姓名________ 学号________ 班级________ 座位号________

请在所附答题纸上空出密封位置。并填写试卷序号、班级、学号和姓名

密 封 线

防灾科技学院 2016 – 2017 学年第 1 学期

高等数学 试卷 参考答案和评分标准

(闭卷笔试 90 分钟)

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总 分	阅卷教师
分 数									

阅卷人	
得 分	

一、选择题 (每题 3 分，共 15 分)

1. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} =$ (C)

   (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) ∞.

2. 下列说法正确的是 ( )

   (A) 分段函数一定不是初等函数.

   (B) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$, 则必有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

   (C) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内必有界.

   (D) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$($a$ 为有限实数)，则数列 $\{x_n\}$ 必有界.

3. 方程 $4x^2+y^2+z^2=4$ 表示的曲面方程是 (C)

   (A) 单叶双曲面. (B) 双叶双曲面. (C) 椭球面. (D) 抛物面.

4. 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数 $f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)$ 存在是 $f(x,y)$ 在该点连续的 (D)

   (A) 充分而非必要条件. (B) 必要而非充分条件.

   (C) 充分必要条件. (D) 既非充分也非必要条件.

5. 设有平面区域 $D=\{(x,y)\mid -a\leqslant x\leqslant a, x\leqslant y\leqslant a\}$， $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant a, x\leqslant y\leqslant a\}$，则 $\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ (D)

   (A) 0. (B) $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

   (C) $2\iint\limits_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. (D) $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

   (A) 3π (B) 2π (C) π (D) 1

阅卷人	
得 分	

二、判断题: 正确 √, 错误 × (每题 2 分)

6. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上一定可导. (×)

7. 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导是函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微的充要条件. (√)

8. 函数 $f(x)=x^5+x-1$ 在 $(0,1)$ 内存在唯一解. (√)

9. $M(0,0)$ 为 $f(x,y)=x^6+\sin^2(xy)$ 的一个极小值点. (√)

10. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 也一定发散. (×)

阅卷人	
得 分	

三、填空题 (每题 3 分, 共 15 分)

11. $\lim\limits_{x\to\infty}(1-x)^{\frac{1}{x}} =$ ___e^{-1}___.

12. 设 $z=u^2\ln v$，而 $u=\dfrac{x}{y}, v=x-y$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x} =$ ___$\dfrac{2x}{y^2}\ln(x-y)+\dfrac{x^2}{y^2(x-y)}$___.

13. 函数 $f(x,y)=x\mathrm{e}^y$ 在点 $(1,0)$ 处的梯度为 $\nabla f =$ ___$(1,2)$___.

14. 把二次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$ 化为极坐标形式的二次积分为 ___$\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$___.

15. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 3, 则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 的收敛半径为 ___$\sqrt{3}$___.

姓名________ 学号________ 班级________ 座位号________

请在所附答题纸上空出密封位置。并填写试卷序号、班级、学号和姓名

线 封 密

阅卷人	
得 分	

四、多元函数微分法（每题 7 分，共 21 分）

16. 设 $\boldsymbol{a}=(3,4,5)$, $\boldsymbol{b}=(1,-2,3)$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

解: $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3-8+15=10$ ....(2')

$(\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{b}}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{10}{\sqrt{14}}$ ....(2')

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 3 & 4 & 5\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}=(22,-4,-10).$ ....(3')

17. 求过点 $A(1,2,-1), B(2,3,0), C(3,3,2)$ 的三角形 $\triangle ABC$ 的面积和它们确定的平面方程.

解：由题设 $\overrightarrow{AB}=(1,1,1), \overrightarrow{AC}=(2,1,3)$, ...(2')

故 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}=(2,-1,-1)$,

三角形 $\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{6}$. ....(2')

所求平面的方程为 $2(x-2)-(y-3)-z=0$, 即 $2x-y-z-1=0$ ....(3')

18. 设函数 $z=f(u,v)$ 具有一阶连续偏导数, $z=f(x^2+y^2,\dfrac{x}{y})$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$, 并写出全微分 $\mathrm{d}z$.

解: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+\dfrac{1}{y}f_2'$, ...(3')

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=2yf_1'-\dfrac{x}{y^2}f_2'$, ...(3')

$\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$

$=(2xf_1'+\dfrac{1}{y}f_2')\mathrm{d}x+(2yf_1'-\dfrac{x}{y^2}f_2')\mathrm{d}y$, ...(1')

阅卷人	
得 分	

五、重积分（每题 7 分，共 21 分）

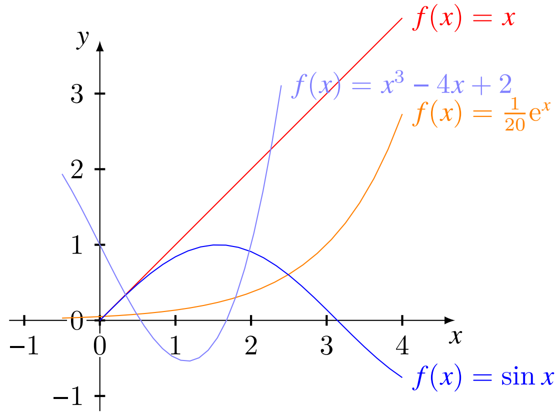
19. 计算二重积分 $\displaystyle\iint_D \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\pi, 0\leqslant y\leqslant \pi x\}$.

解: $\displaystyle\iint_D \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\int_0^{\pi x}\mathrm{d}y$ ....(2')

$\displaystyle=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}(\pi x-0)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x$ ....(3')

$=\pi\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}=2\pi$ ....(2')

20. 计算二重积分 $\displaystyle\iint_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\leqslant 25\}$.



解: $D: 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\rho\leqslant 5$ ....(2')

$\displaystyle\iint_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^5 \mathrm{e}^{\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$ ....(2')

$=2\pi\cdot\left[\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\rho^2}\right]_0^5=\pi(\mathrm{e}^{25}-1)$ ....(3')

21. 计算三重积分 $\displaystyle\iiint_\Omega z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是由 圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和平面 $z=4$ 围成的闭区域.

解: $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant z^2, 0\leqslant z\leqslant 4\}$ ....(2')

$\displaystyle\iiint_\Omega z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^4 z\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ....(3')

$\displaystyle=\int_0^4 z\times\pi z^2\mathrm{d}z=\frac{\pi z^4}{4}\Big|_0^4=64\pi$ ....(2')

姓名____ 学号____ 班级____ 座位号____

请在所附答题纸上空出密封位置。并填写试卷序号、班级、学号和姓名

密 封 线

阅卷人	
得　分	

六、无穷级数 (本题 13 分)

22. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{n\cdot 3^n}$ 的收敛域与和函数 $s(x)$.

解：令 $t=x-1$, 上述级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{n\cdot 3^n}$ ……(2')

因为 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot 3^n}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}=\dfrac{1}{3}$, ……(2')

所以，收敛半径 $R=3$ 收敛区间 $|t|<3$, 即 $-2<x<4$. ……(3')

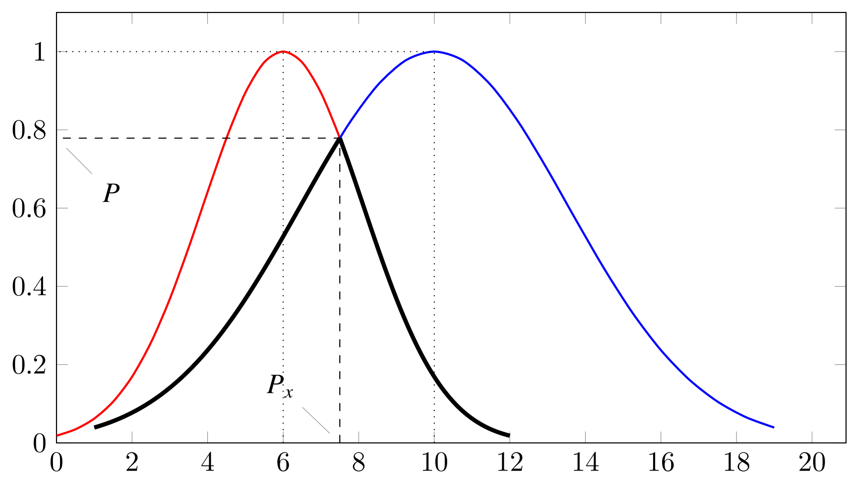
当 $x=4$ 时，级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，这级数发散，当 $x=-2$ 时，级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$，这级数收敛, 原级数的收敛域为 $[-2,4)$. ……(2')

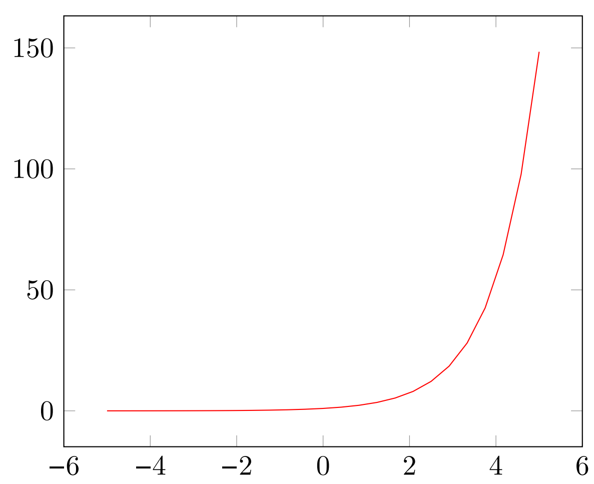
设 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{n\cdot 3^n}$，则

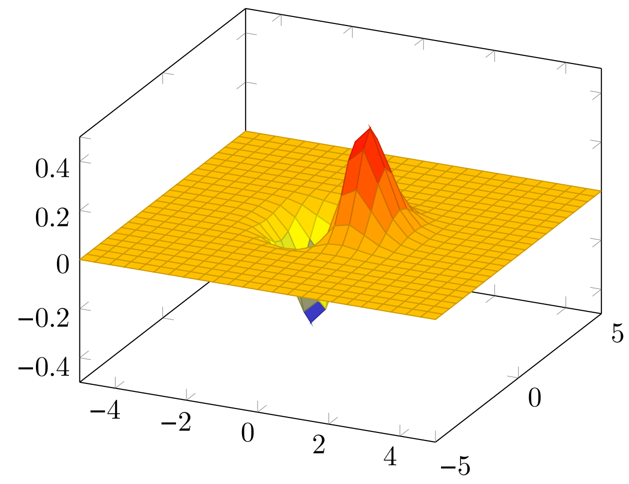
$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(x-1)^n}{n\cdot 3^n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{n-1}}{3^n}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{x-1}{3}}=\frac{1}{4-x}$$

$$s(1)=0,\ s(x)=s(1)+\int_1^x s'(t)\mathrm{d}t=0+\int_1^x\frac{1}{4-t}\mathrm{d}t$$

$=-\ln(4-t)\Big|_1^x=\ln 3-\ln(4-x), -2\leqslant x<4.$ ……(4')







文字环绕文字环绕文字环绕文字环绕文字环绕文字环绕文字环绕文字环绕