Pál Balázs
UXB26I

Véletlen fizikai folyamatok
1. házifeladat

2019. február 19.

1. FELADAT

A) feladatrész

K: *Próbáljunk emlékezni arra az eseményre, amivel kapcsolatban először gondoltunk véletlenszerűségre. Miért tekintettük az eseményt véletlennek, s mit gondoltunk a jelenség hátteréről?*

9-10 éves koromig bezárólag néha-néha édesapám szelvényeket vett az M1-en futó Luxor című szerencsejátékba. Ez egy szombat esti családi programként működött nálunk és ilyenkor mindegyikőnk kapott egy-egy szelvényt, amit ő maga kellett kitöltsön a játék során. Egy szelvényen két egymás alatti 5×5-ös négyzetben szerepeltek 1-90-ig nyerőszámok, és egy szám többször is, de legfeljebb háromszor fordulhatott elő rajta. A számokat a játék során egyesével sorsolták, géppel. Ha egy játékos szelvényén szerepelt egy kihúzott szám, azt azon karikázással jelölte. A cél az volt, hogy az egyik négyzet külső keretében, vagy az azon belüli 3×3-as mezőben minden számot eltaláljunk. A játék minden héten az első főnyeremény értékű találatig folytatódott, mely egy egész 5×5-ös négyzet megtöltését jelentette.
Ezen keresztül találkoztam először a „véletlen" fogalmával - és egyben a kezdetekben így ismerkedtem meg jobban a számokkal is. Megértettem, hogy mit jelent a „véletlen húzás" és azt is persze, hogy hiába húznak ki akár 35-40 számot is egy szerencsejáték során a 90-ből, milyen kis valószínűséggel nyerhet bármit is az ember rajtuk.

B) feladatrész

K: *Emlékezzünk olyan, az életünkben megtörtént eseményre, amikor kiszámoltunk valószínűségeket (az adott ismereteinkből kiindulva), s ezek a valószínűségek határozták meg a tetteinket!*

Ha az előző példához hasonlóan a legelső ezzel kapcsolatos emlékemet idézem fel, az általános iskolához kötődik, ahol 3-4. osztályos korunkban nagyon sokat játszottunk kő-papír-ollót szünetekben. Kisebb koromban rengeteget néztem a National Geographic Channel-t, és egy ott látott műsor után - ami a szerencsejátékról és valószínűségekről szólt - a fejembe vettem, hogy „taktikázni" fogok a jövőben a játékok alkalmával. Megfigyeltem - talán a műsor tanácsára -, hogy az osztálytársaim nagyon ritkán mutatják kétszer ugyanazt a jelet egymás után. Így rájöttem, hogy érdemes ez alapján gondolkodni: olyan jel mutatásával lesz a legnagyobb esélyem gyakorlatban a nyerésre, amit az ellenfél előző lépése legyőzne, de a fennmaradó kettő közül az egyiket legyőzi, a másikkal pedig döntetlent játszik.
Természetesen ez minden esetben fennáll a kő-papír-olló szabályai szerint. Elég csupán arra figyelnem, hogy az ellenfél előző lépése melyik jelet üti a lehetséges 3 közül. Szigorú értelemben itt nem „kiszámoltam" a valószínűségeket, csupán figyelembe vettem, hogy mi a „valószínűbb" esemény.

Elméleti síkon természetesen nem korrekt a gondolkodás, mivel mind a kő, a papír és az olló mutatása egymástól független esemény. Egy jelet mindig azonos eséllyel követ egy tetszőleges másik, tehát minden azonosan hosszú sorozat előfordulási valószínűsége megegyezik.

C) feladatrész

K: *Találjunk olyan véletlenszerű jelenséget környezetünkben, amelyre a Brown-mozgás típusú leírás jó közelítést adna!*

1. A pénzügyi világ és a piac dinamikáját leíró matematikai modellek egyik megközelítési módja a Brown-mozgást/fehér zajt leíró matematikai formalizmus (pl. Langevin egyenlet[1]) alkalmazása. A tőzsdei mozgásokat, értékpapírok, vagy valuták értékének változását és sok mást is alkalmas így leírni, ugyanis az előrejelzési modelleket nagyban javíthatja.

2. Állatpopulációk, vagy egyes egyedek mozgásának leírásához a sztochasztikus differenciálegyenletek használata (mint amilyen pl. a Brown-mozgás leírása is) megszokottnak számít az etológiában. Egy állat mozgása általában véletlenszerű, grafikusan is kísértetiesen hasonlít a részecskék Brown-mozgását szemléltető ábrákhoz.[2][3][4]

2. FELADAT

A) feladatrész

K: *Dobjuk fel az érmét kétszer. Milyen valószínűséggel kapunk két fejet (FF), illetve írás-fej (IF) sorrendet? Ugyanaz a két valószínűség?*

Számoljunk a $\frac{\text{kedvező}}{\text{összes}}$ szabállyal jelen esetben. Az első alkalommal azt mondhatjuk, hogy a FF dobás valószínűsége a követező:

$$\frac{\{\text{FF}\}}{\{FF; IF; FI; II\}} = \frac{1}{4} \tag{1}$$

Ugyanis összesen négy különböző eset lehetséges, ezekből mi az egyiket várjuk eredményül. Második esetben ugyanezt mondhatjuk el, hasonlóan írhatjuk fel az IF dobás valószínűségét:

$$\frac{\{\text{IF}\}}{\{FF; IF; FI; II\}} = \frac{1}{4} \tag{2}$$

Szintén egy lehetőséget választunk ki az összesen várható négy közül.

Másképp is leírhatjuk a helyzetet. Ismert, hogy mind a fej, mind az írás dobásának valószínűsége

$$P\left(\text{fej (F)}\right) = P\left(\text{írás (I)}\right) = \frac{1}{2} \tag{3}$$

Mivel a pénz második feldobása az első dobástól független esemény, ezért felírhatjuk, hogy:

$$P\left(\text{FF}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \tag{4}$$

Ugyanígy a másik esetre:

$$P\left(\text{IF}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \tag{5}$$

A két esemény tehát azonos valószínűséggel fordul elő.

B) feladatrész

K: *Játsszuk a következő játékot! Addig dobálunk, amíg vagy két fej (FF - én nyerek), vagy fej-írás (FI - te nyersz) jön ki. Igazságos ez a játék?*

A nyerés feltétele mindkét játékos számára, hogy az első dobás fej (F) legyen. Ezt követően akkor nyer vagy az egyik vagy a másik, ha vagy fej (F), vagy írás (I) a rá következő dobás. Itt is elmondhatjuk hogy az egymást követő dobások független események, így egy F eredmény követően mind egy F, mind pedig egy I azonosan $\frac{1}{2}$ valószínűséggel következik be. Azt mondhatjuk tehát, hogy igen, igazságos a játék, ugyanis mindkét fél nyerési esélye azonos. Azt feltételezni az ilyen események sorozatánál, hogy a második dobás függ az előtte levőtől (pl. hogy egy F után $\frac{1}{4}$ valószínűséggel következik be még egy F és így az írás előnyben van) szokás a *szerencsejátékosok tévedésének*[5], vagy *Monte Carlo tévedésnek* hívni. Ez arra a rossz meglátásra alapul, miszerint egy már (gyakran) előfordult eseményről intuitíve azt gondoljuk, hogy a jövőben kisebb valószínűséggel fog előfordulni. Ez független események esetén viszont nem igaz, lásd a fenti pénzdobás példája. Mindegy hányszor fordult elő már F, vagy I a dobások során, a következő esetében mind F, mind pedig I azonosan $P = \frac{1}{2}$ valószínűséggel következik be.

3. FELADAT

3.1. Szimmetrikus - driftmentes - rendszer

K: *Egydimenziós mozgást végző részecske* τ *időközönként véletlen irányú erő hatására előző helyzetétől* l *távolságra ugrik (egyenlő* $p_+ = p_- = \frac{1}{2}$ *valószínűséggel jobbra vagy balra). A részecske az* $x_0 = 0$ *pontból indul.*
Határozzuk meg a $t = N_\tau$ *idő alatti elmozdulás és az elmozdulás négyzetének átlagát,* $\langle x_t \rangle$*-t és* $\langle x_t^2 \rangle$*-t*

Ismert, hogy az x_t elmozdulás várható értéke

$$\langle x_t \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot P(x,t) \; dx. \tag{6}$$

Míg az elmozdulás négyzet várható értéke

$$\left\langle x_t^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot P(x,t) \; dx. \tag{7}$$

Jelölje az $P(x,t)$ az x pontban való tartózkodás valószínűségét a keresett $t = N_\tau$ idő után. Ekkor felírhatjuk a következőket[6]:

$$P(x, t+\tau) = p_+ \cdot P(x-l, t) + p_- \cdot P(x+l, t) \tag{8}$$

Kiinduló feltevéseink közé tartozik, hogy $p_- = p_+ = \frac{1}{2}$, tehát a rendszer szimmetrikus. Ekkor a (8)-as egyenlet a következőképp alakul:

$$P(x, t+\tau) = \frac{1}{2} \cdot P(x-l, t) + \frac{1}{2} \cdot P(x+l, t) \tag{9}$$

Ezt a differencia egyenletet a Kramers–Moyal-sorfejtés segítségével alakítjuk át a $P(x,t)$-re vonatkozó differenciálegyenletre, melyet Fokker–Planck-egyenletnek nevezünk[7]. Első lépésben vonjunk ki mindkét oldalból $P(x,t)$, amiket aztán τ és l, 0-hoz történő közelítésével sorbafejtünk t és x szerint:

$$P(x, t+\tau) - P(x,t) = \frac{1}{2} \cdot [P(x-l, t) - P(x,t)] + \frac{1}{2} \cdot [P(x+l, t) - P(x,t)] \tag{10}$$

A fentiek alapján alakítsuk át ezeket: a bal oldalt fejtsük sorba t, a jobb oldalt pedig x szerint. A t szerintinél az első, az x szerintinél pedig a második rendig fejtsünk sorba:

$$P(x, t+\tau) - P(x,t) = \tau \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} + \mathcal{O}\left(\tau^2\right) \tag{11}$$

$$P(x-l, t) - P(x,t) = -l \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2} + \mathcal{O}\left(l^3\right) \tag{12}$$

$$P\left(x+l,t\right)-P\left(x,t\right)=+l\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial x}+\frac{1}{2}l^{2}\frac{\partial^{2}P\left(x,t\right)}{\partial x^{2}}+\mathcal{O}\left(l^{3}\right) \tag{13}$$

A kapott eredményt helyettesítsük be az eredeti, (10)-es egyenletbe:

$$\begin{aligned}\tau\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial t}&+\mathcal{O}\left(\tau^{2}\right)=\\ &=\frac{1}{2}\cdot\left[-l\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial x}+\frac{1}{2}l^{2}\frac{\partial^{2}P\left(x,t\right)}{\partial x^{2}}+\mathcal{O}\left(l^{3}\right)\right]+\\ &+\frac{1}{2}\cdot\left[l\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial x}+\frac{1}{2}l^{2}\frac{\partial^{2}P\left(x,t\right)}{\partial x^{2}}+\mathcal{O}\left(l^{3}\right)\right]\end{aligned} \tag{14}$$

A sorfejtés elhanyagolhatóan kicsi tagjait kihagyva:

$$\tau\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial t}=\frac{1}{2}\cdot\left[-l\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial x}+\frac{1}{2}l^{2}\frac{\partial^{2}P\left(x,t\right)}{\partial x^{2}}\right]+\frac{1}{2}\cdot\left[l\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial x}+\frac{1}{2}l^{2}\frac{\partial^{2}P\left(x,t\right)}{\partial x^{2}}\right] \tag{15}$$

Rendezésnél az x-ben lineáris tagok kiesnek. A maradékot átosztva τ-val, megkapjuk a Fokker–Planck-egyenletet:

$$\tau\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial t}=\frac{1}{2}\cdot\left[\cancel{-l\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial x}}+\frac{1}{2}l^{2}\frac{\partial^{2}P\left(x,t\right)}{\partial x^{2}}+\cancel{l\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial x}}+\frac{1}{2}l^{2}\frac{\partial^{2}P\left(x,t\right)}{\partial x^{2}}\right] \tag{16}$$

$$\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial t}=\frac{l^{2}}{2\tau}\cdot\frac{\partial^{2}P\left(x,t\right)}{\partial x^{2}}=D\cdot\frac{\partial^{2}P\left(x,t\right)}{\partial x^{2}} \tag{17}$$

Az ebben az egyenletben megjelenő $\frac{l^2}{2\tau}=D$ tagot nevezzük a rendszer *diffúziós együtthatójának*. Olyan esetben, amikor $p_{-}\neq p_{+}$, akkor a első rendű tagok is bent maradnak, megszorozva egy $-\left(p_{-}-p_{+}\right)\frac{l}{\tau}=-v$ együtthatóval, melyet a rendszer *driftjének*, vagy *sodródásának* hívunk.

A (17)-es differenciálegyenletet a $P\left(x,t=0\right)=\delta\left(x\right)$ kezdőfeltétellel oldjuk meg. Ennek megoldása ismert, ez a Gauss-függvény:

$$P\left(x,t\right)=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\cdot e^{-\frac{x^{2}}{4Dt}} \tag{18}$$

Ennek a felhasználásával pedig megadhatjuk a keresett $\langle x_t\rangle$ és $\langle x_t^2\rangle$ várható értékeket a (6)-os és (7)-es egyenletek alapján:

$$\langle x_t\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\cdot e^{-\frac{x^{2}}{4Dt}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot e^{-\frac{x^{2}}{4Dt}}\,dx \tag{19}$$

$$\left\langle x_t^2\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\, dx \tag{20}$$

Végezzük el a következő változócserét:

$$y := \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \quad \rightarrow \quad x = y \cdot \sqrt{4Dt}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{4Dt}} \quad \rightarrow \quad dx = \sqrt{4Dt}\, dy$$

Majd helyettesítsünk be a fenti (19)-es és (20)-as egyenletekbe:

$$\begin{aligned}\left\langle x_t\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \sqrt{4Dt} \cdot e^{-y^2} \cdot \sqrt{4Dt}\, dy = \\ &= \frac{4Dt}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y \cdot e^{-y^2}\, dy}_{=0} = \frac{4Dt}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot 0 = \underline{\underline{0}}\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\left\langle x_t^2\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(y \cdot \sqrt{4Dt}\right)^2 \cdot e^{-y^2} \cdot \sqrt{4Dt}\, dy = \\ &= \frac{(4Dt)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot e^{-y^2}\, dy}_{=\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \frac{4Dt}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \underline{\underline{2Dt}}\end{aligned} \tag{22}$$

3.2. Asszimetrikus - driftelő - rendszer

K: *Vizsgáljuk a fenti problémát $p_+ = 4p_-$ esetre és számítsuk ki az $\left\langle x_t\right\rangle$, $\left\langle x_t^2\right\rangle$ és a $\left\langle x_t^2\right\rangle - \left\langle x_t\right\rangle^2$ átlagokat!*

Nézzük azt a helyzetet, amikor a rendszerben van drift, tehát $p_- \neq p_+$, ahol most $p_- = \frac{1}{5}$ és $p_+ = \frac{4}{5}$. Ebben az esetben a (8)-as egyenletet a következőképp alakul:

$$P\left(x, t+\tau\right) = \frac{4}{5} \cdot P\left(x-l, t\right) + \frac{1}{5} \cdot P\left(x+l, t\right) \tag{23}$$

Elvégezve a (10)-(15) egyenletekhez hasonlóan a Kramer–Moyal-sorfejtést, az elsőrendű tagok utána már nem esnek ki. Ekvivalensen a (15)-ös egyenletben szereplő lépés itt most így fest:

$$\tau\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial t} = \frac{1}{5} \cdot \left[-l\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial x} + \frac{1}{2}l^2\frac{\partial^2 P\left(x,t\right)}{\partial x^2}\right] + \frac{4}{5} \cdot \left[l\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial x} + \frac{1}{2}l^2\frac{\partial^2 P\left(x,t\right)}{\partial x^2}\right] \tag{24}$$

Ezt az egyenletet rendezve a következő alakot kapjuk az előző alfejezet végén leírtak alapján:

$$\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial t}=\frac{3}{5}\cdot\frac{l}{\tau}\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial x}+\frac{3l^2}{10\tau}\cdot\frac{\partial^2 P\left(x,t\right)}{\partial x^2}=-v\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial x}+D\cdot\frac{\partial^2 P\left(x,t\right)}{\partial x^2} \tag{25}$$

A kapott differenciálegyenletet az előzőekhez hasonlóan, szintén a $P\left(x,t=0\right)=\delta\left(x\right)$ kezdőfeltétellel oldjuk meg. Ennek megoldásához bevezetjük a következő változócserét:

$$P\left(x,t\right):=\tilde{P}\left(y\left(x,t\right),t\right)=\tilde{P}\left(x-vt,t\right)$$

Melyre a (25)-ös egyenlet a következőképp módosul:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial t}&=-v\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial x}+D\cdot\frac{\partial^2 P\left(x,t\right)}{\partial x^2}\quad\rightarrow\\ \rightarrow\quad\frac{\partial \tilde{P}\left(y\left(x,t\right),t\right)}{\partial t}&=-v\frac{\partial \tilde{P}\left(y\left(x,t\right),t\right)}{\partial x}+D\cdot\frac{\partial^2 \tilde{P}\left(y\left(x,t\right),t\right)}{\partial x^2}\end{aligned} \tag{26}$$

Bontsuk ki a parciális deriváltakat:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial y\left(x,t\right)}{\partial t}\cdot\frac{\partial \tilde{P}\left(y\left(x,t\right),t\right)}{\partial y}+\frac{\partial t}{\partial t}\cdot\frac{\partial \tilde{P}\left(y\left(x,t\right),t\right)}{\partial t}=\\ &=-v\cdot\frac{\partial y\left(x,t\right)}{\partial x}\cdot\frac{\partial \tilde{P}\left(y\left(x,t\right),t\right)}{\partial y}+D\cdot\partial_x\left(\frac{\partial y\left(x,t\right)}{\partial x}\cdot\frac{\partial \tilde{P}\left(y\left(x,t\right),t\right)}{\partial y}\right)\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial y\left(x,t\right)}{\partial t}\cdot\frac{\partial \tilde{P}\left(y\left(x,t\right),t\right)}{\partial y}+\frac{\partial t}{\partial t}\cdot\frac{\partial \tilde{P}\left(y\left(x,t\right),t\right)}{\partial t}=\\ &=-v\cdot\frac{\partial y\left(x,t\right)}{\partial x}\cdot\frac{\partial \tilde{P}\left(y\left(x,t\right),t\right)}{\partial y}+D\cdot\partial_x\left(\frac{\partial\left(x-vt\right)}{\partial x}\cdot\frac{\partial \tilde{P}\left(y\left(x,t\right),t\right)}{\partial y}\right)\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\left(x-vt\right)}{\partial t}\cdot\frac{\partial \tilde{P}\left(y\left(x,t\right),t\right)}{\partial y}+1\cdot\frac{\partial \tilde{P}\left(y\left(x,t\right),t\right)}{\partial t}=\\ &=-v\cdot\frac{\partial\left(x-vt\right)}{\partial x}\cdot\frac{\partial \tilde{P}\left(y\left(x,t\right),t\right)}{\partial y}+D\cdot\frac{\partial\left(x-vt\right)}{\partial x}\cdot\frac{\partial\left(x-vt\right)}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 \tilde{P}\left(y\left(x,t\right),t\right)}{\partial y^2}\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}&\underbrace{\frac{\partial\left(x-vt\right)}{\partial t}}_{=-v}\cdot\frac{\partial \tilde{P}\left(y\left(x,t\right),t\right)}{\partial y}+1\cdot\frac{\partial \tilde{P}\left(y\left(x,t\right),t\right)}{\partial t}=\\ &=-v\cdot\underbrace{\frac{\partial\left(x-vt\right)}{\partial x}}_{=1}\cdot\frac{\partial \tilde{P}\left(y\left(x,t\right),t\right)}{\partial y}+D\cdot\underbrace{\frac{\partial\left(x-vt\right)}{\partial x}}_{=1}\cdot\underbrace{\frac{\partial\left(x-vt\right)}{\partial x}}_{=1}\cdot\frac{\partial^2 \tilde{P}\left(y\left(x,t\right),t\right)}{\partial y^2}\end{aligned} \tag{30}$$

$$-v\cdot\cancel{\frac{\partial\tilde{P}\left(y\left(x,t\right),t\right)}{\partial y}}+\frac{\partial\tilde{P}\left(y\left(x,t\right),t\right)}{\partial t}=-v\cdot\cancel{\frac{\partial\tilde{P}\left(y\left(x,t\right),t\right)}{\partial y}}+D\cdot\frac{\partial^2\tilde{P}\left(y\left(x,t\right),t\right)}{\partial y^2}\tag{31}$$

Ezt követően pedig megkapjuk a végleges egyenletünket:

$$\frac{\partial\tilde{P}\left(y\left(x,t\right),t\right)}{\partial t}=D\cdot\frac{\partial^2\tilde{P}\left(y\left(x,t\right),t\right)}{\partial y^2}\tag{32}$$

Mely $\tilde{P}$-re vonatkozólag megegyezik a driftmentes leírás Fokker–Planck-egyenletével. Ennek megoldása $\tilde{P}\left(y,t=0\right)=\delta\left(y\right)$ keződfeltétellel (mely ekvivalens a $P\left(x,t=0\right)=\delta\left(x\right)$ feltétellel) a már ismert Gauss-függvény:

$$\tilde{P}\left(y,t\right)=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\cdot e^{-\frac{y^2}{4Dt}}\tag{33}$$

Melyet változócserével visszaalakítva megkapjuk az egyenletünk megoldását:

$$\boxed{P\left(x,t\right)=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\cdot e^{-\frac{(x-vt)^2}{4Dt}}}\tag{34}$$

A (6)-os és (7)-es egyenletek alapján megadhatjuk a keresett $\langle x_t\rangle$ és $\langle x_t^2\rangle$, valamint az $\langle x_t^2\rangle-\langle x_t\rangle$ értékeket:

$$\langle x_t\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}xP\left(x,t\right)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\cdot e^{-\frac{(x-vt)^2}{4Dt}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot e^{-\frac{(x-vt)^2}{4Dt}}\,dx\tag{35}$$

$$\left\langle x_t^2\right\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}x^2P\left(x,t\right)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\cdot e^{-\frac{(x-vt)^2}{4Dt}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot e^{-\frac{(x-vt)^2}{4Dt}}\,dx\tag{36}$$

Vezessük be a következő változócserét:

$$y:=\frac{x-vt}{\sqrt{4Dt}}\quad\rightarrow\quad x=y\cdot\sqrt{4Dt}+vt$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{4Dt}}\quad\rightarrow\quad dx=\sqrt{4Dt}\,dy$$

Ezt behelyettesítve a fentiekbe, megkapjuk a keresett értékeket:

$$\langle x_t \rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(y \cdot \sqrt{4Dt} + vt\right) \cdot e^{-y^2} \sqrt{4Dt}\, dy = \frac{\sqrt{4Dt}}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(y \cdot \sqrt{4Dt} + vt\right) \cdot e^{-y^2}\, dy =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(y \cdot \sqrt{4Dt}\right) \cdot e^{-y^2}\, dy + \int_{-\infty}^{\infty} (vt) \cdot e^{-y^2}\, dy \right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\sqrt{4Dt} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y \cdot e^{-y^2}\, dy}_{=0} + vt \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy}_{=\sqrt{\pi}} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} \cdot vt = \boxed{vt} \tag{37}$$

$$\left\langle x_t^2 \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(y \cdot \sqrt{4Dt} + vt\right)^2 \cdot e^{-y^2} \sqrt{4Dt}\, dy = \frac{\sqrt{4Dt}}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(y \cdot \sqrt{4Dt} + vt\right)^2 \cdot e^{-y^2}\, dy =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(y \cdot \sqrt{4Dt}\right)^2 \cdot e^{-y^2}\, dy + \int_{-\infty}^{\infty} 2 \cdot y \cdot \sqrt{4Dt} \cdot vt \cdot e^{-y^2}\, dy + \int_{-\infty}^{\infty} (vt)^2 \cdot e^{-y^2}\, dy \right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(4Dt \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot e^{-y^2}\, dy}_{=\frac{\sqrt{\pi}}{2}} + 2 \cdot \sqrt{4Dt} \cdot vt \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y \cdot e^{-y^2}\, dy}_{=0} + (vt)^2 \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy}_{=\sqrt{\pi}} \right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(4Dt \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} + (vt)^2 \cdot \sqrt{\pi} \right) = \boxed{2Dt + (vt)^2} \tag{38}$$

$$\left\langle x_t^2 \right\rangle - \langle x_t \rangle^2 = 2Dt + (vt)^2 - (vt)^2 = \boxed{2Dt} \tag{39}$$

Ahol:

$$D = \frac{3l^2}{10\tau}$$

Így végül felírhatjuk, hogy:

$$\left\langle x_t^2 \right\rangle - \langle x_t \rangle^2 = 2Dt = 2 \cdot \frac{3l^2}{10\tau} t = \boxed{\frac{3l^2}{5\tau} t} \tag{40}$$

4. FELADAT

A) feladatrész

K: *Vizsgáljuk a Brown mozgás előadáson tárgyalt, Einstein-féle leírását, s legyen sodródás is a rendszerben (szél fúj a víz felett).*
Ekkor a τ időnként megtett ugrások hosszának (Δ) valószínűségi eloszlása nem szimmetrikus $\Phi(-\Delta) \neq \Phi(\Delta)$, s várhatóan $\overline{\Delta} = \int \Delta\Phi(\Delta)\, d\Delta \neq 0$.
Írjuk fel a Chapman-Kolmogorov egyenletet, s deriváljuk a részecske megtalálási valószínűségét, $P(x,t)$-t meghatározó Fokker-Planck egyenletet! Mennyiben különbözik ez az egyenlet az előadáson tárgyalt diffúziós egyenlettől?

A feladat megoldása a 3.2-es fejezetben ismertetettekkel nagyrészt analóg. Az Brown-mozgás Einstein-féle leírásának feltételei sodródás esetén a következőek - ahogy többek között azok feladat szövegében is szerepelnek:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta)\, d\Delta = 1$
2. $\Phi(-\Delta) \neq \Phi(\Delta)$
3. $\overline{\Delta} = \langle\Delta\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta\Phi(\Delta)\, d\Delta \neq 0$

Annak valószínűsége, hogy egy részecske τ idő múlva az x és $x + dx$ közötti tartományban foglal helyet:

$$P(x, t+\tau)\, dx = P(x,t)\, dx - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta)\, d\Delta \cdot P(x,t)\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta)\, d\Delta \cdot P(x-\Delta, t)\, dx \tag{41}$$

- A jobb oldal első tagja ($P(x,t)\, dx$) annak a valószínűségét jelöli, hogy a részecske már t időpillanatban is az $x + dx$ helyen tartózkodott.
- A második tag ($-\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta)\, d\Delta \cdot P(x,t)\, dx$) ebből levonódik, ugyanis ez annak a valószínűségét adja meg, hogy a részecske τ idő alatt kidiffundál az $x+dx$ tartományból.
- A harmadik tag ($\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta)\, d\Delta \cdot P(x-\Delta, t)$) annak a valószínűségét jelenti, hogy egy részecske valahonnan pont a $d + dx$ tartományba ugrik bele τ időn belül.

Az egyenletet rendezzük, figyelve arra, hogy az integrálások $d\Delta$ szerint történnek. Emiatt minden tag, ami nem függ Δ-tól, kiemelhető az integráljelek elé. A következőt kapjuk:

$$P(x, t+\tau)\, dx = P(x,t)\, dx - P(x,t)\, dx \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta)\, d\Delta \right) + dx \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta)\, d\Delta \cdot P(x-\Delta, t) \right) \tag{42}$$

A dx tagokkal az egyenlet leosztható, így:

$$P\left(x,t+\tau\right)=P\left(x,t\right)-P\left(x,t\right)\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\Delta\right)d\Delta\right)+\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\Delta\right)d\Delta\cdot P\left(x-\Delta,t\right) \tag{43}$$

Alkalmazzunk a fent ismert három feltétel közül az első számút, miszerint $\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\Delta\right)d\Delta=1$:

$$P\left(x,t+\tau\right)=P\left(x,t\right)-P\left(x,t\right)\cdot\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\Delta\right)d\Delta\right)}_{=1\text{, az első feltétel szerint.}}+\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\Delta\right)d\Delta\cdot P\left(x-\Delta,t\right) \tag{44}$$

$$P\left(x,t+\tau\right)=\underbrace{P\left(x,t\right)-P\left(x,t\right)}_{=0}+\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\Delta\right)d\Delta\cdot P\left(x-\Delta,t\right) \tag{45}$$

Mely után végül megkapjuk a *Chapman–Kolmogorov-egyenletet*:

$$\boxed{P\left(x,t+\tau\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\Delta\right)d\Delta\cdot P\left(x-\Delta,t\right)} \tag{46}$$

Az egyenlet bal oldalát τ-ban, a jobboldalt pedig kétszer Δ-ban sorbafejtjük (*Kramers–Moyal-sorfejtés*). Ekkor a következő formulát kapjuk:

$$\begin{aligned}P\left(x,t\right)+\tau\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial t}&=P\left(x,t\right)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\Delta\right)d\Delta-\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial x}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\Delta\Phi\left(\Delta\right)d\Delta+\\&+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P\left(x,t\right)}{\partial x^2}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\Delta^2\Phi\left(\Delta\right)d\Delta\end{aligned} \tag{47}$$

Amit az első számú feltétel alapján újfent tovább tudunk egyszerűsíteni:

$$\begin{aligned}\cancel{P\left(x,t\right)}+\tau\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial t}&=\cancel{P\left(x,t\right)}\cdot\overbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\Delta\right)d\Delta}^{=1\text{, az első feltétel szerint.}}-\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial x}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\Delta\Phi\left(\Delta\right)d\Delta+\\&+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P\left(x,t\right)}{\partial x^2}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\Delta^2\Phi\left(\Delta\right)d\Delta\end{aligned} \tag{48}$$

Így végül a következő alakot kapjuk:

$$\tau\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial t}=-\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial x}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\Delta\Phi\left(\Delta\right)d\Delta+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P\left(x,t\right)}{\partial x^2}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\Delta^2\Phi\left(\Delta\right)d\Delta \tag{49}$$

Ebben megjelenik két ismert tag, amiknek definícióját a (6)-os és (7)-es egyenletek adják meg:

$$\langle \Delta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta \Phi \left(\Delta \right) d\Delta \tag{50}$$

$$\left\langle \Delta^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta^2 \Phi \left(\Delta \right) d\Delta \tag{51}$$

Ezeket behelyettesítve és τ-val leosztva kapjuk a következő *Fokker–Planck-egyenletet*:

$$\boxed{\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial t} = -\frac{\langle \Delta \rangle}{\tau} \frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta^2 \rangle}{\tau} \frac{\partial^2 P\left(x,t\right)}{\partial x^2}} \tag{52}$$

Ez az egyenlet abban különbözik az - előadáson is megoldott - driftmentes változattól, hogy itt a második számú feltétel szerint $\langle \Delta \rangle \neq 0$.

B) feladatrész

K: *Írjuk fel az egyenlet megoldását arra az esetre, ha a virágporszem az origóból indul!*

Az előző feladatban már ismertettük, hogy mit jelent egy rendszer *driftje* és *diffúziós együtthatója*, vezessük be itt is ugyanezeket a mennyiségeket:

$$\frac{\langle \Delta \rangle}{\tau} := v \tag{53}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\langle \Delta^2 \rangle}{\tau} := D \tag{54}$$

Ez visszahelyettesítve a Fokker–Planck-egyenletbe:

$$\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial t} = -v \frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial x} + D \frac{\partial^2 P\left(x,t\right)}{\partial x^2} \tag{55}$$

Ezt a differenciálegyenletet a $P\left(x, t = 0\right) = \delta\left(x\right)$ kezdőfeltétellel oldjuk meg, ugyanis $t = 0$-ban a részecske az origóban tartózkodik.
Vezessük be az előző feladatból már ismert változócserét:

$$P\left(x,t\right) := \tilde{P}\left(y\left(x,t\right),t\right) = \tilde{P}\left(x - vt, t\right)$$

Ekkor a következőképp módosul a fenti Fokker–Planck-egyenlet:

$$\frac{\partial \tilde{P}\left(y\left(x,t\right),t\right)}{\partial t} = -v \frac{\partial \tilde{P}\left(y\left(x,t\right),t\right)}{\partial x} + D \frac{\partial^2 \tilde{P}\left(y\left(x,t\right),t\right)}{\partial x^2} \tag{56}$$

Ez teljes mértékben megegyezik az előző feladatban megoldott, driftelő rendszert leíró egyenlettel. Az egyenlet megoldásához ugyanazokat a lépéseket kell elvégezzük:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\cdot\frac{\partial\tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y}+\frac{\partial t}{\partial t}\cdot\frac{\partial\tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial t}=\\&=-v\cdot\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\cdot\frac{\partial\tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y}+D\cdot\partial_x\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\cdot\frac{\partial\tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y}\right)\end{aligned}\tag{57}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\cdot\frac{\partial\tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y}+\frac{\partial t}{\partial t}\cdot\frac{\partial\tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial t}=\\&=-v\cdot\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\cdot\frac{\partial\tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y}+D\cdot\partial_x\left(\frac{\partial(x-vt)}{\partial x}\cdot\frac{\partial\tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y}\right)\end{aligned}\tag{58}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial(x-vt)}{\partial t}\cdot\frac{\partial\tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y}+1\cdot\frac{\partial\tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial t}=\\&=-v\cdot\frac{\partial(x-vt)}{\partial x}\cdot\frac{\partial\tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y}+D\cdot\frac{\partial(x-vt)}{\partial x}\cdot\frac{\partial(x-vt)}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2\tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y^2}\end{aligned}\tag{59}$$

$$\begin{aligned}&\underbrace{\frac{\partial(x-vt)}{\partial t}}_{=-v}\cdot\frac{\partial\tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y}+1\cdot\frac{\partial\tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial t}=\\&=-v\cdot\underbrace{\frac{\partial(x-vt)}{\partial x}}_{=1}\cdot\frac{\partial\tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y}+D\cdot\underbrace{\frac{\partial(x-vt)}{\partial x}}_{=1}\cdot\underbrace{\frac{\partial(x-vt)}{\partial x}}_{=1}\cdot\frac{\partial^2\tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y^2}\end{aligned}\tag{60}$$

$$\cancel{-v\cdot\frac{\partial\tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y}}+\frac{\partial\tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial t}=\cancel{-v\cdot\frac{\partial\tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y}}+D\cdot\frac{\partial^2\tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y^2}\tag{61}$$

Ezt követően pedig megkapjuk a végleges egyenletünket:

$$\frac{\partial\tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial t}=D\cdot\frac{\partial^2\tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y^2}\tag{62}$$

Mely $\tilde{P}$-re vonatkozólag természetesen itt is megegyezik a driftmentes leírás Fokker–Planck-egyenletével. Ennek megoldása $\tilde{P}(y,t=0)=\delta(y)$ kezdőfeltétellel (mely ekvivalens a $P(x,t=0)=\delta(x)$ feltétellel) a már ismert Gauss-függvény:

$$\tilde{P}(y,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\cdot e^{-\frac{y^2}{4Dt}}\tag{63}$$

Melyet az előző feladatban is szereplő változócserével visszaalakítva, megkapjuk az egyenletünk megoldását:

$$\boxed{P\left(x,t\right)=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\cdot e^{-\frac{(x-vt)^2}{4Dt}}} \tag{64}$$

5. FELADAT

- Work in progress -

Felhasznált irodalom

[1] Roumen Tsekov. “Brownian Markets”. In: *Chinese Physics Letters* 30, 088901 (Aug. 2013), p. 088901. DOI: 10.1088/0256-307X/30/8/088901. arXiv: 1010.2061 [q-fin.ST].

[2] David R Brillinger. “Simulating constrained animal motion using stochastic differential equations”. In: *Lecture Notes-Monograph Series* (2003), pp. 35–48.

[3] Vladimir Pozdnyakov et al. “On modeling animal movements using Brownian motion with measurement error”. In: *Ecology* 95.2 (2014), pp. 247–253.

[4] Daniel Bearup et al. “Revisiting Brownian motion as a description of animal movement: a comparison to experimental movement data”. In: *Methods in Ecology and Evolution* 7.12 (2016), pp. 1525–1537.

[5] Rachel Croson and James Sundali. “The gambler’s fallacy and the hot hand: Empirical data from casinos”. In: *Journal of risk and uncertainty* 30.3 (2005), pp. 195–209.

[6] Nino Zanghì. *Brownian Motion*. 2015. URL: https://www.ge.infn.it/~zanghi/FS/BrownTEXT.pdf.

[7] J. L. Garcia-Palacios. “Introduction to the theory of stochastic processes and Brownian motion problems”. In: *arXiv e-prints*, cond-mat/0701242 (Jan. 2007), cond–mat/0701242. arXiv: cond-mat/0701242 [cond-mat.stat-mech].