Pál Balázs
UXB26I

Véletlen fizikai folyamatok
6. házifeladat

2019. március 27.

1. FELADAT

K: *Kétségbeesett telefon érkezik a rendőrségre. A közelben levő erdőség közepén egy család táborozott. Este 9-kor lefeküdtek, s reggel hétkor arra ébredtek, hogy 3 éves gyerekük eltűnt. Feltéve, hogy nem egy farkas, vagy egy emberrabló az eltűnés oka, határozzuk meg, hogy a rendőrség prioritása mekkora terület gyors átkutatása kell legyen!*

1.1. A Brown-mozgás elméletével

A feladat megoldásához egyértelműen a Brown-mozgás Langevin-féle elméletét használhatjuk fel, ahol most a kisgyereket, mint bolyongó részecskét képzelhetjük el. Ismert, hogy egy bolyongó részecske várható eltávolodási távolsága a kezdőállapottól a következő módon adható meg:

$$(\Delta x)^2 = 2\tau D \tag{1}$$

Ahol τ a mozgás vizsgált időhossza, míg D a közegre vonatkoztatott karakterisztikus mennyiség, a diffúziós együttható. Ez megadható a kinetikus szóráselmélet felhasználásával a következő módon:

$$D = \frac{1}{3} l \langle v \rangle \tag{2}$$

Ebben l a részecske szabad úthossza, $\langle v \rangle$ pedig sebességének várható értéke. Ha meg tudjuk becsülni valahogy ezen két értéket a jelenlegi példában, azzal megkaphatjuk a gyermek, erdőre vonatkoztatott diffúziós együtthatóját. Ebből pedig egyenes úton kiszámíthatjuk a sátortól való eltávolodás várható távolságát. Mivel a mozgás - feltételezhetően - csak a Föld felszínén történt, azonban ott bármilyen irányban, ezért az átvizsgálandó terület egy körív által határolt felületrész, melynek sugara a kiszámolt Δx távolság lesz.

1.2. A keresett mennyiségek becslése

Az emberek optimális, preferált haladási sebessége széles határok között változik, mindenki számára ez az érték más és más. Egy 3 éves gyermek számára több kutatás alapján az optimális sebesség 0.5 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ és kb. 1 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ között változik[1][2][3]. Én itt közel a felső határt, a 0.9 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ értéket fogom használni, ennek okára a következő 1.3 részben térek ki.
A 3 éves gyeremekek szabad úthosszának, azok lépéseinek hosszával közelíthetjük. Ezt egyéb kutatások alapján kb. 30-45 cm értékűre becsülhetjük[4]. Maximális értékként a 45 cm = 0.45 m lépéshosszt fogom a számításokban használni.
Ezen két érték becslésével adhatunk egy közelítést az átvizsgálandó terület sugarára, ha τ időhosszt a feladtban is szereplő maximális időhossznak vesszük. Ez este 9 és reggel 7 között eltelt idő: $\tau = 10$ óra. Ekkor az átvizsgálandó terület sugara:

$$\Delta x = \sqrt{2\tau \cdot \frac{1}{3} l \left\langle v \right\rangle} = \sqrt{2 \cdot 10 \text{ óra} \cdot \frac{1}{3} \cdot 0.45 \text{ m} \cdot 0.9 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \sqrt{2 \cdot 36000 \text{ s} \cdot \frac{1}{3} \cdot 0.45 \text{ m} \cdot 0.9 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}} =$$
$$= \sqrt{24000 \text{ s} \cdot 0.45 \text{ m} \cdot 0.9 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \sqrt{9720 \text{ m}^2} = \boxed{98.59 \text{ m}} \tag{3}$$

Magyarán nagyjából $100m$ sugarú területet kell gyorsan átvizsgálnia a rendőrségnek.

1.3. A valódi értékek

A valóságban egy 3 éves gyermek nem véletlen módon bolyong, ahogy a Brown-mozgás során mozgó részecskék. Sokkal hosszabb szabad úthosszal képes lineárisan egy irányba tartani, mint amivel fentebb is számoltam. Ellenben nem is képes folyamatosan 10 órán át tartó mozgásra, sokkal gyorsabban, akár 1-1.5 km megtétele után is elfárad. Nem beszélve arról a tényről, hogy éjszaka van, hideg. Ezek mind olyan tényezők, melyeket egy valódi helyzetben bele kell majd kalkulálni a számításainkba.

Véletlen fizikai folyamatok
6. házifeladat

2. FELADAT

K: *Csön-csön gyűrűt játszanak négyen. A gyűrűt a körben álló játékosok az óramutató járásával egy irányban adják tovább. Az 1-es gyereknél indul a gyűrű, s a továbbadás rátája* w.

1. *Írjuk fel az egyenletet annak a valószínűségére, hogy a gyűrű az i-edik gyereknél van!*
2. *Határozzuk meg a stacionárius megoldást!*
3. *Határozzuk meg a rendszer relaxációs idejét (először próbáljuk megbecsülni az értékét)!*

2.1. A Master-egyenlet

Értelmezhetjük a feladatot úgy, hogy egy időben fejlődő, diszkrét rendszer négy különböző állapotban tud tartózkodni. Mikor az utolsó szintet is eléri, onnan csak az első szintre tud w rátával visszaugrani. Értelmezhetjük w_0 visszacsúszási rátát is, hogy a sorbanállás példájához hasonló formájú egyeneltek kapjunk, azonban $w_0 = 0$ ebben az esetben. Ennek fényében írjuk fel az egyes valószínűségeket:

$$\frac{\partial P_1(t)}{\partial t} = -(w - w_0) P_1(t) + wP_4(t) = -wP_1(t) + wP_4(t) \tag{4}$$

$$\frac{\partial P_2(t)}{\partial t} = -(w - w_0) P_2(t) + wP_1(t) = -wP_2(t) + wP_1(t) \tag{5}$$

$$\frac{\partial P_3(t)}{\partial t} = -(w - w_0) P_3(t) + wP_2(t) = -wP_3(t) + wP_2(t) \tag{6}$$

$$\frac{\partial P_4(t)}{\partial t} = -(w - w_0) P_4(t) + wP_3(t) = -wP_4(t) + wP_3(t) \tag{7}$$

Ezeket általánosan felírhatjuk a következő két egyenlet segítségével:

$$\frac{\partial P_n(t)}{\partial t} = -wP_n(t) + wP_{n-1}(t) \qquad \text{ahol } n > 1 \tag{8}$$

$$\frac{\partial P_1(t)}{\partial t} = -wP_1(t) + wP_4(t) \tag{9}$$

Ennek megoldására és a stacionárius pont megkeresésére felhasználhatjuk a generátorfüggvényeket.

2.2. Generátorfüggvény formalizmus

Vezessük be a fenti $P_n(t)$ eloszlásfüggvény Laplace-transzformáltját:

$$G(s,t) = \sum_{n\,=\,0}^{\infty} e^{-sn} P_n(t) \tag{10}$$

Melynek keressük stacionárius pontjait, amik az alábbi formában fogalmazhatóak meg:

$$\frac{\partial G(s,t)}{\partial t} = \sum_{n\,=\,0}^{\infty} e^{-sn} \frac{d}{dt} P_n(t) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial G^{(\mathrm{st.})}(s,t)}{\partial t} \overset{!}{=} 0 \tag{11}$$

A fenti (8) és (9) egyenletek felhasználásával fejezzük ki a generátorfüggvény (11)-es összefüggésben szereplő deriváltját:

$$\frac{\partial G(s,t)}{\partial t} = -wP_1(t) + wP_4(t) - w \sum_{n\,=\,2}^{4} e^{-sn} P_n(t) + w \sum_{n\,=\,2}^{4} e^{-sn} P_{n-1}(t) \tag{12}$$

Jelen esetben a generátorfüggvény fenti alakja az $]1,\ 4]$ intervallumon lesz értelmezve, ugyanis a rendszer összesen 4 szintből áll, értéke minden máshol 0. Ekkor a (12)-es egyenlet átírható a következő formába:

$$\frac{\partial G^{(\mathrm{st.})}(s,t)}{\partial t} = -wP_1(t) + wP_4(t) - wG(s,t) + we^{-s}G(s,t) = 0 \tag{13}$$

Mely a stacionárius esetben 0 értéket kell adjon. Ennek felhasználásával kifejezhetjük $G^{(\mathrm{st.})}(s,t)$-t:

$$G^{(\mathrm{st.})}(s,t) = \frac{\cancel{w}P_1(t) - \cancel{w}P_4(t)}{\cancel{w}e^{-s} - \cancel{w}} = \frac{P_1(t) - P_4(t)}{e^{-s} - 1} \tag{14}$$

Tehát a továbbadás rátájától nem fog függeni a rendszer stacionárius helyzete! Ez valamilyen módon logikus is. A gyerekek egymásnak adogatják körbe a gyűrűt, folyamatosan, de mindegyikük azonos sebességgel. Mindegy, hogy milyen gyorsan halad a gyűrű, a mozgása időben lelassítva, vagy felgyorsítva pontosan ugyanolyan karakterisztika szerint fog történni. A $G^{(\mathrm{st.})}(s,t)$-re vonatkozó normálási feltételből kifejezhetjük végül annak értékét, valószínűségektől mentes formában:

$$G^{(\mathrm{st.})}(s=0,t) = 1 \quad \rightarrow \quad P_1(t) - P_4(t) = 1 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{G^{(\mathrm{st.})}(s,t) = 0} \tag{15}$$

Az eredmény mindenképp elemzésre szorul. Egy lehetséges értelmezés az lehet, hogy a rendszer soha nem lesz nyugalomban, annak nincsen valódi egyensúlyi helyzete. Ez a felállás természetéből várható is. A gyerekek egymásnak adogatják sorrendben a gyűrűt, valamilyen w rátával. Ez így a végtelenségig járhat körbe, sehol nem fognak az egyes valószínűségek értékei csökkenni, egyik gyermek pozíciója sem értelmezhető magasabb, vagy alacsonyabb energiaszintnek. Így a rendszernek a relaxációs ideje is végtelennek mondható, hisz nincs egyensúlyi pozíciója.

Persze minden fenti számítás és magyarázat csak abban az esetben helyes, ha jól értelmeztem a „csön-csön-gyűrű" nevű gyerekjáték lényegét, amiben egyáltalán nem vagyok biztos...

3. FELADAT

K: *Legyen egy sztochasztikus változó, x, momentum-generátor függvénye $G(s)$. A normalizációból következik, hogy $G(0) = 1$, s tudjuk, hogy az x momentumai G deriváltjain keresztül kifejezhetők:*

$$\langle x \rangle = -\left.\frac{dG(s)}{ds}\right|_{s=0} \quad , \ldots , \quad \left\langle x^k \right\rangle = (-1)^k \left.\frac{d^k G(s)}{ds^k}\right|_{s=0}$$

A kumuláns generátor függvény a momentum-generátor függvény logaritmusa, $\Phi(s) = \ln(G(s))$, s a kumulánsokat a következőképpen kapjuk:

$$\langle \kappa_1 \rangle = -\left.\frac{d\Phi(s)}{ds}\right|_{s=0} \quad , \ldots , \quad \langle \kappa_k \rangle = (-1)^k \left.\frac{d^k \Phi(s)}{ds^k}\right|_{s=0}$$

Az első kumulánsokat könnyű kiszámolni, s egyszerű értelmük van:

$$\langle \kappa_1 \rangle = \langle x \rangle \quad , \quad \langle \kappa_2 \rangle = \left\langle x^2 \right\rangle - \langle x \rangle^2$$

Feladat: Számítsuk ki a 3. kumulánst (κ_3) a momentumokon keresztül! Mi lesz κ_3 értéke, ha x eloszlásfüggvénye szimmetrikus $[P(-x) = P(x)]$?

3.1. A 3. kumuláns kiszámítása

A harmadik kumuláns definícióját a feladat szövegében is leírt általános definíció segítségével fogalmazhatjuk:

$$\begin{aligned}
\kappa_3 &= (-1)^3 \left.\frac{d^3\Phi(s)}{ds^3}\right|_{s=0} = -\left.\frac{d^3\Phi(s)}{ds^3}\right|_{s=0} = -\left.\frac{d^3 \ln(G(s))}{ds^3}\right|_{s=0} = \\
&= -\frac{d^2}{ds^2}\left.\left(\frac{1}{G(s)}\frac{dG(s)}{ds}\right)\right|_{s=0} = -\frac{d}{ds}\left.\left[\frac{1}{G(s)}\frac{d^2G(s)}{ds^2} - \frac{1}{G^2(s)}\left(\frac{dG(s)}{ds}\right)^2\right]\right|_{s=0} = \\
&= -\left[\frac{1}{G(s)}\frac{d^3G(s)}{ds^3} - \frac{1}{G^2(s)}\frac{dG(s)}{ds}\frac{d^2G(s)}{ds^2} + \right. \\
&\left.\left. + \ 2\frac{1}{G^3(s)}\left(\frac{dG(s)}{ds}\right)^3 - 2\frac{1}{G^2(s)}\frac{dG(s)}{ds}\frac{d^2G(s)}{ds^2}\right]\right|_{s=0} = \\
&= \underbrace{-\left.\frac{1}{G(s)}\frac{d^3G(s)}{ds^3}\right|_{s=0}}_{\langle x^3 \rangle} \underbrace{+ \left.3\frac{1}{G^2(s)}\frac{dG(s)}{ds}\frac{d^2G(s)}{ds^2}\right|_{s=0}}_{-3\cdot\langle x^2 \rangle\cdot\langle x \rangle} \underbrace{- \left.2\frac{1}{G^3(s)}\left(\frac{dG(s)}{ds}\right)^3\right|_{s=0}}_{2\cdot\langle x \rangle^3} = \\
&= \boxed{\left\langle x^3 \right\rangle - 3\cdot\left\langle x^2 \right\rangle\cdot\langle x \rangle + 2\cdot\langle x \rangle^3}
\end{aligned} \tag{16}$$

Mely eredmény valóban a harmadik kumuláns értéke.

Ha a kérdéses x valószínűségi változó eloszlásfüggvénye azonban szimmetrikus, ennek értéke 0, ahogy minden másik, páratlan rendű kumuláns értéke is. Ez megindokolható a várható értékek elemzésével. Ha egy x valószínűségi változó eloszlása szimmetrikus, az azt jelenti, hogy x és $-x$ eloszlása megegyezik, tehát minden f függvényre:

$$\langle f(x) \rangle = \langle f(-x) \rangle \tag{17}$$

Bővítsük ki ezt arra az esetre, amikor $f(x) = x^n$:

$$\langle (x)^n \rangle = \langle (-x)^n \rangle = \langle (-1)^n (x)^n \rangle \tag{18}$$

Minden esetben, amikor n páratlan, akkor ez a következő alakot ölti:

$$\langle (x)^n \rangle = \langle -(x)^n \rangle = -\langle (x)^n \rangle \tag{19}$$

Ami kizárólag akkor lehetséges, ha

$$\boxed{\langle (x)^n \rangle = 0} \qquad \text{ha } n \text{ páratlan} \tag{20}$$

4. FELADAT

K: *Meredek hegyoldalban függőlegesen l távolságra vannak a kapaszkodók. A hegymászó w rátával lép felfelé, s w_0 annak a rátája, hogy lecsúszik a 0 szintre, ahonnan újra kezdi a mászást.*
Feladatok:

1. *Írjuk fel az egyenletet, amely meghatározza, hogy a hegymászó milyen P_n valószínűséggel van nl magasságban!*
2. *Használjuk a generátorfüggvény formalizmust a stacionárius eloszlás kiszámítására!*
3. *Határozzuk meg, hogy átlagosan milyen magasra jut a hegymászó!*
4. *Határozzuk meg az átlagos magasságot úgy, hogy származtatjuk az átlagos magasságra vonatkozó differenciálegyenletet, majd meghatározzuk a stacionárius megoldását?*

4.1. A Master-egyenlet

A rendszer időbeli fejlődését leíró Master-egyenletet felírhatjuk az órán is tanult módon, w és w_0 rátákkal jelölve a fel- és lefelé haladás rátáját. Az egyszerű sorbanállás példájához képest a különbség, hogy itt a rendszerből való távozás esetén a bent maradt igények száma nem egyel csökken, hanem 0-ra zuhan vissza. Ezt a következő módon írhatjuk fel:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(w + w_0) P_n(t) + wP_{n-1}(t) \qquad \text{ahol } t = nl \tag{21}$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -wP_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} w_0 P_i(t) \qquad \text{ahol } t = nl \tag{22}$$

A konkrét különbség a sorbanállás példájához képest, hogy itt $\frac{dP_n(t)}{dt}$ értéke nem függhet $w_0 P_{n+1}(t)$ mennyiségtől, ugyanis nincs egy szinttel történő visszacsúszás. Emellett viszont a 0 szintre akárhonnan visszazuhanhat a hegymászó, így egészen a végtelenig kell összegeznünk a $\frac{dP_0(t)}{dt}$ értékét meghatározó w_0 visszacsúszási rátákkal súlyozott valószínűségeket.
Hasonlóan az óraihoz, vezessük be a $q = \frac{w}{w_0}$ mennyiséget, mellyel átfogalmazhatóak az egyenletek:

$$\frac{1}{w_0}\frac{dP_n(t)}{dt} = -(q + 1) P_n(t) + qP_{n-1}(t) \tag{23}$$

$$\frac{1}{w_0}\frac{dP_0(t)}{dt} = -qP_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} P_i(t) \tag{24}$$

Ebben most $q < 1$, hiszen ez a feltétele annak, hogy a rendszer biztosan ne szálljon el a végtelenben és kialakulhasson valamilyen egyensúlyi helyzet is.

4.2. Generátorfüggvény formalizmus

Vezessük be a fenti $P_n(t)$ eloszlásfüggvény Laplace-transzformáltját:

$$G(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn} P_n(t) \tag{25}$$

Melynek keressük stacionárius pontjait, amik az alábbi formában fogalmazhatóak meg:

$$\frac{\partial G(s,t)}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn} \frac{d}{dt} P_n(t) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial G^{(\mathrm{st.})}(s,t)}{\partial t} \stackrel{!}{=} 0 \tag{26}$$

Az egyszerűség kedvéért normáljuk a fejlődési rátákat úgy, hogy $w_0 = 1$ értéket vegyen fel. Ennek segítségével megoldhatjuk könnyen a stacionaritási problémát:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G(s,t)}{\partial t} &= -qP_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} P_i(t) - (q+1) P_n(t) + qP_{n-1}(t) = \\ &= \underbrace{-qP_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} P_i(t)}_{[1]} \underbrace{- (q+1) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn} P_n(t)}_{[2]} \underbrace{+q \sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn} P_{n-1}(t)}_{[3]}\end{aligned} \tag{27}$$

Egyesével felírhatjuk a tagok értékét:

$$[1] = -qP_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} P_i(t) \tag{28}$$

$$[2] = -(q+1)\, G(s,t) \tag{29}$$

$$[3] = qe^{-s} G(s,t) \tag{30}$$

Visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G(s,t)}{\partial t} &= -qP_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} P_i(t) - (q+1)\, G(s,t) + qe^{-s} G(s,t) = \\ &= -qP_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} P_i(t) - \left[(q+1) + qe^{-s}\right] G(s,t)\end{aligned} \tag{31}$$

A **??**-ban megfogalmazott stacionaritási feltétel miatt felírhatjuk a kövekezőket:

$$G^{(\mathrm{st.})}(s,t) = \frac{-qP_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} P_i(t)}{(q+1) + qe^{-s}} \tag{32}$$

Hogy a számláló értékét meg tudjuk határozni q-val kifejezve, felhaaználjuk a követekező normálási feltételt:

$$G^{(\mathrm{st.})}(s=0,t) = \frac{-qP_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} P_i(t)}{(q+1) + q} = 1 \tag{33}$$

Amiből a következő összefüggést kapjuk:

$$-qP_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} P_i(t) = 2q + 1 \tag{34}$$

Tehát a generátorfüggvény végleges alakja:

$$G^{(\mathrm{st.})}(s,t) = \frac{2q+1}{(q+1) + qe^{-s}} \tag{35}$$

A generátorfüggvények ismert és tanult formalizmusa lehetővé teszi számunkra, hogy megadjuk a keresett $\langle n \rangle$ mennyiséget, ami a mászó által elért átlagos magasságot jelöli. Ez a (**??**) generátorfüggvény első momentuma:

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= -\left.\frac{\partial G^{(\mathrm{st.})}(s,t)}{\partial s}\right|_{s\,=\,0} = -\frac{d}{ds}\frac{2q+1}{(q+1)+qe^{-s}} = -\left(2q+1\right)\left.\frac{qe^{-s}}{\left((q+1)+qe^{-s}\right)^2}\right|_{s\,=\,0} = \\ &= \frac{(2q+1)\,q}{(2q+1)^2} = \frac{q}{2q+1} \end{aligned} \tag{36}$$

Mivel $q = \frac{w}{w_0}$, és $w_0 = 1$, ezért ez a következő alakba írható:

$$\boxed{\langle n \rangle = \frac{w}{2w+1}} \tag{37}$$

Tehát ilyen magasra jut a hegymászó átlagosan, mászás közben. Pl. $w = 0.9$ ráta esetén:

$$\langle n \rangle = \frac{0.9}{2 \cdot 0.9 + 1} = \frac{0.9}{2.8} \approx 0.32 \tag{38}$$

Tehát átlagosan sosem túl magasra... Ez várható is volt, hisz érezhetően sokkal kisebb az esélye a magasabb pontok elérésének az itteni, minden alkalommal 0 szintre zuhanás feltételével, mint az előző házifeladatban szereplő csak 1 szintet visszazuhanó mászás esetében. Az elején a $q < 1$ feltétel melyet kiszabtunk arra hivatkozva, hogy biztosítsuk a rendszer konvergenciáját valamilyen egyensúlyi pontba, láthatóan nem volt fontos. Ugyanis $w = w_0 = 1$

esetén is várható érték bőven 1 alatt marad. Sőt, tulajdonképpen bármekkora értéket választhatunk w számára, $\langle n \rangle$ nevezője mindig nagyobb lesz, mint annak számlálója, sosem fog elszállni a végtelenbe.

Felhasznált irodalom

[1] Dominique DeJaeger, Patrick A Willems, and Norman C Heglund. "The energy cost of walking in children". In: *Pflügers Archiv* 441.4 (2001), pp. 538–543.

[2] Aldis Run Larusdottir and AS Dederichs. "Evacuation dynamics of children–walking speeds, flows through doors in daycare centers". In: *Pedestrian and Evacuation Dynamics*. Springer, 2011, pp. 139–147.

[3] GA Cavagna, P Franzetti, and T Fuchimoto. "The mechanics of walking in children." In: *The Journal of physiology* 343.1 (1983), pp. 323–339.

[4] Simone V Gill et al. "The relationship between foot arch measurements and walking parameters in children". In: *BMC pediatrics* 16.1 (2016), p. 15.