Cálculo em Várias Variáveis

Revisão

ICT-Unifesp

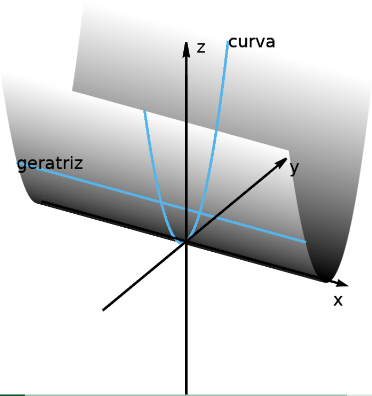
1. Revisão
   - Cilindros
   - Quádricas
   - Exercícios

Mais detalhes na Seção 12.6 do livro do Stewart. Recurso disponível online pela Biblioteca do ICT.

Cilindros

Definição

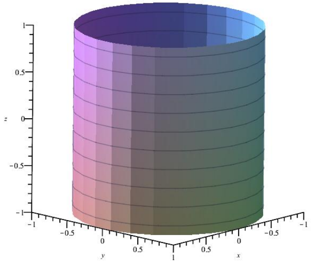
Uma **superfície cilíndrica** *ou um* **cilindro** *é o conjunto de todas as retas (***geratrizes***) paralelas a uma reta dada, que passam por uma determinada curva.*



Cilindros

Exemplo

A figura abaixo representa o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.



Revisão

Quádricas

Quádricas

Definição

Uma **quádrica** *é um conjunto de pontos em* $\mathbb{R}^3$ *que satisfaz a equação de segundo grau*

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

onde $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ *e* J *são números reais, sendo pelo menos um dos coeficientes* A, B, C *não-nulo.*

Quádricas

Definição

Uma **quádrica** *é um conjunto de pontos em* $\mathbb{R}^3$ *que satisfaz a equação de segundo grau*

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

onde $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ *e* J *são números reais, sendo pelo menos um dos coeficientes* A, B, C *não-nulo.*

Fazendo rotações, é possível eliminar os termos mistos e, por meio de translações, pode-se eliminar todos ou alguns termos lineares.

Quádricas

Definição

*Uma **quádrica** é um conjunto de pontos em $\mathbb{R}^3$ que satisfaz a equação de segundo grau*

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

onde $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ e J são números reais, sendo pelo menos um dos coeficientes A, B, C não-nulo.

Fazendo rotações, é possível eliminar os termos mistos e, por meio de translações, pode-se eliminar todos ou alguns termos lineares.

Para caracterizarmos uma superfície utilizamos **seções horizontais**, obtidas fazendo z constante, ou **seções verticais**, fazendo x ou y constante.

Exemplo (Elipsoide)

Um **elipsoide** *é uma superfície quádrica cuja equação tem a forma*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

com $a, b, c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Quádricas

Exemplo (Elipsoide)

Um **elipsoide** *é uma superfície quádrica cuja equação tem a forma*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

com $a, b, c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Fazendo um corte $z = k$, com $-c < k < c$, temos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{k^2}{c^2} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2} > 0,$$

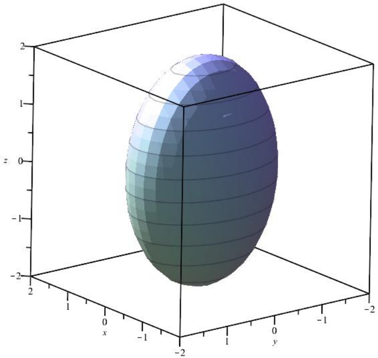
ou seja, uma elipse.

Cortes em outros eixos resultam em elipses também.

Quádricas

Exemplo

A figura abaixo representa o elipsoide $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{4}=1$.



Exemplo (Hiperboloide de uma folha)

Um **hiperboloide de uma folha** *é uma quádrica cuja equação é dada por*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

com $a, b, c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Quádricas

Exemplo (Hiperboloide de uma folha)

Um **hiperboloide de uma folha** *é uma quádrica cuja equação é dada por*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

com $a, b, c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Cortes horizontais $z = k$

Quádricas

Exemplo (Hiperboloide de uma folha)

Um **hiperboloide de uma folha** *é uma quádrica cuja equação é dada por*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Cortes horizontais $z = k$ são elipses. Cortes verticais, $x = k \neq \pm a$,

Quádricas

Exemplo (Hiperboloide de uma folha)

Um **hiperboloide de uma folha** *é uma quádrica cuja equação é dada por*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

com $a, b, c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Cortes horizontais $z = k$ são elipses. Cortes verticais, $x = k \neq \pm a$, tem-se

$$\frac{k^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \Longrightarrow \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{a^2} - 1,$$

ou seja, são hipérboles.

Exemplo (Hiperboloide de uma folha)

Um **hiperboloide de uma folha** *é uma quádrica cuja equação é dada por*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Cortes horizontais $z = k$ são elipses. Cortes verticais, $x = k \neq \pm a$, tem-se

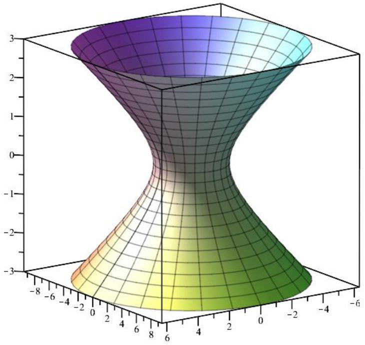
$$\frac{k^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \Longrightarrow \frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{a^2}-1,$$

ou seja, são hipérboles. Se $k = \pm a$, tem-se um par de retas.

Quádricas

Exemplo

A figura abaixo representa o hiperboloide de uma folha $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1.$



Quádricas

Exemplo (Hiperboloide de duas folhas)

Um **hiperboloide de duas folhas** *é uma quádrica cuja equação é dada por*

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Exemplo (Hiperboloide de duas folhas)

Um **hiperboloide de duas folhas** *é uma quádrica cuja equação é dada por*

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

com $a, b, c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Cortes horizontais $z = k$, com $|k| > c$ são elipses. Cortes verticais, por exemplo, $x = k$, tem-se

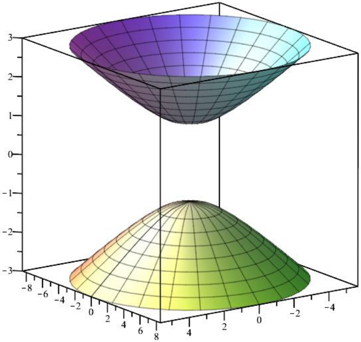
$$-\frac{k^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \Longrightarrow \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{a^2} + 1,$$

ou seja, são hipérboles.

Quádricas

Exemplo

A figura abaixo representa o hiperboloide de duas folhas $-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + z^2 = 1.$



Exemplo (Cone)

Um **cone** *é uma quádrica cuja equação é dada por*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

com $a, b, c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Quádricas

Exemplo (Cone)

Um **cone** *é uma quádrica cuja equação é dada por*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

com $a, b, c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Cortes horizontais $z = k$, $k \neq 0$ são elipses. Para cortes verticais, por exemplo, $x = k$, temos

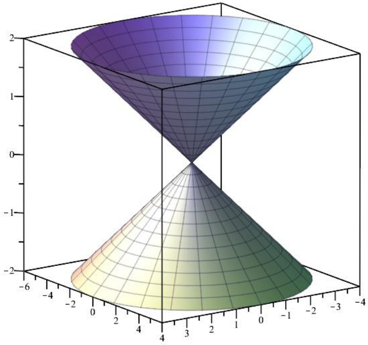
$$\frac{k^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \Longrightarrow \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{a^2}.$$

Se $k \neq 0$ são hipérboles; se $k = 0$, temos um par de retas.

Quádricas

Exemplo

A figura abaixo representa o cone $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 0$.



Exemplo (Paraboloide elíptico)

Um **paraboloide elíptico** *é uma quádrica cuja equação é dada por*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$$

com $a, b, c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Exemplo (Paraboloide elíptico)

Um **paraboloide elíptico** *é uma quádrica cuja equação é dada por*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$$

com $a, b, c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Cortes horizontais $z = k$, com $ck > 0$ são elipses. Cortes verticais, $x = k$, tem-se

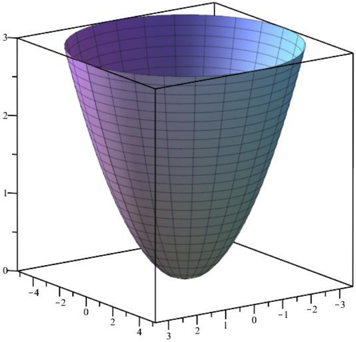
$$\frac{y^2}{b^2} = cz - \frac{k^2}{a^2} \Longrightarrow y^2 = b^2 c \left(z - \frac{k^2}{ca^2} \right),$$

ou seja, são parábolas.

Quádricas

Exemplo

A figura abaixo representa o paraboloide elíptico $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$.



Quádricas

Exemplo (Paraboloide hiperbólico)

Um **paraboloide hiperbólico** *é uma quádrica cuja equação é dada por*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Quádricas

Exemplo (Paraboloide hiperbólico)

Um **paraboloide hiperbólico** *é uma quádrica cuja equação é dada por*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$$

com $a, b, c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Cortes horizontais $z = k$ são hipérboles. Cortes verticais, $x = k$, tem-se

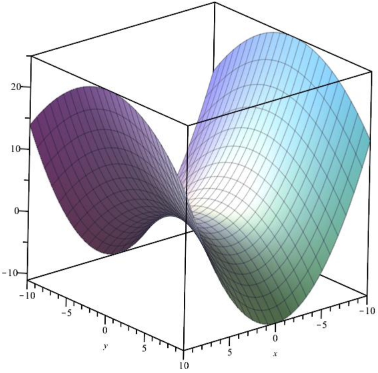
$$y^2 = b^2 \left(\frac{k^2}{a^2} - cz \right) \Longrightarrow y^2 = -b^2 c \left(z - \frac{k^2}{a^2 c} \right),$$

ou seja, são parábolas.

Quádricas

Exemplo

A figura abaixo representa o paraboloide hiperbólico $z = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$.



Exercícios

Seção 12.6 do Stewart: 1–30, 33, 35, 37, 39, 45, 46.