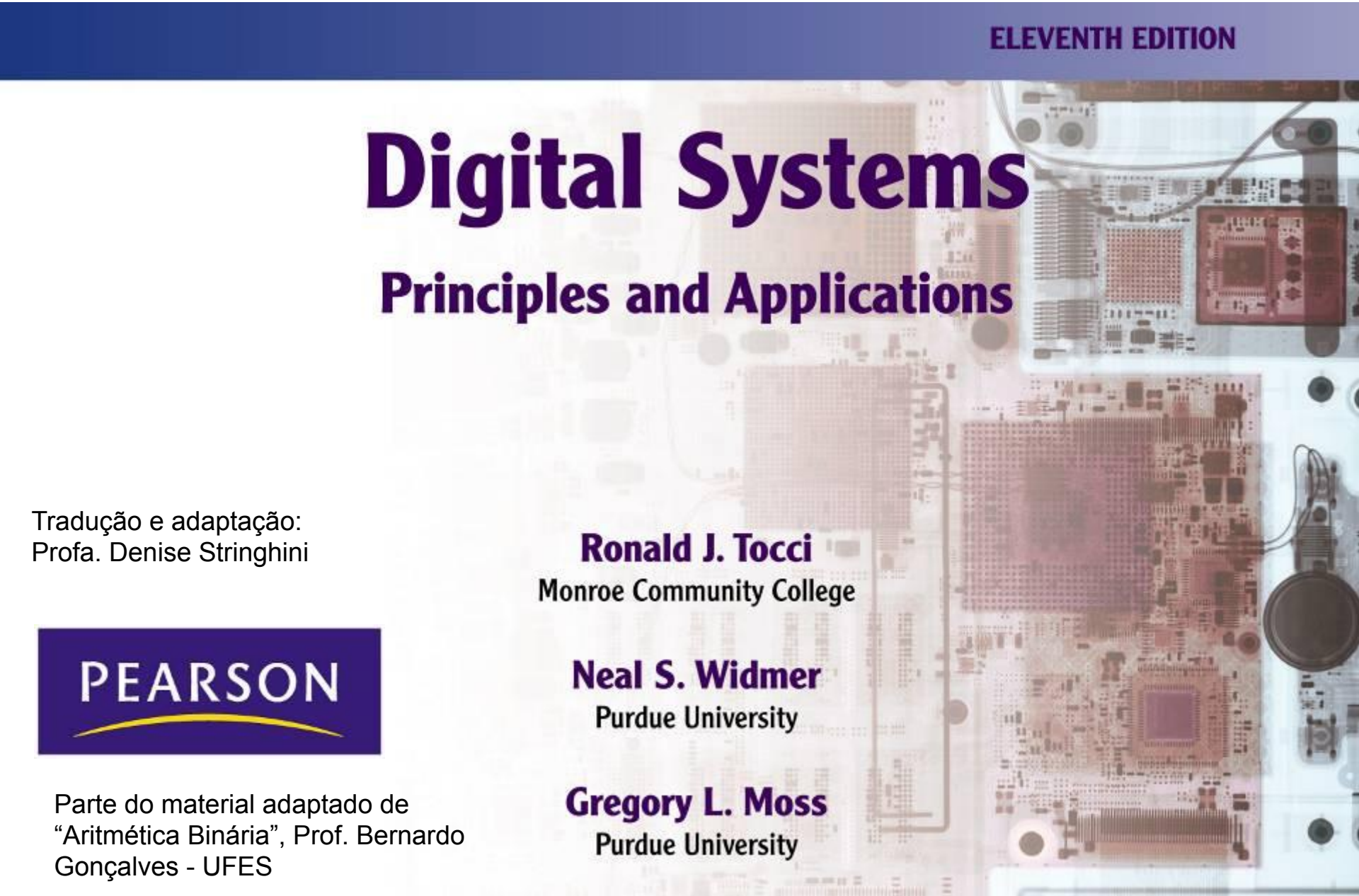
Capítulo 6 – Aritmética digital: operações e circuitos
(parte 2: números com sinal)



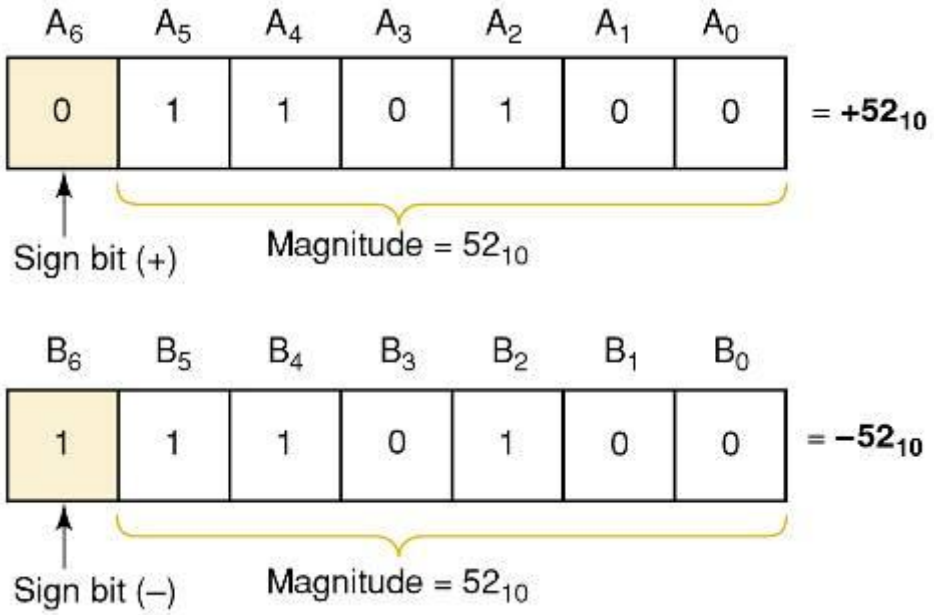
Tradução e adaptação:
Profa. Denise Stringhini

Parte do material adaptado de "Aritmética Binária", Prof. Bernardo Gonçalves - UFES

6-2 Representação de números com sinal

O sinal (+) ou (-) é mostrado pela adição de um bit extra de "sinal" .

- Um bit de sinal **0** indica um número **positivo**.
- Um bit de sinal **1** indica um número **negativo**.



Sistema sinal-magnitude

Algoritmo de soma (números com sinal):

- Sinais diferentes
  - Encontra número com maior magnitude
  - Subtrai menor do maior
  - Atribui ao resultado o sinal do número de maior magnitude
- Sinais iguais
  - Soma e atribui sinal dos operandos
  - Atenção deve ser dada ao estouro de magnitude

Questão de projeto de circuitos lógicos

Algoritmo do sistema sinal-magnitude:

- Lógica complexa por conta das diversas condições (requer vários testes), o que leva a uma aritmética complicada em termos de hardware.

Complemento a Base

Em computadores a subtração em binário é feita por um artifício: o "**Método do Complemento a Base**“.

- Consiste em encontrar o complemento do número em relação a base e depois somar os números.

- Os computadores funcionam sempre na base 2, portanto o complemento a base será **complemento a dois**.

Representação de números em complemento

- Complemento é a diferença entre o maior algarismo possível na base e cada algarismo do número.

- Através da representação em complemento a subtração entre dois números pode ser substituída pela sua soma em complemento.

OBS: A representação de números **positivos** em complemento é idêntica à representação em sinal e magnitude.

Representação de números em complemento

- Para a compreensão do método de complemento aplicado a números binários é interessante visualizar inicialmente em números decimais.

- Existem duas representações úteis para números negativos com sinal:
  - Complemento à base - 1
  - Complemento à base

- Relembrando:
  - Base é a quantidade de símbolos usados para representar os números.

Complemento a base - 1

- Se a base é 10, então 10 - 1 = 9 e o complemento a (base -1) será complemento a 9.

- Ex 1: Calcular o complemento a (base - 1) do número 297.

Ex.1

(base -1) ---> 999

\- 297

Complemento ---> 702

Aritmética em complemento a (base -1)

Ex.: Somar + 123 com - 418 (decimal).

Sinal e magnitude	Complemento a (base-1)	Verificação
- 418	581 (C9)	999
+ 123	+ 123	- 295
- 295	704	704

Faixa de representação

Base 10 com 3 dígitos

- A representação varia de 000 a 999 (10^3 representações)
- Duas faixas devem ser representadas:
  - -499 a -1 (faixa negativa)
  - +1 a +499 (faixa positiva)

Base 10	Faixa Inferior (positiva)	Faixa Superior (negativa)
C9	1 2.... 498 499	500 501 ..... 997 998
Número representado	1 2 .... 498 499	-499 -498 ..... -2 -1

Problema: O zero pode ser representado tanto por 000 quanto por 999.

Faixa de representação: números negativos

Sinal e magnitude	Complemento a (base-1)	Verificação
- 418	581 (C9)	999
+ 123	+ 123	- 295
- 295	704	704

- Verificamos que o resultado 704 (C9) é um número negativo, isto é, o complemento a 9 (base 10 -1) de 295.

Base 10	Faixa Inferior (positiva)	Faixa Superior (negativa)
C9	1 2.... 498 499	500 501 ..... 997 998
Número representado	1 2 .... 498 499	-499 -498 ..... -2 -1

OBS: para conhecermos o real valor de um número negativo em complemento temos que aplicar a verificação. Exemplo: 999 - 704 = 295. Sabemos que é um número negativo portanto 704 em C9 é igual a -295.

Complemento a base

- É obtido subtraindo-se da base cada algarismo do número.
  - Ex: base 10 com 3 dígitos: 1000 - x
  - Seria o mesmo que subtrair cada algarismo de (base - 1), isto é, calcular o complemento a (base -1) e depois somar 1 ao resultado.

- Assim, para encontrar o complemento a base, encontramos o complemento a (base - 1) do número e depois somamos 1 ao resultado.
  - Isto facilita muito no caso dos números binários.

Complemento a base

Ex: calcular o complemento a base (C10) do número 297.

Ex.1	Ex.1 (alternativa)
1000	999
- 297	- 297
703	702
	+ 001
	703

Em qual aspecto a versão alternativa é mais eficiente?

Aritmética em complemento a base

Ex.: Somar + 123 com - 418 (decimal).

Sinal e magnitude	Cálculo C10	C10	Verificação
- 418	999	582	999
+ 123	- 418	+ 123	- 295
- 295	581 (C9)	705 (C10)	704
	+ 001		+ 001
	582 (C10)		705

- Verificamos que o resultado 705 (C10) é um número negativo, isto é, o complemento a 10 (base 10) de 295.

Base 10	Faixa Inferior (positiva)	Faixa Superior (negativa)
C10	1 2 499	500 501 999
Número representado	1 2 499	-500 -499 ... -1

Para verificar: haveria mais de uma representação para o zero em C10?

6-2 Representação de números com sinal

- O sistema do complemento de 2 (C2) é a forma mais comumente usada para representar números binários com sinal.
- Para converter um número binário para complemento de 2, primeiro ele deve ser convertido para complemento de 1.
- Método:
  - C1: Mudar cada bit para o seu complemento (oposto).
  - C2: Adicionar 1 ao número em C1.

6-2 Representação de números com sinal

- A operação de complemento também é chamada de negação:
  - Negar um número binário é aplicar o complemento de 2.
  - Um número negado é convertido para o sinal oposto.

1's-Complement Form

The 1's complement of a binary number is obtained by changing each 0 to a 1 and each 1 to a 0. In other words, change each bit in the number to its complement. The process is shown below.

```
1 0 1 1 0 1  original binary number
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
0 1 0 0 1 0  complement each bit to form 1's complement
```

Thus, we say that the 1's complement of 101101 is 010010.

2's Complement Form

The 2's complement of a binary number is formed by taking the 1's complement of the number and adding 1 to the least-significant-bit position. The process is illustrated below for $101101_2 = 45_{10}$.

	1 0 1 1 0 1	binary equivalent of 45
	0 1 0 0 1 0	complement each bit to form 1's complement
+	1	add 1 to form 2's complement
	0 1 0 0 1 1	2's complement of original binary number

Thus, we say that 010011 is the 2's complement representation of 101101.

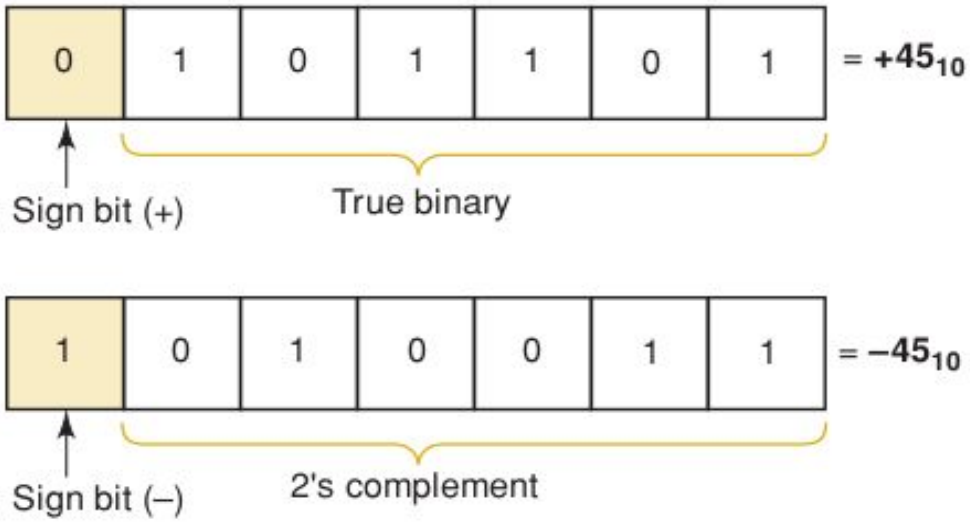
Here's another example of converting a binary number to its 2's-complement representation:

	1 0 1 1 0 0	original binary number
	0 1 0 0 1 1	1's complement
+	1	add 1
	0 1 0 1 0 0	2's complement of original number

Representing Signed Numbers Using 2's Complement

The 2's-complement system for representing signed numbers works like this:

- If the number is positive, the magnitude is represented in its true binary form, and a sign bit of 0 is placed in front of the MSB. This is shown in Figure 6-2 for $+45_{10}$.
- If the number is negative, the magnitude is represented in its 2's-complement form, and a sign bit of 1 is placed in front of the MSB. This is shown in Figure 6-2 for -45_{10}.



REVIEW QUESTION

Represent each of the following signed decimal numbers as a signed binary number in the 2's-complement system. Use a total of five bits, including the sign bit.

(a) +13 (b) −9 (c) +3 (d) −2 (e) −8

6-2 Faixa de representação de números em C2 (Tocci)

Thus, we can state that the complete range of values that can be represented in the 2's-complement system having N magnitude bits is

$$-2^N \text{ to } +(2^N - 1)$$

There are a total of 2^{N+1} different values, *including* zero.

Decimal Value	Signed Binary Using 2's Complement
$+7 = 2^3 - 1$	0111
+6	0110
+5	0101
+4	0100
+3	0011
+2	0010
+1	0001
0	0000
−1	1111
−2	1110
−3	1101
−4	1100
−5	1011
−6	1010
−7	1001
$-8 = -2^3$	1000

Special Case in 2's-Complement Representation

Whenever a signed number has a 1 in the sign bit and all 0s for the magnitude bits, its decimal equivalent is -2^N, where N is the number of bits in the *magnitude*. For example,

$$1000 = -2^3 = -8$$
$$10000 = -2^4 = -16$$
$$100000 = -2^5 = -32$$

6-3 Adição no sistema C2

- Executar adição binária normal das magnitudes.
  - Os bits de sinal são adicionados com os bits de grandeza.
- Se a adição resultar em um *carry* do bit de sinal, este é ignorado.
  - Se o resultado for positivo, está em forma de binário puro.
  - Se o resultado for negativo, ele está em forma de complemento de 2.
  - Se o resultado estiver além da faixa de representação, ocorreu um *overflow* ou estouro de magnitude.

6-4 Subtração no sistema C2

- A subtração usando o sistema C2 envolve a operação de adição.
  - O número subtraído (subtraendo) é negado.
  - O resultado é adicionado ao minuendo.
  - A resposta representa a diferença.

Ex: 5 - 3 = 2 (utilização de 4 bits)

$3_{10} = 0\ 0\ 1\ 1_2$
$-3_{10} = 1\ 1\ 0\ 1_2$

$$\begin{array}{r} 0\ 1\ 0\ 1_2 \\ +\ 1\ 1\ 0\ 1_2 \\ \hline (1)\ 0\ 0\ 1\ 0_2 \end{array}$$

Estouro de magnitude: *overflow*

- **Overflow** (transbordamento ou estouro) pode ocorrer somente quando dois números positivos ou dois negativos estão sendo adicionados.
  - Se a resposta for superior ao número de bits de grandeza, o resultado é um *overflow*.

Aritmética em Complemento a 2: *overflow*

Somar os dois números e observar se ocorre o ***carry*** (vai-1) sobre o bit de sinal **e** após o bit de sinal:

Se ocorrer um e somente um dos dois *carry*, então houve estouro; caso contrário o resultado da soma está dentro da faixa de representação.

Aritmética em C2: casos

Exemplos para n = 4 bits

```
  0 1 0 1      5
  0 1 1 0      6
+ _______    ____
  1 0 1 1     11
```

Carry sobre o bit de sinal
-> **estouro = overflow**

```
  0 1 0 1      5
  0 0 1 0      2
+ _______    ____
  0 1 1 1      7
```

Não houve *Carry* = **não overflow**

Aritmética em C2: casos

0 1 0 1	5
+ 1 0 1 0	- 6
1 1 1 1	- 1

Não houve *Carry* = **não overflow**

0 1 1 0	6
+ 1 0 1 1	- 5
0 0 0 1	1

Carry sobre o "bit de sinal" e após ele = **não overflow**

1 0 1 1	- 5
+ 1 0 1 0	- 6
0 1 0 1	- 11

Carry somente após o "bit de sinal" = **overflow**

Aritmética em C2: exemplos

Problema na base de dez	Problema em complemento de dois	Resposta na base de dez
3 + 2	0011 + 0010 = 0101	5
-3 + -2	1101 + 1110 = 1011	-5
7 + -5	0111 + 1011 = 0010	2

A vantagem da notação de complemento de dois é que a adição qualquer combinação de números, positivos e negativos, podem ser efetuadas usando o mesmo algoritmo, portanto o mesmo circuito.

7 + -5	0111 - 0101	0111 + 1011 = 0010 = 2