Cálculo em Várias Variáveis
Integrais duplas em retângulos

ICT-Unifesp

1. Integrais duplas

2. Exercícios

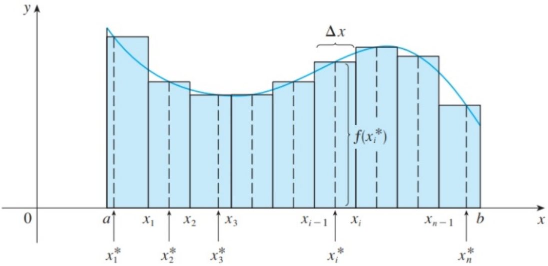
Mais detalhes na Seção 15.1 do livro do Stewart. Recurso disponível online pela Biblioteca do ICT.

Integrais duplas

A integral simples

Relembrando...

- Considere uma função de uma variável $f : [a, b] \to \mathbb{R}$,
- Particione o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de mesmo comprimento $\Delta x = (b - a)/n$,
- Tome x_i^* um ponto arbitrário em $[x_{i-1}, x_i]$,
- Soma de Riemann: $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$.



A integral simples

Relembrando...

Integral de f no intervalo $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x\,,$$

caso o limite exista.

A integral simples

Relembrando...

Integral de f no intervalo $[a,\, b]$:

$$\int_a^b f(x)\; dx \;=\; \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x\,,$$

caso o limite exista.

Se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,\, b]$, a integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\; dx$ representa a área sob a curva $y = f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$.

A integral dupla

Considere, agora, uma função de duas variáveis $f(x, y)$ definida no retângulo

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \;\; c \leq y \leq d\}.$$

A integral dupla

Considere, agora, uma função de duas variáveis $f(x, y)$ definida no retângulo

$$\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b\,,\ \ c \leq y \leq d\right\}.$$

Suponha que $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in \mathcal{R}$.

A integral dupla

Seja

$$\mathcal{S} = \left\{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in \mathcal{R},\ 0 \leq z \leq f(x,\ y)\right\}$$

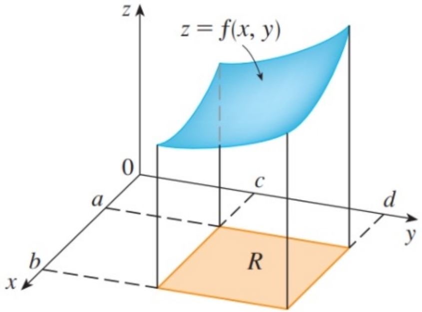
o sólido que está acima da região $\mathcal{R}$ e abaixo do gráfico da função f.

A integral dupla

Seja

$$\mathcal{S} = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in \mathcal{R},\ 0 \leq z \leq f(x,\ y)\}$$

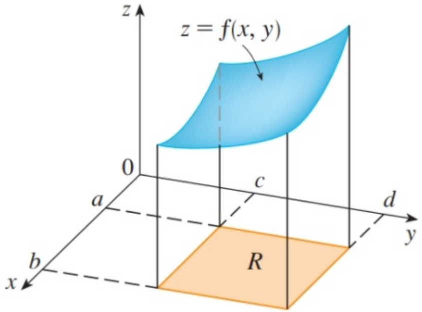
o sólido que está acima da região $\mathcal{R}$ e abaixo do gráfico da função f.



Seja

$$\mathcal{S} = \left\{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in \mathcal{R},\, 0 \leq z \leq f(x,\, y)\right\}$$

o sólido que está acima da região $\mathcal{R}$ e abaixo do gráfico da função f.



O objetivo: determinar o volume de $\mathcal{S}$.

A integral dupla

A estratégia:

Dividir o retângulo $\mathcal{R}$ em subretângulos $\mathcal{R}_{ij}$:

- dividir $[a, b]$ em m subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de comprimento $\Delta x = \dfrac{(b-a)}{m}$,
- dividir $[c, d]$ em n subintervalos $[y_{j-1}, y_j]$ de comprimento $\Delta y = \dfrac{(d-c)}{n}$.

A integral dupla

A estratégia:

Dividir o retângulo $\mathcal{R}$ em subretângulos $\mathcal{R}_{ij}$:

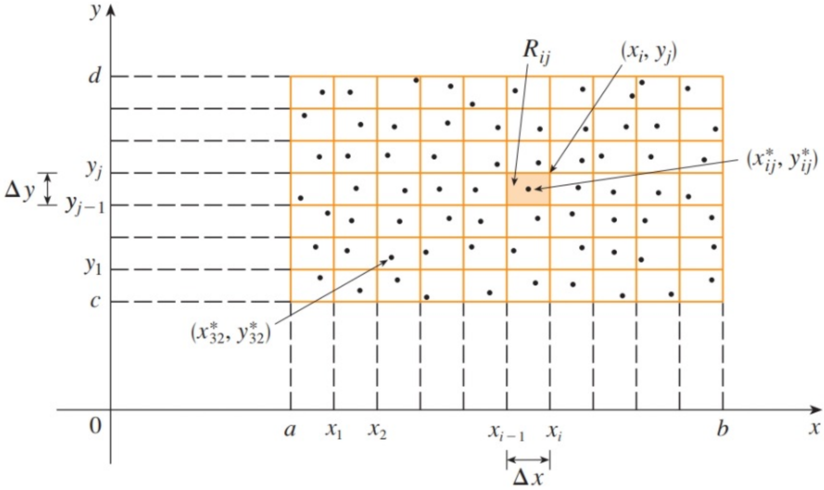
- dividir $[a, b]$ em m subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de comprimento $\Delta x = \dfrac{(b-a)}{m}$,
- dividir $[c, d]$ em n subintervalos $[y_{j-1}, y_j]$ de comprimento $\Delta y = \dfrac{(d-c)}{n}$.

Subretângulos:

$$\mathcal{R}_{ij} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\right\},$$

de mesma área $\Delta A = \Delta x \Delta y$.

A integral dupla



(x_{ij}^*, y_{ij}^*) é um ponto arbitrário em cada subretângulo $\mathcal{R}_{ij}$.

A integral dupla

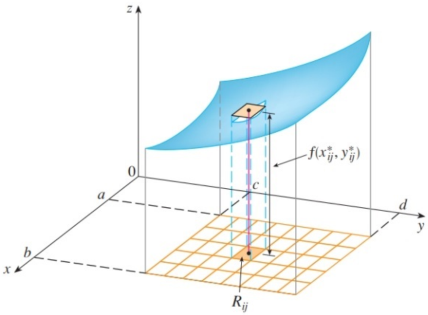
Agora, o volume do paralelepípedo de base $\mathcal{R}_{ij}$ e altura $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ é

$$V_{ij} = f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A.$$

A integral dupla

Agora, o volume do paralelepípedo de base $\mathcal{R}_{ij}$ e altura $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ é

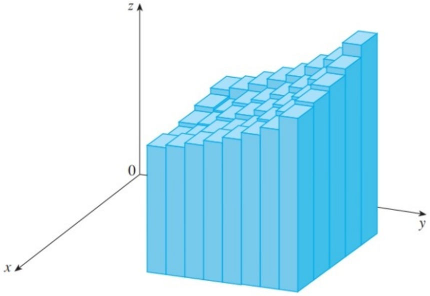
$$V_{ij} = f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A.$$



A integral dupla

Logo, o volume do sólido $\mathcal{S}$ é aproximado por

$$V \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} V_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A.$$



A integral dupla

Definição

A *integral dupla* *de f sobre o retângulo $\mathcal{R}$ é dada por*

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,\, y)\, dA = \lim_{m,\, n \to +\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*,\, y_{ij}^*)\, \Delta A\,,$$

caso esse limite exista.

A integral dupla

Definição

A *integral dupla* *de f sobre o retângulo $\mathcal{R}$ é dada por*

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,\, y)\; dA \;=\; \lim_{m,\, n \to +\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*,\, y_{ij}^*)\, \Delta A\,,$$

caso esse limite exista.

Assim, se $f(x,y) \geq 0$ para todo $(x,y) \in \mathcal{R}$, o volume V do sólido que está acima do retângulo $\mathcal{R}$ e abaixo do gráfico de f é dado por

$$V = \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)dA.$$

Integrais duplas sobre regiões retangulares

Seja $f(x, y)$ uma função contínua no retângulo

$$\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\right\}.$$

Integrais duplas sobre regiões retangulares

Seja $f(x, y)$ uma função contínua no retângulo

$$\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\right\}.$$

Integração parcial com relação a y: integrar f com relação à variável y no intervalo $[c,\ d]$, tratando a variável x como uma constante. O resultado dessa integral depende de x.

Como o valor dessa integral depende de x, ela define uma função de x:

$$\int_c^d f(x,\, y)\; dy \;=\; A(x)\,.$$

Integrais duplas sobre regiões retangulares

Como o valor dessa integral depende de x, ela define uma função de x:

$$\int_c^d f(x,\, y)\; dy \;=\; A(x)\,.$$

Agora, se integrarmos a função $A(x)$ no intervalo $[a,\, b]$, obtemos

$$\int_a^b A(x)\; dx \;=\; \int_a^b \left[\int_c^d f(x,\, y)\; dy\right] dx\,.$$

Como o valor dessa integral depende de x, ela define uma função de x:

$$\int_c^d f(x,\, y)\; dy \;=\; A(x)\,.$$

Agora, se integrarmos a função $A(x)$ no intervalo $[a,\, b]$, obtemos

$$\int_a^b A(x)\; dx \;=\; \int_a^b \left[\int_c^d f(x,\, y)\; dy\right] dx\,.$$

A integral do lado direito da equação acima é chamada de integral iterada.

Integrais duplas sobre regiões retangulares

Exemplo

Calcule $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} (x+y)\,dA$, *sendo* $\mathcal{R}$ *o retângulo* $1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$.

Integração parcial com relação a x: integrar f com relação à variável x no intervalo $[a, b]$, tratando a variável y como uma constante. O resultado dessa integral é um número que depende de y.

Como o valor dessa integral depende de y, ela define uma função de y:

$$\int_a^b f(x, y)\, dx = B(y).$$

Como o valor dessa integral depende de y, ela define uma função de y:

$$\int_a^b f(x,\, y)\, dx \;=\; B(y).$$

Agora, se integrarmos a função $B(y)$ no intervalo $[c,\, d]$, obtemos

$$\int_c^d B(y)\, dy \;=\; \int_c^d \left[\int_a^b f(x,\, y)\, dx\right] dy.$$

Integrais duplas sobre regiões retangulares

Como o valor dessa integral depende de y, ela define uma função de y:

$$\int_a^b f(x, y)\, dx = B(y).$$

Agora, se integrarmos a função $B(y)$ no intervalo $[c, d]$, obtemos

$$\int_c^d B(y)\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx\right] dy.$$

A integral do lado direito da equação acima também é uma integral iterada.

Integrais duplas sobre regiões retangulares

Exemplo

Vamos calcular $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} (x+y)\, dA$, *sendo* $\mathcal{R}$ *o retângulo* $1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$.

Integrais duplas sobre regiões retangulares

Exemplo

Vamos calcular $\iint_{\mathcal{R}} (x+y)\, dA$, *sendo* $\mathcal{R}$ *o retângulo* $1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$.

Integrando com relação à x (supondo y constante):

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{R}} (x+y)\, dxdy &= \int_0^1 \left[\int_1^2 (x+y)\, dx \right] dy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_1^2 dy \\
&= \int_0^1 \left[y + \frac{3}{2} \right] dy = \left[\frac{y^2}{2} + \frac{3y}{2} \right]_0^1 = 2.
\end{aligned}$$

Integrais duplas sobre regiões retangulares

PERGUNTA: Será que sempre temos

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right] dy\,?$$

Integrais duplas sobre regiões retangulares

Teorema (de Fubini)

Se f é uma função contínua no retângulo

$$\mathcal{R} = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b\,,\ c \leq y \leq d\right\},$$

então

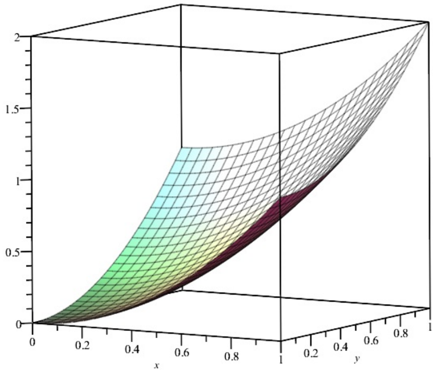
$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy.$$

Integrais duplas sobre regiões retangulares

Exemplo

Calcule o volume do sólido

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}.$$



Integrais duplas sobre regiões retangulares

Exemplo

Calcule $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} y\,\mathrm{sen}(xy)\,dA$, *sendo* $\mathcal{R} = [1,2] \times [0,\pi]$.

O Teorema de Fubini garante que o resultado da integral do exemplo anterior é o mesmo fazendo primeiramente a integral com relação à y.

O Teorema de Fubini garante que o resultado da integral do exemplo anterior é o mesmo fazendo primeiramente a integral com relação à y.

No entanto, essa estratégia é muito mais trabalhosa, pois será necessário fazer duas integrações por partes (verifique!).

Propriedades das integrais duplas

Admitindo que as integrais abaixo existem, temos que

- $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} [f(x,y) + g(x,y)]\, dA = \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, dA + \iint_{\mathcal{R}} g(x,y)\, dA,$

Propriedades das integrais duplas

Admitindo que as integrais abaixo existem, temos que

- $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} [f(x,y) + g(x,y)]\, dA = \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, dA + \iint_{\mathcal{R}} g(x,y)\, dA,$
- $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} cf(x,y)\, dA = c\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, dA, \ \forall c \in \mathbb{R},$

Propriedades das integrais duplas

Admitindo que as integrais abaixo existem, temos que

- $\iint_{\mathcal{R}} [f(x,y) + g(x,y)]\, dA =$
$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, dA + \iint_{\mathcal{R}} g(x,y)\, dA,$

- $\iint_{\mathcal{R}} cf(x,y)\, dA = c \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, dA, \ \forall c \in \mathbb{R},$

- Se $f(x,y) \geq g(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathcal{R}$, então
$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, dA \geq \iint_{\mathcal{R}} g(x,y)\, dA.$$

Exercícios

Seção 15.1 do Stewart: 1–5, 9–49, 55, 56.