Universidade Federal do ABC

Estudos Continuados Emergenciais

1º Quadrimestre de 2020

Professora Dra. Ana Claudia da Silva Moreira

Funções de Várias Variáveis

Parte 2 - Revisão: Diferenciabilidade

1 Objetivo

Nas aulas presenciais do dia 20/02 à 12/03, começamos nosso estudo de funções de várias variáveis (mais especificamente, de 2 e 3 variáveis), estudando noções de derivada e condições de diferenciabilidade aplicáveis a estas funções. O objetivo do presente material é fazer um resumo desta teoria, com alguns exemplos simples, e introduzir os conceitos sobre derivadas parciais de ordem superior, que não foram dados antes da suspensão das aulas. Trata-se de um texto prático e informal, sem descuidar, no entanto, dos detalhes e hipóteses que validam nossos resultados.

2 Funções de Várias Variáveis

Uma função de n-variáveis, também chamada de *campo escalar*, é uma função $f : A \to \mathbb{R}$, com $A \subset \mathbb{R}^n$, $n > 1$, que associa a cada n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$ um único número real (escalar) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$.

É muito importante ter em mente que o domínio de um campo escalar é um subconjunto do $\mathbb{R}^n$, $n > 1$; a imagem de um campo escalar é um subconjunto da reta real,

$$Im(f) = \{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R} : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A\},$$

e o gráfico de um campo escalar é um subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$,

$$Graf(f) = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1} : x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A, z = f(x), \right\}.$$

Obs.: Em nosso curso vamos nos ater aos casos $n = 2$ e $n = 3$. Frequentemente, enunciaremos as definições e teoremas somente para o caso $n = 2$, mas que fique bem entendido que todo o conteúdo deste material se estende para $n = 3$ de maneira bastante direta.

2.1 Curvas/superfícies de nível

Um conceito muito importante, associado aos campos escalares, é o de curva ($n = 2$) ou superfície ($n = 3$) de nível.

Seja $f : A \to \mathbb{R}$, com $A \subset \mathbb{R}^n$, $n > 1$ um campo escalar e $c \in \text{Im}(f)$. Para $n = 2$, o conjunto dos pares $(x, y) \in A$ tais que $f(x, y) = c$ é chamado *curva de nível* de f (correspondente ao nível c). Para $n = 3$, o conjunto das triplas $(x, y, z) \in A$ tais que $f(x, y, z) = c$ é chamado *superfície de nível* de f (correspondente ao nível c).

É importante perceber que as curvas/superfícies de nível são subconjuntos do domínio da função. Além disso, decorre diretamente da definição que f é constante sobre cada curva/superfície de nível.

Exemplo 1. *Considere o campo escalar $f(x, y) = x^2 + y^2$.*

Solução. Observem que o domínio da função acima é todo o $\mathbb{R}^2$. De fato, a expressão x^2+y^2 não impõe nenhuma condição restritiva ao domínio de f. É claro que, ao somarmos o quadrado de dois números reais, estamos somando grandezas não-negativas. Logo, a imagem de f é $\mathbb{R}_+$. Lembre que, $0 \in \mathbb{R}_+$.

Para encontrarmos as curvas de nível de f, devemos nos lembrar da definição. O que é uma curva de nível? Um conjunto de pontos (x, y) que satisfaz $f(x, y) = c$, para cada $c \in \text{Im}(f)$. Isto é, o conjunto de pontos (x, y) que satisfaçam a equação $x^2 + y^2 = c$, para cada $c \in \mathbb{R}_+$. Ora, como c é não negativo, para cada $c > 0$ esta é a equação de círculos concêntricos, centrados na origem, de raio $\sqrt{c}$ (se você não reconhece a equação do círculo, faça uma revisão de Geometria Analítica). Se $c = 0$, o único ponto que satisfaz a equação é a própria origem $(0, 0)$.

Para esboçar o gráfico de f (no $\mathbb{R}^3$) é bastante útil observarmos as projeções do gráfico de f nos planos coordenados (ou, mais geralmente, as interseções do gráfico de f com os planos paralelos aos planos coordenaddos). Se fixarmos $x = 0$ e deixarmos as outras duas variáveis livres, estamos olhando para o plano-yz. Substituindo este valor na função, temos

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \implies z = x^2 + y^2 \overset{(x=0)}{\implies} z = y^2,$$

que é a equação de uma parábola com vértice na origem e concavidade voltada para cima. Se fizermos o mesmo para o plano-xz, também obteremos uma parábola semelhante,

$$z = x^2 + y^2 \overset{(y=0)}{\Longrightarrow} z = x^2,$$

A projeção no plano-xy (quando $z = 0$) é um ponto, a origem. E a interseção dos planos $z = c$, $c \in \mathbb{R}$ (paralelos ao plano-xy) com o gráfico de f são os círculos $x^2 + y^2 = c$.

Curvas de nível:

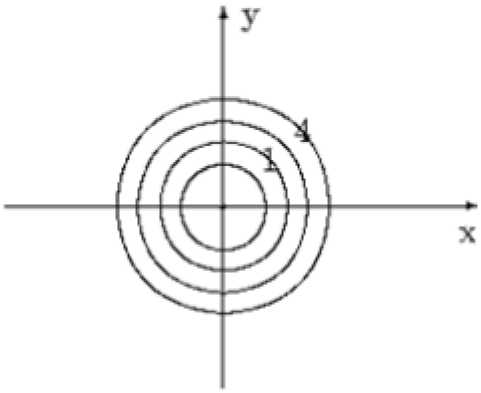
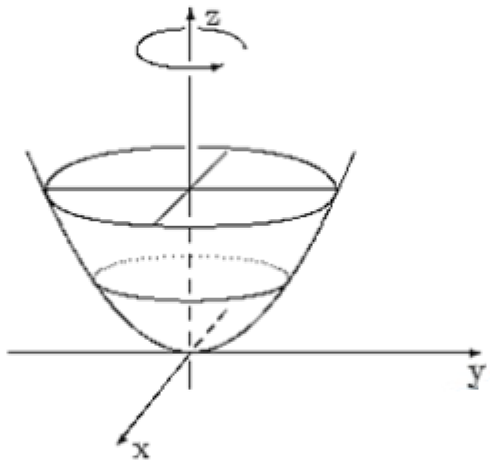


Gráfico de f:



De conhecimento de todos esses elementos, fica fácil ver que o gráfico de f é um paraboloide de revolução com abertura voltada para cima e vértice na origem, como mostra a figura acima.

Exemplo 2. *Considere a função* $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

(a) Determine e esboce o domínio de g.

(b) Determine e esboce a imagem de g.

(c) Esboce o gráfico de g.

(d) Esboce as curvas de nível de g *para* $c = 0, 1, 2, 3$.

Solução. Vamos à solução do exercício.

(a) O domínio de g é o conjunto de pares (x, y) do $\mathbb{R}^2$ para os quais podemos calcular $\sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Ora, sabemos que, em $\mathbb{R}$, não existe raiz quadrada de número negativo, portanto os pontos no domínio de g devem satisfazer

$$9 - x^2 - y^2 \geq 0.$$

Resolvendo a inequação, temos $9 - x^2 - y^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; 9 \geq x^2 + y^2$, isto é,

$$\mathrm{Dom}(g) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\right\}.$$

Agora, note que $x^2+y^2 = 9$ é a equação de um círculo de raio 3, centrado na origem. Portanto, o domínio de g consiste de todos os pontos do $\mathbb{R}^2$ sobre este círculo e em seu interior. Esboce.

(b) A imagem de g é o conjunto dos pontos $z = g(x, y) \in \mathbb{R}$ tais que $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, para todo (x, y) no domínio de g. Sabemos que a raiz de um número real nunca é negativa

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} \geq 0.$$

Por outro lado, temos

$$9 - (x^2 + y^2) \leq 9 \;\Rightarrow\; \sqrt{9 - (x^2 + y^2)} \leq 3.$$

Logo,

$$\mathrm{Im}(g) = \{z \in \mathbb{R} : 0 \leq z \leq 3\},$$

ou, equivalentemente,

$$\mathrm{Im}(g) = [0, 3].$$

Esboce o intervalo.

(c) Como g é uma função de 2 variáveis, seu gráfico está no $\mathbb{R}^3$. Para esboçar o gráfico de g, observe que

$$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \;\Rightarrow\; z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \;\Rightarrow\; z^2 = 9 - x^2 - y^2,$$

donde

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9,$$

que é a equação de uma esfera, centrada na origem, de raio 3.

Lembre-se que

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \geq 0,$$

isto é, o gráfico de g é o hemisfério superior da esfera mencionada.

Pense: a esfera inteira poderia ser gráfico de uma função? Por quê?

(d) Lembre que as curvas de nível de g são subconjuntos do domínio de g.

Para esboçar as curvas de nível solicitadas, basta usarmos a definição de curva de nível e os valores dados para a constante c, obtendo as seguintes equações:

- $c = 0 \;\Rightarrow\; g(x,y) = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 = 9$, que é a equação de um círculo de raio $\sqrt{9} = 3$, centrado na origem do $\mathbb{R}^2$;
- $c = 1 \;\Rightarrow\; g(x,y) = 1 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 = 8$, que é a equação de um círculo de raio $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} \cong 2,83$, centrado na origem do $\mathbb{R}^2$;
- $c = 2 \;\Rightarrow\; g(x,y) = 1 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 = 7$, que é a equação de um círculo de raio $\sqrt{7} \cong 2,65$, centrado na origem do $\mathbb{R}^2$;
- $c = 3 \;\Rightarrow\; g(x,y) = 1 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 = 6$, que é a equação de um círculo de raio $\sqrt{6} \cong 2,45$, centrado na origem do $\mathbb{R}^2$;

Esboce as curvas de nível.

☕

2.2 Limite

A definição formal de limite para funções de várias variáveis não é muito diferente da definição que você já conhece (para funções de uma variável real).

Definição 1 ($n = 2$)**.** *Seja $f : A \to \mathbb{R}$, com $A \subset \mathbb{R}^2$, um campo escalar, (x_0, y_0) um ponto de acumulação de A e $L \in \mathbb{R}$. Dizemos que*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L,$$

se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $(x,y) \in A$,

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x,y) - L| < \varepsilon.$$

A principal diferença a se notar é que, como o domínio da função tem dimensão 2 (maior do que 1), a distância entre os pontos (x,y) e (x_0,y_0) é a norma do vetor $(x - x_0, y - y_0)$. Note que ao consideramos todos os pontos (x,y) que estão a uma distância menor do que δ e maior que zero do ponto (x_0,y_0), estamos considerando pontos interiores ao círculo centrado em (x_0,y_0), de raio δ, diferentes do próprio (x_0,y_0).

A situação é análoga para $n = 3$.

Definição 2 ($n = 3$)**.** *Seja $f : A \to \mathbb{R}$, com $A \subset \mathbb{R}^3$, um campo escalar, (x_0, y_0, z_0) um ponto de acumulação de A e $L \in \mathbb{R}$. Dizemos que*

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z) = L,$$

se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $(x,y,z) \in A$,

$$0 < \|(x,y,z) - (x_0,y_0,z_0)\| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x,y,z) - L| < \varepsilon.$$

Nesse caso, como o domínio está contido no $\mathbb{R}^3$, o conjunto dos pontos (x, y, z) que estão a uma distância menor do que δ (e maior que zero) do ponto (x_0, y_0, z_0), são pontos (x, y, z) interiores a uma bola de raio δ, centrada em (x_0, y_0, z_0), com $(x, y, z) \neq (x_0, y_0, z_0)$.

Sempre que falarmos de limite de f em um ponto, fica implícito que este é um ponto de acumulação do domínio de f (revisem a parte sobre Noções Topológicas).

O teorema abaixo nos ensina uma maneira prática de mostrarmos que um limite não existe.

Teorema 1. *Se* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$, *então* $\lim\limits_{t\to t_0} f(\alpha(t)) = L$, *para qualquer curva* $\alpha : I \to \mathbb{R}^2, I \subset \mathbb{R}^2$, *tal que*

- α *é contínua em* t_0,
- $\alpha(t_0) = (x_0, y_0)$,
- $\alpha(t) \neq (x_0, y_0)$, *para* $t \neq t_0$,
- $\alpha(t) \in Dom(f)$, *para* t *próximo de* t_0.

Concluímos que, se existem curvas $\alpha(t) \neq \gamma(t)$ (para t próximo de t_0), satisfazendo as condições itemizadas no teorema, tais que

$$\lim_{t\to t_0} f(\alpha(t)) \neq \lim_{t\to t_0} f(\gamma(t)),$$

então o limite $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ não existe.

Resultado análogo vale para campos escalares definidos em subconjuntos do $\mathbb{R}^3$.

Em nossas aulas presenciais, estudamos diversas propriedades do limite, na sequência. Pudemos observar que a existência de tais propriedades, análogas às de funções de uma variável real, é que nos permite calcular o limite de funções de várias variáveis. Aqui nessas notas, daremos destaque à apenas uma delas (no entanto, recomendamos que você revise todas as demais).

Teorema 2 (Teorema do Confronto). *Sejam* $f, g, h : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$ *campos escalares. Se* $f(x, y) \leq g(x, y) \leq h(x, y)$, *para* (x, y) *próximo, mas diferente, de* (x_0, y_0) *e*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x, y) = L,$$

então $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y) = L$.

Observe que o chamado Teorema do Anulamento (muito útil no cálculo de limites) é uma consequência direta do Teorema do Confronto. Antes de enunciá-lo, lembremos da seguinte definição.

Definição 3. *Uma função $z = g(x, y)$ é dita limitada em um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$, se existe um número real $M > 0$, tal que $|g(x, y)| < M$, para todo $(x, y) \in A$.*

Segue da definição de módulo de um número real que

$$|g(x, y)| < M \Rightarrow -M < g(x, y) < M.$$

Teorema 3 (Teorema do Anulamento)**.** *Sejam $f, g : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$ campos escalares. Se $z = g(x, y)$ é uma função limitada e $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = 0$, então*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y)f(x, y) = 0.$$

No teorema acima, note que, como $g(x, y)$ é limitada , sabemos que existe $M > 0$ tal que $-M < g(x, y) < M$. Multiplicando esta expressão por $f(x, y)$, temos

$$-Mf(x, y) < g(x, y)f(x, y) < Mf(x, y),$$

com

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} -Mf(x, y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} Mf(x, y) = 0.$$

Assim, segue do Teorema do Confronto que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y)f(x, y) = 0.$$

As funções limitadas desempenham um papel muito importante no cálculo de limites (ver material complementar sobre o assunto).

Cuidado! Coordenadas polares no cálculo de limites.
Talvez vocês tenham se deparado com cálculos de limites de funções de duas (ou três) variáveis via coordenadas polares (esféricas) e tenham estranhado isso não ter aparecido nas aulas. Na verdade, coordenadas polares (assim como qualquer outra forma particular de se aproximar do ponto) servem apenas para cálculo de limites *que já sabemos existirem.* O uso indiscriminado de coordenadas polares leva, frequentemente, a erros no cálculo do limite.

Exemplo: Calcule o limite de $f(x, y) = \dfrac{x^2y}{x^4 + y^2}$, com $(x, y) \to (0, 0)$, se o limite existir.
Se usarmos coordenadas polares, fazendo $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$, teremos

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^3 \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta}{r^4 \cos^4\theta + r^2 \operatorname{sen}^2\theta} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta}{r^2 \cos^4\theta + \operatorname{sen}^2\theta} = 0$$

Mas, o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ não é zero! Na verdade, esse limite não existe. Basta tomar outro caminho, por exemplo $\gamma(t) = (t, t^2)$, e observar que

$$\lim_{t\to 0} f \circ \gamma(t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2t^2}{t^4 + (t^2)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{2t^4} = \frac{1}{2}.$$

Desta forma, advertimos que o uso de curvas ou coordenadas polares seja feito *apenas para mostrar que o limite não existe* (ou, se o enunciado disser explicitamente: "sabendo que o limite existe, calcule").

2.3 Continuidade

A definição de continuidade para funções de várias variáveis, como não poderia deixar de ser, é semelhante à definição que você já conhece (para funções de uma variável real).

Definição 4. *Seja $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^2$, um campo escalar e seja $(x_0, y_0) \in Dom(f)$ um ponto de acumulação do $Dom(f)$. Dizemos que f é contínua em (x_0, y_0) se*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Aprendemos Matemática fazendo exercícios. É verdade. Mas, se você não souber a teoria, as definições, os teoremas, você provavelmente não saberá nem por onde começar a fazer os exercícios. O contrário também é verdade. Se você percebe que não sabe nem por onde começar um exercício, é provável que precise reler a teoria. Assim, é **muito importante** que você saiba as definições e teoremas do nosso curso.

Os teoremas sobre continuidade vem nos dizer, em suma, que a composta de funções contínuas é uma função contínua (respeitando as regras de domínio e imagem que possibilitem a composição, naturalmente). Valem nos seguintes casos: se $A \subset \mathbb{R}^2$ e $B \subset \mathbb{R}$,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \mathrm{Im}(f) \subset B \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

e, se adicionalmente temos $I \subset \mathbb{R}$,

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\gamma"] \arrow[rr, bend right, "f \circ \gamma"'] & \operatorname{Im}(\gamma) \subset A \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Revise os teoremas à este respeito que foram dados em aula.

Exemplo 3. *O campo escalar* $f(x, y) = x^2 + 2y + 1$ *é contínuo?*

Solução. O domínio de f é todo $\mathbb{R}^2$. Como f é uma função polinomial, f é contínua em todo o seu domínio. Para provarmos este fato, seja $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ um ponto qualquer, fixado. Devemos mostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Calculamos

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) &= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x^2 + 2y + 1 \\
&= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x^2 + \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} 2y + \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} 1 \\
&= {x_0}^2 + 2y_0 + 1 \\
&= f(x_0, y_0),
\end{aligned}$$

como queríamos.

Exemplo 4. *A função abaixo é contínua na origem?*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \textit{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \textit{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Solução. O domínio de f é $\mathbb{R}^2$. Sabemos que f será contínua na origem se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0.$$

O domínio da função $h(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ é $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ e quando (x, y) se aproxima da origem, temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Observe que não há como eliminarmos esta indeterminação fatorando os polinômios que aparecem no numerador e/ou denominador. Assim, suspeitamos que o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$$

não exista. Para provarmos nossa tese, vamos nos aproximar a origem por caminhos diferentes e ver se isso leva a diferentes resultados para o limite:

- $\gamma_1(t) = (0,t) \;\Rightarrow\; \lim_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0} f(0,t) = \lim_{t\to 0} \frac{-t^2}{t^2} = -1,$
- $\gamma_2(t) = (t,0) \;\Rightarrow\; \lim_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0} f(t,0) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2} = 1.$

Como obtivemos resultados diferentes, segue que o limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe e, portanto, f não é contínua na origem.

Pense: as curvas acima satisfazem todas as hipóteses do Teorema 1, enunciado no material *Parte 2 - Revisão: Diferenciabilidade*? Verifique.

Exemplo 5. *Determine os pontos de continuidade de f,*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & se\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solução. O domínio de f é todo o $\mathbb{R}^2$. O domínio de $g(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ é $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Como g é uma função racional (em duas variáveis), g é contínua em seu domínio, portanto, sabemos que g é contínua em todo $(x,y) \neq (0,0)$. Assim, f também é contínua em todo $(x,y) \neq (0,0)$. Resta verificar se f é contínua na origem. Para isso, calculamos

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\frac{x^2}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$ e a função $\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ é limitada (veja Ex. 3 do material *Exercícios Resolvidos*, sobre Limite e Diferenciabilidade), segue do Teorema do Anulamento que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\frac{x^2}{x^2+y^2} = 0,$$

logo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0),$$

donde f é contínua em $(0,0)$ e, portanto, em todo $\mathbb{R}^2$.

2.4 Derivadas parciais

Derivada parcial é a primeira noção de derivada que estudamos para funções de várias variáveis. Essencialmente, calcular a derivada parcial de um campo escalar f com respeito à i-ésima variável, x_i, é supor que todas as demais variáveis, $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$, estão fixas e calcular a derivada convencional de f, como função de uma variável real, x_i.

Para $n = 2$, temos

Definição 5. *Seja $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$, um campo escalar e seja $(x_0, y_0) \in A$. Fixado y_0, podemos considerar $f(x, y_0) = g(x)$ uma função de uma variável real. A derivada de g em x_0, caso exista, é chamada derivada parcial de f com respeito à x em (x_0, y_0), e é denotada por*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad ou \quad f_x(x_0, y_0).$$

Definimos a derivada parcial de f com respeito à y em (x_0, y_0) de forma análoga e denotamos por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad ou \quad f_y(x_0, y_0).$$

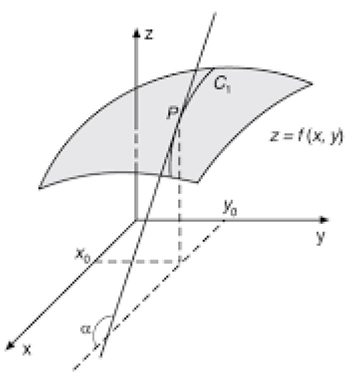
Note que, de acordo com a definição, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0},\end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},\end{aligned}$$

Vimos ainda, em sala de aula, que a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ corresponde à inclinação da reta tangente à curva $\gamma(x) = (x, y_0, f(x, y_0))$ no ponto $P = \gamma(x_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. O traço da curva γ, denotado por C_γ, está contido no gráfico de f,



Expressões e interpretação análogas funcionam também para $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ (escreva tais expressões como exercício). Valem as regras de derivação (produto, quociente, soma, etc.).

Exemplo 6. *Mostre que*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \textit{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \textit{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

admite derivadas parciais em $(0,0)$, *mas não é contínua na origem.*

Solução. Para investigarmos a existência de derivadas parciais em $(0,0)$, devemos calcular os limites

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = 0.$$

Assim, f admite derivadas parciais em $(0,0)$ e, neste ponto, ambas valem zero.

Para verificarmos se f é contínua na origem, devemos calcular o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Como vimos no Ex. 5 do material *Exercícios Resolvidos*, sobre Limite e Diferenciabilidade, este limite não existe. Logo, f não é contínua na origem.

Este exemplo ilustra o fato de a derivada parcial não ser uma boa generalização da derivada de funções de uma variável. Existem campos escalares que admitem derivadas parciais em um ponto, mas não são contínuas nesse ponto. ☕

Exemplo 7. *Dado o seguinte campo escalar*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^2}{x^2+y^2}, & \textit{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \textit{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Solução. Se $(x,y) \neq (0,0)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{(3x^2)(x^2+y^2) - (x^3-y^2)(2x)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{3x^4 + 3x^2y^2 - 2x^4 + 2xy^2}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

Se $(x, y) = (0, 0)$, calculamos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h^3}{h^2}\frac{1}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 1 = 1\end{aligned}$$

Assim, a derivada parcial de f com respeito à x é a função

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^2}{(x^2+y^2)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Faça o mesmo para $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

2.5 Diferenciabilidade

Nas aulas presenciais, pudemos perceber, através de exemplos, que a derivada parcial de campos escalares não desempenha papel equivalente ao da derivada simples de funções de uma variável. Enquanto toda função de uma variável real derivável é contínua, existem campos escalares que admitem todas as derivadas parciais, mas não são contínuos.

Assim, buscamos por uma noção de diferenciabilidade para campos escalares que consista numa boa generalização da derivada de funções de uma variável, no sentido que falamos acima.

Lembremos que, uma função $f : I \to \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R}$ é diferenciável em x_0 e sua derivada é igual a a se

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a,$$

o que é equivalente à

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ah}{h} = 0.$$

Como $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(h)}{h} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(h)}{|h|} = 0$, a expressão anterior é equivalente à

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ah}{|h|} = 0.$$

Com estas ideias em mente, temos a seguinte definição.

Definição 6. *Seja $f : A \to \mathbb{R}$ um campo escalar, com $A \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $(x_0, y_0) \in A$. Dizemos que f é diferenciável em (x_0, y_0), se e somente se, existem números reais a e b tais que*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - ah - bk}{\|(h,k)\|} = 0.$$

Usaremos muito o limite acima (sempre que precisarmos verificar/provar a diferenciabilidade de uma função de várias variáveis), então vamos chamar o numerador de $E(h,k)$,

$$E(h,k) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - ah - bk \tag{1}$$

de modo que podemos nos referir ao limite acima como

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|}.$$

A noção de diferenciabilidade, dada pela definição anterior, cumpre o papel que esperamos.

Teorema 4. *Seja $f : A \to \mathbb{R}$ um campo escalar, com $A \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $(x_0, y_0) \in A$. Se f é diferenciável em (x_0, y_0), então f é contínua em (x_0, y_0).*

Demonstração. Como f é diferenciável, segue da definição que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0, \tag{2}$$

onde $E(h,k)$ é dado pela expressão (1), acima.

Observe que

$$E(h,k) = \|(h,k)\| \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} \quad \text{e} \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \|(h,k)\| = 0. \tag{3}$$

Segue de (2) e (3) que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} E(h,k) = 0.$$

Além disso, $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} ah + bk = 0$. Logo,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} E(h,k) + ah + bk = 0,$$

donde temos

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0),$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0).$$

Portanto, f é contínua em (x_0, y_0), como queríamos. ☕

Além disso, se f for diferenciável, também significa que tem derivadas parciais.

Teorema 5. *Seja $f : A \to \mathbb{R}$ um campo escalar, com $A \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $(x_0, y_0) \in A$. Se f é diferenciável em (x_0, y_0), então f admite derivadas parciais em (x_0, y_0).*

Demonstração. Como f é diferenciável, segue da definição que existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0,$$

onde $E(h,k)$ é dado pela expressão (1), acima. Pelo Teorema 1, sabemos que o limite acima será sempre zero, independente do caminho (curva) que utilizarmos para nos aproximar de $(0,0)$. Logo, se nos aproximamos da origem pelo eixo-x, isto é, pela curva $\alpha(h) = (h, 0)$, temos

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{h\to 0} \frac{E(h,0)}{\|(h,0)\|} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0+0) - f(x_0,y_0) - ah - b0}{\sqrt{h^2}} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0) - ah}{|h|} \end{aligned}$$

Decorre que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0) - ah}{h} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h} = a,$$

isto é, a derivada parcial de f com respeito a x no ponto (x_0, y_0) existe e é igual a a,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = a.$$

A demonstração é análoga para a derivada parcial de f com respeito a y e, nesse caso, teremos $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = b$. ☕

Observe atentamente a demonstração acima. Perceba que os números a e b aos quais se referem a Definição 6 são as derivadas parciais de f, no ponto (x_0, y_0), com respeito a x e y, respectivamente. Como a demonstração é feita para uma função qualquer e um ponto qualquer de seu domínio, podemos concluir o que vem abaixo.

Corolário 1. *Seja $f : A \to \mathbb{R}$ um campo escalar, com $A \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $(x_0, y_0) \in A$. A função f é diferenciável em (x_0, y_0) se e somente se f admite todas as derivadas parciais em (x_0, y_0) e*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0.$$

Embora se trate de um texto informal, tornou-se importante exibir as demonstrações dos resultados acima, já que cumprem um papel crucial na construção da teoria, como se pode notar.

Observe que o Teorema 5 garante que SE f for diferenciável, ENTÃO f admite derivadas parciais. A recíproca NÃO é verdadeira, em geral. Isto é, se f admite derivadas parciais, não podemos afirmar que f é diferenciável (não podemos afirmar, nem mesmo, que f é contínua, como comentamos no início desta seção). Nesse caso, dizemos que admitir derivadas parciais é uma condição necessária para f ser diferenciável. O próximo teorema dá uma condição suficiente para f ser diferenciável.

Teorema 6. *Seja $f : A \to \mathbb{R}$ um campo escalar, com $A \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $(x_0, y_0) \in A$. Se as derivadas parciais de f existirem em uma vizinhança de (x_0, y_0) e forem contínuas em (x_0, y_0), então f será diferenciável em (x_0, y_0).*

Agora, podemos afirmar que SE as derivadas parciais existem E são contínuas, ENTÃO f é diferenciável. A recíproca, no entanto, NÃO é verdadeira, em geral. Isto é, existem funções diferenciáveis, cujas derivadas parciais não são contínuas.

Obs.: se f é diferenciável em todos os pontos (x, y) de seu domínio, dizemos simplesmente que f é diferenciável.

Em resumo, para $X_0 = (x_0, y_0)$temos

1. f é diferenciável em $X_0 \Longleftrightarrow \begin{cases} f \text{ admite derivadas parciais em } X_0, \text{ e} \\ \displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0. \end{cases}$
2. f é diferenciável em $X_0 \Longrightarrow f$ é contínua em X_0.
3. f é diferenciável em $X_0 \Longrightarrow f$ admite derivadas parciais em X_0.
4. $\left.\begin{array}{l} f \text{ admite derivadas parciais em } B_r(X_0) \\ \text{e as derivadas parciais de } f \text{ são} \\ \text{contínuas em } X_0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f$ é diferenciável em X_0.

As conclusões que podem ser tiradas daí, são

1. Se f não é contínua em X_0, então f não é diferenciável em X_0.
2. Se uma das derivadas parciais de f não existe em X_0, então f não é diferenciável em X_0.
3. Se as derivadas parciais de f existem em X_0, mas $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} \neq 0$, então f não é diferenciável em X_0.

2.6 Plano tangente

Se $f : A \to \mathbb{R}$ é um campo escalar diferenciável, com $A \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $(x_0, y_0) \in A$, temos

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k}{\|(h,k)\|} = 0.$$

Fazendo $x = x_0 + h, y = y_0 + k$, temos

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} = 0.$$

Esse limite nos diz que podemos aproximar f por um polinômio nas variáveis x, y,

$$f(x,y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + E(x,y),$$

onde $E(x,y)$ é o erro da aproximação.[1] Note que

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

é a equação de um plano no $\mathbb{R}^3$ passando pelo ponto $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, ortogonal ao vetor

$$n = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right).$$

Este é o chamado *plano tangente* ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

A reta que passar por P e é paralela ao vetor n é chamada *reta normal* ao gráfico de f e tem equação dada por

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right).$$

Releia a primeira frase desta seção. Observe que a diferenciabilidade de f em (x_0, y_0) é uma condição essencial para a existência do plano tangente.

Exemplo 8. *Seja* $f(x,y) = x^2 - y^2$*. Determine as equações do plano tangente e da reta normal no ponto* $(1, 1, f(1,1))$.

[1]Esse erro tende a zero mais rapidamente do que $\|(x - x_0, y - y_0)\|$, quando $(x, y) \to (x_0, y_0)$, pois

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{E(x,y)}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} = 0,$$

já f é diferenciável.

Solução. Calculamos

$$f(1,1) = 1^2 - 1^2 = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2(1) = 2,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -2(1) = -2.$$

Plano tangente:

$$z = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) - \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1),$$
$$z = 0 + 2(x-1) - 2(y-1).$$

Assim, a equação do plano tangente é

$$\boxed{z = 2x - 2y,}$$

de vetor normal $n = (2, -2, 1)$.

Reta normal:

$$(x,y,z) = (1, 1, f(1,1)) + \lambda(2,-2,1), \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

de equação

$$\boxed{(x,y,z) = (1,1,0) + \lambda(2,-2,1), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.}$$

☕

2.7 Diferencial

A Definição 6 e o Teorema 5 nos dizem que um campo escalar $f : A \to \mathbb{R}$, com $A \subset \mathbb{R}^2$ aberto, é diferenciável em $(x_0, y_0) \in A$ se e somente se existe

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k, \tag{4}$$

tal que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k}{\|(h,k)\|} = 0.$$

Podemos entender a expressão (4) como uma transformação linear[2] $L : U \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, onde $U \subset \mathbb{R}^2$ é uma vizinhança do $(0,0)$, dada por

$$L(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k.$$

[2]Uma transformação linear entre espaços vetoriais reais é uma aplicação $T : U \to V$ que satisfaz $T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v)$, para todo $u \in U$, $v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Em notação matricial, podemos escrever

$$L(h,k) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

A matriz-linha, acima, é chamada *derivada total* de f em (x_0, y_0). Se substituirmos os acréscimos h, k por acréscimos infinitesimais nas direções x e y, denotados por dx, dy, teremos o chamado *diferencial*[3] de f em (x_0, y_0), denotado e definido por

$$\boxed{df(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)dy.}$$

Exemplo 9. *Calcule o diferencial de* $f(x,y) = x^3 + x^2y + y^2$ *no ponto* $(1,1)$.

Solução. Calculamos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 2xy, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 5,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 2y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 3.$$

Logo, o diferencial de f no ponto $(1,1)$ é dado por

$$\boxed{df(1,1) = 5dx + 3dy}$$

☕

Exemplo 10. *Calcule o diferencial do campo escalar* $f(x,y) = \ln(x)y^3$.

Solução. Calculando

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x} \cdot y^3, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \ln(x) \cdot 3y^2,$$

obtemos

$$\boxed{df(x,y) = \frac{y^3}{x}dx + 3y^2\ln(x)dy}$$

☕

[3] Aqui, as partículas dx, dy são meramente simbólicas, mas pode-se atribuir a elas estruturas algébrica e analítica elaboradas, dentro da teoria de formas diferenciais. Este tópico costuma ser abordado em cursos de Variedades Diferenciáveis e Análise no $\mathbb{R}^n$.

2.8 Vetor gradiente

Definição 7. *Seja $f : A \to \mathbb{R}$ um campo escalar, com $A \subset \mathbb{R}^2$. Suponha que f admita derivadas parciais em um ponto $(x_0, y_0) \in A$. O vetor denotado e definido por*

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

é chamado vetor gradiente de f em (x_0, y_0).

O vetor gradiente é também ser denotado por $\mathrm{grad} f$.

Exemplo 11. *Calcule o vetor gradiente da função do exemplo anterior: $f(x, y) = \ln(x)y^3$.*

Solução. Já calculamos as derivadas parciais de f, então

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$$

$$\boxed{\nabla f(x, y) = \left(\frac{y^3}{x}, 3y^2 \ln(x) \right)}$$

2.9 Regra da cadeia

2.9.1 Campos escalares compostos com curvas

Sejam $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável em $t_0 \in I$, com $\gamma(t_0) \in A \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $f : A \to \mathbb{R}$ um campo escalar diferenciável em $\gamma(t_0)$. Considere a função

$$F(t) = f \circ \gamma(t) = f(\gamma(t)),$$

então, pela *regra da cadeia*, temos

$$F'(t_0) = \frac{d}{dt} F(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0)) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0)) \frac{dy}{dt}.$$

Lembre-se que f é uma função de duas variáveis, $f(x, y)$ e a imagem de γ está no $\mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, assim $f(\gamma(t)) = f(x(t), y(t))$ é uma função de t.

É muito importante indicar o ponto onde as derivadas parciais estão sendo calculadas.

Note que a expressão acima, para $F'(t_0)$ pode ser escrita, de maneira abreviada, como um produto interno

$$\boxed{F'(t_0) = \langle \nabla f(\gamma(t_0)), \gamma'(t_0).\rangle}$$

Se γ é diferenciável em todo $t \in I$ e f é diferenciável em todo $(x, y) \in A$, então

$$\boxed{F'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\,, \quad \forall t \in I.}$$

Esta fórmula é válida para qualquer $n > 1$.

Exemplo 12. *Considere o campo escalar* $f(x, y) = xy + y^2$ *e a curva* $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, *com* $x(t) = \operatorname{sen}(t)$ *e* $y(t) = t^2$. *Calcule* $\dfrac{dz}{dt}$.

Solução. Primeiro, devemos identificar que $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{d}{dt} f(x(t), y(t))$, pois $z = f(x, y)$ e $z(t) = f(x(t), y(t)) = f \circ \alpha(t)$ é uma função de uma variável real t para a qual faz sentido calcular a derivada simples $\dfrac{d}{dt}$. Além disso, é importante observamos que todas as funções envolvidas são diferenciáveis.

Agora, podemos calcular $\dfrac{dz}{dt}$ de duas maneiras diferentes:

1. Explicitando $z(t)$ e derivando.

   Temos,
   $$z(t) = f(x(t), y(t)) = f(\operatorname{sen}(t), t^2) = \operatorname{sen}(t)t^2 + t^4.$$

   Daí,
   $$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}\left(t^2 \operatorname{sen}(t) + t^4\right) = 2t \operatorname{sen}(t) + t^2 \cos(t) + 4t^3.$$

2. Aplicando a regra da cadeia.

   Calculamos
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 2y,$$
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) = t^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) = \operatorname{sen}(t) + 2t^2,$$
   $$\frac{dx}{dt} = \cos(t) \qquad \frac{dy}{dt} = 2t.$$

   Pela regra da cadeia, temos
   $$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\frac{dy}{dt},$$
   $$\frac{dz}{dt} = t^2 \cos(t) + (\operatorname{sen}(t) + 2t^2)2t = t^2 \cos(t) + 2t \operatorname{sen}(t) + 4t^3$$

Ou, podemos usar

$$\frac{dz}{dt} = \langle \nabla f(x(t), y(t)), (x'(t), y'(t)) \rangle \,,$$

$$\frac{dz}{dt} = \left\langle \left(t^2, \operatorname{sen}(t) + 2t^2\right), (\cos(t), 2t) \right\rangle,$$

$$\frac{dz}{dt} = t^2 \cos(t) + 2t \operatorname{sen}(t) + 4t^3.$$

☕

Nem sempre é possível explicitar $f(x(t), y(t))$, daí a utilidade prática de conhecermos a regra da cadeia.

Exemplo 13. *Seja f um campo escalar diferenciável e considere $F(t) = f(e^{t^2}, \operatorname{sen}(t))$. Expresse $F'(t)$.*

Solução. Queremos expressar $F'(t) = \dfrac{dF}{dt}$. Note que a função f não foi dada explicitamente, mesmo assim, a regra da cadeia nos permite escrever

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{e}^{t^2}, \operatorname{sen}(t)) \frac{d}{dt}(\mathrm{e}^{t^2}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{e}^{t^2}, \operatorname{sen}(t)) \frac{d}{dt}(\operatorname{sen}(t)),$$

$$F'(t) = 2t\mathrm{e}^{t^2} \frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{e}^{t^2}, \operatorname{sen}(t)) + \cos(t) \frac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{e}^{t^2}, \operatorname{sen}(t)).$$

☕

Alguns exercícios podem ser bastante ardilosos e aqui entra nossa compreensão da matéria e nossa capacidade para identificar a natureza dos objetos envolvidos.

Exemplo 14. *Seja f um campo escalar diferenciável e considere a equação $f(3x+1, 3x-1) = 4$, válida para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3x+1, 3x-1) = -\frac{\partial f}{\partial y}(3x+1, 3x-1).$$

Solução. A sutileza deste exercício está em distinguir x, do par (x, y), variável independente do campo escalar f, de x, variável independente da curva $\gamma(x) = (3x+1, 3x-1)$. Com este entendimento, o x que aparece na derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ refere-se à primeira variável independente de f (é vermelho), enquanto o x que aparece nas funções coordenadas $(\underbrace{3x+1}_{\gamma_1(x)}, \underbrace{3x-1}_{\gamma_2(x)})$ é o x da curva (é azul).

Assim, pela regra da cadeia, temos

$$\frac{d}{dx}f(3x+1,3x-1) = \frac{\partial f}{\partial x}(3x+1,3x-1)\underbrace{\frac{d}{dx}(3x+1)}_{\gamma_1'(x)} + \frac{\partial f}{\partial y}(3x+1,3x-1)\underbrace{\frac{d}{dx}(3x-1)}_{\gamma_2'(x)}$$
$$= 3\frac{\partial f}{\partial x}(3x+1,3x-1) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(3x+1,3x-1)$$

Por outro lado,

$$\frac{d}{dx}f(3x+1,3x-1) = \frac{d}{dx}4 = 0,$$

logo

$$3\frac{\partial f}{\partial x}(3x+1,3x-1) = -3\frac{\partial f}{\partial y}(3x+1,3x-1),$$

como queríamos. ☕

2.9.2 Mudança de variáveis

Sejam $f : A \to \mathbb{R}$ e $g, h : B \to \mathbb{R}$, com $(g(u,v), h(u,v)) \in A \subset \mathbb{R}^2$ para todo para $(u,v) \in B$, campos escalares. A mudança de variáveis $x = g(u,v)$, $y = h(u,v)$ transforma $z = f(x,y)$ em uma função $F(u,v)$ dada por

$$F(u,v) = f(g(u,v), h(u,v)), \quad \forall (u,v) \in B.$$

Pela regra da cadeia, temos

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}(g(u,v),h(u,v))\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}(g(u,v),h(u,v))\frac{\partial y}{\partial u},$$
$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}(g(u,v),h(u,v))\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}(g(u,v),h(u,v))\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Observe **a importância** de se explicitar o ponto $(g(u,v), h(u,v))$, onde as derivadas parciais de f estão sendo calculadas. Se não quiser escrever na fórmula, para não carregar a notação, deixe isto claro em observação posterior da seguinte forma:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$
$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v},$$

onde as derivadas parciais de f são calculadas no ponto $(g(u,v), h(u,v))$.

Exemplo 15. *Dada $z = f(u^2+v^2, uv)$, onde f é diferenciável, expresse $\frac{\partial z}{\partial u}$ e $\frac{\partial z}{\partial v}$ em termos das derivdas parciais de f.*

Solução. Novamente, o passo crucial é compreender o exercício e a natureza de seus objetos. Observe que z é uma função de duas variáveis u e v, $z = z(u, v)$. Mais especificamente, $z = f(x, y)$ onde $x = x(u, v) = u^2 + v^2$ e $y = y(u, v) = uv$. Assim, pela regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v), y(u,v))\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v), y(u,v))\frac{\partial y}{\partial u}\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2, uv)\frac{\partial}{\partial u}(u^2+v^2) + \frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2, uv)\frac{\partial}{\partial u}(uv)\\ &= 2u\frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2, uv) + v\frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2, uv)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v), y(u,v))\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v), y(u,v))\frac{\partial y}{\partial v}\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2, uv)\frac{\partial}{\partial v}(u^2+v^2) + \frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2, uv)\frac{\partial}{\partial v}(uv)\\ &= 2v\frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2, uv) + u\frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2, uv)\end{aligned}$$

2.10 Derivação implícita

2.10.1 Caso 1: $f(x, g(x)) = 0$.

Dizemos que a função $y = g(x)$ é definida implicitamente pela equação $f(x, y) = 0$, se para todo $x \in \mathrm{Dom(g)}$, temos

$$f(x, g(x)) = 0.$$

Suponha que f e g sejam diferenciáveis e queiramos calcular $g'(x)$. Podemos obtê-la derivando a equação acima,

$$\begin{gathered}\frac{d}{dx}f(x, g(x)) = \frac{d}{dx}0,\\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\frac{dy}{dx} = 0,\\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))y' = 0,\end{gathered}$$

como $y' = g'(x)$, temos

$$\boxed{g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))},}$$

válida para todo $x \in \mathrm{Dom(g)}$ tal que $f_y(x, g(x)) \neq 0$.

De maneira análoga, você pode deduzir a fórmula para calcular $h'(y)$, quando $x = h(y)$ é dada implicitamente pela equação $f(h(y), y) = 0$, com f e h diferenciáveis.

Exemplo 16. *Seja $y = y(x)$ definida implicitamente pela equação $y^3 + xy + x^3 = 3$. Calcule $\dfrac{dy}{dx}$.*

Solução. Podemos aplicar a fórmula

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))}$$

diretamente, tendo entendido que $g = y$ e $f(x, g(x)) = f(x, y(x)) = y^3 + xy + x^3 - 3$. Nesse caso, calculamos

$$f_x(x, y(x)) = y + 3x^2 \qquad f_y(x, y(x)) = 3y^2 + x$$

e substituímos na fórmula para obter

$$y'(x) = -\frac{y + 3x^2}{3y^2 + x},$$

válida para todo $x \in \text{Dom}(y)$ tal que $3y^2 + x \neq 0$.

Contudo, não é necessário decorar a fórmula para resolver este tipo de exercício. Se compreendermos como funciona a derivação implícita, basta derivarmos a equação com respeito à x e isolarmos y'. Para isso, devemos ter em mente que y é uma função de x e x é a variável independente. Daí, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(y^3 + xy + x^3) &= \frac{d}{dx}3 \\
\underbrace{3y^2y'}_{\text{regra da cadeia}} + \underbrace{y + xy'}_{\text{regra do produto}} + 3x^2 &= 0 \\
(3y^2 + x)y' &= -3x^2 - y \\
y' &= -\frac{3x^2 + y}{3y^2 + x},
\end{aligned}$$

válida para todo $x \in \text{Dom}(y)$ tal que $3y^2 + x \neq 0$.

2.10.2 Caso 2: $f(x, y, g(x, y)) = 0$

Agora, suponha que $z = g(x, y)$ seja dada implicitamente por $f(x, y, z) = 0$, onde f é diferenciável em um aberto de $\mathbb{R}^3$. Queremos calcular $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ou, equivalentemente, $\dfrac{\partial g}{\partial y}$.

Como fizemos acima, podemos derivar diretamente a equação que define g implicitamente, fazendo

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y, g(x, y)) = \frac{\partial}{\partial y} 0.$$

Pela regra da cadeia, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

onde as derivadas parciais de f são calculadas em $(x, y, g(x, y))$. Observe que $\frac{\partial x}{\partial y} = 0$ e $\frac{\partial y}{\partial y} = 1$. Assim, obtemos

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{f_y(x, y, g(x, y))}{f_z(x, y, g(x, y))},}$$

para todo $(x, y) \in \mathrm{Dom}(g)$ tal que $f_z(x, y, g(x, y)) \neq 0$.

2.10.3 Caso 3: funções definidas por um sistema de equações

Sejam $y = y(x)$ e $z = z(x)$ definidas implicitamente por

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases},$$

com F, G diferenciáveis em um aberto do $\mathbb{R}^3$. Queremos calcular $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dy}{dx}$. Derivando as equações, temos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial x} + \dfrac{\partial G}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial x} + \dfrac{\partial G}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \end{cases},$$

onde as derivadas parciais de F e G são calculadas em $(x, y(x), z(x))$. Como $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$, podemos escrever o sistema como

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \\ \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{dy}{dx} \\ \\ \dfrac{dz}{dx} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} \end{pmatrix},$$

O determinante da primeira matriz à esquerda é conhecido como *determinante jacobiano* de F, G com respeito à y, z e é denotado por

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}.$$

Como temos o mesmo número de equações e incógnitas, podemos aplicar a regra de Cramer para resolver o sistema, obtendo

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}, \qquad \frac{dz}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}},}$$

desde que $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} \neq 0$.

Exemplo 17. *Sejam $y = y(x)$ e $z = z(x)$ dadas implicitamente por*

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ e $\dfrac{dz}{dx}$.

Solução. Derivamos as equações que definem as funções y e z, compreendendo que $y = y(x)$, $z - z(x)$ são funções de x e x é variável independente.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(2x + y - z) &= \frac{d}{dx}3 \\ 2 + \frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} &= 0 \\ \frac{dz}{dx} &= 2 + \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x + y + z) &= \frac{d}{dx}1 \\ 1 + \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} &= 0. \end{aligned}$$

Segue dos resultados acima que

$$0 = 1 + \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} + 2 + \frac{dy}{dx} = 3 + 2\frac{dy}{dx},$$

donde

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2} \qquad \text{e} \qquad \frac{dz}{dx} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

☕

2.11 Vetor gradiente: interpretação geométrica

Dizemos que um campo escalar $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n$ é *de classe* $\mathcal{C}^1$ se as derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

forem todas contínuas.

Sejam $z = f(x, y)$ um campo escalar de classe $\mathcal{C}^1$ em um aberto $A \in \mathbb{R}^2$ e (x_0, y_0) um ponto da curva de nível $f(x, y) = c$. Assuma que $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Então, temos

1. O vetor gradiente de f é perpendicular, em (x_0, y_0), a qualquer curva diferenciável, $\gamma(t)$, passando por (x_0, y_0), cujo traço esteja contido na curva de nível $f(x, y) = c$.

   Como o traço de γ está contido na curva de nível, temos $f(x(t), y(t)) = c$ para todo t no domínio de γ. Derivando a equação com respeito a t, temos

   $$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \frac{d}{dt} c \;\Rightarrow\; \langle \nabla f(x(t), y(t)), \gamma'(t) \rangle = 0,$$

   donde

   $$\nabla f(x(t_0), y(t_0)) \perp \gamma'(t_0).$$

2. Em particular, $\nabla f(x_0, y_0)$ é perpendicular à curva de nível $f(x, y) = c$, no ponto (x_0, y_0).

3. A reta que passa por (x_0, y_0) e é perpendicular à $\nabla f(x_0, y_0)$ é a reta tangente à curva de nível $f(x, y) = c$, no ponto (x_0, y_0). Sua equação é obtida através do produto interno

   $$r_{tg} : \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle = 0.$$

4. A reta normal à curva de nível $f(x, y) = c$, no ponto (x_0, y_0) é dada pela equação

   $$r_n : (x, y) = (x_0, y_0) + \lambda \nabla f(x_0, y_0), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Para campos escalares de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^3$ com $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$, temos

1. O vetor gradiente de f é perpendicular, em (x_0, y_0, z_0), a qualquer curva diferenciável $\gamma(t)$, passando por (x_0, y_0, z_0), cujo traço esteja contido na superfície de nível $f(x, y, z) = c$.

2. Em particular, $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ é perpendicular à superfície de nível $f(x, y, z) = c$, no ponto (x_0, y_0, z_0).

3. A plano que passa por (x_0, y_0, z_0) e é perpendicular ao vetor $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ é o plano tangente à superfície de nível $f(x, y, z) = c$, no ponto (x_0, y_0, z_0). Sua equação é obtida através do produto interno

$$\pi_{tg} : \langle \nabla f(x_0, y_0, z_0), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle = 0.$$

4. A reta normal à superfície de nível $f(x, y, z) = c$, no ponto (x_0, y_0, z_0) é dada pela equação

$$r_n : (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \nabla f(x_0, y_0, z_0), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

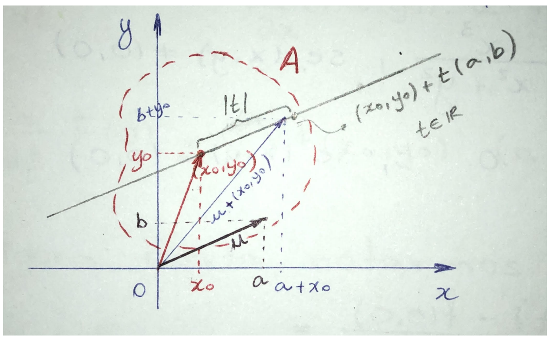
Observe que toda função de classe $\mathcal{C}^1$ é diferenciável, pelo Teorema 6, portanto, podemos garantir a existência do plano tangente (ver Seção 2.6).

2.12 Derivada direcional

Definição 8. *Seja $f : A \to \mathbb{R}$ um campo escalar, com $A \subset \mathbb{R}^2$ aberto. Sejam $(x_0, y_0) \in A$ e $u = (a, b)$ um vetor* ***unitário****. O limite*

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t},$$

quando existe é chamado derivada direcional de f no ponto (x_0, y_0), na direção do vetor u.



Queremos estudar o comportamento de f quando nos movemos, à partir do ponto (x_0, y_0), na direção do vetor $u = (a, b)$. Isto é, estamos nos movimentando sobre a reta

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t(a, b), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

A distância entre (x_0, y_0) e qualquer ponto $(x_0 + ta, y_0 + tb)$ da reta é dada por

$$\|(ta, tb)\| = |t| \cdot \|u\| = |t|.$$

Mantemos t pequeno o suficiente para $|t| < r$, onde $B((x_0, y_0), r) \subset A$.

Note que as derivadas parciais são casos especiais da derivada direcional. De fato, tomando $u = (1, 0)$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),$$

e, se fizermos $u = (0, 1)$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

A derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0)$ expressa a taxa de variação de f, na direção u, no ponto (x_0, y_0).

Exemplo 18. *Seja $u = (a, b)$ um vetor unitário qualquer. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,0)$ para*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \textit{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \textit{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solução. Calculamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u}(0,0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(0+at, 0+bt) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\dfrac{(at)^3}{(at)^2 + (bt)^2}}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{a^3 t^3}{t^3(a^2+b^2)} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{a^3}{a^2+b^2} = a^3, \end{aligned}$$

pois, como $\|u\| = 1$, temos $a^2 + b^2 = 1$.

Assim, qualquer que seja u (unitário), temos $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,0) = a^3$.

Pense: sem fazer contas, você sabe dizer quanto valem as derivadas parciais de f em $(0,0)$? Por quê?

Sabemos, por exercícios anteriores, que a função do exemplo acima é contínua na origem, mas não é diferenciável ali. O exemplo que acabamos de ver prova que esta função admite derivada direcional em qualquer direção, na origem, embora não seja diferenciável ali.

Teorema 7. *Sejam $f : A \to \mathbb{R}$ um campo escalar com $A \subset \mathbb{R}^2$ aberto, $(x_0, y_0) \in A$ e $u = (a, b)$ um vetor unitário. Se f é diferenciável em (x_0, y_0), então f admite derivada direcional em (x_0, y_0) na direção u. Nesse caso,*

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), u \rangle} \tag{5}$$

Demonstração. Seja $F(t) = f(x_0 + at, y_0 + bt)$. Como f é diferenciável em (x_0, y_0), segue que F é diferenciável em $t = 0$. Pela regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F(0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)b \\ &= \langle \nabla f(x_0, y_0), (a, b)\rangle \\ &= \langle \nabla f(x_0, y_0), u\rangle\end{aligned}$$

Agora, basta notarmos que $F'(0) = \dfrac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0)$. De fato, pela definição, temos

$$F'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + ah, y_0 + bh) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0),$$

como queríamos. ☕

Atenção: a expressão (5) exibe uma relação entre a derivada direcional e o vetor gradiente que só é válida se f for diferenciável em (x_0, y_0), como diz a hipótese do teorema. Caso contrário, a derivada direcional deve ser calculada pela definição.

Note que, como o vetor u (unitário) do teorema anterior é arbitrário, o teorema garante que se f é diferenciável em (x_0, y_0), então f admite derivadas direcionais em todas as direções, em (x_0, y_0).

Exemplo 19. *Seja $f(x, y) = x^2 + xy$ um campo escalar. Calcule a derivada direcional de f pon ponto $(2, 3)$ na direção do vetor $v = (1, 2)$.*

Solução. Observe que o vetor v não é unitário, $\|v\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Mas, o vetor $u = \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ é um vetor unitário na mesma direção do vetor v.

Como f é diferenciável, segue do teorema que

$$\frac{\partial f}{\partial u}(2, 3) = \langle \nabla f(2, 3), u\rangle$$

Ora,

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = (2x + y, x)\,,$$
$$\nabla f(2, 3) = (7, 2)\,,$$

logo

$$\frac{\partial f}{\partial u}(2, 3) = \left\langle (7, 2), \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right\rangle = \frac{7}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{11}{\sqrt{5}}$$

☕

Interpretação: lembre que a projeção ortogonal de um vetor v sobre um vetor u é calculada pela fórmula,

$$\text{proj}_u v = \frac{\langle v, u\rangle}{\|u\|^2} u.$$

Se u é unitário, então $\|u\| = 1$ e

$$\text{proj}_u v = \langle v, u\rangle\, u.$$

É claro que a projeção ortogonal de v sobre u é um múltiplo de u. O produto interno $\langle v, u\rangle$ é a componente escalar do vetor v na direção do vetor u.

Assim, podemos dizer que $\dfrac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0)$ é a componente escalar de $\nabla f(x_0, y_0)$ na direção de u.

Teorema 8. *Seja $f : A \to \mathbb{R}$ um campo escalar diferenciável em $(x_0, y_0) \in A \subset \mathbb{R}^2$, aberto, tal que $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Então, o valor máximo de $\dfrac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0)$ ocorre na direção do vetor $u = \dfrac{\nabla f(x_0, y_0)}{\|\nabla f(x_0, y_0)\|}$ e, nesse caso, $\dfrac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = \|\nabla f(x_0, y_0)\|$.*

Demonstração. Lembre que, dados dois vetores u, v, se θ é o ângulo entre eles, temos

$$\langle v, u\rangle = \|v\|\|u\| \cos(\theta).$$

Suponha que $\|u\| = 1$, então

$$\langle v, u\rangle = \|v\| \cos(\theta).$$

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), u\rangle = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cos(\theta);$$

aqui θ é o ângulo entre os vetores $\nabla f(x_0, y_0)$ e u. Note que esse valor será máximo quando $\cos(\theta) = 1$, ou seja, quando $\theta = 0$. Isso significa que $\dfrac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0)$ assume seu valor máximo quando o vetor u tem mesma direção e sentido que o vetor $\nabla f(x_0, y_0)$, donde

$$u = \frac{\nabla f(x_0, y_0)}{\|\nabla f(x_0, y_0)\|} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = \|\nabla f(x_0, y_0)\|.$$

☕

Este teorema nos dá uma importante interpretação sobre o vetor gradiente: ele aponta na direção e sentido de maior variação da função (quando f cresce mais rapidamente).

Exemplo 20. *Seja $T(x, y) = x^2 + 3y^2$ um campo escalar que modela a distribuição de temperatura em uma chapa metálica.*

a.) A partir do ponto $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$ qual é a direção e sentido de maior crescimento da temperatura na chapa? Qual é a taxa de crescimento da temperatura nesta direção?

b.) A partir do ponto $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$ qual é a direção e sentido de maior decrescimento da temperatura na chapa? Qual é a taxa de decrescimento da temperatura nesta direção?

Solução. Vamos calcular o gradiente da função T no ponto $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$:

$$\nabla T(x,y) = (2x, 6y) \quad \Rightarrow \quad \nabla T\left(2, \frac{1}{2}\right) = (4,3) \quad \text{e} \quad \left\|\nabla T\left(2, \frac{1}{2}\right)\right\| = 5.$$

a.) A direção e sentido de maior crescimento da temperatura na chapa, a partir do ponto $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$ é dada pelo vetor $(4,3)$. A taxa de variação da temperatura nesta direção é dada por

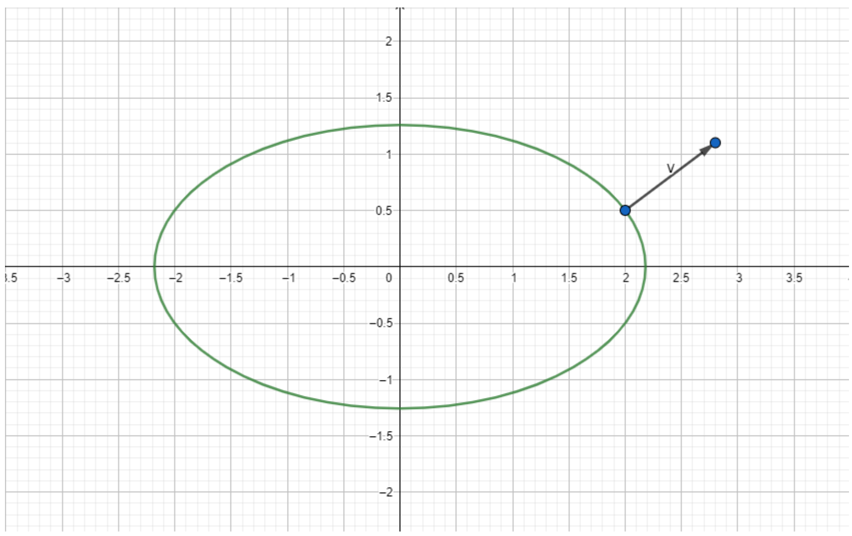
$$\frac{\partial T}{\partial u}\left(2, \frac{1}{2}\right), \quad \text{onde } u = \frac{(4,3)}{5} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = \frac{\nabla T\left(2, \frac{1}{2}\right)}{\|\nabla T\left(2, \frac{1}{2}\right)\|}$$

$$\frac{\partial T}{\partial u}\left(2, \frac{1}{2}\right) = \left\|\nabla T\left(2, \frac{1}{2}\right)\right\| = 5°C/cm.$$

b.) A direção de maior decrescimento é $-u = \left(-\dfrac{4}{5}, -\dfrac{3}{5}\right)$ e, nesta direção a taxa de variação da temperatura é

$$-\left\|\nabla T\left(2, \frac{1}{2}\right)\right\| = -5°C/cm.$$

Obs.: Se calcularmos $T\left(2, \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{19}{4}$, podemos observar que $\nabla T\left(2, \frac{1}{2}\right)$ é ortogonal à curva de nível $x^2 + 3y^2 = \dfrac{19}{4}$, que é uma elipse horizontal centrada na origem.



2.13 Derivadas parciais de ordem superior

Até a seção anterior fizemos uma revisão da teoria ministrada nas aulas presenciais ocorridas até o dia 12 de Março. Esta seção traz, para a primeira semana de Estudos Continuados Emergenciais, um assunto novo, ilustrado com exemplos, fechando o conteúdo que teria feito parte da nossa primeira prova no curso presencial.

Suponha que $f : A \to \mathbb{R}$, com $A \subset \mathbb{R}^2$ seja um campo escalar que admite derivadas parciais para todo $(x, y) \in A$. Então, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são campos escalares definidos em A e podemos querer calcular (ou investigar a existência de) suas derivadas parciais. Assim nascem as derivadas parciais de ordem superior:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

As derivadas que aparecem na segunda coluna, acima, são chamadas de *derivadas mistas.*

Exemplo 21. *Calcule as derivadas parciais de primeira e segunda ordens da função*

$$f(x, y) = x^3y^2 - 6x^2y + 2.$$

Solução. As derivadas parciais de primeira ordem são

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2y^2 - 12xy, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^3y - 6x^2.$$

Agora, derivando as primeiras, obtemos as derivadas parciais de segunda ordem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y^2 - 12xy\right) = 6xy^2 - 12y,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^3y - 6x^2\right) = 6x^2y - 12x,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^3y - 6x^2\right) = 2x^3,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y^2 - 12xy\right) = 6x^2y - 12x.
\end{aligned}$$

Note que, no exemplo acima, as derivadas mistas são iguais. Mas, isso nem sempre acontece.

Exemplo 22. *Considere a função*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}, & se\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & se\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Calcule as derivadas mistas de f em $(0,0)$.

Solução. Observe que a função f é uma função definida por partes, valendo 0 na origem e definida por uma expressão algébrica fora dela. Assim, o valor das derivadas parciais, na origem, deverão ser obtidos pela definição. Calculamos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0.$$

Usando as regras de derivação, calculamos as derivadas parciais em $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3(x^2+y^2) - xy^3(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^5 - x^2y^3}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3xy^2(x^2+y^2) - xy^3(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{xy^4 + 3x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Assim, obtivemos duas funções definidas por partes

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^5 - x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^4 + 3x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

O exercício pede que calculemos as derivadas mistas na origem, então basta aplicar a definição de derivada parcial e calcular as derivadas das funções acima, isto é,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).$$

Para isso, fazemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f_x}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k} = \frac{\frac{k^5}{k^4} - 0}{k} = 1,$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial f_y}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h} = \frac{0}{h} = 0.$$

Podemos investigar a existência de derivadas parciais até ordem n de uma função de várias variáveis, para qualquer $n > 1$, aplicando o mesmo procedimento que usamos para calcular as derivadas de segunda ordem, isto é, derivando parcialmente as derivadas parciais.

No último exemplo, as funções $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas na origem (prove!), mas não precisam ser para existirem as derivadas de ordens superiores.

Definição 9. *Uma função $f : A \to \mathbb{R}$, definida em um aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ é dita de classe $\mathcal{C}^n$ se, para todo $(x,y) \in A$, f admite derivadas parciais contínuas até ordem n.*

Nos exemplos anteriores vimos um caso em que as derivadas mistas eram iguais e um caso em que isso não ocorria. O próximo teorema nos dirá que se as derivadas parciais de segunda ordem forem contínuas, então as derivadas mistas serão iguais.

Teorema 9. *Seja $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$ aberto. Se f é de classe $\mathcal{C}^2$ em A, então*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y), \quad \forall (x,y) \in A.$$

2.13.1 Regra da cadeia e derivação parcial de ordem superior

Sejam $f(x,y)$, $x = x(t)$ e $y = y(t)$ funções diferenciáveis. Pela regra da cadeia, temos

$$\frac{d}{dt}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\frac{dy}{dt} = \langle \nabla f(x(t),y(t)), (x'(t),y'(t))\rangle .$$

Suponha que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sejam diferenciáveis. Então,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)\frac{dy}{dt} \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\frac{dy}{dt} \\
&= \left\langle \nabla \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)\right\rangle ,
\end{aligned}$$

Note que aqui escrevemos (x, y), mas devemos ter em mente que $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Também escrevemos $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ ao invés de $(x'(t), y'(t))$. São formas equivalentes. Poderíamos também ter escrito apenas (x', y') estando subentendido que tratam-se das derivadas simples, com respeito a t, já que x e y são funções de t.

Analogamente, temos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = \left\langle \nabla\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)\right\rangle.$$

Exemplo 23. *Seja $f(x, y)$ um campo escalar de classe $\mathcal{C}^2$ em um aberto de $\mathbb{R}^2$. Seja $g(t) = f(3t, 2t + 1)$. Expresse $g''(t)$ em termos das derivadas parciais de f.*

Solução. Note que

$$g'(t) = \frac{d}{dt}g(t) = \frac{d}{dt}f(3t, 2t + 1) = \frac{d}{dt}f(x, y),$$

onde $x = x(t) = 3t$ e $y = y(t) = 2t + 1$. Assim,

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(3t, 2t + 1)\frac{d}{dt}(3t) + \frac{\partial f}{\partial y}(3t, 2t + 1)\frac{d}{dt}(2t + 1) \\ &= 3\frac{\partial f}{\partial x}(3t, 2t + 1) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(3t, 2t + 1). \end{aligned}$$

Agora, calculamos a segunda derivada,

$$\begin{aligned} g''(t) &= \frac{d}{dt}g'(t) = 3\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(3t, 2t + 1)\right) + 2\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(3t, 2t + 1)\right) \\ &= 3\left(3\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3t, 2t + 1) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(3t, 2t + 1)\right) \\ &+ 2\left(3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3t, 2t + 1) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3t, 2t + 1)\right) \\ &= 9\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3t, 2t + 1) + 6\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(3t, 2t + 1) + 6\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3t, 2t + 1) + 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3t, 2t + 1) \\ &= 9\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3t, 2t + 1) + 12\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3t, 2t + 1) + 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3t, 2t + 1), \end{aligned}$$

pois, sendo f de classe $\mathcal{C}^2$, o Teorema 9 afirma que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(3t, 2t + 1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3t, 2t + 1).$$

☕

Aviso: caso você encontre algum erro, inconsistência ou passagem duvidosa, por favor, entre em contato para que possamos esclarecer, melhorar e/ou corrigir o material. Agradeço e desejo bons estudos.