Cálculo em Várias Variáveis
Mudança de variáveis em integrais múltiplas

ICT-Unifesp

1. Mudança de variáveis em integrais múltiplas

2. Exercícios

Mais detalhes nas Seções 15.9 do livro do Stewart.
Recurso disponível online pela Biblioteca do ICT.

Mudança de variáveis em integrais múltiplas

Mudança de variáveis em integrais múltiplas

Lembremos que para funções de uma variável as vezes é conveniente fazermos uma mudança de variáveis:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)\,du,$$

onde $x = g(u)$, $a = g(c)$ e $b = g(d)$.

Mudança de variáveis em integrais múltiplas

Já vimos mudanças de variáveis nas integrais duplas (coordenadas polares),

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_S f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)r\,drd\theta,$$

e nas integrais triplas (coordenadas cilíndricas e esféricas).

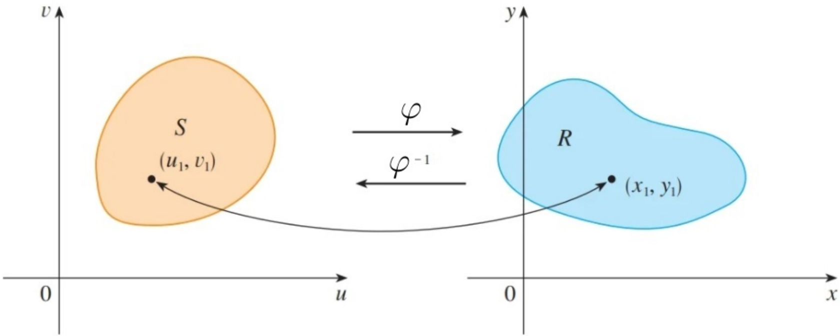
Já vimos mudanças de variáveis nas integrais duplas (coordenadas polares),

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_S f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) r\,drd\theta,$$

e nas integrais triplas (coordenadas cilíndricas e esféricas).

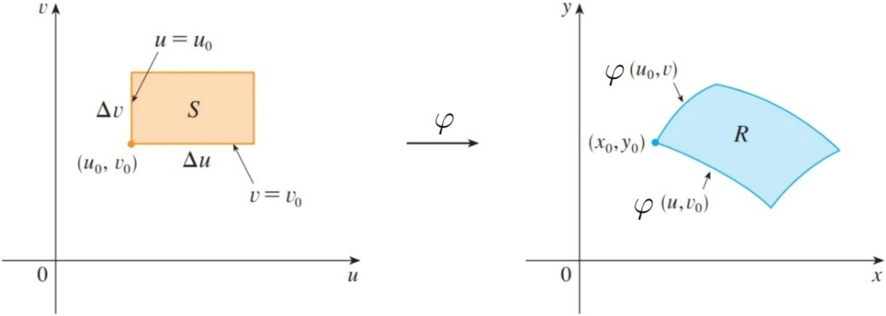
Veremos agora mudanças de coordenadas mais gerais na integral múltipla.

Suponha que φ seja uma transformação de **classe** C^1 **e injetora** do plano *uv* no plano *xy*: $\varphi(u, v) = (x, y)$, onde $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$.



Como T é injetora, podemos definir sua inversa T^{-1} em R.

Considere os retângulos R e S nos planos xy e uv, respectivamente, e a transformação φ tal que $\varphi(S) = R$.



Vamos olhar para o ponto $(x_0, y_0) = \varphi(u_0, v_0)$.

Mudança de variáveis em integrais múltiplas

A imagem do ponto (u, v) por φ é denotada por $\varphi(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} = (x(u, v), y(u, v))$.

A imagem do ponto (u, v) por φ é denotada por
$\varphi(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} = (x(u, v), y(u, v))$.

O lado inferior de S tem equação $v = v_0$, cuja curva imagem é $\varphi(u, v_0)$.

Mudança de variáveis em integrais múltiplas

A imagem do ponto (u, v) por φ é denotada por
$\varphi(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} = (x(u, v), y(u, v))$.

O lado inferior de S tem equação $v = v_0$, cuja curva imagem é $\varphi(u, v_0)$.

O vetor tangente em (x_0, y_0) a essa curva é

$$\varphi_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j}.$$

A imagem do ponto (u, v) por φ é denotada por $\varphi(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} = (x(u, v), y(u, v))$.

O lado inferior de S tem equação $v = v_0$, cuja curva imagem é $\varphi(u, v_0)$.

O vetor tangente em (x_0, y_0) a essa curva é

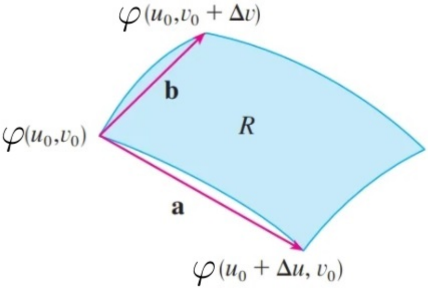
$$\varphi_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j}.$$

O vetor tangente em (x_0, y_0) à curva imagem de $u = u_0$ (lado esquerdo de S) é

$$\varphi_v = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j}.$$

Observe que podemos aproximar a região imagem $R = \varphi(S)$ pelo paralelogramo determinado pelos vetores secantes

$$\mathbf{a} = \varphi(u_0 + \Delta u, v_0) - \varphi(u_0, v_0), \quad \mathbf{b} = \varphi(u_0, v_0 + \Delta v) - \varphi(u_0, v_0).$$



Mudança de variáveis em integrais múltiplas

Como $\varphi_u = \lim_{\Delta u \to 0} \dfrac{\varphi(u_0 + \Delta u, v_0) - \varphi(u_0, v_0)}{\Delta u}$, então

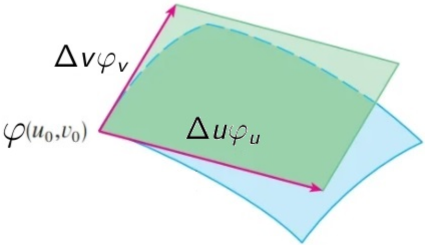
$$\varphi(u_0 + \Delta u, v_0) - \varphi(u_0, v_0) \approx \Delta u \varphi_u.$$

Como $\varphi_v = \lim_{\Delta v \to 0} \dfrac{\varphi(u_0, v_0 + \Delta v) - \varphi(u_0, v_0)}{\Delta v}$, então

$$\varphi(u_0, v_0 + \Delta v) - \varphi(u_0, v_0) \approx \Delta v \varphi_v.$$

Mudança de variáveis em integrais múltiplas

Podemos aproximar R pelo paralelogramo determinado pelos vetores $\Delta u \varphi_u$ e $\Delta v \varphi_v$.



Então, a área de R é aproximada por

$$||(\Delta u \varphi_u) \times (\Delta v \varphi_v)|| = ||\varphi_u \times \varphi_v||\Delta u \Delta v$$

O produto vetorial acima resulta em

$$\varphi_u \times \varphi_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

Definição

O **jacobiano** *da transformação* φ *dada por* $x = x(u, v)$ *e* $y = y(u, v)$ *é definido por*

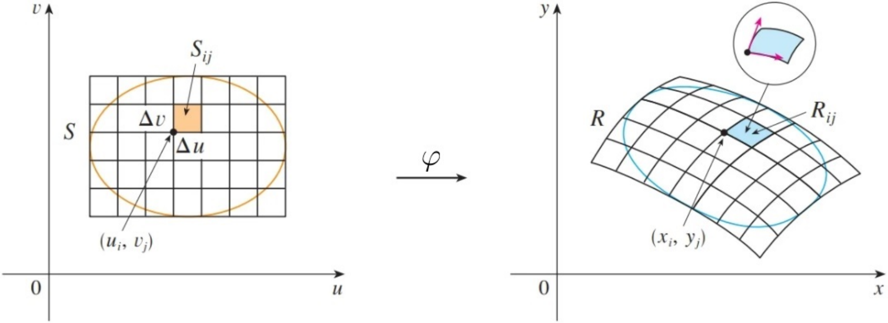
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

A aproximação da área ΔA de R é, portanto,

$$\Delta A = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \Delta u \Delta v.$$

Mudança de variáveis em integrais múltiplas

Dividimos a região S do plano uv em sub-retângulos S_{ij}, cujas imagens são R_{ij}:



Usando essas aproximações, temos que

$$\iint_R f(x,y)\,dA \approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta A$$
$$\approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x(u_i,v_j),y(u_i,v_j))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Delta u\Delta v,$$

sendo o jacobiano calculado no ponto (u_i,v_j).

Mudança de variáveis em integrais múltiplas

Teorema

Seja φ uma transformação de classe C^1 e injetora cujo jacobiano é não-nulo e tal que φ leva a região S do plano uv na região R do plano xy. Então,

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_S f(x(u,v),y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv.$$

Exemplo

Seja φ a transformação do plano $r\theta$ para o plano xy dada por $x = r\,cos\,\theta$ e $y = r\,sen\,\theta$. O jacobiano de φ é

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} cos\,\theta & -r\,sen\,\theta \\ sen\,\theta & r\,cos\,\theta \end{vmatrix} = r\,cos^2\theta + r\,sen^2\theta = r > 0.$$

Então, obtemos a seguinte expressão que já conhecemos

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_S f(r\,cos\,\theta, r\,sen\,\theta)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| drd\theta$$
$$= \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\,cos\,\theta, r\,sen\,\theta) r\,drd\theta$$

Mudança de variáveis em integrais múltiplas

Exemplo

Calcule a integral $\displaystyle\iint_R e^{(x+y)/(x-y)}\,dA$*, onde* R *é a região trapezoidal com vértices* $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,-2)$ *e* $(0,-1)$.

Mudança de variáveis em integrais múltiplas

Exemplo

Calcule a integral $\displaystyle\iint_R e^{(x+y)/(x-y)}dA$*, onde* R *é a região trapezoidal com vértices* $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,-2)$ *e* $(0,-1)$.

Vamos fazer a mudança de variáveis

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$$

Essas equações definem φ^{-1} do plano xy para o plano uv.

Mudança de variáveis em integrais múltiplas

A transformação φ é dada por

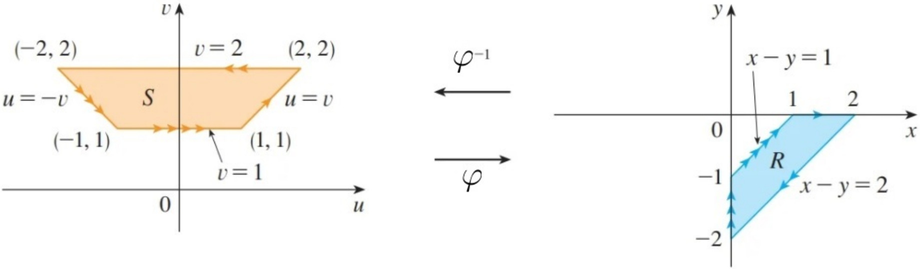
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v) \\ y = \frac{1}{2}(u-v) \end{cases}$$

e seu jacobiano é

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Mudança de variáveis em integrais múltiplas

A região S correspondente a R é



De fato, temos as correspondências

$$\begin{array}{cccc} y = 0 & x - y = 2 & x = 0 & x - y = 1 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ u = v & v = 2 & u = -v & v = 1 \end{array}$$

Mudança de variáveis em integrais múltiplas

Então $S = \{(u,v)\,|\,1 \le v \le 2, -v \le u \le v\}$ e

$$\begin{aligned}
\iint_R e^{(x+y)/(x-y)} dA &= \iint_S e^{u/v} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv \\
&= \int_1^2 \int_{-v}^{v} e^{u/v} \frac{1}{2}\, dudv \\
&= \frac{1}{2} \int_1^2 \left[ve^{u/v} \right]_{-v}^{v} dv \\
&= \frac{1}{2} \int_1^2 v(e - e^{-1})\, dv = \frac{3}{4}(e - e^{-1}).
\end{aligned}$$

Mudança de variáveis na integral tripla

Seja φ a transformação que leva uma região S no espaço uvw para uma região R no espaço xyz através das equações

$$x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w).$$

Mudança de variáveis em integrais múltiplas

O jacobiano da mudança de variáveis φ é

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Mudança de variáveis em integrais múltiplas

Teorema

Seja φ uma transformação de classe C^1 e injetora cujo jacobiano é não-nulo e tal que φ leva a região S do espaço uvw na região R do espaço xyz. Então,

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dV =$$

$$\iiint_S f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$$

Exemplo

Vamos deduzir a fórmula para a integral tripla em coordenadas esféricas.

A mudança de variáveis é

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$$

Mudança de variáveis em integrais múltiplas

O jacobiano desta transformação é

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\phi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\operatorname{sen}\theta \\ \cos\phi & 0 & -\rho\operatorname{sen}\phi \end{vmatrix}$$
$$= -\rho^2\operatorname{sen}\phi\cos^2\phi - \rho^2\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}^2\phi$$
$$= -\rho^2\operatorname{sen}\phi.$$

Como $0 \leq \phi \leq \pi$, então $\operatorname{sen}\phi \geq 0$. Logo,

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)}\right| = \left|-\rho^2\operatorname{sen}\phi\right| = \rho^2\operatorname{sen}\phi.$$

Mudança de variáveis em integrais múltiplas

Segue do teorema anterior que

$$\iiint_R f(x,y,z)dV =$$

$$\iiint_S f(\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi)\rho^2 \operatorname{sen} \phi d\rho d\theta d\phi.$$

Exercícios

Seção 15.9 do Stewart: 1–21, 25–30.