramok, amiket szintén a szimpla ingához hasonlóan, matematikai, csillapított, gerjesztett és csillapított, valamint csak gerjesztett esetekben vizsgáltam. A (60) - (63) ugyanezen diagramok összehasonlítása látható. Az egyetlen különbség (52) - (59)-hoz képest, hogy itt egy ábrán vettem fel mind az RKCK, mind pedig az RK4-ből kapott kitérés értékeket az idő függvényében. Habár mindkét szimuláció teljesen azonos kezdőfeltételekkel indult, mégis erőteljes eltérés van a kettő között. Ez annak tudható be, hogy az RKCK és az RK4 algoritmusok nem teljesen azonosak, egymáshoz képest nagyon apró, de mégis eltérő numerikus hibákat produkálnak. Mivel a kettős inga egy kaotikus rendszer, így az apró, de különböző perturbációk is teljesen más és más kimeneteket képesek okozni az egyes esetekben. Pontosan ez látható ezeken az ábrákon is.

A B.4-es függelékben (64) - (87) értelemsszerűen a fenteikhez tartozó fázisdiagramok és energia-sebesség grafikonok találhatóak.

A B.5-ös függelékben a kettős ingák által leírt trajektóriákat ábrázoltam (88) - (95)-ig. Az ingamozgás síkban történik, így ezek ábrázolásához is csupán két koordinátát kellett figyelembe vennem. Ezek felvételéhez az ingák felfüggesztését vettem egy Descartes-koordinátarendszer origójának, aminek segítségével az ingák kitérése és a rudak hossza alapján megkaptam az adott pillanatnyi pozíciókat. Az ábrákon külön ábrázoltam a két ingát minden esetben. Ez rajtuk egyértelműen jelölve is van.

A B.6-os függelékben az kettős inga ismerten kaotikus viselkedését[4] vizsgáltam. Erről már az előbb említést tettem, ott azonban a különböző numerikus megoldásokból fakadó eltérésekről beszéltem. A (96) - (103) képeken azt vizsgáltam, hogy a kezdeti kitéritési szöget a 4-5. tizedesjegyben perturbálva, milyen hatással van ez a további mozgásra. Az ábrákon szépen látszik is az elvárt viselkedés: A legapróbb eltérések is teljesen különböző kimenetet produkálnak. Az ábrázolt 4 db kettős inga mozgása az elején még együtt mozog, azonban egy pontban

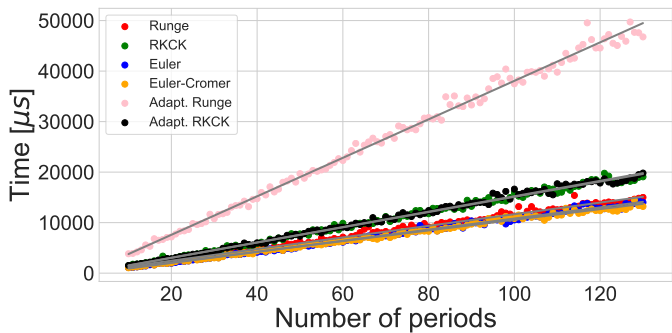
ezek hirtelen mind elválnak egymástól. Ez feltehetően egy olyan helyen következik be, ahol az iteratív módszerek viszonylag csak nagy hibával tudják a szimulációt léptetni. (Pl. ahol ott épp megfordul a sebességvektor iránya, így a gyorsulás egy hatalmas értéké nő.)

### 4.3. KETTŐS INGA - ANIMÁCIÓ

A kettős ingához a Python `matplotlib` és `imageio` könyvtárainak felhasználásával egy olyan saját programot írtam, ami kimenetként képes animáció (pl. egy `mp4` kiterjesztésű videó) formájában ábrázolni egy tetszőleges paraméterekkel futtatott szimulációt. Erről több videót is készítettem, különböző bemenő paraméterekkel, amik közül néhány relevánsabbat és érdekesebbet - amik a kettős inga kaotikus viselkedését jól szemléltetik - a YouTube-on elérhetővé tettem, azok ott most is megtekinthetők[5].

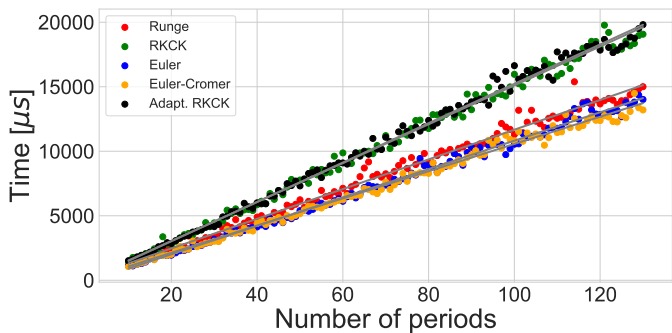
### 4.4. FUTÁSIDŐ

A különböző iteratív módszerek futásidejét a matematikai inga esetére teszteltem. Az program futása alatt eltelt időt a `chrono` library segítségével mértem, milliszekundumos pontosságú időmérési metódust használva. A szimulációt a különböző módszerekkel  $t = 10\text{ s}$  és  $t = 120\text{ s}$  közötti időpontokban futtattam a matematikai inga esetére, a fenti táblázatokban is szereplő kezdőfeltételekkel. Az egyes  $t$  időkre történő futások között másodperces lépésekkel vettem fel a futásidőket. Ezeket az alábbi grafikonokon ábrázoltam:



1. ábra. Futásidők 1.  
Mat.

Az ábrán egyértelműen látszik, hogy az adaptív RK4 módszer magasan a leghosszabb futásidőt igénylő algoritmus. Hogy a többit jobban össze lehessen hasonlítani, a következő ábrából kihagytam az erre a módszerre kapottakat és csak a többit ábrázoltam:

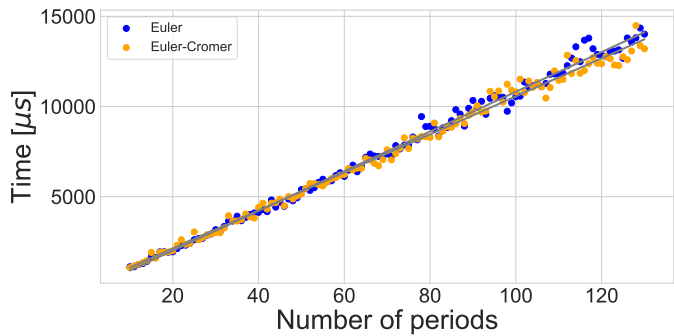


2. ábra. Futásidők 2.  
Mat.

Már az előzőn is, de itt még szembetűnőbb, hogy az RKCK és annak adaptív variációja kilóg a többi közül. Ez nem csoda, hiszen jóval több, órajelet

igénylő műveletet kell elveznünk közben, mint az összes többi maradék esetében.

Egyedül az Euler- és az Euler-Cromer-módszer esetén várnánk azonos futásidőt, hisz mindkettőben pontosan ugyanannyi és ugyanolyan műveletet végzünk el a szimuláció során - már ha a megírt algoritmusunk megfelelő. Ezt ellenőrizendő, ezt a kettőt is külön megvizsgáltam, amit az alábbi ábrán ismertetek:



3. ábra. Futásidők 3.  
Mat.

A kettő közti alig észrevehető különbség egyedül abból fakadhat, hogy az Euler-Cromer módszer esetén a biztonság kedvéért egy plusz értékadás műveletet is alkalmaztam, aminek szintén van - minimális, de véges nagyságú - órajelegénye.

Összefoglalóként azt mondhatjuk, hogy az Euler-Cromer-módszer minden esetben pontosabb képet ad az Euler módszernél, viszont futásidő szempontjából tökéletesen azonosak. Tovább menve, az Euler-Cromer módszer futásidőben még jobb is a náluk pontosabb algoritmusoknál. Azt mondhatjuk tehát, hogy megfelelő rendszer szimulációjánál, kellően pontos lépésközt választva, érdemes lehet az Euler-Cromer-módszerhez folyamodni, ha a futásidő kulcsfontosságú.

## 5. DISZKUSSZIÓ

A feladatok során összehasonlítottam az ingamozgás példáján keresztül néhány ismert iteratív algoritmust, amik alkalmasak a fizikában előkerülő problémák numerikus közelítésére. Megállapítottam, hogy az Euler-módszer csak nagyon kivételes esetben érdemes alkalmazni, akkor is csak körültekintéssel, megfelelő szimulációs felbontás mellett. A vele megegyezően gyors futásidejű Euler-Cromer-módszer - habár még mindig nem pontosabb, mint a Runge-Kutta függvénycsalád - ellenben jó választásnak számíthat időigényes szimulációk optimalizációjához.

## 6. MEGJEGYZÉSEK

A dokumentumban található képek 150 dpi felbontású, `.pdf` kiterjesztésű forrásból származnak, amiket a `matplotlib` package `savefig` függvényének segítségével mentettem le. Ezek miatt a jegyzőkönyv néha lassan tölt be, azonban a már többször említett GitHub repository-ban az könnyebben olvasható. (Ennek az oka feltehetően az, hogy GitHub-on megnyitva az oldal az egész PDF-et betölti, míg egy offline PDF olvasó csak egy adott tartományban levő részeket az optimalizáció miatt.)



## FORRÁSOK

- [1] Géza Györgyi. *Elméleti Mechanika „A”*. [Online; accessed February 27, 2019]. 2018. URL: [http://glu.elte.hu/~gyorgyi/teaching/Elmeleti\\_Mechanika/jegyzet/emjegyzet.pdf](http://glu.elte.hu/~gyorgyi/teaching/Elmeleti_Mechanika/jegyzet/emjegyzet.pdf).
- [2] Richard Fitzpatrick. *Classical Mechanics – an introductory course*. [Online; opened at March 1, 2019]. 2006. URL: <http://farside.ph.utexas.edu/teaching/301/lectures/>.
- [3] Pál Balázs. *ELTE Computer Simulations 2019 — GitHub*. [Online; opened at February 28, 2019]. 2019. URL: [https://github.com/masterdesky/ELTE\\_Comp\\_Simulations\\_2019](https://github.com/masterdesky/ELTE_Comp_Simulations_2019).
- [4] Tomasz Stachowiak and Toshio Okada. “A numerical analysis of chaos in the double pendulum”. In: *Chaos, Solitons & Fractals* 29.2 (2006), pp. 417–422. DOI: [10.1016/j.chaos.2005.08.032](https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.08.032). URL: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01389907/document>.
- [5] *Pál Balázs’s Channel — YouTube*. [Online; opened at March 1, 2019]. 2019. URL: <https://www.youtube.com/channel/UCBDSB7PdQ3E919WSBsTy7cQ>.
- [6] Joe Chen. *Chaos from Simplicity: An Introduction to the Double Pendulum*. [Online; opened at March 1, 2019]. 2008. URL: [https://ir.canterbury.ac.nz/bitstream/handle/10092/12659/chen\\_2008\\_report.pdf](https://ir.canterbury.ac.nz/bitstream/handle/10092/12659/chen_2008_report.pdf).

## APPENDIX A

### A.1. A GERJESZTETT-CSILLAPÍTOTT KETTŐS INGA

A gerjesztett-csillapított kettős inga mozgásegyenletei felírhatóak a következő[6] módon:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{m_2 L_1 \omega_1^2 \cdot \sin(2 \cdot d\theta) + 2m_2 L_2 \omega_1^2 \cdot \sin(d\theta) + 2gm_2 \cdot \cos(\theta_2) \cdot \sin(d\theta) + 2gm_1 \cdot \sin(\theta) + \gamma_1}{-2L_1 \cdot (m_1 + m_2 \cdot \sin^2(d\theta))} \quad (13)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{m_2 L_2 \omega_2^2 \cdot \sin(2 \cdot d\theta) + 2 \cdot (m_1 + m_2) \cdot L_2 \omega_1^2 \cdot \sin(d\theta) + 2g \cdot (m_1 + m_2) \cdot \cos(\theta_1) \cdot \sin(d\theta) + \gamma_2}{-2L_2 \cdot (m_1 + m_2 \cdot \sin^2(d\theta))} \quad (14)$$

Ahol  $m$ ,  $L$ ,  $\theta$  és  $\omega$ , megfelelő indexekkel ellátott mennyiségek rendre az adott inga tömegét, kötéll hosszát, kitérésének szögét, valamint szögsebességét jelölik. Az 1-es index közvetlenül a felfüggesztéshez, míg a 2-es az alsó, magához az elsőhöz rögzített ingát jelöli. A  $g$  mennyiség a gravitációs gyorsulás.

Többek között még a mozgásegyenletekben szereplő  $\gamma_1$  és  $\gamma_2$  mennyiségek az alábbiakat takarják:

$$\gamma_1 = 2\alpha - 2\beta \cdot \cos(d\theta) \quad (15)$$

$$\gamma_2 = 2\alpha \cdot \cos(d\theta) - \frac{2 \cdot (m_1 + m_2)}{m_2} \beta \quad (16)$$

Ahol használtuk az első testre ható

$$\alpha = q_1 \cdot \omega_1 - F_{D_1} \cdot \sin(\Omega_{D_1} \cdot t) \quad (17)$$

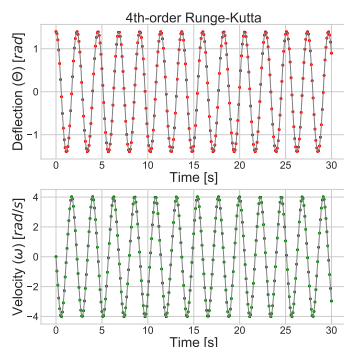
valamint a második testre ható

$$\beta = q_2 \cdot \omega_2 - F_{D_2} \cdot \sin(\Omega_{D_2} \cdot t) \quad (18)$$

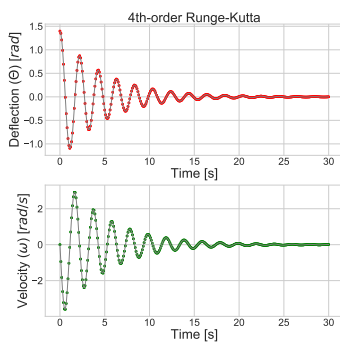
gerjesztő-csillapító hatások jelölését. Ezekben  $\Omega_D$  és  $F_D$  - a megfelelő indexekkel - a gerjesztés frekvenciáját és amplitúdóját jelöli, míg az itt és fentebb megjelenő  $d\theta = \theta_1 - \theta_2$ , a két inga kitérésének különbsége.

## APPENDIX B

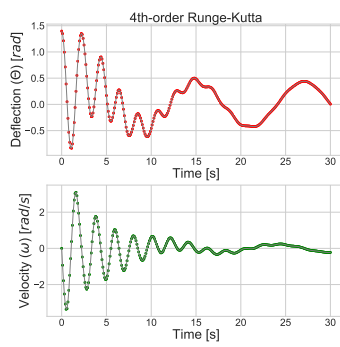
### B.1. Kitérés-idő és sebesség-idő diagramok, szimpla inga



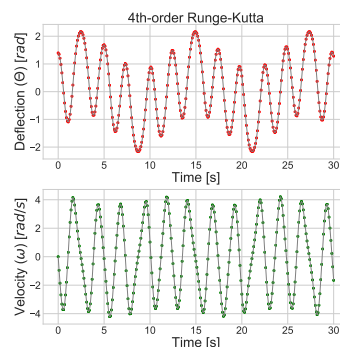
4. ábra. Runge-Kutta  
Mat.



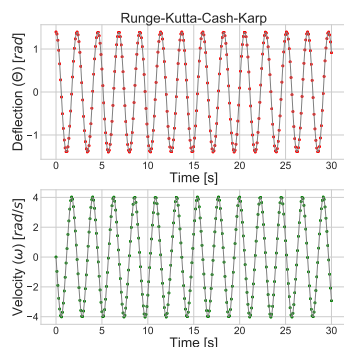
5. ábra. Runge-Kutta  
Damp.



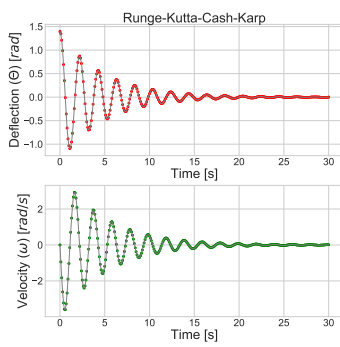
6. ábra. Runge-Kutta  
Damp.-Driv.



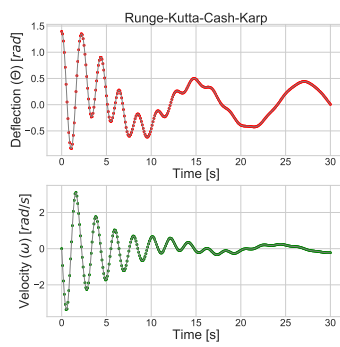
7. ábra. Runge-Kutta  
Driv.



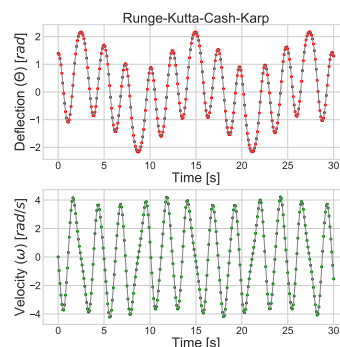
8. ábra. R-K-C-K  
Mat.



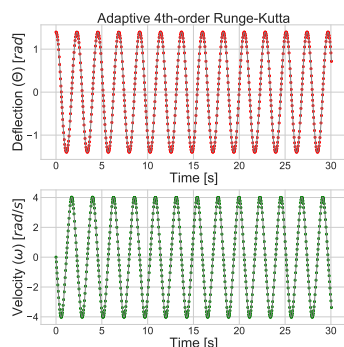
9. ábra. R-K-C-K  
Damp.



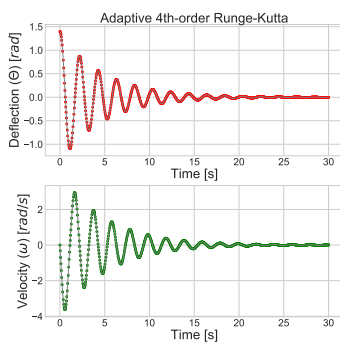
10. ábra. R-K-C-K  
Damp.-Driv.



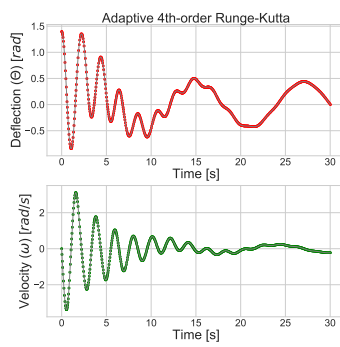
11. ábra. R-K-C-K  
Driv.



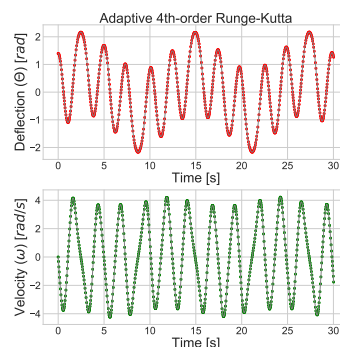
12. ábra. Ad. Runge-Kutta  
Mat.



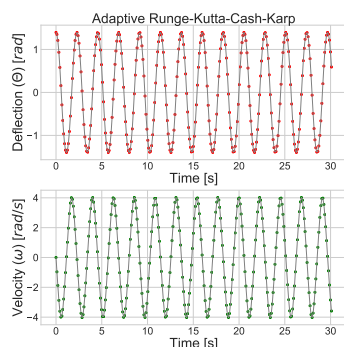
13. ábra. Ad. Runge-Kutta  
Damp.



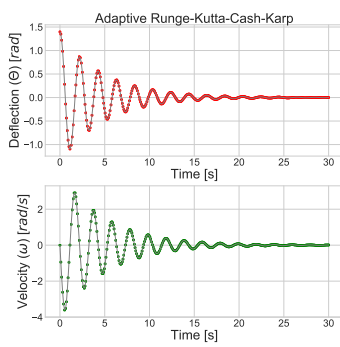
14. ábra. Ad. Runge-Kutta  
Damp.-Driv.



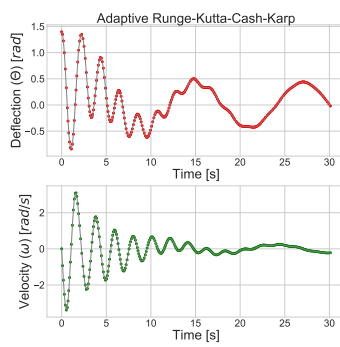
15. ábra. Ad. Runge-Kutta  
Driv.



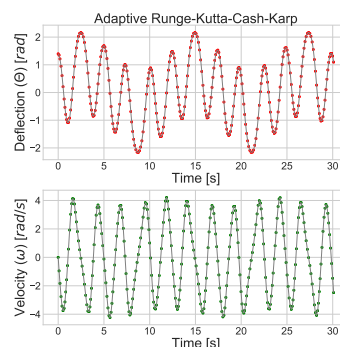
16. ábra. Ad. R-K-C-K  
Mat.



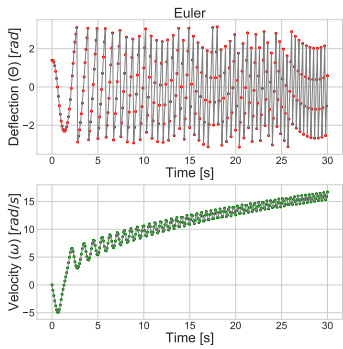
17. ábra. Ad. R-K-C-K  
Damp.



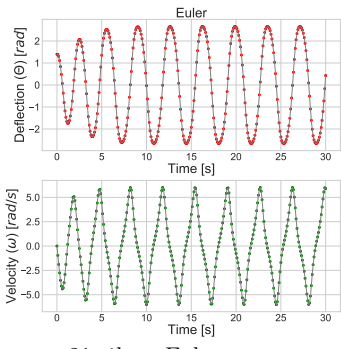
18. ábra. Ad. R-K-C-K  
Damp.-Driv.



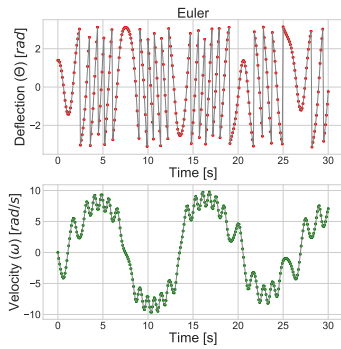
19. ábra. Ad. R-K-C-K  
Driv.



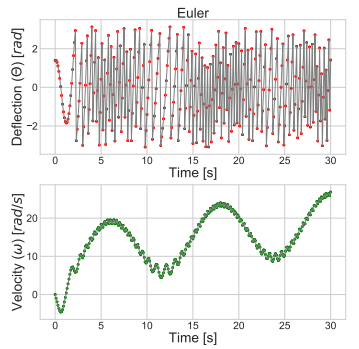
20. ábra. Euler  
Mat.



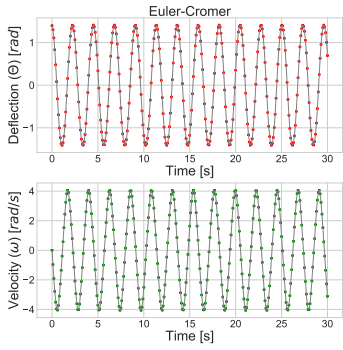
21. ábra. Euler  
Damp.



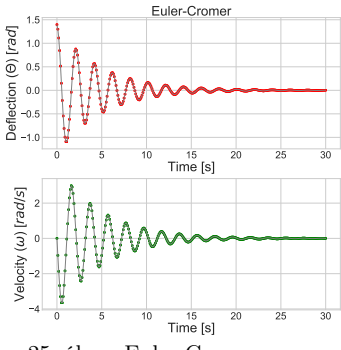
22. ábra. Euler  
Damp.-Driv.



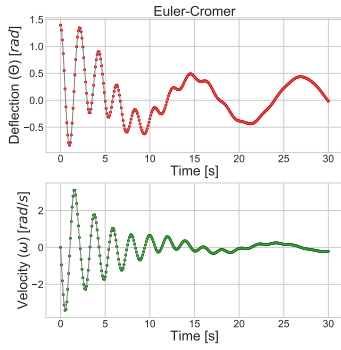
23. ábra. Euler  
Driv.



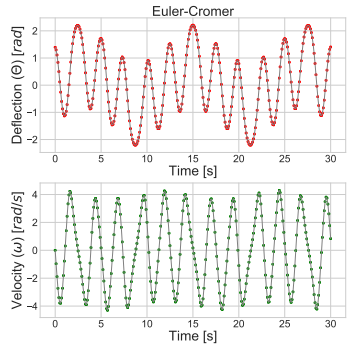
24. ábra. Euler-Cromer  
Mat.



25. ábra. Euler-Cromer  
Damp.



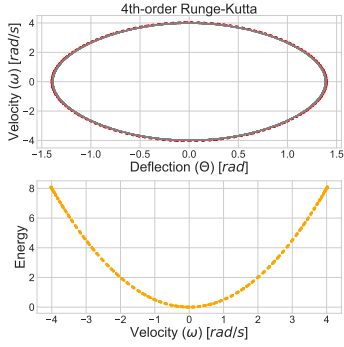
26. ábra. Euler-Cromer  
Damp.-Driv.



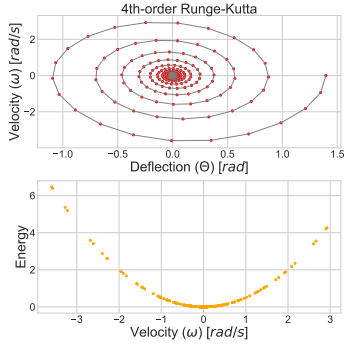
27. ábra. Euler-Cromer  
Driv.



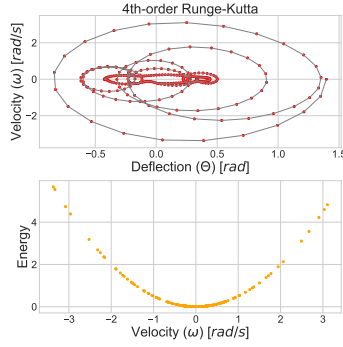
## B.2. Fázistér és energia-sebesség diagramok, szimpla inga



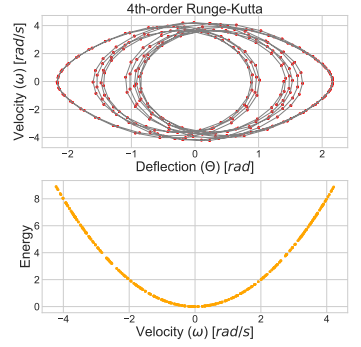
28. ábra. Runge-Kutta  
Mat.



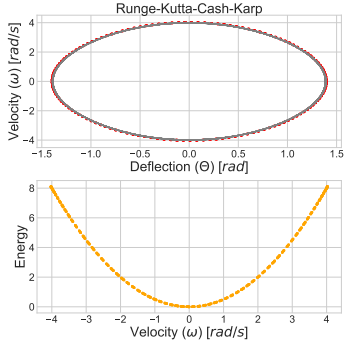
29. ábra. Runge-Kutta  
Damp.



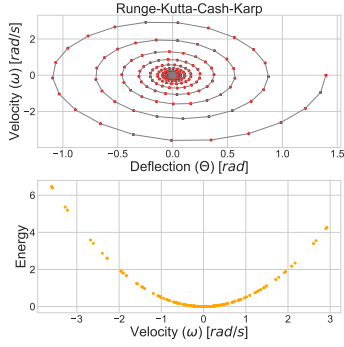
30. ábra. Runge-Kutta  
Damp.-Driv.



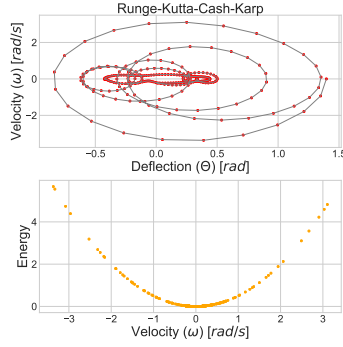
31. ábra. Runge-Kutta  
Driv.



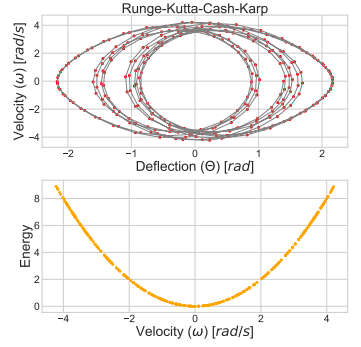
32. ábra. R-K-C-K  
Mat.



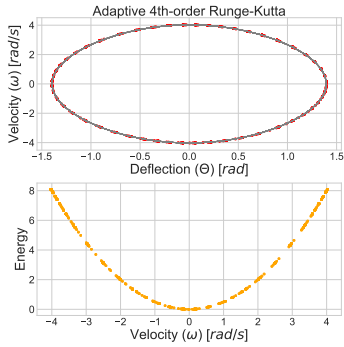
33. ábra. R-K-C-K  
Damp.



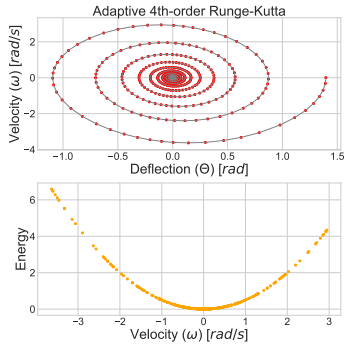
34. ábra. R-K-C-K  
Damp.-Driv.



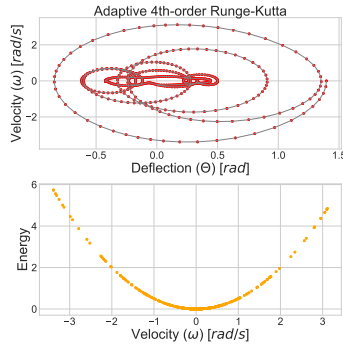
35. ábra. R-K-C-K  
Driv.



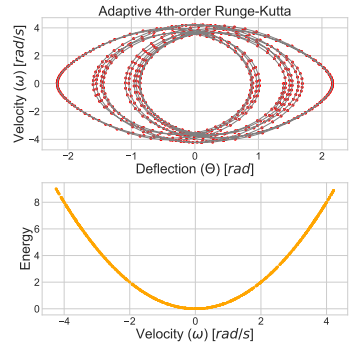
36. ábra. Ad. Runge-Kutta  
Mat.



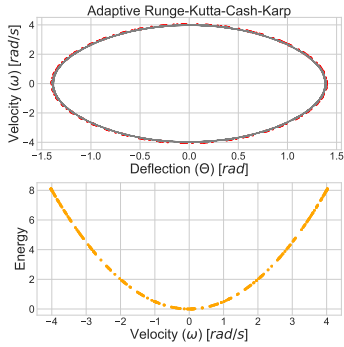
37. ábra. Ad. Runge-Kutta  
Damp.



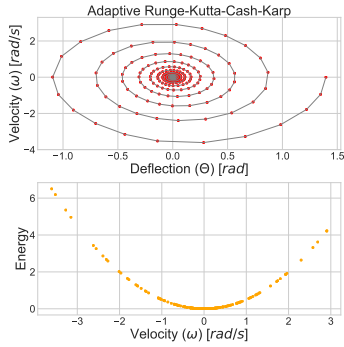
38. ábra. Ad. Runge-Kutta  
Damp.-Driv.



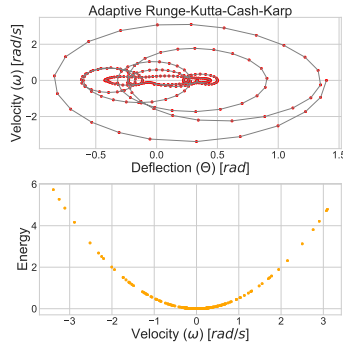
39. ábra. Ad. Runge-Kutta  
Driv.



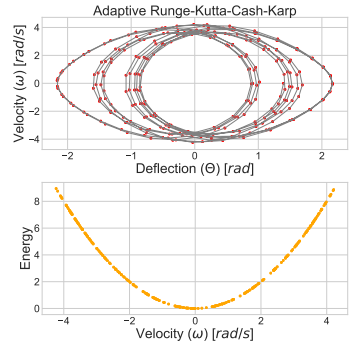
40. ábra. Ad. R-K-C-K  
Mat.



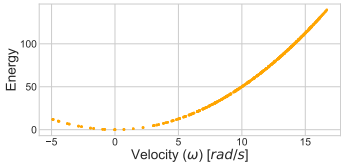
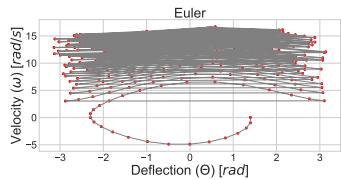
41. ábra. Ad. R-K-C-K  
Damp.



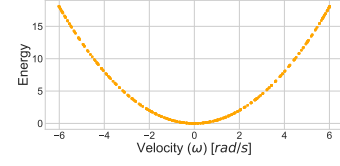
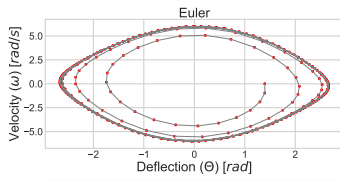
42. ábra. Ad. R-K-C-K  
Damp.-Driv.



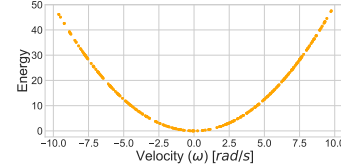
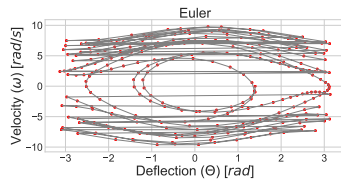
43. ábra. Ad. R-K-C-K  
Driv.



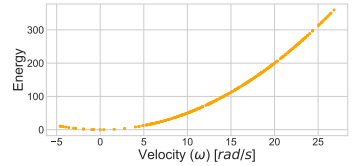
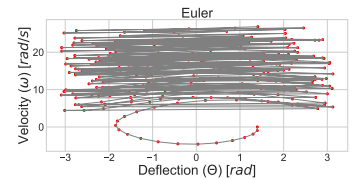
44. ábra. Euler  
Mat.



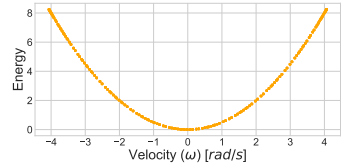
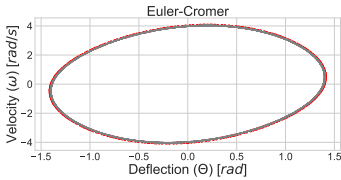
45. ábra. Euler  
Damp.



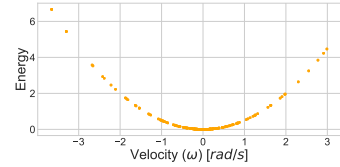
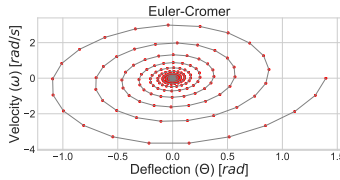
46. ábra. Euler  
Damp.-Driv.



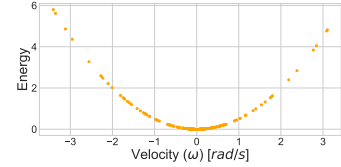
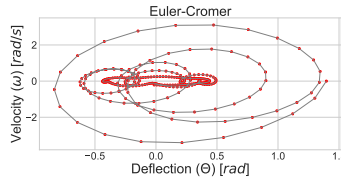
47. ábra. Euler  
Driv.



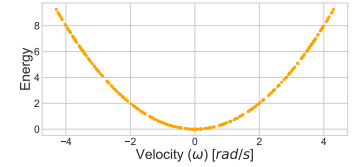
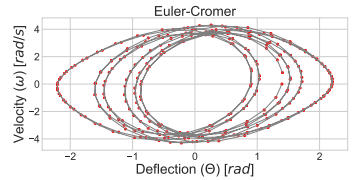
48. ábra. Euler-Cromer  
Mat.



49. ábra. Euler-Cromer  
Damp.

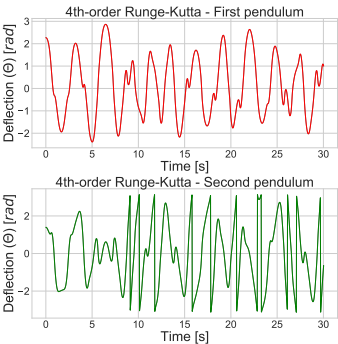


50. ábra. Euler-Cromer  
Damp.-Driv.

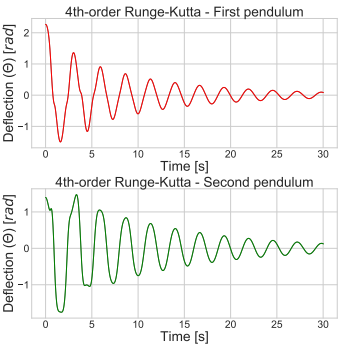


51. ábra. Euler-Cromer  
Driv.

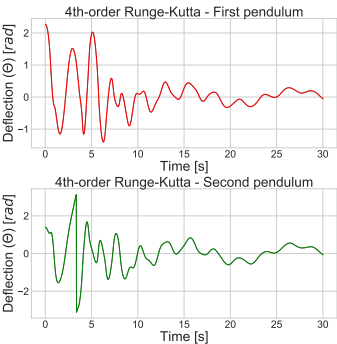
B.3. Kitérés-idő és sebesség-idő diagramok diagramok, dupla inga



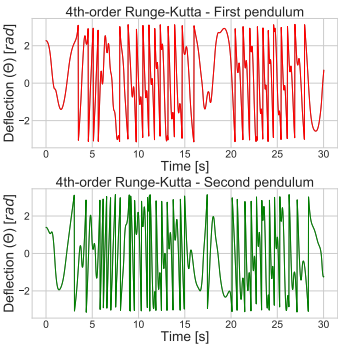
52. ábra. Runge-Kutta  
Mat.



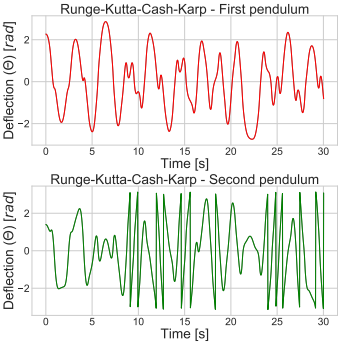
53. ábra. Runge-Kutta  
Damp.



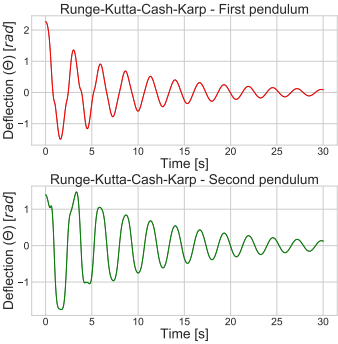
54. ábra. Runge-Kutta  
Damp.-Driv.



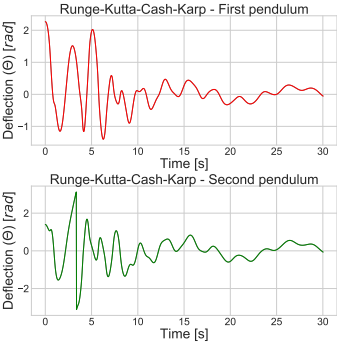
55. ábra. Runge-Kutta  
Driv.



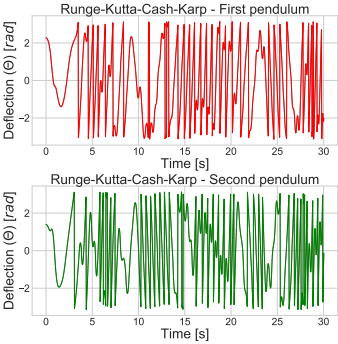
56. ábra. R-K-C-K  
Mat.



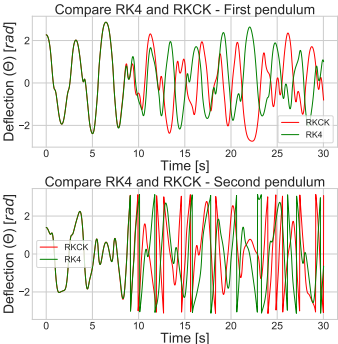
57. ábra. R-K-C-K  
Damp.



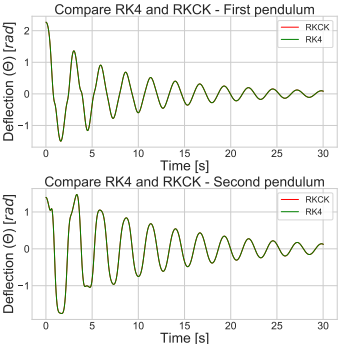
58. ábra. R-K-C-K  
Damp.-Driv.



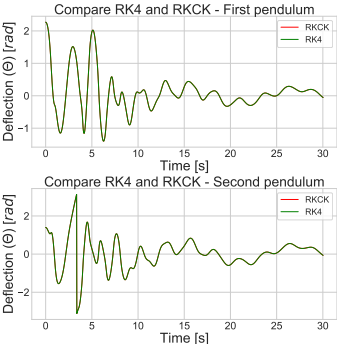
59. ábra. R-K-C-K  
Driv.



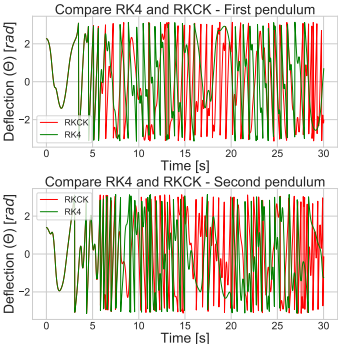
60. ábra. Comparson  
Mat.



61. ábra. Comparson  
Damp.

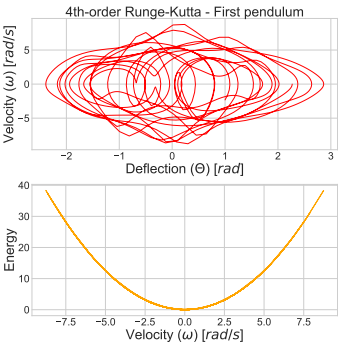


62. ábra. Comparson  
Damp.-Driv.

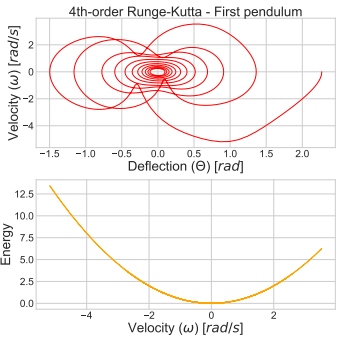


63. ábra. Comparson  
Driv.

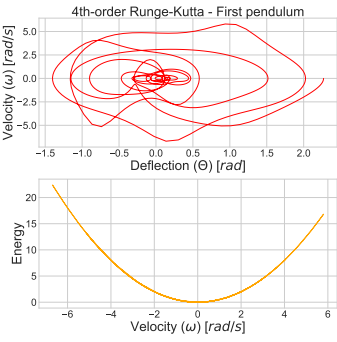
B.4. Fázistér és energia-sebesség diagramok, dupla inga



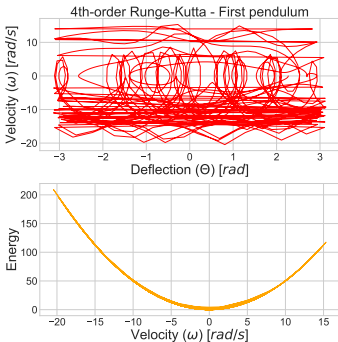
64. ábra. Runge-Kutta  
First P., Mat.



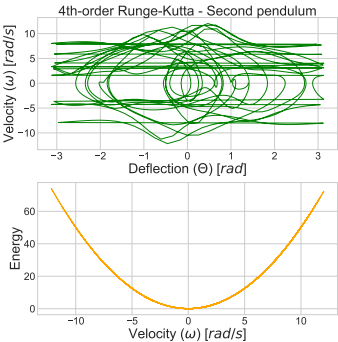
65. ábra. Runge-Kutta  
First P., Damp.



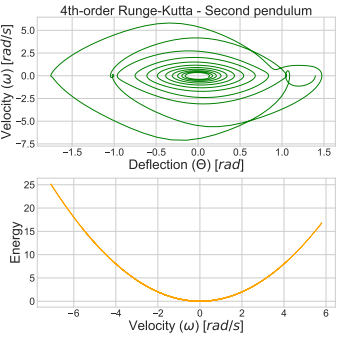
66. ábra. Runge-Kutta  
First P., Damp.-Drive.



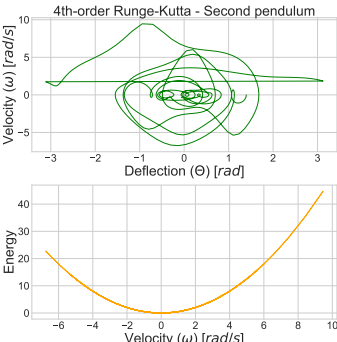
67. ábra. Runge-Kutta  
First P., Drive.



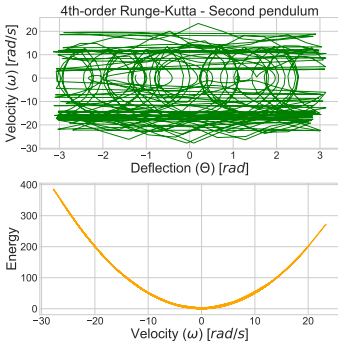
68. ábra. Runge-Kutta  
Second P., Mat.



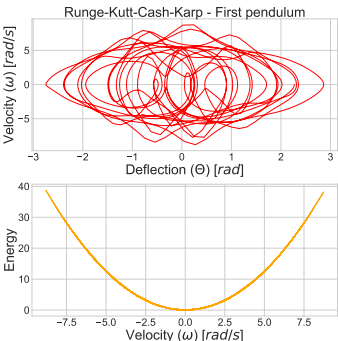
69. ábra. Runge-Kutta  
Second P., Damp.



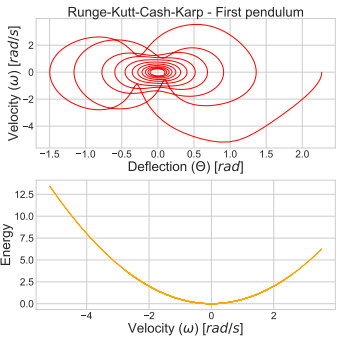
70. ábra. Runge-Kutta  
Second P., Damp.-Drive.



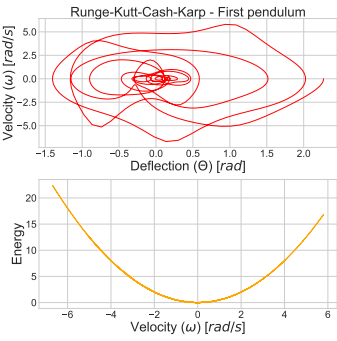
71. ábra. Runge-Kutta  
Second P., Drive.



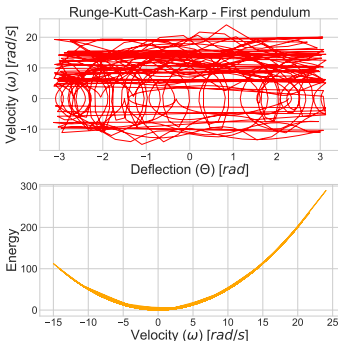
72. ábra. R-K-C-K  
First P., Mat.



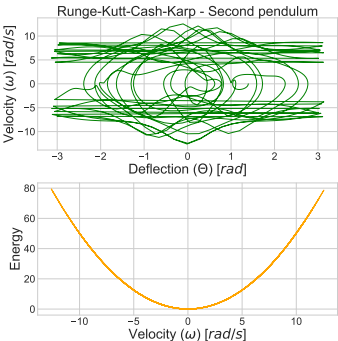
73. ábra. R-K-C-K  
First P., Damp.



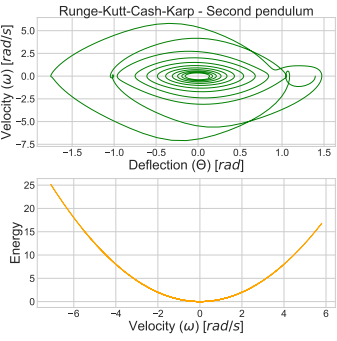
74. ábra. R-K-C-K  
First P., Damp.-Drive.



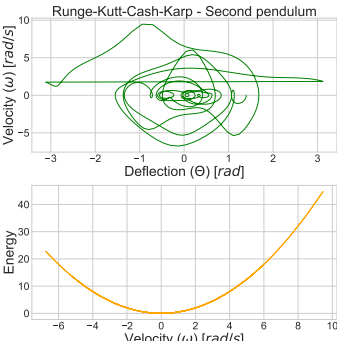
75. ábra. R-K-C-K  
First P., Drive.



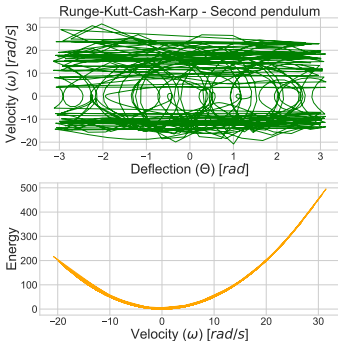
76. ábra. R-K-C-K  
Second P., Mat.



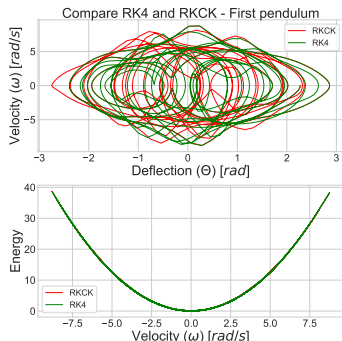
77. ábra. R-K-C-K  
Second P., Damp.



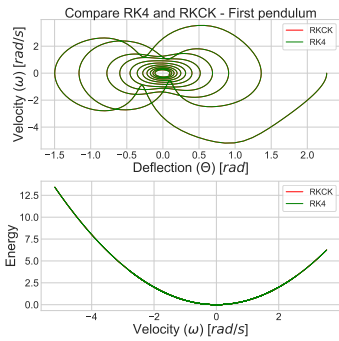
78. ábra. R-K-C-K  
Second P., Damp.-Drive.



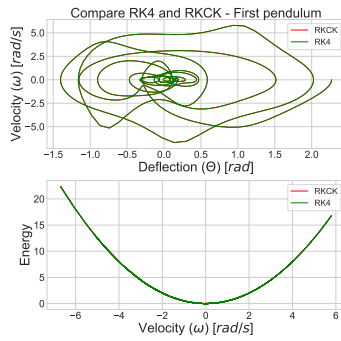
79. ábra. R-K-C-K  
Second P., Drive.



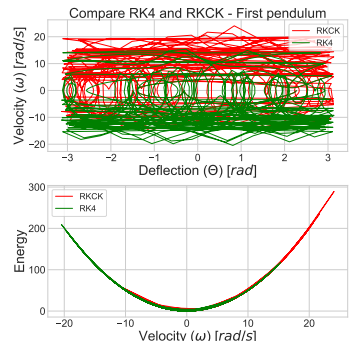
80. ábra. Comparison Mat.



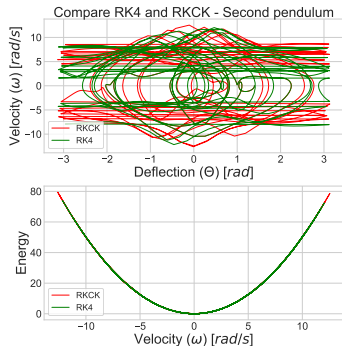
81. ábra. Comparison Damp.



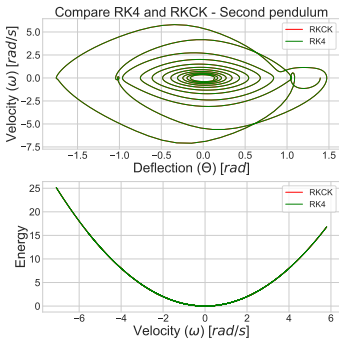
82. ábra. Comparison Damp.-Driv.



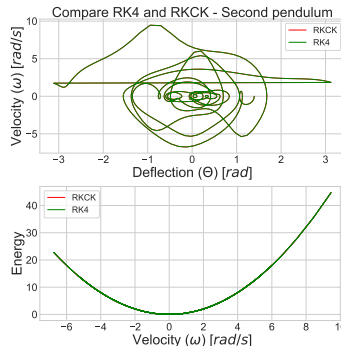
83. ábra. Comparison Driv.



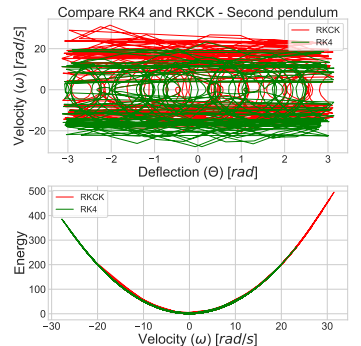
84. ábra. Comparison Second P., Mat.



85. ábra. Comparison Second P., Damp.

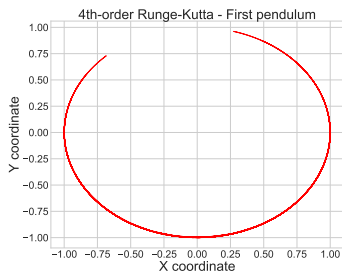


86. ábra. Comparison Second P., Damp.-Driv.

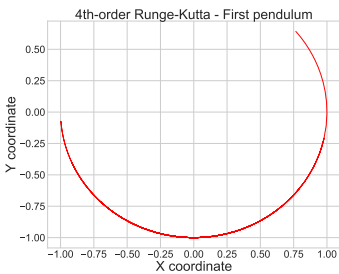


87. ábra. Comparison Second P., Driv.

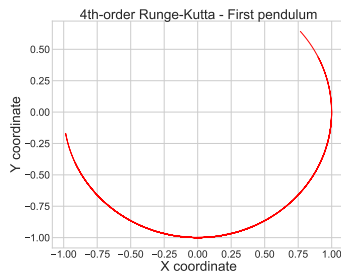
## B.5. Trajektóriák, dupla inga



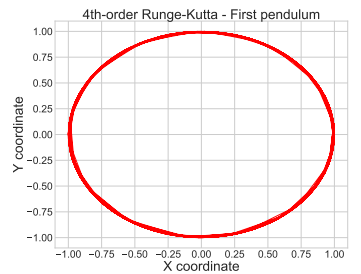
88. ábra. Runge-Kutta Mat.



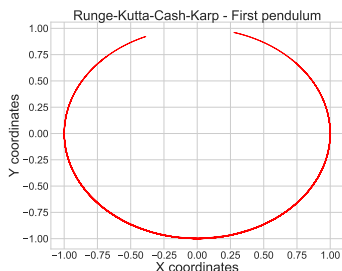
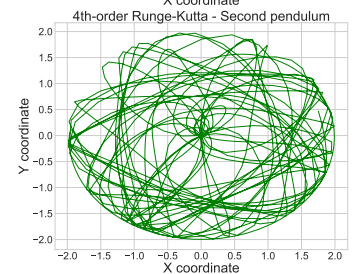
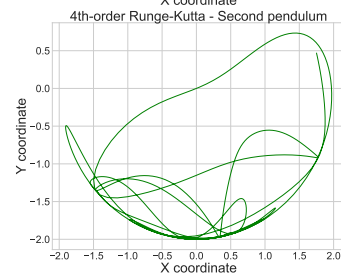
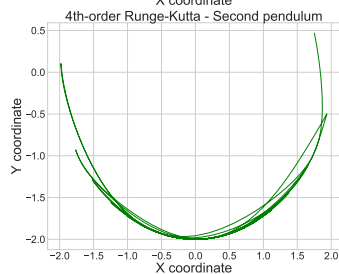
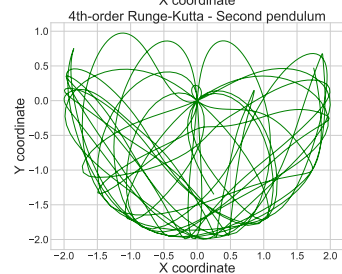
89. ábra. Runge-Kutta Damp.



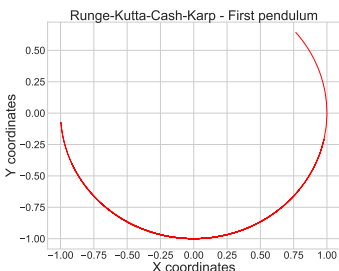
90. ábra. Runge-Kutta Damp.-Driv.



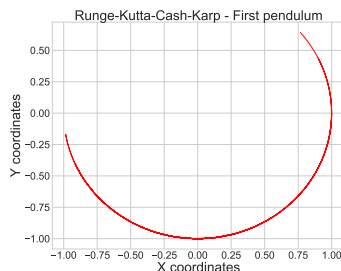
91. ábra. Runge-Kutta Driv.



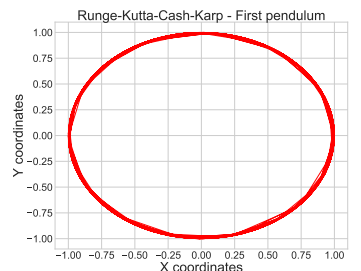
92. ábra. R-K-C-K Mat.



93. ábra. R-K-C-K Damp.



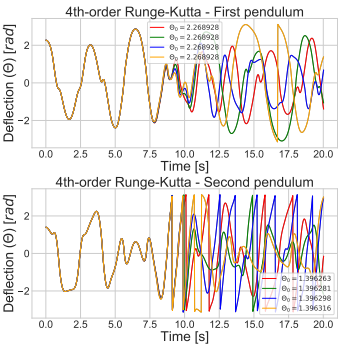
94. ábra. R-K-C-K Damp.-Driv.



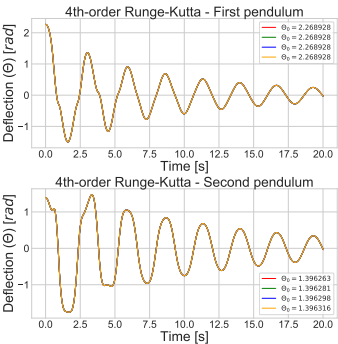
95. ábra. R-K-C-K Driv.



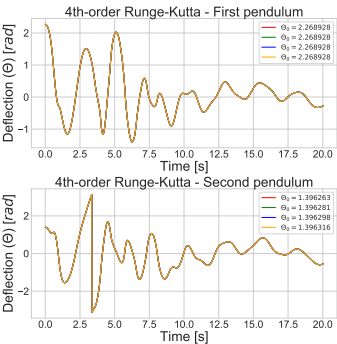
B.6. Kaotikus viselkedés, dupla inga



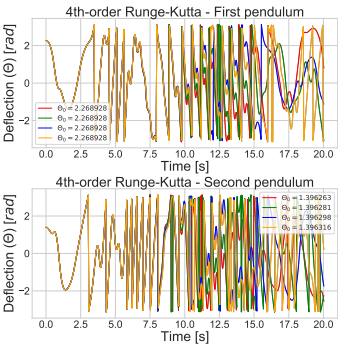
96. ábra. Runge-Kutta  
Mat.



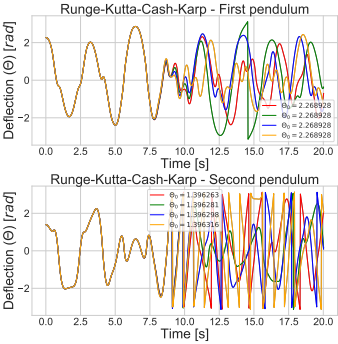
97. ábra. Runge-Kutta  
Damp.



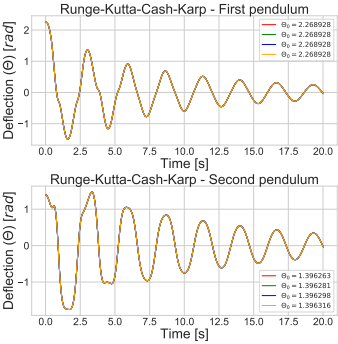
98. ábra. Runge-Kutta  
Damp.-Driv.



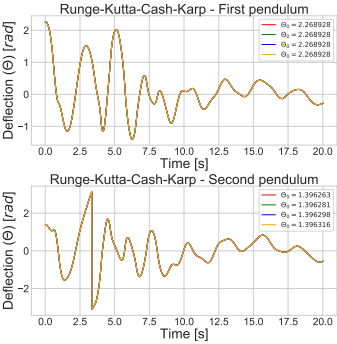
99. ábra. Runge-Kutta  
Driv.



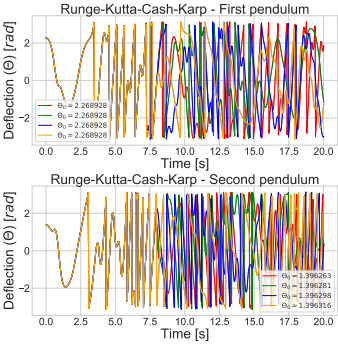
100. ábra. R-K-C-K  
Mat.



101. ábra. R-K-C-K  
Damp.



102. ábra. R-K-C-K  
Damp.-Driv.



103. ábra. R-K-C-K  
Driv.