Universidade Federal de São Paulo

Probabilidade condicional e independência, Lei da probabilidade total e Teorema de Bayes

Professor

Julio Cezar

AULA DE HOJE

- Probabilidade condicional e independência;
- Lei da probabilidade total;
- Teorema de Bayes.

UNIFESP

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

1933

Probabilidade Condicional

Em muitas situações práticas, o fenômeno aleatório com o qual trabalhamos pode ser separado em etapas.

A informação do que ocorreu em uma determinada etapa pode influenciar nas probabilidades de ocorrências das etapas sucessivas.

Nestes casos, dizemos que ganhamos informação, e podemos recalcular as probabilidades de interesse.

Estas probabilidades recalculadas recebem o nome de probabilidades condicionais.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Probabilidade Condicional

Definição: Dados dois eventos A e B em Ω, e $\mathrm{P(B)} > 0$, então a probabilidade de A dado B, é

$$\mathrm{P(A|B)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(B)}}$$

caso $\mathrm{P(B)} = 0$, definimos $\mathrm{P(A|B)} = \mathrm{P(A)}$.

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Probabilidade Condicional

Considere o seguinte exemplo: Um dado foi lançado, qual é a probabilidade de ter ocorrido face 4? Suponha que o dado foi jogado, e, sem saber o resultado, você recebe a informação de que ocorreu face par. Qual é a probabilidade de ter saído face 4 com essa “nova” informação?

Ω = ?

A = face 4 = {4}, $P(A)$?

B = face par = {2, 4, 6}, $P(B)$?

$$P(A|B) \ ?$$

Probabilidade Condicional

Considere o seguinte exemplo: Um dado foi lançado, qual é a probabilidade de ter ocorrido face 4? Suponha que o dado foi jogado, e, sem saber o resultado, você recebe a informação de que ocorreu face par. Qual é a probabilidade de ter saído face 4 com essa “nova” informação?

Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6},

A = face 4 = {4}, $P(A) = \frac{1}{6} \simeq 0{,}16$

B = face par = {2, 4, 6}, $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3} \simeq 0{,}33$$

Probabilidade Condicional

Qual é a probabilidade do jovem escolhido ser alfabetizado sabendo-se que é do sexo masculino?

Sexo	Alfabetizado		Total
	Sim	Não	
Masc.	39.577	8.672	48.249
Fem.	46.304	7.297	53.601
Total	85.881	15.969	101.850

Fonte: IBGE- Censo 1991

Probabilidade Condicional

Qual é a probabilidade do jovem escolhido ser alfabetizado **sabendo-se** que é do sexo masculino?

Sexo	Alfabetizado		Total
	Sim	Não	
Masc.	39.577	8.672	48.249
Fem.	46.304	7.297	53.601
Total	85.881	15.969	101.850

Fonte: IBGE- Censo 1991

Tem-se que P(S|M)=

Probabilidade Condicional

Qual é a probabilidade do jovem escolhido ser alfabetizado **<u>sabendo-se</u>** que é do sexo masculino?

Sexo	Alfabetizado		Total
	Sim	Não	
Masc.	39.577	8.672	48.249
Fem.	46.304	7.297	53.601
Total	85.881	15.969	101.850

Fonte: IBGE- Censo 1991

Tem-se que P(S|M)=

Pela definição P(S|M)=$\frac{P(S\cap M)}{P(M)}$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

PROBABILIDADE CONDICIONAL

Qual é a probabilidade do jovem escolhido ser alfabetizado **sabendo-se** que é do sexo masculino?

Sexo	Alfabetizado		Total
	Sim	Não	
Masc.	39.577	8.672	48.249
Fem.	46.304	7.297	53.601
Total	85.881	15.969	101.850

Fonte: IBGE- Censo 1991

Tem-se que P(S|M)=

Pela definição P(S|M)=$\frac{P(S \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{39.577}{101.850}}{\frac{48.249}{101.850}} =$

UNIFESP

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

1933

Probabilidade Condicional

Qual é a probabilidade do jovem escolhido ser alfabetizado **sabendo-se** que é do sexo masculino?

Sexo	Alfabetizado		Total
	Sim	Não	
Masc.	39.577	8.672	48.249
Fem.	46.304	7.297	53.601
Total	85.881	15.969	101.850

Fonte: IBGE- Censo 1991

Tem-se que P(S|M)=

Pela definição $P(S|M)=\frac{P(S\cap M)}{P(M)}=\frac{\frac{39.577}{101.850}}{\frac{48.249}{101.850}}=0.82$

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Probabilidade Condicional

Qual é a probabilidade do jovem escolhido ser alfabetizado **sabendo-se** que é do sexo masculino?

Sexo	Alfabetizado		Total
	Sim	Não	
Masc.	39.577	8.672	48.249
Fem.	46.304	7.297	53.601
Total	85.881	15.969	101.850

Fonte: IBGE- Censo 1991

Tem-se que $P(S|M) = \boxed{\frac{39.577}{48.249} = 0.82}$

Pela definição $P(S|M) = \frac{P(S \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{39.577}{101.850}}{\frac{48.249}{101.850}} = 0.82$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Probabilidade Condicional

Exemplo 2: Um restaurante popular apresenta apenas dois tipos de refeições: **salada completa ou um prato à base de carne**. Considere que 20% dos fregueses do sexo masculino preferem a salada, 30% das mulheres escolhem carne, 75% dos fregueses são homens e os seguintes eventos:

H: freguês é homem

A: freguês prefere salada

M: freguês é mulher

B: freguês prefere carne

Calcular:

(a) P(H).

(b) P(A|H).

(c) P(B|M).

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Regra do Produto

A regra do produto é uma expressão derivada do conceito de probabilidade condicional. Uma vez que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

temos que

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

Essa expressão permite calcular probabilidades em espaços amostrais que são realizados em sequência, onde a ocorrência da segunda etapa depende (ou não) da ocorrência da primeira etapa.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Eventos Independentes

- Vimos que para probabilidades condicionais, P(A|B), saber que B ocorreu nos dá uma informação “extra” sobre a ocorrência de A.

- Porém, existem algumas situações nas quais saber que o evento B ocorreu, não tem qualquer interferência na ocorrência ou não de A.

- Nestes casos, podemos dizer que os eventos A e B são **independentes.**

Eventos Independentes

Os eventos A e B são eventos independentes se a ocorrência de B não altera a probabilidade de ocorrência de A, ou seja, eventos A e B são independentes se

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) \text{ ou } \mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}).$$

Assim, juntamente com a regra do produto, temos

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) &= \mathrm{P}(\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{A}) \\ \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) &= \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B}) \end{aligned}}$$

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

EVENTOS INDEPENDENTES

Considerando exemplo anterior: Será que ser alfabetizado e do sexo masculino são evento independentes?

Sexo	Alfabetizado		Total
	Sim	Não	
Masc.	39.577	8.672	48.249
Fem.	46.304	7.297	53.601
Total	85.881	15.969	101.850

Fonte: IBGE- Censo 1991

Eventos Independentes

Considerando exemplo anterior: Será que ser alfabetizado e do sexo masculino são evento independentes?

Sexo	Alfabetizado		Total
	Sim	Não	
Masc.	39.577	8.672	48.249
Fem.	46.304	7.297	53.601
Total	85.881	15.969	101.850

Fonte: IBGE- Censo 1991

Pela definição $P(S|M)=\frac{P(S\cap M)}{P(M)}=\frac{\frac{39.577}{101.850}}{\frac{48.249}{101.850}}=0.82$

Eventos Independentes

Considerando exemplo anterior: Será que ser alfabetizado e do sexo masculino são evento independentes?

Sexo	Alfabetizado		Total
	Sim	Não	
Masc.	39.577	8.672	48.249
Fem.	46.304	7.297	53.601
Total	85.881	15.969	101.850

Fonte: IBGE- Censo 1991

Pela definição $P(S|M)=\frac{P(S\cap M)}{P(M)}=\frac{\frac{39.577}{101.850}}{\frac{48.249}{101.850}}= 0.82$; $P(S)=\frac{85.881}{101.850}=0,843.$

UNIFESP

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

1933

Eventos Independentes

Considerando exemplo anterior: Será que ser alfabetizado e do sexo masculino são evento independentes?

Sexo	Alfabetizado		Total
	Sim	Não	
Masc.	39.577	8.672	48.249
Fem.	46.304	7.297	53.601
Total	85.881	15.969	101.850

Fonte: IBGE- Censo 1991

Pela definição P(S|M)=$\frac{P(S\cap M)}{P(M)}=\frac{\frac{39.577}{101.850}}{\frac{48.249}{101.850}}= 0.82; P(S)=\frac{85.881}{101.850} = 0{,}843.$

P(S|M) ≠ P(S), conclui-se que ser alfabetizado e ser do sexo masculino são eventos dependentes.

UNIFESP

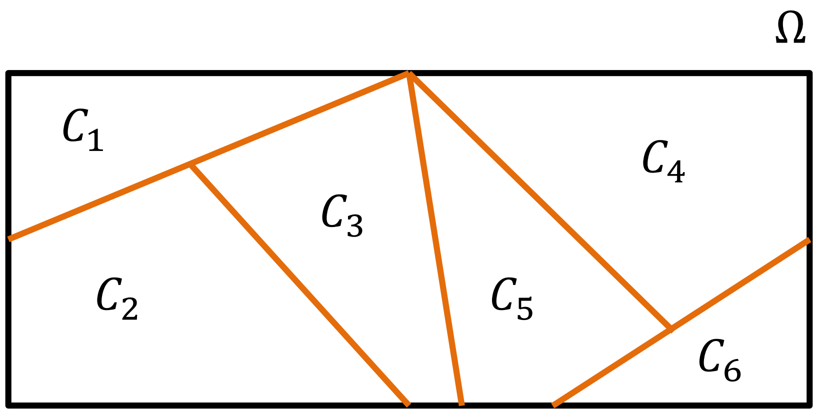
Universidade Federal de São Paulo

1933

Lei da Probabilidade Total

Definição: Dizemos que os eventos $C_1, C_2, \ldots, C_k$ formam uma partição do espaço amostral Ω se

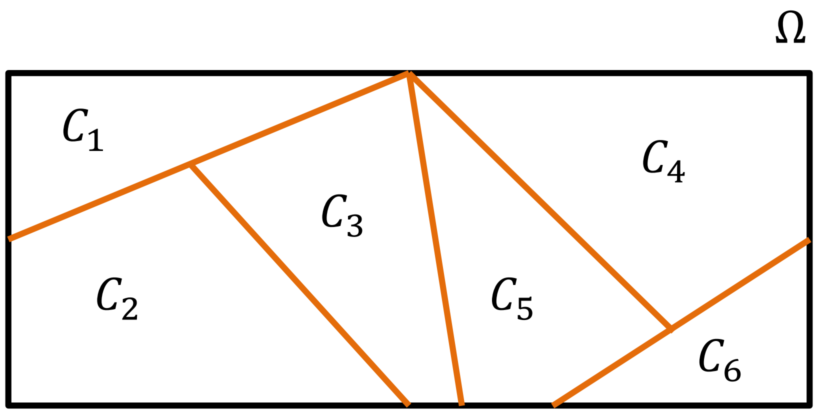
- $C_i \cap C_j = \emptyset, \forall\, i \neq j$;
- $\bigcup_{i=1}^{k} C_i = \Omega$;
- $P(C_i) > 0\ \forall\, i = 1, \ldots, k$.



Lei da Probabilidade Total

Teorema: Sejam os eventos $C_1, C_2, \dots, C_k$ uma partição do espaço amostral Ω. Então, qualquer evento $A \in \Omega$ pode ser escrito como

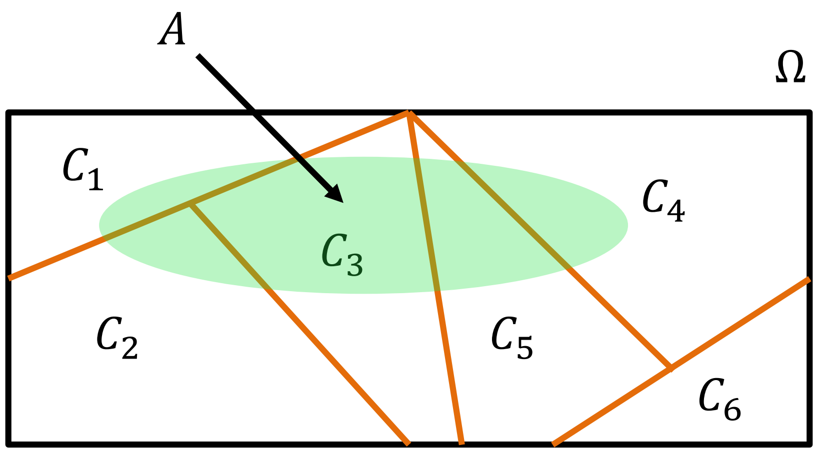
$$\mathrm{P(A)} = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P(A|C_i)P(C_i)}$$



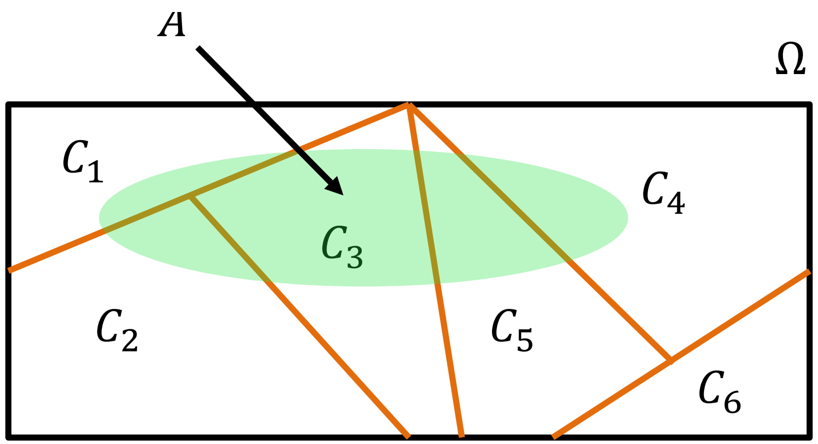
Lei da Probabilidade Total

Teorema: Sejam os eventos $C_1, C_2, \dots, C_k$ uma partição do espaço amostral Ω. Então, qualquer evento $A \in \Omega$ pode ser escrito como

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A|C_i)P(C_i)$$



Lei da Probabilidade Total



$$\boxed{A \cap C_6 = \emptyset}$$

$$\mathrm{A} = (\mathrm{A} \cap \mathrm{C}_1) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C}_2) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C}_3) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C}_4) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C}_5) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C}_6)$$

$$\mathrm{A} = \bigcup_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} (\mathrm{A} \cap \mathrm{C}_\mathrm{i})$$

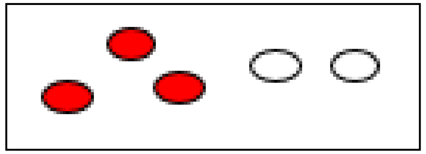
$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\cup_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} (\mathrm{A} \cap \mathrm{C}_\mathrm{i})) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}_\mathrm{i}) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} \mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{C}_\mathrm{i})\mathrm{P}(\mathrm{C}_\mathrm{i})$$

$$\boxed{P(A|C_i) = \frac{P(A \cap C_i)}{P(C_i)}}$$

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Lei da Probabilidade Total

Exemplo 1: Em uma urna, há 5 bolas: 2 brancas (B) e 3 vermelhas (V). **Duas bolas são sorteadas sucessivamente**, **sem reposição**. Isso significa que escolhemos a primeira bola, verificamos sua cor e não a devolvemos à urna; misturamos as bolas restantes e retiramos a segunda. O diagrama em árvore (Slide seguinte) ilustra as possibilidades. Em cada "galho" da árvore estão indicadas as probabilidades de ocorrência, sendo que para as segundas bolas as probabilidades são condicionais. A probabilidade do resultado conjunto é dada, por

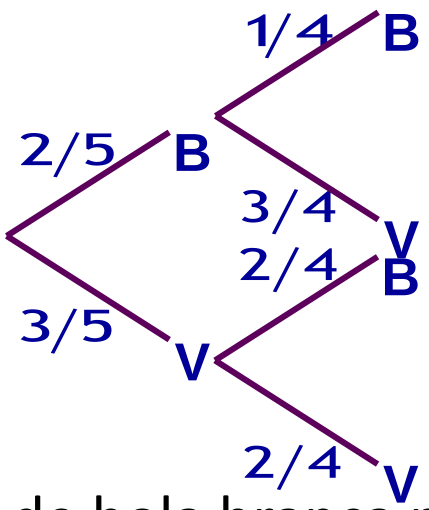


$$P(V \cap B) = P(V|B).P(B).$$

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

LEI DA PROBABILIDADE TOTAL

Para representar todas as possibilidades, utilizamos, um diagrama conhecido como **diagrama de árvores** ou **árvore de probabilidades**.



Resultados	Probabilidades
BB	$\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$
BV	$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$
VB	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$
VV	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$
Total	1

A probabilidade de bola branca na segunda extração é:

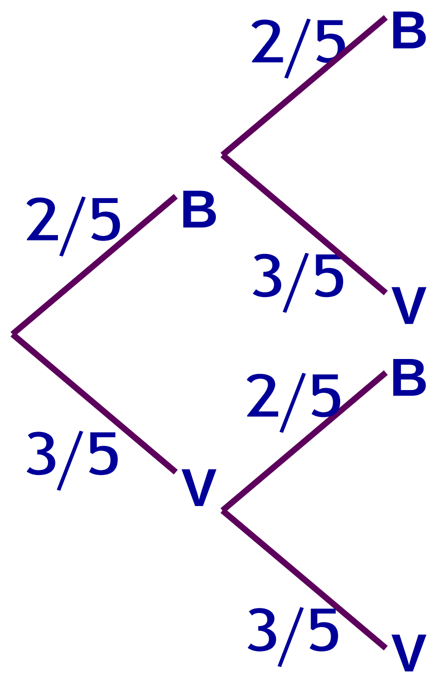
P(B na 2ª) = P(B na 2ª |B na 1ª) x P(B na 1ª) + P(B na 2ª |V na 1ª) x P(V na 1ª)

$$= \frac{2}{20} + \frac{6}{20} = \frac{2}{5}.$$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Lei da Probabilidade Total

Exemplo 2: Imagine, agora, que as duas extrações são feitas da mesma urna do exemplo anterior, mas a **primeira bola é reposta na urna antes da extração da segunda**. Nessas condições, as extrações são independentes, pois o resultado de uma extração não tem influência no resultado da outra. Obtemos a situação



Resultados	Probabilidade
BB	$\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$
BV	$\frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$
VB	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$
VV	$\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$
Total	1

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Lei da Probabilidade Total

Neste caso,

P(B na 2ª) = P(B na 2ª |B na 1ª) x P(B na 1ª) + P(B na 2ª |V na 1ª) x P(V na 1ª)

$$\text{P(B na 2ª)} = \frac{4}{25} + \frac{6}{25} = \frac{2}{5}$$

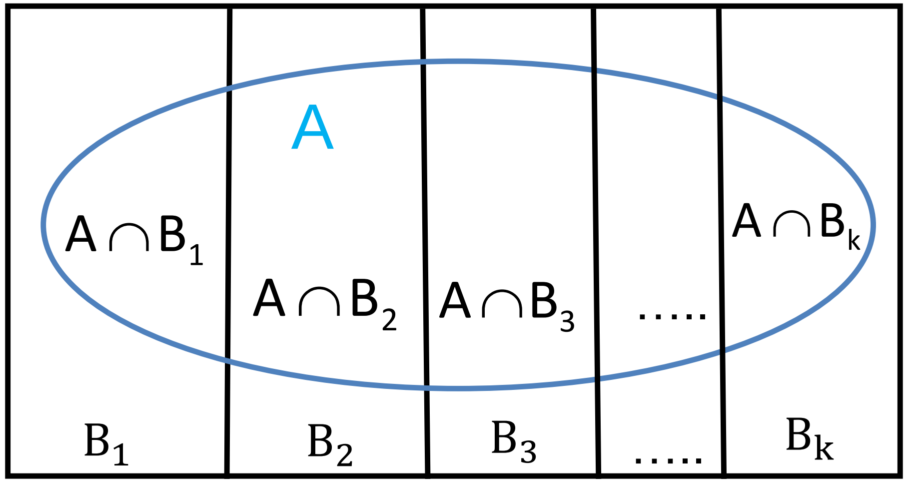
Tem-se que: $\text{P(B na 2ª|B na 1ª)} = \frac{2}{5} = \text{P(B na 2ª)}$

$$\text{P(B na 2ª|V na 1ª)} = \frac{2}{5} = \text{P(B na 2ª)}$$

ou seja, o resultado na 2ª extração independe do que ocorre na 1ª extração

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Teorema de Bayes



B_1, B_2, …, B_k são partições do espaço amostral em eventos disjuntos.

O evento A ocorre em conjunção com os eventos B_1, B_2, …, B_k

São dados: as probabilidades P(B_1), P(B_2),…., P(B_k) e as probabilidades condicionais P(A|B_1), P(A|B_2),…, P(A|B_k)

Qual a probabilidade condicional P(B_i | A), onde i=1,2, 3, 4…,k ?

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Teorema de Bayes

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}$$, ou seja, sabemos que:

$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}$, é o **Teorema de Bayes na sua forma inicial**. Note que, A é a união dos eventos $A \cap B_1, A \cap B_2, A \cap B_3, \ldots, A \cap B_k$, daí:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) + \cdots + P(A \cap B_k) \\ &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3) + \cdots + P(A|B_k)P(B_k) \end{aligned}$$

Combinando os resultados obtemos o **TEOREMA DE BAYES**

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3) + \cdots + P(A|B_k)P(B_k)}$$

i=1, 2, 3,...., k, uma equação para cada B_i.

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Teorema de Bayes

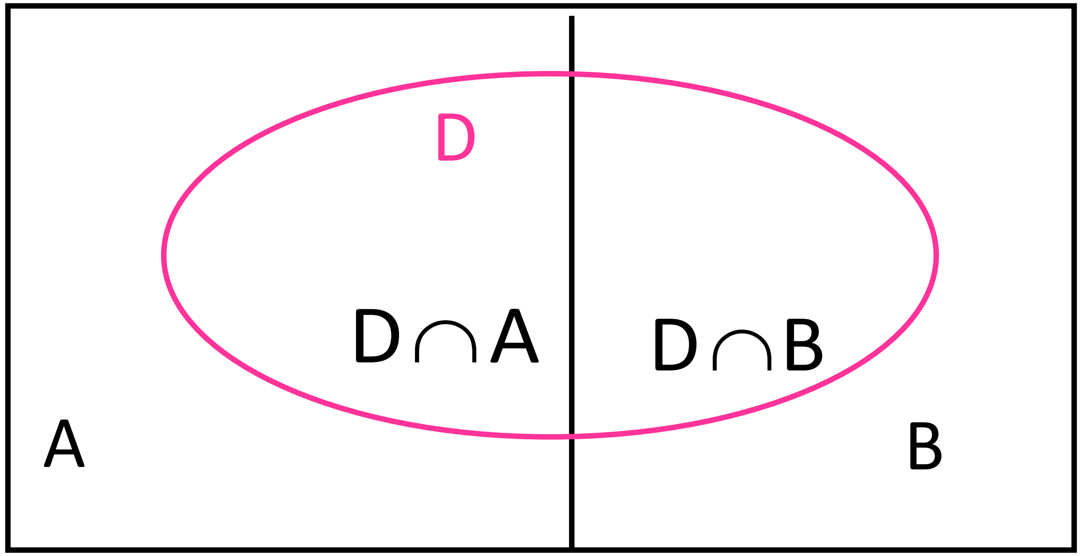
Exemplo 1: As máquinas A e B são responsáveis por 60% e 40%, respectivamente, da produção de uma empresa. O índices de peças defeituosas na produção destas máquinas são 3% e 7% , respectivamente.

Se uma peça defeituosa foi selecionada da produção da empresa, qual a probabilidade que tenha sido produzida pela máquina B?

Vamos definir os eventos:

A: peça produzida pela máquina A;
B: peça produzida pela máquina B;
D: peça ser defeituosa.

Teorema de Bayes



Temos:

- P(A)=0,60 probabilidade da peça ser produzida pela máquina A;
- P(B)=0,40 probabilidade da peça ser produzida pela máquina B;
- P(D|A)=0,03 probabildade da peça defeituosa ter sido produzida pela máquina A;
- P(D|B)=0,07 probabildade da peça defeituosa ter sido produzida pela máquina B.

Teorema de Bayes

Usando o teorema de Bayes a probabilidade de que a peça tenha vindo da máquina B, dado que ela é defeituosa é 

Teorema de Bayes

Pelo teorema de Bayes a probabilidade de que a peça tenha vindo da máquina B, dado que ela é defeituosa é:

$$P(B|D) = \frac{P(D|B)P(B)}{P(D)} = \frac{P(D|B)P(B)}{P(D|A)P(A)+P(D|B)P(B)}$$

Portanto:

$$P(B|D) = \frac{0{,}07 \text{ x } 0{,}4}{0{,}03 \text{ x } 0{,}6 + 0{,}07 \text{ x } 0{,}4} = 0{,}6087$$

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Teorema de Bayes

Pelo teorema de Bayes a probabilidade de que a peça tenha vindo da máquina B, dado que ela é defeituosa é:

$$P(B|D) = \frac{P(D|B)P(B)}{P(D)} = \frac{P(D|B)P(B)}{P(D|A)P(A)+P(D|B)P(B)}$$

Portanto:

$$P(B|D) = \frac{0{,}07 \text{ x } 0{,}4}{0{,}03 \text{ x } 0{,}6 + 0{,}07 \text{ x } 0{,}4} = 0{,}6087$$

Exercício: Qual a probabilidade da peça defeituosa ter sido selecionada da máquina A?

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Teorema de Bayes

Pelo teorema de Bayes a probabilidade de que a peça tenha vindo da máquina B, dado que ela é defeituosa é:

$$P(B|D) = \frac{P(D|B)P(B)}{P(D)} = \frac{P(D|B)P(B)}{P(D|A)P(A)+P(D|B)P(B)}$$

Portanto:

$$P(B|D) = \frac{0{,}07.0{,}4}{0{,}03.0{,}6+0{,}07.0{,}4} = 0{,}6087$$

Exercício: Qual a probabilidade da peça defeituosa ter sido selecionada da máquina A? P(A|D)=....

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Teorema de Bayes

Problema de Monte Hall ou Paradoxo de Monte Hall

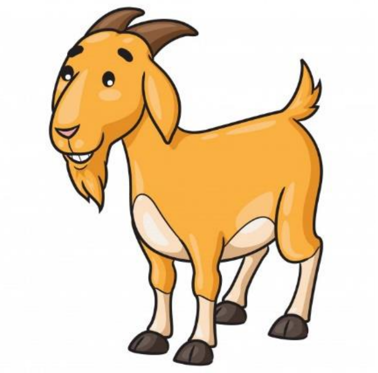
(Monty Hall). Marilyn vos Savant por muitos anos foi considerada a pessoa com o maior QI do mundo (228) pelo livro Guiness. Ela é a autora da coluna “Ask Marilyn”, em que responde a perguntas de seus leitores. Em um episódio célebre, sua resposta a uma pergunta de probabilidade gerou polêmica na época. A pergunta era a seguinte:

Suponha que você está em um programa de televisão. O apresentador te permite escolher entre três portas.

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Teorema de Bayes

Atrás de uma das portas há um carro e atrás das outras duas há cabras. Você ganhará o carro caso abra a sua respectiva porta.



Considere que, a priori, você acredita ser equiprovável que o carro está atrás de cada uma das portas. Após você escolher a porta 1, o apresentador sempre abrira aleatoriamente (dentre as portas que você não escolheu) uma das portas com uma cabra e te dará a oportunidade de trocar de porta. Digamos que o apresentador abriu a porta 2. E vantajoso trocar de porta?

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Teorema de Bayes

TEOREMA DE BAYES

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Teorema de Bayes

Marylin vos Savant respondeu que era vantajoso. Você concorda com ela?

TEOREMA DE BAYES

Marylin vos Savant respondeu que era vantajoso. Você concorda com ela?

Solucão: Considere os seguintes eventos:

Pri: O prêmio está atrás da porta i. i=1,2 ou 3.
C2: O apresentador abrirá a porta 2.
O problema indica que **P(Pri) = 1/3**. Note que se o prêmio está atrás da **porta 1**, então o apresentador poderia abrir tanto a **porta 2** quanto a **3**. Como ele toma uma decisão entre as disponíveis com mesma probabilidade, **P(C2|Pr1) = 1/2**. Se o prêmio está atrás da **porta 2**, então o apresentador certamente não a abrirá, **P(C2|Pr2) = 0**. Finalmente, se o prêmio está atrás da **porta 3**, então o apresentador não pode abrir a porta que você escolheu **(porta 1)**, nem a porta que tem o prêmio **(porta 3)** e, assim, deve abrir a **porta 2**, **P(C2|Pr3) = 1**. Finalmente, podemos usar o Teorema de Bayes para achar **P(Pr1|C2) = 1**.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Teorema de Bayes

Marylin vos Savant respondeu que era vantajoso. Você concorda com ela?

Solucão: Considere os seguintes eventos:

Pri: O prêmio está atrás da porta i. i=1,2 ou 3.
C2: O apresentador abrirá a **porta 2**.
P(Pr1|C2) = P(Pr1)*P(C2|Pr1) / (P(Pr1)*P(C2|Pr1) + P(Pr2)*P(C2|Pr2) + P(Pr3)*P(C2|Pr3))
= (1/3 * 1/2)/ (1/3 * 1/2 + 1/3 * 0 + 1/3 * 1)
= 1/3.

Realizando as mesmas contas para as outras portas, obtemos **P(Pr2|C2) = 0** e **P(Pr3|C2) = 2/3**. Portanto, dado a posteriori a **porta 3** e mais provável que a 1. **Assim, vale a pena trocar de porta, ou seja, escolhendo trocar de porta a chance de ganhar o carro é maior!!**

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Teorema de Bayes

Um homicídio foi cometido em uma cidade de aproximadamente 100,000 habitantes adultos. Antes de observar as evidências do caso, o juiz acreditava que qualquer um dos habitantes poderia ter cometido o crime com mesma probabilidade. Contudo, a promotoria traz um exame forense como evidência de que o réu cometeu o crime. Por um lado, caso o réu seja culpado, os resultados do exame seriam observados com certeza. Por outro lado, caso o réu fosse inocente, os resultados do exame somente seriam observados com uma probabilidade de 1 em 10,000. O promotor alega que, diante de uma probabilidade tão baixa de que o réu seja inocente, está além da duvida razoável de que o réu tenha cometido o crime (e ele deve ser condenado).

Teorema de Bayes

O juiz contrata você como uma perita judicial para ajudá-lo a entender o argumento do promotor. Qual e a sua analise?

Ressalvadas algumas adaptações, este argumento jurídico e real e foi apresentado nos Estados Unidos no caso The People v. Collins.

Problema extraído do matéria de **notas de aula** de Estatística Bayesiana dos professores Luís Gustavo Esteves e Rafael Stern – UFSCAR, São Carlos.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

TEOREMA DE BAYES

Considere os seguintes eventos:

R: o réu cometeu o crime.

E: o exame forense indica que o reu cometeu o crime.

O promotor indicou que **P(E|Rc)** = 0.0001 e **P(E|R) = 1** e disse que isso e razão suficiente para acreditar que o réu é culpado dada a evidência. Contudo, o juiz acreditava, a priori, que **P(R) = 0.00001**. Para determinar a probabilidade a posteriori de que o réu é culpado, **P(R|E)**, ele deve usar o teorema de Bayes.

P(R|E) = **P(R)*P(E|R)** / **P(R)*P(E|R)** + **P(Rc)*P(E|Rc)**

= **0.00001 * 1** / **0.00001 * 1** + **(1-0.00001)*0.0001**

= **0.091**.

UNIFESP

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

1933

Teorema de Bayes

Portanto, dado o resultado do exame forense, a probabilidade de que o réu é culpado ainda e baixa. Isto ocorre dada a baixa probabilidade a priori de que o réu era culpado. O argumento falacioso usado pelo promotor e bem conhecido em Estatística Forense e recebe o nome de **“falácia do promotor”.**

https://en.wikipedia.org/wiki/Prosecutor%27s_fallacy

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Inferência Bayesiana

Inferência Bayesiana: é uma linha de pensamento estatístico devido a uma interpretação do teorema de Bayes.

Os eventos B_i , i=1,2,...,k, são consideradas como os possíveis estados da natureza que o experimentador atribui probabilidades subjetivas P(Bi). Essas probabilidades, que podem ser baseadas mais em razões pessoais do que em dados (que podem nem existir), são combinadas com a evidência experimental do evento A.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Inferência Bayesiana

P(Bi) são chamadas PROBABILIDADES A PRIORI (ou pré-experimental)

O pesquisador procede, com a observação ou experimento, e coleta dados do evento A dado que ele ocorreu sob um específico estado da natureza B_i, obtendo as probabilidades P(A| B_i), i=1,2,…,k. **O teorema de Bayes permite calcular as probabilidades condicionais P(B_i|A), i=1,2.,…,k; que representam as probabilidade dos estados originais revisadas após a observação de uma evidência experimental.**

As probabilidades revisadas são chamadas PROBABILIDADES A POSTERIORI (ou pós-experimental).

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

TÉCNICAS DE CONTAGEM

O calculo de probabilidades muitas vezes envolve a contagem do número de elementos que ocorrem em um evento.
Nem sempre isso é uma tarefa fácil e algumas tácnicas de contagem foram desenvolvidas.

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Se um acontecimento é composto por duas etapas sucessivas, independentes uma da outra, e

- a etapa 1 pode ocorrer de n modos;
- a etapa 2 pode ocorrer de m modos.

Então o número de possibilidades de ocorrência do acontecimento é n. m.

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

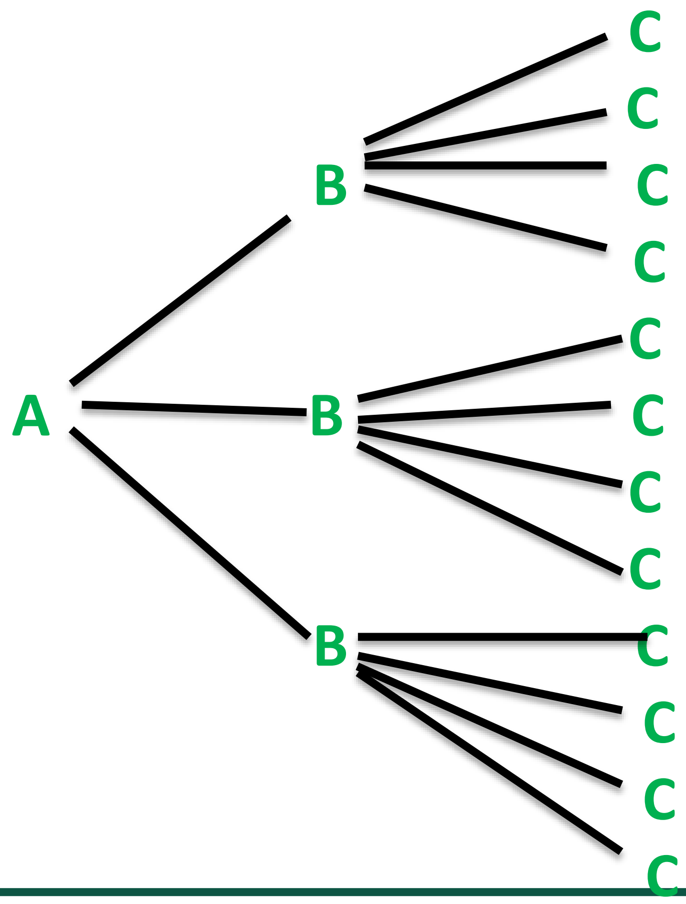
TÉCNICAS DE CONTAGEM

Exemplo: Pode-se ir da cidade A para a cidade B de 3 maneiras diferentes e de B para a cidade C de 4 maneiras.

De quantas maneiras diferentes pode-se ir das cidades A para C ?

A → 3 → B →4 → C = 12

Ou usando a **árvore de probabilidade**



=12

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

ARRANJOS

"n" elementos **distintos** tomados "p" a "p"

$$A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

→ A ordem dos elementos é importante!

Exemplo: 32 ≠ 23

Lembre-se:

n! = n x (n-1) x (n-2) x (n-3) x …. x 1;

1! =1;

0!=1.

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

ARRANJOS

Exemplo: Quantos números de 3 dígitos podem ser formados pelos números 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

→ Note que a ordem importa.

Temos:

$$A_{6,\,3} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6 \text{ x } 5 \text{ x } 4 \text{ x } 3!}{3!} = 120$$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

PERMUTAÇÕES

$\begin{cases} \text{"n" elementos } \textbf{distintos} \\ \quad \text{arranjados } \textbf{n} \text{ a } \textbf{n} \end{cases}$

$$A_{n,\,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{1!} = n! = P_n$$

$P_n = n! \rightarrow$ caso particular de **arranjo**.

COMBINAÇÕES

$\begin{cases} \text{“n” elementos } \textbf{distintos} \\ \qquad \text{tomado } \textbf{p} \text{ a } \textbf{p} \end{cases}$

→A ordem não é importante!

$$C_{n,\,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

UNIFESP

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

1933

COMBINAÇÕES

Uma notação muito usada para combinação é:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Propriedades da fórmula para combinação:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Têm-se que:

$$\binom{n}{n} = 1 \text{ e } \binom{n}{1} = n$$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Combinações

Exemplo: Quantas combinações podem ser formadas por 6 jogadores de xadrez.

(Partida = 2 pessoas)

→Neste caso a ordem não importa!

(jogador x, jogador y) = (jogador y, jogador x).

Temos:

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{6 \text{ x } 5 \text{ x } 4!}{2!\,4!} = 15$$

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Aula de hoje

- Probabilidade condicional e independência;
- Lei da probabilidade total;
- Teorema de Bayes.

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

PROXIMAS AULAS

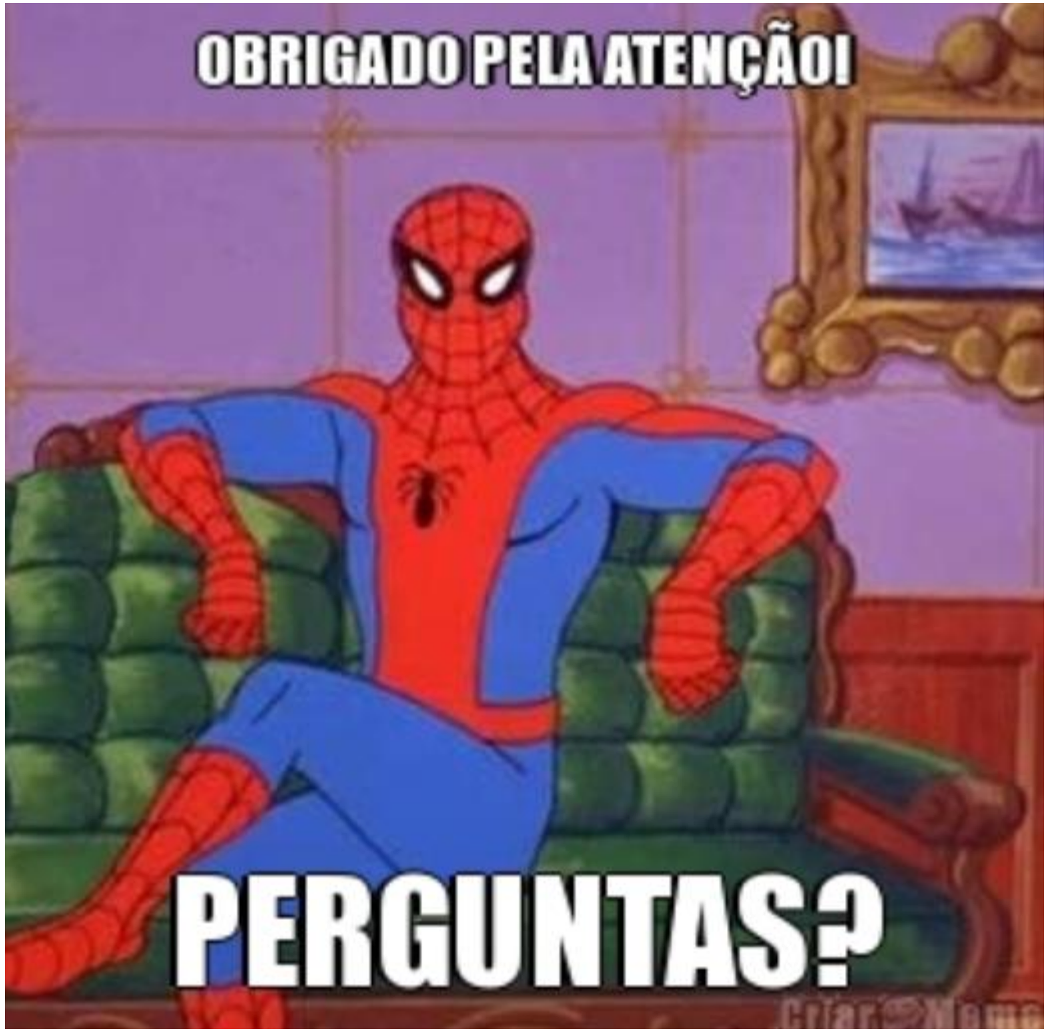
- Definição de Variável Aleatória;
- Propriedades (Esperança e Variância).

Referências

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros**. 6 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018. 628p.

MORETTIN, P. A.; BUSSAB, W. O. **Estatística básica**. 9 ed. São Paulo: Saraiva, 2017. 554p.

Class finished



UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933