Pál Balázs
UXB26I

Véletlen fizikai folyamatok
5. házifeladat

2019. március 18.

1. FELADAT

K: *Az atomreaktorokban keletkező, erősen sugárzó hulladékok tárolására a geológiailag stabil, gránit alapú ősmasszívumokat tekintik alkalmasak. Finnországban most épül egy ilyen, kb.* 500 *m mélybe menő barlangrandszer[1], amelybe kb.* 100 *éven keresztül tervezik felhalmozni a hulladékot, ami után az egészet betemetik. Tegyük fel, hogy a terület geológiailag valóban stabil, s a rádioaktív magok csak a gárniton keresztül történő diffúzión keresztül tudnak a felszínre jutni. Keressük ki gránit diffúziós együtthatóját nagyobb rendszámú atomokra és számítsuk ki, hogy mennyi idő elteltével fogunk rádioaktivitást észlelni a barlang felett a felszínen!*

1.1. Elméleti háttér

A diffúzió ilyen irányú számítását már az egyik beadandóban részleteztem, a továbbiakban annak az eredményére építek. Ismert, hogy a diffúzió definíció szerint az alábbi összefüggéssel írható le:

$$D = \frac{(\Delta x)^2}{2\tau} \tag{1}$$

Ahol D a diffúziós együttható, Δx a megtett úthossz, τ pedig a diffundálás alatt megtett idő, míg a részecske Δx távolságra eljutott. Ebből kifejezhető τ értéke D és Δx ismeretében:

$$\tau = \frac{(\Delta x)^2}{2D} \tag{2}$$

1.2. Sugárzó anyagok diffúziója gránitban

A nagy rendszámú elemek diffúziós együtthatójának ismerete a feladatban körüljárt téma miatt egy fontos kutatási területnek számít. A sugárzó anyagok hosszú távú tárolásához mindenképp szükséges ismeretnek számít ezen anyagok vizsgálata. Ezen motiváció nyomán készült kutatások alapján megkaphatjuk a feladat megoldásához szükséges adatokat. Név szerint a nehezebb, első sorban a radioaktív hulladékban előforduló sugárzó elemek diffúziós együtthatóját porózus anyagok, pl. gránit esetében. Ez az érték egyes modellek szerint nem konstans és akár nagy szóráshatáron belül is változhat a valóságban pl. egy radioaktív hulladéktárolóból indulva egy vastag gránit rétegen áthaladva[2]. Itt ennek ellenére az egyszerűség kedvéért egy átlagos konstans értékkel fogom közelíteni a számításaimban használt együtthatókat.
Az nagyobb méretű atomok/molekulák diffúziós együtthatója ezek alapján

$$D \approx \left[5 \cdot 10^{-15}, 5 \cdot 10^{-14}\right] \ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}} \tag{3}$$

nagyságrendbe esik[3][4]. Szintén az előzőek alapján az ^{233}U izotóp, gránitban történő diffúziójának együtthatója $D \approx 5 \cdot 10^{-15}\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$.
Egyéb mérésekből az egyes sugárzó atomok Van der Waals sugarai ismertek, így pl. az urán esetén ez $r_w = 186$ pm, így átmérőjének vehetjük az $a = 372$ pm értéket[5]. A ^{209}Po esetén $r_w = 197$ pm, míg a ^{222}Ra Van der Waals sugara pedig $r_w = 283$ pm[6], tehát viszonylag széles mérettartományt fognak át, hiába közel azonos a rendszámuk. Egy sugárzó hulladékgyűjtőben nyilvánvalóan több féle különböző sugárzó izotóp is található, melyek diffúziójához szükséges időtartamot mind azonos módon számíthatjuk. Itt most csak a már említett ^{233}U diffúziójára vonatkozó számítást végzem el.

1.3. A kívülre diffundálás ideje

A feladat szövege alapján azt kell kiszámítsuk, hogy a sugárzó részecske mennyi idő alatt várható, hogy keresztül diffundál az 500 m vastag gránitrétegen. Az ismert adatokat behelyettesítve a (2)-es egyenletbe meg is kaphatjuk a kérdéses időhosszt:

$$\tau = \frac{(\Delta x)^2}{2D} = \frac{(500\ \mathrm{m})^2}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-15}\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}} = \frac{2.5 \cdot 10^4\ \mathrm{m}^2}{10 \cdot 10^{-15}\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{10^4}{10^{-15}}\ \mathrm{s} = \frac{1}{4} \cdot 10^{19}\ \mathrm{s} = 79.275\ \text{milliárd év} \tag{4}$$

Ami a világegyetem jelenlegi életkorának több, mint 5-szöröse, tehát egy nagyon nagy szám. Az oka, hogy mégis csak 100 évre előre tervezik ezt a hulladék lerakót az, hogy a sugárzó részecskék nem csak ilyen diffúzión keresztül juthatnak át a gránitrétegen. A részecskék bomláskor nagy kinetikus energiát szerezhetnek, és így jóval megnövelve a szabad úthosszukat, jóval rövidebb idő után már kijuthatnak a gániton túlra is.

2. FELADAT

K: *Vizsgáljuk az előadáson tárgyalt 2 Ising spinből álló rendszer relaxációjának problémáját! Az előadáson megkaptuk a rendszer dinamikai mátrixát, s meghatároztuk a sajátvektorokat és a megfelelő sajátértékeket (A számolás megtalálható a kurzus honlapján „Ising spinek dinamikája" cím alatt is).*

1. *Ismerve az összes sajátvektort és sajátértékeket, határozzuk meg milyen valószínűséggel van a rendszer t időpontban az $s_1 = -1, s_2 = -1$ állapotban, ha a kezdeti állapot $s_1 = +1, s_2 = -1$ volt.*
2. *Számítsuk ki a rendszer átlagos mágnesezettségének $M(t) = \langle s_1 + s_2 \rangle$ időfejlődését, ha a kezdeti állapotban minden konfiguráció egyenlő $\left(\frac{1}{4}\right)$ valószínűséggel van jelen.*

2.1. Állapotok valószínűsége

Az órán is látott leírás alapján keressük a következő egyensúlyi helyzetet:

$$P^{(e)}(s_1, s_2) = \frac{1}{z} e^{-\beta E(s_1, s_2)} = \frac{1}{z} e^{\beta \mathcal{J} s_1 s_2} \tag{5}$$

Ahol $-\mathcal{J} s_1 s_2 \equiv \mathscr{H} = E$ a kölcsönhatás energiája, amiben $\mathcal{J}$ a rendszer egy pozitív skálafaktora. Bevezetve $\beta\mathcal{J} \equiv K$ mennyiséget, a z normálási faktort a következő feltétel alapján írhatjuk fel:

$$\sum_{s_1 = \pm 1} \sum_{s_2 = \pm 1} P^{(e)}(s_1, s_2) = \frac{1}{z} \sum_{s_1 = \pm 1} \sum_{s_2 = \pm 1} e^{\beta \mathcal{J} s_1 s_2} = 1 \tag{6}$$

Így kifejezhetjük z-t:

$$\begin{aligned} z = \sum_{s_1 = \pm 1} \sum_{s_2 = \pm 1} e^{-\beta E(s_1, s_2)} \equiv \sum_{s_1 = \pm 1} \sum_{s_2 = \pm 1} e^{\beta \mathcal{J} s_1, s_2} = \sum_{s_1 = \pm 1} \sum_{s_2 = \pm 1} e^{K s_1, s_2} = \\ = e^{K \cdot 1 \cdot 1} + e^{K \cdot 1 \cdot (-1)} + e^{K (-1) \cdot 1} + e^{K (-1) \cdot (-1)} = 2 \cdot \left(e^K + e^{-K}\right) \end{aligned} \tag{7}$$

Ebből végül az adott állapot valószínűsége előáll az alábbi módon:

$$P^{(e)}(s_1, s_2) = \frac{1}{z} e^{K s_1 s_2} = \frac{e^{K s_1 s_2}}{2 \cdot (e^K + e^{-K})} \tag{8}$$

3. FELADAT

K: *Meredek hegyoldalban függőlegesen l távolságra vannak a kapaszkodók. A hegymászó w rátával lép felfelé, s w_0 annak a rátája, hogy lecsúszik egy szintet, s onnan folytatja a mászást. Feladatok:*

1. *Írjuk fel az egyenletet, amely meghatározza, hogy a hegymászó milyen P_n valószínűséggel van nl magasságban!*
2. *Használjuk a generátorfüggvény formalizmust a stacionárius eloszlás kiszámítására!*
3. *Határozzuk meg, hogy átlagosan milyen magasra jut a hegymászó!*
4. *Van itt a hasonlóság a sorbanállás problémájával?*

Felhasznált irodalom

[1] *Onkalo spent nuclear fuel repository — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. [Online; accessed March 18, 2019]. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Onkalo_spent_nuclear_fuel_repository.

[2] Igor Medveď and Robert Černý. “Varying coefficients of diffusion of $^{133}Ba^{2+}$ and $^{137}Cs^{+}$ in granite”. In: *AIP Conference Proceedings*. Vol. 1978. 1. AIP Publishing. 2018, p. 080007.

[3] Kazuya Idemitsu et al. “Diffusivity of Uranium(VI) in Water-Saturated Inada Granite.” In: *MRS Proceedings* 257 (Jan. 1991). DOI: 10.1557/PROC-257-625.

[4] Tetsuji Yamaguchi et al. “Effective diffusivity of the uranyl ion in a granite from Inada, Ibaraki, Japan”. In: *Journal of contaminant hydrology* 26.1-4 (1997), pp. 109–117.

[5] A. Bondi. “van der Waals volumes and radii”. In: *The Journal of physical chemistry* 68.3 (1964), pp. 441–451.

[6] Manjeera Mantina et al. “Consistent van der Waals radii for the whole main group”. In: *The Journal of Physical Chemistry A* 113.19 (2009), pp. 5806–5812.