Véletlen folyamatok házi feladatai. 1. hét. Beadási határidő: Feb. 21, 12:00.

(1) (10pt)

Véletlen és valóság.

(a) Próbáljunk emlékezni arra az eseményre, amivel kapcsolatban először gondoltunk véletlenszerűségre. Miért tekintettük az eseményt véletlennek, s mit gondoltunk a jelenség hátteréről?

(b) Emlékezzünk olyan, az életünkben megtörtént eseményre, amikor kiszámoltunk valószínűségeket (az adott ismereteinkből kiindulva), s ezek a valószínűségek határozták meg a tetteinket!

(c) Találjunk olyan véletlenszerű jelenséget környezetünkben, amelyre a Brown-mozgás típusú leírás jó közelítést adna!

(2) (10 pt)

Egyszerű valószínűségszámítási példák.

Feldobott érme leesése után egyenlő valószínűséggel fej (F) vagy írás (I).

(a) Dobjuk fel az érmét kétszer. Milyen valószí nűséggel kapunk két fejet (FF), illetve írás-fej (IF) sorrendet? Ugyanaz a két valószínűség?

(b) Játsszuk a következő játékot! Addig dobálunk, amíg vagy két fej (FF - én nyerek), vagy fej-írás (FI - te nyersz) jön ki. Igazságos ez a játék?

(3) (20 pt)

Egydimenziós mozgást végző részecske τ időközönként véletlen irányú erő hatására előző helyzetétől ℓ távolságra ugrik (egyenlő $p_+ = p_- = 1/2$ valószínűséggel jobbra vagy balra). A részecske az $x_0 = 0$ pontból indul.

Határozzuk meg a $t = N\tau$ idő alatti elmozdulás és az elmozdulás négyzetének átlagát, $\langle x_t \rangle$-t és $\langle x_t^2 \rangle$-t!

Vizsgáljuk a fenti problémát $p_+ = 4p_-$ esetre és számítsuk ki az $\langle x_t \rangle$, $\langle x_t^2 \rangle$ és $\langle x_t^2 \rangle - \langle x_t \rangle^2$ átlagokat!

(4) (20 pt)

Vizsgáljuk a Brown mozgás előadáson tárgyalt, Einstein féle leírását, s legyen sodródás is a rendszerben (szél fúj a víz felett). Ekkor a τ időnként megtett ugrások hosszának (Δ) valószínűségi eloszlása nem szimmetrikus $\Phi(-\Delta) \neq \Phi(\Delta)$, s várhatóan $\overline{\Delta} = \int \Delta \Phi(\Delta) d\Delta \neq 0$.

(a) Írjuk fel a Chapman-Kolmogorov egyenletet, s deriváljuk a részecske megtalálási valószínűségét, $P(x,t)$-t meghatározó Fokker-Plack egyenletet! Mennyiben különbözik ez az egyenlet az előadáson tárgyalt diffúziós egyenlettől?

(b) Írjuk fel az egyenlet megoldását arra az esetre, ha a virágporszem az origóból indul!

(5) Nem kötelező, bármikor beadható az év folyamán. Azoknak írtam ki, akik érdeklődnek a köz által vitatott kérdések iránt (de esetleg az évvégi jóindulatú kerekítéseknél figyelembe veszem a megoldását).

A Föld átlagos hőmérsékletében megfigyelhető 100 éves melegedési trendet a mérések $a = 0.7^0C/100$év-nek adják. Ezt az értéket úgy számítják, hogy a megfigyelt évi átlagértékekhez ($T_i, \quad i = 1, 2, ..., N = 100$) lineáris függvényt fittelnek

$$T_i = a\frac{i}{N} + b \quad , \tag{1}$$

s a adja a trend N évre vonatkoztatott értékét.

A fittelés a legkisebb négyzetes eltérést keresve történik, azaz a és b paramétereket a

$$\sum_{i=1}^{N}[T_i - (a\frac{i}{N} + b)]^2 \tag{2}$$

kifejezést minimalizálásal számítják.

A melegedéssel kapcsolatos vita részben azzal kapcsolatos, hogy a megfigyelt a érték statisztikus fluktuáció-e. A problémát nulladik közelítésben a következőképpen tárgyalhatjuk. Tegyük fel, hogy

1. Nincs trend, s az évi átlaghőmérsékletek egy $\bar{T}$ átlag körül ingadoznak.
2. Legyenek az éves ingadozások függetlenek egymástól.
3. Legyen az éves ingadozások eloszlásfüggvénye Gauss függvény, σ szórással.
4. Legyen $\sigma \approx 0.5^0C$. Ezt az értéket a következő becslésből kaphatjuk: A napi hőmérsékletfluktuációkat $\delta T \approx 5 - 10^0C$-nak tekinthetjük, s mivel az évi átlaghőmérséklet 365 napi átlagból adódik össze, ezért $\sigma \approx (5 - 10)^0C/\sqrt{365} \approx 0.5^0C$.

Világos, hogy ha a fentiekből kiindulva az $a > 0.7^0C/100$év-et kapnánk, akkor nincs értelme melegedési trendről beszélni. Az is világos, hogy a fenti problémában a átlaga $\bar{a} = 0$. Tehát a alatt a $\sqrt{\bar{a^2}}$ mennyiséget kell értenünk.

A kérdés: Mekkora $\sqrt{\bar{a^2}}$, ha $N = 100$, s mekkora, ha $N = 10$?