Universidade Federal do ABC
Estudos Continuados Emergenciais
1º Quadrimestre de 2020
Professora Dra. Ana Claudia da Silva Moreira

Funções de Várias Variáveis

Parte 8 - Aplicações de Integrais Múltiplas

1 Introdução

Já vimos como calcular área de regiões do plano,

$$\text{Área}(A) = \iint\limits_{A} dxdy,$$

e volume de sólidos compreendidos entre superfícies e regiões planas

$$\text{Volume}(S) = \iint\limits_{A} f(x,y)dxdy, \quad \text{se } f(x,y) \geq 0,$$

usando integrais duplas.

também já vimos que podemos calcular volume de sólidos usando integrais triplas

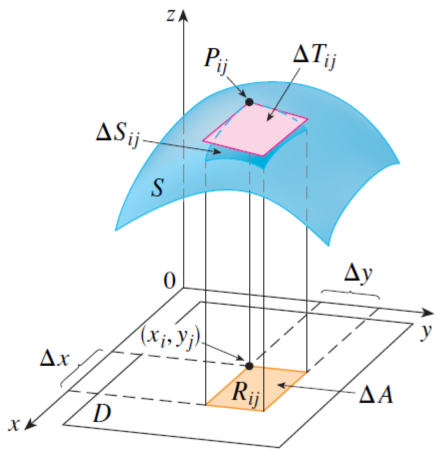
$$\text{Volume}(S) = \iiint\limits_{S} dxdydz.$$

Neste material, estudaremos mais aplicações de integrais múltiplas, o cálculo de área de superfícies usando integrais duplas, o cálculo de massa de um objeto, coordenadas do centro de massa e o cálculo do momento de inércia.

2 Cálculo de área de superfícies

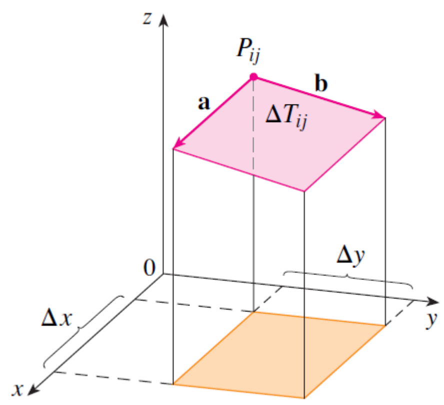
Quando estudamos integração de funções de uma variável, aprendemos a calcular área de superfícies de revolução. Agora, aprenderemos como usar integrais duplas para calcular a área de superfícies que são gráfico de uma função de duas variáveis $z = f(x,y)$.

Seja $z = f(x,y)$ uma função de duas variáveis de classe $\mathcal{C}^1$. O gráfico de f é uma superfície S no $\mathbb{R}^3$. A ideia para se calcular a área de S é aproximar este valor pela soma das áreas dos retângulos tangentes à superfície.



$$\text{Área}(S) = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{nm} \Delta T_{ij}.$$

Lembremos que as derivadas parciais de f são as inclinações das retas tangentes, em cada ponto do gráfico de f, às curvas coordenadas, isto é, se a e b são vetores com ponto inicial em P_{ij}, ao longo do paralelogramo de área ΔT_{ij},



então, $a = (\Delta x, 0, f_x(x_i, x_j)\Delta x)$ e $b = (\Delta y, 0, f_x(x_i, x_j)\Delta y)$ e

$$\Delta T_{ij} = \|a \times b\|.$$

Fazendo as contas e tomando o limite, temos

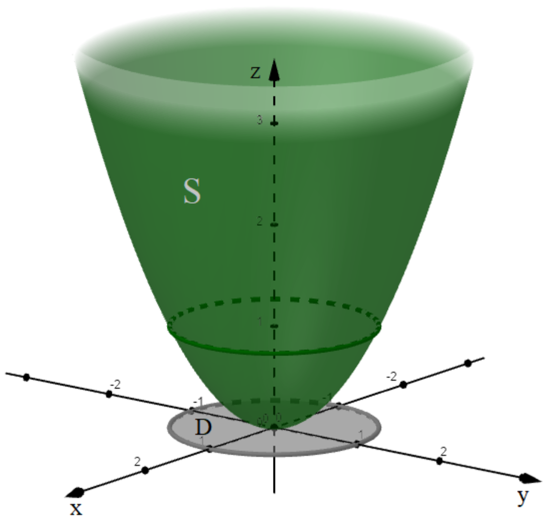
$$\text{Área}(S) = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{nm} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dA.$$

Logo, a área da superfície dada pelo gráfico da função de classe $\mathcal{C}^1$, $z = f(x,y)$, para $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ é calculada por

$$\boxed{\text{Área}(S) = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy}$$

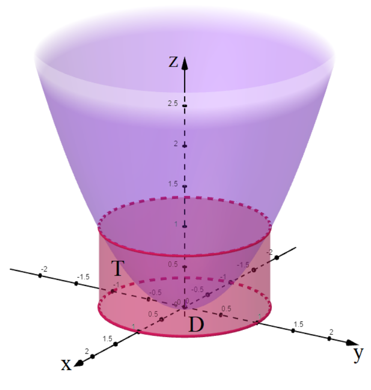
Exemplo 1. *Calcule a área da porção do paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está abaixo do plano $z = 1$.*

Solução. Temos um paraboloide de revolução em torno do eixo-z, com vértice na origem e abertura voltada para cima. Para cada valor de z temos um círculo, isto é, os planos paralelos ao plano-xy interceptam o paraboloide em círculos de raio $\sqrt{z}$. Em particular, o plano $z = 1$, intercepta o paraboloide em um círculo, de centro em $(0,0,1)$ e raio 1 cuja projeção sobre o plano-xy é o círculo centrado na origem de raio 1. Portanto, a superfície cuja área queremos calcular é dada pelo gráfico da função $f(x,y) = x^2 + y^2$, com $(x,y) \in D$, onde D é o disco de centro em $(0,0,0)$ e raio 1, como mostra a figura abaixo.



Lembre que, se integrarmos a função f sobre o disco D, estamos calculando o volume do sólido T, que está abaixo do paraboloide e acima do disco, como mostramos na observação feita após o Exemplo 4 das Notas de Aula sobre Integrais Triplas. Obtivemos

$$\text{Volume}(T) = \iint\limits_D x^2 + y^2\, dxdy = \frac{\pi}{2}$$



Para calcular a área desta porção do paraboloide, fazemos

$$\begin{aligned}
\text{Área}(S) &= \iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\ dxdy\\
&= \iint\limits_D \sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}\ dxdy\\
&= \iint\limits_D \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\ dxdy\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}\ drd\theta\\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}\ dr\\
&= \theta\Big|_0^{2\pi}\cdot \frac{\sqrt{(4r^2+1)^3}}{12}\Bigg|_0^1\\
&= 2\pi\cdot\frac{5\sqrt{5}-1}{12}\\
&= \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)
\end{aligned}$$

3 Cálculo de massa

Dada uma função densidade superficial de massa (uma função contínua e positiva), $\delta(x,y)$, associada à um conjunto $B\subset\mathbb{R}^2$, compacto, podemos calcular a massa de B fazendo

$$\text{Massa}(B)=\iint\limits_B \delta(x,y)\ dA.$$

Para encurtar, também se escreve

$$\text{Massa}(B)=\iint\limits_B\ dm,$$

onde

$$dm=\delta(x,y)\ dxdy.$$

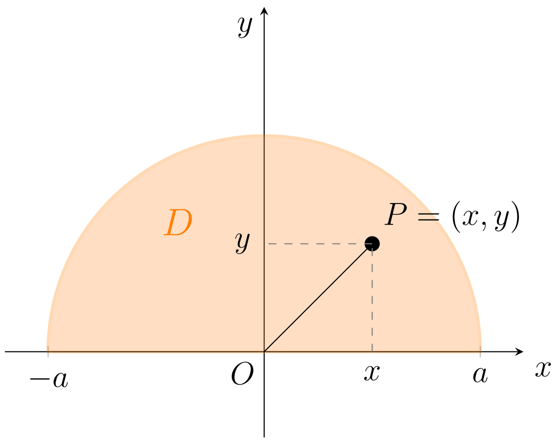
Lembre que, o centro de massa de um objeto é a posição "média" com respeito à distribuição de massa do objeto, o ponto de equilíbrio. O centro de massa de B é o ponto

(x_c, y_c), onde as coordenadas são calculadas por

$$x_c = \frac{\displaystyle\iint_B x\ dm}{\text{Massa}(B)}, \qquad y_c = \frac{\displaystyle\iint_B y\ dm}{\text{Massa}(B)}.$$

Exemplo 2. *Calcule a massa e o centro de massa de uma chapa em forma de semi-círculo cuja densidade superficial em um ponto P é proporcional à distância de P à origem.*

Solução. Esboçamos a chapa, que é metade de um disco,



A distância de P à origem é dada por

$$\text{dist}(P, O) = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

o enunciado diz que a função densidade é proporcional à distância, então

$$\delta(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2},$$

para $k \in \mathbb{R}$.

A massa da chapa é dada por

$$\begin{aligned}\text{Massa}(D) &= \iint_D \delta(x, y)\ dxdy = \iint_D k\sqrt{x^2 + y^2}\ dxdy \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^a kr^2\ drd\theta = k\int_0^\pi \frac{r^3}{3}\bigg|_0^a\ d\theta \\ &= k\int_0^\pi \frac{a^3}{3}\ d\theta = \frac{k\pi a^3}{3}.\end{aligned}$$

Para obtermos as coordenadas do centro de massa, calculamos

$$\iint\limits_C x\sqrt{x^2+y^2}\ dxdy = \int_0^\pi \int_0^a r^3 \cos\theta\ drd\theta = \int_0^\pi \frac{r^4}{4}\cos\theta \Big|_0^a d\theta$$
$$= \int_0^\pi \frac{a^4}{4}\cos\theta\ d\theta = \frac{a^4}{4}\operatorname{sen}\theta \Big|_0^\pi = 0,$$

e

$$\iint\limits_C y\sqrt{x^2+y^2}\ dxdy = \int_0^\pi \int_0^a r^3 \operatorname{sen}\theta\ drd\theta = \int_0^\pi \frac{r^4}{4}\operatorname{sen}\theta \Big|_0^a d\theta$$
$$= \int_0^\pi \frac{a^4}{4}\operatorname{sen}\theta\ d\theta = -\frac{a^4}{4}\cos\theta \Big|_0^\pi = \frac{a^4}{2},$$

donde concluímos que

$$x_c = \frac{3k\cdot 0}{k\pi a^3} = 0, \qquad y_c = \frac{3ka^4}{2k\pi a^3} = \frac{3a}{2\pi},$$
$$\text{Centro de massa } = \left(0, \frac{3a}{2\pi}\right).$$

☕

Seja $B \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto fechado e limitado (compacto). Se $\delta : B \to \mathbb{R}$ é a função de densidade volumétrica associada a B, então

$$\text{Massa}(B) = \iiint\limits_B \delta(x,y,z)\ dV,$$

ou, equivalentemente,

$$\text{Massa}(B) = \iiint\limits_B\ dm,$$

com $dm = \delta(x,y,z)\ dxdydz$.

Exemplo 3. *Calcule a massa do cilindro*

$$C : x^2+y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

cuja densidade é dada por $\delta(x,y,z) = x^2$.

Solução. A massa do cilindro sólido $C : x^2+y^2 \leq 1$ é obtida pela integral tripla da função densidade sobre o cilindro. Assim, basta calcularmos

$$
\begin{aligned}
\text{Massa}(C) &= \iiint\limits_C x^2 \, dxdydz = \iint\limits_D \left(\int_0^1 x^2 \, dz \right) dxdy \\
&= \iint\limits_D x^2 z \Big|_0^1 \, dxdy = \iint\limits_D x^2 \, dxdy \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 \cos^2 \theta) r \, drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \cos^2 \theta \, drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{r^4}{4} \cos^2 \theta \Big|_0^1 \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \cos^2 \theta \, d\theta \\
&= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \, d\theta \\
&= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (1+\cos(2\theta)) \, d\theta \\
&= \frac{1}{8} \left[\theta + \frac{\text{sen}(2\theta)}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

Na terceira linha, escrevemos a integral dupla sobre o disco D em coordenadas polares. Perceba que poderíamos ter escrito a integral tripla em coordenadas cilíndricas, desde o início, e chegaríamos à este ponto com a mesma expressão. ☕

O centro de massa de $B \subset \mathbb{R}^3$ é o ponto (x_c, y_c, z_c), cujas coordenadas podem ser calculadas de maneira análoga ao caso bidimensional,

$$
x_c = \frac{\iint\limits_B x \, dm}{\text{Massa}(B)}, \qquad y_c = \frac{\iint\limits_B y \, dm}{\text{Massa}(B)}, \qquad z_c = \frac{\iint\limits_B z \, dm}{\text{Massa}(B)}.
$$

4 Momento de inércia

O momento de inércia traduz o grau de dificuldade de se alterar o estado de movimento de uma partícula em rotação e é dado por

$$
I = mr^2,
$$

onde m é a massa e r é a distância da partícula ao eixo de rotação.

Para um corpo sólido S, bidimensional, temos

$$I(S) = \iint_S r^2 dm.$$

Exemplo 4. *Calcule o momento de inércia de um disco com densidade $\delta(x,y) = 20$ e raio igual a 2 metros, com centro na origem.*

Solução. O disco mencionado no enunciado é dado por

$$D : x^2 + y^2 \leq 4$$

e, para qualquer ponto $P = (x,y)$ do disco, o raio é

$$r = \text{dist}(P,O) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Assim, o momento de inércia do disco é dado por

$$\begin{aligned} I(D) &= \iint_D r^2 dm = \iint_D (x^2+y^2)\delta(x,y)\ dxdy \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 20r^3\ drd\theta = \int_0^{2\pi} 20\frac{r^4}{4}\bigg|_0^2\ d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 80\ d\theta = 160\pi. \end{aligned}$$

☕

Para um corpo S, com densidade volumétrica $\delta(x,y,z)$, o momento de inércia pode ser calculado de maneira análoga

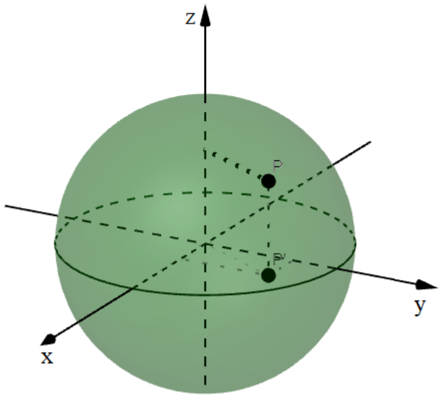
$$I(S) = \iiint_S r^2 dm.$$

Exemplo 5. *Calcule o momento de inércia uma esfera homogênea de raio R em relação a um eixo passando pelo seu centro.*

Solução. Considere uma esfera S centrada na origem do $\mathbb{R}^3$ e o eixo-z. Como S é homogênea, a densidade volumétrica de S é constante

$$\delta(x,y,z) = k,$$

$k \in \mathbb{R}$. A distância de um ponto P, na esfera, até o eixo-z é dada por $r = \sqrt{x^2+y^2}$, pois



Assim, o momento de inércia de S será calculado por

$$I(S) = \iiint\limits_S (x^2 + y^2) dm,$$

que podemos traduzir, em coordenadas esféricas, como

$$\begin{aligned}
I(S) &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R} \left((r \cos\theta \operatorname{sen}\phi)^2 + (r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi)^2 \right) kr^2 \operatorname{sen}\phi \; dr d\theta d\phi \\
&= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R} kr^4 \operatorname{sen}^3\phi \; dr d\theta d\phi \\
&= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} k\frac{r^5}{5} \operatorname{sen}^3\phi \Big|_0^R \; d\theta d\phi \\
&= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} k\frac{R^5}{5} \operatorname{sen}^3\phi \; d\theta d\phi \\
&= \int_0^{\pi} \frac{2\pi k R^5}{5} \operatorname{sen}^3\phi \; d\phi \\
&= \frac{2\pi k R^5}{5} \left[-\cos\phi + \frac{1}{3}\cos^3\phi \right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2\pi k R^5}{5} \left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right) \\
&= \frac{8\pi k R^5}{15}
\end{aligned}$$

Aviso: este material está em sua primeira edição. Caso você encontre algum erro, inconsistência ou passagem duvidosa, por favor, entre em contato para que possamos esclarecer, melhorar e/ou corrigir o material. Agradeço e desejo bons estudos.