Cálculo em Várias Variáveis

Campos vetoriais.

ICT-Unifesp

Mais detalhes na Seção 16.1 do livro do Stewart.

Campos vetoriais

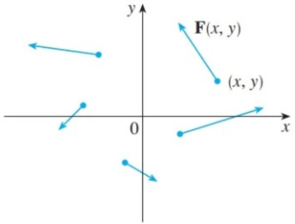
Campos vetoriais

Definição

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$. Um campo vetorial *em $\mathbb{R}^2$ é uma função $\vec{F}$ que associa a cada ponto $(x, y) \in D$ um vetor*

$$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\,\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j},$$

onde $P, Q : D \to \mathbb{R}^2$ são funções de duas variáveis, também chamadas de campos escalares.

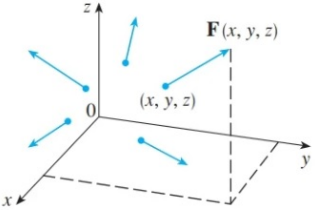


Definição

Seja $E \subset \mathbb{R}^3$. *Um* *campo vetorial* *em* $\mathbb{R}^3$ *é uma função* $\vec{F}$ *que associa a cada ponto* $(x, y, z) \in E$ *um vetor*

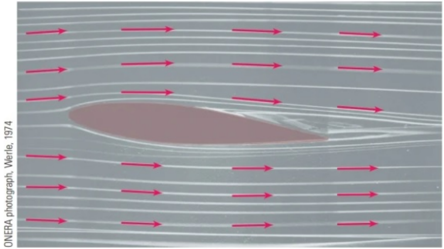
$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k},$$

onde $P, Q, R : E \to \mathbb{R}^3$ *são funções de três variáveis, também chamadas de* *campos escalares*.



Campos vetoriais estão presentes no dia-a-dia:

Força: campos gravitacionais
Velocidade/aceleração: escoamento de fluidos, ventos...
Eletricidade/magnetismo: campos elétricos, campos magnéticos...



Escoamento do ar por um aerofólio inclinado

Definição

Dizemos que o campo vetorial em $\mathbb{R}^2$

$$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\,\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j}$$

é contínuo se $P(x,y)$ *e* $Q(x,y)$ *são funções contínuas.*

Campos vetoriais

Definição

Dizemos que o campo vetorial em $\mathbb{R}^2$

$$\vec{F}(x,y) \,=\, P(x,y)\,\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j}$$

é contínuo se $P(x,y)$ *e* $Q(x,y)$ *são funções contínuas.*

Definição

Dizemos que o campo vetorial em $\mathbb{R}^3$

$$\vec{F}(x,y,z) \,=\, P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}$$

é contínuo se $P(x,y,z)$*,* $Q(x,y,z)$ *e* $R(x,y,z)$ *são funções contínuas.*

Campo gradiente: Se f é uma função de duas variáveis cujas derivadas parciais de primeira ordem existem, então seu gradiente ∇f, definido por

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\vec{j},$$

é um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$ denominado campo vetorial gradiente.

Campo gradiente: Se f é uma função de duas variáveis cujas derivadas parciais de primeira ordem existem, então seu gradiente ∇f, definido por

$$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\vec{j},$$

é um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$ denominado campo vetorial gradiente.

Analogamente, um campo gradiente em $\mathbb{R}^3$ é da forma

$$\nabla f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\vec{k}.$$

Definição

Um campo vetorial $\vec{F}$ é chamado de campo vetorial conservativo se ele for o gradiente de algum campo escalar f, ou seja, se existir uma função f tal que $\vec{F} = \nabla f$. Neste caso, f é denominada função potencial do campo vetorial $\vec{F}$.

Campos vetoriais

Exemplo

O campo (vetorial) gradiente da função $f(x,y) = x^2y - y^3$ *é*

$$\nabla f(x,y) \,=\, (2xy)\,\vec{i} + (x^2 - 3y^2)\,\vec{j}.$$

Logo, o campo vetorial

$$\vec{F}(x,y) \,=\, (2xy)\,\vec{i} + (x^2 - 3y^2)\,\vec{j}$$

é conservativo, pois ele é o gradiente da função escalar $f(x,\,y) \,=\, x^2y - y^3.$

Exercícios

Seção 16.1 do Stewart: 1–22, 25–34.