Cálculo em Várias Variáveis
Integrais de linha de campos vetoriais

ICT-Unifesp

1. Integrais de linha de campos vetoriais

2. Exercícios

Mais detalhes na Seção 16.2 do livro do Stewart. Recurso disponível online pela Biblioteca do ICT.

Integrais de linha de campos vetoriais

Lembremos que $\int_a^b f(x)dx$ representa o trabalho feito por uma força $f(x)$ para mover uma partícula, sobre o eixo-x, de a até b.

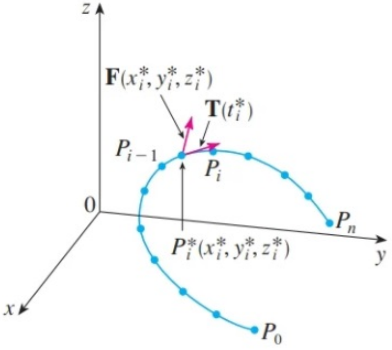
Por outro lado, sabemos que o trabalho feito por uma força vetorial $\vec{F}$ para mover um objeto, no espaço, de um ponto P para um ponto Q é $W = \vec{F} \cdot \vec{D}$, onde $\vec{D}$ é o vetor deslocamento de P até Q.

Integrais de linha de campos vetoriais

Suponhamos que $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ é um campo de força contínuo em $\mathbb{R}^3$.

Vamos calcular o trabalho exercido por essa força ao mover uma partícula ao longo de uma curva C.

Dividimos C em subarcos $P_{i-1}P_i$ de comprimentos Δs_i, dividindo o intervalo $[a, b]$ em subintervalos de igual comprimento.



Integrais de linha de campos vetoriais

Escolhemos um ponto $P_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ no i-ésimo subarco correspondente ao valor t_i^*.

Se Δs_i é pequeno, o movimento da partícula de P_{i-1} para P_i ocorre aproximadamente na direção do vetor unitário $\vec{T}(t_i^*)$ tangente à curva em P_i^*.

O trabalho de P_{i-1} a P_i é aproximado por $\vec{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot (\Delta s_i \vec{T}(t_i^*)) = (\vec{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \vec{T}(t_i^*))\Delta s_i$.

Integrais de linha de campos vetoriais

O trabalho para mover a partícula ao longo de C é aproximado por

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \vec{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*))\Delta s_i,$$

onde $\vec{T}(x, y, z)$ é o vetor tangente unitário no ponto (x, y, z) em C.

Integrais de linha de campos vetoriais

O trabalho para mover a partícula ao longo de C é aproximado por

$$\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \vec{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*))\Delta s_i,$$

onde $\vec{T}(x, y, z)$ é o vetor tangente unitário no ponto (x, y, z) em C.

Assim, o trabalho total é dado por

$$\begin{aligned} W &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \vec{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*))\Delta s_i \\ &= \int_C \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{T}(x, y, z) ds = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds. \end{aligned}$$

Se a curva C é dada por $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, então $\vec{T} = \vec{r'}(t)/\|\vec{r'}(t)\|$.

E podemos escrever a integral que calcula o trabalho como

$$W = \int_a^b \left[\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{\vec{r'}(t)}{\|\vec{r'}(t)\|}\right] \|\vec{r'}(t)\| dt$$
$$= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r'}(t) dt.$$

Curva suave: dizemos que uma curva

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

é **suave** se $\vec{r'}$ é contínua e $\vec{r'}(t) \neq \vec{0}$.

Integrais de linha de campos vetoriais

Definição

Seja $\vec{F}$ um campo vetorial contínuo definido sobre uma curva suave $\mathcal{C}$ dada pela função vetorial $\vec{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. A integral de linha de $\vec{F}$ sobre a curva $\mathcal{C}$ é dada por

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r'}(t)\; dt\,,$$

onde

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \vec{F}(x(t), y(t)) \;\; e \;\; \vec{r'}(t) = (x'(t), y'(t))$$

para campos vetoriais em $\mathbb{R}^2$, e

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \vec{F}(x(t), y(t), z(t)) \;\; e \;\; \vec{r'}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

para campos vetoriais em $\mathbb{R}^3$.

Integrais de linha de campos vetoriais

Podemos expressar a integral de linha em questão como

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\ dt \\
&= \int_a^b (P(x(t),\, y(t))\,, Q(x(t),\, y(t))) \cdot (x'(t),\, y'(t))\ dt \\
&= \int_a^b [P(x(t),\, y(t))\, x'(t) \,+\, Q(x(t),\, y(t))\, y'(t)]\ dt \\
&= \int_a^b P(x(t),\, y(t))\, x'(t)\ dt + \int_a^b Q(x(t),\, y(t))\, y'(t)\ dt \\
&= \int_{\mathcal{C}} P(x,\, y)\ dx + Q(x,\, y)\ dy,
\end{aligned}$$

em que $\int_{\mathcal{C}} P(x,y)\ dx$ e $\int_{\mathcal{C}} Q(x,y)\ dy$ são as integrais de linha ao longo da curva $\mathcal{C}$ com relação a x e com relação a y, respectivamente.

Analogamente, para campos vetoriais em $\mathbb{R}^3$, temos

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\ dt$$

$$= \int_{\mathcal{C}} P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz,$$

onde $\int_{\mathcal{C}} P(x, y, z)\, dx$, $\int_{\mathcal{C}} Q(x, y, z)\, dy$ e $\int_{\mathcal{C}} R(x, y, z)\, dz$ são as integrais de linha ao longo da curva $\mathcal{C}$ com relação a x, a y e a z, respectivamente.

Exemplo

Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\vec{F}(x, y) = x^2\,\vec{i} - xy\,\vec{j}$ *para mover uma partícula ao longo de um quarto de círculo* $\vec{r}(t) = cos(t)\,\vec{i} + sen(t)\,\vec{j}$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

Exemplo

Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\vec{F}(x, y) = x^2\,\vec{i} - xy\,\vec{j}$ *para mover uma partícula ao longo de um quarto de círculo* $\vec{r}(t) = cos(t)\,\vec{i} + sen(t)\,\vec{j}$*,* $0 \leq t \leq \pi/2$*.*

Temos que $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \operatorname{sen}(t)$ e

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \cos^2(t)\vec{i} - \cos(t)\operatorname{sen}(t)\vec{j},$$
$$\vec{r'}(t) = -\operatorname{sen}(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j}.$$

Integrais de linha de campos vetoriais

Portanto, o trabalho realizado é

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\pi/2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r'}(t)dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} (-2\cos^2(t)\,\mathrm{sen}\,(t))dt = -\frac{2}{3}.$$

Exercícios

Seção 16.2 do Stewart: 17–24.