Cálculo em Várias Variáveis

Máximos e mínimos.

ICT-Unifesp

1. Máximos e mínimos

2. Exercícios

Mais detalhes na Seção 14.7 do livro do Stewart. Recurso disponível online pela Biblioteca do ICT.

Máximos e mínimos

Máximos e mínimos

Relembrando...

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ (com $D \subset \mathbb{R}$). Suponha que f'' seja contínua em um intervalo I que contenha x_0.

Máximos e mínimos

Relembrando...

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ (com $D \subset \mathbb{R}$). Suponha que f'' seja contínua em um intervalo I que contenha x_0.

Se $f'(x_0) = 0$, então x_0 é um ponto crítico de f .

Máximos e mínimos

Relembrando...

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ (com $D \subset \mathbb{R}$). Suponha que f'' seja contínua em um intervalo I que contenha x_0.

Se $f'(x_0) = 0$, então x_0 é um ponto crítico de f .

Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$, então x_0 é ponto de mínimo local de f .

Relembrando...

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ (com $D \subset \mathbb{R}$). Suponha que f'' seja contínua em um intervalo I que contenha x_0.

Se $f'(x_0) = 0$, então x_0 é um ponto crítico de f.

Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$, então x_0 é ponto de mínimo local de f.

Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$, então x_0 é ponto de máximo local de f.

Relembrando...

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ (com $D \subset \mathbb{R}$). Suponha que f'' seja contínua em um intervalo I que contenha x_0.

Se $f'(x_0) = 0$, então x_0 é um ponto crítico de f.

Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$, então x_0 é ponto de mínimo local de f.

Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$, então x_0 é ponto de máximo local de f.

Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = 0$ e se $f''(x)$ mudar de sinal em x_0, então x_0 é ponto de inflexão de f.

Máximos e mínimos

Definição

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ *(com* $D \subset \mathbb{R}^2$*) e considere um ponto* $(x_0, y_0) \in D$.

> *Se* $\boxed{f(x_0, y_0) \leq f(x, y)}$ *para todo* $(x, y) \in D$ *numa vizinhança de* (x_0, y_0)*, dizemos que* (x_0, y_0) *é ponto de mínimo local de* f *e que* $f(x_0, y_0)$ *é um valor mínimo local de* f.

Máximos e mínimos

Definição

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ *(com* $D \subset \mathbb{R}^2$*) e considere um ponto* $(x_0, y_0) \in D$.

> *Se* $\boxed{f(x_0, y_0) \leq f(x, y)}$ *para todo* $(x, y) \in D$ *numa vizinhança de* (x_0, y_0), *dizemos que* (x_0, y_0) *é ponto de mínimo local de* f *e que* $f(x_0, y_0)$ *é um valor mínimo local de* f.
>
> *Se* $\boxed{f(x_0, y_0) \geq f(x, y)}$ *para todo* $(x, y) \in D$ *numa vizinhança de* (x_0, y_0), *dizemos que* (x_0, y_0) *é ponto de máximo local de* f *e que* $f(x_0, y_0)$ *é um valor máximo local de* f.

Máximos e mínimos

Definição

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ *(com* $D \subset \mathbb{R}^2$*) e considere um ponto* $(x_0, y_0) \in D$.

Se $\boxed{f(x_0, y_0) \leq f(x, y)}$ *para todo* $(x, y) \in D$, *dizemos que* (x_0, y_0) *é ponto de mínimo global de* f *e que* $f(x_0, y_0)$ *é um valor mínimo global de* f.

Máximos e mínimos

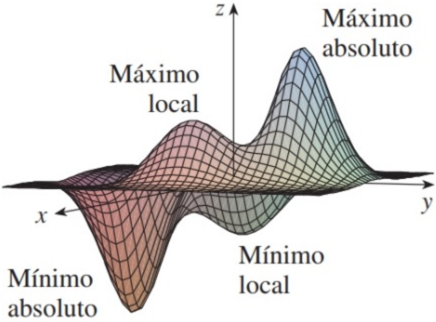
Definição

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ *(com* $D \subset \mathbb{R}^2$*) e considere um ponto* $(x_0, y_0) \in D$.

Se $\boxed{f(x_0, y_0) \leq f(x, y)}$ *para todo* $(x, y) \in D$ *, dizemos que* (x_0, y_0) *é ponto de mínimo global de* f *e que* $f(x_0, y_0)$ *é um valor mínimo global de* f*.*

Se $\boxed{f(x_0, y_0) \geq f(x, y)}$ *para todo* $(x, y) \in D$*, dizemos que* (x_0, y_0) *é ponto de máximo global de* f *e que* $f(x_0, y_0)$ *é um valor máximo global de* f*.*

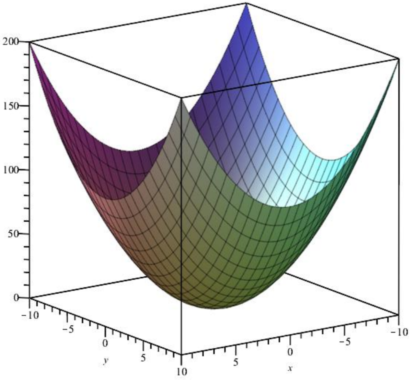
Máximos e mínimos



Máximos e mínimos

Exemplo

A função $f(x,y) = x^2 + y^2$ *tem um mínimo global em* $(0,0)$, *mas não tem máximo local.*



Definição

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ *(com* $D \subset \mathbb{R}^2$*) e considere um ponto* $(x_0, y_0) \in D$*. Dizemos que* (x_0, y_0) *é um ponto crítico de* f *se*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \qquad e \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

ou se pelo menos uma das derivadas parciais de primeira ordem de f *não existe em* (x_0, y_0)*.*

Máximos e mínimos

Os pontos de máximo e mínimo de uma função f são chamados pontos extremos de f.

Máximos e mínimos

Os pontos de máximo e mínimo de uma função f são chamados pontos extremos de f.

Teorema

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ (com $D \subset \mathbb{R}^2$ aberto) uma função e $(x_0, y_0) \in D$. Se (x_0, y_0) é um ponto extremo de f e as derivadas parciais de primeira ordem existem nesse ponto, então

$$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0).$$

Assim, os candidatos à pontos extremos (pontos de máximo ou mínimo) de uma função diferenciável de duas variáveis f, serão seus pontos críticos:

$$(x_0, y_0) \text{ é um ponto extremo} \overset{Teo.}{\Longrightarrow} \nabla f(x_0, y_0) = (0, 0),$$

$$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0) \overset{Def.}{\Longrightarrow} (x_0, y_0) \text{ é ponto crítico}$$

(não necessariamente um ponto extremo).

Definição

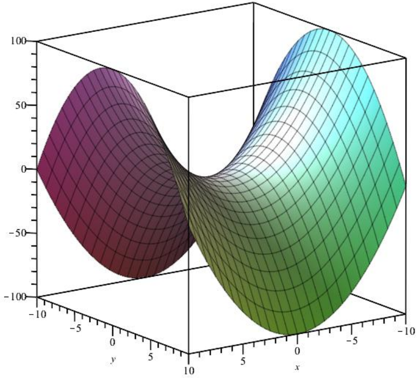
Seja $f : D \to \mathbb{R}$ *(com* $D \subset \mathbb{R}^2$*) uma função diferenciável. Dizemos que um ponto crítico* $(x_0, y_0) \in D$ *de* f *é um ponto de sela de* f *se, para qualquer vizinhança de* (x_0, y_0)*, existirem pontos* (x_1, y_1) *e* (x_2, y_2) *tais que*

$$f(x_1, y_1) < f(x_0, y_0) < f(x_2, y_2).$$

Máximos e mínimos

Exemplo

A função $f(x,y) = x^2 - y^2$ *tem ponto de sela em* $(0,0)$.



Máximos e mínimos

Definição

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ *(com* $D \subset \mathbb{R}^2$*) uma função com derivadas parciais de segunda ordem contínuas. A matriz*

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix}$$

é chamada matriz Hessiana de f *no ponto* (x,y)*.*

Máximos e mínimos

Teorema

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ *(com* $D \subset \mathbb{R}^2$*) de classe* C^2 *numa vizinhança de* $(x_0, y_0) \in D$ *e* $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$.

- *Se* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ *e* $\det(H_f(x_0, y_0)) > 0$, *então* (x_0, y_0) *é ponto de mínimo local de* f.
- *Se* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ *e* $\det(H_f(x_0, y_0)) > 0$, *então* (x_0, y_0) *é ponto de máximo local de* f.
- *Se* $\det(H_f(x_0, y_0)) < 0$, *então* (x_0, y_0) *é ponto de sela de* f.
- *Se* $\det(H_f(x_0, y_0)) = 0$, *nada podemos concluir sobre* (x_0, y_0).

Máximos e mínimos

Exemplo

Determinar os valores máximos e mínimos locais e os pontos de sela da função $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

Exemplo

Determinar os valores máximos e mínimos locais e os pontos de sela da função $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

O ponto $(0,0)$ é ponto de máximo global?

Máximos e mínimos

Exemplo

Determinar os valores máximos e mínimos locais e os pontos de sela da função $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

O ponto $(0,0)$ é ponto de máximo global?

Não! Basta observar que

$$f(1,0) = 2 > 1 = f(0,0).$$

Máximos e mínimos

Os pontos $(-1,-1)$ e $(1,1)$ são pontos de mínimo global?

Os pontos $(-1,-1)$ e $(1,1)$ são pontos de mínimo global?

Sim! Para provar isto devemos mostrar que

$$f(x,y) \geq f(-1,-1) = f(1,1) = -1, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Observe que

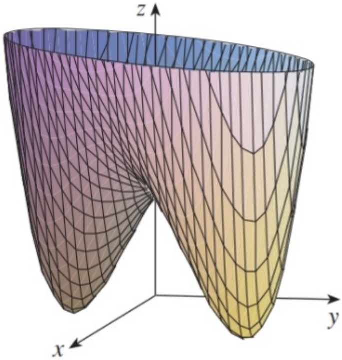
$$x^4 + y^4 - 4xy + 2 = (x^2 - y^2)^2 + 2(xy-1)^2 \geq 0,$$

logo

$$x^4 + y^4 - 4xy + 1 \geq -1,$$

como queríamos.

Máximos e mínimos



Exercício

Encontre e classifique os pontos críticos da função $f(x,y) = 3xy^2 + x^3 - 3x$.

Máximos e mínimos

Relembrando...

Se $f : D \to \mathbb{R}$ (com $D \subset \mathbb{R}$) é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então f assume um valor mínimo global e um valor máximo global em $[a, b]$ (Teorema de Weierstrass).

Máximos e mínimos

Relembrando...

Se $f : D \to \mathbb{R}$ (com $D \subset \mathbb{R}$) é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então f assume um valor mínimo global e um valor máximo global em $[a, b]$ (Teorema de Weierstrass).

Quando podemos garantir que uma função de duas variáveis assumirá um valor máximo global e um valor mínimo global?

Dado $A \subset \mathbb{R}^2$, dizemos que (a, b) pertence à fronteira de A se toda bola aberta de centro em (a, b),

$$B_r(a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, \|(x, y) - (a, b)\| < r\},$$

contém pontos de A e pontos não pertencentes a A.

Dado $A \subset \mathbb{R}^2$, dizemos que (a, b) pertence à fronteira de A se toda bola aberta de centro em (a, b),

$$B_r(a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, \|(x, y) - (a, b)\| < r\},$$

contém pontos de A e pontos não pertencentes a A.

Dizemos que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ é fechado se ele contém todos os pontos de sua fronteira.

Dado $A \subset \mathbb{R}^2$, dizemos que (a, b) pertence à fronteira de A se toda bola aberta de centro em (a, b),

$$B_r(a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, \|(x, y) - (a, b)\| < r\},$$

contém pontos de A e pontos não pertencentes a A.

Dizemos que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ é fechado se ele contém todos os pontos de sua fronteira.

Dizemos que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ é limitado se ele está contido em algum retângulo.

Máximos e mínimos

Definição

Um conjunto que é fechado e limitado é chamado de compacto.

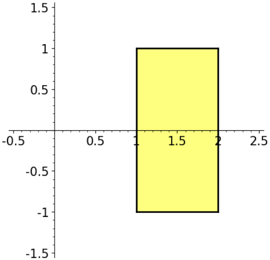
Máximos e mínimos

Definição

Um conjunto que é fechado e limitado é chamado de compacto.

Exemplo

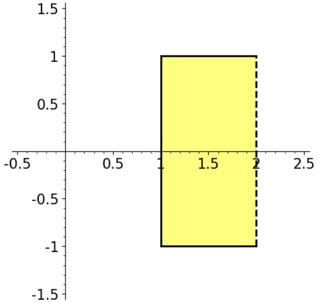
O conjunto $A = \{(x, y) | 1 \leqslant x \leqslant 2, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ *é compacto.*



Máximos e mínimos

Exemplo

O conjunto $A = \{(x,y)|1 \leqslant x < 2, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ *não é compacto, pois não é fechado (e nem aberto).*



Máximos e mínimos

Teorema (Weierstrass)

Se $f : D \to \mathbb{R}$ (com $D \subset \mathbb{R}^2$) é contínua em um conjunto compacto $A \subset D$, então f assume um valor máximo global e um valor mínimo global em A.

Máximos e mínimos

Procedimento para encontrar os valores máximo e mínimo globais de f num conjunto fechado e limitado $A \subset \mathbb{R}^2$:

1. Encontre os pontos críticos de f que pertençam ao conjunto A, e calcule o valor de f nesses pontos.
2. Encontre os valores extremos de f na fronteira de A.
3. O maior valor de f encontrado nos passos 1 e 2 é o valor máximo global de f em A e o menor deles é o valor mínimo global de f em A.

Exemplo

Encontre os valores máximo e mínimo globais de

$$f(x,y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$$

no conjunto

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0,\ \ y \geq 0 \ e\ x + y \leq 3\right\}.$$

Procurando pontos críticos de f:

$$\begin{cases} f_x = 2 - 2x = 0 \\ f_y = 2 - 2y = 0 \end{cases} \implies (x,y) = (1,1).$$

Note que $(1,1) \in A$.

Vamos classificar este ponto crítico:

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ & \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\det(H_f(x,y)) = 4.$$

Portanto, $(1,1)$ é ponto de máximo local e $f(1,1) = 4$.

Máximos e mínimos

Na fronteira de A temos as seguintes possibilidades:

- $x = 0 \Longrightarrow f(0, y) = 2 + 2y - y^2$, com $0 \leq y \leq 3$, que é uma parábola voltada para baixo. Seu máximo ocorre em $y = 1$ e seu mínimo em $y = 3$. Temos que $f(0, 1) = 3$ e $f(0, 3) = -1$.

Máximos e mínimos

Na fronteira de A temos as seguintes possibilidades:

- $x = 0 \Longrightarrow f(0, y) = 2 + 2y - y^2$, com $0 \leq y \leq 3$, que é uma parábola voltada para baixo. Seu máximo ocorre em $y = 1$ e seu mínimo em $y = 3$. Temos que $f(0, 1) = 3$ e $f(0, 3) = -1$.

- $y = 0 \Longrightarrow f(x, 0) = 2 + 2x - x^2$, com $0 \leq x \leq 3$, que é uma parábola voltada para baixo. Seu máximo ocorre em $x = 1$ e seu mínimo em $x = 3$. Temos que $f(1, 0) = 3$ e $f(3, 0) = -1$.

Na fronteira de A temos as seguintes possibilidades:

- $x = 0 \Longrightarrow f(0, y) = 2 + 2y - y^2$, com $0 \leq y \leq 3$, que é uma parábola voltada para baixo. Seu máximo ocorre em $y = 1$ e seu mínimo em $y = 3$. Temos que $f(0, 1) = 3$ e $f(0, 3) = -1$.

- $y = 0 \Longrightarrow f(x, 0) = 2 + 2x - x^2$, com $0 \leq x \leq 3$, que é uma parábola voltada para baixo. Seu máximo ocorre em $x = 1$ e seu mínimo em $x = 3$. Temos que $f(1, 0) = 3$ e $f(3, 0) = -1$.

- $y = 3 - x \Longrightarrow f(x, 3 - x) = -1 + 6x - 2x^2$, com $0 \leq x \leq 3$, que é uma parábola voltada para baixo. Seu máximo ocorre em $x = 3/2$ e seus mínimos em $x = 0$ e $x = 3$. Temos que $f(3/2, 3/2) = 7/2$ e $f(3, 0) = f(0, 3) = -1$.

Máximos e mínimos

Portanto, f restrita ao conjunto A tem valor máximo $f(1,1) = 4$ e valor mínimo $-1 = f(0,3) = f(3,0)$.

Exercícios

Seção 14.7 do Stewart: 1–22, 33–40, 43–59.