Feladatok Fourier-sorokkal

– 2018. október 1.–

Feladatok

1. Legyenek $x_1(t)$ és $x_2(t)$ periodikus jelek T_1 és T_2 alapperiódussal. Milyen feltételnek kell teljesülnie ahhoz, hogy az összeg $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ is periodikus legyen, és ekkor mi lesz a periódusidő T?

2. Sorolja fel a Fourier-sorfejtés definíciói alapján felfedezhető szimmetriatulajdonságokat! Hogyan változnak a Fourier-sor együtthatói az időtükrözés illetve az időeltolás hatására? Hogyan változnak szinuszos moduláció után? Milyen hatással van a differenciálás a jel Fourier-komponenseire? *Megjegyzés:* A szabályok belátása után numerikusan is vizsgálja meg a fenti tulajdonságokat. Ehhez a következő feladat jeleit is használhatja.

3. Fejtse az alábbi periodikus jeleket Fourier-sorba, és ábrázolja az együtthatókat! Hasonlítsa össze az eredeti jelet és a sorfejtésből egyre több tagot felhasználó visszaállított jelet. Vizsgálja meg, hogyan változik a visszaállított és az eredeti jel különbsége!

   1. τ talpszélességű és T periódusidejű négyszögjel.
   2. fűrészfog jel.
   3. $f(x) = |x|$, ha $x \in [-\pi; \pi]$, és $f(x + 2\pi) = f(x)$ egyébként.
   4. $f(x) = 1 + x$, ha $x \in [-\pi; \pi]$, és $f(x + 2\pi) = f(x)$ egyébként.
   5. $f(x) = x^2$, ha $x \in [-\pi; \pi]$, és $f(x + 2\pi) = f(x)$ egyébként.
   6. $f(x) = \pi^2 - x^2$, ha $x \in [-\pi; \pi]$, és $f(x + 2\pi) = f(x)$ egyébként.
   7. $f(x) = (x - 1)(x - 3)$, ha $x \in [1; 3]$, és $f(x + 2) = f(x)$ egyébként.
   8. $f(x) = x$, ha $x \in [0; 1]$, és $f(x + 1) = f(x)$ egyébként.
   9. $$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-\pi; 0] \\ 1 & x \in [0; \pi]. \end{cases}$$
   10. $$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-3; 0] \\ 1 & x \in [0; 3]. \end{cases}$$
   11. $$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1; 0] \\ 1/2 & x = 0 \\ x & x \in [0; 1]. \end{cases}$$
   12. $$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-2; 0] \\ x & x \in [0; 2]. \end{cases}$$
   13. $$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) & x \in [0; T/2] \\ 0 & x \in [T/2; T]. \end{cases}$$

   A példában megtalálható periodikus jelalakok gazdag „sokaságot” alkotnak. Vizsgálva hibafüggvény menetét, lehet-e valamit mondani valamit az eredeti jelek alakjáról, pusztán a hibafüggvény alakjából?

4. A szimmetriatulajdonságokat és a linearitást alapul véve konstruálja meg a 3.1 együtthatóinak ismeretében algoritmikusan a fűrészfog jel együtthatóit!

5. Adott két ugyanazzal a T_0 periódusidővel jellemezhető jel $h(t)$ és $x(t)$. A Fourier-soraiknak az együtthatói rendre a_k illetve b_k. Lássa be, hogy az $y(t) = h(t)x(t)$ Fourier-együtthatóira c_k-kra teljesül a konvolúciós összeg.

$$c_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}.$$

6. Határozza meg az alábbi diszkrét jelsorozatok amplitudó- és fázisspektrumait:
   1. $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n-1]$,
   2. $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n \cos\frac{\pi n}{4} u[n-2]$,
   3. $x[n] = \mathrm{sinc}(2\pi n/8)\mathrm{sinc}\left(\frac{2\pi(n-4)}{8}\right)$,
   4. $x[n] = \sin(0,1\pi n)(u[n] - u[n-10])$,
   5. $x[n] = \mathrm{sinc}^2\frac{\pi n}{4}$.

7. Határozza meg az alábbi Fourier-transzormáltak segítségével az $x[n]$ jelsorozatokat.
   1. $X(e^{j\omega}) = \delta(\omega) - \delta\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) - \delta\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)$,
   2. $X(e^{j\omega}) = 1$, ha $0 \leq |\omega| \leq 0,2\pi$, illetve $X(e^{j\omega} = 0$ ha $0,2\pi < |\omega| \leq \pi$,
   3. $X(e^{j\omega}) = \frac{2|\omega|}{\pi}$ ha $0 \leq |\omega| \leq \frac{\pi}{2}$ és $X(e^{j\omega}) = 0$ ha $\frac{pi}{2} < |\omega| \leq \pi$,
   4. $\Delta\omega > 0$ paraméter és $\omega_c > \frac{\Delta\omega}{2}$ mellett a spektrum $X(e^{j\omega}) = 0$ ha $\omega_c - \frac{\Delta\omega}{2} \leq |\omega| \leq \omega_c + \frac{\Delta\omega}{2}$, és egyébként $X(e^{j\omega}) = 0$.

8. Legyen adott a $x[n]$ jelsorozatához tartozó Fourier-transformált $X(e^{j\omega})$. Határozza meg ennek ismeretében a lenti jelsorozatok Fourier-transzformáltját:
   1. $x[n] = 2x[n+2] + 3x[3-n]$,
   2. $x[n] = (1 + x[n])\cos(0,2\pi n + \pi/6)$,
   3. $x[n] = 2e^{j0,5\pi(n-2)}x[n+2]$,
   4. $x[n] = \frac{x[n] - x^*[-n]}{2}$,
   5. $x[n] = j^n x[n+1] + j^{-n}x[n-1]$.