# Ingák

## Számítógépes szimulációk fn1n4i11/1

Csabai István, Stéger József

ELTE
Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék
Email: csabai@complex.elte.hu, steger@complex.elte.hu

A harmonikus oszcillátor a rezgő mozgások idealizált változata. Az előző alkalommal bemutatott *Euler-Cromer-algoritmus* a legegyszerűbb numerikus módszer, amelyikkel ez stabilan szimulálható.
Ezen a gyakorlaton a következő javításokat végezzük el az ingamozgás példáján:

- realisztikusabb inga megvalósítása a csillapítás és a nagy kitérések nemlinearitásának figyelembevételével,
- pontosabb numerikus algoritmus használata a *Runge-Kutta-módszer* és az *adaptív lépéshossz változtatás* bevezetése.
- Vizualizáció OpenGL segítségével.

## ODE emlékeztető

- a tavaly tanultak,
- a Numerical Recipes 16. fejezete,
- rezgőmozgás és káosz.

Az *Euler-* és az *Euler-Cromer-módszer* $\mathcal{O}(\tau^2)$ pontosságú, míg a 4-ed rendű *Runge-Kutta-módszer* hibája $O(\tau^5)$.

Az ideális inga mozgásegyenlete

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}\theta,$$

ami a csillapítást figyelembe vételével bővíthető

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}\theta - q\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t},$$

illetve periodikus gerjesztő erő alkalmazása mellett alakja

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}\theta - q\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + F_D \sin(\Omega_D t).$$

**A paraméterek jelentése**

- $q$: a légellenállási/súrlódási együttható,
- $F_D$: a külső periodikus gerjesztő erő amplitúdója,
- $\Omega_D$: a gerjesztő erő szögfrekvenciája és
- $\Omega = \sqrt{g/l}$ az inga sajátfrekvenciája.

Kritikus csillapításról beszélünk, ha $\Omega = q/2$, illetve a rendszer túlcsillapított, ha $\Omega < q/2$. A csillapítás hatására a következő tranziens viselkedés áll fenn:

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-qt/2} \sin\left(\sqrt{\Omega^2 - q^2/4}\,t + \phi\right).$$

A tranziens lecsengése után a gerjesztő erő vezérli a rendszert. Kis kitérésekre (lineáris közelítés) a modell analitikusan megoldható:

$$\theta(t) = \frac{F_D \sin(\Omega_D t + \phi)}{\sqrt{(\Omega^2 - \Omega_D^2)^2 + (q\Omega_D)^2}}.$$

**Fizikai inga (a nagy kitérések esete)**

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}\sin(\theta) - q\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + F_D \sin(\Omega_D t)$$

A rendszert kaotikus mozgás jellemzi.

Például $l = 9.8, q = 0.2, \Omega_D = 0.6666, F_D = 1.2, \theta(0) = 0.2, \omega(0) = 0.$

Az OpenGL:

- Ingyenes cross-platform (win,lin,mac) grafikus könyvtár,
- grafikus kártyákra van optimalizálva,
- számos programozási nyelv támogatott: C, C++, Java, Fortran, ...
- a GUI (ablakok, menu, stb) a GLUT kiterjesztés része.
- Eseményvezérelt: egy végtelen ciklus a felhasználó akcióit várja.
- Események kezelése: *callback funtions*.

## Hasznos segédanyagok

- Reference Manual, OpenGLről magyarul.
- Learning guide ("Red Book"),
- GLUT: programozási interfész az OpenGLhez,

## További játékos példák

- 3D kocka
- Forgó négyzet

A megosztott példakód tartalma:

### `pendulum.cpp`

- Periodikusan gerjesztett, csillapított inga mozgásának szimulátora (adaptív RK).
- A kis kitérések közelítése opcionálisan választható.

Függőség: `cpl`

### `pendulum-gl.cpp`

- A mozgás szimulációja, mint az előző megvalósításban.
- A mozgás folyamatos ábrázolása, és a számítás szinkronizációja.

Függőség: `cpl`, `GL`, `glut`

1. A példakód megfelelő átalakításával, tanulmányozzuk az ingamozgás különböző közelítéseit (matematikai, csillapított, gerjesztett, fizikai) és ábrázoljuk a tipikus viselkedések diagramjait:
    - kitérés-idő,
    - sebesség-idő,
    - energia-idő valamint
    - fázistér (kitérés-sebesség).
2. Hasonlítsuk össze, mennyire érzékeny a legegyszerűbb matematikai illetve a legösszetettebb fizikai, csillapított, gerjesztett inga a választott numerikus differenciálegyenlet megoldó módszerekre, úgy mint
    - az *Euler-módszer*,
    - az *Euler-Cromer-módszer*,
    - az egyszerű *Runge-Kutta-módszer*, illetve
    - a *Runge-Kutta-módszer* lépéshossz változtatással.
3. A wikipedia cikk alapján alakítsuk át a mintakódot úgy, hogy kettős ingát szimuláljon! Vizsgáljuk a trajektóriákat és fázisteret különböző paraméter-beállítások mellett, illetve próbáljuk meg rekonstruálni az utolsó ábrán látható átbillenési jelenség fázisterét!