Aula 5: p-séries. Testes de convergência (continuação)

5.1 p-séries

Teorema 5.1. (Convergência da p-série)

A série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

converge se $p > 1$ *e diverge se* $p \leq 1$. ♡

Demonstração Se $p < 0$, então $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^p} = +\infty$. Se $p = 0$, então $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^p} = 1$. Em ambos os casos, pelo teorema da divergência, a série diverge. Vamos analisar o caso em que $p > 0$.

Vamos utilizar o teste da integral. Seja $f(x) = \frac{1}{x^p}$. f é contínua e positiva para $p > 0$. Vamos verificar que $f(x)$ é decrescente:

$$f'(x) = -px^{-p-1} = -\frac{p}{x^{p+1}} < 0 \quad \text{para} \quad p > 0 \quad \Rightarrow \quad f \ \text{ é decrescente.}$$

Vamos analisar a integral para $p \neq 1$:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_1^t x^{-p}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{1-p}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{t^{-p+1}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right].$$

Se $-p + 1 > 0 \ \Rightarrow \ p < 1$, temos

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = +\infty.$$

A integral diverge para $0 < p < 1$. Em $p = 1$, a série também diverge (série harmônica). Então, a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ diverge para $p \leq 1$.

Se $-p + 1 < 0 \ \Rightarrow \ p > 1$, temos

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{1-p}.$$

Como a integral converge para $p > 1$, então a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ converge quando $p > 1$.

5.2 Teste da comparação

A ideia deste teste é usar o conhecimento da convergência ou divergência de uma série para deduzir a convergência ou divergência de uma outra série.

Teorema 5.2. (Teste da comparação)

Suponha que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *e* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *sejam séries com termos positivos.*

(i) Se $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *for convergente e* $a_k \leq b_k$ *para todo* k*, então* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *também será convergente.*

Se a "série maior" $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *convergir, então a "série menor"* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *também convergirá.*

(ii) Se $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *for divergente e* $a_k \geq b_k$ *para todo* k*, então* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *também será divergente.*

Se a "série menor" $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *divergir, então a "série maior"* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *também divergirá.*

♡

Exemplo 5.1 Utilize o teste da comparação para estabelecer a convergência ou divergência das seguintes séries:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k-1}$

Resolução:

(a) Note que

$$\frac{1}{k^2+1} < \frac{1}{k^2}.$$

Sabemos que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ é uma p-série com $p = 2$, logo a série converge. Pelo item (i) do **Teorema 5.2**, a série dada converge.

(b) Note que

$$\frac{\sqrt{k}}{k-1} > \frac{\sqrt{k}}{k} = \frac{1}{k^{1/2}}.$$

Sabemos que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/2}}$ diverge, pois é uma p-série com $p = (1/2) < 1$. Pelo item (ii) do **Teorema 5.2**, a série dada diverge.

5.3 Teste de comparação no limite

No teste da comparação, os termos da série que está sendo testada devem ser menores que aqueles de uma série convergente ou maiores que aqueles de uma série divergente. Se os termos forem maiores que os de uma série convergente ou menores que os de uma série divergente, então o teste da comparação não se aplica. Considere, por exemplo, a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k - 1}.$$

A desigualdade

$$\frac{1}{2^k - 1} > \frac{1}{2^k}$$

é inútil para ser usada com o teste da comparação, pois $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ é convergente, porém $a_k > b_k$.

Teorema 5.3. (Teste da comparação no limite)

Suponha que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *e* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *sejam séries com termos positivos. Se*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = L,$$

então

(a) *se* $L > 0$, L *real (finito), ou ambas são convergentes ou ambas são divergentes.*

(b) *se* $L = +\infty$ *e se* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *for divergente,* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *também será divergente.*

(c) *se* $L = 0$ *e se* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *for convergente,* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *também será convergente.*

♡

Exemplo 5.2 Determine se as séries são convergentes ou divergentes:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k - 1}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2 + 3k}{\sqrt{5 + k^5}}$

Resolução:

(a) Vamos utilizar o teste da comparação no limite com

$$a_k = \frac{1}{2^k - 1} \qquad \text{e} \qquad b_k = \frac{1}{2^k}$$

de modo a obter

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{2^k-1}\right)}{\left(\frac{1}{2^k}\right)} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^k}{2^k-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{2^k}} = 1 > 0.$$

Como este limite existe e $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ é uma série geométrica convergente, então a série dada converge pelo teste da comparação no limite.

(b) O termo dominante do numerador é $2k^2$ e o termo dominante do denominador é $\sqrt{k^5} = k^{5/2}$. Isto sugere considerar

$$a_k = \frac{2k^2+3k}{\sqrt{5+k^5}} \qquad \text{e} \qquad b_k = \frac{2k^2}{k^{5/2}} = \frac{2}{k^{1/2}},$$

então

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} &= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{2k^2+3k}{\sqrt{5+k^5}}\right) \cdot \left(\frac{k^{1/2}}{2}\right) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{2k^{5/2}+3k^{3/2}}{2\sqrt{5+k^5}}\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} \left[\frac{\cancel{k^{5/2}}}{\cancel{k^{5/2}}} \left(\frac{2+\frac{3}{k}}{2\sqrt{\frac{5}{k^5}+1}}\right)\right] = \lim_{k\to\infty} \left[\frac{2+\frac{3}{k}}{2\sqrt{\frac{5}{k^5}+1}}\right] = \frac{2}{2\sqrt{1}} = 1 > 0. \end{aligned}$$

Como $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^{1/2}} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/2}}$ é divergente (p-série com $p = 1/2$), a série dada diverge pelo teste da comparação no limite.

Exercícios

1. Determine se a série converge:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+6}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{5k}$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+5}}$

(d) $\sum_{k=5}^{\infty} 7k^{-1{,}01}$

2. Use o teste da comparação para mostrar que a série dada converge ou diverge:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5k^2 - k}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k - \frac{1}{4}}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k+1}{k^2 - k}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^4 + k}$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k + 5}$

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5\,\mathrm{sen}^2 k}{k!}$

(g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$

(h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^{3/2} - \frac{1}{2}}$

3. Use o teste da comparação no limite para mostrar que a série dada converge ou diverge:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{k}}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+5}{k^3 - 2k + 3}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^4 - 2}$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k^2 + k + 1}$

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^k - k^\pi}$

Respostas:

1. (a) Diverge. Compare com a série harmônica.

   (b) Diverge. Compare com a série harmônica.

   (c) Diverge. Compare com a p-série.

   (d) Converge. Compare com a p-série.

2. (a) Converge.

   (b) Diverge.

   (c) Diverge.

   (d) Converge.

   (e) Converge.

   (f) Converge.

   (g) Diverge.

   (h) Diverge.

3. (a) Diverge. Considere $b_k = \dfrac{1}{\sqrt{k}}\cdot$

   (b) Converge. Considere $b_k = \dfrac{1}{k^2}\cdot$

   (c) Converge. Considere $b_k = \dfrac{1}{\sqrt{k}}\cdot$

   (d) Converge. Considere $b_k = \dfrac{1}{k^3}\cdot$

   (e) Converge. Considere $b_k = \dfrac{1}{k^{3/2}}\cdot$

   (f) Converge. Considere $b_k = \dfrac{1}{\pi^k}\cdot$