

## 1. FELADAT

K: Kétségbeesett telefon érkezik a rendőrségre. A közelben levő erdőség közepén egy család táborozott. Este 9-kor lefeküdtek, s reggel hétkor arra ébredtek, hogy 3 éves gyerekük eltűnt. Feltéve, hogy nem egy farkas, vagy egy emberrabló az eltűnés oka, határozzuk meg, hogy a rendőrség prioritása mekkora terület gyors átkutatása kell legyen!

### 1.1. A Brown-mozgás elméletével

A feladat megoldásához egyértelműen a Brown-mozgás Langevin-féle elméletét használhatjuk fel, ahol most a kisgyereket, mint bolyongó részecskét képzelhetjük el. Ismert, hogy egy bolyongó részecske várható eltávolodási távolsága a kezdőállapottól a következő módon adható meg:

$$(\Delta x)^2 = 2\tau D \quad (1)$$

Ahol  $\tau$  a mozgás vizsgált időhossza, míg  $D$  a közegre vonatkoztatott karakterisztikus mennyiség, a diffúziós együttható. Ez megadható a kinetikus szóráselmélet felhasználásával a következő módon:

$$D = \frac{1}{3} l \langle v \rangle \quad (2)$$

Ebben  $l$  a részecske szabad úthossza,  $\langle v \rangle$  pedig sebességének várható értéke. Ha meg tudjuk becsülni valahogy ezen két értéket a jelenlegi példában, azzal megkaphatjuk a gyermek, erdőre vonatkoztatott diffúziós együtthatóját. Ebből pedig egyenes úton kiszámíthatjuk a sától való eltávolodás várható távolságát. Mivel a mozgás - feltételezhetően - csak a Föld felszínén történt, azonban ott bármilyen irányban, ezért az átvizsgálandó terület egy körív által határolt felületrész, melynek sugara a kiszámolt  $\Delta x$  távolság lesz.

### 1.2. A keresett mennyiségek becslése

Az emberek optimális, preferált haladási sebessége széles határok között változik, mindenki számára ez az érték más és más. Egy 3 éves gyermek számára több kutatás alapján az optimális sebesség  $0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  és kb.  $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  között változik[1][2][3]. Én itt közel a felső határt, a  $0.9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  értéket fogom használni, ennek okára a következő 1.3 részben térek ki.

A 3 éves gyermekek szabad úthosszának, azok lépéseinek hosszával közelíthetjük. Ezt egyéb kutatások alapján kb. 30-45 cm értékűre becsülhetjük[4]. Maximális értéként a  $45 \text{ cm} = 0.45 \text{ m}$  lépéshosszt fogom a számításokban használni.

Ezen két érték becslésével adhatunk egy közelítést az átvizsgálandó terület sugarára, ha  $\tau$  időhosszt a feladatban is szereplő maximális időhossznak vesszük. Ez este 9 és reggel 7 között eltelt idő:  $\tau = 10$  óra. Ekkor az átvizsgálandó terület sugara:

$$\begin{aligned}\Delta x &= \sqrt{2\tau \cdot \frac{1}{3}l \langle v \rangle} = \sqrt{2 \cdot 10 \text{ óra} \cdot \frac{1}{3} \cdot 0.45 \text{ m} \cdot 0.9 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \sqrt{2 \cdot 36000 \text{ s} \cdot \frac{1}{3} \cdot 0.45 \text{ m} \cdot 0.9 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \\ &= \sqrt{24000 \text{ s} \cdot 0.45 \text{ m} \cdot 0.9 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \sqrt{9720 \text{ m}^2} = \boxed{98.59 \text{ m}}\end{aligned}\quad (3)$$

Magyarán nagyjából 100m sugarú területet kell gyorsan átvizsgálnia a rendőrségnek.

### 1.3. A valódi értékek

A valóságban egy 3 éves gyermek nem véletlen módon bolyong, ahogy a Brown-mozgás során mozgó részecskék. Sokkal hosszabb szabad úthosszal képes lineárisan egy irányba tartani, mint amivel fentebb is számoltam. Ellenben nem is képes folyamatosan 10 órán át tartó mozgásra, sokkal gyorsabban, akár 1-1.5 km megtétele után is elfárad. Nem beszélve arról a tényről, hogy éjszaka van, hideg. Ezek mind olyan tényezők, melyeket egy valódi helyzetben bele kell majd kalkulálni a számításainkba.

## 2. FELADAT

K: Csön-csön gyűrűt játszanak négyen. A gyűrűt a körben álló játékosok az óramutató járásával egy irányban adják tovább. Az 1-es gyereknél indul a gyűrű, s a továbbadás rátája  $w$ .

1. Írjuk fel az egyenletet annak a valószínűségére, hogy a gyűrű az  $i$ -edik gyereknél van!
2. Határozzuk meg a stacionárius megoldást!
3. Határozzuk meg a rendszer relaxációs idejét (először próbáljuk megbecsülni az értékét)!

### 2.1. A Master-egyenlet

Értelmezhetjük a feladatot úgy, hogy egy időben fejlődő, diszkrét rendszer négy különböző állapotban tud tartózkodni. Mikor az utolsó szintet is eléri, onnan csak az első szintre tud  $w$  rátával visszaugrani. Ennek fényében írjuk fel az egyes valószínűségeket:

$$\frac{\partial P_1(t)}{\partial t} = P_1(t) + wP_4(t) \quad (4)$$

$$\frac{\partial P_2(t)}{\partial t} = P_2(t) + wP_1(t) \quad (5)$$

$$\frac{\partial P_3(t)}{\partial t} = P_3(t) + wP_2(t) \quad (6)$$

$$\frac{\partial P_4(t)}{\partial t} = P_4(t) + wP_3(t) \quad (7)$$

Asd

### 3. FELADAT

K: Legyen egy sztochasztikus változó,  $x$ , momentum-generátor függvénye  $G(s)$ . A normalizációból következik, hogy  $G(0) = 1$ , s tudjuk, hogy az  $x$  momentumai  $G$  deriváltjain keresztül kifejezhetők:

$$\langle x \rangle = - \left. \frac{dG(s)}{ds} \right|_{s=0}, \dots, \quad \langle x^k \rangle = (-1)^k \left. \frac{d^k G(s)}{ds^k} \right|_{s=0}$$

A kumuláns generátor függvény a momentum-generátor függvény logaritmus,  $\Phi(s) = \ln(G(s))$ , s a kumulánsokat a következőképpen kapjuk:

$$\langle \kappa_1 \rangle = - \left. \frac{d\Phi(s)}{ds} \right|_{s=0}, \dots, \quad \langle \kappa_k \rangle = (-1)^k \left. \frac{d^k \Phi(s)}{ds^k} \right|_{s=0}$$

Az első kumulánsokat könnyű kiszámolni, s egyszerű értelmük van:

$$\langle \kappa_1 \rangle = \langle x \rangle, \quad \langle \kappa_2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

Feladat: Számítsuk ki a 3. kumulánst ( $\kappa_3$ ) a momentumokon keresztül! Mi lesz  $\kappa_3$  értéke, ha  $x$  eloszlásfüggvénye szimmetrikus [ $P(-x) = P(x)$ ]?

#### 3.1. A 3. kumuláns kiszámítása

A harmadik kumuláns definícióját a feladat szövegében is leírt általános definíció segítségével fogalmazhatjuk:

$$\begin{aligned} \kappa_3 &= (-1)^3 \left. \frac{d^3 \Phi(s)}{ds^3} \right|_{s=0} = - \left. \frac{d^3 \Phi(s)}{ds^3} \right|_{s=0} = - \left. \frac{d^3 \ln(G(s))}{ds^3} \right|_{s=0} = \\ &= - \left. \frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{1}{G(s)} \frac{dG(s)}{ds} \right) \right|_{s=0} = - \left. \frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{G(s)} \frac{d^2 G(s)}{ds^2} - \frac{1}{G^2(s)} \left( \frac{dG(s)}{ds} \right)^2 \right] \right|_{s=0} = \\ &= - \left[ \frac{1}{G(s)} \frac{d^3 G(s)}{ds^3} - \frac{1}{G^2(s)} \frac{dG(s)}{ds} \frac{d^2 G(s)}{ds^2} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{1}{G^3(s)} \left( \frac{dG(s)}{ds} \right)^3 - 2 \frac{1}{G^2(s)} \frac{dG(s)}{ds} \frac{d^2 G(s)}{ds^2} \right] \Big|_{s=0} = \\ &= \underbrace{- \left. \frac{1}{G(s)} \frac{d^3 G(s)}{ds^3} \right|_{s=0}}_{\langle x^3 \rangle} + \underbrace{3 \left. \frac{1}{G^2(s)} \frac{dG(s)}{ds} \frac{d^2 G(s)}{ds^2} \right|_{s=0}}_{-3 \cdot \langle x^2 \rangle \cdot \langle x \rangle} - \underbrace{2 \left. \frac{1}{G^3(s)} \left( \frac{dG(s)}{ds} \right)^3 \right|_{s=0}}_{2 \cdot \langle x \rangle^3} = \\ &= \boxed{\langle x^3 \rangle - 3 \cdot \langle x^2 \rangle \cdot \langle x \rangle + 2 \cdot \langle x \rangle^3} \end{aligned} \tag{8}$$

Mely eredmény valóban a harmadik kumuláns értéke.

Ha a kérdéses  $x$  valószínűségi változó eloszlásfüggvénye azonban szimmetrikus, ennek értéke 0, ahogy minden másik, páratlan rendű kumuláns értéke is. Ez megindokolható a várható értékek elemzésével. Ha egy  $x$  valószínűségi változó eloszlása szimmetrikus, az azt jelenti, hogy  $x$  és  $-x$  eloszlása megegyezik, tehát minden  $f$  függvényre:

$$\langle f(x) \rangle = \langle f(-x) \rangle \quad (9)$$

Bővítsük ki ezt arra az esetre, amikor  $f(x) = x^n$ :

$$\langle (x)^n \rangle = \langle (-x)^n \rangle = \langle (-1)^n (x)^n \rangle \quad (10)$$

Minden esetben, amikor  $n$  páratlan, akkor ez a következő alakot ölti:

$$\langle (x)^n \rangle = \langle -(x)^n \rangle = -\langle (x)^n \rangle \quad (11)$$

Ami kizárólag akkor lehetséges, ha

$$\boxed{\langle (x)^n \rangle = 0} \quad \text{ha } n \text{ páratlan} \quad (12)$$

## 4. FELADAT

K: Meredek hegyoldalban függőlegesen  $l$  távolságra vannak a kapaszkodók. A hegymászó  $w$  rátával lép felfelé,  $s$   $w_0$  annak a rátája, hogy lecsúszik a 0 szintre, ahonnan újra kezdi a mászást.

Feladatok:

1. Írjuk fel az egyenletet, amely meghatározza, hogy a hegymászó milyen  $P_n$  valószínűséggel van  $nl$  magasságban!
2. Használjuk a generátorfüggvény formalizmust a stacionárius eloszlás kiszámítására!
3. Határozzuk meg, hogy átlagosan milyen magasra jut a hegymászó!
4. Határozzuk meg az átlagos magasságot úgy, hogy származtatjuk az átlagos magasságra vonatkozó differenciálegyenletet, majd meghatározzuk a stacionárius megoldását?

### 4.1. A Master-egyenlet

A rendszer időbeli fejlődését leíró Master-egyenletet felírhatjuk az órán is tanult módon,  $w$  és  $w_0$  rátákkal jelölve a fel- és lefelé haladás rátáját. Az egyszerű sorbanállás példájához képest a különbség, hogy itt a rendszerből való távozás esetén a bent maradt igények száma nem egyel csökken, hanem 0-ra zuhan vissza. Ezt a következő módon írhatjuk fel:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(w + w_0) P_n(t) + w P_{n-1}(t) \quad \text{ahol } t = nl \quad (13)$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -w P_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} w_0 P_i(t) \quad \text{ahol } t = nl \quad (14)$$

A konkrét különbség a sorbanállás példájához képest, hogy itt  $\frac{dP_n(t)}{dt}$  értéke nem függhet  $w_0 P_{n+1}(t)$  mennyiségtől, ugyanis nincs egy szinttel történő visszacsúszás. Emellett viszont a 0 szintre akárhol visszazuhanhat a hegymászó, így egészen a végtelenig kell összegeznünk a  $\frac{dP_0(t)}{dt}$  értékét meghatározó  $w_0$  visszacsúszási rátákkal súlyozott valószínűségeket.

Hasonlóan az óraihoz, vezessük be a  $q = \frac{w}{w_0}$  mennyiséget, mellyel átfogalmazhatóak az egyenletek:

$$\frac{1}{w_0} \frac{dP_n(t)}{dt} = -(q + 1) P_n(t) + q P_{n-1}(t) \quad (15)$$

$$\frac{1}{w_0} \frac{dP_0(t)}{dt} = -q P_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} P_i(t) \quad (16)$$

Ebben most  $q < 1$ , hiszen ez a feltétele annak, hogy a rendszer ne szálljon el a végtelenben és kialakulhasson valamilyen egyensúlyi helyzet is.

#### 4.2. Generátorfüggvény formalizmus

Vezessük be a fenti  $P_n(t)$  eloszlásfüggvény Laplace-transzformáltját:

$$G(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn} P_n(t) \quad (17)$$

Melynek keressük stacionárius pontjait, amik az alábbi formában fogalmazhatóak meg:

$$\frac{\partial G(s, t)}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn} \frac{d}{dt} P_n(t) \rightarrow \frac{\partial G^{(st.)}(s, t)}{\partial t} \stackrel{!}{=} 0 \quad (18)$$

Az egyszerűség kedvéért normáljuk a fejlődési rátákat úgy, hogy  $w_0 = 1$  értéket vegyen fel. Ennek segítségével megoldhatjuk könnyen a stacionaritási problémát:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(s, t)}{\partial t} &= -qP_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} P_i(t) - (q+1)P_n(t) + qP_{n-1}(t) = \\ &= \underbrace{-qP_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} P_i(t)}_{[1]} - \underbrace{(q+1) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn} \frac{d}{dt} P_n(t)}_{[2]} + \underbrace{q \sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn} \frac{d}{dt} P_{n-1}(t)}_{[3]} \end{aligned} \quad (19)$$

Egyesével felírhatjuk a tagok értékét:

$$[1] = -qP_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} P_i(t) \quad (20)$$

$$[2] = -(q+1)G(s, t) \quad (21)$$

$$[3] = qe^{-s}G(s, t) \quad (22)$$

Visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(s, t)}{\partial t} &= -qP_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} P_i(t) - (q+1)G(s, t) + qe^{-s}G(s, t) = \\ &= -qP_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} P_i(t) - [(q+1) + qe^{-s}]G(s, t) \end{aligned} \quad (23)$$

A ??-ban megfogalmazott stacionaritási feltétel miatt felírhatjuk a következőket:

$$G^{(st.)}(s, t) = \frac{-qP_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} P_i(t)}{(q+1) + qe^{-s}} \quad (24)$$

Hogy a számláló értékét meg tudjuk határozni  $q$ -val kifejezve, felhaaználjuk a következő normálási feltételt:

$$G^{(st.)}(s=0, t) = \frac{-qP_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} P_i(t)}{(q+1) + q} = 1 \quad (25)$$

Amiből a következő összefüggést kapjuk:

$$-qP_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} P_i(t) = 2q + 1 \quad (26)$$

Tehát a generátorfüggvény végleges alakja:

$$G^{(st.)}(s, t) = \frac{2q + 1}{(q+1) + qe^{-s}} \quad (27)$$

A generátorfüggvények ismert és tanult formalizmusa lehetővé teszi számunkra, hogy megadjuk a keresett  $\langle n \rangle$  mennyiséget, ami a mászó által elért átlagos magasságot jelöli. Ez a (??) generátorfüggvény első momentuma:

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= - \left. \frac{\partial G^{(st.)}(s, t)}{\partial s} \right|_{s=0} = - \frac{d}{ds} \frac{2q+1}{(q+1) + qe^{-s}} = - (2q+1) \frac{qe^{-s}}{((q+1) + qe^{-s})^2} \Big|_{s=0} = \\ &= \frac{(2q+1)q}{(2q+1)^2} = \frac{q}{2q+1} \end{aligned} \quad (28)$$

Mivel  $q = \frac{w}{w_0}$ , és  $w_0 = 1$ , ezért ez a következő alakba írható:

$$\boxed{\langle n \rangle = \frac{w}{2w+1}} \quad (29)$$

Tehát ilyen magasra jut a hegymászó átlagosan, mászás közben. Pl.  $w = 0.9$  ráta esetén:

$$\langle n \rangle = \frac{0.9}{2 \cdot 0.9 + 1} = \frac{0.9}{2.8} \approx 0.32 \quad (30)$$

Tehát átlagosan sosem túl magasra... Ez várható is volt, hisz érezhetően sokkal kisebb az esélye a magasabb pontok elérésének az itteni, minden alkalommal 0 szintre zuhanás feltételével, mint az előző házi feladatban szereplő csak 1 szintet visszazuhanó mászás esetében.



## Felhasznált irodalom

- [1] Dominique DeJaeger, Patrick A Willems, and Norman C Heglund. “The energy cost of walking in children”. In: *Pflügers Archiv* 441.4 (2001), pp. 538–543.
- [2] Aldis Run Larusdottir and AS Dederichs. “Evacuation dynamics of children–walking speeds, flows through doors in daycare centers”. In: *Pedestrian and Evacuation Dynamics*. Springer, 2011, pp. 139–147.
- [3] GA Cavagna, P Franzetti, and T Fuchimoto. “The mechanics of walking in children.” In: *The Journal of physiology* 343.1 (1983), pp. 323–339.
- [4] Simone V Gill et al. “The relationship between foot arch measurements and walking parameters in children”. In: *BMC pediatrics* 16.1 (2016), p. 15.