

Aulas  
10-11

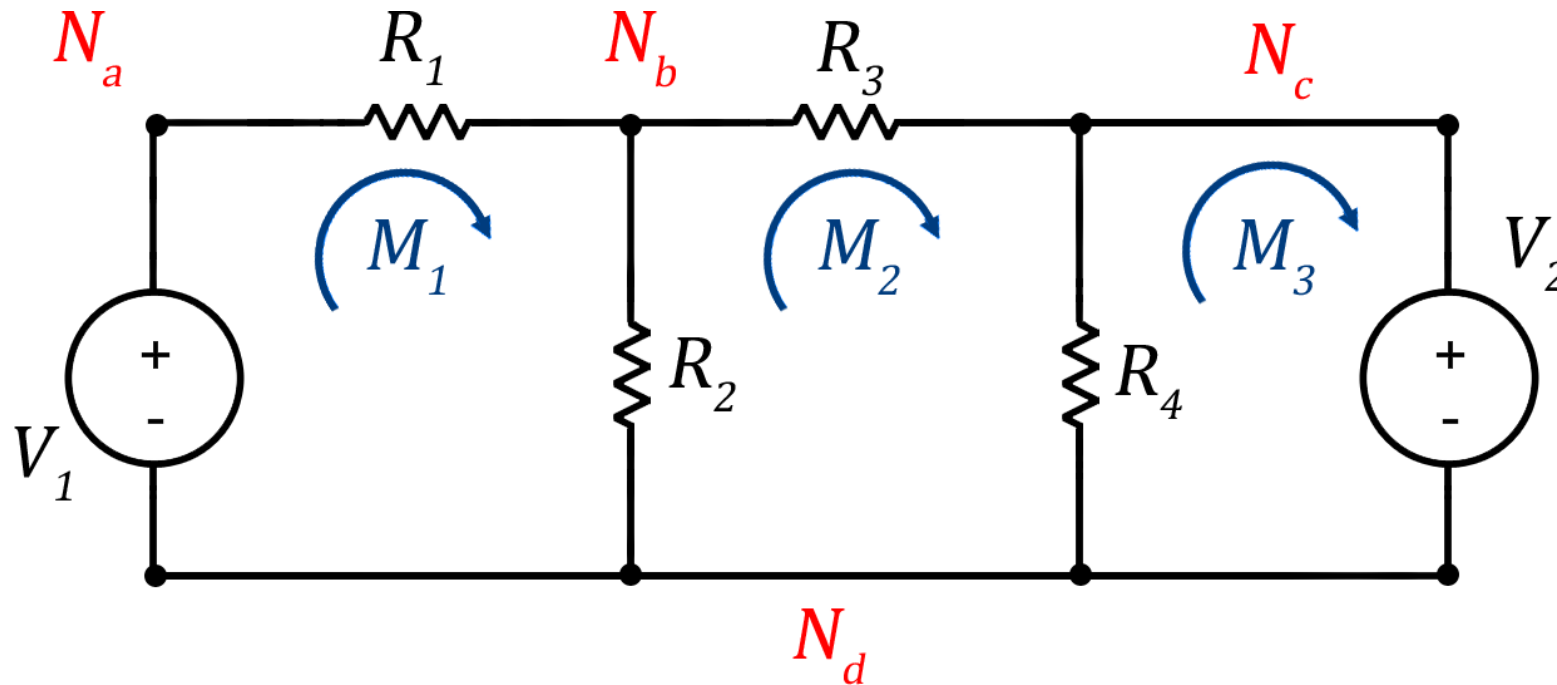
Técnicas de análise  
Tensões dos nós

Circuitos Elétricos I

Prof. Henrique Amorim - UNIFESP - ICT

- **Nó (n):** Ponto no qual dois ou mais elementos do circuito se juntam.
- **Ramo (b):** Caminho que liga dois nós (componente do circuito).
- **Caminho:** Um percurso que liga elementos de circuito sem passar mais de uma vez pelo mesmo elemento.
- **Caminho fechado (laço):** Um caminho cujos nós inicial e final coincidem.

- **Nó essencial (ne):** Um nó onde três ou mais elementos de circuito se unem
- **Ramo essencial (be):** Um caminho que liga dois nós essenciais sem passar por um nó essencial
- **Malha (m):** Um laço que não engloba outro laço
- **Circuito planar:** Um circuito que pode ser desenhado sobre um plano sem interseção de ramos



**Nós:**  $N_a$ ,  $N_b$ ,  $N_c$ ,  $N_d$

**Nós essenciais:**  $N_b$ ,  $N_c$ ,  $N_d$

**Ramos:**  $V_1$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$ ,  $V_2$

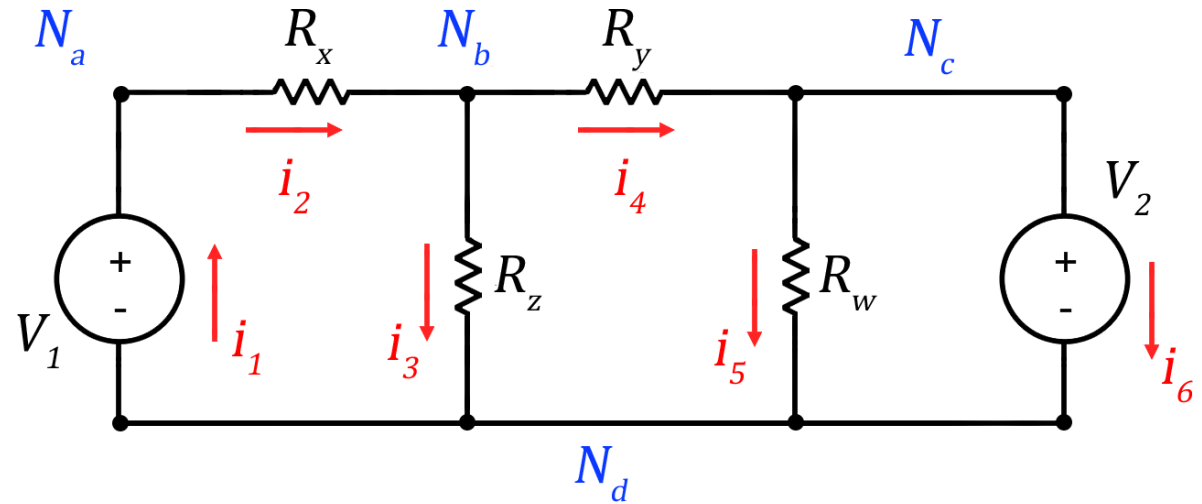
**Ramos essenciais:**  $V_1$ - $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$ ,  $V_2$

**Malhas:**  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$

**Circuito Planar**

# Resolução sistemática de um circuito

Para encontrarmos todas as relações de tensão ou corrente nos ramos, é necessário resolver um sistema de equações lineares cujo o número de incógnitas é igual ao número de ramos (b)



Analisando as correntes temos:

$$N_a \rightarrow i_1 = i_2$$

$$N_b \rightarrow i_2 = i_3 + i_4$$

$$N_c \rightarrow i_4 = i_5 + i_6$$

$$N_d \rightarrow i_1 = i_3 + i_5 + i_6$$

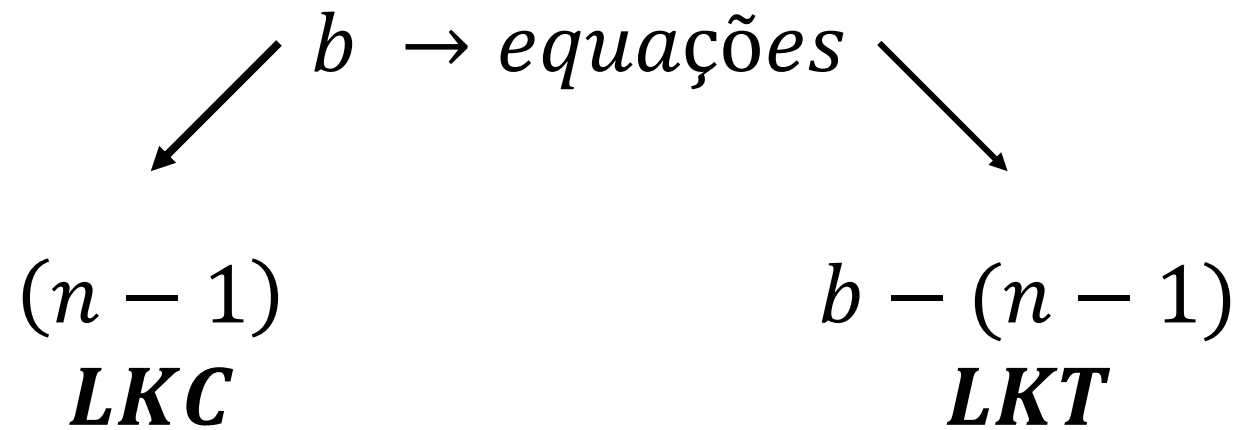
Se analisarmos todos os nós de um circuito o conjunto de equações resultante não será linearmente independente, pois a n-ésima equação sempre será derivada das demais

$$i_1 = i_3 + i_4 \rightarrow i_1 = i_3 + i_5 + i_6$$



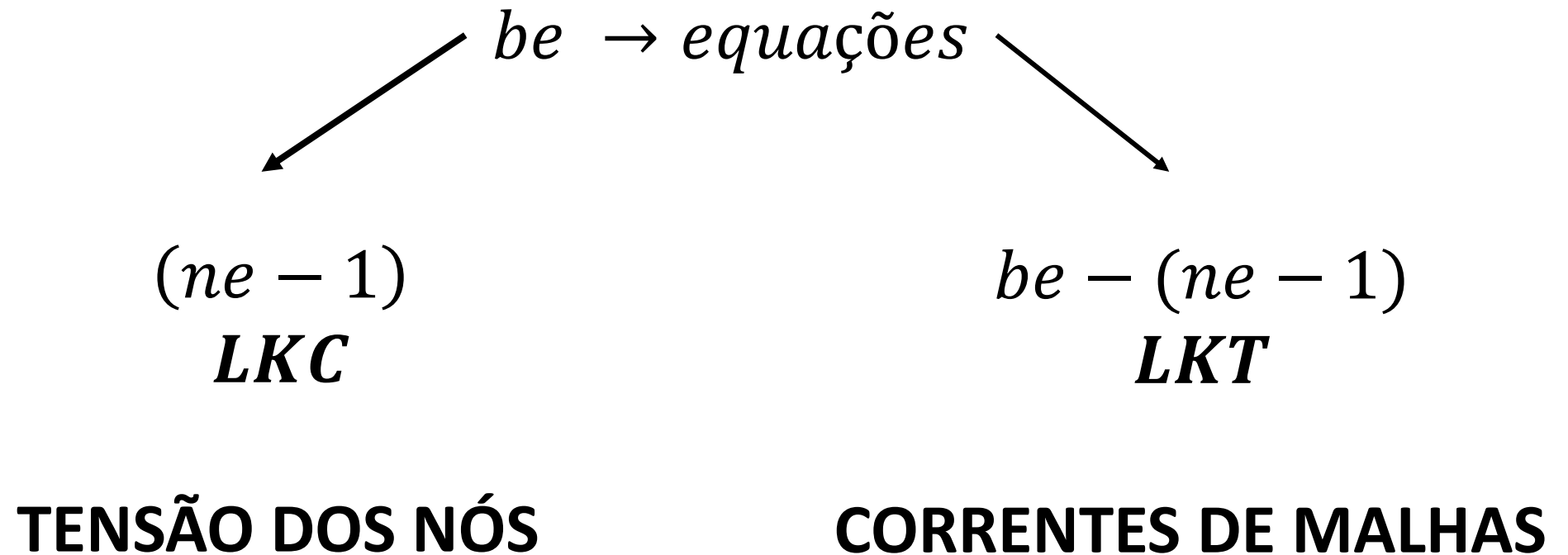
# Resolução sistemática de um circuito

O número de equações necessárias para encontrarmos todas as relações de tensão ou correntes em todos os ramos pode ser resumido no esquema abaixo




# Métodos de análise

A mesma relação pode ser realizada se analisarmos apenas nos nós e ramos essenciais, uma vez que a corrente não é dividida em ramos e nós NÃO essenciais



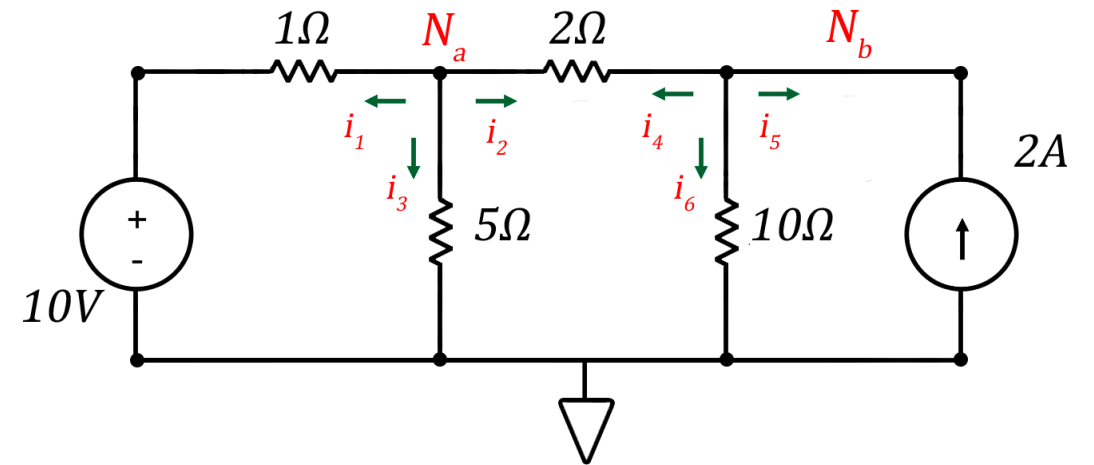
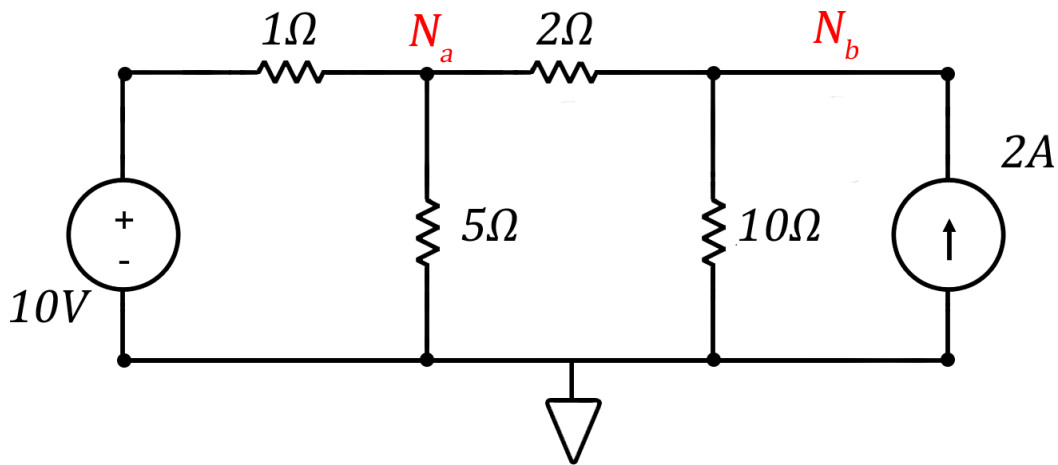
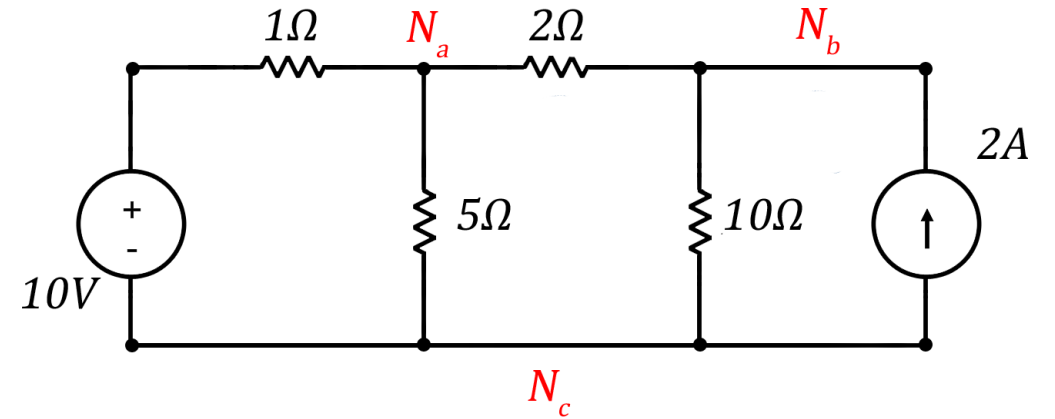
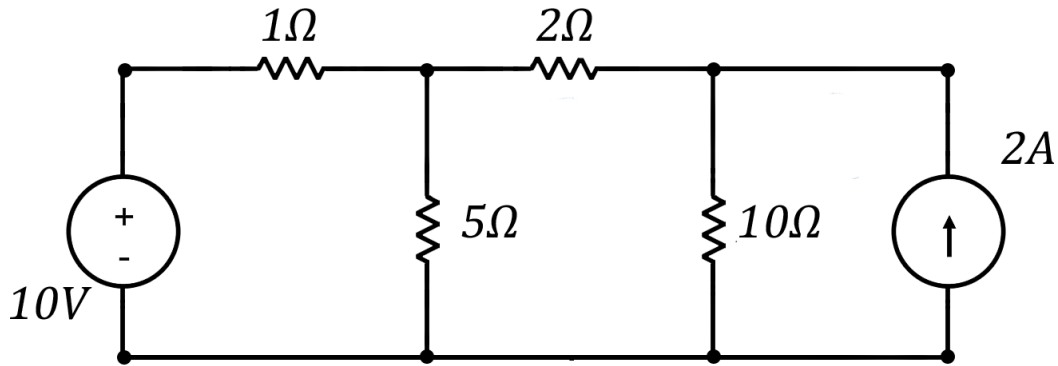
# Tensões dos nós - Manual

Lembrem-se que essas etapas devem ser compreendidas e não decoradas

1. Identificar os nós essenciais
  - O número de equações para encontrarmos as tensões dos nós, utilizando este método será igual a " $n-1$ "
2. Arbitrar um nó essencial como nó de referencia 
  - Representado pelo símbolo
  - Normalmente se definirmos o nó com maior número de ramos como nó de referência, o sistema de equações será mais simples (isso não é uma regra, cada circuito possui a sua peculiaridade)
3. A **TENSÃO DO NÓ** é definida como a elevação de tensão entre o nó de referência e os demais nós essenciais
4. Considerar que as correntes de dos nós **SAEM** dos nós essenciais (exceto o nó de referência)
  - Esta relação é um padrão adotado para padronizar a álgebra e facilitar a obtenção das equações
5. Calcular as tensões dos nós



# Tensões dos nós - Manual



# Tensões dos nós - Manual

$$N_a \rightarrow i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

$$N_b \rightarrow i_4 + i_5 + i_6 = 0$$

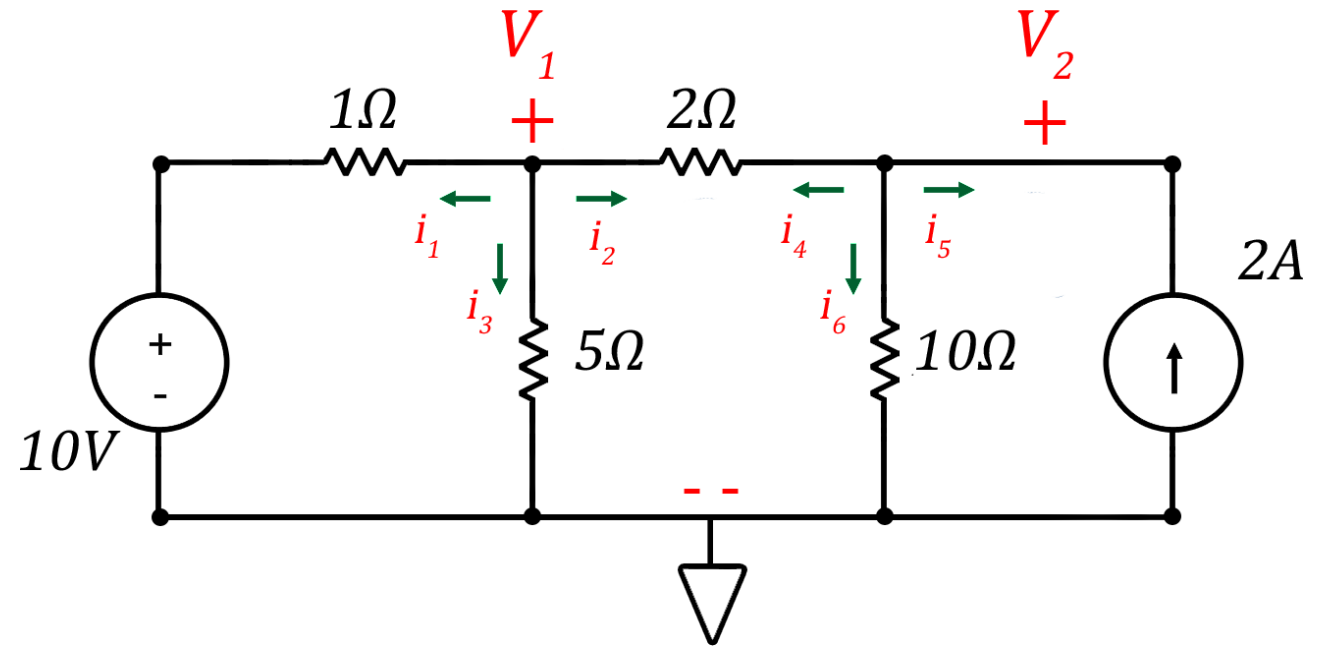
$$-v_1 + i_1 \cdot 1 + 10 = 0$$

$$i_1 = \frac{v_1 - 10}{1}$$

$$-v_1 + i_2 \cdot 2 + v_2 = 0$$

$$i_2 = \frac{v_1 - v_2}{2}$$

$$i_3 = \frac{v_1}{5}$$



$$i_4 = -i_2$$

$$i_4 = \frac{v_2 - v_1}{2}$$

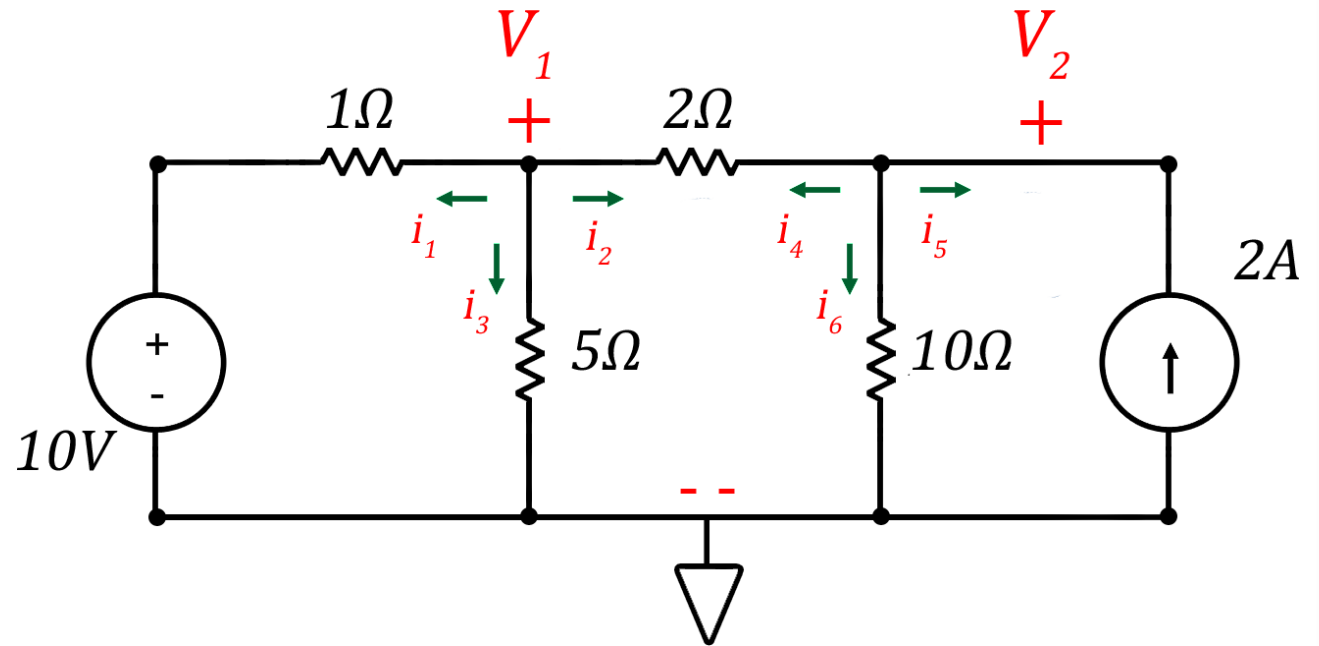
$$i_6 = \frac{v_2}{10}$$

$$i_5 = -2$$

# Tensões dos nós - Exemplo

$$N_a \rightarrow i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

$$N_b \rightarrow i_4 + i_5 + i_6 = 0$$



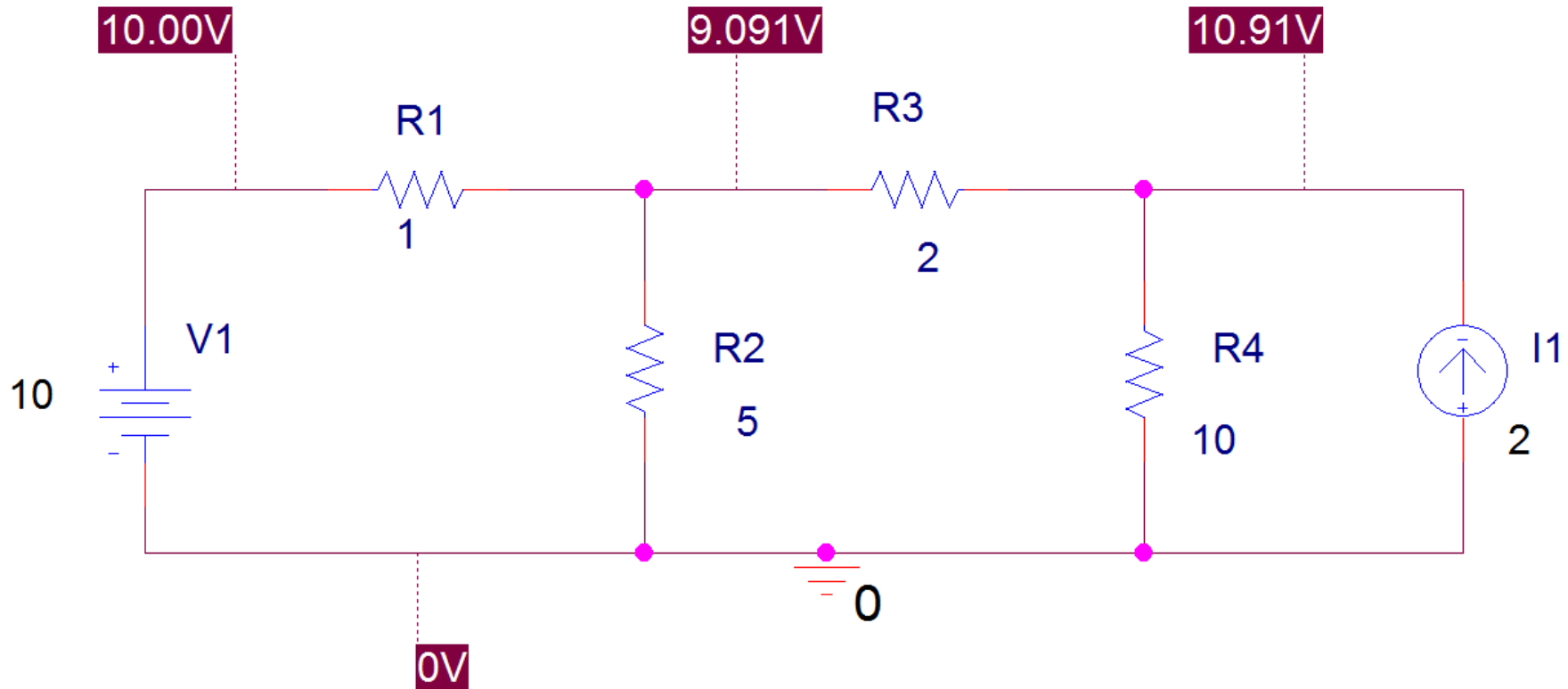
$$N_a \rightarrow \frac{v_1 - 10}{1} + \frac{v_1 - v_2}{2} + \frac{v_1}{5} = 0$$

$$N_b \rightarrow \frac{v_2 - v_1}{2} - 2 + \frac{v_2}{10} = 0$$

$$v_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) + v_2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 10$$

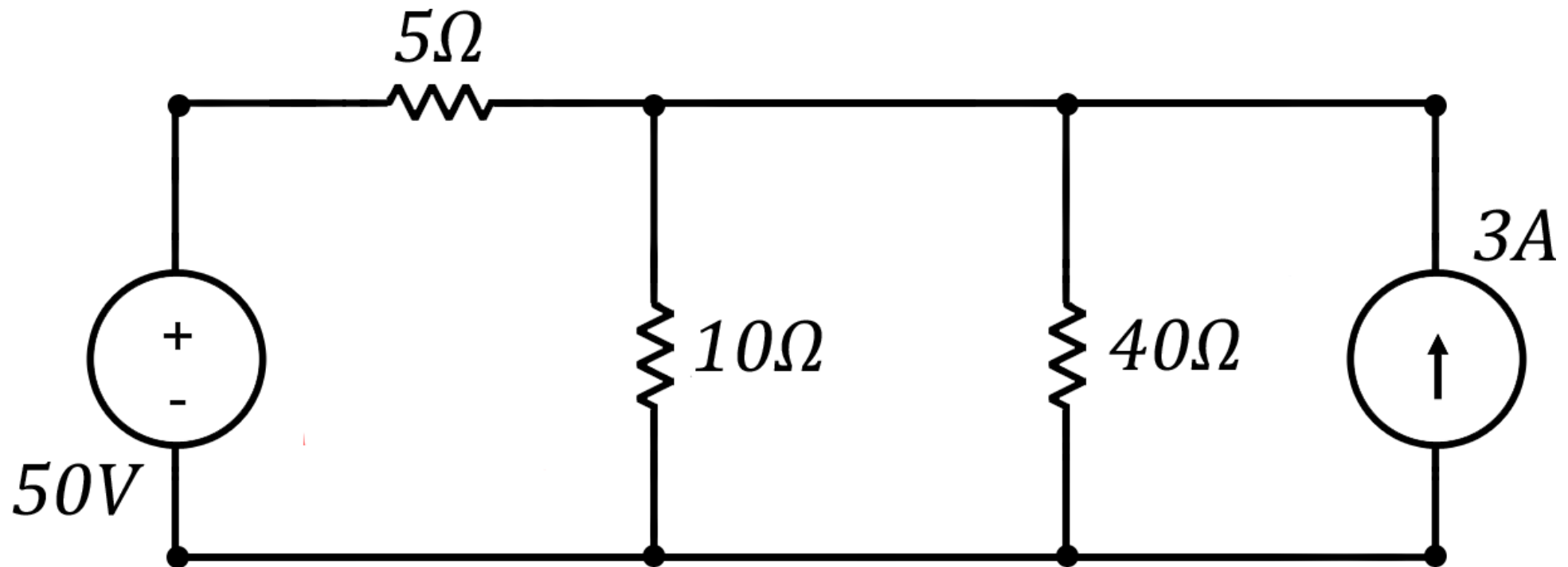
$$v_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + v_2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\right) = 2$$

# Tensões dos nós - Exemplo



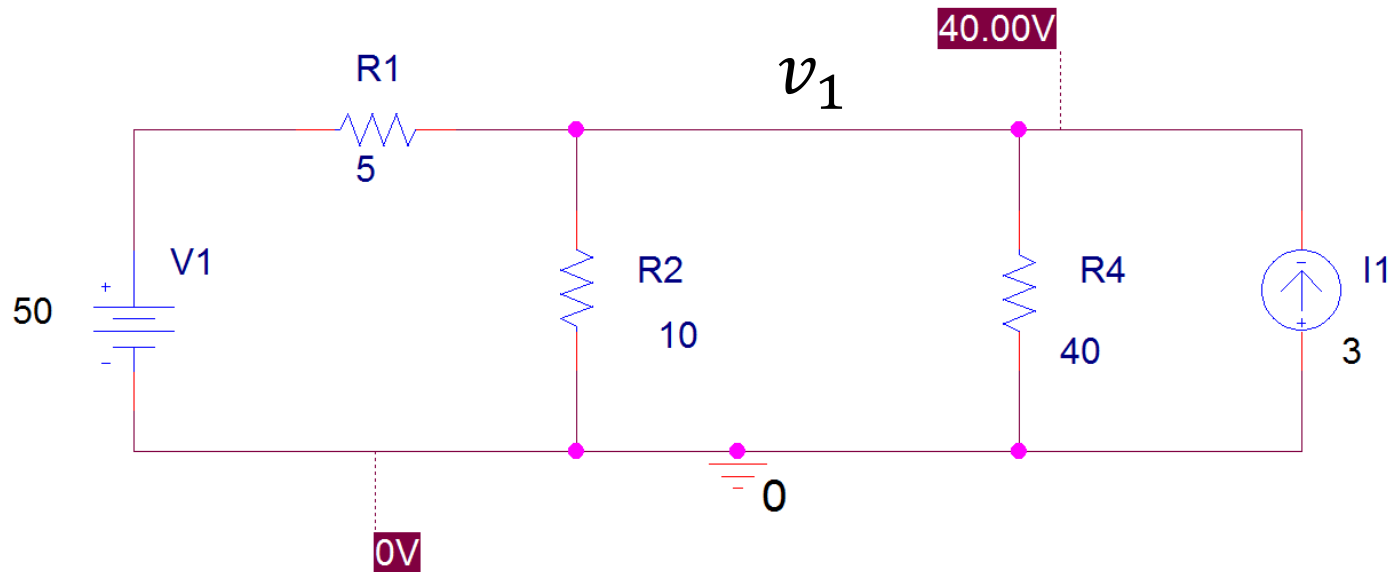
# Tensões dos nós - Exemplo

**Exercício:** Prove que a potência total é igual a zero



# Tensões dos nós - Exemplo

**Exercício:** Prove que a potência total é igual a zero



$$\frac{v_1 - 50}{5} + \frac{v_1}{10} + \frac{v_1}{40} - 3 = 0 \quad 0,325 \cdot v_1 = 13 \quad \therefore v_1 = 40V$$



**Exercício:** Prove que a potência total é igual a zero

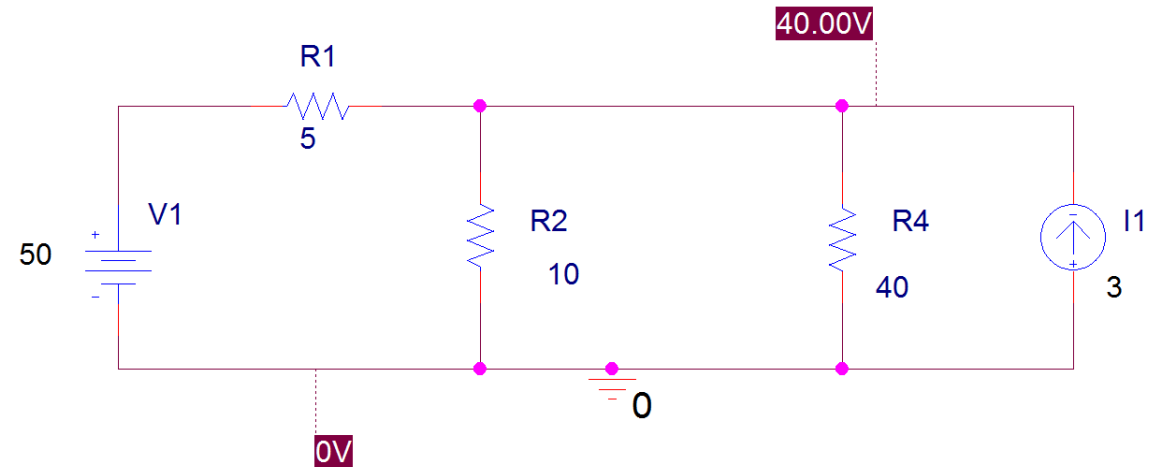
$$v_{5\Omega} = 40 - 50 = -10V$$

Corrente arbitrada na direção inversa

$$v_{10\Omega} = v_{40\Omega} = v_{3A} = 40$$

$$i_{5\Omega} = \frac{10}{5} = 2A$$

Elevação de tensão da fonte de tensão



$$P_{50V} = -50 \cdot 2 = -100W$$

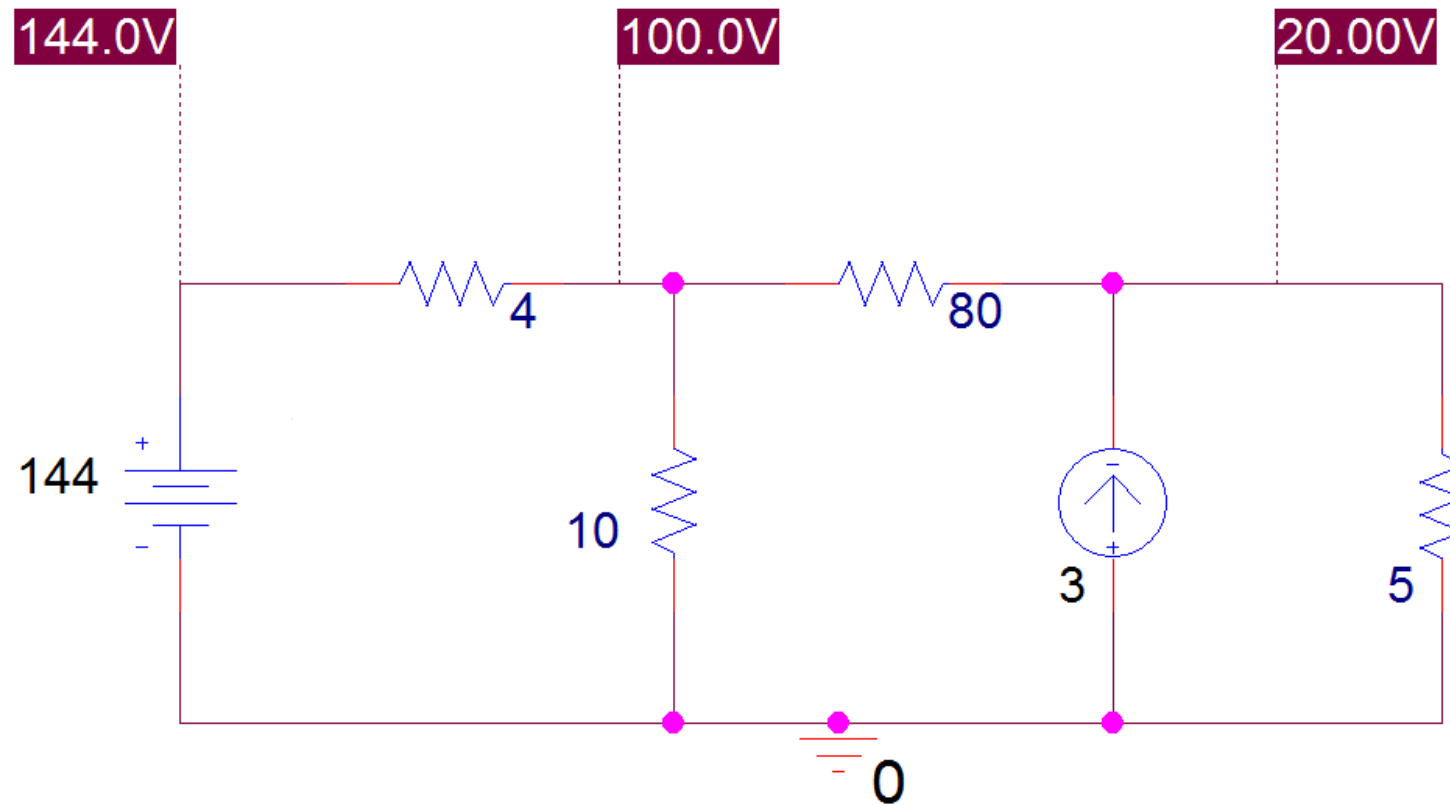
$$P_{3A} = -3 \cdot 40 = -120W$$

$$P_{5\Omega} = \frac{10^2}{5} = 20W$$

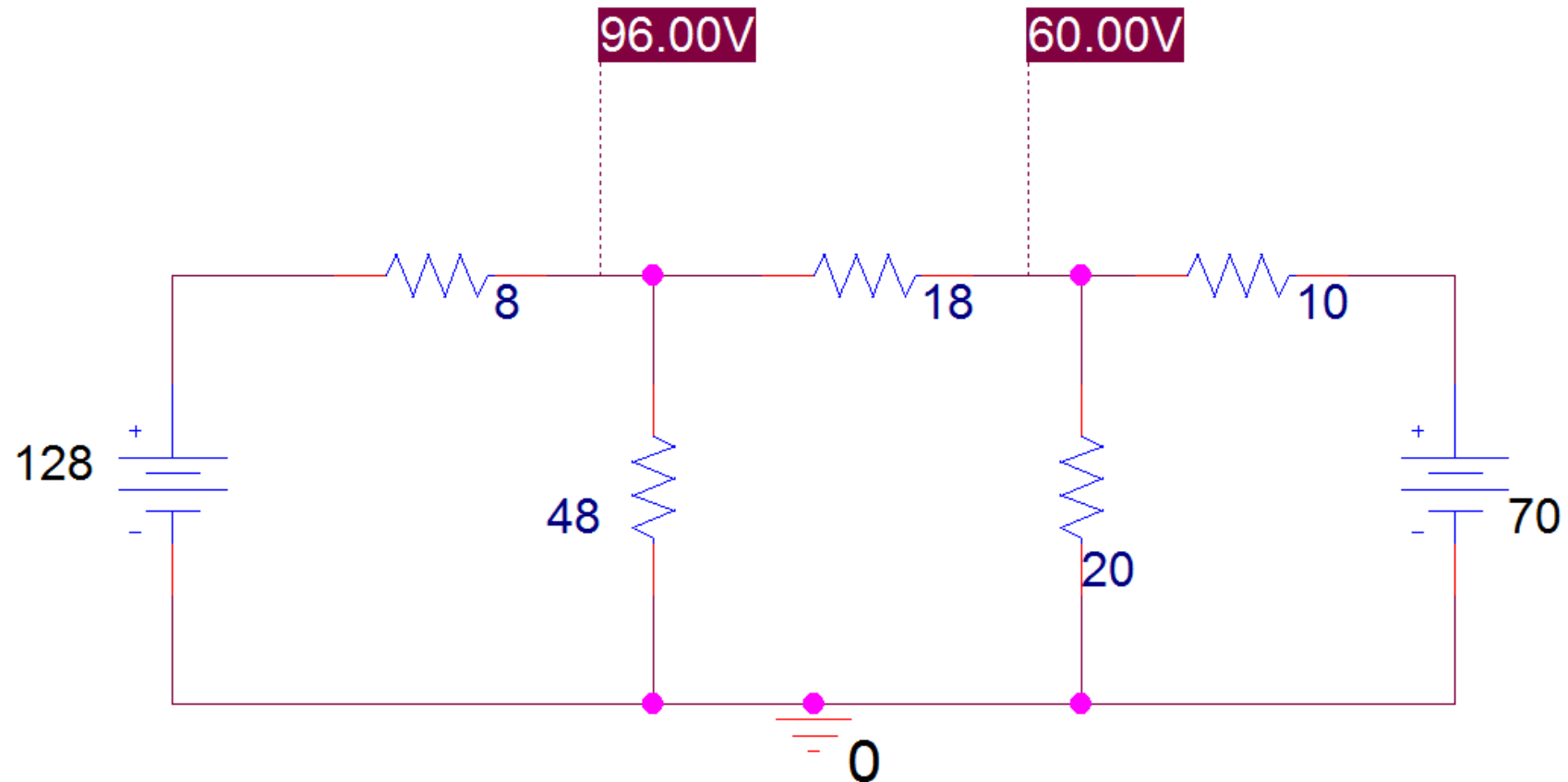
$$P_{10\Omega} = \frac{40^2}{10} = 160W$$

$$P_{40\Omega} = \frac{40^2}{40} = 40W$$

**Exercício:** Verifique se a simulação está correta

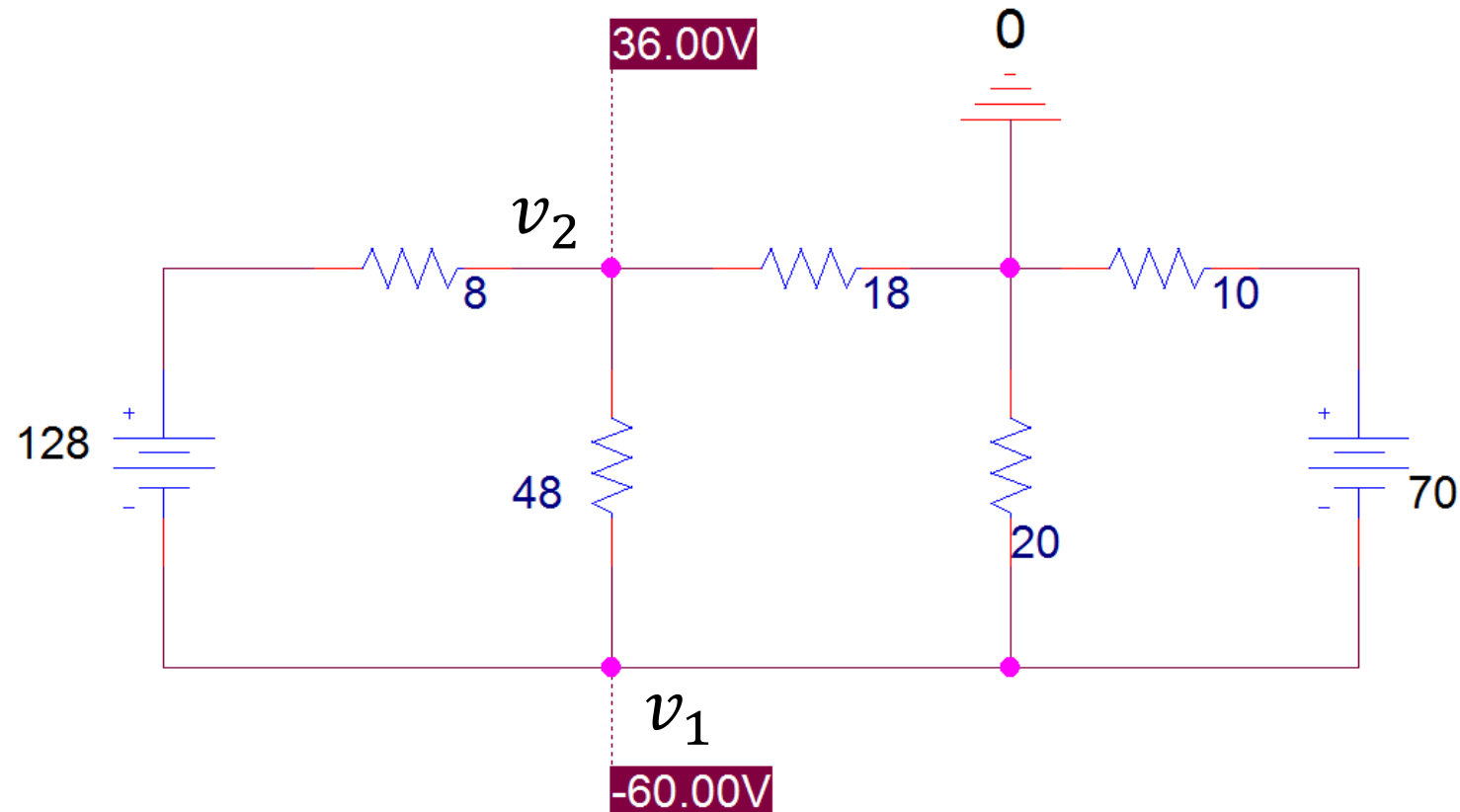


**Exercício:** Verifique se a simulação está correta



# Tensões dos nós

**Exercício:** Refaça o último exercício, porém inverta o nó de referência.



**Exercício:** Refaça o último exercício, porém inverta o nó de referência.

$$\frac{v_2}{18} + \frac{v_2 - 128 - v_1}{8} + \frac{v_2 - v_1}{48} = 0$$

$$\frac{v_1}{20} + \frac{v_1 + 70}{10} + \frac{v_1 - v_2}{48} + \frac{v_1 + 128 - v_2}{8} = 0$$

$$v_1 \cdot \left( -\frac{1}{8} - \frac{1}{48} \right) + v_2 \cdot \left( \frac{1}{18} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} \right) = \frac{128}{8}$$

$$v_1 \cdot \left( \frac{1}{20} + \frac{1}{10} + \frac{1}{48} + \frac{1}{8} \right) + v_2 \cdot \left( -\frac{1}{48} - \frac{1}{8} \right) = -\frac{70}{10} - \frac{128}{8}$$

$$-0,145 \cdot v_1 + 0,201 \cdot v_2 = 16$$

$$+0,296 \cdot v_1 - 0,145 \cdot v_2 = -23$$

$$v_1 = -60V$$

$$v_2 = +36V$$

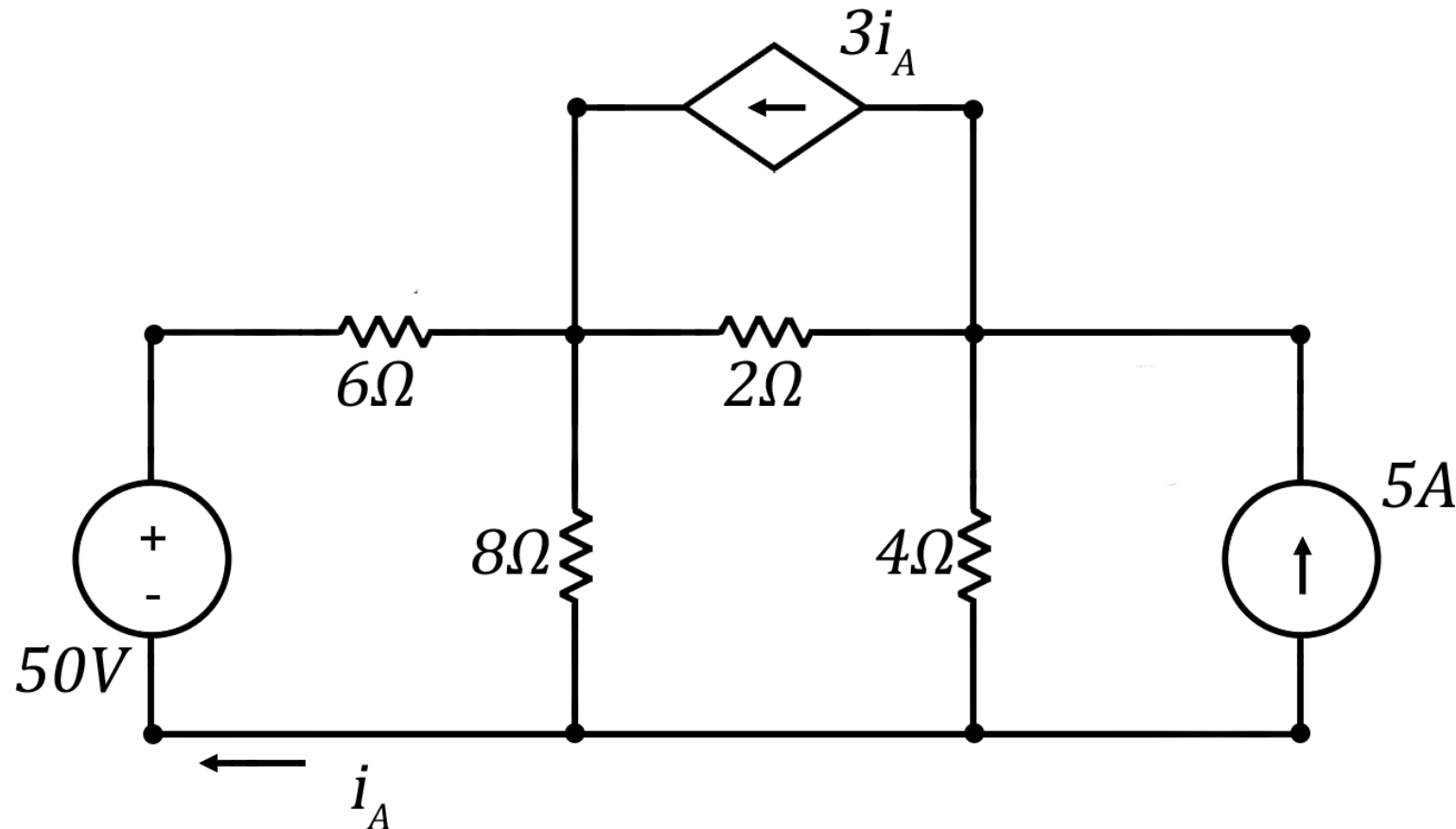
# Tensões dos nós – Casos Particulares

1. Circuitos com fontes dependentes
2. Fontes de tensão em paralelo a uma tensão de nó
3. O super nó.



# Tensões dos nós – Fonte dependente

**Exemplo:** Calcule as tensões dos nós



# Tensões dos nós – Fonte dependente

**Exemplo:** Calcule a tensão dos nós

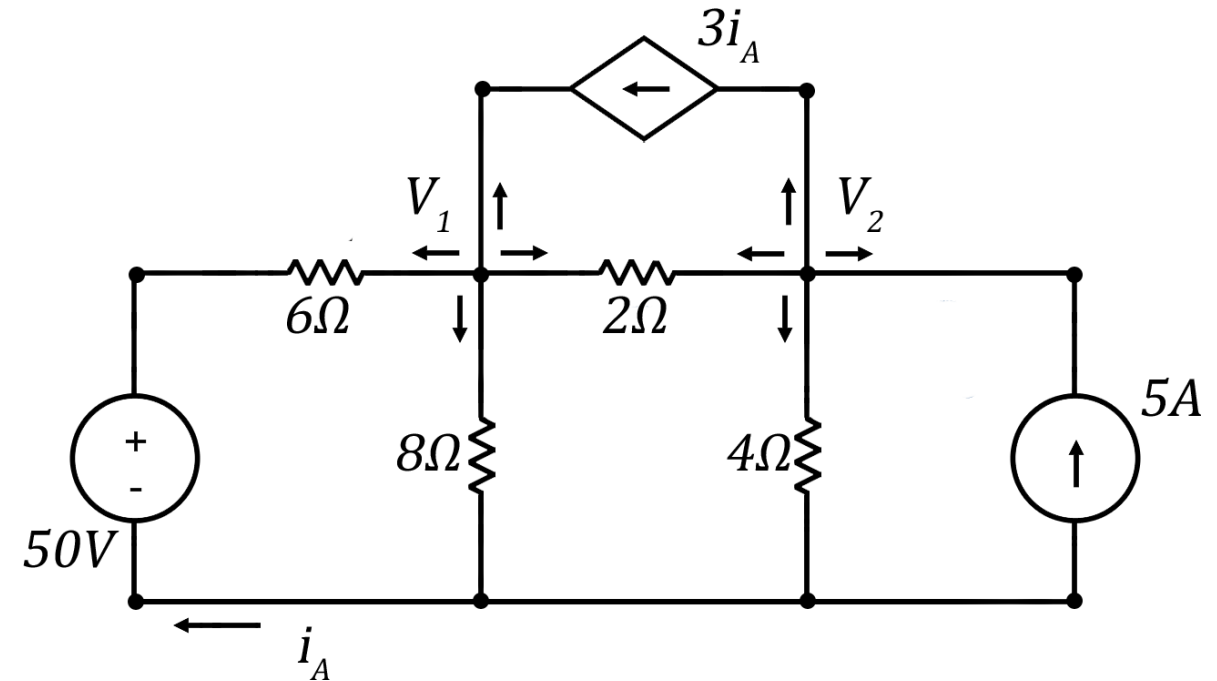
$$\frac{v_1 - 50}{6} + \frac{v_1}{8} + \frac{v_1 - v_2}{2} - 3 \cdot i_A = 0$$

$$-5 + \frac{v_2}{4} + \frac{v_2 - v_1}{2} + 3 \cdot i_A = 0$$

$$i_A = -i_{6\Omega} = \frac{50 - v_1}{6}$$

$$\frac{v_1 - 50}{6} + \frac{v_1}{8} + \frac{v_1 - v_2}{2} - \frac{50 - v_1}{2} = 0$$

$$-5 + \frac{v_2}{4} + \frac{v_2 - v_1}{2} + \frac{50 - v_1}{2} = 0$$



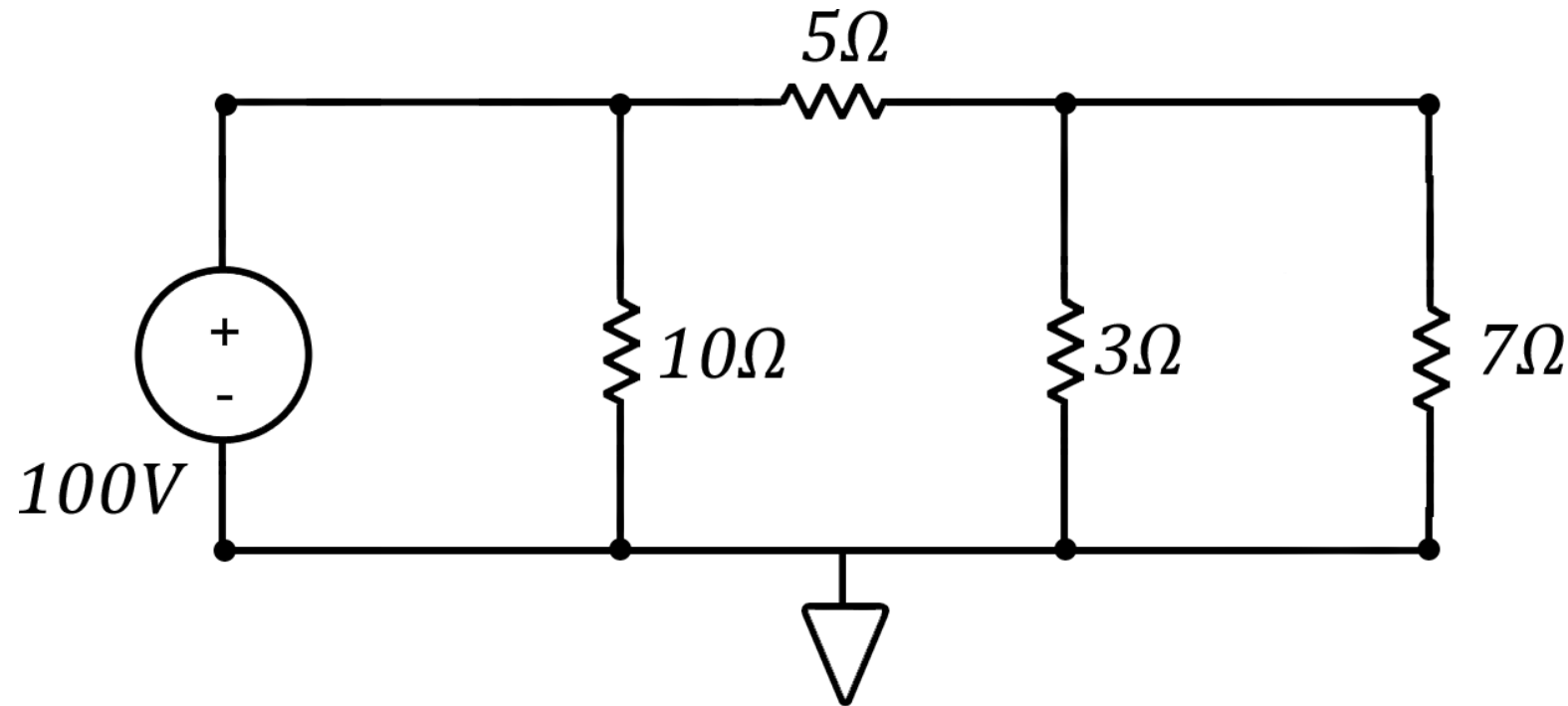
$$v_1 = 32V$$

$$v_2 = 16V$$

$$i_A = 3A$$

# Tensões dos nós – Fonte de tensão em paralelo

**Exemplo:** Calcule as tensões dos nós



# Tensões dos nós – Fonte de tensão em paralelo

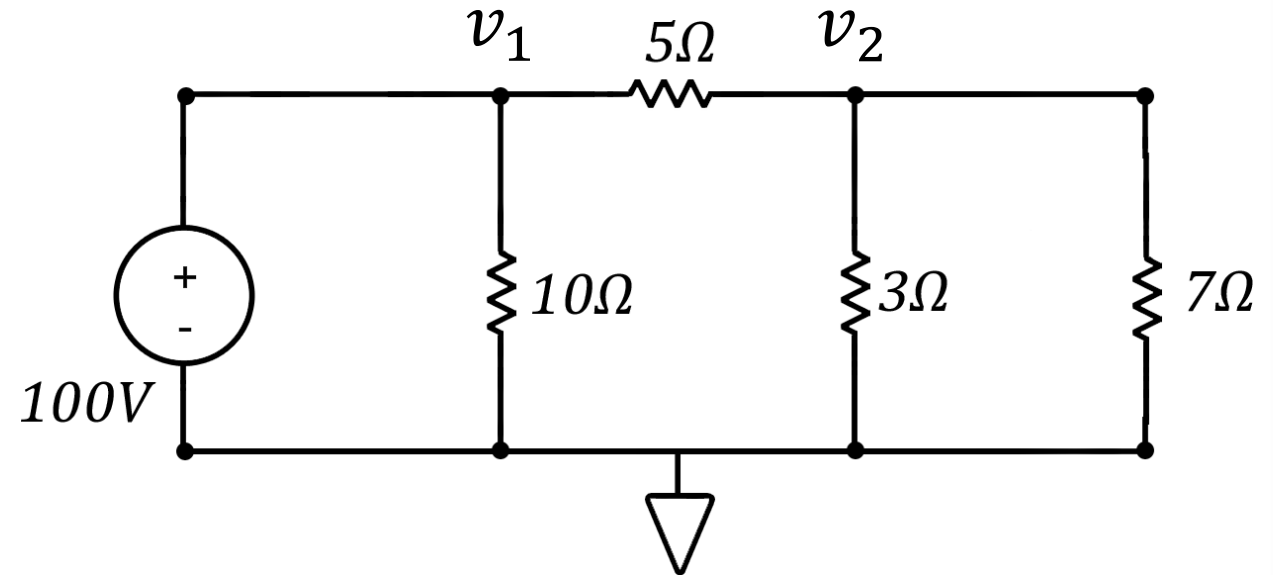
**Exemplo:** Calcule as tensões dos nós

Uma fonte de tensão conectada entre o nó de referência e um dos nós essenciais, reduz o número de variáveis desconhecidas

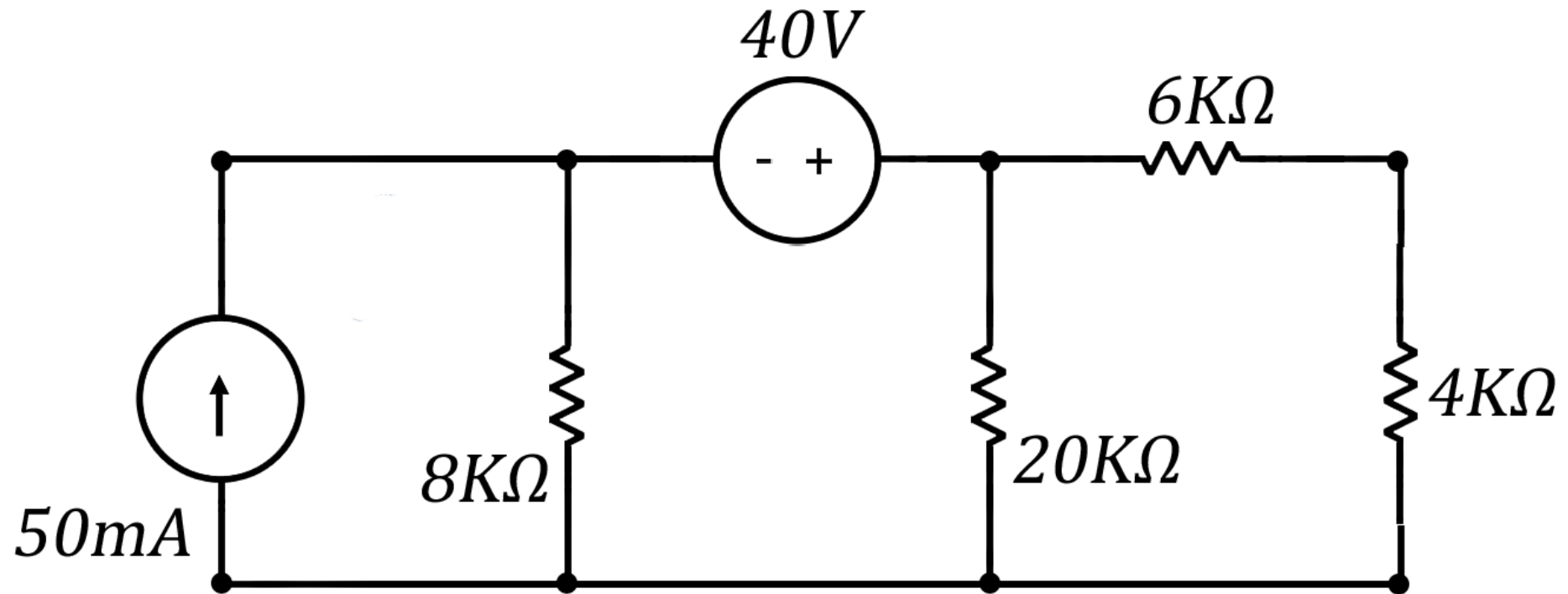
$$v_1 = 100V$$

$$\frac{v_2 - 100}{5} + \frac{v_2}{3} + \frac{v_2}{7} = 0$$

$$v_2 \cdot \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} \right) = \frac{100}{5} \quad \therefore \quad v_2 = 29,58V$$



# Tensões dos nós – Super nó



# Tensões dos nós – Super nó

$$-0,05 + \frac{v_1}{8K} + i_3 = 0$$

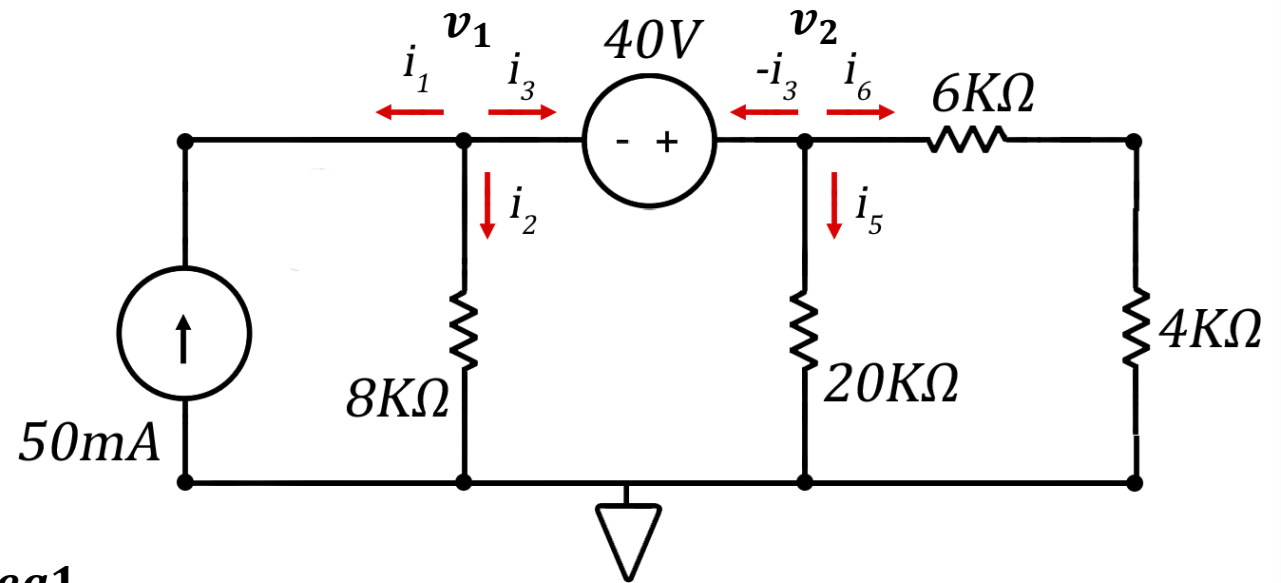
$$\frac{v_2}{20K} + \frac{v_2}{4K + 6K} - i_3 = 0$$

$$-v_1 - 40 + v_2 = 0$$

$$v_1 \cdot \left(\frac{1}{8K}\right) + v_2 \cdot (0) + i_3 \cdot (1) = 0,05 \rightarrow \text{eq1}$$

$$v_1 \cdot (0) + v_2 \cdot \left(\frac{1}{20K} + \frac{1}{10K}\right) + i_3 \cdot (-1) = 0 \rightarrow \text{eq2}$$

$$v_1 \cdot (-1) + v_2 \cdot (1) + i_3 \cdot (0) = 40$$



$$A \cdot X = B$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{8K} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{3}{20K} & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,05 \\ 0 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = 160V \quad v_2 = 200V \quad i_3 = 0,03A$$



# Tensões dos nós – Fonte de tensão em paralelo

Analisando a resposta temos:

$$eq1 + eq2 = v_1 \cdot \left(\frac{1}{8K}\right) + v_2 \cdot (0) + i_3 \cdot (1) + v_1 \cdot (0) + v_2 \cdot \left(\frac{1}{20K} + \frac{1}{10K}\right) + i_3 \cdot (-1) = 0,05$$

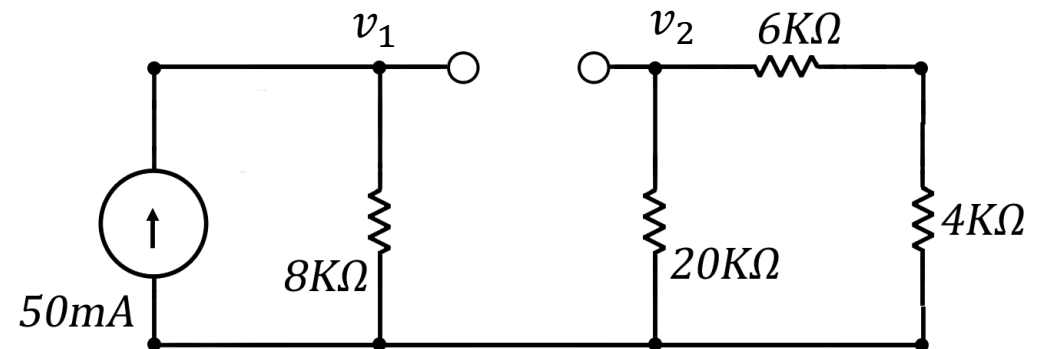
$$eq1 + eq2 = v_1 \cdot \left(\frac{1}{8K}\right) + v_2 \cdot \left(\frac{1}{20K} + \frac{1}{10K}\right) = 0,05$$

$$\text{equação de restrição} \rightarrow -v_1 - 40 + v_2 = 0$$

$$v_1 \cdot \left(\frac{1}{8K}\right) + (v_1 + 40) \cdot \left(\frac{1}{20K} + \frac{1}{10K}\right) = 0,05$$

$$v_1 = 160V$$

Representação do super nó



# Tensões dos nós – Exercício

**Exercício:** Prove que a potência total é igual a zero.

