

1. FELADAT

A) feladatrész

K: „Próbáljunk emlékezni arra az eseményre, amivel kapcsolatban először gondoltunk véletlenszerűségekre. Miért tekintettük az eseményt véletlennek, s mit gondoltunk a jelenség hátteréről?”

B) feladatrész

K: „Emlékezzünk olyan, az életünkben megtörtént eseményre, amikor kiszámoltunk valószínűségeket (az adott ismereteinkből kiindulva), s ezek a valószínűségek határozták meg a tetteinket!”

C) feladatrész

K: „Találjunk olyan véletlenszerű jelenséget környezetünkben, amelyre a Brown-mozgás típusú leírás jó közelítést adna!”

1. A pénzügyi világ és a piac dinamikáját leíró matematikai modellek egyik megközelítési módja a Brown-mozgást/fehér zajt leíró matematikai formalizmus (pl. Langevin egyenlet[1]) alkalmazása. A tőzsdei mozgásokat, értékpapírok, vagy valuták értékének változását és sok mást is modell szinten, alkalmas így leírni.
- 2.

2. FELADAT

A) feladatrész

K: „Dobjuk fel az érmét kétszer. Milyen valószínűséggel kapunk két fejet (FF), illetve írás-fej (IF) sorrendet? Ugyanaz a két valószínűség?”

Számoljunk a $\frac{\text{kedvező}}{\text{összes}}$ szabállyal jelen esetben. Az első alkalommal azt mondhatjuk, hogy a FF dobás valószínűsége a következő:

$$\frac{\{FF\}}{\{FF; IF; FI; II\}} = \frac{1}{4} \quad (1)$$

Ugyanis összesen négy különböző eset lehetséges, ezekből mi az egyiket várjuk eredményül. Második esetben ugyanezt mondhatjuk el, hasonlóan írhatjuk fel az IF dobás valószínűségét:

$$\frac{\{IF\}}{\{FF; IF; FI; II\}} = \frac{1}{4} \quad (2)$$

Szintén egy lehetőséget választunk ki az összesen várható négy közül.

Másképp is leírhatjuk a helyzetet. Ismert, hogy mind a fej, mind az írás dobásának valószínűsége

$$P(\text{fej (F)}) = P(\text{írás (I)}) = \frac{1}{2} \quad (3)$$

Mivel a pénz második feldobása az első dobástól független esemény, ezért felírhatjuk, hogy:

$$P(FF) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad (4)$$

Ugyanígy a másik esetre:

$$P(IF) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad (5)$$

A két esemény tehát azonos valószínűséggel fordul elő.

B) feladat rész

K: „Játsszuk a következő játékot! Addig dobálunk, amíg vagy két fej (FF - én nyerek), vagy fej-írás (FI - te nyersz) jön ki. Igazságos ez a játék?”

A nyerés feltétele mindkét játékos számára, hogy az első dobás fej (F) legyen. Ezt követően akkor nyer vagy az egyik vagy a másik, ha vagy fej (F), vagy írás (I) a rá következő dobás. Itt is elmondhatjuk hogy az egymást követő dobások független események, így egy F eredmény követően mind egy F, mind pedig egy I azonosan $\frac{1}{2}$ valószínűséggel következik be. Azt mondhatjuk tehát, hogy igen, igazságos a játék, ugyanis mindkét fél nyerési esélye azonos. Azt feltételezni az ilyen események sorozatánál, hogy a második dobás függ az előtte levőtől (pl. hogy egy F után $\frac{1}{4}$ valószínűséggel következik be még egy F és így az írás előnyben van) szokás a *szerencsejátékosok tévedésének* [2], vagy *Monte Carlo tévedésnek* hívni. Ez arra a rossz meglátásra alapul, miszerint egy már (gyakran) előfordult eseményről intuitíve azt gondoljuk, hogy a jövőben kisebb valószínűséggel fog előfordulni. Ez független események esetén viszont nem igaz, lásd a fenti pénzdobás példája. Mindegy hányszor fordult elő már F, vagy I a dobások során, a következő esetében mind F, mind pedig I azonosan $P = \frac{1}{2}$ valószínűséggel következik be.

3. FELADAT

3.1. Szimmetrikus - driftmentes - rendszer

K: „Egydimenziós mozgást végző részecske τ időközönként véletlen irányú erő hatására előző helyzetétől l távolságra ugrik (egyenlő $p_+ = p_- = \frac{1}{2}$ valószínűséggel jobbra vagy balra). A részecske az $x_0 = 0$ pontból indul.

Határozzuk meg a $t = N_\tau$ idő alatti elmozdulás és az elmozdulás négyzetének átlagát, $\langle x_r \rangle$ -t és $\langle x_r^2 \rangle$ -t”

Ismert, hogy az x_r elmozdulás várható értéke

$$\langle x_r \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot P(x, t) dx. \quad (6)$$

Míg az elmozdulás négyzet várható értéke

$$\langle x_r^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot P(x, t) dx. \quad (7)$$

Jelölje az $P(x, t)$ az x pontban való tartózkodás valószínűségét a keresett $t = N_\tau$ idő után. Ekkor felírhatjuk a következőket[3]:

$$P(x, t + \tau) = p_- \cdot P(x - l, t) + p_+ \cdot P(x + l, t) \quad (8)$$

Kiinduló feltevéseink közé tartozik, hogy $p_- = p_+ = \frac{1}{2}$, tehát a rendszer szimmetrikus. Ekkor a (8)-as egyenlet a következőképp alakul:

$$P(x, t + \tau) = \frac{1}{2} \cdot P(x - l, t) + \frac{1}{2} \cdot P(x + l, t) \quad (9)$$

Ezt a differencia egyenletet a Kramers–Moyal-sorfejtés segítségével alakítjuk át a $P(x, t)$ -re vonatkozó differenciálegyenletre, melyet Fokker–Planck-egyenletnek nevezünk[4]. Első lépésben vonjunk ki mindkét oldalból $P(x, t)$, amiket aztán τ és l , 0-hoz történő közelítésével sorbafejtünk t és x szerint:

$$P(x, t + \tau) - P(x, t) = \frac{1}{2} \cdot [P(x - l, t) - P(x, t)] + \frac{1}{2} \cdot [P(x + l, t) - P(x, t)] \quad (10)$$

A fentiek alapján alakítsuk át ezeket: a bal oldalt fejtsük sorba t , a jobb oldalt pedig x szerint. A t szerintinél az első, az x szerintinél pedig a második rendig fejtsünk sorba:

$$P(x, t + \tau) - P(x, t) = \tau \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} + \mathcal{O}(\tau^2) \quad (11)$$

$$P(x - l, t) - P(x, t) = -l \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} + \mathcal{O}(l^3) \quad (12)$$

$$P(x+l, t) - P(x, t) = +l \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} + \mathcal{O}(l^3) \quad (13)$$

A kapott eredményt helyettesítsük be az eredeti, (10)-es egyenletbe:

$$\begin{aligned} \tau \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} + \mathcal{O}(\tau^2) &= \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[-l \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} + \mathcal{O}(l^3) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \left[l \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} + \mathcal{O}(l^3) \right] \end{aligned} \quad (14)$$

A sorfejtés elhanyagolhatóan kicsi tagjait kihagyva:

$$\tau \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \cdot \left[-l \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} \right] + \frac{1}{2} \cdot \left[l \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} \right] \quad (15)$$

Rendezésnél az x -ben lineáris tagok kiesnek. A maradékot átosztva τ -val, megkapjuk a Fokker–Planck-egyenletet:

$$\tau \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \cdot \left[\cancel{-l \frac{\partial P(x, t)}{\partial x}} + \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} + \cancel{l \frac{\partial P(x, t)}{\partial x}} + \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} \right] \quad (16)$$

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \frac{l^2}{2\tau} \cdot \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} = D \cdot \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} \quad (17)$$

Az ebben az egyenletben megjelenő $\frac{l^2}{2\tau} = D$ tagot nevezzük a rendszer *diffúziós együtthatójának*. Olyan esetben, amikor $p_- \neq p_+$, akkor a első rendű tagok is bent maradnak, megszorozva egy $-(p_- - p_+) \frac{l}{\tau} = -v$ együtthatóval, melyet a rendszer *driftjének*, vagy *sodródásának* hívunk.

A (17)-es differenciálegyenletet a $P(x, t=0) = \delta(x)$ kezdőfeltétellel oldjuk meg. Ennek megoldása ismert, ez a Gauss függvény:

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad (18)$$

Ennek a felhasználásával pedig megadhatjuk a keresett $\langle x_r \rangle$ és $\langle x_r^2 \rangle$ várható értékeket a (6)-os és (7)-es egyenletek alapján:

$$\langle x_r \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx \quad (19)$$

$$\langle x_r^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx \quad (20)$$

Végezzük el a következő változócserét:

$$y := \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \rightarrow x = y \cdot \sqrt{4Dt}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{4Dt}} \rightarrow dx = \sqrt{4Dt} dy$$

Majd helyettesítsünk be a fenti (19)-es és (20)-as egyenletekbe:

$$\begin{aligned} \langle x_r \rangle &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \sqrt{4Dt} \cdot e^{-y^2} \cdot \sqrt{4Dt} dy = \\ &= \frac{4Dt}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot e^{-y^2} dy = \frac{4Dt}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot 0 = \underline{\underline{0}} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \langle x_r^2 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (y \cdot \sqrt{4Dt})^2 \cdot e^{-y^2} \cdot \sqrt{4Dt} dy = \\ &= \frac{(4Dt)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot e^{-y^2} dy = \frac{4Dt}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \underline{\underline{2Dt}} \end{aligned} \quad (22)$$

3.2. Asszimmetrikus - driftelő - rendszer

K: „Vizsgáljuk a fenti problémát $p_+ = 4p_-$ esetre és számítsuk ki az $\langle x_r \rangle$, $\langle x_r^2 \rangle$ és a $\langle x_r^2 \rangle - \langle x_r \rangle$ átlagokat!”

Nézzük azt a helyzetet, amikor a rendszerben van drift, tehát $p_- \neq p_+$, ahol most $p_- = \frac{1}{5}$ és $p_+ = \frac{4}{5}$. Ebben az esetben a (8)-as egyenletet a következőképp alakul:

$$P(x, t + \tau) = \frac{1}{5} \cdot P(x - l, t) + \frac{4}{5} \cdot P(x + l, t) \quad (23)$$

Elvégezve a (10)-(15) egyenletekhez hasonlóan a Kramer–Moyal-sorfejtést, az elsőrendű tagok utána már nem esnek ki. Ekvivalensen a (15)-ös egyenletben szereplő lépés itt most így fest:

$$\tau \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{5} \cdot \left[-l \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} \right] + \frac{4}{5} \cdot \left[l \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} \right] \quad (24)$$

Ezt az egyenletet rendezve a következő alakot kapjuk az előző alfejezet végén leírtak alapján:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \frac{3}{5} \cdot \frac{l}{\tau} \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + \frac{l^2}{2\tau} \cdot \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} = -v \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + D \cdot \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} \quad (25)$$

A kapott differenciálegyenletet az előzőekhez hasonlóan, szintén a $P(x, t=0) = \delta(x)$ kez-
dőfeltétellel oldjuk meg. Ennek megoldásához bevezetjük a következő változcserét:

$$y := x - vt \quad \rightarrow \quad P(x, t) = \tilde{P}(y, t) = \tilde{P}(x - vt, t)$$

Melyre a (25)-ös egyenlet a következőképp módosul:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} &= -v \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + D \cdot \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} \quad \rightarrow \\ \rightarrow \frac{\partial \tilde{P}(y, t)}{\partial t} &= -v \frac{\partial \tilde{P}(y, t)}{\partial x} + D \cdot \frac{\partial^2 \tilde{P}(y, t)}{\partial y^2} \quad \rightarrow \\ \rightarrow \frac{\partial \tilde{P}(x - vt, t)}{\partial t} &= -v \frac{\partial \tilde{P}(x - vt, t)}{\partial x} + D \cdot \frac{\partial^2 \tilde{P}(x - vt, t)}{\partial y^2} \quad \rightarrow \\ \rightarrow & \end{aligned} \quad (26)$$

4. FELADAT

A) feladat rész

K: „Vizsgáljuk a Brown mozgás előadáson tárgyalt, Einstein-féle leírását, s legyen sodródás is a rendszerben (szél fúj a víz felett).

Ekkor a τ időnként megtett ugrások hosszának (Δ) valószínűségi eloszlása nem szimmetrikus $\Phi(-\Delta) \neq \Phi(\Delta)$, s várhatóan $\overline{\Delta} = \int \Delta \Phi(\Delta) d\Delta \neq 0$.

Írjuk fel a Chapman-Kolmogorov egyenletet, s deriváljuk a részecske megtalálási valószínűségét, $P(x, t)$ -t meghatározó Fokker-Planck egyenletet! Mennyiben különbözik ez az egyenlet az előadáson tárgyalt diffúziós egyenlettől?”

A feladat megoldása a 3.2-es fejezetben ismertetettekkel nagyrészt analóg. Az Brown-mozgás Einstein-féle leírásának feltételei sodródás esetén a következők - ahogy többek között azok feladat szövegében is szerepelnek:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta) d\Delta = 1$
2. $\Phi(-\Delta) \neq \Phi(\Delta)$
3. $\overline{\Delta} = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta \Phi(\Delta) d\Delta \neq 0$

Annak valószínűsége, hogy egy részecske τ idő múlva az x és $x + dx$ közötti tartományban foglal helyet:

$$P(x, t + \tau) = P(x, t) dx - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta) d\Delta \cdot P(x, t) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta) d\Delta \cdot P(x - \Delta, t) \quad (27)$$

B) feladatrész

K: „Írjuk fel az egyenlet megoldását arra az esetre, ha a virágporszem az origóból indul!”

OK

Felhasznált irodalom

- [1] Roumen Tsekov. “Brownian Markets”. In: *Chinese Physics Letters* 30, 088901 (Aug. 2013), p. 088901. DOI: [10 . 1088 / 0256 - 307X / 30 / 8 / 088901](https://doi.org/10.1088/0256-307X/30/8/088901). arXiv: [1010 . 2061 \[q-fin.ST\]](https://arxiv.org/abs/1010.2061).
- [2] Rachel Croson and James Sundali. “The gambler’s fallacy and the hot hand: Empirical data from casinos”. In: *Journal of risk and uncertainty* 30.3 (2005), pp. 195–209.
- [3] Nino Zanghì. *Brownian Motion*. 2015. URL: <https://www.ge.infn.it/~zanghi/FS/BrownTEXT.pdf>.
- [4] J. L. Garcia-Palacios. “Introduction to the theory of stochastic processes and Brownian motion problems”. In: *arXiv e-prints*, cond-mat/0701242 (Jan. 2007), cond-mat/0701242. arXiv: [cond-mat/0701242 \[cond-mat.stat-mech\]](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0701242).