Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης
1η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 19/11/2012

Άσκηση 1: Ασυμπτωτικός Συμβολισμός, Αναδρομικές Σχέσεις.

(α) Να ταξινομήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις σε αύξουσα σειρά τάξης μεγέθους, να βρείτε δηλαδή μια διάταξη $g_1, g_2, g_3, \ldots$ τέτοια ώστε $g_1 = \mathrm{O}(g_2)$, $g_2 = \mathrm{O}(g_3)$, κοκ. Σε αυτή τη διάταξη, να επισημάνετε τις συναρτήσεις που έχουν ίδια τάξη μεγέθους.

$n3^n$	$\sum_{k=1}^{n} 6^k$	$5^{\log_2 n}$	$\sum_{k=1}^{n} k^6$
$2^{(\log_2 n)^4}$	$(\log n)^{\log n}$	$\frac{n}{\log\log n}$	$e^{n/\ln n}$
$\log(n^3)$	$\sqrt{n}(\log n)^{50}$	$n(\log n)^{10}$	$(\log n)^{\sqrt{n}}$
$n^{\log\log n}$	2^{2n}	$\sqrt{n!}$	$\log((3n)!)$

(β) Να υπολογίσετε την τάξη μεγέθους $\Theta()$ των λύσεων των παρακάτω αναδρομικών σχέσεων. Για όλες τις σχέσεις, να θεωρήσετε ότι $T(1) = \Theta(1)$.

1. $T(n) = 5T(n/7) + n\log n$
2. $T(n) = 3T(n/4) + \log^3 n$
3. $T(n) = 4T(n/4) + n\log n$
4. $T(n) = 4T(n/5) + n/\log^2 n$
5. $T(n) = T(n/3) + 3T(n/7) + n$
6. $T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + n$
7. $T(n) = T(\sqrt{n}) + \Theta(\log\log n)$
8. $T(n) = T(n-3) + \log n$.

Άσκηση 2: Ταξινόμηση

(α) Έστω πίνακας θετικών ακεραίων $A[1 \ldots n]$, και έστω M το μέγιστο στοιχείο του A. Να δείξετε ότι ο A μπορεί να ταξινομηθεί σε χρόνο $\mathrm{O}(n + M)$. Αν $M = \mathrm{O}(n)$, ο χρόνος ταξινόμησης είναι γραμμικός. Γιατί δεν ισχύει το κάτω φράγμα του $\Omega(n\log n)$ σε αυτή την περίπτωση; Να δείξετε ένα κάτω φράγμα στο χρόνο εκτέλεσης χειρότερης περίπτωσης κάθε συγκριτικού αλγόριθμου για αυτή την περίπτωση ταξινόμησης, και να διερευνήσετε αν ο αλγόριθμος που δώσατε είναι βέλτιστος όταν $M = \Theta(n)$.

(β) Έστω πίνακας ακεραίων $A[1 \ldots n]$ που χαρακτηρίζεται από πολλαπλές εμφανίσεις των στοιχείων του. Συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι το πλήθος των διαφορετικών στοιχείων του A είναι μόλις πολυλογαριθμικό (δηλ. $\mathrm{O}(\log^d n)$, για κάποια σταθερά $d \geq 1$). Να διατυπώσετε έναν συγκριτικό αλγόριθμο που ταξινομεί τον πίνακα A σε χρόνο $\mathrm{O}(n\log\log n)$. Γιατί δεν ισχύει το κάτω φράγμα του $\Omega(n\log n)$ σε αυτή την περίπτωση;

Άσκηση 3: Αναζήτηση

(α) Έστω k, n θετικοί φυσικοί, με $k < n$, και έστω πίνακας $A[0 \dots n]$ με $n+1$ φυσικούς μικρότερους ή ίσους του n. Υποθέτουμε ότι οι τιμές κάθε δύο διαδοχικών στοιχείων του A διαφέρουν το πολύ κατά k, δηλαδή ότι για κάθε j, $|A[j] - A[j+1]| \leq k$. (i) Να δείξετε ότι υπάρχει θέση j τέτοια ώστε $|A[j] - j| \leq (k+1)/2$. (ii) Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει μια τέτοια θέση. Να προσδιορίσετε την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας, και να αιτιολογήσετε την ορθότητά του.

(β) Έστω n, m θετικοί φυσικοί, με $m \leq n$, και έστω διδιάστατος πίνακας $A[1 \dots n, 1 \dots m]$ με nm φυσικούς. Γνωρίζουμε ότι τα στοιχεία του πίνακα A είναι ταξινομημένα σε γνήσια αύξουσα σειρά σε κάθε γραμμή του και σε κάθε στήλη του (δηλ. για κάθε i, j, ισχύει ότι $A[i,j] < A[i,j+1]$ και ότι $A[i,j] < A[i+1,j]$). Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει όλες τις θέσεις του πίνακα A όπου εμφανίζεται μια δεδομένη τιμή k. Να προσδιορίσετε την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας (συναρτήσει των n και m), και να αιτιολογήσετε την ορθότητά του.

(γ) **Bonus ερώτημα:** Να αποδείξετε ένα ακριβές κάτω φράγμα στον χρόνο εκτέλεσης χειρότερης περίπτωσης κάθε συγκριτικού αλγόριθμου για το πρόβλημα (β). Είναι ο αλγόριθμος που διατυπώσατε βέλτιστος για όλα τα m, n, με $m \leq n$. Αν όχι, να διατυπώσετε έναν βέλτιστο αλγόριθμο.

Άσκηση 4: Θέση για το Πατητήρι

Πρόσφατα ανακαλύφθηκε ότι στο (σήμερα εγκαταλειμμένο) νησί Παραδείσι, μπορεί να ευδοκιμήσει μια σπάνια ποικιλία αμπελιού που παράγει εξαιρετικής ποιότητας κρασί. Έτσι σχεδιάζεται η δημιουργία αμπελώνων και των σχετικών υποδομών στο Παραδείσι, ώστε αυτό σύντομα να κατοικηθεί και πάλι.

Σύμφωνα με το σχέδιο, θα υπάρχουν n αμπελώνες στο Παραδείσι. Επειδή το Παραδείσι εκτείνεται σε μήκος, θα κατασκευαστεί ένας μόνο κύριος δρόμος που θα διέρχεται (και θα εξυπηρετεί) όλους τους αμπελώνες. Ο δρόμος θα ξεκινά από το ένα άκρο του νησιού και θα καταλήγει στο άλλο, και ουσιαστικά μπορεί να θεωρηθεί ως ένα ευθύγραμμο τμήμα. Μέσω συνδετηρίων οδών (οι οποίες είναι αμελητέου μήκους), κάθε αμπελώνας j θα συνδέεται με τον κύριο δρόμο σε σημείο που προσδιορίζεται από μια συντεταγμένη $A[j] \in \mathbb{N}$. Πολλοί αμπελώνες μπορεί να οδηγούνται, μέσω της ίδιας συνδετήριας οδού, στο ίδιο ακριβώς σημείο του κύριου δρόμου.

Σε κάποιο σημείο του δρόμου θα κατασκευαστεί το πατητήρι και οι αποθήκες για την ωρίμανση του κρασιού. Το ζητούμενο είναι να επιλεγεί η θέση του πατητηριού με βέλτιστο τρόπο, δεδομένου ότι υπάρχει ένας σημαντικός περιορισμός ως προς τη μεταφορά των σταφυλιών. Ο σχεδιασμός είναι ότι κάθε αμπελώνας, σε κάθε τρύγο, θα παράγει ακριβώς τόσα σταφύλια όση είναι η ωφέλιμη χωρητικότητα του μοναδικού φορτηγού που υπάρχει στο Παραδείσι (έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το φορτηγό κινείται είτε χωρίς καθόλου φορτίο είτε πλήρες φορτίου). Το φορτηγό αυτό έχει πρακτικά μηδενική κατανάλωση όταν δεν έχει φορτίο, αλλά χρειάζεται ένα λίτρο πετρέλαιο για κάθε μονάδα απόστασης που διανύει φορτωμένο με σταφύλια (δηλ. θεωρούμε ότι η μεταφορά των σταφυλιών ενός αμπελώνα στη συντεταγμένη ℓ_1 στο πατητήρι, αν αυτό βρίσκεται στη συντεταγμένη ℓ_2, απαιτεί ακριβώς $|\ell_1 - \ell_2|$ λίτρα πετρελαίου, θεωρούμε δε ότι ο ανεφοδιασμός του φορτηγού δεν αποτελεί πρόβλημα). Δεδομένου ότι στο Παραδείσι δεν μπορούν να αποθηκευθούν περισσότερα από B λίτρα πετρελαίου, θέλουμε να επιλέξουμε τη θέση του πατητηριού που μεγιστοποιεί την ποσότητα σταφυλιών που μπορούν να μεταφερθούν εκεί.

Με δεδομένα λοιπόν το πλήθος n των αμπελώνων, τις συντεταγμένες $A[1 \dots n]$ όπου συνδέονται οι αμπελώνες στον κύριο δρόμο, ταξινομημένες σε αύξουσα σειρά, και την ποσότητα B του πετρελαίου που μπορεί να αποθηκευθεί στο Παραδείσι, πρέπει να υπολογισθεί η θέση $k \in \mathbb{N}$ για το πατητήρι που μεγιστοποιεί την ποσότητα σταφυλιών που μπορούν μεταφερθούν εκεί. Π.χ. αν $n = 6$, $A = \{1, 2, 10, 10, 12, 14\}$, και $B = 7$, μια τέτοια θέση είναι αυτή με συντεταγμένη 12 (δείτε ότι οι θέσεις 10 και 11 είναι επίσης βέλτιστες). Προσπαθήστε ώστε ο αλγόριθμός σας να έχει πολυπλοκότητα $O(n \log n)$. Να αιτιολογήσετε αναλυτικά την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγόριθμου. *Σημείωση:* Αλγόριθμοι με τετραγωνικό χρόνο παίρνουν μέρος της βαθμολογίας, και αλγόριθμοι με γραμμικό χρόνο παίρνουν bonus.