Pál Balázs
UXB26I

Véletlen fizikai folyamatok
1. házifeladat

2019. február 19.

1. FELADAT

A) feladatrész

K: „Próbáljunk emlékezni arra az eseményre, amivel kapcsolatban először gondoltunk véletlenszerűségre. Miért tekintettük az eseményt véletlennek, s mit gondoltunk a jelenség hátteréről?”

9-10 éves koromig bezárólag néha-néha édesapám szelvényeket vett az M1-en futó Luxor című szerencsejátékba. Ez egy szombat esti családi programként működött nálunk és ilyenkor mindegyikőnk kapott egy-egy szelvényt, amit ő maga kellett kitöltsön a játék során. Egy szelvényen két egymás alatti 5×5-ös négyzetben szerepeltek 1-90-ig nyerőszámok, és egy szám többször is, de legfeljebb háromszor fordulhatott elő rajta. A számokat a játék során egyesével sorsolták, géppel. Ha egy játékos szelvényén szerepelt egy kihúzott szám, azt azon karikázással jelölte. A cél az volt, hogy az egyik négyzet külső keretében, vagy az azon belüli 3×3-as mezőben minden számot eltaláljunk. A játék minden héten az első főnyeremény értékű találatig folytatódott, mely egy egész 5×5-ös négyzet megtöltését jelentette.
Ezen keresztül találkoztam először a „véletlen” fogalmával - és egyben a kezdetekben így ismerkedtem meg jobban a számokkal is. Megértettem, hogy mit jelent a „véletlen húzás” és azt is persze, hogy hiába húznak ki akár 35-40 számot is egy szerencsejáték során a 90-ből, milyen kis valószínűséggel nyerhet bármit is az ember rajtuk.

B) feladatrész

K: „Emlékezzünk olyan, az életünkben megtörtént eseményre, amikor kiszámoltunk valószínűségeket (az adott ismereteinkből kiindulva), s ezek a valószínűségek határozták meg a tetteinket!”

Ha az előző példához hasonlóan a legelső ezzel kapcsolatos emlékemet idézem fel, az általános iskolához kötődik, ahol 3-4. osztályos korunkban nagyon sokat játszottunk kő-papír-ollót szünetekben. Kisebb koromban rengeteget néztem a National Geographic Channel-t, és egy ott látott műsor után - ami a szerencsejátékról és valószínűségekről szólt - a fejembe vettem, hogy „taktikázni” fogok a jövőben a játékok alkalmával. Megfigyeltem - talán a műsor tanácsára -, hogy az osztálytársaim nagyon ritkán mutatják kétszer ugyanazt a jelet egymás után. Így rájöttem, hogy érdemes ez alapján gondolkodni: olyan jel mutatásával lesz a legnagyobb esélyem gyakorlatban a nyerésre, amit az ellenfél előző lépése legyőzne, de a fennmaradó kettő közül az egyiket legyőzi, a másikkal pedig döntetlent játszik.
Természetesen ez minden esetben fennáll a kő-papír-olló szabályai szerint. Elég csupán arra figyelnem, hogy az ellenfél előző lépése melyik jelet üti a lehetséges 3 közül. Szigorú értelemben itt nem „kiszámoltam” a valószínűségeket, csupán figyelembe vettem, hogy mi a „valószínűbb” esemény.

Elméleti síkon természetesen nem korrekt a gondolkodás, mivel mind a kő, a papír és az olló mutatása egymástól független esemény. Egy jelet mindig azonos eséllyel követ egy tetszőleges másik, tehát minden azonosan hosszú sorozat előfordulási valószínűsége megegyezik.

C) feladatrész

K: „Találjunk olyan véletlenszerű jelenséget környezetünkben, amelyre a Brown-mozgás típusú leírás jó közelítést adna!”

1. A pénzügyi világ és a piac dinamikáját leíró matematikai modellek egyik megközelítési módja a Brown-mozgást/fehér zajt leíró matematikai formalizmus (pl. Langevin egyenlet[1]) alkalmazása. A tőzsdei mozgásokat, értékpapírok, vagy valuták értékének változását és sok mást is modell szinten, alkalmas így leírni.

2.

2. FELADAT

A) feladatrész

K: „Dobjuk fel az érmét kétszer. Milyen valószínűséggel kapunk két fejet (FF), illetve írás-fej (IF) sorrendet? Ugyanaz a két valószínűség?”

Számoljunk a $\frac{\text{kedvező}}{\text{összes}}$ szabállyal jelen esetben. Az első alkalommal azt mondhatjuk, hogy a FF dobás valószínűsége a követező:

$$\frac{\{\text{FF}\}}{\{FF; IF; FI; II\}} = \frac{1}{4} \tag{1}$$

Ugyanis összesen négy különböző eset lehetséges, ezekből mi az egyiket várjuk eredményül. Második esetben ugyanezt mondhatjuk el, hasonlóan írhatjuk fel az IF dobás valószínűségét:

$$\frac{\{\text{IF}\}}{\{FF; IF; FI; II\}} = \frac{1}{4} \tag{2}$$

Szintén egy lehetőséget választunk ki az összesen várható négy közül.

Másképp is leírhatjuk a helyzetet. Ismert, hogy mind a fej, mind az írás dobásának valószínűsége

$$P\left(\text{fej (F)}\right) = P\left(\text{írás (I)}\right) = \frac{1}{2} \tag{3}$$

Mivel a pénz második feldobása az első dobástól független esemény, ezért felírhatjuk, hogy:

$$P\left(\mathrm{FF}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4} \tag{4}$$

Ugyanígy a másik esetre:

$$P\left(\mathrm{IF}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4} \tag{5}$$

A két esemény tehát azonos valószínűséggel fordul elő.

B) feladatrész

K: „Játsszuk a következő játékot! Addig dobálunk, amíg vagy két fej (FF - én nyerek), vagy fej-írás (FI - te nyersz) jön ki. Igazságos ez a játék?”

A nyerés feltétele mindkét játékos számára, hogy az első dobás fej (F) legyen. Ezt követően akkor nyer vagy az egyik vagy a másik, ha vagy fej (F), vagy írás (I) a rá következő dobás. Itt is elmondhatjuk hogy az egymást követő dobások független események, így egy F eredmény követően mind egy F, mind pedig egy I azonosan $\frac{1}{2}$ valószínűséggel következik be. Azt mondhatjuk tehát, hogy igen, igazságos a játék, ugyanis mindkét fél nyerési esélye azonos. Azt feltételezni az ilyen események sorozatánál, hogy a második dobás függ az előtte levőtől (pl. hogy egy F után $\frac{1}{4}$ valószínűséggel következik be még egy F és így az írás előnyben van) szokás a *szerencsejátékosok tévedésének*[2], vagy *Monte Carlo tévedésnek* hívni. Ez arra a rossz meglátásra alapul, miszerint egy már (gyakran) előfordult eseményről intuitíve azt gondoljuk, hogy a jövőben kisebb valószínűséggel fog előfordulni. Ez független események esetén viszont nem igaz, lásd a fenti pénzdobás példája. Mindegy hányszor fordult elő már F, vagy I a dobások során, a következő esetében mind F, mind pedig I azonosan $P=\frac{1}{2}$ valószínűséggel következik be.

3. FELADAT

3.1. Szimmetrikus - driftmentes - rendszer

K: „Egydimenziós mozgást végző részecske τ időközönként véletlen irányú erő hatására előző helyzetétől l távolságra ugrik (egyenlő $p_+=p_-=\frac{1}{2}$ valószínűséggel jobbra vagy balra). A részecske az $x_0=0$ pontból indul.
Határozzuk meg a $t=N_\tau$ idő alatti elmozdulás és az elmozdulás négyzetének átlagát, $\langle x_r\rangle$-t és $\langle x_r^2\rangle$-t”

Ismert, hogy az x_r elmozdulás várható értéke

$$\langle x_r\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot P\left(x,t\right)\ dx. \tag{6}$$

Míg az elmozdulás négyzet várható értéke

$$\left\langle x_r^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot P\left(x,t\right)\ dx. \tag{7}$$

Jelölje az $P\left(x,t\right)$ az x pontban való tartózkodás valószínűségét a keresett $t = N_\tau$ idő után. Ekkor felírhatjuk a következőket[3]:

$$P\left(x,t+\tau\right) = p_- \cdot P\left(x-l,t\right) + p_+ \cdot P\left(x+l,t\right) \tag{8}$$

Kiinduló feltevéseink közé tartozik, hogy $p_- = p_+ = \frac{1}{2}$, tehát a rendszer szimmetrikus. Ekkor a (8)-as egyenlet a következőképp alakul:

$$P\left(x,t+\tau\right) = \frac{1}{2} \cdot P\left(x-l,t\right) + \frac{1}{2} \cdot P\left(x+l,t\right) \tag{9}$$

Ezt a differencia egyenletet a Kramers–Moyal-sorfejtés segítségével alakítjuk át a $P\left(x,t\right)$-re vonatkozó differenciálegyenletre, melyet Fokker–Planck-egyenletnek nevezünk[4]. Első lépésben vonjunk ki mindkét oldalból $P\left(x,t\right)$, amiket aztán τ és l, 0-hoz történő közelítésével sorbafejtünk t és x szerint:

$$P\left(x,t+\tau\right) - P\left(x,t\right) = \frac{1}{2} \cdot \left[P\left(x-l,t\right) - P\left(x,t\right)\right] + \frac{1}{2} \cdot \left[P\left(x+l,t\right) - P\left(x,t\right)\right] \tag{10}$$

A fentiek alapján alakítsuk át ezeket: a bal oldalt fejtsük sorba t, a jobb oldalt pedig x szerint. A t szerintinél az első, az x szerintinél pedig a második rendig fejtsünk sorba:

$$P\left(x,t+\tau\right) - P\left(x,t\right) = \tau \frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial t} + \mathcal{O}\left(\tau^2\right) \tag{11}$$

$$P\left(x-l,t\right) - P\left(x,t\right) = -l \frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial x} + \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial^2 P\left(x,t\right)}{\partial x^2} + \mathcal{O}\left(l^3\right) \tag{12}$$

$$P\left(x+l,t\right) - P\left(x,t\right) = +l \frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial x} + \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial^2 P\left(x,t\right)}{\partial x^2} + \mathcal{O}\left(l^3\right) \tag{13}$$

A kapott eredményt helyettesítsük be az eredeti, (10)-es egyenletbe:

$$\begin{aligned} &\tau \frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial t} + \mathcal{O}\left(\tau^2\right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[-l \frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial x} + \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial^2 P\left(x,t\right)}{\partial x^2} + \mathcal{O}\left(l^3\right)\right] + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \left[l \frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial x} + \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial^2 P\left(x,t\right)}{\partial x^2} + \mathcal{O}\left(l^3\right)\right] \end{aligned} \tag{14}$$

A sorfejtés elhanyagolhatóan kicsi tagjait kihagyva:

$$\tau\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial t}=\frac{1}{2}\cdot\left[-l\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial x}+\frac{1}{2}l^2\frac{\partial^2 P\left(x,t\right)}{\partial x^2}\right]+\frac{1}{2}\cdot\left[l\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial x}+\frac{1}{2}l^2\frac{\partial^2 P\left(x,t\right)}{\partial x^2}\right] \tag{15}$$

Rendezésnél az x-ben lineáris tagok kiesnek. A maradékot átosztva τ-val, megkapjuk a Fokker–Planck-egyenletet:

$$\tau\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial t}=\frac{1}{2}\cdot\left[\cancel{-l\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial x}}+\frac{1}{2}l^2\frac{\partial^2 P\left(x,t\right)}{\partial x^2}+\cancel{l\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial x}}+\frac{1}{2}l^2\frac{\partial^2 P\left(x,t\right)}{\partial x^2}\right] \tag{16}$$

$$\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial t}=\frac{l^2}{2\tau}\cdot\frac{\partial^2 P\left(x,t\right)}{\partial x^2}=D\cdot\frac{\partial^2 P\left(x,t\right)}{\partial x^2} \tag{17}$$

Az ebben az egyenletben megjelenő $\frac{l^2}{2\tau}=D$ tagot nevezzük a rendszer *diffúziós együtthatójának*. Olyan esetben, amikor $p_-\neq p_+$, akkor a első rendű tagok is bent maradnak, megszorozva egy $-\left(p_--p_+\right)\frac{l}{\tau}=-v$ együtthatóval, melyet a rendszer *driftjének*, vagy *sodródásának* hívunk.

A (17)-es differenciálegyenletet a $P\left(x,t=0\right)=\delta\left(x\right)$ kezdőfeltétellel oldjuk meg. Ennek megoldása ismert, ez a Gauss függvény:

$$P\left(x,t\right)=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \tag{18}$$

Ennek a felhasználásával pedig megadhatjuk a keresett $\langle x_r\rangle$ és $\langle x_r^2\rangle$ várható értékeket a (6)-os és (7)-es egyenletek alapján:

$$\langle x_r\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\,dx \tag{19}$$

$$\left\langle x_r^2\right\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\,dx \tag{20}$$

Végezzük el a következő változócserét:

$$y:=\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\quad\rightarrow\quad x=y\cdot\sqrt{4Dt}$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{4Dt}}\quad\rightarrow\quad dx=\sqrt{4Dt}\,dy$$

Majd helyettesítsünk be a fenti (19)-es és (20)-as egyenletekbe:

$$\begin{aligned}\langle x_r\rangle&=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}y\cdot\sqrt{4Dt}\cdot e^{-y^2}\cdot\sqrt{4Dt}\,dy=\\&=\frac{4Dt}{\sqrt{4\pi Dt}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}y\cdot e^{-y^2}\,dy=\frac{4Dt}{\sqrt{4\pi Dt}}\cdot 0=\underline{\underline{0}}\end{aligned} \tag{21}$$

$$\left\langle x_r^2 \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(y \cdot \sqrt{4Dt}\right)^2 \cdot e^{-y^2} \cdot \sqrt{4Dt}\, dy =$$
$$= \frac{(4Dt)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot e^{-y^2}\, dy = \frac{4Dt}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \underline{\underline{2Dt}} \tag{22}$$

3.2. Asszimetrikus - driftelő - rendszer

K: „Vizsgáljuk a fenti problémát $p_+ = 4p_-$ esetre és számítsuk ki az $\langle x_r \rangle$, $\langle x_r^2 \rangle$ és a $\langle x_r^2 \rangle - \langle x_r \rangle$ átlagokat!”

Nézzük azt a helyzetet, amikor a rendszerben van drift, tehát $p_- \neq p_+$, ahol most $p_- = \frac{1}{5}$ és $p_+ = \frac{4}{5}$. Ebben az esetben a (8)-as egyenletet a következőképp alakul:

$$P(x, t+\tau) = \frac{1}{5} \cdot P(x-l, t) + \frac{4}{5} \cdot P(x+l, t) \tag{23}$$

Elvégezve a (10)-(15) egyenletekhez hasonlóan a Kramer–Moyal-sorfejtést, az elsőrendű tagok utána már nem esnek ki. Ekvivalensen a (15)-ös egyenletben szereplő lépés itt most így fest:

$$\tau \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{5} \cdot \left[-l \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2} \right] + \frac{4}{5} \cdot \left[l \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2} \right] \tag{24}$$

Ezt az egyenletet rendezve a következő alakot kapjuk az előző alfejezet végén leírtak alapján:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \frac{3}{5} \cdot \frac{l}{\tau} \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} + \frac{l^2}{2\tau} \cdot \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2} = -v \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} + D \cdot \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2} \tag{25}$$

A kapott differenciálegyenletet az előzőekhez hasonlóan, szintén a $P(x, t=0) = \delta(x)$ kezdőfeltétellel oldjuk meg. Ennek megoldásához bevezetjük a következő változócserét:

$$P(x,t) := \tilde{P}(y(x,t), t) = \tilde{P}(x - vt, t)$$

Melyre a (25)-ös egyenlet a következőképp módosul:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -v \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} + D \cdot \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2} \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad \frac{\partial \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial t} = -v \frac{\partial \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial x} + D \cdot \frac{\partial^2 \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial x^2} \tag{26}$$

Bontsuk ki a parciális deriváltakat:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial t} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial t} = \\ = -v \cdot \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y} + D \cdot \partial_x \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y} \right) \tag{27}$$

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial t} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial t} = \\ = -v \cdot \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y} + D \cdot \partial_x \left(\frac{\partial (x-vt)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y} \right) \tag{28}$$

$$\frac{\partial (x-vt)}{\partial t} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y} + 1 \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial t} = \\ = -v \cdot \frac{\partial (x-vt)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y} + D \cdot \frac{\partial (x-vt)}{\partial x} \cdot \frac{\partial (x-vt)}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y^2} \tag{29}$$

$$\underbrace{\frac{\partial (x-vt)}{\partial t}}_{=-v} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y} + 1 \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial t} = \\ = -v \cdot \underbrace{\frac{\partial (x-vt)}{\partial x}}_{=1} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y} + D \cdot \underbrace{\frac{\partial (x-vt)}{\partial x}}_{=1} \cdot \underbrace{\frac{\partial (x-vt)}{\partial x}}_{=1} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y^2} \tag{30}$$

$$\cancel{-v \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y}} + \frac{\partial \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial t} = \cancel{-v \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y}} + D \cdot \frac{\partial^2 \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y^2} \tag{31}$$

Ezt követően pedig megkapjuk a végleges egyenletünket:

$$\frac{\partial \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y^2} \tag{32}$$

Mely $\tilde{P}$-re vonatkozólag megegyezik a driftmentes leírás Fokker–Planck-egyenletével. Ennek megoldása $\tilde{P}(y,t=0) = \delta(y)$ kezdőfeltétellel (mely ekvivalens a $P(x,t=0) = \delta(x)$ feltétellel) a már ismert Gauss-függvény:

$$\tilde{P}(y,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot e^{-\frac{y^2}{4Dt}} \tag{33}$$

Melyet változócserével visszaalakítva megkapjuk az egyenletünk megoldását:

$$\boxed{P\left(x,t\right)=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\cdot e^{-\frac{(x-vt)^2}{4Dt}}} \tag{34}$$

A (6)-os és (7)-es egyenletek alapján megadhatjuk a keresett $\langle x_r\rangle$ és $\langle x_r^2\rangle$, valamint az $\langle x_r^2\rangle - \langle x_r\rangle$ értékeket:

$$\langle x_r\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}xP\left(x,t\right)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\cdot e^{-\frac{(x-vt)^2}{4Dt}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot e^{-\frac{(x-vt)^2}{4Dt}}\,dx \tag{35}$$

$$\left\langle x_r^2\right\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}x^2P\left(x,t\right)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\cdot e^{-\frac{(x-vt)^2}{4Dt}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot e^{-\frac{(x-vt)^2}{4Dt}}\,dx \tag{36}$$

Vezessük be a következő változócserét:

$$y:=\frac{x-vt}{\sqrt{4Dt}}\quad\rightarrow\quad x=y\cdot\sqrt{4Dt}+vt$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{4Dt}}\quad\rightarrow\quad dx=\sqrt{4Dt}\,dy$$

Ezt behelyettesítve a fentiekbe:

$$\langle x_r\rangle=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\left(y\cdot\sqrt{4Dt}+vt\right)\cdot e^{y^2}\sqrt{4Dt}\,dy=\frac{\sqrt{4Dt}}{\sqrt{4\pi Dt}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\left(y\cdot\sqrt{4Dt}+vt\right)\cdot e^{y^2}\,dy \tag{37}$$

$$\left\langle x_r^2\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\left(y\cdot\sqrt{4Dt}+vt\right)^2\cdot e^{y^2}\sqrt{4Dt}\,dy=\frac{\sqrt{4Dt}}{\sqrt{4\pi Dt}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\left(y\cdot\sqrt{4Dt}+vt\right)^2\cdot e^{y^2}\,dy \tag{38}$$

4. FELADAT

A) feladatrész

K: „Vizsgáljuk a Brown mozgás előadáson tárgyalt, Einstein-féle leírását, s legyen sodródás is a rendszerben (szél fúj a víz felett).
Ekkor a τ időnként megtett ugrások hosszának (Δ) valószínűségi eloszlása nem szimmetrikus $\Phi\left(-\Delta\right)\neq\Phi\left(\Delta\right)$, *s várhatóan* $\overline{\Delta}=\int\Delta\Phi\left(\Delta\right)\,d\Delta\neq 0$.

Írjuk fel a Chapman-Kolmogorov egyenletet, s deriváljuk a részecske megtalálási valószínűségét, $P(x,t)$-t meghatározó Fokker-Planck egyenletet! Mennyiben különbözik ez az egyenlet az előadáson tárgyalt diffúziós egyenlettől?"

A feladat megoldása a 3.2-es fejezetben ismertetettekkel nagyrészt analóg. Az Brown-mozgás Einstein-féle leírásának feltételei sodródás esetén a következőek - ahogy többek között azok feladat szövegében is szerepelnek:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\Delta\right) d\Delta = 1$
2. $\Phi\left(-\Delta\right) \neq \Phi\left(\Delta\right)$
3. $\overline{\Delta} = \langle\Delta\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta\Phi\left(\Delta\right)\, d\Delta \neq 0$

Annak valószínűsége, hogy egy részecske τ idő múlva az x és $x + dx$ közötti tartományban foglal helyet:

$$P\left(x, t+\tau\right) dx = P\left(x,t\right) dx - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\Delta\right) d\Delta \cdot P\left(x,t\right) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\Delta\right) d\Delta \cdot P\left(x-\Delta,t\right) dx \tag{39}$$

- A jobb oldal első tagja ($P\left(x,t\right) dx$) annak a valószínűségét jelöli, hogy a részecske már t időpillanatban is az $x + dx$ helyen tartózkodott.
- A második tag ($-\int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\Delta\right) d\Delta \cdot P\left(x,t\right) dx$) ebből levonódik, ugyanis ez annak a valószínűségét adja meg, hogy a részecske τ idő alatt kidiffundál az $x+dx$ tartományból.
- A harmadik tag ($\int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\Delta\right) d\Delta \cdot P\left(x-\Delta,t\right)$) annak a valószínűségét jelenti, hogy egy részecske valahonnan pont a $d + dx$ tartományba ugrik bele τ időn belül.

Az egyenletet rendezzük, figyelve arra, hogy az integrálások $d\Delta$ szerint történnek. Emiatt minden tag, ami nem függ Δ-tól, kiemelhető az integráljelek elé. A következőt kapjuk:

$$P\left(x, t+\tau\right) dx = P\left(x,t\right) dx - P\left(x,t\right) dx \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\Delta\right) d\Delta\right) + dx \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\Delta\right) d\Delta \cdot P\left(x-\Delta,t\right)\right) \tag{40}$$

A dx tagokkal az egyenlet leosztható, így:

$$P\left(x, t+\tau\right) = P\left(x,t\right) - P\left(x,t\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\Delta\right) d\Delta\right) + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\Delta\right) d\Delta \cdot P\left(x-\Delta,t\right) \tag{41}$$

Alkalmazzunk a fent ismert három feltétel közül az első számút, miszerint $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\Delta\right) d\Delta = 1$:

$$P(x,t+\tau) = P(x,t) - P(x,t)\cdot \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\Delta)\,d\Delta\right)}_{=1,\text{ az első feltétel szerint.}} + \int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\Delta)\,d\Delta \cdot P(x-\Delta,t) \tag{42}$$

$$P(x,t+\tau) = \underbrace{P(x,t) - P(x,t)}_{=0} + \int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\Delta)\,d\Delta \cdot P(x-\Delta,t) \tag{43}$$

Mely után végül megkapjuk a *Chapman–Kolmogorov-egyenletet*:

$$\boxed{P(x,t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\Delta)\,d\Delta \cdot P(x-\Delta,t)} \tag{44}$$

Az egyenlet bal oldalát τ-ban, a jobboldalt pedig kétszer Δ-ban sorbafejtjük (*Kramers–Moyal-sorfejtés*). Ekkor a következő formulát kapjuk:

$$P(x,t) + \tau\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = P(x,t)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\Delta)\,d\Delta - \frac{\partial P(x,t)}{\partial x}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\Delta\Phi(\Delta)\,d\Delta + \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\Delta^2\Phi(\Delta)\,d\Delta \tag{45}$$

Amit az első számú feltétel alapján újfent tovább tudunk egyszerűsíteni:

$$\cancel{P(x,t)} + \tau\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \cancel{P(x,t)}\cdot \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\Delta)\,d\Delta}^{=1,\text{ az első feltétel szerint.}} - \frac{\partial P(x,t)}{\partial x}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\Delta\Phi(\Delta)\,d\Delta + \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\Delta^2\Phi(\Delta)\,d\Delta \tag{46}$$

Így végül a következő alakot kapjuk:

$$\tau\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\Delta\Phi(\Delta)\,d\Delta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\Delta^2\Phi(\Delta)\,d\Delta \tag{47}$$

Ebben megjelenik két ismert tag, amiknek definícióját a (6)-os és (7)-es egyenletek adják meg:

$$\langle\Delta\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\Delta\Phi(\Delta)\,d\Delta \tag{48}$$

$$\langle\Delta^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\Delta^2\Phi(\Delta)\,d\Delta \tag{49}$$

Ezeket behelyettesítve és τ-val leosztva kapjuk a következő *Fokker–Planck-egyenletet*:

$$\boxed{\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial t} = -\frac{\langle\Delta\rangle}{\tau}\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\langle\Delta^2\rangle}{\tau}\frac{\partial^2 P\left(x,t\right)}{\partial x^2}} \tag{50}$$

Ez az egyenlet abban különbözik az - előadáson is megoldott - driftmentes változattól, hogy itt a második számú feltétel szerint $\langle\Delta\rangle \neq 0$.

B) feladatrész

K: „Írjuk fel az egyenlet megoldását arra az esetre, ha a virágporszem az origóból indul!”

Az előző feladatban már ismertettük, hogy mit jelent egy rendszer *driftje* és *diffúziós együtthatója*, vezessük be itt is ugyanezeket a mennyiségeket:

$$\frac{\langle\Delta\rangle}{\tau} := v \tag{51}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\langle\Delta^2\rangle}{\tau} := D \tag{52}$$

Ez visszahelyettesítve a Fokker–Planck-egyenletbe:

$$\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial t} = -v\frac{\partial P\left(x,t\right)}{\partial x} + D\frac{\partial^2 P\left(x,t\right)}{\partial x^2} \tag{53}$$

Ezt a differenciálegyenletet a $P\left(x,t=0\right) = \delta\left(x\right)$ kezdőfeltétellel oldjuk meg, ugyanis $t = 0$-ban a részecske az origóban tartózkodik.
Vezessük be az előző feladatból már ismert változócserét:

$$P\left(x,t\right) := \tilde{P}\left(y\left(x,t\right),t\right) = \tilde{P}\left(x - vt, t\right)$$

Ekkor a következőképp módosul a fenti Fokker–Planck-egyenlet:

$$\frac{\partial \tilde{P}\left(y\left(x,t\right),t\right)}{\partial t} = -v\frac{\partial \tilde{P}\left(y\left(x,t\right),t\right)}{\partial x} + D\frac{\partial^2 \tilde{P}\left(y\left(x,t\right),t\right)}{\partial x^2} \tag{54}$$

Ez teljes mértékben megegyezik az előző feladatban megoldott, driftelő rendszert leíró egyenlettel. Az egyenlet megoldásához ugyanazokat a lépéseket kell elvégezzük:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial y\left(x,t\right)}{\partial t}\cdot\frac{\partial \tilde{P}\left(y\left(x,t\right),t\right)}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial t}\cdot\frac{\partial \tilde{P}\left(y\left(x,t\right),t\right)}{\partial t} = \\ &= -\, v\cdot\frac{\partial y\left(x,t\right)}{\partial x}\cdot\frac{\partial \tilde{P}\left(y\left(x,t\right),t\right)}{\partial y} + D\cdot\partial_x\left(\frac{\partial y\left(x,t\right)}{\partial x}\cdot\frac{\partial \tilde{P}\left(y\left(x,t\right),t\right)}{\partial y}\right) \end{aligned} \tag{55}$$

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial t} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial t} = $$
$$= -v \cdot \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y} + D \cdot \partial_x \left(\frac{\partial (x-vt)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y} \right) \tag{56}$$

$$\frac{\partial (x-vt)}{\partial t} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y} + 1 \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial t} = $$
$$= -v \cdot \frac{\partial (x-vt)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y} + D \cdot \frac{\partial (x-vt)}{\partial x} \cdot \frac{\partial (x-vt)}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y^2} \tag{57}$$

$$\underbrace{\frac{\partial (x-vt)}{\partial t}}_{=-v} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y} + 1 \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial t} = $$
$$= -v \cdot \underbrace{\frac{\partial (x-vt)}{\partial x}}_{=1} \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y} + D \cdot \underbrace{\frac{\partial (x-vt)}{\partial x}}_{=1} \cdot \underbrace{\frac{\partial (x-vt)}{\partial x}}_{=1} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y^2} \tag{58}$$

$$\cancel{-v \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y}} + \frac{\partial \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial t} = \cancel{-v \cdot \frac{\partial \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y}} + D \cdot \frac{\partial^2 \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y^2} \tag{59}$$

Ezt követően pedig megkapjuk a végleges egyenletünket:

$$\frac{\partial \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 \tilde{P}(y(x,t),t)}{\partial y^2} \tag{60}$$

Mely $\tilde{P}$-re vonatkozólag természetesen itt is megegyezik a driftmentes leírás Fokker–Planck-egyenletével. Ennek megoldása $\tilde{P}(y, t=0) = \delta(y)$ keződfeltétellel (mely ekvivalens a $P(x, t=0) = \delta(x)$ feltétellel) a már ismert Gauss-függvény:

$$\tilde{P}(y,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \cdot e^{-\frac{y^2}{4Dt}} \tag{61}$$

Melyet az előző feladatban is szereplő változócserével visszaalakítva, megkapjuk az egyenletünk megoldását:

$$\boxed{P(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \cdot e^{-\frac{(x-vt)^2}{4Dt}}} \tag{62}$$

5. FELADAT

Felhasznált irodalom

[1] Roumen Tsekov. “Brownian Markets”. In: *Chinese Physics Letters* 30, 088901 (Aug. 2013), p. 088901. DOI: 10.1088/0256-307X/30/8/088901. arXiv: 1010.2061 [q-fin.ST].

[2] Rachel Croson and James Sundali. “The gambler’s fallacy and the hot hand: Empirical data from casinos”. In: *Journal of risk and uncertainty* 30.3 (2005), pp. 195–209.

[3] Nino Zanghì. *Brownian Motion*. 2015. URL: https://www.ge.infn.it/~zanghi/FS/BrownTEXT.pdf.

[4] J. L. Garcia-Palacios. “Introduction to the theory of stochastic processes and Brownian motion problems”. In: *arXiv e-prints*, cond-mat/0701242 (Jan. 2007), cond–mat/0701242. arXiv: cond-mat/0701242 [cond-mat.stat-mech].