Cálculo em Várias Variáveis

Regra da Cadeia

ICT-Unifesp

Mais detalhes na Seção 14.5 do livro do Stewart. Recurso disponível online pela Biblioteca do ICT.

Regra da Cadeia

Regra da Cadeia

Regra da Cadeia para funções de uma variável:
Se $y = f(x)$ e $x = g(t)$, em que f e g são funções diferenciáveis, então a função composta $y = f(g(t))$ é uma função diferenciável de t, e

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

Regra da Cadeia

Regra da Cadeia para funções de uma variável:

Se $y = f(x)$ e $x = g(t)$, em que f e g são funções diferenciáveis, então a função composta $y = f(g(t))$ é uma função diferenciável de t, e

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

Exemplo

Se $y = x^2$ e $x(t) = sen(t)$, então

$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad e \quad \frac{dx}{dt} = cos(t),$$

o que implica

$$\frac{dy}{dt} = 2xcos(t) = 2sen(t)cos(t).$$

Para funções de várias variáveis também temos Regra da Cadeia, que apresentaremos em casos.

Regra da Cadeia (Caso 1):
Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável nas variáveis x e y, em que $x = g(t)$ e $y = h(t)$ são funções diferenciáveis de t. Então, a função composta $z = f(g(t), h(t))$ é diferenciável e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

ou ainda

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Regra da Cadeia

Exemplo

Se $z = x^2y + ln(xy^2)$, *em que* $x = t^2$ *e* $y = t$, *encontre* $\dfrac{dz}{dt}$.

Regra da Cadeia

Exemplo

Seja $w = xy$, *em que* $x = cos(t)$ *e* $y = sen(t)$. *Encontre* $\dfrac{dw}{dt}$ *em* $t = \dfrac{\pi}{3}$.

Exemplo

Suponha que a pressão P (em quilopascals), o volume V (em litros) e a temperatura T (em kelvins) de um certo gás estão relacionados pela equação $PV = 8,31T$. Determine a taxa de variação da pressão quando a temperatura é de $300K$ e está aumentando a uma taxa de $0,1K/s$ e o volume é 100ℓ e está aumentando a uma taxa de $0,2\ell/s$.

Exemplo

Suponha que a pressão P (em quilopascals), o volume V (em litros) e a temperatura T (em kelvins) de um certo gás estão relacionados pela equação $PV = 8,31T$. Determine a taxa de variação da pressão quando a temperatura é de $300K$ e está aumentando a uma taxa de $0,1K/s$ e o volume é 100ℓ e está aumentando a uma taxa de $0,2\ell/s$.

Denotemos por t o tempo (em segundos). Em um dado instante t_* temos: $T = 300, dT/dt = 0,1, V = 100$ e $dV/dt = 0,2$.

Regra da Cadeia

Como $P = 8,31\dfrac{T}{V}$, pela Regra da Cadeia, temos:

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= \frac{\partial P}{\partial T}\frac{dT}{dt} + \frac{\partial P}{\partial V}\frac{dV}{dt} \\ &= \frac{8,31}{V}\frac{dT}{dt} - \frac{8,31\,T}{V^2}\frac{dV}{dt}\end{aligned}$$

$$\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=t_*} = \frac{8,31}{100}(0,1) - \frac{8,31(300)}{100^2}(0,2) = -0,04155 kPa/s.$$

Regra da Cadeia (Caso 2):
Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável nas variáveis x e y, em que $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$ são funções diferenciáveis de s e t. Então, a função composta $z = f(g(s, t), h(s, t))$ é diferenciável e

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Regra da Cadeia

Exemplo

Seja $z = f(x, y)$*, com* $f(x, y) = x^2y - x^2 + y^2$*,* $x = rcos(\theta)$ *e* $y = rsen(\theta)$*. Vamos encontrar* $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ *e* $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$*.*

Regra da Cadeia

Exemplo

Seja $z = f(x, y)$, *com* $f(x, y) = x^2y - x^2 + y^2$, $x = rcos(\theta)$ *e* $y = rsen(\theta)$. *Vamos encontrar* $\frac{\partial z}{\partial r}$ *e* $\frac{\partial z}{\partial \theta}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \\
&= (2xy - 2x)\frac{\partial x}{\partial r} + (x^2 + 2y)\frac{\partial y}{\partial r} \\
&= (2r^2 sen(\theta)cos(\theta) - 2rcos(\theta))cos(\theta) + (r^2cos^2(\theta) + 2rsen(\theta))sen(\theta).
\end{aligned}$$

Exemplo

Seja $z = f(x,y)$, *com* $f(x,y) = x^2y - x^2 + y^2$, $x = rcos(\theta)$ *e* $y = rsen(\theta)$. *Vamos encontrar* $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ *e* $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\\ &= (2xy - 2x)\frac{\partial x}{\partial r} + (x^2 + 2y)\frac{\partial y}{\partial r}\\ &= (2r^2sen(\theta)cos(\theta) - 2rcos(\theta))cos(\theta) + (r^2cos^2(\theta) + 2rsen(\theta))sen(\theta).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\\ &= (2xy - 2x)\frac{\partial x}{\partial \theta} + (x^2 + 2y)\frac{\partial y}{\partial \theta}\\ &= (2r^2sen(\theta)cos(\theta) - 2rcos(\theta))(-rsen(\theta)) + (r^2cos^2(\theta) + 2rsen(\theta))(rcos(\theta)).\end{aligned}$$

Regra da Cadeia

Exemplo

Se $g(s,t) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$*, sendo* f *diferenciável, mostre que* g *é solução da equação diferencial*

$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = 0.$$

Regra da Cadeia

Exemplo

Se $g(s,t) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$, *sendo* f *diferenciável, mostre que* g *é solução da equação diferencial*

$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = 0.$$

Temos que:

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}(2s) + \frac{\partial f}{\partial y}(-2s),$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}(-2t) + \frac{\partial f}{\partial y}(2t).$$

Regra da Cadeia

Exemplo

Se $g(s,t) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$, *sendo* f *diferenciável, mostre que* g *é solução da equação diferencial*

$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = 0.$$

Temos que:

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}(2s) + \frac{\partial f}{\partial y}(-2s),$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}(-2t) + \frac{\partial f}{\partial y}(2t).$$

$$\Longrightarrow t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = \left(2st\frac{\partial f}{\partial x} + -2st\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(-2st\frac{\partial f}{\partial x} + 2st\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0.$$

Exemplo

Se $z = f(x, y)$ *tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas e* $x = r^2 + s^2$ *e* $y = 2rs$*, determine* $\partial^2 z / \partial r^2$*.*

Regra da Cadeia

Exemplo

Se $z = f(x, y)$ tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas e $x = r^2 + s^2$ e $y = 2rs$, determine $\partial^2 z/\partial r^2$.

Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}(2r) + \frac{\partial z}{\partial y}(2s).$$

Exemplo

Se $z = f(x, y)$ tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas e $x = r^2 + s^2$ e $y = 2rs$, determine $\partial^2 z/\partial r^2$.

Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}(2r) + \frac{\partial z}{\partial y}(2s).$$

Derivando com relação a r esta expressão, obtemos:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(2r\frac{\partial z}{\partial x} + 2s\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + 2s\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right). \qquad (1)$$

Regra da Cadeia

Usando a Regra da Cadeia novamente, temos

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(2s),$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(2s).$$

Regra da Cadeia

Usando a Regra da Cadeia novamente, temos

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(2s),$$
$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(2s).$$

Substituindo em (1) e usando a igualdade das derivadas mistas de segunda ordem (Teorema de Clairaut/Schwarz), obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2r\left(2r\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2s\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right) + 2s\left(2r\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2s\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\\ &= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 4r^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 8rs\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4s^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

Regra da Cadeia (Caso 3 - Versão geral):
Suponha que $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ seja uma função diferenciável de n variáveis $x_1, \ldots, x_n$, em que cada x_j é uma função diferenciável de m variáveis $t_1, \ldots, t_m$. Então, a função composta $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ é diferenciável e

$$\frac{\partial z}{\partial t_i} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i},$$

para $i = 1, \ldots, m$.

Exemplo

Seja $w = x^2 + y^2 + z^2$*, em que* $x = \rho cos(\theta) sen(\varphi)$*,* $y = \rho sen(\theta) sen(\varphi)$ *e* $z = \rho cos(\varphi)$*. Calcule* $\partial w / \partial \theta$*.*

Regra da Cadeia

Exemplo

Seja $w = x^2 + y^2 + z^2$*, em que* $x = \rho cos(\theta) sen(\varphi)$*,* $y = \rho sen(\theta) sen(\varphi)$ *e* $z = \rho cos(\varphi)$*. Calcule* $\partial w / \partial \theta$*.*

Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial \theta} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta} \\
&= 2x\frac{\partial x}{\partial \theta} + 2y\frac{\partial y}{\partial \theta} + 2z\frac{\partial z}{\partial \theta} \\
&= 2(\rho \cos(\theta)\mathrm{sen}(\varphi))(-\rho \mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\varphi)) \\
&\quad + 2(\rho \mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\varphi))(\rho \cos(\theta)\mathrm{sen}(\varphi)) \\
&\quad + 2(\rho \cos(\varphi)) \cdot 0 \\
&= -2\rho^2 \mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)\mathrm{sen}^2(\varphi) + 2\rho^2 \mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)\mathrm{sen}^2(\varphi) = 0.
\end{aligned}$$

Suponhamos que a equação $F(x, y, z) = 0$ defina z implicitamente como uma função diferenciável de x e y, ou seja, $z = f(x, y)$, onde $F(x, y, f(x, y)) = 0$ para todo x e y no domínio de f.

Regra da Cadeia

Suponhamos que a equação $F(x, y, z) = 0$ defina z implicitamente como uma função diferenciável de x e y, ou seja, $z = f(x, y)$, onde $F(x, y, f(x, y)) = 0$ para todo x e y no domínio de f.

Se F é diferenciável, podemos usar a Regra da Cadeia para derivar ambos os lados da equação $F(x, y, z) = 0$ com relação a x:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Regra da Cadeia

Como $\dfrac{\partial x}{\partial x} = 1$ e $\dfrac{\partial y}{\partial x} = 0$, supondo que $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, podemos isolar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{F_x}{F_z}.$$

Regra da Cadeia

Como $\dfrac{\partial x}{\partial x} = 1$ e $\dfrac{\partial y}{\partial x} = 0$, supondo que $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, podemos isolar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{F_x}{F_z}.$$

Analogamente, obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

Regra da Cadeia

Exemplo

Determine $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ *se* $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1.$

Derivando implicitamente, usando a Regra da Cadeia, obtemos:

$$3y^2 + 3z^2\frac{\partial z}{\partial y} + 6xz + 6xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

o que implica

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3y^2 + 6xz}{3z^2 + 6xy}.$$

Exercícios

Seção 14.5 do Stewart: 1–39,43, 51.