Feladatok a z-transzformáció témaköréből

– 2018. október 15.–

Feladatok

1. Határozza meg az alábbi jelsorozatok z-transzformáltját, állapítsa meg a zérushelyeket, a pólusokat és a konvergenia területét.
    1. $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n (u[n] - u[n-10])$,
    2. $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$,
    3. $x[n] = (5)^{|n|}$,
    4. $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos(\pi n/3) u[n]$.
2. Kauzális jelsorozatok z-transzformáltjára meghatározott kifejezés ellenőrzésére a `filter()` függvényt alkalmazhatjuk. Legyen a $x[n]$ kauzális sorozat transzformáltja az alábbi racionális kifejezés $X(z) = B(z)/A(z)$.
    1. Lássa be, hogy az `octave` formalizmusában felírt kódrészlet az $x[n]$ első $N+1$ elemét generálja. Jelölje az $A(z)$ illetve a $B(z)$ polinom együtthatóinak vektorát a és b.
       `x = filter(b, a, [1, zeros(1, N)])`
    2. Határozza meg a $x[n] = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right] u[n]$ sorozathoz $X(z)$-t.
    3. Ellenőrizze az eredményeket numerikusan.
3. Bizonyítsa be, hogy $x[n] = (r^n \sin \omega_0 n) u[n]$ esetén $X(z) = \frac{r(\sin \omega_0) z^{-1}}{1 - 2(r \cos \omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}}$, és a konvergencia feltétele $|z| > r$.
4. Parciális törtekre bontás segítségével határozza meg az alábbi z-transzformáltakhoz tartozó jelsorozatokat:
    1. $X(z) = \frac{1 - \frac{1}{3} z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1})}$, minden lehetséges konvergenciaterület mellett.
    2. $X(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}}$ és $x[n]$ kauzális.
    3. $X(z) = \frac{1}{(1 - 0{,}5 z^{-1})(1 - 0{,}25 z^{-1})}$ és $x[n]$ abszolút felösszegezhető.
5. Jelölje $X(z)$ a $x[n] = x_R[n] + j x_I[n]$ sorozat z-transzformáltját. Bizonyítsa be, hogy az alábbi transzformációk hatása:
    1. $x^*[n]$: $X^*(z^*)$,
    2. $x[-n]$: $X(1/z)$,
    3. $x_R[n]$: $\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$,
    4. $x_I[n]$: $\frac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)]$.

6. Legyen $x[n]$ valós értékű, abszolút felösszegezhető jelsorozat. Az autokorrelációs függvényt definiáljuk:

$$r_{xx}[l] = \sum_n x[n]x[n-l].$$

Legyen $x[n]$ z-transzformáltja $X(z)$ és a konvergenciatartomány $\alpha < |z| < \beta$. Lássa be, hogy

   1. az autokorrelációs függvény z-transzformáltja: $R_{xx}(z) = X(z)X(z^{-1})$. Ez hol konvergens?
   2. Legyen $x[n] = a^n u[n]$ és $|a| < 1$. Határozza meg $R_{xx}(z)$-t és vázolja fel a zérushelyeket, pólusokat és a konvergenciatratományt.
   3. Határozza meg $r_{xx}[l]$-t is.

7. Egy lineáris időinvariáns rendszer $x[n] = u[n]$-re adott válasza $y[n] = 2(1/3)^n u[n]$.

   1. Határozza meg a rendszer súlyfüggvényét $h[n]$-t.
   2. Mi lesz az $y[n]$ válasz, ha a bemenet $x[n] = (1/2)^n u[n]$.
   3. Ellenőrizze az eredményt a `filter()` függvény segítségével.

8. Írja le a rendszert az alábbi differencia egyenlet

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n] - \frac{1}{1024}x[n-10].$$

   1. Határozza meg a rendszer $H(z)$ transzfer függvényt.
   2. Keressen a fentivel ekvivalens rendszert, más differencia egyenlettel.