Cálculo em Várias Variáveis
Integrais triplas

ICT-Unifesp

1. Integrais triplas

Mais detalhes nas Seção 15.6 do livro do Stewart.
Recurso disponível online pela Biblioteca do ICT.

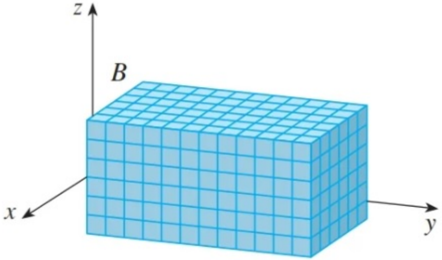
Integrais triplas

Integrais triplas

Considere uma função $f : B \to \mathbb{R}$ definida no paralelepípedo

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ r \leq z \leq s\}$$

Dividimos B em sub-paralelepípedos.

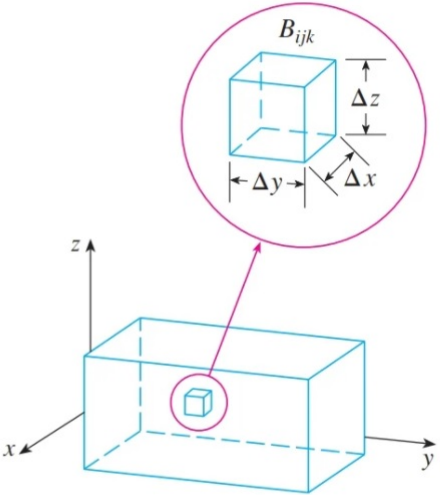


Dividimos do intervalo $[a, b]$ em ℓ intervalos de mesmo comprimento $\Delta x = (b - a)/\ell$.

Dividimos do intervalo $[c, d]$ em m intervalos de mesmo comprimento $\Delta y = (d - c)/m$.

Dividimos do intervalo $[r, s]$ em n intervalos de mesmo comprimento $\Delta z = (s - r)/n$.

Integrais triplas



Assim, obtemos a Soma de Riemann:

$$\sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\Delta V,$$

onde $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ é um ponto qualquer em B_{ijk}.

Assim, obtemos a Soma de Riemann:

$$\sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\Delta V,$$

onde $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ é um ponto qualquer em B_{ijk}.

Definição

Analogamente à integral dupla, definimos

$$\iiint_B f(x,y,z)dV = \lim_{\ell,m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\Delta V,$$

caso o limite exista.

Integrais triplas

Teorema (Teorema de Fubini para integrais triplas)

Se f é uma função contínua no paralelepípedo

$$B = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ r \leq z \leq s\right\},$$

então

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz\,.$$

Na integral acima, integramos primeiramente com relação a x, tratando y e z como constantes. Em seguida, integramos com relação a y, tratando z como uma constante. Finalmente, integramos com relação a z.

Se f é contínua, existem ao todo 6 ordens possíveis de integração que fornecem o mesmo valor para a integral tripla.

Por exemplo, se integrarmos primeiramente com relação a y, depois com relação a z e em seguida com relação a x, obtemos

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \int_r^s \int_c^d f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx.$$

Exemplo

Calcule a integral tripla

$$\iiint_B xyz^2 \, dV \, ,$$

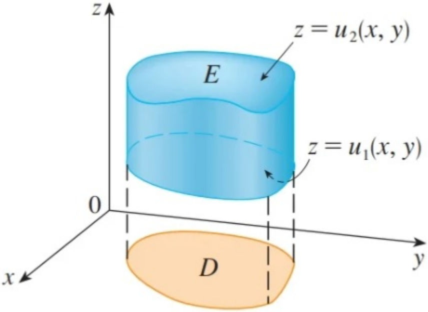
em que B é o paralelepípedo definido por

$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq x \leq 1, \; -1 \leq y \leq 2, \; 0 \leq z \leq 3\right\}.$$

Região sólida do tipo 1: Está contida entre os gráficos de duas funções contínuas de x e de y, ou seja,

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in D,\ u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\right\},$$

em que $D \subset \mathbb{R}^2$ é a projeção de E sobre o plano xy.



Integrais triplas

Se E é uma região do tipo 1, então

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dA.$$

Neste caso, na integral dentro dos colchetes, x e y são tratados como constantes em relação a z, de modo que $u_1(x,y)$ e $u_2(x,y)$ também são tratados como constantes em relação a z.

Integrais triplas

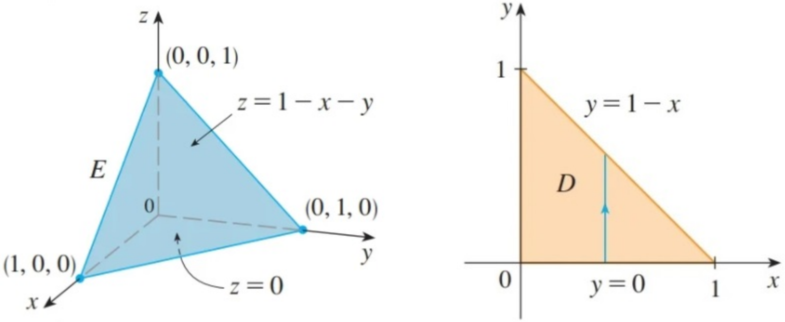
Exemplo

Calcule a integral tripla

$$\iiint_E z\, dV,$$

em que E é o tetraedro sólido delimitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$.

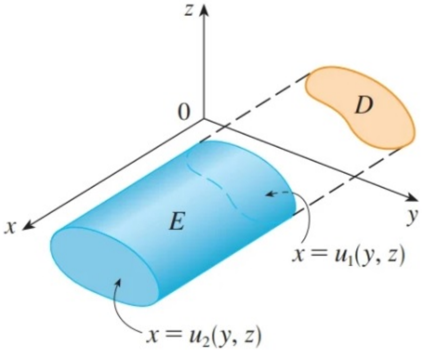
A região E e sua projeção sobre o plano xy:



Região sólida do tipo 2: Está contida entre os gráficos de duas funções contínuas de y e de z, ou seja,

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (y, z) \in D,\ u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\right\},$$

em que $D \subset \mathbb{R}^2$ é a projeção de E sobre o plano yz.



Integrais triplas

Se E é uma região do tipo 2, então

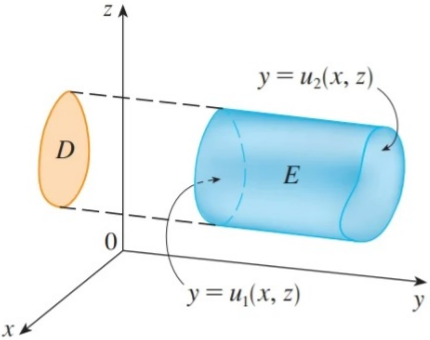
$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx\right] dA.$$

Neste caso, na integral dentro dos colchetes, y e z são tratados como constantes em relação a x, de modo que $u_1(y,z)$ e $u_2(y,z)$ também são tratados como constantes em relação a x.

Região sólida do tipo 3: Está contida entre os gráficos de duas funções contínuas de x e de z, ou seja,

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, z) \in D,\ u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\right\},$$

em que $D \subset \mathbb{R}^2$ é a projeção de E sobre o plano xz.



Se E é uma região do tipo 3, então

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy \right] dA.$$

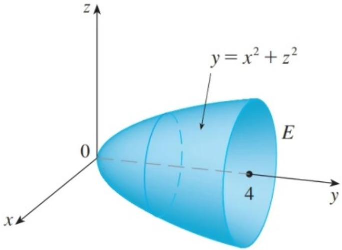
Neste caso, na integral dentro dos colchetes, x e z são tratados como constantes em relação a y, de modo que $u_1(x,z)$ e $u_2(x,z)$ também são tratados como constantes em relação a y.

Exemplo

Calcule a integral tripla

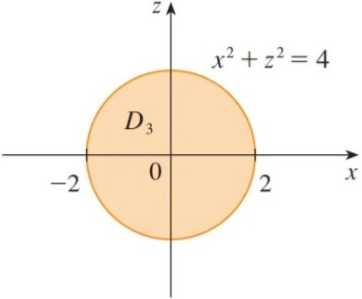
$$\iiint_E \sqrt{x^2+z^2}\, dV,$$

em que E *é a região delimitada pelo paraboloide* $y = x^2 + z^2$ *e pelo plano* $y = 4$.



Poderíamos interpretar E como uma região do tipo 1, o que resultaria numa integral tripla muito difícil de calcular.

Olhando E como uma região do tipo 3, sua projeção sobre o plano xz é o disco D_3: $x^2 + z^2 \leq 4$



Integrais triplas

A superfície lateral esquerda de E é o paraboloide $y = x^2 + z^2$,

A superfície lateral direita de E é o plano $y = 4$,

Tomando $u_1(x,z) = x^2 + z^2$ e $u_2(x,z) = 4$, obtemos

$$\iiint_E \sqrt{x^2+z^2}\, dV = \iint_{D_3} \int_{x^2+z^2}^{4} \sqrt{x^2+z^2}\, dy\, dA$$
$$= \iint_{D_3} (4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2+z^2}\, dA.$$

Integrais triplas

Usando coordenadas polares, obtemos

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV = \iint_{D_3} (4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2 + z^2}\, dA$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r\, r\, dr d\theta$$
$$= \cdots = \frac{128\pi}{15}.$$

Se $f(x, y, z) = 1$ para todo $(x, y, z) \in E$, então a integral tripla

$$V(E) = \iiint_E dV$$

representa o volume de E.

Integrais triplas

Seção 15.6 do Stewart: 1–26, 31, 32, 33, 35, 39.