Séries numéricas

TESTE DA COMPARAÇÃO

Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ são séries de termos positivos, então:

Se $a_k \leq b_k$ para todo k e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ for convergente $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é convergente.

Se $a_k \geq b_k$ para todo k e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ for divergente $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é divergente.

Para séries semelhantes a p-série ou série geométrica utilizamos os testes de comparação.

SÉRIE GEOMÉTRICA: $\sum_{k=0}^{+\infty} ar^k, a \neq 0.$

Converge se $|r| < 1$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$

Diverge se $|r| \geq 1$

P-SÉRIE: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p}$

Converge se $p > 1$

Diverge se $p \leq 1$

TESTE DA INTEGRAL

Se f é uma função contínua, positiva e decrescente em $[b, +\infty)$ e $a_k = f(k)$, para $k \geq b, b \in \mathbb{N}$, então

$\int_b^{\infty} f(x)dx$ converge $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

$\int_b^{\infty} f(x)dx$ diverge $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

TESTE DA DIVERGÊNCIA

Se $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$, então $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

TESTE DA COMPARAÇÃO NO LIMITE

Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ são séries de termos positivos e $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = L$, então:

Se $L > 0, L \in \mathbb{R}$ (finito), ambas as séries convergem ou ambas as séries divergem.

Se $L = +\infty$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge, logo $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

Se $L = 0$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge, logo $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

TESTE DA RAZÃO (CONVERGÊNCIA ABSOLUTA)

Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ for uma série com termos não nulos (envolvendo fatoriais ou potências k-ésimas) e $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = L$, então:

Se $L < 1$, a série converge absolutamente.

Se $L > 1$ou $L = +\infty$, a série diverge.

Se $L = 1$, o teste é inconclusivo.

TESTE DAS SÉRIES ALTERNADAS

Se a série for da forma $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$ ou $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k$, a série converge se satisfizer as duas condições:

- $a_k \geq a_{k+1}$ para todo k
- $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

Não esqueça das séries telescópicas. É possível calcular a soma destas séries.