Universidade Federal do ABC
Estudos Continuados Emergenciais
1º Quadrimestre de 2020
Professora Dra. Ana Claudia da Silva Moreira

Funções de Várias Variáveis

Parte 3 - Máximos e Mínimos

1 Objetivo

O tema dessa segunda semana de ECE é o estudo de máximos e mínimos de funções de várias variáveis. Neste material pretendemos expor todo o conteúdo, oral e escrito, que seria dado nas aulas presenciais sobre este assunto. O conteúdo engloba a teoria formal, explicações e exemplos. O nosso objetivo, ao final desta leitura, é que você seja capaz de estudar a existência de pontos onde uma função dada atinge valores máximos e mínimos em seu domínio, sem necessidade de conhecer seu gráfico.

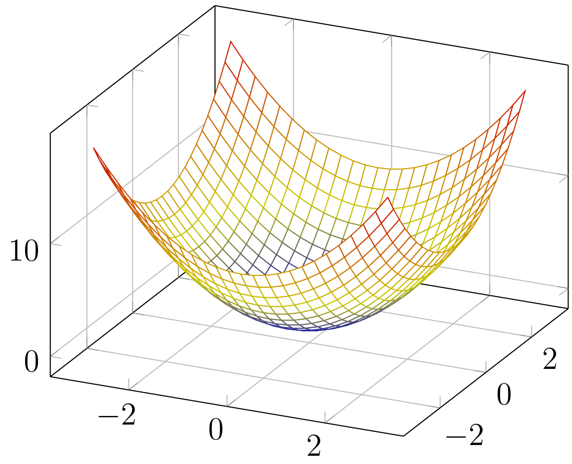
Não é fascinante ter informações sobre "o relevo" de uma superfície em $\mathbb{R}^3$, sem precisar esboçar o gráfico? Ainda mais fascinante é poder "visualizar" essas elevações e depressões em gráficos no $\mathbb{R}^4$, não lhe parece? Então, vamos começar nossos estudos!

2 Máximos e Mínimos

Quando olhamos para o gráfico do campo escalar $f(x, y) = x^2 + y^2$ (abaixo), fica fácil ver que no ponto $(0, 0)$ a função f assume seu menor valor, isto é,

$$f(x, y) > f(0, 0), \text{ para todo } (x, y) \neq (0, 0).$$

Gráfico de $f(x,y) = x^2 + y^2$,



Mas, nem sempre temos acesso ao gráfico de um campo escalar, especialmente se estamos falando de campos com domínios em $\mathbb{R}^3$. Nesta etapa de nossos estudos, veremos como utilizar as noções de derivação de um campo escalar para estudar máximos e mínimos de campos escalares com domínios em $\mathbb{R}^n, n = 2, 3$.

Começamos definindo, formalmente, o que queremos dizer com máximos e mínimos de um campo escalar.

Definição 1. *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ um campo escalar, com $D \subset \mathbb{R}^n$ o domínio de f, e seja $(x_0, y_0) \in A \subset D$.*

1. *Dizemos que (x_0, y_0) é um ponto de máximo de f em A se*
$$f(x,y) \leq f(x_0, y_0), \text{ para todo } (x,y) \in A.$$
Nesse caso, $f(x_0, y_0)$ será chamado valor máximo de f em A.

2. *Dizemos que (x_0, y_0) é um ponto de máximo global ou absoluto de f, se*
$$f(x,y) \leq f(x_0, y_0), \text{ para todo } (x,y) \in D.$$
Nesse caso, $f(x_0, y_0)$ será chamado valor máximo de f.

3. *Dizemos que $(x_0, y_0) \in D$ é um ponto de máximo local de f, se existe uma bola aberta B de centro (x_0, y_0) tal que*
$$f(x,y) \leq f(x_0, y_0), \text{ para todo } (x,y) \in B \cap D.$$

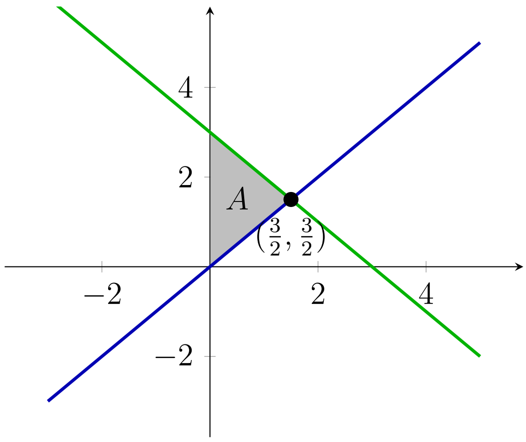
As definições para ponto de mínimo e valor mínimo local/global são análogas, basta inverter o sinal de desigualdade.

Vejamos um primeiro exemplo.

Exemplo 1. *Estude a existência de pontos onde* $f(x, y) = 2x - y$ *atinge seus valores máximo e mínimo, no conjunto*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3, y \geq x\}.$$

Solução. Observe que o domínio de f é todo o $\mathbb{R}^2$, mas queremos investigar a existência de pontos de máximo e/ou mínimo no subconjunto A do domínio de f. A região A é a região compreendida acima do eixo-x ($y \geq 0$), à direita do eixo-y ($x \geq 0$), abaixo da reta $y = 3 - x$ ($y \leq 3 - x$) e acima da reta $y = x$ ($y \geq x$), isto é, a região A consiste no triângulo fechado (inclui o bordo, ou seja, os vértices e arestas) que aparece na figura abaixo:



A reta $y = 3 - x$ aparece em verde na figura e a reta $y = x$ aparece em azul.

Vamos observar o comportamento de f no bordo do conjunto A, mais especificamente, nos vértices do triângulo:

- Em $(0, 0)$, temos $f(0, 0) = 0$. Se calcularmos a curva de nível de f para $c = 0$, sabemos que f vale zero ao logo de toda a reta

$$2x - y = 0 \;\Rightarrow\; y = 2x.$$

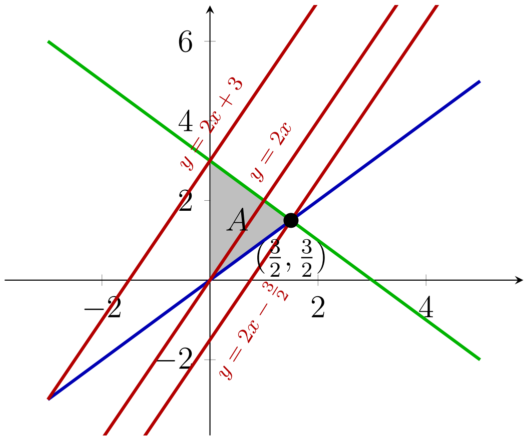
- Em $(0, 3)$, temos $f(0, 3) = -3$. E f vale -3 ao logo de toda a reta

$$2x - y = -3 \;\Rightarrow\; y = 2x + 3.$$

- Analogamente, calculamos $f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$ e vemos que f vale $\frac{3}{2}$ ao longo da reta

$$2x - y = \frac{3}{2} \;\Rightarrow\; y = 2x - \frac{3}{2}.$$

Na figura abaixo, você pode ver essas curvas de nível plotadas em vermelho:



Observamos, pela figura, que o valor de f cresce na direção ortogonal às curvas de nível, da reta $y = 2x + 3$ (mais à esquerda) para a reta $y = 2x - \frac{3}{2}$ (mais à direita). Assim, somos levados a acreditar que o ponto do conjunto A onde f atinge seu valor mínimo seja $(0, 3)$ e que o ponto $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ seja um ponto de máximo de f em A. Dessa forma, o valor mínimo que f atinge em A é -3 e seu valor máximo é $\frac{3}{2}$.

De fato, note que, se $(x, y) \in A$, então $0 \le x \le \frac{3}{2}$ e $0 \le y \le 3$, logo

$$f(x,y) - f(0,3) = \underbrace{2x}_{\in[0,3]} + \underbrace{3 - y}_{\in[0,3]} \ge 0 \;\Rightarrow\; f(x,y) \ge f(0,3)$$

e

$$f(x,y) - f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = 2x - y - \frac{3}{2} = -\underbrace{\left(\frac{3}{2} - x\right)}_{\ge 0} - \underbrace{(y - x)}_{\ge 0} \le 0 \;\Rightarrow\; f(x,y) \le f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right),$$

para todo $(x, y) \in A$.

Os pontos de máximo e mínimo de uma função f são chamados *pontos extremos* de f. O teorema a seguir dá uma condição necessária para que um *ponto interior* (revise Noções Topológicas) ao domínio de f seja um ponto extremo de f.

Teorema 1. *Seja (x_0, y_0) um ponto interior do domínio de f e suponhamos que*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \qquad e \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

existam. Se (x_0, y_0) é um ponto extremo local de f, então

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \qquad e \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Em particular, o teorema acima garante que, se f é uma função diferenciável em um ponto extremo (x_0, y_0), interior ao seu domínio, então o plano tangente ao gráfico de f em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ será paralelo ao plano-xy:

$$\boxed{z - f(x_0, y_0) = 0 \;\Rightarrow\; z = f(x_0, y_0)}$$

Pense: Você se lembra que, para funções de uma variável, a reta tangente ao gráfico num ponto de máximo ou de mínimo era paralela ao eixo-x? O que mais acontecia nesses pontos?

Definição 2. *Um ponto (x_0, y_0), interior ao domínio de f, é chamado ponto crítico de f, se*

$$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0).$$

ou se pelo menos uma das derivadas parciais de primeira ordem de f não existe em (x_0, y_0).

Assim, os candidatos à pontos extremos (pontos de máximo ou mínimo) de um campo escalar diferenciável f, serão seus pontos críticos:

$$(x_0, y_0) \text{ é um ponto extremo} \overset{Teo.1}{\Longrightarrow} \nabla f(x_0, y_0) = (0, 0),$$

$$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0) \overset{Def.2}{\Longrightarrow} (x_0, y_0) \text{ é ponto crítico (não neces. ponto extremo).}$$

Exemplo 2. *Seja $f(x, y) = x^4 + y^4$. Encontre os pontos de máximo e/ou mínimo de f em seu domínio.*

Solução. É sempre importante identificarmos o domínio do campo escalar, que neste caso é todo o $\mathbb{R}^2$. Calculamos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3.$$

Observamos que

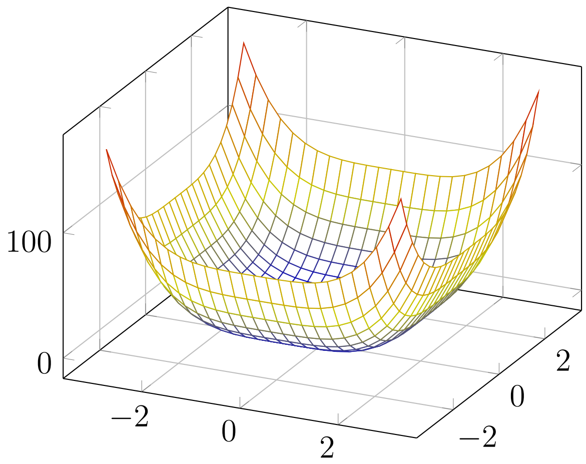
$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \;\Leftrightarrow\; (x, y) = (0, 0).$$

Assim, $(0, 0)$ é o único ponto crítico de f. Como

$$f(x, y) = x^4 + y^4 \geq 0 = f(0, 0), \;\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

concluímos que $(0, 0)$ é um ponto de mínimo global.

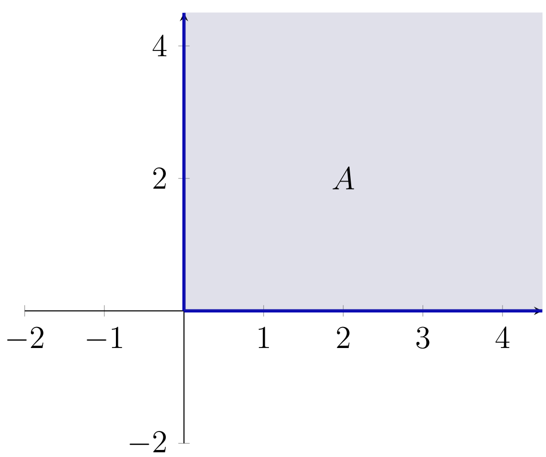
Gráfico de $f(x, y) = x^4 + y^4$,



☕

Exemplo 3. *Seja* $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *um campo escalar dado por* $f(x, y) = x^2y + 3x$*, onde* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$*. Encontre os máximos e/ou mínimos de* f *em* A*.*

Solução. Primeiro, vamos identificar (esboçar) o conjunto A. Note que A consiste da região do plano à direita do eixo-y ($x \geq 0$) e acima do eixo-x ($y \geq 0$):



Calculamos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy + 3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2.$$

Observe que f não tem pontos críticos. De fato,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \iff x^2 = 0 \iff x = 0,$$

agora, se $x = 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3,$$

para qualquer valor de y. Portanto, $\nabla f(x, y)$ nunca se anula.

Pelo Teorema 1, podemos afirmar que nenhum *ponto interior* ao domínio de f é um ponto extremo de f. Assim, se estivéssemos considerando $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, poderíamos afirmar que f não tem extremos locais (ou globais). No entanto, o exercício pede que investiguemos a existência de extremos de f no conjunto A. O Teorema 1 garante que f não tem extremos *no interior* do conjunto A. Devemos, então, lançar nossa atenção ao bordo (ou fronteira) desse conjunto: a porção não-negativa dos eixos x e y.

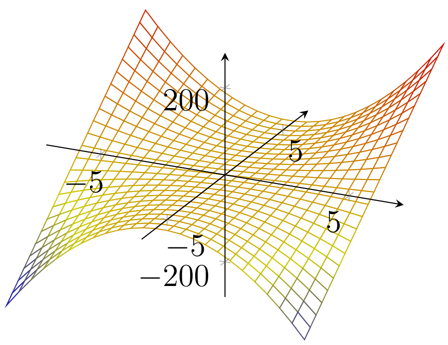
Se consideramos os pontos sobre o semi-eixo-x, não-negativo, temos $f(x, 0) = 3x$. Vemos que f se anula quando $x = 0$ e cresce a medida que os valores de x aumentam. Se, por outro lado, consideramos os pontos sobre o semi-eixo-y, não-negativo, temos $f(0, y) = 0$. Como

$$f(x, y) = x^2y + 3x \geq 0 = f(0, y), \ \forall (x, y) \in A,$$

vemos que f atinge seu valor mínimo, no conjunto A, nos pontos do tipo $(0, y)$, com $y \geq 0$. Em particular, a origem é um ponto de mínimo para f em A.

É importante observar que este resultado não contraria o Teorema 1, pois os pontos $(0, y)$ não são pontos interiores ao conjunto A.

Gráfico de $f(x, y) = x^2y + 3x$ em $\mathbb{R}^2$,



Obs.: Na figura, o conjunto A aparece “atrás”. Preste atenção à orientação dos eixos: o eixo-x está apontando para a direita e o eixo-y está apontando para trás.

Pense: Estude a existência de máximos e mínimos para função do Exemplo 1 à luz do Teorema 1 e da Definição 2. Note que o gradiente de f nunca se anula. Quais conclusões você pode tirar?

Teorema 2. *Seja $f(x, y)$ um campo escalar de classe $\mathcal{C}^2$ e seja (x_0, y_0) um ponto crítico interior ao domínio de f.*

1. *Se (x_0, y_0) é um ponto de máximo local de f, então*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \leq 0 \qquad e \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \leq 0$$

2. *Se (x_0, y_0) é um ponto de mínimo local de f, então*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \geq 0 \qquad e \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \geq 0$$

Demonstração. Faremos a demonstração do item 1. A demonstração do item 2 é análoga. Defina a função $g(x) = f(x, y_0)$. Então, temos

- como f é de classe $\mathcal{C}^2$, também g é de classe $\mathcal{C}^2$,
- como (x_0, y_0) é um ponto interior ao domínio de f, também x_0 é um ponto interior do domínio de g, e
- se (x_0, y_0) é um ponto de máximo local de f, também x_0 é um ponto de máximo local de g.

Como estudamos em funções de uma variável, se x_0 é um ponto de máximo local de g, temos $g'(x_0) = 0$ e $g''(x_0) \leq 0$, isto é,

$$g''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{g'(x_0 + h) - g'(x_0)}{h} \leq 0,$$

onde

$$g'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),$$

implica

$$g''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0),$$

isto é,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \ \text{ e } \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \leq 0.$$

Repetindo o mesmo raciocínio para a função $h(y) = f(x_0, y)$, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \ \text{ e } \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \leq 0$$

e finalizamos a demonstração do item 1 do Teorema.

Observe que o teorema anterior dá apenas condições necessárias para que um ponto (x_0, y_0) seja ponto de máximo local ou ponto de mínimo local de f. É uma via de mão única. A recíproca do teorema não é, necessariamente, verdadeira.

Mais explicitamente, se (x_0, y_0) é um ponto crítico de f e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \leq 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \leq 0,$$

por exemplo, não podemos afirmar que (x_0, y_0) é um ponto de máximo local de f. Sabemos apenas que ele satisfaz as mesmas características que um ponto de máximo certamente satisfaria. Assim, (x_0, y_0) pode ser um ponto de máximo local de f. Bem, certamente, (x_0, y_0) não é um ponto de mínimo de f.

Exemplo 4. *Seja $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 4$. Estude a existência de máximos e/ou mínimos para a função f à luz do Teorema 2.*

Solução. Qual é o domínio de f? Calculamos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3.$$

Temos

$$3x^2 - 3 = 0 \iff x = \pm 1,$$
$$3y^2 - 3 = 0 \iff y = \pm 1.$$

Assim, $(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$ são os pontos críticos de f. Agora, avaliamos as derivadas parciais de segunda ordem de f,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y,$$

nos pontos críticos,

$$\begin{array}{ccll}
(1,1) & \Rightarrow & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 6 > 0, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 6 > 0, \\
(1,-1) & \Rightarrow & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1) = 6 > 0, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-1) = -6 < 0, \\
(-1,1) & \Rightarrow & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,1) = -6 < 0, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,1) = 6 > 0, \\
(-1,-1) & \Rightarrow & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) = -6 < 0, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,-1) = -6 < 0.
\end{array}$$

À luz do Teorema 2, podemos afirmar que $(1, -1)$ e $(-1, 1)$ não são pontos extremos de f. Já $(1, 1)$ pode ser um ponto de mínimo local de f e $(-1, -1)$ pode ser um ponto de máximo local de f. ☕

Definição 3. *Seja $f(x,y)$ um campo escalar de classe $\mathcal{C}^2$. A matriz dada por*

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

é chamada matriz hessiana[1] *de f. O determinante dessa matriz hess é conhecido como hessiano de f. Note que, como f é de classe $\mathcal{C}^2$, temos*

$$hess(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2.$$

A matriz hessiana desempenha um papel fundamental na classificação dos pontos críticos de um campo escalar.

Teorema 3. *Sejam $f(x,y)$ um campo escalar de classe $\mathcal{C}^2$ e (x_0,y_0) um ponto interior ao domínio de f. Se (x_0,y_0) é um ponto crítico de f, temos*

1. *se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0$ e $hess(x_0,y_0) > 0$, então (x_0,y_0) é um ponto de mínimo local de f.*

2. *se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0$ e $hess(x_0,y_0) > 0$, então (x_0,y_0) é um ponto de máximo local de f.*

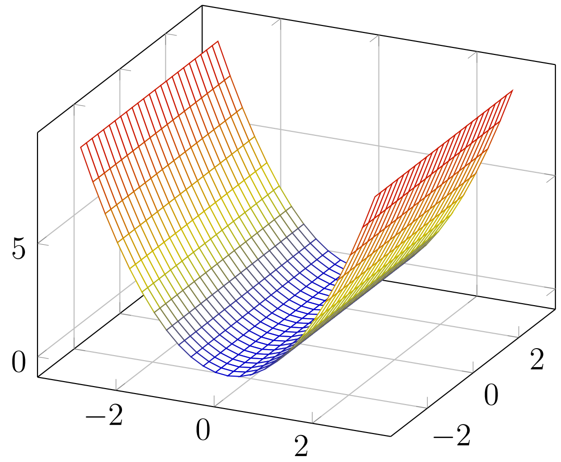
3. *se $hess(x_0,y_0) < 0$, então (x_0,y_0) não é ponto extremo de f. Nesse caso, (x_0,y_0) é o que chamamos de ponto de sela.*

4. *se $hess(x_0,y_0) = 0$, então nada podemos afirmar.*

Curiosidade: Quando $hess(x_0,y_0) = 0$ temos o que chamamos de um *ponto crítico degenerado*. Pontos críticos não-degenerados são sempre isolados (isto quer dizer que existe uma vizinhança do ponto crítico onde não existe nenhum outro ponto crítico de f).

[1] A matriz hessiana tem esse nome em homenagem ao alemão Ludwig Otto Hesse, que primeiro a obteve, no século XIX. Em português, substantivos ou adjetivos derivados de nomes próprios devem ser grafados com iniciais minúsculas: euclidiana, riemanniana, marxismo, peronista, etc...

Observe o gráfico do campo escalar $f(x, y) = x^2$,



A função f tem uma reta inteira de pontos críticos: o eixo-y (observe que os pontos críticos não são isolados).

Exemplo 5. *No exemplo anterior encontramos os pontos críticos da função*

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 4$$

e, graças ao Teorema 2, pudemos deduzir que $(1, -1)$ *e* $(-1, 1)$ *não são pontos extremos de* f*,* $(1, 1)$ *é um candidato a ser ponto de mínimo local de* f *e* $(-1, -1)$ *é um candidato a ser ponto de máximo local de* f*. Agora que temos conhecimento do Teorema 3, podemos classificar, definitivamente, seus pontos críticos.*

Solução. Vamos calcular a hessiana de f,

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

O determinante hessiano tem o seguinte comportamento

$$hess(x, y) = 36xy \begin{cases} > 0, & \text{se } (x, y) = (1, 1) \text{ ou } (x, y) = (-1, -1) \\ < 0, & \text{se } (x, y) = (1, -1) \text{ ou } (x, y) = (-1, 1) \end{cases}$$

e

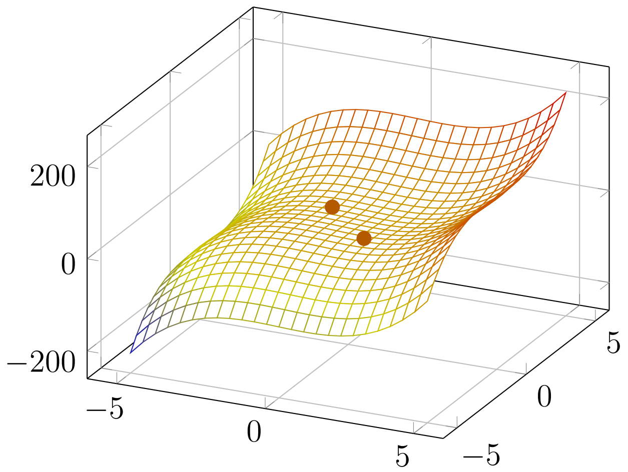
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \begin{cases} > 0, & \text{se } (x, y) = (1, 1) \text{ ou } (x, y) = (1, -1) \\ < 0, & \text{se } (x, y) = (-1, 1) \text{ ou } (x, y) = (-1, 1) \end{cases}$$

Assim, pelo Teorema 3, podemos afirmar que

- $(1, -1)$ e $(-1, 1)$ são pontos de sela,
- $(1, 1)$ é ponto de mínimo local de f,
- $(-1, -1)$ é ponto de máximo local de f.

Pense: Os pontos $(1, 1)$ e $(-1, -1)$ são extremos globais? Justifique analiticamente (isto é, sem utilizar recursos gráficos).

Veja abaixo, o gráfico de $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 4$. Em destaque os dois pontos de sela.



Pense: Você consegue perceber alguma semelhança entre um ponto de sela e um ponto de inflexão para funções de uma variável? Que tal recordar o que é um ponto de inflexão?

2.1 Máximos e mínimos de campos escalares no $\mathbb{R}^3$

Se $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é um campo escalar em $\mathbb{R}^n$, que admite todas as derivadas parciais de segunda ordem, podemos calcular sua matriz hessiana $H = (h_{ij})_{i,j}$, cujas entradas serão dadas por

$$h_{ij} = f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Assim, se estamos falando de um campo escalar $f : A \to \mathbb{R}$, com $A \subset \mathbb{R}^3$, temos

$$H(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Abaixo, apresentamos versões do Teorema 2 e do Teorema 3 para funções com domínios em $\mathbb{R}^3$.

Teorema 4. *Seja $f(x,y,z)$ um campo escalar de classe $\mathcal{C}^2$ e seja (x_0,y_0,z_0) um ponto crítico interior ao domínio de f.*

1. *Se (x_0,y_0,z_0) é um ponto de máximo local de f, então*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0,z_0) \leq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0,z_0) \leq 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x_0,y_0,z_0) \leq 0$$

2. *Se (x_0,y_0) é um ponto de mínimo local de f, então*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0,z_0) \geq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0,z_0) \geq 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x_0,y_0,z_0) \geq 0$$

Teorema 5. *Sejam $f(x,y,z)$ um campo escalar de classe $\mathcal{C}^2$ e (x_0,y_0,z_0) um ponto interior ao domínio de f. Sejam h o determinante hessiano de f e $\det H_{33}$ o menor-$(3,3)$ (determinante da submatriz de H formada ao eliminarmos a linha 3 e a coluna 3). Se (x_0,y_0,z_0) é um ponto crítico de f, temos*

1. *se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0,z_0) > 0$, $\det H_{33}(x_0,y_0,z_0) > 0$ e $hess(x_0,y_0) > 0$, então (x_0,y_0,z_0) é um ponto de mínimo local de f.*

2. *se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0,z_0) < 0$, $\det H_{33}(x_0,y_0,z_0) > 0$ e $hess(x_0,y_0) < 0$, então (x_0,y_0,z_0) é um ponto de máximo local de f.*

Exemplo 6. *Estude os máximos e mínimos locais da função*

$$f(x,y,z) = x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 4xy - 2x - 4y - 8z + 2.$$

Solução. O domínio da função é $\mathbb{R}^3$. O gradiente de f é dado por

$$\nabla f(x,y,z) = (2x + 4y - 2, 4x + 10y - 4, 4z - 8),$$

daí $\nabla f(x,y,z) = (0,0,0)$ se e somente se

$$\begin{cases} 2x+4y-2=0 \\ 4x+10y-4=0 \\ 4z-8=0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema concluímos que $(1,0,2)$ é o único ponto crítico de f.

$$hess(x,y,z) = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 16,$$

e

$$\det H_{33}(x,y,z) = \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} = 4.$$

Como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0,2) = 2 > 0, \quad hess(1,0,2) = 16 > 0 \quad \det H_{33}(1,0,2) = 4 > 0,$$

o ponto $(1,0,2)$ é um ponto de mínimo de f. ☕

Aviso: este material está em sua primeira edição. Caso você encontre algum erro, inconsistência ou passagem duvidosa, por favor, entre em contato para que possamos esclarecer, melhorar e/ou corrigir o material. Agradeço e desejo bons estudos.