Cálculo em Várias Variáveis

Integrais duplas em coordenadas polares

ICT-Unifesp

1 Integrais duplas em coordenadas polares

2 Exercícios

Mais detalhes na Seção 15.3 do livro do Stewart. Recurso disponível online pela Biblioteca do ICT.

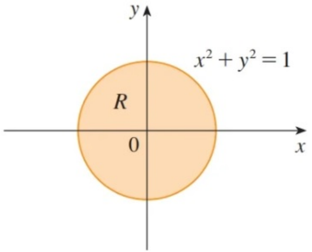
Integrais duplas em coordenadas polares

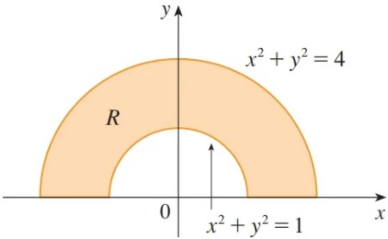
Integrais duplas em coordenadas polares

Suponha que desejamos calcular a integral dupla

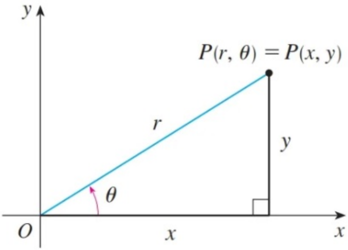
$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,\, y)\; dA\,,$$

em que $\mathcal{R}$ é uma das regiões abaixo:





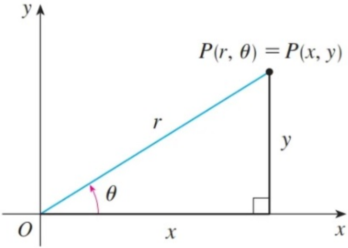
Coordenadas polares:



$r =$ distância da origem $O(0, 0)$ ao ponto $P(x, y)$.

$\theta =$ ângulo entre o eixo x e a reta que liga a origem $O(0, 0)$ ao ponto $P(x, y)$.

Integrais duplas em coordenadas polares



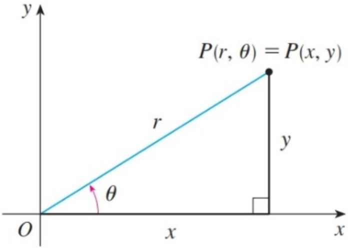
$$\cos(\theta) = \frac{x}{r} \implies x = r\cos(\theta),$$

$$\text{sen}(\theta) = \frac{y}{r} \implies y = r\,\text{sen}(\theta),$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \implies r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\text{tg}(\theta) = \frac{y}{x} \implies \theta = \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Integrais duplas em coordenadas polares



Logo, para transformar um ponto $(x,\, y)$ que está em coordenadas cartesianas em um ponto $(r,\, \theta)$ que está em coordenadas polares, fazemos

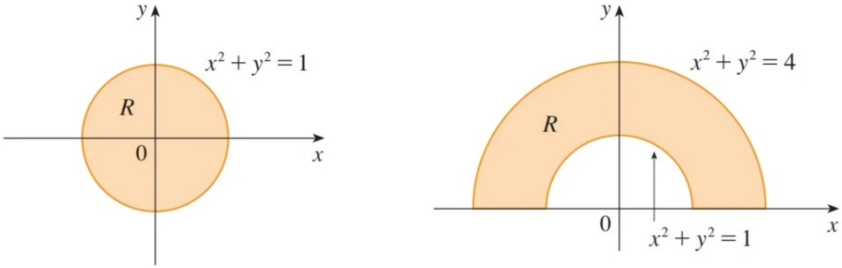
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{e} \qquad \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Devemos ter $r \geq 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$.

Retângulo polar:

$$\mathcal{R} = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq r \leq b \text{ e } \alpha \leq \theta \leq \beta\} ,$$

com $a > 0$, $b > 0$ e $0 < \beta - \alpha < 2\pi$.



(a) $R = \{(r, \theta) \mid 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$ (b) $R = \{(r, \theta) \mid 1 \leqslant r \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$

Integrais duplas em coordenadas polares

Vejamos agora como calcular a integral dupla

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,\, y)\; dA$$

em coordenadas polares.

Integrais duplas em coordenadas polares

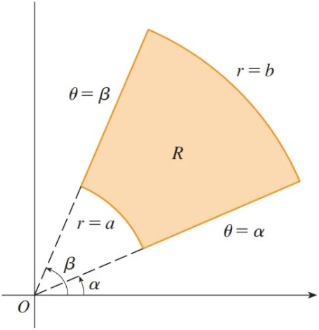


FIGURA 3 Retângulo polar

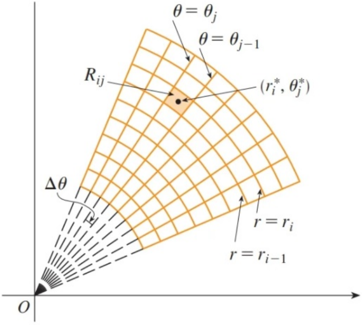


FIGURA 4 Divisão de R em sub-retângulos polares

Particionamos o intervalo $[a, b]$ em m subintervalos $[r_{i-1}, r_i]$ de largura $\Delta r = (b-a)/m$ e o intervalo $[\alpha, \beta]$ em n subintervalos de largura $\Delta\theta = (\beta - \alpha)/n$.

Sub-retângulo polar: $\mathcal{R}_{ij} = \{(r, \theta) \mid r_{i-1} \leq r \leq r_i \text{ e } \theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j\}$.

Integrais duplas em coordenadas polares

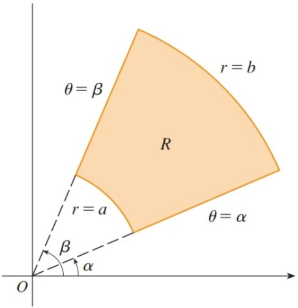


FIGURA 3 Retângulo polar

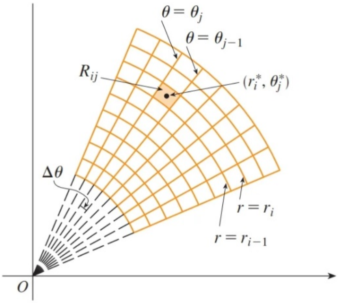


FIGURA 4 Divisão de R em sub-retângulos polares

Coordenadas do centro do sub-retângulo polar:

$$r_i^* = \frac{1}{2}(r_{i-1} + r_i) \text{ e } \theta_j^* = \frac{1}{2}(\theta_{j-1} + \theta_j).$$

Área de um setor circular de raio r e ângulo θ: $A = \dfrac{1}{2} r^2 \theta$.

Integrais duplas em coordenadas polares

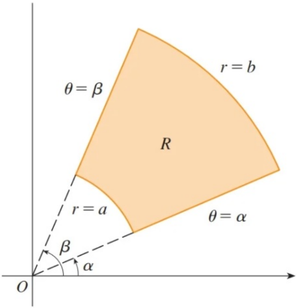


FIGURA 3 Retângulo polar

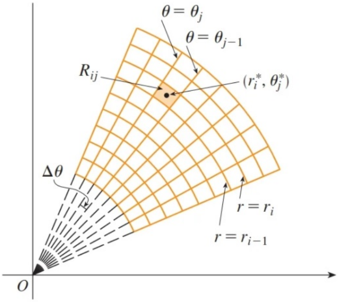


FIGURA 4 Divisão de R em sub-retângulos polares

Subtraindo as áreas de dois desses setores circulares, cada um deles com ângulo central $\Delta\theta = \theta_j - \theta_{j-1}$, temos que a área de $\mathcal{R}_{ij}$ é

$$\begin{aligned} \Delta A_i &= \tfrac{1}{2} r_i^2 \Delta\theta - \tfrac{1}{2} r_{i-1}^2 \Delta\theta = \tfrac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\Delta\theta \\ &= \tfrac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})\Delta\theta = r_i^* \Delta r \Delta\theta\,. \end{aligned}$$

Como as coordenadas cartesianas do centro de um sub-retângulo $\mathcal{R}_{ij}$ são

$$(x_{ij}^*,\, y_{ij}^*) \;=\; \left(r_i^* \cos\left(\theta_j^*\right),\, r_i^* \operatorname{sen}(\theta_j^*)\right),$$

podemos expressar a integral dupla em questão como

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,\, y)\; dA = \lim_{m,\, n \to +\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^*,\, y_{ij}^*\right) \Delta A_i$$

$$= \lim_{m,\, n \to +\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f\left(r_i^* \cos\left(\theta_j^*\right),\, r_i^* \operatorname{sen}(\theta_j^*)\right) r_i^* \Delta r \Delta\theta$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \int_{a}^{b} f\left(r \cos\left(\theta\right),\, r \operatorname{sen}(\theta)\right)\; r\, dr\, d\theta\,,$$

caso os limites em questão existam.

Integrais duplas em coordenadas polares

Logo, se f é contínua no retângulo polar $\mathcal{R}$, então

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,\, y)\; dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{a}^{b} f(r\cos(\theta),\, r\,\mathrm{sen}(\theta))\; r\, dr\, d\theta\,.$$

CUIDADO!!! Não esquecer do fator r que aparece na integral acima, ao lado de $dr\, d\theta$!

Integrais duplas em coordenadas polares

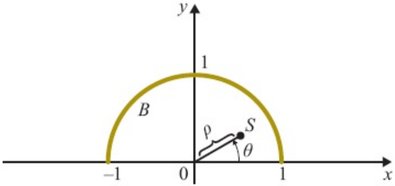
Exemplo

Vamos calcular $\displaystyle\iint_R sen(x^2 + y^2)\, dA$, *em que* R *é o semidisco* $x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0$.

Exemplo

Vamos calcular $\displaystyle\iint_R \mathrm{sen}(x^2+y^2)\,dA$*, em que R é o semidisco* $x^2+y^2 \leq 1,\ y \geq 0$.

O semidisco $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$ em coordenadas polares:



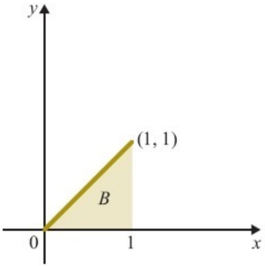
$$\Longleftrightarrow B = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

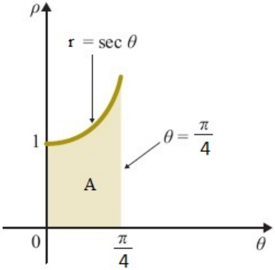
Integrais duplas em coordenadas polares

Exemplo

Vamos calcular $\displaystyle\iint_B \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$*, em que* B *é o triângulo de vértices* $(0,0),(1,0)$ *e* $(1,1)$.

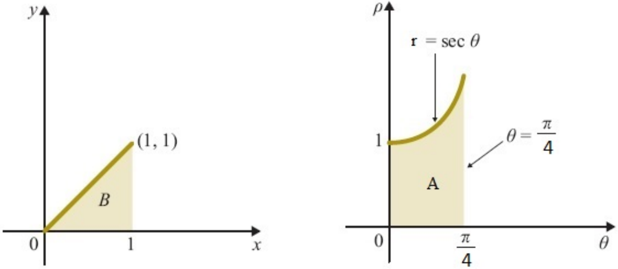
B em coordenadas polares:





A reta $x = 1$ corresponde a $r\cos(\theta) = 1$, isto é, $r = \frac{1}{\cos(\theta)} = \sec(\theta)$.

B em coordenadas polares:



A reta $x = 1$ corresponde a $r\cos(\theta) = 1$, isto é, $r = \frac{1}{\cos(\theta)} = \sec(\theta)$.

B corresponde a

$$A = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 |\, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},\ 0 \leq r \leq \sec(\theta)\}.$$

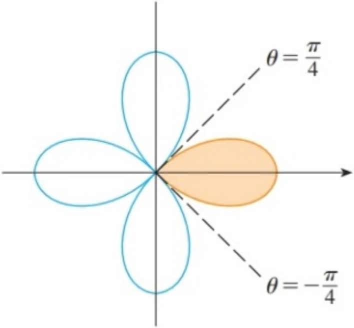
Integrais duplas em coordenadas polares

Então

$$\iint_B \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_A |r|\cdot r\,drd\theta = \iint_A r^2\,drd\theta$$
$$= \int_0^{\pi/4}\int_0^{\sec(\theta)} r^2\,drd\theta$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} \sec^3(\theta)\,d\theta$$
$$= \frac{1}{6}\left[\sec(\theta)\mathrm{tg}(\theta)+\ln|\sec(\theta)+\mathrm{tg}(\theta)|\right]_0^{\pi/4}$$
$$= \frac{1}{6}\left[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1).\right]$$

Exemplo

Vamos usar integral dupla para determinar a área contida em um laço da rosácea de quatro pétalas $r = \cos(2\theta)$.



Integrais duplas em coordenadas polares

Um laço da rosácea corresponde à região

$$D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4,\ 0 \leq r \leq \cos(2\theta)\}.$$

Um laço da rosácea corresponde à região

$$D = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4,\, 0 \leq r \leq \cos(2\theta)\}.$$

Então, a área procurada é

Um laço da rosácea corresponde à região

$$D = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4,\, 0 \leq r \leq \cos(2\theta)\}.$$

Então, a área procurada é

$$\iint_D dA = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\cos(2\theta)} r dr d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\cos(2\theta)} d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2(2\theta) d\theta = \frac{1}{4}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1+\cos(4\theta)) d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\left[\theta + \frac{\text{sen}(4\theta)}{4}\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta = \frac{\pi}{8}.$$

Exercícios

Seção 15.3 do Stewart: 1–42.