Cálculo em Várias Variáveis

Integrais triplas em coordenadas cilíndricas

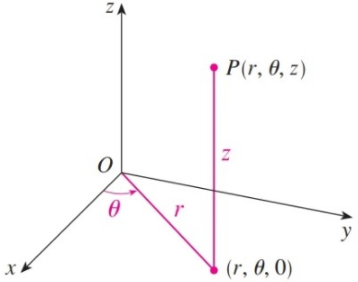
ICT-Unifesp

Mais detalhes na Seção 15.7 do livro do Stewart. Recurso disponível online pela Biblioteca do ICT.

Integrais triplas em coordenadas cilíndricas

Integrais triplas em coordenadas cilíndricas

Coordenadas cilíndricas:



$P'(x, y, 0) =$ projeção do ponto $P(x, y, z)$ no plano xy.

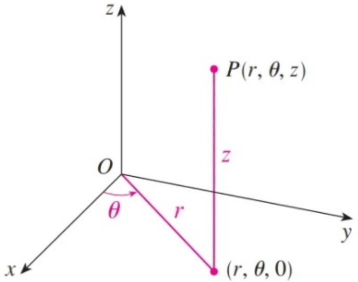
$r =$ distância da origem $O(0, 0, 0)$ ao ponto $P'(x, y, 0)$.

$\theta =$ ângulo entre o eixo x e a reta que liga a origem $O(0, 0, 0)$ ao ponto $P'(x, y, 0)$.

$z =$ distância do ponto $P(x, y, z)$ ao plano xy.

Integrais triplas em coordenadas cilíndricas

Coordenadas cilíndricas:



$$x = r\cos(\theta), \qquad y = r\,\mathrm{sen}(\theta), \qquad z = z$$

$$r \geq 0, \qquad 0 \leq \theta < 2\pi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), \qquad z = z$$

Vejamos, agora, como calcular a integral tripla

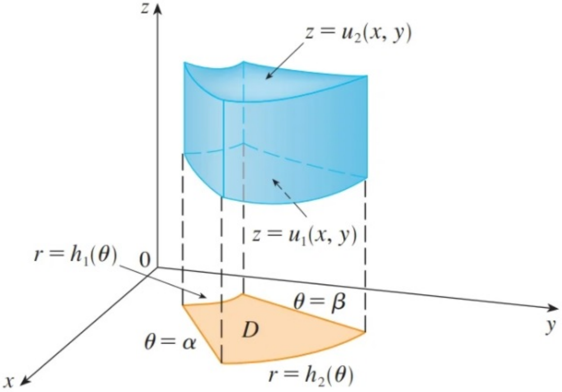
$$\iiint_{\mathcal{B}} f(x, y, z)\, dV$$

utilizando coordenadas cilíndricas.

Seja $f : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ seja uma função contínua, com

$$\mathcal{B} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\right\}$$

$$\text{e} \quad D = \{(r, \theta) \,|\, \alpha \leq \theta \leq \beta,\ h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}\,.$$



Integrais triplas em coordenadas cilíndricas

Sabemos que

$$\iiint_{\mathcal{B}} f(x,y,z)\,dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dA.$$

Em coordenadas polares, sabemos que $dA = r\,dr\,d\theta$.

Logo, em coordenadas cilíndricas, obtemos

$$\iiint_{\mathcal{B}} f(x,y,z)dV = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)}\int_{u_1(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)}^{u_2(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)\, r\; dzdrd\theta.$$

Integrais triplas em coordenadas cilíndricas

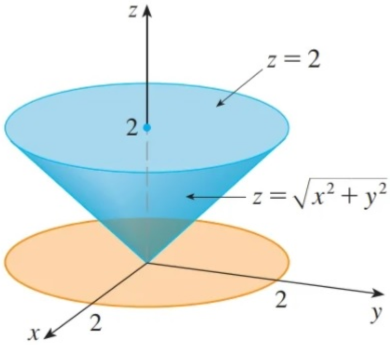
Exemplo

Vamos calcular $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)\,dzdydx$ *utilizando coordenadas cilíndricas.*

Integrais triplas em coordenadas cilíndricas

A região sólida é o cone

$E = \{(x, y, z) : -2 \leq x \leq 2, -\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2\}$ e sua projeção sobre o plano xy é o disco $x^2 + y^2 \leq 4$:



Integrais triplas em coordenadas cilíndricas

Em coordenadas cilíndricas, temos

$$E = \{(r, \theta, z) \,|\, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2, r \leq z \leq 2\}.$$

Integrais triplas em coordenadas cilíndricas

Em coordenadas cilíndricas, temos

$$E = \{(r, \theta, z) \,|\, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2, r \leq z \leq 2\}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)dzdydx &= \iiint_E (x^2+y^2)dV \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2 r^2 r\, dz\, dr\, d\theta \\ &= \cdots = \frac{16\pi}{5}.\end{aligned}$$

Exercícios

Seção 15.7 do Stewart (p. 934): 1–13, 15–27, 31, 32.