Cálculo em Várias Variáveis

Integrais triplas em coordenadas esféricas

ICT-Unifesp

1. Integrais triplas em coordenadas esféricas

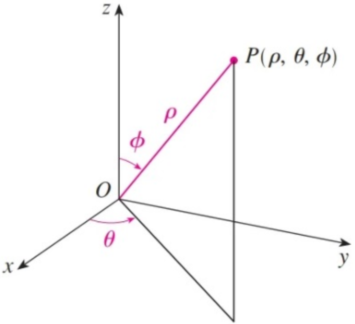
2. Exercícios

Mais detalhes na Seção 15.8 do livro do Stewart. Recurso disponível online pela Biblioteca do ICT.

Integrais triplas em coordenadas esféricas

Integrais triplas em coordenadas esféricas

Coordenadas esféricas:

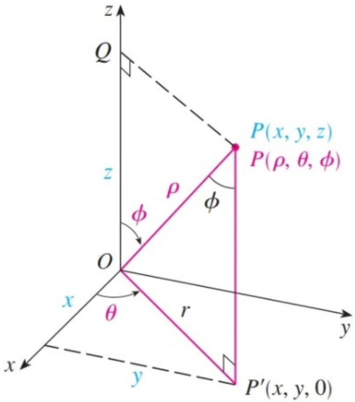


(ρ, θ, ϕ) são as coordenadas esféricas de um ponto $P(x, y, z)$,

$\rho \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq \phi \leq \pi$.

Integrais triplas em coordenadas esféricas

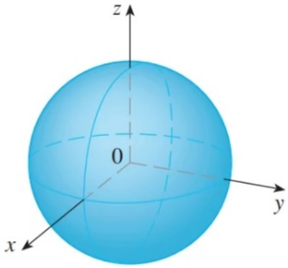
Relação entre coordenadas esféricas e cartesianas:



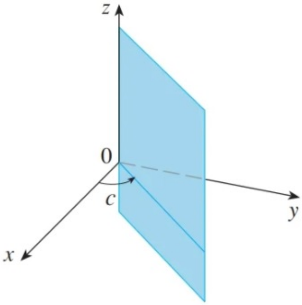
$$x = \rho \operatorname{sen}(\phi)\cos(\theta), \qquad y = \rho \operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\theta), \qquad z = \rho\cos(\phi)$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \rho \geq 0,\ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi \ \text{ e } \ 0 \leq \phi \leq \pi.$$

Integrais triplas em coordenadas esféricas

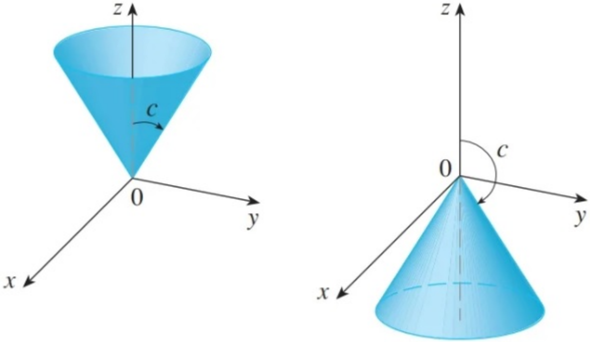


$\rho = c$, uma esfera



$\theta = c$, um semiplano

Integrais triplas em coordenadas esféricas



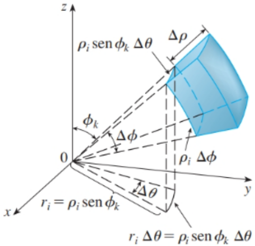
$0 < c < \pi/2$ $\qquad$ $\pi/2 < c < \pi$

$\phi = c$, um cone

Integrais triplas em coordenadas esféricas

O correspondente a um retângulo é a cunha esférica

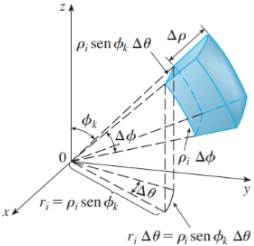
$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \,|\, a \le \rho \le b, \alpha \le \theta \le \beta, c \le \phi \le d\}.$$



Integrais triplas em coordenadas esféricas

O correspondente a um retângulo é a cunha esférica

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \,|\, a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d\}.$$



Em coordenadas esféricas temos (ver Stewart, Seção 15.8)

$$\iiint_E f(x,y,z)dV =$$

$$\int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\underbrace{\rho \mathrm{sen}(\phi)\cos(\theta)}_{x}, \underbrace{\rho \mathrm{sen}(\phi)\mathrm{sen}(\theta)}_{y}, \underbrace{\rho \mathrm{sen}(\phi)}_{z})\, \underbrace{\rho^2 \mathrm{sen}(\phi)\, d\rho d\theta d\phi}_{dV}.$$

Integrais triplas em coordenadas esféricas

Exemplo

Calcule o volume da esfera de raio $R > 0$.

Integrais triplas em coordenadas esféricas

Exemplo

Calcule o volume da esfera de raio $R > 0$.

Queremos calcular $\iiint_B dV$, onde

$$B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

Usando coordenadas esféricas, temos

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \operatorname{sen}\phi \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$$

Integrais triplas em coordenadas esféricas

Assim, $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e a nova região de integração é

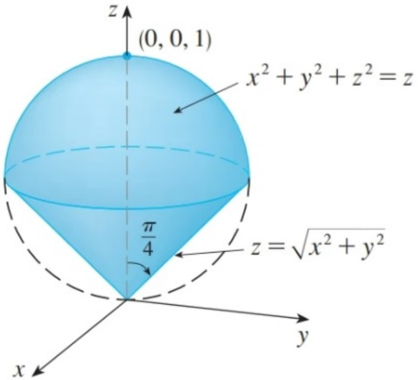
$$R = \{(\rho, \theta, \phi) \,|\, 0 \leq \rho \leq r, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\iiint_B dV &= \iiint_R \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho d\theta d\phi \\ &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\phi d\theta d\rho \\ &= \int_0^r \int_0^{2\pi} (-\rho^2 \cos \phi)\Big|_0^{\pi} d\theta d\rho = \cdots = \frac{4}{3}\pi r^3.\end{aligned}$$

Exemplo

Vamos determinar o volume do sólido que fica acima do cone $z^2 = x^2 + y^2$ *e abaixo da esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = z$.



Integrais triplas em coordenadas esféricas

A esfera passa pela origem e tem centro $(0, 0, 1/2)$. Em coordenadas esféricas podemos representar esta esfera como

$$\rho^2 = \rho\cos\phi \Longleftrightarrow \rho = \cos\phi.$$

Integrais triplas em coordenadas esféricas

A esfera passa pela origem e tem centro $(0, 0, 1/2)$. Em coordenadas esféricas podemos representar esta esfera como

$$\rho^2 = \rho \cos \phi \Longleftrightarrow \rho = \cos \phi.$$

A equação do cone em coordenadas esféricas é

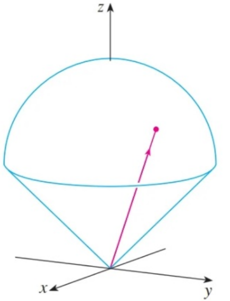
$$\rho \cos \phi = \sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \cos^2\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}^2\theta} = \rho \operatorname{sen} \phi,$$

o que é equivalente a $\phi = \pi/4$.

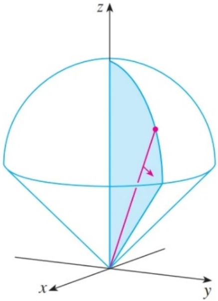
Integrais triplas em coordenadas esféricas

Em coordenadas esféricas o sólido é descrito por

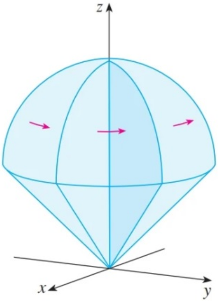
$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \le \rho \le \cos\theta, 0 \le \phi \le \pi/4, 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$



ρ varia de 0 a cos ϕ, enquanto ϕ e θ são constantes.



ϕ varia de 0 a $\pi/4$, enquanto θ é constante.



θ varia de 0 a 2π.

Integrais triplas em coordenadas esféricas

Portanto,

$$
\begin{aligned}
V(E) &= \iiint_E dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho d\phi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\phi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{\cos\phi} d\phi \\
&= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\phi \cos^3\phi \, d\phi \\
&= \frac{2\pi}{3} \left[-\frac{\cos^4\phi}{4}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}
$$

Exercícios

Seção 15.8 do Stewart (p. 940): 1–38, 43–45.