Pál Balázs
UXB26I

Véletlen fizikai folyamatok
2. házifeladat

2019. február 22.

1. FELADAT

K: *A Perrin kísérlet megértéséhez először oldjuk meg a két-dimenziós Brown mozgás következő változatát:*
Egy l rácsállandójú négyzetrácson egy részecske τ időközönként, egyenlő valószínűséggel ugrik a négy szomszédos rácspont egyikébe, s az egymást követő lépések függetlenek egymástól. A részecske az $(x_0 = 0, y_0 = 0)$ pontból indul.
Határozzuk meg a $t = N\tau$ idő alatti várható elmozdulást, $\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{\langle x_t^2 \rangle + \langle y_t^2 \rangle}$-t!

Keressük az $\langle x_t^2 \rangle$ és az $\langle y_t^2 \rangle$ értékeket, amikből aztán megkaphatjuk a keresett $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ mennyiséget. Ezeknek definíciója ismert:

$$\left\langle x_t^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot P\left(x\right)\ dx \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot P\left(x,t\right)\ dx \tag{1}$$

$$\left\langle y_t^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot P\left(y\right)\ dy \equiv \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot P\left(y,t\right)\ dy \tag{2}$$

Jelen esetben a 2D Brown–mozgás leírását kell megadnunk, amely esetében egy részecske, az adott pontban történő tartózkodásának valószínűségét egy $P\left(x,y\right) \equiv P\left(x,y,t\right)$ mennyiség jellemzi. Ekkor az $\langle x^2 \cdot y^2 \rangle$ megadhatjuk a következő módon:

$$\left\langle x^2 \cdot y^2 \right\rangle = \iint x^2 \cdot y^2 \cdot P\left(x,y\right)\, dx\, dy \tag{3}$$

Mivel x és y független események, ezért $P\left(x,y\right)$ felbontható egy $f_1\left(x\right)$ és egy $f_2\left(y\right)$ függvény szorzatára a következőek alapján:

$$P\left(x,y\right) = f_1\left(x\right) \cdot f_2\left(y\right) \quad \text{ha } x \text{ és } y \text{ független} \tag{4}$$

Ekkor a fenti (3)-as egyenlet így alakul:

$$\iint x^2 \cdot y^2 \cdot P\left(x,y\right)\, dx\, dy = \iint x^2 \cdot y^2 \cdot f_1\left(x\right) \cdot f_2\left(y\right)\, dx\, dy \tag{5}$$

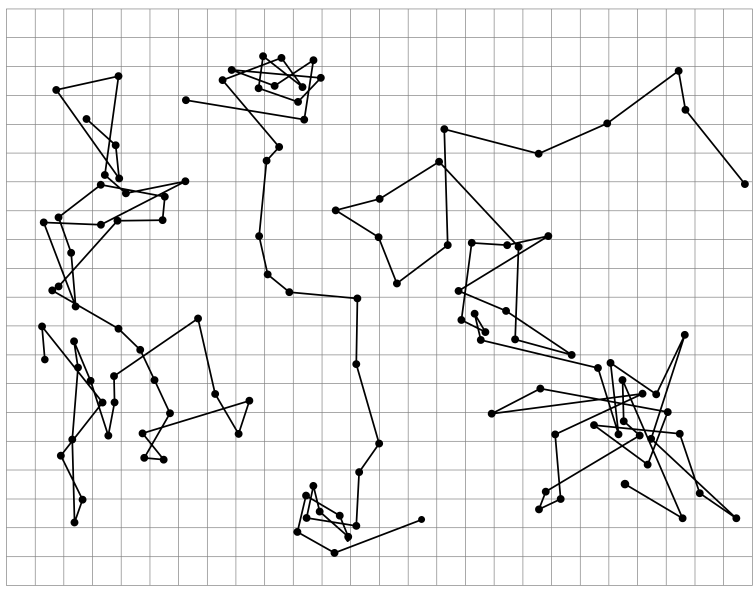
Ezt azonos változók szerint ketté bonthatunk és bevezethetünk egy többi változótól független időfüggőséget is, mely végeredménye a következő:

$$\begin{aligned}\left\langle x^2 \cdot y^2 \right\rangle &= \iint x^2 \cdot y^2 \cdot f_1\left(x\right) \cdot f_2\left(y\right)\, dx\, dy = \\ &= \int x^2 \cdot f_1\left(x\right) dx \cdot \int y^2 \cdot f_2\left(y\right)\ dy \equiv \underbrace{\int x^2 \cdot f_1\left(x,t\right)\ dx}_{\langle x^2 \rangle} \cdot \underbrace{\int y^2 \cdot f_2\left(y,t\right)\ dy}_{\langle y^2 \rangle}\end{aligned} \tag{6}$$

2. FELADAT

K: *Perrin kísérletében (1. ábra) kolloid részecskék mozgását vizsgálták híg, vizes oldatban. A részecskék sugara* $a = 0.52\ \mu m$*,* $\tau = 30$ *s-ként mérték a helyzetüket, s az ábrán látható négyzetrács rácsállandója* $3.125\ \mu m$*. Becsüljük meg a kolloid részecskék diffúziós együtthatóját kétféleképpen:*

1. *A kezdő és a végpont közötti elmozdulásból, feltételezve, hogy a mozgás diffúziv!*
2. *A* τ *idő alatti ugráshosszok négyzetének átlagából!*



1. ábra. Tracings of the motion of three colloidal particles of radius 0.52 μm as seen under the microscope in J. Perrin's experiments. Successive positions every 30 seconds are joined by straight line segments. The mesh size is 3.125 μm.

3. FELADAT

K: *Használjuk a 2. feladat eredményét, valamint a Brown mozgás Langevin féle leirásának eredményeképp kapott kifejezést a kolloidrészecskék diffúziós együtthatójára, s becsüljük meg az Avogadro számot! A kolloidrészecskék sűrűségét tekinthetjük vizhez közelinek, a hőmérsékletet pedig szobahőmérsékletnek.*

4. FELADAT

K: *Tegyük fel, hogy a kolloidrészecskék diffúziós együtthatójára kapott kifejezés extrapolálható molekuláris szintre. Milyen értéket kapunk egy nem túlságosan nagy molekula vízben történő termális mozgásának diffúziós együtthatójára? Es egy biológiai molekulára (pl. DNS)?*

5. FELADAT

- WORK IN PROGRESS -