

## 1. FELADAT

### A) feladatrész

*K: „Próbáljunk emlékezni arra az eseményre, amivel kapcsolatban először gondoltunk véletlenszerűségre. Miért tekintettük az eseményt véletlennek, s mit gondoltunk a jelenség hátteréről?”*

9-10 éves koromig bezárólag néha-néha édesapám szelvényeket vett az M1-en futó Luxor című szerencsejátékba. Ez egy szombat esti családi programként működött nálunk és ilyenkor mindegyikünk kapott egy-egy szelvényt, amit ő maga kellett kitöltsön a játék során. Egy szelvényen két egymás alatti  $5 \times 5$ -ös négyzetben szerepeltek 1-90-ig nyerőszámok, és egy szám többször is, de legfeljebb háromszor fordulhatott elő rajta. A számokat a játék során egyesével sorsolták, géppel. Ha egy játékos szelvényén szerepelt egy kihúzott szám, azt azon karikázással jelölte. A cél az volt, hogy az egyik négyzet külső keretében, vagy az azon belüli  $3 \times 3$ -as mezőben minden számot eltaláljunk. A játék minden héten az első főnyeremény értékű találatig folytatódott, mely egy egész  $5 \times 5$ -ös négyzet megtöltését jelentette.

Ezen keresztül találkoztam először a „véletlen” fogalmával - és egyben a kezdetekben így ismerkedtem meg jobban a számokkal is. Megértettem, hogy mit jelent a „véletlen húzás” és azt is persze, hogy hiába húznak ki akár 35-40 számot is egy szerencsejáték során a 90-ből, milyen kis valószínűséggel nyerhet bármit is az ember rajtuk.

### B) feladatrész

*K: „Emlékezzünk olyan, az életünkben megtörtént eseményre, amikor kiszámoltunk valószínűségeket (az adott ismereteinkből kiindulva), s ezek a valószínűségek határozták meg a tetteinket!”*

Ha az előző példához hasonlóan a legelső ezzel kapcsolatos emlékemet idézem fel, az általános iskolához kötődik, ahol 3-4. osztályos korunkban nagyon sokat játszottunk kő-papír-olló szünetekben. Kisebb koromban rengeteget néztem a National Geographic Channel-t, és egy ott látott műsor után - ami a szerencsejátékról és valószínűségekről szólt - a fejembe vettem, hogy „taktikázni” fogok a jövőben a játékok alkalmával. Megfigyeltem - talán a műsor tanácsára -, hogy az osztálytársaim nagyon ritkán mutatják kétszer ugyanazt a jelet egymás után. Így rájöttem, hogy érdemes ez alapján gondolkodni: olyan jel mutatásával lesz a legnagyobb esélyem gyakorlatban a nyeresre, amit az ellenfél előző lépése legyőzne, de a fennmaradó kettő közül az egyiket legyőzi, a másikkal pedig döntetlent játszik.

Természetesen ez minden esetben fennáll a kő-papír-olló szabályai szerint. Elég csupán arra figyelmem, hogy az ellenfél előző lépése melyik jelet üti a lehetséges 3 közül. Szigorú értelemben itt nem „kiszámoltam” a valószínűségeket, csupán figyelembe vettem, hogy mi a „valószínűbb” esemény.

Elméleti síkon természetesen nem korrekt a gondolkodás, mivel mind a kő, a papír és az olló mutatása egymástól független esemény. Egy jelet mindig azonos eséllyel követ egy tet-szőleges másik, tehát minden azonosan hosszú sorozat előfordulási valószínűsége megegyezik.

### C) feladatrész

*K: „Találjunk olyan véletlenszerű jelenséget környezetünkben, amelyre a Brown-mozgás típusú leírás jó közelítést adna!”*

1. A pénzügyi világ és a piac dinamikáját leíró matematikai modellek egyik megközelítési módja a Brown-mozgást/fehér zajt leíró matematikai formalizmus (pl. Langevin egyenlet[1]) alkalmazása. A tőzsdei mozgásokat, értékpapírok, vagy valuták értékének változását és sok mást is alkalmas így leírni, ugyanis az előrejelzési modelleket nagyban javíthatja.
2. Állatpopulációk, vagy egyes egyedek mozgásának leírásához a sztochasztikus differenciálegyenletek használata (mint amilyen pl. a Brown-mozgás leírása is) megszokottnak számít az etológiában. Egy állat mozgása általában véletlenszerű, grafikusán is kísértetiesen hasonlít a részecskék Brown-mozgását szemléltető ábrákhoz.[2][3][4]

## 2. FELADAT

### A) feladat rész

K: „Dobjuk fel az érmét kétszer. Milyen valószínűséggel kapunk két fejet (FF), illetve írás-fej (IF) sorrendet? Ugyanaz a két valószínűség?”

Számoljunk a  $\frac{\text{kedvező}}{\text{összes}}$  szabállyal jelen esetben. Az első alkalommal azt mondhatjuk, hogy a FF dobás valószínűsége a következő:

$$\frac{\{FF\}}{\{FF; IF; FI; II\}} = \frac{1}{4} \quad (1)$$

Ugyanis összesen négy különböző eset lehetséges, ezekből mi az egyiket várjuk eredményül. Második esetben ugyanezt mondhatjuk el, hasonlóan írhatjuk fel az IF dobás valószínűségét:

$$\frac{\{IF\}}{\{FF; IF; FI; II\}} = \frac{1}{4} \quad (2)$$

Szintén egy lehetőséget választunk ki az összesen várható négy közül.

Másképp is leírhatjuk a helyzetet. Ismert, hogy mind a fej, mind az írás dobásának valószínűsége

$$P(\text{fej (F)}) = P(\text{írás (I)}) = \frac{1}{2} \quad (3)$$

Mivel a pénz második feldobása az első dobástól független esemény, ezért felírhatjuk, hogy:

$$P(FF) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad (4)$$

Ugyanígy a másik esetre:

$$P(IF) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad (5)$$

A két esemény tehát azonos valószínűséggel fordul elő.

### B) feladat rész

K: „Játsszuk a következő játékot! Addig dobálunk, amíg vagy két fej (FF - én nyerek), vagy fej-írás (FI - te nyersz) jön ki. Igazságos ez a játék?”

A nyereség feltétele mindkét játékos számára, hogy az első dobás fej (F) legyen. Ezt követően akkor nyer vagy az egyik vagy a másik, ha vagy fej (F), vagy írás (I) a rá következő dobás. Itt is elmondhatjuk hogy az egymást követő dobások független események, így egy F

eredmény követően mind egy F, mind pedig egy I azonosan  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel következik be. Azt mondhatjuk tehát, hogy igen, igazságos a játék, ugyanis mindkét fél nyerési esélye azonos. Azt feltételezni az ilyen események sorozatánál, hogy a második dobás függ az előtte levőtől (pl. hogy egy F után  $\frac{1}{4}$  valószínűséggel következik be még egy F és így az írás előnyben van) szokás a *szerencsejátékosok tévedésének* [5], vagy *Monte Carlo tévedésnek* hívni. Ez arra a rossz meglátásra alapul, miszerint egy már (gyakran) előfordult eseményről intuitíve azt gondoljuk, hogy a jövőben kisebb valószínűséggel fog előfordulni. Ez független események esetén viszont nem igaz, lásd a fenti pénzdobás példája. Mindegy hányszor fordult elő már F, vagy I a dobások során, a következő esetében mind F, mind pedig I azonosan  $P = \frac{1}{2}$  valószínűséggel következik be.

### 3. FELADAT

#### 3.1. Szimmetrikus - driftmentes - rendszer

*K: „Egydimenziós mozgást végző részecske  $\tau$  időközönként véletlen irányú erő hatására előző helyzetétől  $l$  távolságra ugrik (egyenlő  $p_+ = p_- = \frac{1}{2}$  valószínűséggel jobbra vagy balra). A részecske az  $x_0 = 0$  pontból indul.*

*Határozzuk meg a  $t = N_\tau$  idő alatti elmozdulás és az elmozdulás négyzetének átlagát,  $\langle x_r \rangle$ -t és  $\langle x_r^2 \rangle$ -t”*

Ismert, hogy az  $x_r$  elmozdulás várható értéke

$$\langle x_r \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot P(x, t) dx. \quad (6)$$

Míg az elmozdulás négyzet várható értéke

$$\langle x_r^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot P(x, t) dx. \quad (7)$$

Jelölje az  $P(x, t)$  az  $x$  pontban való tartózkodás valószínűségét a keresett  $t = N_\tau$  idő után. Ekkor felírhatjuk a következőket[6]:

$$P(x, t + \tau) = p_- \cdot P(x - l, t) + p_+ \cdot P(x + l, t) \quad (8)$$

Kiinduló feltevéseink közé tartozik, hogy  $p_- = p_+ = \frac{1}{2}$ , tehát a rendszer szimmetrikus. Ekkor a (8)-as egyenlet a következőképp alakul:

$$P(x, t + \tau) = \frac{1}{2} \cdot P(x - l, t) + \frac{1}{2} \cdot P(x + l, t) \quad (9)$$

Ezt a differencia egyenletet a Kramers–Moyal-sorfejtés segítségével alakítjuk át a  $P(x, t)$ -re vonatkozó differenciálegyenletre, melyet Fokker–Planck-egyenletnek nevezünk[7]. Első lépésben vonjunk ki mindkét oldalból  $P(x, t)$ , amiket aztán  $\tau$  és  $l$ , 0-hoz történő közelítésével sorbafejtünk  $t$  és  $x$  szerint:

$$P(x, t + \tau) - P(x, t) = \frac{1}{2} \cdot [P(x - l, t) - P(x, t)] + \frac{1}{2} \cdot [P(x + l, t) - P(x, t)] \quad (10)$$

A fentiek alapján alakítsuk át ezeket: a bal oldalt fejtsük sorba  $t$ , a jobb oldalt pedig  $x$  szerint. A  $t$  szerintinél az első, az  $x$  szerintinél pedig a második rendig fejtsünk sorba:

$$P(x, t + \tau) - P(x, t) = \tau \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} + \mathcal{O}(\tau^2) \quad (11)$$

$$P(x - l, t) - P(x, t) = -l \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} + \mathcal{O}(l^3) \quad (12)$$

$$P(x+l, t) - P(x, t) = +l \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} + \mathcal{O}(l^3) \quad (13)$$

A kapott eredményt helyettesítsük be az eredeti, (10)-es egyenletbe:

$$\begin{aligned} \tau \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} + \mathcal{O}(\tau^2) &= \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[ -l \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} + \mathcal{O}(l^3) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \left[ l \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} + \mathcal{O}(l^3) \right] \end{aligned} \quad (14)$$

A sorfejtés elhanyagolhatóan kicsi tagjait kihagyva:

$$\tau \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \cdot \left[ -l \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} \right] + \frac{1}{2} \cdot \left[ l \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} \right] \quad (15)$$

Rendezésnél az  $x$ -ben lineáris tagok kiesnek. A maradékot átosztva  $\tau$ -val, megkapjuk a Fokker–Planck-egyenletet:

$$\tau \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \cdot \left[ \cancel{-l \frac{\partial P(x, t)}{\partial x}} + \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} + \cancel{l \frac{\partial P(x, t)}{\partial x}} + \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} \right] \quad (16)$$

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \frac{l^2}{2\tau} \cdot \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} = D \cdot \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} \quad (17)$$

Az ebben az egyenletben megjelenő  $\frac{l^2}{2\tau} = D$  tagot nevezzük a rendszer *diffúziós együtthatójának*. Olyan esetben, amikor  $p_- \neq p_+$ , akkor a első rendű tagok is bent maradnak, megszorozva egy  $-(p_- - p_+) \frac{l}{\tau} = -v$  együtthatóval, melyet a rendszer *driftjének*, vagy *sodródásának* hívunk.

A (17)-es differenciálegyenletet a  $P(x, t=0) = \delta(x)$  kezdőfeltétellel oldjuk meg. Ennek megoldása ismert, ez a Gauss függvény:

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad (18)$$

Ennek a felhasználásával pedig megadhatjuk a keresett  $\langle x_r \rangle$  és  $\langle x_r^2 \rangle$  várható értékeket a (6)-os és (7)-es egyenletek alapján:

$$\langle x_r \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx \quad (19)$$

$$\langle x_r^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx \quad (20)$$

Végezzük el a következő változócserét:

$$y := \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \rightarrow x = y \cdot \sqrt{4Dt}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{4Dt}} \rightarrow dx = \sqrt{4Dt} dy$$

Majd helyettesítsünk be a fenti (19)-es és (20)-as egyenletekbe:

$$\begin{aligned} \langle x_r \rangle &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \sqrt{4Dt} \cdot e^{-y^2} \cdot \sqrt{4Dt} dy = \\ &= \frac{4Dt}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y \cdot e^{-y^2} dy}_{=0} = \frac{4Dt}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot 0 = \underline{\underline{0}} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \langle x_r^2 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (y \cdot \sqrt{4Dt})^2 \cdot e^{-y^2} \cdot \sqrt{4Dt} dy = \\ &= \frac{(4Dt)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot e^{-y^2} dy}_{=\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \frac{4Dt}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \underline{\underline{2Dt}} \end{aligned} \quad (22)$$

### 3.2. Asszimmetrikus - driftelő - rendszer

*K: „Vizsgáljuk a fenti problémát  $p_+ = 4p_-$  esetre és számítsuk ki az  $\langle x_r \rangle$ ,  $\langle x_r^2 \rangle$  és a  $\langle x_r^2 \rangle - \langle x_r \rangle$  átlagokat!”*

Nézzük azt a helyzetet, amikor a rendszerben van drift, tehát  $p_- \neq p_+$ , ahol most  $p_- = \frac{1}{5}$  és  $p_+ = \frac{4}{5}$ . Ebben az esetben a (8)-as egyenletet a következőképp alakul:

$$P(x, t + \tau) = \frac{1}{5} \cdot P(x - l, t) + \frac{4}{5} \cdot P(x + l, t) \quad (23)$$

Elvégezve a (10)-(15) egyenletekhez hasonlóan a Kramer–Moyal-sorfejtést, az elsőrendű tagok utána már nem esnek ki. Ekvivalensen a (15)-ös egyenletben szereplő lépés itt most így fest:

$$\tau \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{5} \cdot \left[ -l \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} \right] + \frac{4}{5} \cdot \left[ l \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} \right] \quad (24)$$

Ezt az egyenletet rendezve a következő alakot kapjuk az előző alfejezet végén leírtak alapján:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \frac{3}{5} \cdot \frac{l}{\tau} \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + \frac{3l^2}{10\tau} \cdot \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} = -v \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + D \cdot \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} \quad (25)$$

A kapott differenciálegyenletet az előzőekhez hasonlóan, szintén a  $P(x, t=0) = \delta(x)$  kez-  
dőfeltétellel oldjuk meg. Ennek megoldásához bevezetjük a következő változcserét:

$$P(x, t) := \tilde{P}(y(x, t), t) = \tilde{P}(x - vt, t)$$

Melyre a (25)-ös egyenlet a következőképp módosul:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} &= -v \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + D \cdot \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} \rightarrow \\ \rightarrow \frac{\partial \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial t} &= -v \frac{\partial \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial x} + D \cdot \frac{\partial^2 \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (26)$$

Bontsuk ki a parciális deriváltakat:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial t} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial t} &= \\ = -v \cdot \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial y} + D \cdot \partial_x \left( \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial t} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial t} &= \\ = -v \cdot \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial y} + D \cdot \partial_x \left( \frac{\partial (x - vt)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (x - vt)}{\partial t} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial y} + 1 \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial t} &= \\ = -v \cdot \frac{\partial (x - vt)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial y} + D \cdot \frac{\partial (x - vt)}{\partial x} \cdot \frac{\partial (x - vt)}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial (x - vt)}{\partial t}}_{=-v} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial y} + 1 \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial t} &= \\ = -v \cdot \underbrace{\frac{\partial (x - vt)}{\partial x}}_{=1} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial y} + D \cdot \underbrace{\frac{\partial (x - vt)}{\partial x}}_{=1} \cdot \underbrace{\frac{\partial (x - vt)}{\partial x}}_{=1} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (30)$$



$$\cancel{-v \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x,t), t)}{\partial y}} + \frac{\partial \tilde{P}(y(x,t), t)}{\partial t} = \cancel{-v \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x,t), t)}{\partial y}} + D \cdot \frac{\partial^2 \tilde{P}(y(x,t), t)}{\partial y^2} \quad (31)$$

Ezt követően pedig megkapjuk a végleges egyenletünket:

$$\frac{\partial \tilde{P}(y(x,t), t)}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 \tilde{P}(y(x,t), t)}{\partial y^2} \quad (32)$$

Mely  $\tilde{P}$ -re vonatkozólag megegyezik a driftmentes leírás Fokker–Planck-egyenletével. Ennek megoldása  $\tilde{P}(y, t=0) = \delta(y)$  kezőfeltétellel (mely ekvivalens a  $P(x, t=0) = \delta(x)$  feltétellel) a már ismert Gauss-függvény:

$$\tilde{P}(y, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot e^{-\frac{y^2}{4Dt}} \quad (33)$$

Melyet változócsereével visszaalakítva megkapjuk az egyenletünk megoldását:

$$\boxed{P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot e^{-\frac{(x-vt)^2}{4Dt}}} \quad (34)$$

A (6)-os és (7)-es egyenletek alapján megadhatjuk a keresett  $\langle x_r \rangle$  és  $\langle x_r^2 \rangle$ , valamint az  $\langle x_r^2 \rangle - \langle x_r \rangle^2$  értékeket:

$$\langle x_r \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x P(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot e^{-\frac{(x-vt)^2}{4Dt}} dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{(x-vt)^2}{4Dt}} dx \quad (35)$$

$$\langle x_r^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot e^{-\frac{(x-vt)^2}{4Dt}} dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{(x-vt)^2}{4Dt}} dx \quad (36)$$

Vezessük be a következő változócsereét:

$$y := \frac{x - vt}{\sqrt{4Dt}} \quad \rightarrow \quad x = y \cdot \sqrt{4Dt} + vt$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{4Dt}} \quad \rightarrow \quad dx = \sqrt{4Dt} dy$$

Ezt behelyettesítve a fentiekbe, megkapjuk a keresett értékeket:

$$\begin{aligned}
 \langle x_r \rangle &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (y \cdot \sqrt{4Dt} + vt) \cdot e^{-y^2} \sqrt{4Dt} dy = \frac{\sqrt{4Dt}}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (y \cdot \sqrt{4Dt} + vt) \cdot e^{-y^2} dy = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} (y \cdot \sqrt{4Dt}) \cdot e^{-y^2} dy + \int_{-\infty}^{\infty} (vt) \cdot e^{-y^2} dy \right) = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left( \underbrace{\sqrt{4Dt} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot e^{-y^2} dy}_{=0} + vt \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy}_{=\sqrt{\pi}} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} \cdot vt = \boxed{vt} \tag{37}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle x_r^2 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (y \cdot \sqrt{4Dt} + vt)^2 \cdot e^{-y^2} \sqrt{4Dt} dy = \frac{\sqrt{4Dt}}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (y \cdot \sqrt{4Dt} + vt)^2 \cdot e^{-y^2} dy = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} (y \cdot \sqrt{4Dt})^2 \cdot e^{-y^2} dy + \int_{-\infty}^{\infty} 2 \cdot y \cdot \sqrt{4Dt} \cdot vt \cdot e^{-y^2} dy + \int_{-\infty}^{\infty} (vt)^2 \cdot e^{-y^2} dy \right) = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left( 4Dt \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot e^{-y^2} dy}_{=\frac{\sqrt{\pi}}{2}} + 2 \cdot \sqrt{4Dt} \cdot vt \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y \cdot e^{-y^2} dy}_{=0} + (vt)^2 \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy}_{=\sqrt{\pi}} \right) = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left( 4Dt \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} + (vt)^2 \cdot \sqrt{\pi} \right) = \boxed{2Dt + (vt)^2} \tag{38}
 \end{aligned}$$

$$\langle x_r^2 \rangle - \langle x_r \rangle^2 = \boxed{2Dt + (vt)^2 - vt^2} \tag{39}$$

Ahol:

$$\begin{aligned}
 v &= -\frac{3}{5} \cdot \frac{l}{\tau} \\
 D &= \frac{3l^2}{10\tau}
 \end{aligned}$$

Így végül felírhatjuk, hogy:

$$\langle x_r \rangle = vt = -\frac{3}{5} \cdot \frac{l}{\tau} t \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
 \langle x_r^2 \rangle &= 2Dt + (vt)^2 = 2 \cdot \frac{3l^2}{10\tau} \cdot t + \left( -\frac{3}{5} \cdot \frac{l}{\tau} \right)^2 \cdot t^2 = \\
 &= \frac{3l^2}{5\tau} \cdot t + \frac{9}{25} \cdot \frac{l^2}{\tau^2} \cdot t^2 = \frac{l^2}{\tau} \cdot t \cdot \left( \frac{3}{5} + \frac{9}{25} \cdot \frac{t}{\tau} \right) \tag{41}
 \end{aligned}$$

$$\langle x_r^2 \rangle - \langle x_r \rangle = 2Dt + (vt)^2 - vt = \frac{l^2}{\tau} \cdot t \cdot \left( \frac{3}{5} + \frac{9}{25} \cdot \frac{t}{\tau} \right) + \frac{3}{5} \cdot \frac{l}{\tau} t \quad (42)$$

## 4. FELADAT

### A) feladat rész

K: „Vizsgáljuk a Brown mozgás előadáson tárgyalt, Einstein-féle leírását, s legyen sodródás is a rendszerben (szél fúj a víz felett).

Ekkor a  $\tau$  időnként megtett ugrások hosszának ( $\Delta$ ) valószínűségi eloszlása nem szimmetrikus  $\Phi(-\Delta) \neq \Phi(\Delta)$ , s várhatóan  $\overline{\Delta} = \int \Delta \Phi(\Delta) d\Delta \neq 0$ .

Írjuk fel a Chapman-Kolmogorov egyenletet, s deriváljuk a részecske megtalálási valószínűségét,  $P(x, t)$ -t meghatározó Fokker-Planck egyenletet! Mennyiben különbözik ez az egyenlet az előadáson tárgyalt diffúziós egyenlettől?”

A feladat megoldása a 3.2-es fejezetben ismertetettekkel nagyrészt analóg. Az Brown-mozgás Einstein-féle leírásának feltételei sodródás esetén a következők - ahogy többek között azok feladat szövegében is szerepelnek:

1.  $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta) d\Delta = 1$
2.  $\Phi(-\Delta) \neq \Phi(\Delta)$
3.  $\overline{\Delta} = \langle \Delta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta \Phi(\Delta) d\Delta \neq 0$

Annak valószínűsége, hogy egy részecske  $\tau$  idő múlva az  $x$  és  $x + dx$  közötti tartományban foglal helyet:

$$P(x, t + \tau) dx = P(x, t) dx - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta) d\Delta \cdot P(x, t) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta) d\Delta \cdot P(x - \Delta, t) dx \quad (43)$$

- A jobb oldal első tagja ( $P(x, t) dx$ ) annak a valószínűségét jelöli, hogy a részecske már  $t$  időpillanatban is az  $x + dx$  helyen tartózkodott.
- A második tag ( $-\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta) d\Delta \cdot P(x, t) dx$ ) ebből levonódik, ugyanis ez annak a valószínűségét adja meg, hogy a részecske  $\tau$  idő alatt kidiffundál az  $x + dx$  tartományból.
- A harmadik tag ( $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta) d\Delta \cdot P(x - \Delta, t)$ ) annak a valószínűségét jelenti, hogy egy részecske valahonnan pont a  $x + dx$  tartományba ugrik bele  $\tau$  időn belül.

Az egyenletet rendezzük, figyelve arra, hogy az integrálások  $d\Delta$  szerint történnek. Emiatt minden tag, ami nem függ  $\Delta$ -tól, kiemelhető az integráljelek elé. A következőt kapjuk:

$$P(x, t + \tau) dx = P(x, t) dx - P(x, t) dx \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta) d\Delta \right) + dx \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta) d\Delta \cdot P(x - \Delta, t) \right) \quad (44)$$

A  $dx$  tagokkal az egyenlet leosztható, így:

$$P(x, t + \tau) = P(x, t) - P(x, t) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta) d\Delta \right) + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta) d\Delta \cdot P(x - \Delta, t) \quad (45)$$

Alkalmazzunk a fent ismert három feltétel közül az első számút, miszerint  $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta) d\Delta = 1$ :

$$P(x, t + \tau) = P(x, t) - \underbrace{P(x, t) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta) d\Delta \right)}_{=1, \text{ az első feltétel szerint.}} + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta) d\Delta \cdot P(x - \Delta, t) \quad (46)$$

$$P(x, t + \tau) = \underbrace{P(x, t) - P(x, t)}_{=0} + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta) d\Delta \cdot P(x - \Delta, t) \quad (47)$$

Mely után végül megkapjuk a *Chapman–Kolmogorov-egyenletet*:

$$\boxed{P(x, t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta) d\Delta \cdot P(x - \Delta, t)} \quad (48)$$

Az egyenlet bal oldalát  $\tau$ -ban, a jobboldalt pedig kétszer  $\Delta$ -ban sorbafejtjük (*Kramers–Moyal-sorfejtés*). Ekkor a következő formulát kapjuk:

$$\begin{aligned} P(x, t) + \tau \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} &= P(x, t) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta) d\Delta - \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \Delta \Phi(\Delta) d\Delta + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \Delta^2 \Phi(\Delta) d\Delta \end{aligned} \quad (49)$$

Amit az első számú feltétel alapján újfent tovább tudunk egyszerűsíteni:

$$\begin{aligned} \cancel{P(x, t)} + \tau \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} &= \cancel{P(x, t)} \cdot \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta) d\Delta}^{=1, \text{ az első feltétel szerint.}} - \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \Delta \Phi(\Delta) d\Delta + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \Delta^2 \Phi(\Delta) d\Delta \end{aligned} \quad (50)$$

Így végül a következő alakot kapjuk:

$$\tau \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \Delta \Phi(\Delta) d\Delta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \Delta^2 \Phi(\Delta) d\Delta \quad (51)$$

Ebben megjelenik két ismert tag, amiknek definícióját a (6)-os és (7)-es egyenletek adják meg:

$$\langle \Delta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta \Phi(\Delta) d\Delta \quad (52)$$

$$\langle \Delta^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta^2 \Phi(\Delta) d\Delta \quad (53)$$

Ezeket behelyettesítve és  $\tau$ -val leosztva kapjuk a következő *Fokker–Planck-egyenletet*:

$$\boxed{\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = -\frac{\langle \Delta \rangle}{\tau} \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta^2 \rangle}{\tau} \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2}} \quad (54)$$

Ez az egyenlet abban különbözik az - előadáson is megoldott - driftmentes változattól, hogy itt a második számú feltétel szerint  $\langle \Delta \rangle \neq 0$ .

## B) feladatrész

*K: „Írjuk fel az egyenlet megoldását arra az esetre, ha a virágporszem az origóból indul!”*

Az előző feladatban már ismertettük, hogy mit jelent egy rendszer *driftje* és *diffúziós együtthatója*, vezessük be itt is ugyanezeket a mennyiségeket:

$$\frac{\langle \Delta \rangle}{\tau} := v \quad (55)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\langle \Delta^2 \rangle}{\tau} := D \quad (56)$$

Ez visszahelyettesítve a Fokker–Planck-egyenletbe:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = -v \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + D \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} \quad (57)$$

Ezt a differenciálegyenletet a  $P(x, t=0) = \delta(x)$  kezdőfeltétellel oldjuk meg, ugyanis  $t=0$ -ban a részecske az origóban tartózkodik.

Vezessük be az előző feladatból már ismert változcserét:

$$P(x, t) := \tilde{P}(y(x, t), t) = \tilde{P}(x - vt, t)$$

Ekkor a következőképp módosul a fenti Fokker–Planck-egyenlet:

$$\frac{\partial \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial t} = -v \frac{\partial \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial x} + D \frac{\partial^2 \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial x^2} \quad (58)$$

Ez teljes mértékben megegyezik az előző feladatban megoldott, driftelő rendszert leíró egyenlettel. Az egyenlet megoldásához ugyanazokat a lépéseket kell elvégezzük:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial t} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial t} = \\ & = -v \cdot \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial y} + D \cdot \partial_x \left( \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial t} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial t} = \\ & = -v \cdot \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial y} + D \cdot \partial_x \left( \frac{\partial (x - vt)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (x - vt)}{\partial t} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial y} + 1 \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial t} = \\ & = -v \cdot \frac{\partial (x - vt)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial y} + D \cdot \frac{\partial (x - vt)}{\partial x} \cdot \frac{\partial (x - vt)}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{\partial (x - vt)}{\partial t}}_{=-v} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial y} + 1 \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial t} = \\ & = -v \cdot \underbrace{\frac{\partial (x - vt)}{\partial x}}_{=1} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial y} + D \cdot \underbrace{\frac{\partial (x - vt)}{\partial x}}_{=1} \cdot \underbrace{\frac{\partial (x - vt)}{\partial x}}_{=1} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (62)$$

$$\cancel{-v \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial y}} + \frac{\partial \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial t} = \cancel{-v \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial y}} + D \cdot \frac{\partial^2 \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial y^2} \quad (63)$$

Ezt követően pedig megkapjuk a végleges egyenletünket:

$$\frac{\partial \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 \tilde{P}(y(x, t), t)}{\partial y^2} \quad (64)$$

Mely  $\tilde{P}$ -re vonatkozólag természetesen itt is megegyezik a driftmentes leírás Fokker-Planck-egyenletével. Ennek megoldása  $\tilde{P}(y, t = 0) = \delta(y)$  kezőfeltétellel (mely ekvivalens a  $P(x, t = 0) = \delta(x)$  feltétellel) a már ismert Gauss-függvény:

$$\tilde{P}(y, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot e^{-\frac{y^2}{4Dt}} \quad (65)$$

Melyet az előző feladatban is szereplő változócserével visszaalakítva, megkapjuk az egyenletünk megoldását:

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot e^{-\frac{(x-vt)^2}{4Dt}} \quad (66)$$



## 5. FELADAT

- Work in progress -

### Felhasznált irodalom

- [1] Roumen Tsekov. “Brownian Markets”. In: *Chinese Physics Letters* 30, 088901 (Aug. 2013), p. 088901. DOI: [10 . 1088 / 0256 - 307X / 30 / 8 / 088901](https://doi.org/10.1088/0256-307X/30/8/088901). arXiv: [1010 . 2061 \[q-fin.ST\]](https://arxiv.org/abs/1010.2061).
- [2] David R Brillinger. “Simulating constrained animal motion using stochastic differential equations”. In: *Lecture Notes-Monograph Series* (2003), pp. 35–48.
- [3] Vladimir Pozdnyakov et al. “On modeling animal movements using Brownian motion with measurement error”. In: *Ecology* 95.2 (2014), pp. 247–253.
- [4] Daniel Bearup et al. “Revisiting Brownian motion as a description of animal movement: a comparison to experimental movement data”. In: *Methods in Ecology and Evolution* 7.12 (2016), pp. 1525–1537.
- [5] Rachel Croson and James Sundali. “The gambler’s fallacy and the hot hand: Empirical data from casinos”. In: *Journal of risk and uncertainty* 30.3 (2005), pp. 195–209.
- [6] Nino Zanghì. *Brownian Motion*. 2015. URL: <https://www.ge.infn.it/~zanghi/FS/BrownTEXT.pdf>.
- [7] J. L. Garcia-Palacios. “Introduction to the theory of stochastic processes and Brownian motion problems”. In: *arXiv e-prints*, cond-mat/0701242 (Jan. 2007), cond-mat/0701242. arXiv: [cond-mat/0701242 \[cond-mat.stat-mech\]](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0701242).