Aula 7: Séries de potências

7.1 Definição e exemplos

Definição 7.1. (Série de potências)

Uma série de potências centrada em a tem a seguinte forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots, \tag{7.1}$$

onde x é variável e $c_k{}'s$ são chamados ***coeficientes*** *da série. Para cada x fixo, a série (7.1) é uma série numérica que podemos testar para convergência ou divergência.* ♣

Um caso especial da série (7.1) é, quando $a = 0$. Neste caso, temos

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots.$$

Os exemplos a seguir ilustram como o teste da razão pode ser usado para determinar os valores de x para os quais uma série de potências é convergente.

Exemplo 7.1 Determine os valores de x para os quais a série de potências

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^k \cdot x^k}{k \cdot 3^k}$$

é convergente.

Resolução: Pelo teste da razão temos que

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{(-1)^{k+2} \cdot 2^{k+1} \cdot x^{k+1}}{(k+1) \cdot 3^{k+1}} \cdot \frac{k \cdot 3^k}{(-1)^{k+1} \cdot 2^k \cdot x^k} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\cancel{(-1)^{k+1}}(-1) \cdot \cancel{2^k} \cdot 2 \cdot \cancel{x^k} \cdot x}{(k+1) \cdot \cancel{3^k} \cdot 3} \cdot \frac{k \cdot \cancel{3^k}}{\cancel{(-1)^{k+1}} \cdot \cancel{2^k} \cdot \cancel{x^k}} \right|$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{2xk}{3(k+1)} \right| = \frac{2}{3} \lim_{k\to\infty} \left| \frac{x}{(1+\frac{1}{k})} \right| = \frac{2}{3}|x|.$$

Logo, a série de potências é absolutamente convergente quando $\frac{2}{3}|x| < 1$, isto é, quando $|x| < \frac{3}{2}$. A série é divergente se $\frac{2}{3}|x| > 1$. Se $|x| = \frac{3}{2}$ $\left(\text{ou seja, } x = \pm\frac{3}{2}\right)$ nada podemos concluir sobre a série.

- Quando $x = \frac{3}{2}$, a série de potências torna-se:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \cancel{2^k} \cancel{\left(\frac{3}{2}\right)^k} \frac{1}{k \cdot \cancel{3^k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

que é a série harmônica alternada, convergente.

- Quando $x = -\dfrac{3}{2}$, a série de potências, torna-se:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot \cancel{2^k}\left(-\frac{3}{\cancel{2}}\right)^{\cancel{k}}\cdot\frac{1}{k\cdot\cancel{3^k}} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty}-\frac{1}{k} = -\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}}_{\text{diverge}}\,.$$

Portanto, o intervalo de convergência da série é $-\dfrac{3}{2} < x \leq \dfrac{3}{2}$.

7.2 Intervalo e raio de convergência

Toda série de potências possui um intervalo de convergência. O intervalo de convergência é o conjunto de todos os números para os quais a série converge.

Todo intervalo de convergência possui um raio de convergência R. Para uma série de potências, temos três possibilidades, dadas pelo teorema a seguir.

Teorema 7.1. (Convergência de uma série de potências)

Para uma série de potências $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$, *existem três possibilidades:*

(a) *A série converge apenas para* $x = a$.

(b) *A série converge para todo* x.

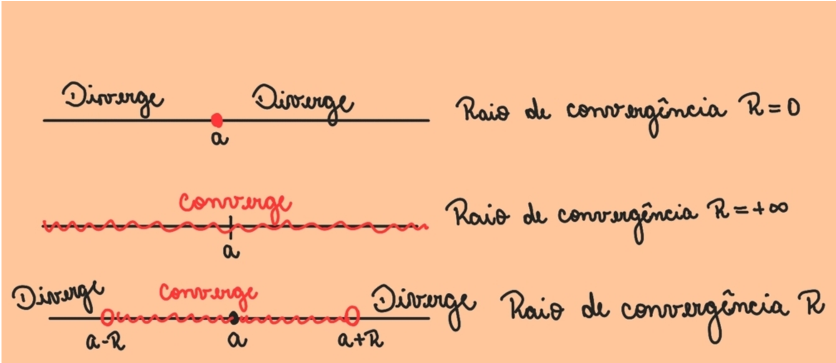
(c) *Existe um número positivo* R *tal que a série converge se* $|x-a| < R$ *e diverge se* $|x-a| > R$. *O número* R *é chamado* ***raio de convergência***.

♡

Observação:

- No caso **(a)**, o raio de convergência é $R = 0$. O intervalo de convergência é o ponto $x = a$.
- No caso **(b)**, o raio de convergência é $R = +\infty$. O intervalo de convergência é $(-\infty, +\infty)$.
- No caso **(c)**, note que o intervalo de convergência pode ser escrito como $a - R < x < a + R$. Quando x é uma extremidade do intervalo, isto é, $x = a \pm R$, qualquer coisa pode acontecer - a série pode convergir em um ou ambos os extremos ou divergir em ambos os extremos. Então, existem quatro possibilidades para o intervalo de convergência:

$$(a-R, a+R),\ \ (a-R, a+R],\ \ [a-R, a+R),\ \ [a-R, a+R].$$



Teorema 7.2. (Raio de convergência)

Considere a série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ *e suponha* $c_k \neq 0$ *para todo* $k \geq p$, *onde* p *é um número natural fixo. Então, o raio de convergência* R *desta série é dado por*

$$R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right|$$

quando o limite existe finito ou infinito. ♡

Exemplo 7.2 Encontre o raio e o intervalo de convergência da série

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(x+2)^k}{3^{k+1}}\,.$$

Resolução: Utilizando o teste da razão, podemos escrever:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)(x+2)^{k+1}}{3^{k+2}}\cdot\frac{3^{k+1}}{k(x+2)^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\left(\frac{k+1}{k}\right)\cdot\frac{(x+2)}{3}\right|$$
$$= \frac{|x+2|}{3}\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right) = \frac{|x+2|}{3}\underbrace{\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)}_{=1} = \frac{|x+2|}{3}\,.$$

Assim, a série converge quando $\frac{|x+2|}{3} < 1$, isto é,

$$|x+2| < 3 \quad\Rightarrow\quad -3 < x+2 < 3 \quad\Rightarrow\quad -5 < x < 1.$$

A série diverge quando $|x+2| > 3$, isto é, quando $x > 1$ ou quando $x < -5$.
Precisamos testar a série nos extremos do intervalo, isto é, em $x = -5$ e em $x = 1$.

- Quando $x = -5$, temos

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(-5+2)^k}{3^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(-3)^k}{3^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot k}{3} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot k.$$

  Como $\lim_{k\to\infty} k = +\infty$, pelo teste da série alternada, a série dada diverge.

- Quando $x = 1$, temos

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(1+2)^k}{3^{k+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \cdot 3^k}{3^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{3} = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} k.$$

Esta série diverge pois. pelo teorema da divergência, $\lim_{k \to \infty} k = +\infty$.

Portanto, a série converge quando $-5 < x < 1$.

7.3 Representação de funções como séries de potências

Veremos como representar certos tipos de funções como somas de séries de potências pela manipulação de séries geométricas ou pela diferenciação ou integração de tais séries.

Exemplo 7.3 Encontre uma representação em série de potências para as funções e determine os intervalos de convergência:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^3}{x+2}$

Resolução:

(a) Note que

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = 1 - x^2 + x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots .$$

Como esta série é uma série geométrica, sabemos que converge quando $|-x^2| < 1$, isto é, quando $x^2 < 1$ ou $|x| < 1$. Portanto, o raio de convergência é $R = 1$ e o intervalo de convergência é $-1 < x < 1$.

(b) Note que

$$\frac{x^3}{x+2} = x^3 \cdot \frac{1}{x+2} = x^3 \cdot \frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)} = \frac{x^3}{2} \frac{1}{\left[1-\left(-\frac{x}{2}\right)\right]} = \frac{x^3}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} \cdot x^{k+3},$$

ou ainda, trocando o índice da série, temos $(n = k+3)$

$$\frac{x^3}{x+2} = \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-3}}{2^{n-3}} x^n = \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^{k-3}}{2^{k-3}} x^k = -\frac{1}{2^{1-3}} \sum_{k=3}^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^k = -4 \sum_{k=3}^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^k .$$

Esta série geométrica converge para $\left|-\dfrac{x}{2}\right| < 1$, isto é, converge para $|x| < 2$. O raio de convergência da série é $R = 2$ e o intervalo de convergência é $-2 < x < 2$.

Exercícios

1. Reescreva as expressões dadas como uma única série de potências envolvendo x^k no termo geral.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2kc_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} 6c_k x^{k+1},$

(b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^k + 2\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + 3\sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^k.$

2. Determine o raio e o intervalo de convergência das séries de potências. Não esqueça de testar os extremos dos intervalos:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k! x^k}{2^k}$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k x^k}{k^2}$

(f) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{\ln k}$

(g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k(k+1)}$

(h) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k x^{k+1}}{k+1}$

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{\sqrt{k}}$

(j) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$

(k) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k x^k}{k!}$

(l) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k(\ln k)^2}$

(m) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k (x+5)^k$

(n) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1)!}{k^3}(x-2)^k$

(o) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x-3)^k}{4^{2k}}$

3. Encontre uma representação em série de potências para a função e determine o intervalo de convergência:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

(b) $f(x) = \dfrac{3}{1-x^4}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^3}$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{1+9x^2}$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{x-5}$

(f) $f(x) = \dfrac{x}{4x+1}$

(g) $f(x) = \dfrac{x}{9+x^2}$

4. Expresse a função como a soma de uma série de potências usando primeiro frações parciais. Determine o intervalo de convergência:

(a) $f(x) = \dfrac{3}{x^2+x-2}$

(b) $f(x) = \dfrac{7x-1}{3x^2+2x-1}$

Respostas:

1. **(a)** $\displaystyle 2c_1 + \sum_{k=1}^{\infty}[2(k+1)c_{k+1} + 6c_{k-1}]x^k,$

(b) $4c_2 + (3c_1 + 12c_3)x + \sum_{k=2}^{\infty}[k(k+2)c_k + 2(k+1)(k+2)c_{k+2}]x^k.$

2. **(a)** $R = 1$ e $x \in [-1, 1)$

(b) $R = \frac{1}{3}$ e $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

(c) $R = +\infty$ e $x \in (-\infty, +\infty)$

(d) $R = 0$ e $x = 0$

(e) $R = \frac{1}{5}$ e $x \in \left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]$

(f) $R = 1$ e $x \in [-1, 1)$

(g) $R = 1$ e $x \in [-1, 1]$

(h) $R = \frac{1}{2}$ e $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

(i) $R = 1$ e $x \in (-1, 1]$

(j) $R = +\infty$ e $x \in (-\infty, +\infty)$

(k) $R = +\infty$ e $x \in (-\infty, +\infty)$

(l) $R = 1$ e $x \in [-1, 1]$

(m) $R = \frac{4}{3}$ e $x \in \left(-\frac{19}{3}, -\frac{11}{3}\right)$

(n) $R = 0$ e $x = 2$

(o) $R = 8$ e $x \in \left(-\frac{13}{2}, \frac{19}{2}\right)$

3. **(a)** $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k, \quad x \in (-1, 1)$

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} 3x^{4k}, \quad x \in (-1, 1)$

(c) $\sum_{k=0}^{\infty} x^{3k}, \quad x \in (-1, 1)$

(d) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 3^{2k} x^{2k}, \quad x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

(e) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{5^{k+1}}, \quad x \in (-5, 5)$

(f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 2^{2k} x^{k+1}, \quad x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

(g) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{9^{k+1}}, \quad x \in (-3, 3)$

4. **(a)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} - 1\right] x^k, \quad x \in (-1, 1)$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left[2(-1)^k - 3^k\right] x^k, \quad x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$