UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Universidade Federal de São Paulo

Variáveis aleatórias bidimensionais

Professor
Julio Cezar

AULA DE HOJE

- Função massa de probabilidade conjunta para duas variáveis aleatórias discretas;
- Funções massa de probabilidade marginais;
- Função densidade de probabilidade conjunta para duas variáveis aleatórias contínuas;
- Funções densidade de probabilidade marginais;
- Função massa de probabilidade condicional;
- Função densidade de probabilidade condicional;
- Variáveis Aleatórias Independentes;
- Covariância e Correlação.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Variável Aleatória Bidimensional

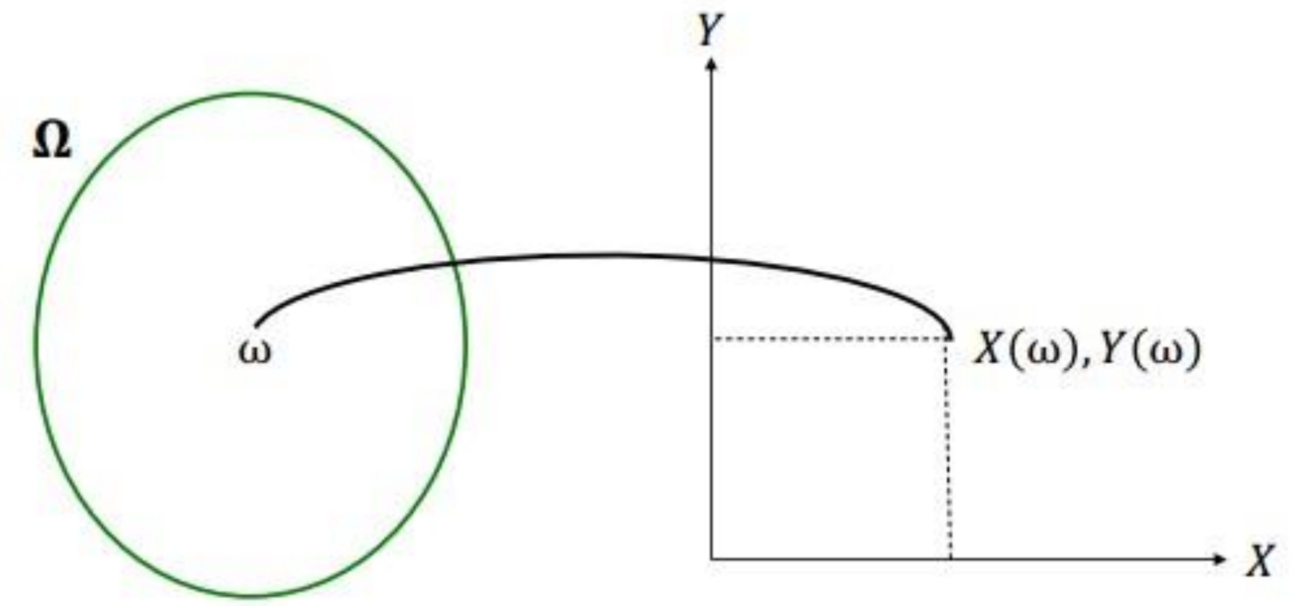
Muitas vezes é interesse estudar mais de um resultado de um experimento aleatório, ou seja, há várias situações experimentais em que mais de uma variável aleatória será de interesse do investigador.

Exemplos: o peso e a altura de um recém nascido; o tempo até que um servidor de computador se conecte com sua máquina (em milissegundos) e o tempo até que o servidor autorize você como um usuário válido (em milissegundos), etc.

IDADE	MENINOS		MENINAS	
	ALTURA	PESO	ALTURA	PESO
0 DIAS	50 cm	[illegible]	49 cm	3,100 kg
2 MESES	59 cm	5,500 kg	58 cm	5,200 kg
4 MESES	63 cm	6,900 kg	62 cm	6,350 kg
6 MESES	66 cm	7,850 kg	65 cm	7,250 kg
8 MESES	70 cm	8,700 kg	68 cm	8,000 kg
10 MESES	72 cm	9,450 kg	71 cm	8,800 kg
12 MESES	75 cm	10,100 kg	73 cm	9,450 kg
18 MESES	82 cm	11,770 kg	80 cm	11,140 kg
2 ANOS	87 cm	13,000 kg	86 cm	12,250 kg
3 ANOS	95 cm	14,870 kg	95 cm	14,680 kg
4 ANOS	101 cm	16,630 kg	102 cm	16,590 kg
5 ANOS	107 cm	18,670 kg	108 cm	18,560 kg
6 ANOS	114 cm	21,040 kg	113 cm	20,670 kg
7 ANOS	120 cm	23,600 kg	119 cm	22,900 kg
8 ANOS	126 cm	26,100 kg	125 cm	25,200 kg

Variável Aleatória Bidimensional

Definição: Sejam E um experimento e Ω um espaço amostral associado a E. Sejam $X=X(\omega)$ e $Y=Y(\omega)$ duas funções, cada uma associando um número real a cada resultado $\omega \in \Omega$. Denomina-se **(X, Y) uma variável aleatória (va) bidimensional**.



UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Variável Aleatória Bidimensional

Principal objetivo da análise de variáveis aleatórias bidimensionais: avaliar simultaneamente dois resultados de uma situação associando as probabilidades individuais e conjuntas. É possível consideraremos as distribuições de probabilidade conjunta para duas variáveis aleatórias discretas, ou para duas variáveis aleatórias contínuas. Vamos, então, definir probabilidades ou distribuições conjuntas e marginais.

- ***Distribuição conjunta:*** é a distribuição simultânea das duas variáveis, ou seja, a intersecção das variáveis.
- ***Distribuições marginais:*** são as distribuições isoladas de cada variável.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Variável Aleatória Bidimensional

Função massa de probabilidade conjunta para duas variáveis aleatórias discretas

A função massa de probabilidade (fmp) de uma única v.a. discreta X especifica quanta massa de probabilidade é colocada em cada valor X possível. A **fmp conjunta** de duas v.a. discretas X e Y descreve quanta massa de probabilidade é colocada em cada par de valores possível (x, y).

$$\text{Valores de X: } x_1, x_2, \ldots, x_k$$

$$\text{Valores de Y: } x_1, x_2, \ldots, x_n$$

Temos $k \times n$ pares de valores para (x_i, y_j) e a $p(x_i, y_j)$ é a probabilidade que X e Y assumam simultaneamente os valores de x_i e y_j respectivamente, isto é,

$$p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$$

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Variável Aleatória Bidimensional

Função massa de probabilidade conjunta para duas variáveis aleatórias discretas

Definição: Sejam X e Y duas v.a. discretas definidas no espaço amostral S de um experimento. A **fmp conjunta $p(x_i, y_j)$** é definida para cada par de números (x_i, y_j) por:

$$1)\ p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j) \geq 0$$

$$2)\ \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} P(X = x_i, Y = y_j) = 1$$

Obs: $\mathbf{p(x, y)}$ representa a probabilidade de (X,Y) ser igual a $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Variável Aleatória Bidimensional

Exemplo: Uma grande agência de seguros presta serviços a diversos clientes que compraram uma apólice residencial e outra de automóvel da mesma seguradora. Para cada tipo, deve ser especificado um valor dedutível. Para uma apólice de automóvel as opções são US$ 100 e US$ 250, enquanto, para uma apólice residencial, as opções são 0, US$ 100 e US$ 200. Suponha que um indivíduo com os dois referidos tipos seja selecionado aleatoriamente nos arquivos da seguradora. Sejam X v.a. que representa o valor dedutível na apólice de automóvel e Y representando o valor dedutível na apólice residencial.

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

VARIÁVEL ALEATÓRIA BIDIMENSIONAL

Continuação do exemplo: Os pares (X, Y) possíveis são (100, 0), (100, 100), (100, 200), (250, 0), (250, 100) e (250, 200); a fmp conjunta especifica a probabilidade associada a cada um desses pares, com qualquer outro par de probabilidade zero. Suponha que a fmp conjunta seja dada na tabela de probabilidade conjunta a seguir:

P(X=x, Y=y)		y		
		0	**100**	**200**
X	**100**	0,20	0,10	0,20
	250	0,05	0,15	0,30

Fonte: Devore e Cordeiro, 2014.

a) Qual a probabilidade de $P(X = 100,\ Y = 100)$?

b) Qual a $P(Y \geq 100)$?

Variável Aleatória Bidimensional

Funções massa de probabilidade marginais

A fmp de apenas uma das variáveis é obtida pela soma de p(x, y) em relação aos valores da outra variável. O resultado é denominado **fmp marginal** porque, quando os valores p(x, y) são exibidos em uma tabela retangular, as somas são apenas totais marginais (linha ou coluna).

Variável Aleatória Bidimensional

Funções massa de probabilidade marginais

Definição: As **funções massa de probabilidade marginais** de X e de Y, representadas respectivamente por $p_X(x)$ e $p_Y(y)$, são dadas por:

$$p_X(x) = P(X = x) = \sum_{j=1}^{n} P(X = x, Y = y_j)$$

$$p_Y(y) = P(Y = y) = \sum_{i=1}^{k} P(X = x_i, Y = y)$$

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Variável Aleatória Bidimensional

Exemplo: Ainda com relação ao exemplo anterior.

a) Qual a $p_X(100), p_X(250)$ e $p_X(x)$?

b) Qual a $p_Y(0), p_Y(100), p_Y(200)$ e $p_Y(y)$?

c) Qual a $P(Y \geq 100)$?

P(X=x, Y=y)		**y**		
X		**0**	**100**	**200**
	100	0,20	0,10	0,20
	250	0,05	0,15	0,30

Fonte: Devore e Cordeiro, 2014.

Variável Aleatória Bidimensional

Função densidade de probabilidade conjunta para duas variáveis aleatórias contínuas

A probabilidade de o valor observado de uma v.a. contínua X estar em um conjunto unidimensional A (como um intervalo) é obtida integrando-se a função densidade probabilidade (fdp) f(x) em relação ao conjunto A. De forma similar, a probabilidade de o par (X, Y) de v.a. contínuas estar em um conjunto bidimensional A (como um retângulo) é **obtida pela integração de uma função denominada fdp conjunta**.

$$P[(X,Y) \in A] = \iint_{A} f(x,y)\,dx\,dy$$

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

VARIÁVEL ALEATÓRIA BIDIMENSIONAL

Função densidade de probabilidade conjunta para duas variáveis aleatórias contínuas

Seja X e Y v.a. contínuas. Então, f(x, y) é a **fdp conjunta** de X e Y se, para qualquer conjunto bidimensional satisfazer:

$$1)\ f(x,y) \geq 0 \text{ para todo para } (x,y);$$

$$2)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1\,;$$

$$3)\ P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d\,) = \int_{a}^{b}\int_{c}^{d} f(x,y)\,dy\,dx.$$

UNIFESP

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

1933

Variável Aleatória Bidimensional

Exemplo: Um banco opera tanto uma instalação de drive-through como em guichê de atendimento. Em um dia selecionado aleatoriamente, assuma X sendo a proporção de tempo em que a instalação de drive-through está em uso (ao menos um cliente está sendo atendido ou esperando para ser atendido) e Y sendo a proporção de tempo em que o guichê de atendimento está em uso. O conjunto de valores possíveis de (X, Y) é, então, o retângulo $\mathrm{D} = \{(x, y): 0 \leq X \leq 1{,}0 \leq Y \leq 1\}$. Suponha que a fdp conjunta de (X, Y) seja dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x + y^2) & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1; \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Variável Aleatória Bidimensional

Continuação do exemplo:

a) Prove que essa fdp é verdadeira?

b) Qual a probabilidade de nenhuma das instalações estar ocupada em mais de um quarto do tempo?

Variável Aleatória Bidimensional

Funções densidade de probabilidade marginais

Definição: As **funções de densidade de probabilidade marginais** de X e Y, representadas respectivamente

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \quad -\infty \leq x \leq +\infty$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx \quad -\infty \leq y \leq +\infty$$

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Variável Aleatória Bidimensional

Exemplo: Ainda com relação ao exemplo anterior.

a) Determine a fdp marginal de X e a fdp marginal de Y.

b) Qual a $P\left(\frac{1}{3} \leq Y \leq \frac{3}{4}\right)$?

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

VARIÁVEL ALEATÓRIA BIDIMENSIONAL

Função massa de probabilidade condicional

Definição: Sejam X e Y duas **v.a. discretas** com fmp conjunta $P(X = x, Y = y)$ e fmp marginal de X, $P(X = x)$. Então, para qualquer valor x de X para o qual $P(X = x) > 0$, a **fmp condicional de Y dado que $\mathbf{X = x}$** é

$$P(Y = y|X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}, \qquad \text{se } P(X = x) > 0$$

Obs: Caso $P(X = x) = 0$, a probabilidade condicional pode ser definida como $P(Y = y|X = x) = P(Y = y)$.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

VARIÁVEL ALEATÓRIA BIDIMENSIONAL

Exemplo: Sejam Y o número de pessoas que está na fila de uma Agência dos Correios em um dado minuto, e X o número de pessoas na fila que irá postar uma encomenda expressa. A distribuição de probabilidade conjunta de X e Y é dada na tabela:

P(X=x, Y=t)		Y								P(X=x)
X		1	2	3	4	5	6	7	8	
	0	0,024	0,029	0,030	0,026	0,017	0,009	0,003	0,000	0,138
	1	0,016	0,038	0,060	0,070	0,057	0,037	0,013	0,002	0,293
	2	0	0,013	0,040	0,068	0,076	0,063	0,026	0,004	0,290
	3	0	0	0,010	0,031	0,051	0,055	0,029	0,006	0,182
	4	0	0	0	0,005	0,017	0,028	0,019	0,005	0,074
	5	0	0	0	0	0,002	0,007	0,008	0,002	0,019
	6	0	0	0	0	0	0,001	0,002	0,001	0,004
	7	0	0	0	0	0	0	0,000	0,000	0,000
	8	0	0	0	0	0	0	0,000	0,000	0,000
P(Y=y)		0,040	0,080	0,140	0,200	0,220	0,200	0,100	0,020	

Fonte: ENADE 2009

Em certo minuto, dado que há seis clientes na fila, a probabilidade de que quatro deles postem uma encomenda expressa é?

Variável Aleatória Bidimensional

Função densidade de probabilidade condicional

Definição: Sejam X e Y duas **v.a. contínuas** com fdp conjunta $f(x,\ y)$ e fdp marginal de X, $f_x(x)$. Então, para qualquer valor x de X para o qual $f_x(x) > 0$, a **fdp condicional de Y dado que $\mathbf{X = x}$** é

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,\ y)}{f_X(x)}, \qquad -\infty < y < +\infty$$

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

VARIÁVEL ALEATÓRIA BIDIMENSIONAL

Exemplo: Seja X uma variável aleatória que denota o tempo (em milissegundos) até um servidor de computador se conectar à sua máquina, e seja Y o tempo (em milissegundos) até o servidor autorizá-lo como um usuário válido. Cada uma dessas variáveis aleatórias mede a espera a partir de um tempo inicial comum e $X < Y$. Considere que a função densidade de probabilidade conjunta para X e Y seja

$$f(x, y) = 6 \times 10^{-6} \exp(-0{,}001x - 0{,}002y) \quad \text{para} \quad x < y$$

Determine a função densidade de probabilidade condicional para Y, dado que X = x.

Variável Aleatória Bidimensional

Variáveis Aleatórias Independentes

Definição: As variáveis aleatórias X e Y, assumindo os valores $x_1, x_2, \ldots$ e $y_1, y_2, \ldots$, respectivamente, são independentes se, e somente se, para todo par de valores (x_i, y_j) de X e Y, tivermos que

Se X e Y discretas:

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P_X(X = x_i).P_Y(Y = y_j)$$

Basta que a equação acima não se verifique para **um par** (x_i, y_j), para que X e Y não sejam independentes. Nesse caso, diremos que X e Y são dependentes.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Variável Aleatória Bidimensional

Exemplo: Com base em resultados do posto de saúde do bairro, estabeleceu-se a função de probabilidade conjunta entre os números diários de crianças atendidas com alergia (**X**) e com pneumonia (**Y**). Na tabela abaixo, apresentamos a conjunta e as marginais para essas variáveis.

X\Y	0	1	2	P(X=x)
0	1/16	1/16	1/8	1/4
1	1/8	1/8	0	1/4
2	1/16	1/8	1/8	5/16
3	0	1/8	1/16	3/16
P(Y=y)	1/4	7/16	5/16	1

Fonte: Magalhães, 2006.

Variável Aleatória Bidimensional

Exemplo: Com base em resultados do posto de saúde do bairro, estabeleceu-se a função de probabilidade conjunta entre os números diários de crianças atendidas com alergia (**X**) e com pneumonia (**Y**). Na tabela abaixo, apresentamos a conjunta e as marginais para essas variáveis.

X\Y	0	1	2	P(X=x)
0	1/16	1/16	1/8	1/4
1	1/8	1/8	0	1/4
2	1/16	1/8	1/8	5/16
3	0	1/8	1/16	3/16
P(Y=y)	1/4	7/16	5/16	1

Fonte: Magalhães, 2006.

a) As variáveis X e Y são independentes? Justifique.

Variável Aleatória Bidimensional

Exemplo: Com base em resultados do posto de saúde do bairro, estabeleceu-se a função de probabilidade conjunta entre os números diários de crianças atendidas com alergia (**X**) e com pneumonia (**Y**). Na tabela abaixo, apresentamos a conjunta e as marginais para essas variáveis.

X\Y	0	1	2	P(X=x)
0	1/16	1/16	1/8	1/4
1	1/8	1/8	0	1/4
2	1/16	1/8	1/8	5/16
3	0	1/8	1/16	3/16
P(Y=y)	1/4	7/16	5/16	1

Fonte: Magalhães, 2006.

a) As variáveis X e Y são independentes? Justifique.

b) Condicionado à ocorrência ou não de casos de pneumonia, como se comporta o número de crianças alérgicas?

VARIÁVEL ALEATÓRIA BIDIMENSIONAL

Variáveis Aleatórias Independentes

Definição: As variáveis aleatórias X e Y, assumindo os valores $x_1, x_2, \ldots$ e $y_1, y_2, \ldots$, respectivamente, são independentes se, e somente se, para todo par de valores (x_i, y_j) de X e Y, tivermos que

Se X e Y contínuas:

$$f(x, y) = f_X(x).f_Y(y)$$

Novamente, basta que a equação acima não se verifique para **um par** (x, y), para que X e Y não sejam independentes. Nesse caso, diremos que X e Y são dependentes.

UNIFESP

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

1933

Variável Aleatória Bidimensional

Exemplo: As vidas úteis de dois componentes são representados por duas variáveis aleatórias em que, X_1 (vida útil do primeiro componente) e X_2 (vida útil do segundo componente). Tem-se que, X_1 tem distribuição exponencial com parâmetro λ_1 e X_2 tem distribuição exponencial com parâmetro λ_2. A fdp conjunta é dada por:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2}, & x_1 > 0, x_2 > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Verifique se as vidas úteis dos dois componentes são independentes uma da outra.

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Variável Aleatória Bidimensional

Propriedades de Valor Esperado e Variância

Sejam X e Y duas v.a. conjuntamente distribuídas. Então:

i) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

ii) $E(X+Y)^2 = E(X^2) + E(Y^2) + 2.E(XY)$

iii) $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm 2.Cov(X,Y)$ (**Tem-se que, a $\mathbf{Cov(X,Y) = E[(X - E(X)).(Y - E(Y))]}$**)

Variável Aleatória Bidimensional

Propriedades de Valor Esperado e Variância

Sejam X e Y duas v.a. conjuntamente distribuídas. Então:

i) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

ii) $E(X+Y)^2 = E(X^2) + E(Y^2) + 2.E(XY)$

iii) $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm 2.Cov(X,Y)$ (**Tem-se que, a $\mathbf{Cov(X,Y) = E[(X - E(X)).(Y - E(Y))]}$**)

Se X e Y forem v.a. independentes, temos que:

i) $E(XY) = E(X).E(Y)$

ii) $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

VARIÁVEL ALEATÓRIA BIDIMENSIONAL

Exemplo: A quantidade de dinheiro que Roberto ganha anualmente tem valor esperado $ 30.000 e desvio padrão $ 3000. A quantidade de dinheiro que sua esposa Sandra ganha tem valor esperado $ 32.000 e desvio padrão $ 5000. Determinar o (a) O valor esperado (b) Desvio Padrão do lucro anual total da família. Ao responder a parte (b), suponha que os ganhos de Roberto e de Sandra são independentes.

Variável Aleatória Bidimensional

Exemplo: A quantidade de dinheiro que Roberto ganha anualmente tem valor esperado \$ 30.000 e desvio padrão \$ 3000. A quantidade de dinheiro que sua esposa Sandra ganha tem valor esperado \$ 32.000 e desvio padrão \$ 5000. Determinar o (a) O valor esperado (b) Desvio Padrão do lucro anual total da família. Ao responder a parte (b), suponha que os ganhos de Roberto e de Sandra são independentes.

(a) Sejam X e Y as variáveis aleatórias que representam os ganhos anuais de Roberto e Sandra, respectivamente.

Defina a variável aleatória ganho total $Z = X + Y$

Temos $E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 30000 + 32000 = 62000$

(b) Como as variáveis aleatórias X e Y, representando os ganhos de cada membro do casal SÃO INDEPENDENTES, temos que:

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = (3000)^2 + (5000)^2 = 34000000$$

e o desvio-padrão: $\sigma(Z) = \sqrt{\mathrm{Var}(Z)} = \sqrt{34000000} = 5830{,}95$

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Covariância e Correlação

Quando duas ou mais variáveis aleatórias são definidas em um espaço probabilístico, é útil descrever como elas variam conjuntamente; ou seja, é útil medir a relação entre as variáveis.

Variável Aleatória Bidimensional

Covariância e Correlação

Quando duas ou mais variáveis aleatórias são definidas em um espaço probabilístico, é útil descrever como elas variam conjuntamente; ou seja, é útil medir a relação entre as variáveis. Uma medida comum da relação entre duas variáveis aleatórias é a **covariância**. De modo a definir a **covariância**, necessitamos descrever o valor esperado de uma função de duas variáveis aleatórias $h(X, Y)$.

Covariância e Correlação

Quando duas ou mais variáveis aleatórias são definidas em um espaço probabilístico, é útil descrever como elas variam conjuntamente; ou seja, é útil medir a relação entre as variáveis. Uma medida comum da relação entre duas variáveis aleatórias é a **covariância**. De modo a definir a **covariância**, necessitamos descrever o valor esperado de uma função de duas variáveis aleatórias $\mathrm{h}(X, Y)$. A definição simplesmente é uma extensão daquela usada para uma função de uma variável aleatória simples.

Valor esperado e variância de uma função de duas variáveis aleatórias

Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional e h(X,Y) uma função real de (X,Y), então temos que:

1) Se (X,Y) for uma variável aleatória discreta com função massa de probabilidade conjunta $p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$ (i,j = 1,2,...):

$$E[h(X,Y)] = \sum_{i} \sum_{j} h(x_i, y_j) . p(x_i, y_j)$$

Variável Aleatória Bidimensional

Exemplo:

X: número de moradores

Y: números de televisores

Seja a função massa de probabilidade conjunta de X e Y dada pela tabela a seguir:

P(X=x, Y=y)		**X**			
Y		**1**	**2**	**3**	**P(Y=y)**
	0	0,02	0,00	0,00	0,02
	1	0,20	0,08	0,05	0,33
	2	0,10	0,20	0,15	0,45
	3	0,00	0,10	0,10	0,20
	P(X=x)	0,32	0,38	0,30	1,00

Qual o valor esperado de $\frac{Y}{X}$?

UNIFESP

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

1933

Variável Aleatória Bidimensional

Valor esperado e variância de uma função de duas variáveis aleatórias

Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional e h(X,Y) uma função real de (X,Y), então temos que:

2) Se (X,Y) for uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade conjunta $f(x,\ y)$:

$$E[h(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y).f(x,y)dxdy$$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

VARIÁVEL ALEATÓRIA BIDIMENSIONAL

Voltando ao exemplo: Um banco opera tanto uma instalação de drive-through como em guichê de atendimento. Em um dia selecionado aleatoriamente, assuma X sendo a proporção de tempo em que a instalação de drive-through está em uso... Suponha que a fdp conjunta de (X, Y) seja dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{6}{5}(x + y^2) & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1; \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Qual o valor esperado de X^2Y ?

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Variável Aleatória Bidimensional

Como já mencionado:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X)).(Y - E(Y))]$$

E pode ser escrita como:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

VARIÁVEL ALEATÓRIA BIDIMENSIONAL

Variáveis aleatórias discretas:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \sum_{i} \sum_{j} (x_{i} - \mu_X).(y_{i} - \mu_Y).p(x_i, y_j)$$

Variáveis aleatórias contínuas:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X).(y - \mu_Y).f(x, y)dxdy$$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Variável Aleatória Bidimensional

Exemplo:

X: número de moradores

Y: números de televisores

Seja a função massa de probabilidade conjunta dada pela tabela a seguir:

P(X=x, Y=y)	X				
		1	2	3	P(Y=y)
Y	0	0,02	0,00	0,00	0,02
	1	0,20	0,08	0,05	0,33
	2	0,10	0,20	0,15	0,45
	3	0,00	0,10	0,10	0,20
	P(X=x)	0,32	0,38	0,30	1,00

Qual a covariância de (X, Y)?

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Variável Aleatória Bidimensional

Exemplo: Considere as intensidades elétricas de duas componentes de um sistema eletrônico, X e Y, que são v.a. A função densidade de probabilidade conjunta de Xe Y é dado por

$$f(x,y) = \begin{cases} x + \frac{y}{2} + xy\,, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1; \\ 0\,, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Qual a covariância de (X, Y)?

Variável Aleatória Bidimensional

A covariância é portanto uma medida da distribuição conjunta dos valores de X e Y, em termos dos desvios em relação às respectivas médias.

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Variável Aleatória Bidimensional

A covariância é portanto uma medida da distribuição conjunta dos valores de X e Y, em termos dos desvios em relação às respectivas médias. A Cov(X,Y) descreve, a relação linear entre duas variáveis e a sua mútua dependência.

Variável Aleatória Bidimensional

A covariância é portanto uma medida da distribuição conjunta dos valores de X e Y, em termos dos desvios em relação às respectivas médias. A Cov(X,Y) descreve, a relação linear entre duas variáveis e a sua mútua dependência. Uma covariância positiva implica que, quando uma das variáveis se desvia significativamente do seu valor esperado, a outra tenderá a desviar-se no mesmo sentido.

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Variável Aleatória Bidimensional

A covariância é portanto uma medida da distribuição conjunta dos valores de X e Y, em termos dos desvios em relação às respectivas médias. A Cov(X,Y) descreve, a relação linear entre duas variáveis e a sua mútua dependência. Uma covariância positiva implica que, quando uma das variáveis se desvia significativamente do seu valor esperado, a outra tenderá a desviar-se no mesmo sentido. Isso implicará um aumento da dispersão da soma das variáveis X e Y.

Variável Aleatória Bidimensional

A covariância é portanto uma medida da distribuição conjunta dos valores de X e Y, em termos dos desvios em relação às respectivas médias. A Cov(X,Y) descreve, a relação linear entre duas variáveis e a sua mútua dependência. Uma covariância positiva implica que, quando uma das variáveis se desvia significativamente do seu valor esperado, a outra tenderá a desviar-se no mesmo sentido. Isso implicará um aumento da dispersão da soma das variáveis X e Y. Se a covariância for negativa, os desvios das duas variáveis tenderão a ser de sentido contrário, implicando uma diminuição da variância da soma.

Variável Aleatória Bidimensional

Já foi mencionado que:

Se X e Y forem v.a. independentes, temos que:

i) $E(XY) = E(X).E(Y)$ (**Isso é um teorema**).

Variável Aleatória Bidimensional

Já foi mencionado que:

Se X e Y forem v.a. independentes, temos que:

i) $\mathrm{E}(\mathrm{XY}) = \mathrm{E}(\mathrm{X}).\mathrm{E}(\mathrm{Y})$ (**Isso é um teorema**).

Corolário: Se X e Y forem v.a. independentes, então

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = 0$$

Variável Aleatória Bidimensional

Já foi mencionado que:

Se X e Y forem v.a. independentes, temos que:

i) $E(XY) = E(X).E(Y)$ (**Isso é um teorema**).

Corolário: Se X e Y forem v.a. independentes, então

$$Cov(X, Y) = 0$$

Demonstração:

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Variável Aleatória Bidimensional

Já foi mencionado que:

Se X e Y forem v.a. independentes, temos que:

i) $\mathrm{E(XY) = E(X).E(Y)}$ (**Isso é um teorema**).

Corolário: Se X e Y forem v.a. independentes, então

$$\mathrm{Cov(X, Y) = 0}$$

Demonstração: Temos que,

$$\mathrm{Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)}$$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

VARIÁVEL ALEATÓRIA BIDIMENSIONAL

Já foi mencionado que:

Se X e Y forem v.a. independentes, temos que:

i) $\mathrm{E}(\mathrm{XY}) = \mathrm{E}(\mathrm{X}).\mathrm{E}(\mathrm{Y})$ (**Isso é um teorema**).

Corolário: Se X e Y forem v.a. independentes, então

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = 0$$

Demonstração: Temos que,

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathrm{E}(\mathrm{XY}) - \mathrm{E}(\mathrm{X})\mathrm{E}(\mathrm{Y})$$

Como X e Y são independetes, então

Variável Aleatória Bidimensional

Já foi mencionado que:

Se X e Y forem v.a. independentes, temos que:

i) $\mathrm{E}(\mathrm{XY}) = \mathrm{E}(\mathrm{X}).\mathrm{E}(\mathrm{Y})$ (**Isso é um teorema**).

Corolário: Se X e Y forem v.a. independentes, então

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = 0$$

Demonstração: Temos que,

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathrm{E}(\mathrm{XY}) - \mathrm{E}(\mathrm{X})\mathrm{E}(\mathrm{Y})$$

Como X e Y são independetes, então

$$\mathrm{E}(\mathrm{XY}) = \mathrm{E}(\mathrm{X}).\mathrm{E}(\mathrm{Y})$$

Variável Aleatória Bidimensional

Já foi mencionado que:

Se X e Y forem v.a. independentes, temos que:

i) $\mathrm{E(XY) = E(X).E(Y)}$ (**Isso é um teorema**).

Corolário: Se X e Y forem v.a. independentes, então

$$\mathrm{Cov(X, Y) = 0}$$

Demonstração: Temos que,

$$\mathrm{Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)}$$

Como X e Y são independetes, então

$$\mathrm{E(XY) = E(X).E(Y)}$$

Assim, $\mathrm{Cov(X, Y) = E(X).E(Y) - E(X)E(Y)}$

Variável Aleatória Bidimensional

Já foi mencionado que:

Se X e Y forem v.a. independentes, temos que:

i) $\mathrm{E(XY) = E(X).E(Y)}$ (**Isso é um teorema**).

Corolário: Se X e Y forem v.a. independentes, então

$$\mathrm{Cov(X, Y) = 0}$$

Demonstração: Temos que,

$$\mathrm{Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)}$$

Como X e Y são independetes, então

$$\mathrm{E(XY) = E(X).E(Y)}$$

Assim, $\mathrm{Cov(X, Y) = E(X).E(Y) - E(X)E(Y) = 0}$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Variável Aleatória Bidimensional

Se a Cov(X, Y)=0, então X e Y são independentes?

Vamos ver um exemplo para responder.

P(X=x, Y=y)	X				
Y		0	1	2	P(Y=y)
	1	3/20	3/20	2/20	8/20
	2	1/20	1/20	2/20	4/20
	3	4/20	1/20	3/20	8/20
	P(X=x)	8/20	5/20	7/20	1,00

Variável Aleatória Bidimensional

A covariância é expressa nas unidades de X e nas de Y, simultaneamente, o que introduz algumas dificuldades quando se pretende fazer comparações. Para ultrapassar este inconveniente, pode calcular-se o **coeficiente de correlação linear (ρ_{XY})**:

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X).\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{E[(X - \mu_X).(Y - \mu_Y)]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X).\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

O coeficiente de correlação linear toma valores no seguinte intervalo:

$$-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Aula de hoje

- Função massa de probabilidade conjunta para duas variáveis aleatórias discretas;
- Funções massa de probabilidade marginais;
- Função densidade de probabilidade conjunta para duas variáveis aleatórias contínuas;
- Funções densidade de probabilidade marginais;
- Função massa de probabilidade condicional;
- Função densidade de probabilidade condicional;
- Variáveis Aleatórias Independentes;
- Covariância e Correlação.

Referências

DEVORE, J. L.; CORDEIRO, M. T. A. **Probabilidade e estatística: para engenharia e ciências**. Cengage Learning Edições Ltda., 2014.

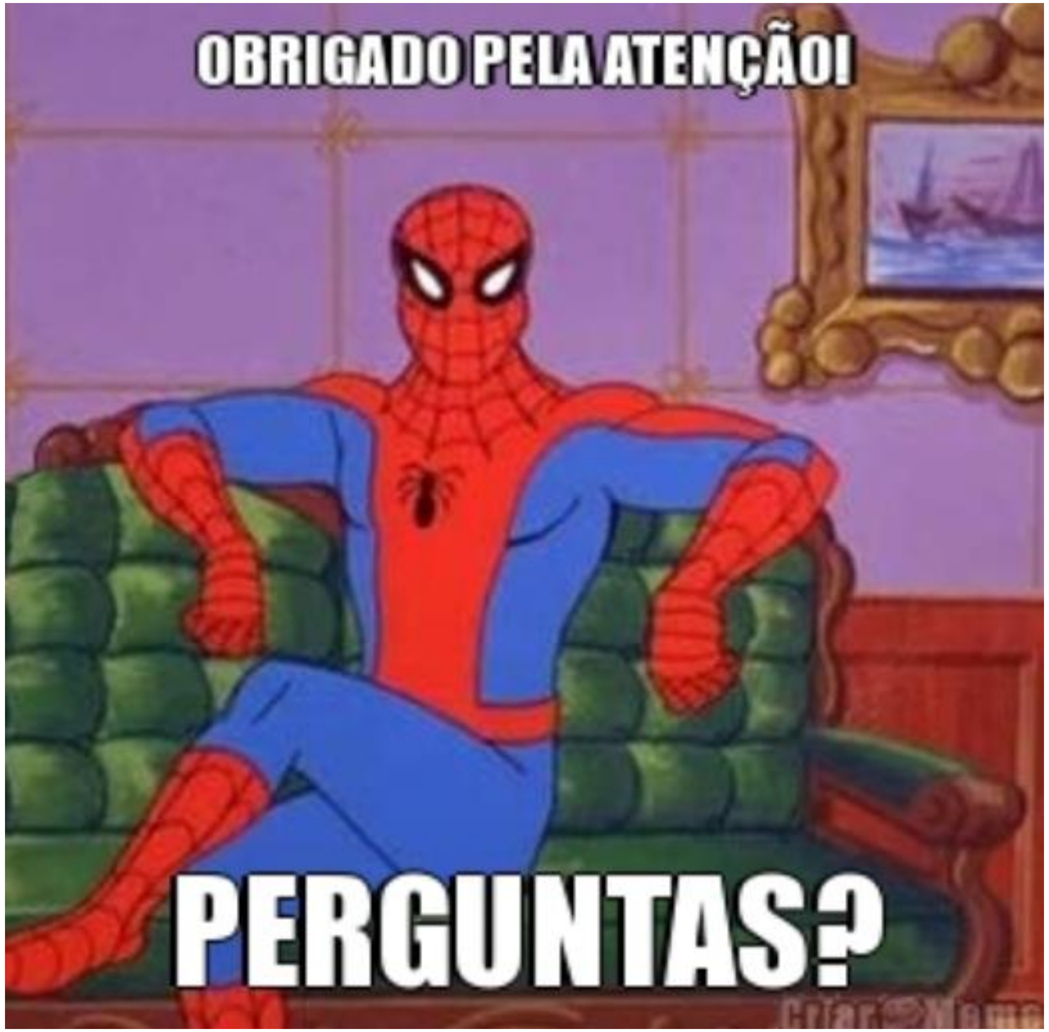
MAGALHÃES, M. N. **Probabilidade e variáveis aleatórias**. Edusp, 2006.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros**. 6 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018. 628p.

MORETTIN, P. A.; BUSSAB, W. O. **Estatística básica**. 9 ed. São Paulo: Saraiva, 2017. 554p.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

CLASS FINISHED



UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933