# Aula 4: Testes de convergência

## 4.1 Observações

**Importante:** *Dada uma sequência* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$*, temos a liberdade de ajustar o índice inicial da série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$*. Observe que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1} = \sum_{k=3}^{\infty} a_{k-2} = \cdots = \sum_{k=n}^{\infty} a_{k-n+1}$$

*para qualquer* $n \in \mathbb{N}$*. Além disso, note que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \sum_{k=3}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k.$$

O objetivo é desenvolver vários testes que nos permitam determinar se uma dada série converge ou diverge.

**Importante:** *A convergência ou divergência de uma dada série não é afetada pela retirada de um número finito de termos. Em particular, para qualquer número inteiro* $K$*, as séries*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} a_k &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \\ \sum_{k=K}^{\infty} a_k &= a_K + a_{K+1} + a_{K+2} + \cdots \end{aligned}$$

*ambas convergem ou ambas divergem. Porém, estas séries têm somas diferentes.*

**Teorema 4.1**

*Se a série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *for convergente, então* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

**Demonstração** Consideremos a $n$-ésima soma parcial da série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$:

$$S_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}}_{S_{n-1}} + a_n.$$

Então, $a_n = S_n - S_{n-1}$. Como $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é convergente, a sequência $\{S_n\}$ é convergente. Seja $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Como $(n-1) \to \infty$ quando $n \to \infty$, também temos $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(S_n - S_{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

**Importante:** *A recíproca do* **Teorema 4.1** *não é verdadeira, em geral. Se* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *não podemos concluir que* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *seja convergente. Observe que, para a série harmônica* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, *temos* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, *mas a série é divergente.*

## 4.2 Teste da divergência

O teste do termo geral é, na verdade, o teorema da divergência.

**Teorema 4.2. (Teorema da divergência)**

*Se* $\lim_{k\to\infty} a_k$ *não existir ou se* $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$, *então a série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *é divergente.* ♡

**Exemplo 4.1** A série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}$$

é convergente ou divergente?

**Resolução:** Note que,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{k}} = 1 \neq 0.$$

Pelo Teorema da divergência (**Teorema 4.2**), a série é divergente.

**Teorema 4.3**

*Se* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *e* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *forem convergentes, então as séries*

**(i)** $\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, *onde* $c$ *é uma constante*

**(ii)** $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

*também são convergentes.* ♡

**Importante:** ***MUITO CUIDADO!!!!*** *As duas "propriedades" abaixo* ***NÃO EXISTEM****:*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cdot b_k) \neq \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{b_k}\right) \neq \frac{\sum_{k=1}^{\infty} a_k}{\sum_{k=1}^{\infty} b_k}$$

## 4.3 Teste da integral

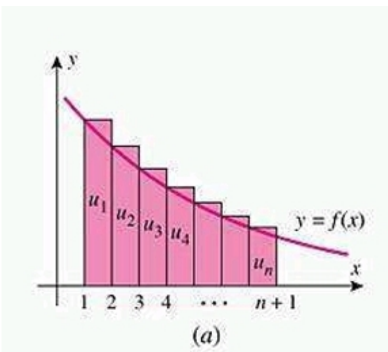
**Teorema 4.4. (Teste da integral)**

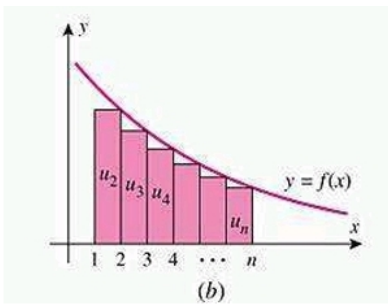
*Suponha que $f$ seja uma função contínua, positiva e decrescente em $[1,\infty)$ e seja $a_k = f(k)$. Então, a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é convergente se, e somente se, a integral imprópria $\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ for convergente. Em outras palavras:*

**(a)** *Se $\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ diverge, então $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.*

**(b)** *Se $\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge, então $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.* ♡

**Ideia da demonstração:** *Comentários em aula.



**Exemplo 4.2** Utilize o teste da integral para verificar se as seguintes séries convergem ou divergem:

**(a)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}$

**(b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k\mathrm{e}^{-k^2}$

**Resolução:**

**(a)** Seja $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$. $f(x)$ é contínua e positiva em $[1, \infty)$. Vamos verificar que $f$ é decrescente em $[1, \infty)$. De fato

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (2x+1) - 1 \cdot 2}{(2x+1)^2} = -\frac{2}{(2x+1)^2} < 0 \quad \text{em} \quad [1, \infty).$$

As hipóteses do teste da integral são satisfeitas. Então,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x.$$

Consideremos a substituição

$$u = 2x+1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = 2\mathrm{d}u \qquad \begin{cases} x = 1 & \Rightarrow \quad u = 3 \\ x = t & \Rightarrow \quad u = 2t+1, \end{cases}$$

assim

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty} \int_3^{2t+1} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty} \Big[\ln u\Big]_3^{2t+1} = \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty} \Big[\ln(2t+1) - \ln 3\Big] = +\infty.$$

Como $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x$ diverge, então $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}$ diverge.

**(b)** Seja $f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$. $f(x)$ é contínua e positiva em $[1, \infty)$. Vamos verificar que $f(x)$ é decrescente em $[1, \infty)$. De fato,

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x^2} - 2x^2\mathrm{e}^{-x^2} = (1-2x^2)\mathrm{e}^{-x^2} < 0 \quad \text{em} \quad [1, \infty).$$

Fazendo a substituição $u = -x^2$ $\big(\mathrm{d}u = -2x\,\mathrm{d}x\big)$, temos

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{t\to\infty}\int_1^t x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\int_{-1}^{-t^2}\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\left[\mathrm{e}^u\right]_{-1}^{-t^2} = -\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-t^2}-\mathrm{e}^{-1}\right]\\ &= \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\left[\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-t^2}\right] = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}.\end{aligned}$$

Como $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge, então $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k\mathrm{e}^{-k^2}$ converge.

## Exercícios

**1.** Use o **Teorema 4.3** para determinar a soma da série:

**(a)** $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{4^k}\right)+\cdots$

**(b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{5^k}-\frac{1}{k(k+1)}\right]$,

**(c)** $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{1}{k^2-1}-\frac{7}{10^{k-1}}\right]$

**(d)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[7^{-k}3^{k+1}-\frac{2^{k+1}}{5^k}\right]$

**2.** Aplique o Teorema da divergência e escreva a conclusão obtida sobre a série:

**(a)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2+k+3}{2k^2+1}$

**(b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$

**(c)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\cos(k\pi)$

**(d)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}$

**(e)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{\mathrm{e}^k}$

**(f)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\ln k$

**(g)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}$

**(h)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}+3}$

**3.** Verifique se as hipóteses do teste da integral são satisfeitas. Em caso afirmativo, utilize o teste para determinar se a série converge ou diverge.

**(a)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5k+2}$

**(b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+9k^2}$

**(c)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1}$

**(d)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4+2k)^{3/2}}$

**4.** Determine se a série converge:

**(a)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{\mathrm{e}}}$

**(b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2k-1}}$

**(c)** $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$

**(d)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\ln(k+1)}$

**(e)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k}$

**(f)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^2+3}$

**(g)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} k}{k^2+1}$

**(h)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$

**(i)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{k}\right)$

**(j)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \mathrm{e}^{-k^3}$

**(k)** $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \ln k \cdot \ln(\ln k)}$

**5.** Use o teste da integral para investigar a relação entre o valor de $p$ e a convergência das séries:

**(a)** $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^p}$ .

**(b)** $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \ln k \cdot [\ln(\ln k)]^p}$

## Respostas:

**1.** **(a)** $\dfrac{4}{3}$

**(b)** $-\dfrac{3}{4}$

**(c)** $-\dfrac{1}{36}$

**(d)** $\dfrac{11}{12}$

**2.** **(a)** O limite é $\dfrac{1}{2}$. A série diverge.

**(b)** O limite é $\mathrm{e}$. A série diverge.

**(c)** O limite não existe. A série diverge.

**(d)** O limite é $0$. Não é possível afirmar nada sobre a série.

**(e)** O limite é $0$. Não é possível afirmar nada sobre a série.

**(f)** O limite é $+\infty$. A série diverge.

**(g)** O limite é $0$. Não é possível afirmar nada sobre a série.

**(h)** O limite é $1$. A série diverge.

**3.** **(a)** As hipóteses são satisfeitas. A série diverge.

**(b)** As hipóteses são satisfeitas. A série converge.

(c) As hipóteses são satisfeitas. A série diverge.

(d) As hipóteses são satisfeitas. A série converge.

4. (a) Diverge. Use o teorema da divergência.

(b) Diverge. Use o teste da integral.

(c) Diverge. Use o teste da integral.

(d) Diverge. Use o teorema da divergência.

(e) Diverge. Use o teorema da divergência.

(f) Diverge. Use o teorema da divergência.

(g) Converge. Use o teste da integral.

(h) Diverge. Use o teste da integral.

(i) Diverge. Use o teorema da divergência.

(j) Converge. Use o teste da integral.

(k) Diverge. Use o teste da integral.

5. (a) A série converge para $p > 1$.

(b) A série converge para $p > 1$.