Hálózatok

Máthé Marcell Tibor
Tuhári Richárd

2017

1. Hálózati alapmennyiségek

- N: *csúcsok száma (number of nodes, number of vertexes)*
- E: *élek száma (number of edges, number of links)*
- d: *fokszám (degree of nodes)*
- $\langle d \rangle = \frac{2E}{N}$*: átlagos fokszám (avarage degree)*
- $p = \frac{2E}{(N)(N-1)} \approx \frac{2E}{N^2}$*: élszáműrűség (edge density connection probability)*
- $\rightarrow \langle d \rangle = pN$
- k_i *szomszédok száma (number of neighbours)*
- $\frac{(k_i)(k_i-1)}{2}$ *a szomszédok közötti összes lehettséges élek száma ,n a meglévő élek száma*
- $C_i = \frac{2n}{(k_i)(k_i-1)}$ *: klaszterezettségi együttható (clustering coefficient)* Megadja, hogy egy csúcs két szomszédját kiválasztva mekkora valószínűsággel vannak összakötve
- Gráfkomponens: *Azon csúcsok maximális halmaza, amelyeken át tetszőleges két csúcs elérhető*
- Hálózatszélesség: Az összes lehettséges pont-pont távoltág közül a leghoszabb, a legrövidebbekből (leghoszabb legrövidebb út)

2. Erdős-Rényi hálózat

Erdős-Rényi hálózat/modell (classical random graf/uncorrelated random graph)

Gilbert-féle definíció: N csúcs, E élek véletlenszerűen (N nodes, E edges randomly)

Erdős-Rémyi-féle definíció: N csúcs, p élszámsűrűség (N nodes, p edge probability)

$N \rightarrow \infty$ esetben a két definíció ugyan az lesz.

Erdős-Rényi hálózatban a klaszterezettségi együttható értéke pont C=p=$\frac{\langle k \rangle}{N}$
Ha az i-edik csúcs k-hoz van hozzákötve, akkor N-1-k-hoz nincs. p valószínűsége van minden élnek, így az előbbi valószínűsége binomiális eloszlást követ:

$$prob(k_i = k) = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k} \tag{1}$$

Ha, $N \rightarrow \infty$ és $p \rightarrow 0$,akkor ebben az esetben ez Poisson-eloszlás lesz.

$$prob(k_i = k) = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!} \tag{2}$$

$$\binom{N-1}{k} = \frac{(N-1)!}{k!(N-1-k)!} \quad (3)$$

Stirling formula

$$ln(n!) = n \cdot ln(n) - n \quad (4)$$

Ekkor az (1)-es képlet így alakul

$$\rightarrow (N-1) \cdot ln(N-1) - (N-1) - k \cdot ln(k) +$$

+ k -(N-1-k)$\cdot ln(N-1-k) + (N-1-k) + k \cdot ln(p) + (N-1-k) \cdot ln(1-p) =$ (5)

$$= k(ln\frac{(N-1-k)p}{k(1-p)}) - N(ln\frac{N-1-k}{(N-1)(1-p)}) + 1(lnN - 1 - k(N-1)(1-p)) = \quad (6)$$

$$k \cdot ln(\langle k \rangle) - k \cdot ln(k) + ... \quad (7)$$

3. Skálafüggetlen/Scale Free hálózat

A lerakott új csúcsok nagyobb valószínűséggel csatlakoznak azokhoz a már meglévő csúcsokhoz, amiknek több éle van.

$$P = \frac{k_i}{\sum_j k_j} \quad (8)$$

Legyen m, az egy új csúcs által behozott élek száma. Ekkor

$$\frac{dk_i}{dt} = m\frac{k_i}{\sum_j k_j} \quad (9)$$

kell m szorzó, hiszen akárhányadik kapcsolódására választhatja p valószínűséggel a pontokat.

Ha a kezdettől számítva minden t-ben bejön egy új csúcs, ami hoz magával m élt, akkor

$$\sum_j k_j = 2mt \quad (10)$$

(2, hiszen mindegyik oda-vissza él)

Ezt visszaírva a fentebbibe,

$$\frac{dk_i}{dt} = \frac{k_i}{2t} \quad (11)$$

és

$$ln(k_i) = \frac{1}{2}ln(t) + C \quad (12)$$

C-t $\frac{m}{\sqrt{t_i}}$-nek választva, ahol t_i az i-edik csúcs becsatlakozásánal időpontja,

$$k_i = m(\frac{t}{t_t})^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

Ekkor annak a valószínűsége, hogy az i-edik csúcs élszáma nagyonn egy adott k értéknél így alakul:

$$P(k_i > k) = P(t_i < \frac{mt}{k^2}) = 1 - P(t_i > \frac{mt}{k^2}) \tag{14}$$

Ha m_0 az az érték, amennyi csúccsal kezdtünk, akkor

$$P(t_i) = \frac{1}{m_0 + t} \tag{15}$$

és

$$P(k_i < k) = 1 - (\frac{mt}{k^2} \frac{1}{m_0 + t}) \tag{16}$$

$$\frac{d}{dk} P(k_i < k) = P(k_i = k) = \frac{2m^2 t}{k^2} \frac{1}{m_0 + t} \tag{17}$$

4. Kis Világ modell

4.1. Kis Világ tulajdonság

A fokszám logaritmikusan arányos a gócok számával. d log(N)

4.2. A modell története

-1967 Stanley Milgram kísérlete csomag küldése ismerősökön keresztül Omaha->Boston átlagosan 5-6-os lépésszám.

-Később facebook-ra 2010-ben 4 lépés.

4.3. Általános kis világ modell

Két dolgot kell tudjon:

- Kis Világ Tulajdonság (Small World Property)
- Magas Klaszterezettség valamihez képest (High Clustering)

5. Összefoglaló

5.1. Mit tud az Erdős-Rényi modell?

L lépésnél és N csúcsnál: $N \ \langle k \rangle^L \rightarrow$ d log(N) $\rightarrow$ tudja a kis világ tulajdonságot $C_i, p = \frac{2E}{N(N-1)} \quad \frac{2E}{N^2} = \frac{\langle k \rangle}{N}$ $\rightarrow$ nem tudja a magas klaszterezettséget

5.2. Mit tud az Kis Világ modell?

Vegyünk wgy kör mentén N darab pontot. Legyen a "k" fokszám rögzített, ami páros. Ekkor mindkét irányba egy csúcs k/2 szomszédjával van összekötve. Válasszunk ki, q kis valószínűséggel egy csúcsot és annak az egyik élének másik végpontját rakjuk át máshová. Ez q mértékben változtatja meg a klaszterezettségi együtthatókat. $\rightarrow$ Logaritmussal mennek az élek.

5.3. Mit tud a Skálafüggetlen modell?

Jó a random, de rossz a célzott támadások ellen.

	Kis Világ Tulajdonság	Magas Klaszterezettség	Magas d_{max}
E-R	+	-	-
S-W	+	+	-
S-F	+	-	+

Ha valamit szeretnénk: (pl adott kezdéssel, ha N csúcsot akarunk E éllel, akkor mire állítsuk m értékét stb.)

$$N = m_0 + tE = m * t \tag{18}$$

$$N = m_0 + \frac{E}{m} \tag{19}$$