Universidade Federal de São Paulo

Definição de Variável Aleatória e Propriedades (Esperança e Variância)

Professor
Julio Cezar

Aula passada

Algumas das coisas que vimos foi que:

- A **probabilidade** é um número que representa a **chance** que um evento possui de acontecer.

- Dado um experimento aleatório, podemos calcular qual é a **probabilidade** desse evento acontecer, por meio da **razão entre o número de elementos do evento e o número de elementos do espaço amostral**.

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Aula de hoje

- Definição de Variável Aleatória;
- Propriedades (Esperança e Variância) de variáveis aleatórias discretas.

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Variáveis aleatórias

Considere o espaços amostrais:

(1) Lançamento de um dado e observar a face voltada para cima: Ω={1,2,3,4,5,6}.

O espaço amostral **é** constituído por números reais.

(2) Lançamento de uma moeda e observação da face superior: Ω={cara, coroa}.

O espaço amostral **não é** constituído por números reais.

Com o espaço amostral associado a valores numéricos podemos utilizar os recursos da estatística descritiva como: *média*, *variância*, *desvio padrão*. Este não é o caso para o lançamento da moeda. Precisamos estabelecer uma função que transforme o espaço amostral não numérico em um espaço amostral numérico.

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Sejam **E** um experimento e Ω um espaço amostral associado ao experimento.

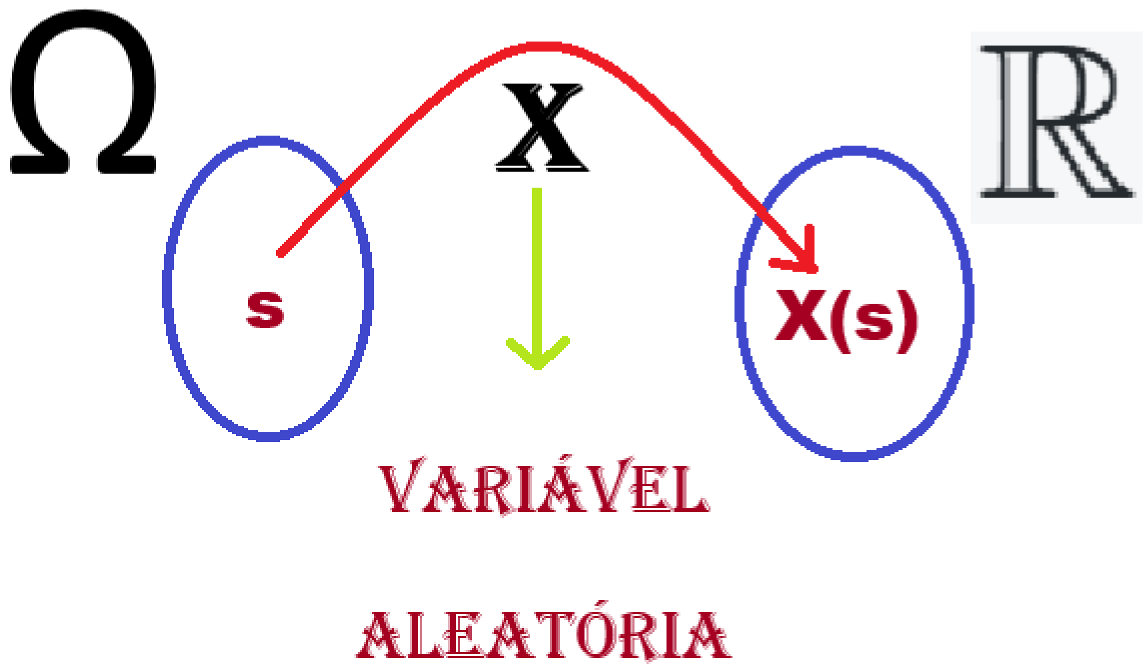
Uma função **X**, *que associe a cada elemento um número real*, **X(s)**, é denominada **variável aleatória**, ou seja, uma ***variável aleatória (v.a.)*** **X** **é uma função** que confere um número real a cada resultado **no espaço amostral de um experimento aleatório**.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

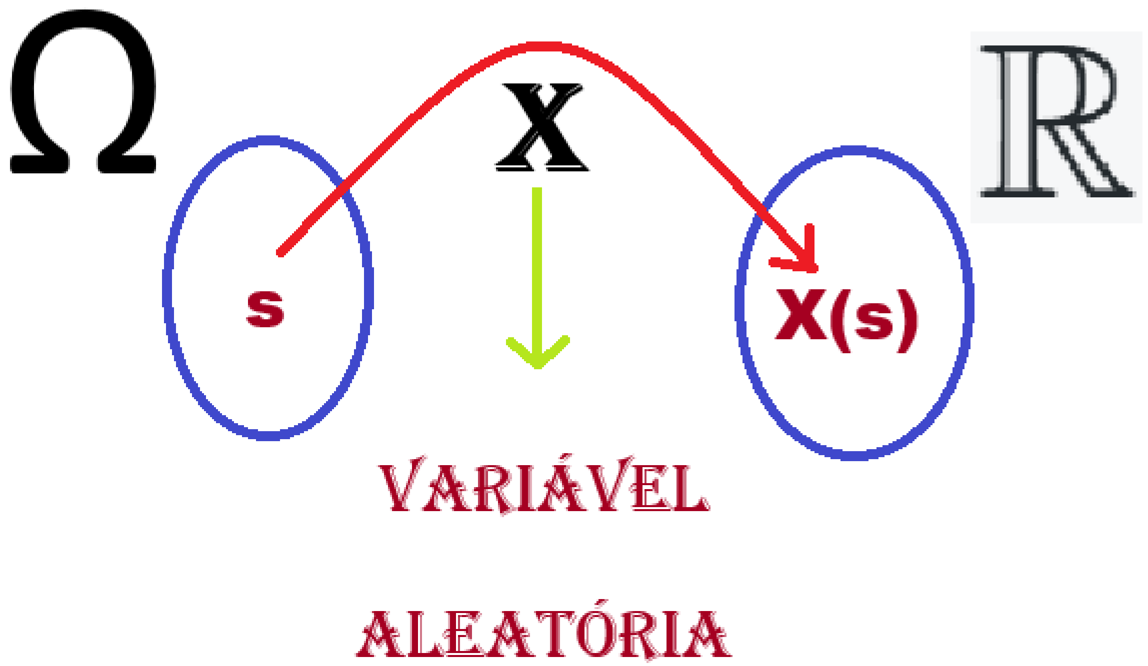
Sejam **E** um experimento e Ω um espaço amostral associado ao experimento.

Uma função **X**, *que associe a cada elemento um número real*, **X(s)**, é denominada **variável aleatória**, ou seja, uma ***variável aleatória (v.a.)*** **X é uma função** que confere um número real a cada resultado **no espaço amostral de um experimento aleatório**.



Variáveis aleatórias

Definição: Uma variável aleatória X é a função que associa a todo evento pertencente a uma partição do espaço amostral um único número real.



UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

- X é uma função, isto é, associa um número aos resultados do espaço amostral. A qualificação aleatória é usada pois não sabemos antecipadamente qual evento irá ocorrer e qual valor X irá assumir. **O termo *aleatório* indica que a cada possível valor da v.a. atribuímos uma probabilidade de ocorrência.**

- X é chamada variável, entretanto, ela é uma função definida no espaço amostral. Veremos que podemos ter funções g(X), com X fazendo o papel de variável. Para evitar chamar g(X) de "função de uma função" dizemos que X é a variável e g(X) é função de X.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Variáveis aleatórias

- Notamos que a **variável aleatória** para ser **discreta** deve assumir valores em um **conjunto finito** ou em um **conjunto infinito**, porém **enumerável**.

Indicaremos, no caso finito:

$$X: x_1, x_2, \dots, x_n.$$

- Variáveis aleatórias que assumem valores numa escala contínua são chamadas **variáveis aleatórias contínuas**.

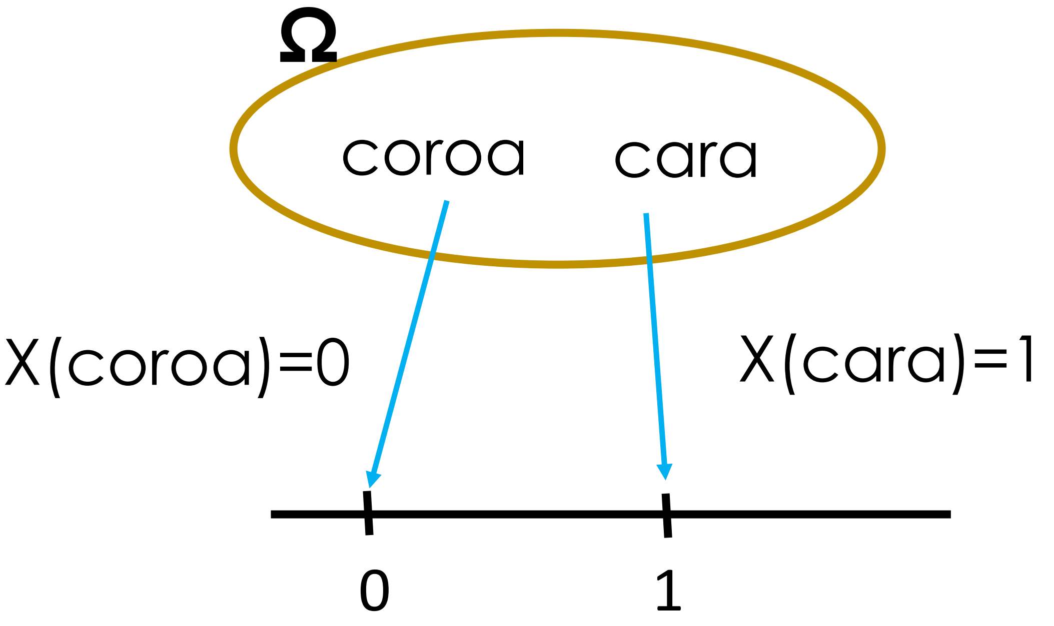
- **Notação:** X (**maiúsculo**) representa a variável aleatória e x (**minúsculo**) representa o valor assumido pela variável aleatória. Assim, por exemplo, $P(X = x_i)$ representa a probabilidade de que X seja igual ao *i*-ésimo valor x_i.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Variáveis aleatórias

Exemplo 1: Considere o experimento lançamento de uma moeda e observação da face superior: Ω={cara, coroa}.

Considere a variável aleatória X: Contagem do número de caras obtido.



Ω={cara, coroa} ⟶ {1, 0}

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Exemplo 2: Observar o sexo das crianças em famílias com três filhos por ordem de nascimento.

$$\Omega=\{(MMM), (MMF), (MFM), (FMM), (MFF), (FMF), (FFM),(FFF)\}$$

Defina X: numero de crianças do sexo masculino (M). Então X é uma v.a. discreta que assume valores no conjunto {0, 1, 2, 3}.

Exemplo 3: Observar o tempo de duração de uma lâmpada.

Defina X: tempo de duração da lâmpada.

X é uma v.a. contínua que assume qualquer valor real positivo.

UNIFESP

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

1933

Função de probabilidade e distribuição de probabilidade

Definição: **Função de probabilidade** é a função que associa a cada valor assumido pela variável aleatória a probabilidade do evento correspondente (A_i), isto é,

$$P(X = x_i) = P(A_i), \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ao **conjunto** $\{x_i, P(x_i), i = 1, 2, \dots, n\}$ damos o nome de **distribuição de probabilidade** da variável aleatória X. É importante verificar que, para que haja uma distribuição de probabilidade de uma variável aleatória X, é necessário que:

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1.$$

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

FUNÇÃO DE PROBABILIDADE E DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE

Lembre-se: O termo **aleatório** indica que a cada possível valor da v.a. atribuímos uma probabilidade de ocorrência.

Reforçando, a **função de probabilidade (f.p.)**, é a função que atribui a cada valor x_i da v. a. discreta X a sua probabilidade de ocorrência e pode ser apresentada pela tabela:

x	x_1	x_2	...	x_n
$P(X=x)$	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	...	$P(X=x_n)$

Reforçando que, uma função de probabilidade deve satisfazer:

$$0 \leq P(X = x_i) \leq 1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1.$$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

FUNÇÃO DE PROBABILIDADE E DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE

Exemplos 1: Considere o experimento lançamento da moeda:

X(coroa)=0, X(cara)=1

Temos: $x_1 = 0$, x_2 =1 e a função de probabilidade:

x	0	1
$P(X = x)$	$P(X = 0) = 0{,}5$	$P(X = 1) = 0{,}5$

Podemos utilizar também P(x), onde x é o valor de X, isto é,

$$P(X = x) = P(x). \text{Por exemplo}, P(0) = 0{,}5 \text{ e } P(1) = 0{,}5.$$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Função de probabilidade e distribuição de probabilidade

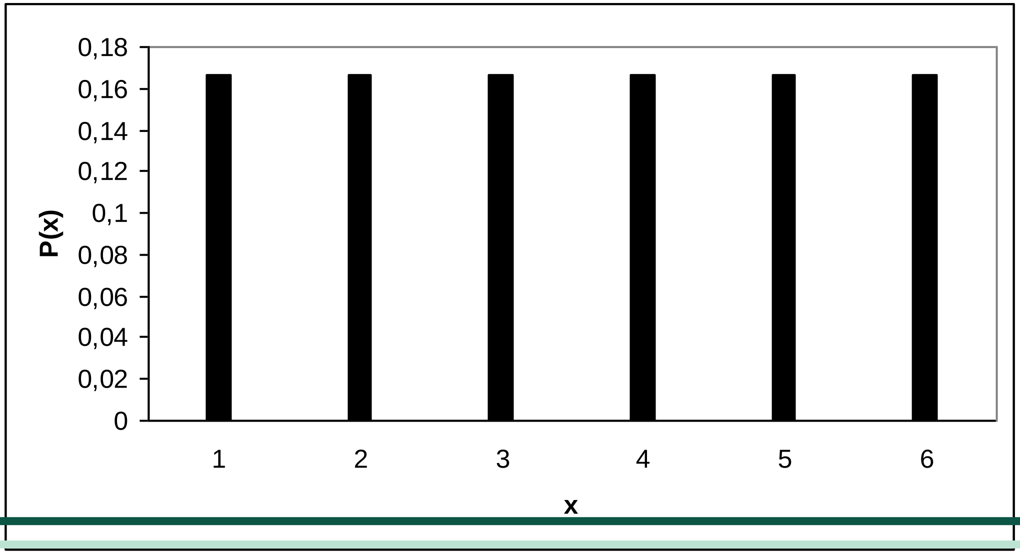
Exemplos 2: Considere o lançamento de um dado honesto e a observação do número da face voltada para cima: Ω={1,2,3,4,5,6}.

Se estamos interessados nestes resultados numéricos, podemos entender a variável aleatória X como sendo a função identidade (é uma função que sempre retorna o mesmo valor usado como argumento):

X(1)=1, X(2)=2, X(3)=3, X(4)=4, X(5)=5, X(6)=6. Neste caso a função de probabilidade será:

X	1	2	3	4	5	6
P(X=x)	P(1)=1/6	P(2)=1/6	P(3)=1/6	P(4)=1/6	P(5)=1/6	P(6)=1/6

Graficamente:



As barras tem epessura exagerada para clareza, mas rigorosamente são linhas cuja altura representa a probabilidade associada a cada valor da variável X.

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Função de probabilidade e distribuição de probabilidade

Exemplo 3: Um dado é lançado duas vezes de forma independente.

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}.$$

Qual é a probabilidade de cada evento elementar e_i de Ω ?

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

FUNÇÃO DE PROBABILIDADE E DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE

Exemplo 3: Um dado é lançado duas vezes de forma independente.

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (1,5),\ (1,6),\\ &(2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (2,4),\ (2,5),\ (2,6),\\ &(3,1),\ (3,2),\ (3,3),\ (3,4),\ (3,5),\ (3,6),\\ &(4,1),\ (4,2),\ (4,3),\ (4,4),\ (4,5),\ (4,6),\\ &(5,1),\ (5,2),\ (5,3),\ (5,4),\ (5,5),\ (5,6),\\ &(6,1),\ (6,2),\ (6,3),\ (6,4),\ (6,5),\ (6,6)\}.\end{aligned}$$

Qual é a probabilidade de cada evento elementar e_i de Ω ?

Admitindo que o dado é perfeitamente homogêneo e sendo os lançamentos independentes, então

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

FUNÇÃO DE PROBABILIDADE E DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE

Exemplo 3: Um dado é lançado duas vezes de forma independente.

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),\\ &(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),\\ &(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),\\ &(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),\\ &(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),\\ &(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}.\end{aligned}$$

Qual é a probabilidade de cada evento elementar e_i de Ω ?

Admitindo que o dado é perfeitamente homogêneo e sendo os lançamentos independentes, então

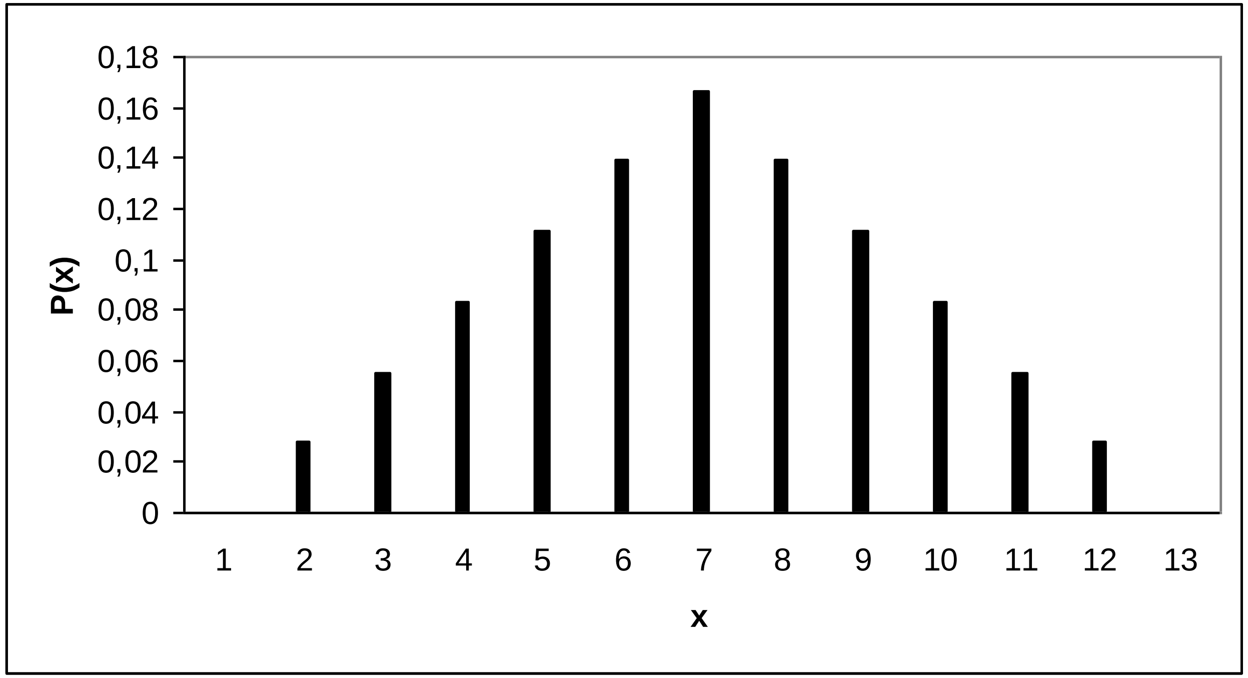
$P(e_i)$ = 1/36 (igualmente provável).

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Função de probabilidade e distribuição de probabilidade

Defina X: soma dos pontos (basta somar **cada evento elementar e_i**). Função de probabilidade e a distribuição de probabilidade.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X=x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36



UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Função de probabilidade e distribuição de probabilidade

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X=x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Temos onze valores para X:

$x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 5, x_5 = 6, x_6 = 7, x_7 = 8, x_8 = 9, x_9 = 10, x_{10} = 11,$

$x_{11} = 12$

Note que,

$$\sum_{i=1}^{11} P(x_i) = P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) + P(7) + P(8) + P(9) + P(10) + P(11) + P(12) = 1$$

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

FUNÇÃO DE PROBABILIDADE E DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X=x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Temos onze valores para X:

$x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 5, x_5 = 6, x_6 = 7, x_7 = 8, x_8 = 9, x_9 = 10, x_{10} = 11,$

$x_{11} = 12$

Pois,

$$\sum_{i=1}^{11} P(x_i) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = 1$$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Função de probabilidade e distribuição de probabilidade

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X=x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Com a função de probabilidade, podemos calcular por exemplo:

Qual a probabilidade de $X < 6$?

Função de probabilidade e distribuição de probabilidade

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X=x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Com a função de probabilidade, podemos calcular por exemplo:

Qual a probabilidade de $X < 6$?

$$P(X < 6) = P(x = 2) + P(x = 3) + P(x = 4) + P(x = 5)$$

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Função de probabilidade e distribuição de probabilidade

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X=x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Com a função de probabilidade, podemos calcular por exemplo:

Qual a probabilidade de $X < 6$?

$$P(X < 6) = P(x = 2) + P(x = 3) + P(x = 4) + P(x = 5)$$

$$P(X < 6) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36}$$

FUNÇÃO DE PROBABILIDADE E DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X=x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Com a função de probabilidade, podemos calcular por exemplo:

Qual a probabilidade de $X < 6$?

$$P(X < 6) = P(x = 2) + P(x = 3) + P(x = 4) + P(x = 5)$$

$$P(X < 6) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36}$$

$$P(X < 6) = \frac{10}{36} \approx 0{,}278.$$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

FUNÇÃO DE PROBABILIDADE E DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X=x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Com a função de probabilidade, podemos calcular por exemplo:

Qual a probabilidade de $X \leq 6$?

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Função de probabilidade e distribuição de probabilidade

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X=x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Com a função de probabilidade, podemos calcular por exemplo:

Qual a probabilidade de $X \leq 6$?

$$P(X \leq 6) = P(x = 2) + P(x = 3) + P(x = 4) + P(x = 5) + P(x = 6)$$

Função de probabilidade e distribuição de probabilidade

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X=x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Com a função de probabilidade, podemos calcular por exemplo:

Qual a probabilidade de $X \leq 6$?

$$P(X \leq 6) = P(x = 2) + P(x = 3) + P(x = 4) + P(x = 5) + P(x = 6)$$

$$P(X \leq 6) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36}$$

Função de probabilidade e distribuição de probabilidade

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X=x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Com a função de probabilidade, podemos calcular por exemplo:

Qual a probabilidade de $X \leq 6$?

$$P(X \leq 6) = P(x = 2) + P(x = 3) + P(x = 4) + P(x = 5) + P(x = 6)$$

$$P(X \leq 6) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36}$$

$$P(X \leq 6) = \frac{15}{36} \approx 0{,}417.$$

Função de probabilidade e distribuição de probabilidade

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X=x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Com a função de probabilidade, podemos calcular por exemplo:

Qual a probabilidade de $3 < X \leq 6$?

Função de probabilidade e distribuição de probabilidade

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X=x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Com a função de probabilidade, podemos calcular por exemplo:

Qual a probabilidade de $3 < X \leq 6$?

$$P(3 < X \leq 6) = P(x = 4) + P(x = 5) + P(x = 6)$$

Função de probabilidade e distribuição de probabilidade

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X=x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Com a função de probabilidade, podemos calcular por exemplo:

Qual a probabilidade de $3 < X \leq 6$?

$$P(3 < X \leq 6) = P(x = 4) + P(x = 5) + P(x = 6)$$

$$P(3 < X \leq 6) = \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36}$$

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Função de probabilidade e distribuição de probabilidade

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X=x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Com a função de probabilidade, podemos calcular por exemplo:

Qual a probabilidade de $3 < X \leq 6$?

$$P(3 < X \leq 6) = P(x = 4) + P(x = 5) + P(x = 6)$$

$$P(3 < X \leq 6) = \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36}$$

$$P(3 < X \leq 6) = \frac{12}{36} \approx 0{,}333.$$

FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA

Algumas vezes é útil ser capaz de expressar probabilidades acumuladas tais como $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq \mathrm{x})$ e que tais probabilidades acumuladas podem ser usadas para encontrar a função de probabilidade de uma variável aleatória. Por conseguinte, o uso de probabilidades acumuladas é um método alternativo de descrever a distribuição de uma variável aleatória. Em geral, para qualquer variável aleatória com valores possíveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, os eventos $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}$,…,$\{X = x_n\}$, são mutuamente excludentes (quando a realização de um, exclui a realização do outro). Logo,

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq \mathrm{x}) = \sum_{\mathrm{x_i} \leq \mathrm{x}} \mathrm{P}(\mathrm{x_i})$$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA

Definição: A função de distribuição acumulada (f.d.a.), ou simplesmente função de distribuição (f.d.) de uma variável aleatória discreta X, denotada por F(x), é

$$\mathrm{F}(\mathrm{x}) = \mathrm{P}(\mathrm{X} < \mathrm{x}) = \sum_{\mathrm{x_i} \leq \mathrm{x}} \mathrm{P}(\mathrm{x_i})$$

Para uma variável aleatória discreta X, $\mathrm{F}(\mathrm{x})$ satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\mathrm{F}(\mathrm{x}) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq \mathrm{x}) = \sum_{\mathrm{x_i} \leq \mathrm{x}} \mathrm{P}(\mathrm{x_i})$;
2. $0 \leq \mathrm{F}(\mathrm{x}) \leq 1$;
3. Se $\mathrm{x} \leq y$, então $\mathrm{F}(\mathrm{x}) \leq \mathrm{F}(\mathrm{y})$.

Assim como a função de probabilidade, uma função de distribuição acumulada fornece probabilidades.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Função de distribuição acumulada

Exemplo: Uma população de 1000 crianças foi analisada num estudo para determinar a efetividade de uma vacina contra um tipo de alergia. No entanto, as crianças recebiam uma dose de vacina e, após um mês, passaram por um novo teste. Caso ainda tivessem tido algum tipo de reação alérgica, recebiam outra dose da vacina. Ao fim de 5 doses todas as crianças foram consideradas imunizadas. Os resultados completos estão na tabela a seguir.

Doses	1	2	3	4	5
Freq.	245	288	256	145	66

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Função de distribuição acumulada

Supondo que uma criança dessa população é sorteada ao acaso, qual será a probabilidade de ela ter recebida 2 doses? Utilizando a ideia de atribuir probabilidade através da frequência de ocorrência, a probabilidade desejada é de 288/1000=0,288. A função de probabilidade da **variável aleatória** **número de doses recebidas** fica sendo:

Doses	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0,245	0,288	0,256	0,145	0,066

FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA

Suponha, agora, que desejamos calcular a probabilidade de cada criança ter recebido até duas vacinas. O que precisamos obter é a função de distribuição no ponto 2, ou seja, calculados a probabilidade acumulada de ocorrência de valores menores ou iguais a 2. Assim,

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Função de distribuição acumulada

Suponha, agora, que desejamos calcular a probabilidade de cada criança ter recebido até duas vacinas. O que precisamos obter é a função de distribuição no ponto 2, ou seja, calculados a probabilidade acumulada de ocorrência de valores menores ou iguais a 2. Assim,

$$F(2) = P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}245 + 0{,}288 = 0{,}533.$$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Função de distribuição acumulada

Suponha, agora, que desejamos calcular a probabilidade de cada criança ter recebido até duas vacinas. O que precisamos obter é a função de distribuição no ponto 2, ou seja, calculados a probabilidade acumulada de ocorrência de valores menores ou iguais a 2. Assim,

$$F(2) = P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}245 + 0{,}288 = 0{,}533.$$

Note que, tendo em vista que a variável só assume valores inteiros, esse valor fica inalterado nos intervalos [2, 3). Isto é, F(2,1); F(2,45) ou F(2,99) têm todos o mesmo valor acima.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA

Por essa razão escrevemos:

$$\mathrm{F(x)} = \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq x) = 0{,}533 \quad \text{para} \quad 2 \leq \mathrm{x} < 3.$$

Os valores completos da função de distribuição acumulada são os seguintes:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathrm{x} < 1; \\ 0{,}245 & \text{se } 1 \leq \mathrm{x} < 2; \\ 0{,}533 & \text{se } 2 \leq \mathrm{x} < 3; \\ 0{,}789 & \text{se } 3 \leq \mathrm{x} < 4; \\ 0{,}934 & \text{se } 4 \leq \mathrm{x} < 5; \\ 1 & \text{se } \mathrm{x} \geq 5; \end{cases}$$

Função de distribuição acumulada

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1; \\ 0{,}245 & \text{se } 1 \leq x < 2; \\ 0{,}533 & \text{se } 2 \leq x < 3; \\ 0{,}789 & \text{se } 3 \leq x < 4; \\ 0{,}934 & \text{se } 4 \leq x < 5; \\ 1 & \text{se } x \geq 5; \end{cases}$$

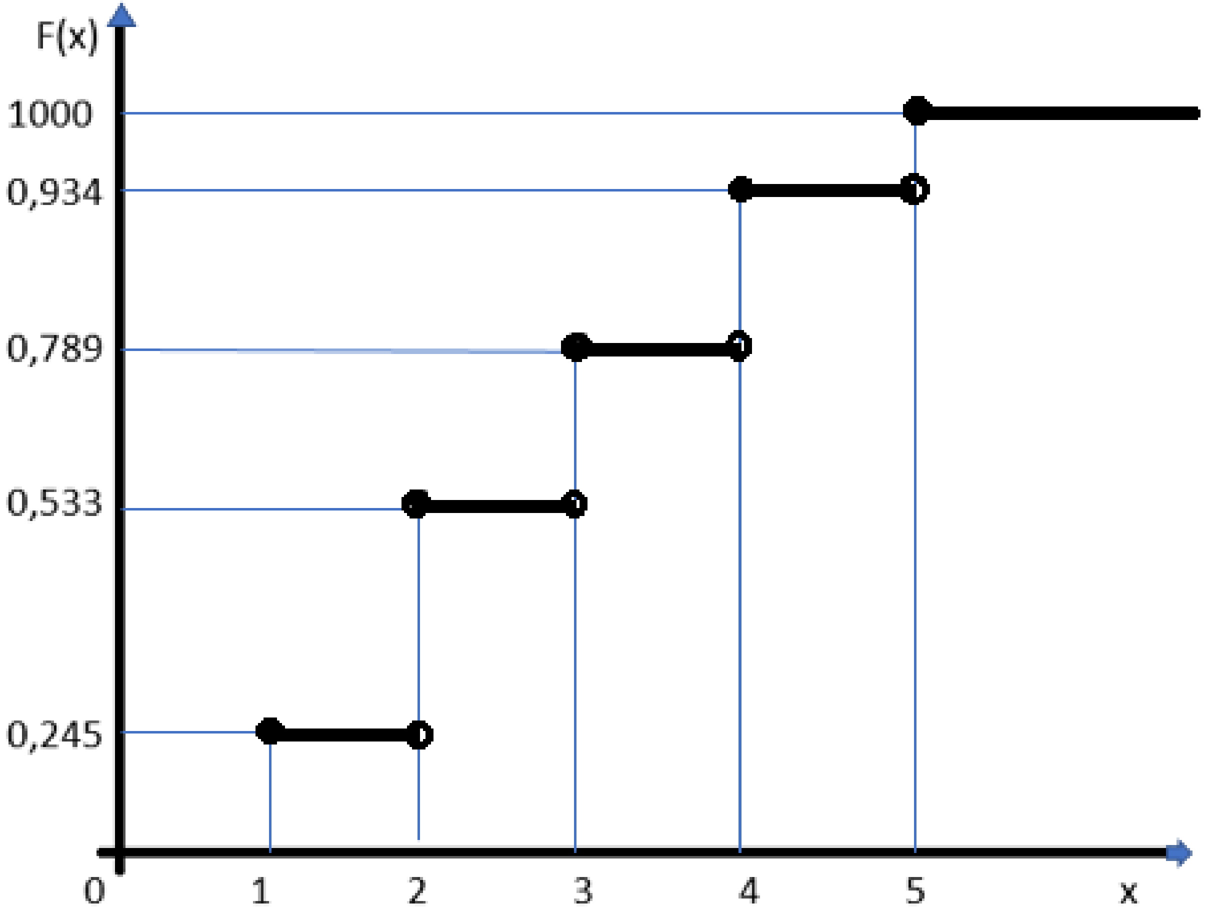


Figura: Função de distribuição acumulada – número de doses de vacinas recebidas.

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

MÉDIA E VARIÂNCIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

Valor Esperado (média): Dada a variável aleatória X, assumindo os valores x_1, x_2, ..., x_n, chamamos de *valor médio* ou *valor esperado* ou *esperança matemática* de X o valor

$$\boxed{E(X) = x_1.P(x_1) + \ldots + x_n.P(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i.P(x_i)}$$

Notação: $\mu = E(X)$

A média μ, por estar baseada no conceito de probabilidade, pode ser estabelecida antes da ocorrência dos valores da variável aleatória. É uma medida a priori. Neste sentido é usado o termo valor esperado ou esperança matemática.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

MÉDIA E VARIÂNCIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

O valor esperado de uma função g(X) da variável aleatória X é definido:

$$\boxed{E(g(X)) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i).P(x_i)}$$

Propriedades:

a) $E(a) = a,\ \text{em que } a = \text{constante}$

b) $E(bX) = bE(X), \text{em que } b = \text{constante}$

c) $E(X + a) = E(X) + a$

d) $E(a + bX) = a + bE(X)$

e) $E(a + bX + cX^2) = a + bE(X) + cE(X^2)$

Note que a soma pode conter um número infinito de termos.

UNIFESP

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

1933

MÉDIA E VARIÂNCIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

Variância: É o valor esperado da v.a. $(X - E(X))^2$, ou seja, se X assume os valores x_1, x_2, ..., x_n,

$$\boxed{Var(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 . P(x_i)}$$

Notação: $\sigma^2 = Var(X)$

Da relação acima, segue que $\rightarrow$ $\boxed{Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2}$

Desvio Padrão: É definido como a raiz quadrada da variância:

$$\boxed{DP(X) = \sqrt{Var(X)}}$$

Notação: $\sigma = DP(X)$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

MÉDIA E VARIÂNCIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

Propriedades:

Variância	Desvio padrão
$Var(X) \geq 0$	$DP(X) \geq 0$
$Var(X + a) = Var(X)$	$DP(X + a) = \sqrt{Var(X)}$
$Var(bX) = b^2\ Var(X)$	$DP(bX) = \|b\|\sqrt{Var(X)}$
$Var(a + bX) = b^2\ Var(X)$	$DP(a + bX) = \|b\|\sqrt{Var(X)}$

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

MÉDIA E VARIÂNCIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

Voltando ao exemplo do lançamento do dado onde definimos a variável aleatória.
X = soma dos pontos. Temos a função de probabilidade

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X=x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Podemos calcular o valor médio (**valor esperado**) da soma dos pontos no lançamentos do dado:

$$E(X) = ?$$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

MÉDIA E VARIÂNCIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

Voltando ao exemplo do lançamento do dado onde definimos a variável aleatória.
X = soma dos pontos. Temos a função de probabilidade

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X=x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Podemos calcular o valor médio (**valor esperado**) da soma dos pontos no lançamentos do dado:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i) = 2\,x\,\frac{1}{36} + 3\,x\,\frac{2}{36} + 4\,x\,\frac{3}{36} + \cdots + 11\,x\,\frac{2}{36} + 12\,x\,\frac{1}{36} = \frac{252}{36} = 7$$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

MÉDIA E VARIÂNCIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

Voltando ao exemplo do lançamento do dado onde definimos a variável aleatória.
X = soma dos pontos. Temos a função de probabilidade

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X=x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Podemos calcular o valor médio (**valor esperado**) da soma dos pontos no lançamentos do dado:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i) = 2\,x\frac{1}{36} + 3\,x\frac{2}{36} + 4\,x\frac{3}{36} + \cdots + 11\,x\frac{2}{36} + 12\,x\frac{1}{36} = \frac{252}{36} = 7$$

ou seja, em média, a soma dos pontos nos lançamentos do dado é 7.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

MÉDIA E VARIÂNCIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

A **variância** da variável aleatória X=soma dos pontos

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X=x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

$$\mathrm{Var(X)} = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} [\mathrm{x_i} - \mathrm{E(X)}]^2 \mathrm{P(x_i)} = ?$$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

MÉDIA E VARIÂNCIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

A **variância** da variável aleatória X=soma dos pontos

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X=x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 P(x_i) = (2-7)^2 \, x \, \frac{1}{36} + (3-7)^2 \, x \, \frac{2}{36} + \cdots + (11-7)^2 \, x \, \frac{2}{36} + (12-7)^2 \, x \, \frac{1}{36} = \frac{210}{36} = 5{,}83$$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

MÉDIA E VARIÂNCIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

A **variância** da variável aleatória X=soma dos pontos

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X=x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 P(x_i) = (2-7)^2 \,x\, \frac{1}{36} + (3-7)^2 \,x\, \frac{2}{36} + \cdots + (11-7)^2 \,x\, \frac{2}{36} + (12-7)^2 \,x\, \frac{1}{36} = \frac{210}{36} = 5{,}83$$

ou usando a

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

MÉDIA E VARIÂNCIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

A **variância** da variável aleatória X=soma dos pontos

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X=x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

$$\mathrm{Var(X)} = \sum_{i=1}^{n}[x_i - E(X)]^2 P(x_i) = (2-7)^2 \text{ x} \frac{1}{36} + (3-7)^2 \text{ x} \frac{2}{36} + \cdots + (11-7)^2 \text{ x} \frac{2}{36} + (12-7)^2 \text{ x} \frac{1}{36} = \frac{210}{36} = 5{,}83$$

ou usando a

$$\mathrm{Var(X)} = E(X^2) - [E(X)]^2$$

em que:

$$E(X^2) = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 P(x_i) = 2^2 \text{ x} \frac{1}{36} + 3^2 \text{ x} \frac{2}{36} + \cdots + 11^2 \text{ x} \frac{2}{36} + 12^2 \text{ x} \frac{1}{36} = \frac{1974}{36} = 54{,}83$$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

MÉDIA E VARIÂNCIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

A **variância** da variável aleatória X=soma dos pontos

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X=x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

$$E(X^2) = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 P(x_i) = 2^2 \text{ x } \frac{1}{36} + 3^2 \text{ x } \frac{2}{36} + \cdots + 11^2 \text{ x } \frac{2}{36} + 12^2 \text{ x } \frac{1}{36} = \frac{1974}{36} = 54{,}83$$

E assim

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 54{,}83 - 7^2 = 5{,}83$$

MÉDIA E VARIÂNCIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

A **variância** da variável aleatória X=soma dos pontos

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X=x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

$$E(X^2) = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 P(x_i) = 2^2 \text{ x} \frac{1}{36} + 3^2 \text{ x} \frac{2}{36} + \cdots + 11^2 \text{ x} \frac{2}{36} + 12^2 \text{ x} \frac{1}{36} = \frac{1974}{36} = 54{,}83$$

E assim

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 54{,}83 - 7^2 = 5{,}83$$

E o **desvio padrão**

$$DP(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{5{,}82} \approx 2{,}41$$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

MÉDIA E VARIÂNCIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

Considerando ainda o exemplo do jogar duas vezes o dado, podemos definir outras variáveis aleatórias.

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$$
$$(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$$
$$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),$$
$$(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),$$
$$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),$$
$$(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}.$$

MÉDIA E VARIÂNCIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

Considerando ainda o exemplo do jogar duas vezes o dado, podemos definir outras variáveis aleatórias.

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),\\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),\\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),\\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),\\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),\\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}.$$

Por exemplo

Z: diferença entre os pontos do 2º e do 1º lançamento

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

MÉDIA E VARIÂNCIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

Considerando ainda o exemplo do jogar duas vezes o dado, podemos definir outras variáveis aleatórias. $\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$
$(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$
$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),$
$(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),$
$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),$
$(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}.$

Por exemplo

Z: diferença entre os pontos do 2º e do 1º lançamento

z	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
P(Z=z)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

MÉDIA E VARIÂNCIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

Considerando ainda o exemplo do jogar duas vezes o dado, podemos definir outras variáveis aleatórias. $\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$
$(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$
$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),$
$(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),$
$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),$
$(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}.$

Por exemplo

Z: diferença entre os pontos do 2º e do 1º lançamento

z	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
P(Z=z)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Exercício: Calcule o valor esperado e o desvio-padrão de Z.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

AULA DE HOJE

- Definição de Variável Aleatória;
- Propriedades (Esperança e Variância) de variáveis aleatórias discretas.

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

PRÓXIMAS AULAS

- Variáveis aleatórias discretas (Principais modelos).

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

REFERÊNCIAS

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros**. 6 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018. 628p.

MORETTIN, P. A.; BUSSAB, W. O. **Estatística básica**. 9 ed. São Paulo: Saraiva, 2017. 554p.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

CLASS FINISHED