Aula 6: Séries alternadas

6.1 Séries alternadas

As séries cujos termos alternam entre positivo e negativo são chamadas **séries alternadas**. Por exemplo:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

Em geral, uma série alternada tem as seguintes formas:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots \tag{6.1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots \tag{6.2}$$

O teorema a seguir nos fala sobre a convergência de uma série alternada.

Teorema 6.1. (Teste da série alternada)

Uma série alternada da forma (6.1) *ou da forma* (6.2) *converge se satisfizer as duas condições:*

(i) $a_k \geq a_{k+1}$ *para todo* k.

(ii) $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

♡

Exemplo 6.1 Determine se as séries são convergente ou divergentes:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k^2}{k^3+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{3k}{4k-1}$

Resolução:

(a) Vamos verificar se $a_k = (-1)^{k+1}\dfrac{k^2}{k^3+1}$ satisfaz as duas hipóteses do **Teorema 6.1**.

(i) Seja $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3+1}$, então

$$f'(x) = \frac{2x(x^3+1) - x^2(3x^2)}{(x^3+1)^2} = \frac{2x^4 + 2x - 3x^4}{(x^3+1)^2} = \frac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2}.$$

Como estamos considerando apenas x positivo, temos que $f'(x) < 0$ se $(2 - x^3) < 0$, isto é, se $x > \sqrt[3]{2}$. Então, f decresce no intervalo $(\sqrt[3]{2}, +\infty)$. Isto significa que $f(k+1) < f(k)$ e, portanto $a_{k+1} < a_k$ quando $k \geq 2$.

(ii) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{k^3+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k^3}} = 0.$

Portanto, a série converge.

(b) Note que

(ii) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{3k}{4k-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{3}{4-\frac{1}{k}} = \frac{3}{4} \neq 0.$

Como o item (ii) do **Teorema 6.1** não é satisfeito, a série diverge.

6.2 Convergência absoluta

A série

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^6} + \cdots$$

não se ajusta a nenhuma das séries estudadas até aqui (há uma mistura de sinais, mas não é alternada).

Definição 6.1. (Convergência absoluta)

Dizemos que uma série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

converge absolutamente *se a série de valores absolutos*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$$

convergir e dizemos que ***diverge absolutamente*** *se a série de valores absolutos divergir.* ♣

Teorema 6.2. (Convergência absoluta)

Se a série $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *convergir, então a série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *também converge.* ♡

Exemplo 6.2 Determine se as seguintes séries convergem absolutamente.

(a) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^6} + \cdots$

(b) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$

Resolução:

(a) A série de valores absolutos é a série geométrica convergente $\left[r = (1/2) < 1\right]$:

$$|1| + \left|-\frac{1}{2}\right| + \left|-\frac{1}{2^2}\right| + \left|\frac{1}{2^3}\right| + \left|\frac{1}{2^4}\right| + \left|-\frac{1}{2^5}\right| + \left|-\frac{1}{2^6}\right| + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

Portanto, a série dada é absolutamente convergente.

(b) A série de valores absolutos é a série harmônica divergente,

$$|1| + \left|-\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{1}{3}\right| + \left|-\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{1}{5}\right| + \left|-\frac{1}{6}\right| + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Assim, a série dada diverge.

6.3 Convergência condicional

Definição 6.2. (Convergência condicional)

Uma série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *é chamada* ***condicionalmente convergente*** *se ela for convergente, mas não for absolutamente convergente.* ♣

Exemplo 6.3 A série harmônica alternada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge, pois

(i) $a_{k+1} < a_k$ porque $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}$ para todo k.

(ii) $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$.

Porém, a série de valores absolutos diverge. Assim, a série harmônica alternada é condicionalmente convergente.

6.4 Teste da razão

O teste da razão é usado frequentemente para determinar se uma dada série é absolutamente convergente.

Teorema 6.3. (Teste da razão)

Seja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *uma série infinita dada, onde* a_k *é não nulo e seja*

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = L.$$

Então:

- **(a)** *Se* $L < 1$, *a série dada é absolutamente convergente.*
- **(b)** *Se* $L > 1$ *ou se* $L = +\infty$, *a série dada é divergente.*
- **(c)** *Se* $L = 1$, *o teste é inconclusivo.*

♡

Exemplo 6.4 Use o teste da razão para determinar se as séries convergem ou divergem:

- **(a)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k k^3}{3^k}$
- **(b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^k}{k!}$
- **(c)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}$

Resolução:

(a) Temos que

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{k+1}(k+1)^3}{3^{k+1}}}{\frac{(-1)^k k^3}{3^k}}\right| &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\cancel{(-1)^k}(-1)(k+1)^3}{\cancel{3^k}\cdot 3}\cdot\frac{\cancel{3^k}}{\cancel{(-1)^k}\cdot k^3}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)}{3}\cdot\left(\frac{k+1}{k}\right)^3\right| \\ &= \frac{1}{3}\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^3 = \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3} < 1.\end{aligned}$$

Portanto, pelo teste da razão, a série dada é absolutamente convergente e, portanto convergente.

(b) Temos que

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{k^k}\right| &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)^k\cdot\cancel{(k+1)}}{\cancel{(k+1)}\cancel{k!}}\cdot\frac{\cancel{k!}}{k^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k\\ &= \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \mathrm{e} > 1.\end{aligned}$$

Portanto, a série diverge.

(c) Note que

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{2(k+1)-1}\cdot(2k-1)\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{2k-1}{2k+1}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{\cancel{k}\left(2-\frac{1}{k}\right)}{\cancel{k}\left(2+\frac{1}{k}\right)} = 1.$$

Neste caso, o teste da razão é inconclusivo.

Exercícios

1. Teste a série para convergência ou divergência:

(a) $-\frac{1}{3}+\frac{2}{4}-\frac{3}{5}+\frac{4}{6}-\frac{5}{7}+\cdots$

(b) $\frac{4}{7}-\frac{4}{8}+\frac{4}{9}-\frac{4}{10}+\frac{4}{11}-\cdots$

(c) $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\frac{1}{\ln 6}-\cdots$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{3k-1}$

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{3k-1}{2k+1}$

(g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2k}{4k^2+1}$

(h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{4k^2+1}$

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sqrt{k}}{1+2\sqrt{k}}$

(j) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k^2}{k^3+4}$

(k) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{1/k}}{k}$

(l) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k}\frac{k}{\ln k}$

(m) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\ln k}{k}$

(n) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(k\pi)}{k^{3/4}}$

(o) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(k\pi/2)}{k!}$

(p) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\cos\left(\frac{\pi}{k}\right)$

2. Use o teste da razão para determinar se a série converge ou diverge. Se o teste for inconclusivo, aponte isso.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^{k}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2^k}{k!}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{3^k}{k^2}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{k}{5^k}$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{k^3}{e^k}$

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{(2k-1)!}{3^k}$

3. Classifique a série como absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{3k}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{4/3}}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-4)^{k}}{k^2}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{k}$

(f) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^{k}\ln k}{k}$

(g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{k+2}{k(k+3)}$

(h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{k^2}{k^3+1}$

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right)$

(j) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} k}{k^3}$

(k) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k}\frac{1}{k\ln k}$

(l) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k}\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$

(m) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\cos(k\pi)}{k^2+1}$

(n) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}k!}{(2k-1)!}$

(o) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{3^{2k-1}}{k^2+1}$

Respostas:

1. (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{k}{k+2}$ · Diverge.

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{4}{k+6}$ · Converge.

   (c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k}\frac{1}{\ln k}$ · Converge.

   (d) Converge.

   (e) Converge.

   (f) Diverge.

   (g) Converge.

   (h) Converge.

   (i) Diverge.

   (j) Converge.

   (k) Converge.

   (l) Diverge.

   (m) Converge.

   (n) Converge.

   (o) Converge.

   (p) Diverge.

2. (a) Converge absolutamente.

   (b) Converge absolutamente.

   (c) Diverge.

   (d) Converge absolutamente.

(e) Converge absolutamente.

(f) Diverge.

3. (a) Condicionalmente convergente.

   (b) Absolutamente convergente.

   (c) Divergente.

   (d) Abslutamente convergente.

   (e) Condicionalmente convergente.

   (f) Condicionalmente convergente.

   (g) Condicionalmente convergente.

   (h) Condicionalmente convergente.

   (i) Divergente.

   (j) Absolutamente convergente.

   (k) Condicionalmente convergente.

   (l) Condicionalmente convergente.

   (m) Condicionalmente convergente.

   (n) Absolutamente convergente.

   (o) Divergente.