Cálculo em Várias Variáveis

Teorema de Green.

ICT-Unifesp

1. Teorema de Green

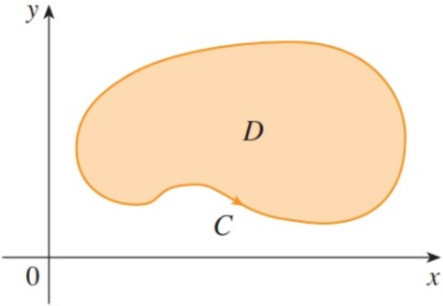
2. Exercícios

Mais detalhes na Seção 16.4 do livro do Stewart.

Teorema de Green

Teorema de Green

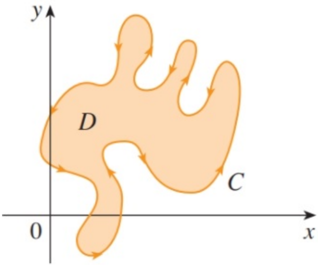
Nesta aula estudaremos o Teorema de Green, que estabelece uma relação entre a integral de linha de um campo vetorial sobre uma curva fechada simples C e a integral dupla de um campo escalar na região D delimitada por C.



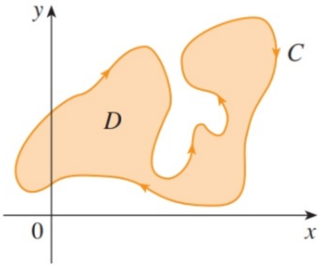
Teorema de Green

Definição

Dizemos que a curva fechada C tem orientação positiva quando ela é percorrida no sentido anti-horário. Neste caso, a região D delimitada por C fica à **esquerda** *quando percorremos a curva.*



(a) Orientação positiva



(b) Orientação negativa

Dizemos que $D \subset \mathbb{R}^2$ é uma região simples se D pode ser descrita tanto como uma região do Tipo I quanto como uma região do Tipo II.

Tipo I: $D = \{(x, y) \,|\, a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$,

Tipo II: $D = \{(x, y) \,|\, c \leq y \leq d,\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$.

Denotamos por $-C$ a curva que é constituída pelos mesmos pontos da curva C, mas que tem orientação oposta à da curva C.

Pode-se mostrar que

$$\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Teorema de Green

Teorema (de Green)

Seja C uma curva plana fechada simples, suave por partes, orientada positivamente e seja D a união de C com a região delimitada por C. Se P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas numa região aberta que contém D, então

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA.$$

Exemplo

Vamos calcular $\oint_C y^2\,dx + 2x^2\,dy$, *em que* C *é o triângulo de vértices* $(0,0)$, $(1,\,2)$ *e* $(0,\,2)$, *percorrido no sentido* **anti-horário**.

Note que D, a região englobada por C, é simples e que C tem orientação positiva.

Teorema de Green

Tomemos $P(x, y) = y^2$ e $Q(x, y) = 2x^2$. Então, pelo Teorema de Green, temos:

$$\begin{aligned}
\oint_C y^2\,dx + 2x^2\,dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA \\
&= \int_0^1 \int_{2x}^2 (4x - 2y)dydx \\
&= \int_0^1 \left[4xy - y^2\right]_{2x}^2 dx \\
&= \int_0^1 (8x - 4 - 4x^2)dx = -\frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Exemplo

Seja $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *o campo vetorial*

$$\vec{F}(x,\, y) \,=\, (4x^2 + 9y)\,\vec{i} + \,(9xy + \sqrt{y^2+1})\,\vec{j}\,.$$

Calcule $\displaystyle\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$*, em que* C *é a circunferência* $x^2 + (y-1)^2 = 1$*, percorrida no sentido* **horário**.

Note que $D = \{(x,y)|\, x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$, a região englobada por C, é simples e que C deve ter orientação negativa.

Teorema de Green

Temos $P(x, y) = 4x^2 + 9y$ e $Q(x, y) = 9xy + \sqrt{y^2 + 1}$.
Então, pelo Teorema de Green,

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= -\oint_{-C} (4x^2 + 9y)\, dx \, + \, (9xy + \sqrt{y^2 + 1})\, dy \\
&= -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \\
&= -\iint_D (9y - 9)\, dA = -9 \iint_D (y - 1)\, dA \\
&= -9 \int_0^{\pi} \int_0^{2\,\mathrm{sen}\,\theta} (r\,\mathrm{sen}\,\theta - 1) r\, dr d\theta = \cdots = 0.
\end{aligned}$$

Podemos usar o Teorema de Green para calcular a área de uma região D.

Como a área de uma região é dada pela integral dupla

$$A = \iint_D 1 \, dA,$$

devemos escolher $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ tais que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1.$$

Teorema de Green

Existem várias possibilidades:

$$\begin{aligned} P(x,\,y) &= 0\,, & Q(x,\,y) &= x\,,\\ P(x,\,y) &= -y\,, & Q(x,\,y) &= 0\,,\\ P(x,\,y) &= -\tfrac{1}{2}y\,, & Q(x,\,y) &= \tfrac{1}{2}x. \end{aligned}$$

Assim, o Teorema de Green nos dá as seguintes fórmulas para o cálculo da **área de** D :

$$A = \oint_C x\;dy = -\oint_C y\;dx = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx\,.$$

Teorema de Green

Exemplo

Encontre a área delimitada pela elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

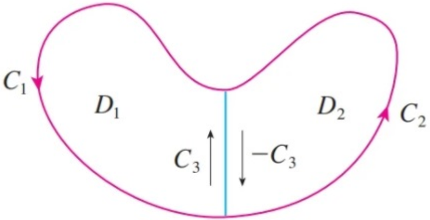
Exemplo

Encontre a área delimitada pela elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

As equações paramétricas da elipse são: $x = a\cos t$ e $y = b\,\mathrm{sen}\, t$, sendo $0 \leq t \leq 2\pi$. Então:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_C xdy - ydx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos t)(b\cos t)dt - (b\,\mathrm{sen}\, t)(-a\,\mathrm{sen}\, t)dt \\ &= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = ab\pi. \end{aligned}$$

O Teorema de Green pode ser estendido para o caso em que a região D é expressa como a união de um número finito de regiões simples.

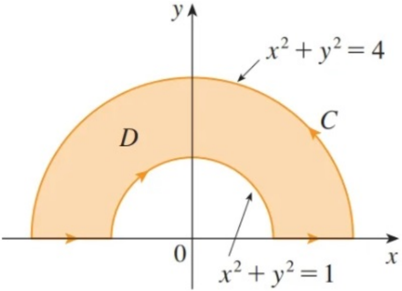


Basta observar que as integrais de linha sobre as curvas C_3 e $-C_3$ se cancelam e que a região D sempre fica à esquerda quando percorremos a sua fronteira.

Teorema de Green

Exemplo

Calcule $\oint_C y^2\,dx + 3xy\,dy$, *em que* C *é a fronteira da região semianular* D *contida no semiplano superior entre os círculos* $x^2 + y^2 = 1$ *e* $x^2 + y^2 = 4$.



Teorema de Green

Note que a região D, delimitada por C, não é simples. No entanto, o eixo y a divide em duas regiões simples.

Note que a região D, delimitada por C, não é simples. No entanto, o eixo y a divide em duas regiões simples.

Região D em coordenadas polares:

$$D = \{(r, \theta) \,|\, 1 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

Note que a região D, delimitada por C, não é simples. No entanto, o eixo y a divide em duas regiões simples.

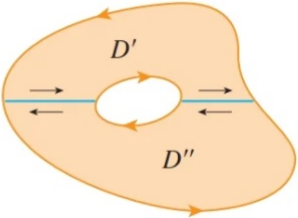
Região D em coordenadas polares:

$$D = \{(r, \theta) \,|\, 1 \leq r \leq 2,\, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

Portanto, pelo Teorema de Green, temos

$$\begin{aligned} \oint_C y^2\,dx + 3xy\,dy &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(3xy) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2)\right) dA \\ &= \iint_D y dA = \int_0^{\pi}\int_1^2 (r \operatorname{sen}\theta) r\,drd\theta \\ &= \cdots = \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

O Teorema de Green também pode ser utilizado para regiões com furos, ou seja, regiões que não são simplesmente conexas.



Decompor a região D em duas regiões $D^{'}$ e $D^{''}$ e aplicar o Teorema de Green separadamente a cada uma delas, somando os resultados em seguida.

Teorema de Green

Teorema (de Green para múltiplas regiões simplesmente conexas)

Sejam $C_1, C_2, \ldots, C_n$, curvas planas fechadas simples, suaves por partes, positivamente orientadas, tais que

- *não se intersectam duas a duas,*
- *$C_2, \ldots, C_n$ estão contidas na região delimitada por C_1,*
- *C_i está na região exterior a C_j, $\forall i \neq j$, com $i, j > 1$.*

Seja D a união das curvas com a região delimitada por C_1, exterior às demais curvas. Se P e Q são campos escalares com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um aberto contendo D, então

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \oint_{C_1} Pdx + Qdy - \sum_{k=2}^{n} \oint_{C_k} Pdx + Qdy.$$

Agora, considere o seguinte

Exemplo

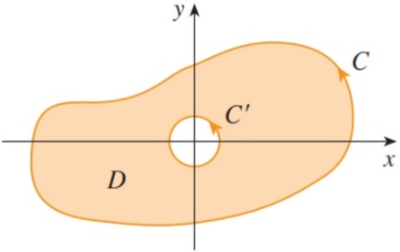
Seja $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ *o campo vetorial*

$$\vec{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}\,\vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\,\vec{j}.$$

Mostre que $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi$ *para todo caminho* C *fechado simples que circunde a origem.*

Como C é um caminho fechado arbitrário contendo a origem, não é possível calcular a integral de linha diretamente.

Vamos considerar um círculo com orientação positiva C' com centro na origem e raio a, escolhendo a suficientemente pequeno de modo que C' esteja contido em C.



Seja D a região delimitada por C e exterior a C'. Pelo Teorema de Green para múltiplas regiões simplesmente conexas, temos

$$\int_C P\,dx + Q\,dy - \int_{C'} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA,$$

mas

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = 0.$$

Logo,

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_{C'} P\,dx + Q\,dy \Leftrightarrow \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C'} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Agora podemos calcular facilmente a integral do campo sobre o círculo, usando a parametrização $\vec{r}(t) = (a\cos t)\vec{i} + (a\,\mathrm{sen}\,t)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C'} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(-a\,\mathrm{sen}\,t)(-a\,\mathrm{sen}\,t) + (a\cos t)(a\cos t)}{a^2\cos^2 t + a^2\,\mathrm{sen}^2 t} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Teorema de Green

O exercício anterior inclui um resultado mais geral

Teorema (Invariância da integral sob deformidade do caminho)

Sejam P e Q campos escalares com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em uma aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ e assuma que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \forall (x, y) \in A.$$

Sejam C_1 e C_2 duas curvas planas, fechadas, simples, positivamente orientadas em A, satisfazendo

- *C_2 está contida na região delimitada por C_1,*
- *os pontos na região delimitada por C_1 e exteriores de C_2, pertencem a A.*

Então,

$$\oint_{C_1} Pdx + Qdy = \oint_{C_2} Pdx + Qdy.$$

O campo

$$\vec{F}(x,\, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\,\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\vec{j}.$$

satisfaz $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}, \forall (x,y) \in A = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, mas $\vec{F}$ não é conservativo em A (note que A não é simplesmente conexo!).

Teorema de Green

Por outro lado, se D é uma região delimitada por uma curva fechada simples que não envolve a origem, então F é conservativo em D e

$$f(x, y) = \text{arccos}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

é uma função potencial para F.

Por outro lado, se D é uma região delimitada por uma curva fechada simples que não envolve a origem, então F é conservativo em D e

$$f(x, y) = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

é uma função potencial para F.

Quanto vale $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ nesse caso?

Exercícios

Seção 16.4 do Stewart: 1–18, 21, 22, 23.