Cálculo em Várias Variáveis
Revisão

ICT-Unifesp

1. Revisão
   - Retas
   - Planos
   - Cônicas
   - Exercícios

Mais detalhes nas Seções 10.5 e 12.5 do livro do Stewart.
Recurso disponível online pela Biblioteca do ICT.

Revisão

Retas

Retas

A **equação vetorial** da reta r que passa pelo ponto P na direção do vetor $\vec{v}$ é dada por:

$$r : X = P + t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

e $\vec{v}$ é chamado vetor diretor da reta r.

Retas

Em coordenadas, se $X = (x, y, z)$, $P = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, temos

$$\begin{aligned} X = P + t\vec{v} \;&\Rightarrow\; (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3) \\ &\Rightarrow\; (x, y, z) = (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2, z_0 + tv_3). \end{aligned}$$

Em coordenadas, se $X = (x, y, z)$, $P = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, temos

$$\begin{aligned} X = P + t\vec{v} \;&\Rightarrow\; (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3) \\ &\Rightarrow\; (x, y, z) = (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2, z_0 + tv_3). \end{aligned}$$

Daí obtemos as **equações paramétricas** da reta,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x_0 + tv_1 \\ y & = & y_0 + tv_2 \\ z & = & z_0 + tv_3 \end{array} \right. , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exemplo

Encontre a equação vetorial da reta que passa pelos pontos $P = (1, 2, 3)$ *e* $Q = (7, 6, 5)$.

Retas

Exemplo

Encontre a equação vetorial da reta que passa pelos pontos $P = (1, 2, 3)$ *e* $Q = (7, 6, 5)$.

Observação

A equação vetorial não é única, pois podemos multiplicar o vetor por qualquer constante não nula.

Retas

Exemplo

As retas r_1 e r_2 abaixo são reversas, isto é, são retas que não se interceptam e não são paralelas (não pertencendo, portanto, a um mesmo plano):

$$r_1 : (x, y, z) = (1 + t, -2 + 3t, 4 - t)$$
$$r_2 : (x, y, z) = (2s, 3 + s, -3 + 4s).$$

Revisão

Planos

Planos

O plano π que passa pelo ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ e é paralelo aos vetores $\ell.i.$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, é o conjunto dos pontos $X \in \mathbb{R}^3$ que satisfazem a **equação vetorial**

$$\boxed{X = P + s\vec{u} + t\vec{v},} \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Podemos chamar os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de vetores diretores do plano π.

Planos

Em coordenadas, se $X = (x, y, z)$, $P = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ temos

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + s(u_1, u_2, u_3) + t(v_1, v_2, v_3), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Planos

Em coordenadas, se $X = (x, y, z)$, $P = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ temos

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + s(u_1, u_2, u_3) + t(v_1, v_2, v_3), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Daí obtemos as **equações paramétricas,**

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_0 + su_1 + tv_1 \\ y & = & y_0 + su_2 + tv_2 \\ z & = & z_0 + su_3 + tv_3 \end{array} \right. , \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Planos

A equação geral do plano que passa pelo ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ e é paralelo aos vetores $\ell.i.$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, pode ser obtida por

$$\left[\overrightarrow{PX}, \vec{u}, \vec{v}\right] = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0,$$

A equação geral do plano que passa pelo ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ e é paralelo aos vetores $\ell.i.$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, pode ser obtida por

$$\left[\overrightarrow{PX}, \vec{u}, \vec{v}\right] = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\underbrace{(u_2 v_3 - u_3 v_2)}_{a} x + \underbrace{(u_3 v_1 - u_1 v_3)}_{b} y + \underbrace{(u_1 v_2 - u_2 v_1)}_{c} z +$$
$$+ \underbrace{(z_0 u_2 v_1 - y_0 u_3 v_1 - z_0 u_1 v_2 + x_0 u_3 v_2 + y_0 u_1 v_3 - x_0 u_2 v_3)}_{d} = 0.$$

Planos

A equação do plano que passa por $P = (x_0, y_0, z_0)$ e é perpendicular ao vetor $\vec{n} = (a, b, c)$ é dada pelo produto escalar

$$\langle \overrightarrow{PX}, \vec{n} \rangle = 0,$$

onde $X = (x, y, z)$ é um ponto qualquer do plano e o vetor $\vec{n}$ é chamado **vetor normal** do plano.

Planos

A equação do plano que passa por $P = (x_0, y_0, z_0)$ e é perpendicular ao vetor $\vec{n} = (a, b, c)$ é dada pelo produto escalar

$$\langle \overrightarrow{PX}, \vec{n} \rangle = 0,$$

onde $X = (x, y, z)$ é um ponto qualquer do plano e o vetor $\vec{n}$ é chamado **vetor normal** do plano.

Observe que o plano paralelo aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é perpendicular ao vetor $\vec{u} \times \vec{v}$.

Planos

Exemplo

Encontre a equação do plano que passa pelos pontos $P = (1, 3, 2)$, $Q = (3, -1, 6)$ *e* $R = (5, 2, 0)$.

Planos

Observação

Dois planos são paralelos se seus vetores normais forem paralelos.

Dois planos são perpendiculares se seus vetores normais forem ortogonais.

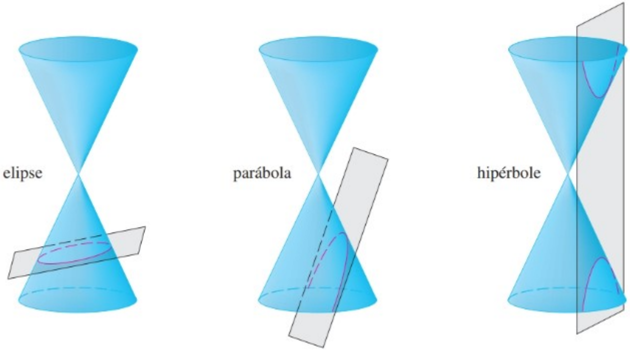
A intersecção de dois planos não paralelos é uma reta.

Revisão

Cônicas

Cônicas

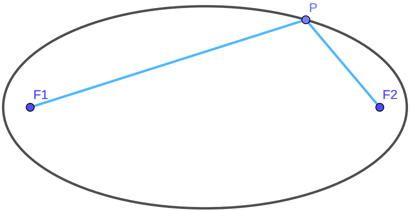
Seções cônicas são curvas resultantes da intersecção de um cone duplo infinito com um plano que não passa pelo vértice deste cone.



Cônicas

A **elipse** $\mathcal{E}$ de focos F_1 e F_2, com $\mathrm{d}(F_1, F_2) = 2c$, é o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que a soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, com $a > c$.

$$\boxed{d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a}$$

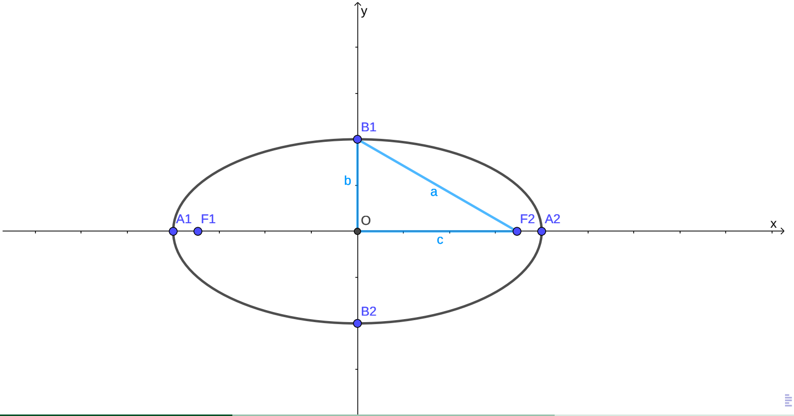


Cônicas

A equação canônica da **elipse horizontal** de focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ e vértices $A_1 = (-a, 0), A_2 = (a, 0), B_1 = (0, b),$ e $B_2 = (0, -b)$, é dada por

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

onde $b^2 = a^2 - c^2$.

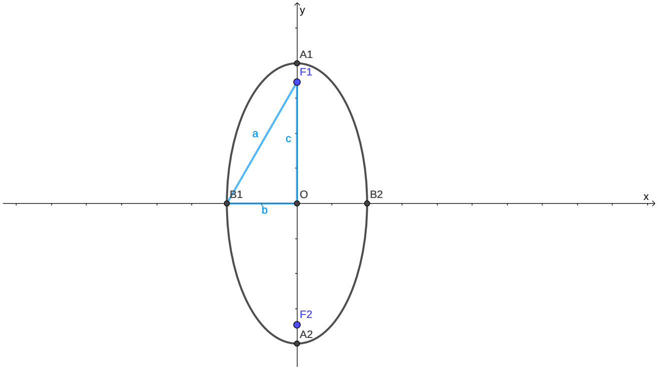


Cônicas

A equação canônica da **elipse vertical** de focos $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$ e vértices $A_1 = (0, -a), A_2 = (0, a), B_1 = (b, 0)$, e $B_2 = (-b, 0)$, é dada por

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

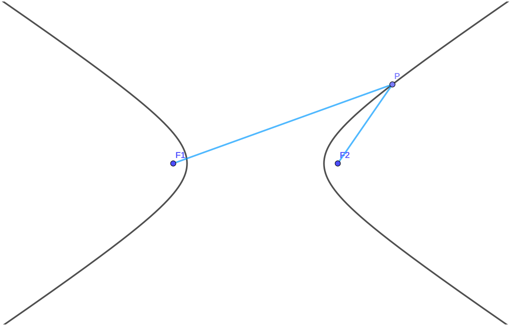
onde $b^2 = a^2 - c^2$.



Cônicas

A **hipérbole** $\mathcal{H}$ de focos F_1 e F_2, com $\mathrm{d}(F_1, F_2) = 2c$, é o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que o módulo da diferença entre as distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, com $a < c$.

$$\boxed{|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a}$$

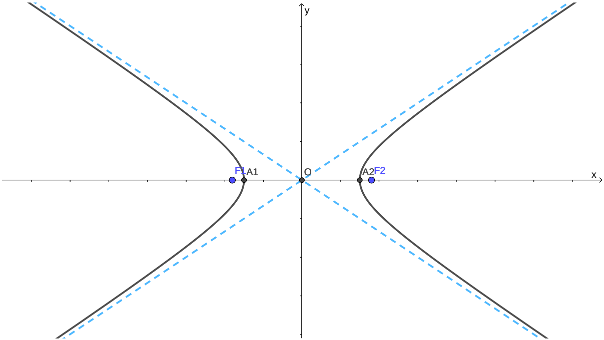


Cônicas

A equação canônica da hipérbole horizontal de focos $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$ e vértices $A_1 = (-a, 0)$ e $A_2 = (a, 0)$ é dada por

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

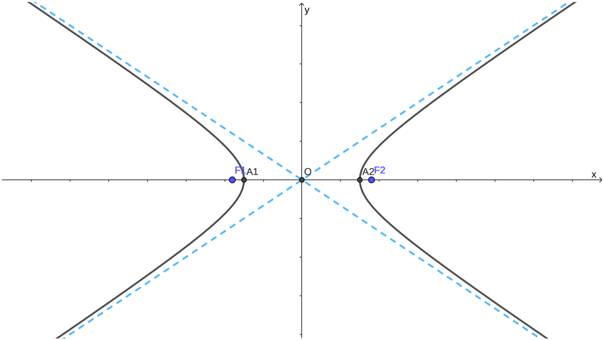
com $b^2 = c^2 - a^2$.



Cônicas

Além disso, a hipérbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ possui duas **assíntotas**, dadas por

$$y = \left(\frac{b}{a}\right) x \qquad \text{e} \qquad y = -\left(\frac{b}{a}\right) x \,.$$

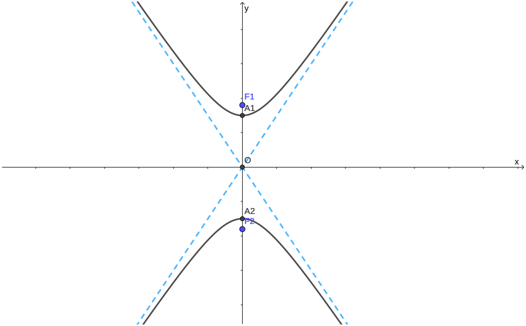


Cônicas

A equação canônica da **hipérbole vertical** de focos $F_1 = (0, -c)$, $F_2 = (0, c)$ e vértices $A_1 = (0, -a)$ e $A_2 = (0, a)$ é dada por

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1},$$

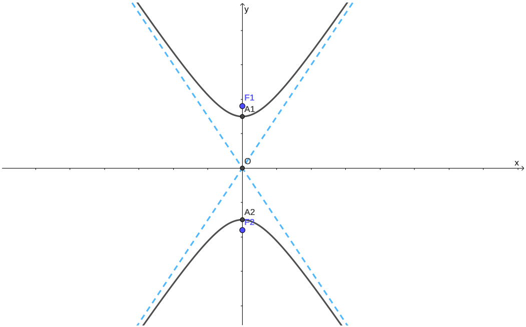
com $b^2 = c^2 - a^2$.



Cônicas

As **assíntotas** da hipérbole de equação $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ são dadas por

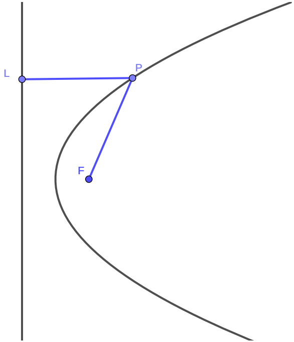
$$y = \left(\frac{a}{b}\right) x \qquad \text{e} \qquad y = -\left(\frac{a}{b}\right) x \, .$$



Cônicas

A **parábola** $\mathcal{P}$ cuja diretriz é a reta ℓ e tem foco $F \notin \ell$, é o lugar geométrico dos pontos P do plano que são equidistantes de ℓ e de F.

$$\boxed{d(P, F) = d(P, \ell)}$$

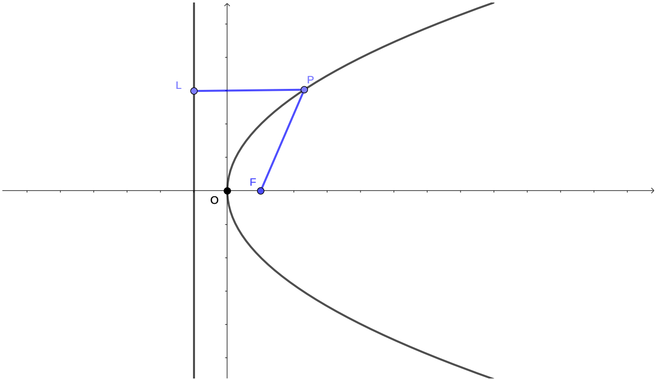


Cônicas

A equação canônica da **parábola horizontal** de vértice na origem, foco $F = (p, 0)$, $p \in \mathbb{R}$ e diretriz $\ell : x = -p$ é dada por

$$\boxed{y^2 = 4px}$$

onde $d(F, \ell) = 2|p|$.

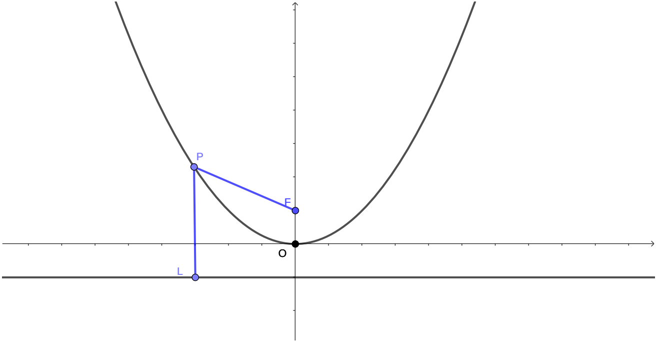


Cônicas

A equação canônica da **parábola vertical** de vértice na origem, foco $F = (0, p)$, $p \in \mathbb{R}$ e diretriz $\ell : y = -p$ é dada por

$$\boxed{x^2 = 4py}$$

onde $d(F, \ell) = 2|p|$.



Exercícios

Seção 12.5 do Stewart: 1–17, 19–31, 35, 37, 38, 41–45, 49, 59, 60, 65.