Aula 9: Séries de Fourier

9.1 Resultados importantes

Nesta seção, vamos relembrar algumas definições e propriedades que serão úteis, quando definirmos as séries de Fourier.

9.1.1 Funções par e ímpar

Definição 9.1. (Função par e função ímpar)

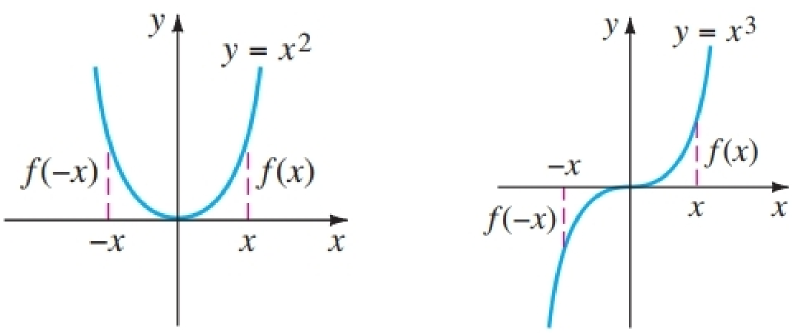
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Chama-se função par a toda função que satisfaça a relação*

$$f(-x) = f(x)$$

analogamente, definimos uma função ímpar, através da relação

$$f(-x) = -f(x).$$

♣



Função par   Função ímpar

Propriedades: Se f é par, então $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$;

Se f é ímpar, então $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0.$

9.1.2 Funções periódicas

Definição 9.2. (Função periódica)

Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica de período p ou ainda, que f é p-periódica se $f(x+p) = f(x)$ para todo x. ♣

Se o domínio da função f não for todo $\mathbb{R}$ não faz sentido perguntar se ela é periódica.

Observação: A função $\operatorname{sen} x$ é 2π-periódica e a função $\cos(ax)$ é $\dfrac{2\pi}{a}$-periódica.

Importante: *Se uma função $f(x)$ é p-periódica, então ela também é $2p$-periódica, pois*

$$f(x+2p) = f[(x+p)+p] = f(x+p) = f(x).$$

Portanto, se f é p-periódica, ela também será (np)-periódica, para $n = 2, 3, \ldots$, isto é,

$$f(x+np) = f(x).$$

*Com isso, concluímos que, se existe um período ele não é único. O mais interessante é determinar o menor período de uma função, chamado **período fundamental**.*

9.1.3 Ortogonalidade

As funções periódicas mais importantes são as funções do sistema trigonométrico (2π-periódicas)

$$1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \ldots, \cos mx, \ldots, \operatorname{sen} x,\ \operatorname{sen} 2x,\ \operatorname{sen} 3x, \ldots, \operatorname{sen} nx, \ldots,$$

onde m e n são números inteiros positivos.

Dizemos que duas funções $f(x)$ e $g(x)$ são ortogonais no intervalo $[a, b]$, se

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0. \tag{9.1}$$

Propriedade 9.1: Sejam m e n inteiros positivos. O sistema trigonométrico admite as seguintes propriedades de ortogonalidade:

(a) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad m \neq n, \\ \pi, & \text{se} \quad m = n, \end{cases}$$

(b) $$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad m \neq n, \\ \pi, & \text{se} \quad m = n, \end{cases}$$

(c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\operatorname{sen}(nx)\mathrm{d}x = 0,$ para todo m e n.

Demonstração: **(a)** Considere a relação trigonométrica

$$\cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\Big\{\cos[(m+n)x] + \cos[(m-n)x]\Big\}$$

e denotemos

$$\Omega = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\mathrm{d}x.$$

Assim, podemos reescrever a integral Ω da seguinte forma

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\Big\{\cos[(m+n)x] + \cos[(m-n)x]\Big\}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left\{\int_0^{\pi}\cos[(m+n)x]\mathrm{d}x + \int_0^{\pi}\cos[(m-n)x]\mathrm{d}x\right\}.\end{aligned}$$

- Se $m \neq n$:

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{1}{2(m+n)}\Big\{\operatorname{sen}[\underbrace{(m+n)}_{\text{inteiro}}x]\Big\}_0^{\pi} + \frac{1}{2(m-n)}\Big\{\operatorname{sen}[\underbrace{(m-n)}_{\text{inteiro}}x]\Big\}_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2(m+n)}[\operatorname{sen}(k_1\pi) - \operatorname{sen}0] + \frac{1}{2(m-n)}[\operatorname{sen}(k_2\pi) - \operatorname{sen}0] = 0,\end{aligned}$$

  onde $k_1 = m+n$ e $k_2 = m-n$.

- Se $m = n$:

$$\begin{aligned}\Omega &= \int_0^{\pi}\cos(2mx)\mathrm{d}x + \int_0^{\pi}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2m}\Big[\operatorname{sen}(2mx)\Big]_0^{\pi} + \Big[x\Big]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2m}[\operatorname{sen}(2m\pi) - \operatorname{sen}0] + \pi = \pi.\end{aligned}$$

  Portanto,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad m \neq n, \\ \pi, & \text{se} \quad m = n \end{cases}.$$

9.2 Séries de Fourier

Seja $f : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$. Uma série de Fourier é uma série do tipo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(kx) + b_k\operatorname{sen}(kx)],$$

onde a_0, a_k e b_k são coeficientes que devem ser determinados.

9.2.1 Coeficientes de uma série de Fourier

Teorema 9.1. (Coeficientes de uma série de Fourier)

Seja $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$. Suponha que $f(x)$ tem representação em série de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)]. \tag{9.2}$$

Os coeficientes a_0, a_k e b_k são chamados coeficientes de Fourier de f e são dados por

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{d}x, \tag{9.3}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \mathrm{d}x, \quad k = 1, 2, 3, \cdots \tag{9.4}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx) \mathrm{d}x, \quad k = 1, 2, 3, \cdots. \tag{9.5}$$

♡

Demonstração Para determinar o coeficiente a_0 da série de Fourier, vamos integrar ambos os lados da Eq.(9.2) de $-\pi$ a π, isto é,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{d}x = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \mathrm{d}x + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(kx) \mathrm{d}x \right\}.$$

As duas integrais, que estão entre chaves, são nulas para $k = 1, 2, \ldots$, então

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{d}x = \frac{a_0}{2} \Big[x \Big]_{-\pi}^{\pi} = a_0 \pi,$$

logo

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{d}x.$$

Agora, vamos determinar os coeficientes a_k. Para isso, multiplicamos ambos os lados da Eq.(9.2) por $\cos(mx)$, sendo $m = 1, 2, 3, \ldots$ e, integramos de $-\pi$ a π, de modo a obter

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) \mathrm{d}x &= a_0 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \mathrm{d}x}_{=0} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(mx) \mathrm{d}x \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} b_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(kx) \cos(mx) \mathrm{d}x}_{k=0}. \end{aligned}$$

Para $m = k$ e, utilizando a **Propriedade 9.1**, podemos escrever

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \mathrm{d}x = a_k \cdot \pi,$$

logo,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\mathrm{d}x, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Finalmente, vamos determinar os coeficientes b_k. Para isso, multiplicamos ambos os lados da Eq.(9.2) por $\operatorname{sen}(mx)$, sendo $m = 1, 2, 3, \ldots$ e, integramos de $-\pi$ a π, de modo a obter

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(mx)\mathrm{d}x &= a_0\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}(mx)\mathrm{d}x}_{=0} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\operatorname{sen}(mx)\mathrm{d}x}_{=0} \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}(kx)\operatorname{sen}(mx)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Para $m = k$ e, utilizando a **Propriedade 9.1**, podemos escrever

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(kx)\mathrm{d}x = b_k \cdot \pi,$$

logo,

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(kx)\mathrm{d}x, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Exemplo 9.1 Seja $f(x)$ uma função dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad -\pi < x \leq 0, \\ x, & \text{se} \quad 0 < x < \pi, \end{cases}$$

Obtenha a série de Fourier para $f(x)$.

Resolução: A função $f(x)$ tem o seguinte gráfico

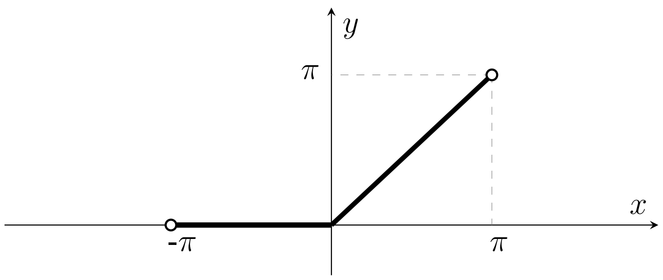


Figura 9.1: $f(x), \quad -\pi < x < \pi.$

e, sua série de Fourier é dada por

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(kx) + b_k\operatorname{sen}(kx)],$$

onde

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} 0 \cdot \cos(kx)\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} x \cdot \cos(kx)\mathrm{d}x\right\}.$$

Integrando por partes com $u = x$ e $\mathrm{d}v = \cos(kx)\mathrm{d}x$, obtemos

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\,\mathrm{sen}(kx)}{k}\bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi} \mathrm{sen}(kx)\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{k\pi}\left[\frac{\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi}.$$

Como não é possível calcular a_0 a partir da expressão anterior, devemos calculá-lo separadamente, isto é,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} 0 \cdot \mathrm{d}x + \int_0^{\pi} x \cdot \mathrm{d}x\right\} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Resta-nos calcular os coeficientes b_k:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} 0 \cdot\ \mathrm{sen}(kx)\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} x \cdot\ \mathrm{sen}(kx)\mathrm{d}x\right\}.$$

Integrando por partes com $u = x$ e $\mathrm{d}v =\ \mathrm{sen}(kx)\mathrm{d}x$, obtemos

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos(kx)}{k}\bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos(kx)\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi\cos(k\pi)}{k}\right] + \frac{1}{k}\underbrace{\left[\frac{\mathrm{sen}(kx)}{k}\right]_0^{\pi}}_{=0} \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{k}. \end{aligned}$$

A série de Fourier é dada por

$$S(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi}\cos(kx) + \frac{(-1)^{k+1}}{k}\,\mathrm{sen}(kx)\right]. \tag{9.6}$$

A série $S(x)$ tem o seguinte gráfico

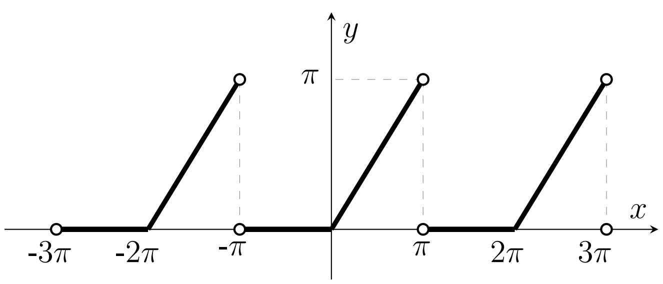


Figura 9.2: Série $S(x)$.

Exemplo 9.2 Use o **Exemplo 9.2** para mostrar que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Resolução: Note que, se $x = 0$ na Eq.(9.6), temos que $S(0) = 0$, logo

$$0 = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{-2}{(2k-1)^2 \pi} \right] = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2},$$

ou ainda,

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Finalmente, obtemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Exercícios

1. Mostre que:

(a) a soma (diferença) de duas funções pares é uma função par;

(b) a soma (diferença) de duas funções ímpares é uma função ímpar;

(c) o produto de duas funções pares é uma função par;

(d) o produto de duas funções ímpares é uma função par;

(e) o produto de uma função par por uma função ímpar é uma função ímpar;

2. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções com o mesmo período p e $c \in \mathbb{R}$. Mostre que:

(a) $f(x) + g(x)$ é p-periódica;

(b) $f(x) - g(x)$ é p-periódica;

(c) $f(x)g(x)$ é p-periódica;

3. Mostre os itens **(b)** e **(c)** da **Propriedade 9.1**.

4. Mostre que as funções dadas são ortogonais nos intervalos indicados:

(a) $f_1(x) = x^3, \;\; f_2(x) = x^2 + 1; \quad [-1, 1],$

(b) $f_1(x) = \mathrm{e}^x, \; f_2(x) = x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}; \quad [0, 2],$

(c) $f_1(x) = \cos x, \; f_2(x) = \operatorname{sen}^2 x; \quad [0, \pi],$

5. Obtenha a série de Fourier para as seguintes funções:

(a) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad -\pi < x < 0, \\ \pi - x, & \text{se} \quad 0 \leq x < \pi, \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad -\pi < x < 0, \\ 1, & \text{se} \quad 0 \leq x < \pi, \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{se} \quad -\pi < x < 0, \\ 2, & \text{se} \quad 0 \leq x < \pi, \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad -\pi < x < 0, \\ x^2, & \text{se} \quad 0 \leq x < \pi, \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} \pi^2, & \text{se} \quad -\pi < x < 0, \\ \pi^2 - x^2, & \text{se} \quad 0 \leq x < \pi, \end{cases}$

(f) $f(x) = x + \pi, \quad -\pi < x < \pi,$

(g) $f(x) = 3 - 2x, \quad -\pi < x < \pi,$

(h) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad -\pi < x < 0, \\ \operatorname{sen} x, & \text{se} \quad 0 \leq x < \pi, \end{cases}$

6. Utilize o resultado do **Exercício 5 (d)** para mostrar que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

7. Utilize o resultado do **Exercício 5 (f)** para mostrar que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

8. Utilize o resultado do **Exercício 5 (h)** para mostrar que

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} - \frac{1}{7 \cdot 9} + \cdots.$$

Respostas:

1. (a) Sejam f e g funções pares, isto é, $f(x) = f(-x)$ e $g(x) = g(-x)$. Seja $h(x) = f(x) \pm g(x) = f(-x) \pm g(-x) = h(-x)$. Como, $h(x) = h(-x)$, então h é par.

   (b) Análogo ao item (a).

   (c) Análogo ao item (a).

   (d) Análogo ao item (a).

   (e) Análogo ao item (a).

2. (a) Sejam f e g funções p-periódicas, isto é, $f(x) = f(x+p)$ e $g(x) = g(x+p)$. Seja $h(x) = f(x) + g(x) = f(x+p) + g(x+p) = h(x+p)$. Como, $h(x) = h(x+p)$, então h é p-periódica.

   (b) Análogo ao item (a).

   (c) Análogo ao item (a).

3. (a) Use a relação trigonométrica $\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx) = \dfrac{1}{2}\Big\{\cos[(m-n)x] - \cos[(m+n)x]\Big\}$.

   (b) Note que o integrando é uma função ímpar.

4. Basta usar a Eq.(9.1).

5. (a) $S(x) = \dfrac{\pi}{4} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\dfrac{1-(-1)^k}{k^2\pi}\cos(kx) + \dfrac{1}{k}\operatorname{sen}(kx)\right\}$,

   (b) $S(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^k}{k}\operatorname{sen}(kx)$,

   (c) $S(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^k}{k}\operatorname{sen}(kx)$,

   (d) $S(x) = \dfrac{\pi^2}{6} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[\dfrac{2(-1)^k}{k^2}\cos(kx) + \left(\dfrac{\pi}{k}(-1)^{k+1} + \dfrac{2[(-1)^k-1]}{k^3\pi}\right)\operatorname{sen}(kx)\right]$,

   (e) $S(x) = \dfrac{5\pi^2}{6} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[\dfrac{2(-1)^{k+1}}{k^2}\cos(kx) + \left(\dfrac{\pi(-1)^k}{k} + \dfrac{2[1-(-1)^k]}{k^3\pi}\right)\operatorname{sen}(kx)\right]$,

   (f) $S(x) = \pi + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{2(-1)^{k+1}}{k}\operatorname{sen}(kx)$,

(g) $S(x) = 3 + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{sen}(kx),$

(h) $S(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1+(-1)^k}{\pi(1-k^2)} \cos(kx),$

6. Basta tomar $x = 0$ na solução obtida no Exercício 5 (d).

7. Basta tomar $x = \frac{\pi}{2}$ na solução obtida no Exercício 5 (f).

8. Basta tomar $x = \frac{\pi}{2}$ na solução obtida no Exercício 5 (h).