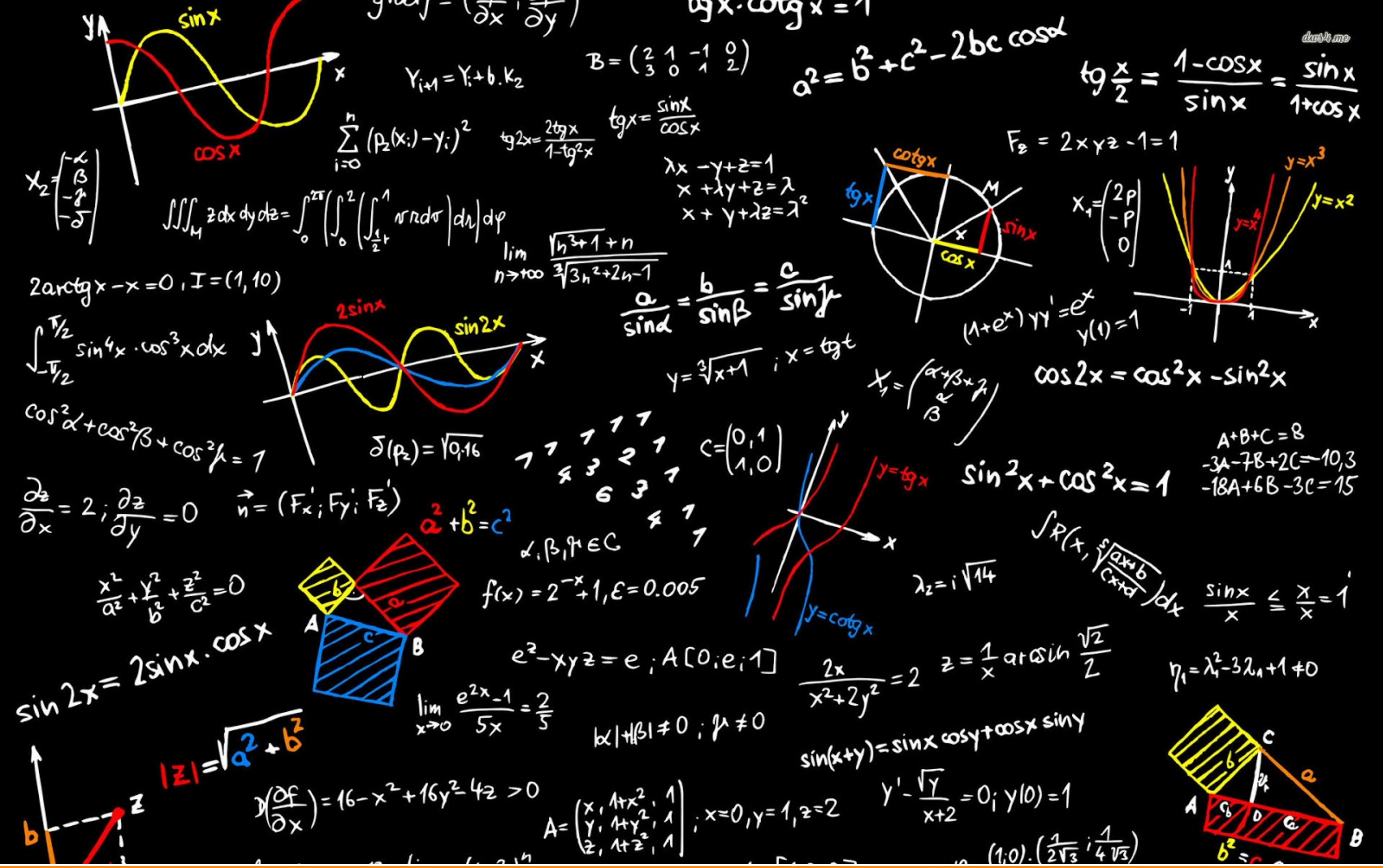


Séries e Equações Diferenciais Ordinárias

Professora: Daniela dos Santos de Oliveira

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Sumário

Parte I

Sequências e séries numéricas. Séries de potências. Séries de Fourier

Aula 1: Sequências numéricas

1.1 Sequências numéricas: Exemplos e definição

Uma sequência numérica, ou simplesmente, uma sequência, é uma sucessão de números. Ela pode ser pensada como uma lista de números escritos em uma ordem definida $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$.

Os valores $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ são chamados termos da sequência. O número a_1 é chamado de primeiro termo, a_2 é o segundo termo e, em geral, a_n é chamado de n-ésimo termo.

Observação: Em alguns casos é conveniente denotar o primeiro termo da sequência por a_0. Neste caso, a sequência tem a forma: $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

Importante: *A sequência $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ é também denotada por*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{ou} \quad (a_1, a_2, a_3, \ldots) \quad \text{ou} \quad \{a_n\} \quad \text{ou} \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{ou} \quad a_n$$

onde admitimos $n \geq 1$ quando nada for dito sobre n.

Exemplo 1.1 Nos exemplos a seguir, apresentamos três descrições distintas para a mesma sequência

$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} \qquad a_n = \frac{n}{n+1} \qquad \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\right\}$$

$$\left\{\sqrt{n-3}\right\}_{n=3}^{\infty} \qquad a_n = \sqrt{n-3},\ n \geq 3 \qquad \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n-3}, \ldots\}.$$

Exemplo 1.2 A **sequência de Fibonacci** é definida recursivamente pelas condições

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \ \ n \geq 3.$$

Cada termo é a soma dos dois termos precedentes. Os primeiros termos são

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}.$$

Exemplo 1.3 Determine uma fórmula para o termo geral, a_n, da sequência

$$\left\{\frac{3}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{5}{125}, -\frac{6}{625}, \frac{7}{3125}, \ldots\right\}.$$

Resolução: Sabemos que

$$a_1 = \frac{3}{5}, \ a_2 = -\frac{4}{25}, \ a_3 = \frac{5}{125}, \ a_4 = -\frac{6}{625}, \ a_5 = \frac{7}{3125}.$$

Note que os numeradores possuem sinais alternados e iniciam com o número 3 e são incrementados pelo número 1 à medida que avançamos para o próximo termo. Assim, o numerador por ser descrito por $(-1)^{n-1}(n+2)$. Os denominadores são potências de 5 e podem ser descritos por 5^n. Portanto, a fórmula para o termo geral, a_n, é dada por

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}(n+2)}{5^n}.$$

Importante: *Nem sempre é possível representar o termo geral de uma sequência por uma fórmula. Não existe uma fórmula para representar a sequência de números primos*

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, \ldots\}.$$

Definição 1.1. (Sequência numérica)

Uma sequência de números reais é uma função

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$f(n) = a_n$$

qua associa a cada número narural n um número real a_n. ♣

1.2 Gráfico de sequências

O gráfico da sequência $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ é o gráfico de

$$f(n) = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Como o lado direito da equação está definido somente para números naturais, o gráfico consiste de pontos de isolados, isto é, distinto do gráfico de

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \geq 1$$

que é uma curva contínua.

*Gráficos em aula.

- O que acontece com a sequência quando n cresce?

1.3 Convergência de sequências numéricas

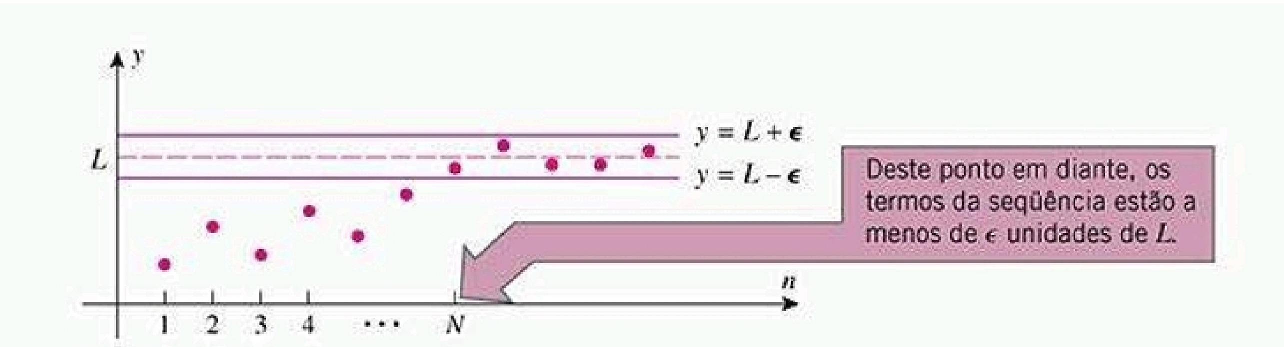
Definição 1.2. (Convergência)

Uma sequência $\{a_n\}$ ***converge*** *para L se, para todo número $\epsilon > 0$, existir um número inteiro positivo N tal que $|a_n - L| < \epsilon$ para $n \geq N$. Neste caso escrevemos*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Dizemos que a sequência ***diverge*** *(ou é divergente) quando não convergir para algum limite finito.* ♣

Observação: Ao representar os pontos (n, a_n) no plano cartesiano, pode-se observar que a_n convergir para L significa que para todo $\epsilon > 0$, existe um ponto na sequência a partir do qual todos os termos estão entre as retas $y = L - \epsilon$ e $y = L + \epsilon$.



1.4 Calculando limites de sequências

Suponha que as sequências (a_n) e (b_n) convirjam, respectivamente, para L e M e que c seja uma constante. Então:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(c \cdot a_n\right) = c \cdot L$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(a_n \pm b_n\right) = L \pm M$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(a_n \cdot b_n\right) = L \cdot M$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{L}{M}, \quad M \neq 0$

Teorema 1.1

Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ *e* $f(n) = a_n$ *quando* n *é um inteiro, então* $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. ♡

Exemplo 1.4 Determine se a sequência $a_n = \dfrac{1}{n}$ converge ou diverge.

Resolução: Temos que,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Então, pelo **Teorema 1.1**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Importante: *A recíproca do* **Teorema 1.1** *não é verdadeira, isto é, não podemos afirmar que: Se* $f(n) \to L$ *quando* $n \to \infty$*, então* $f(x) \to L$ *quando* $x \to \infty$*. Um exemplo para este fato é dado por*

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}(\pi x) \quad \textit{não existe} \quad (\textit{oscila}).$$

No entanto,

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(n\pi) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

O teorema do confronto também pode ser adaptado para sequências numéricas.

Teorema 1.2. (Teorema do Confronto para sequências)

Se $a_n \le b_n \le c_n$ *para* $n \ge n_0$ *e* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$*, então* $\lim_{n\to\infty} b_n = L$. ♡

Outros dois resultados importantes sobre limites de sequências são dados pelos seguintes teoremas.

Teorema 1.3

Se $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$*, então* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. ♡

Teorema 1.4

Se $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ *e se a função for contínua em* L*, então*

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L).$$

♡

1.5 Exemplo

Exemplo 1.5 Determine se as sequências convergem ou divergem.

(a) $a_n = \sqrt[n]{n}$

(b) $a_n = (-1)^n$

(c) $a_n = \ln(\sqrt[n]{n})$

(d) $a_n = \dfrac{\cos^2 n}{2^n}$

(e) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

Resolução:

(a) Para determinar se a sequência converge, devemos calcular o seguinte limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}.$$

Consideremos $f(x) = \sqrt[x]{x}$ e calculemos

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\ln x^{1/x}} = \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}}, \tag{1.1}$$

onde utilizamos a continuidade da função exponencial na última igualdade. Temos uma indeterminação do tipo ∞/∞ no limite. Podemos utilizar a regra de L'Hopital de modo a obter

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Retornando a Eq.(1.1), obtemos

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

Como o $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ e a sequência a_n é convergente.

(b) A sequência $a_n = (-1)^n$ é dada por

$$\{-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots\}.$$

Uma vez que a sequência oscila entre -1 e 1 com frequência indefinida, a sequência a_n não se aproxima de nenhum número. Portanto, a_n diverge.

(c) Como a função logaritmo natural, $\ln$, é contínua em 1 (item (a)), pelo **Teorema 1.4**, podemos escrever

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\sqrt[n]{n}\right) = \ln\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right) = \ln(1) = 0.$$

Portanto, a sequência $a_n = \ln\left(\sqrt[n]{n}\right)$ converge para zero.

(d) Note que

$$
\begin{gathered}
0 \le \cos^2 n \le 1 \\
0 \le \frac{\cos^2 n}{2^n} \le \frac{1}{2^n}
\end{gathered}
$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, pelo **Teorema 1.2**, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos^2 n}{2^n} = 0.$$

Portanto, $a_n = \dfrac{\cos^2 n}{2^n}$ converge para zero.

(e) Calculemos o limite do valor absoluto, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Pelo **Teorema 1.3**,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0,$$

logo a sequência é convergente e converge para zero.

Exercícios

1. O que é uma sequência convergente? Dê dois exemplos.

2. O que é uma sequência divergente? Dê dois exemplos.

3. Escreva os cinco primeiros termos de cada sequência:

- **(a)** $a_n = 1 - (0,2)^n$,
- **(b)** $a_n = \dfrac{n+1}{3n-1}$,
- **(c)** $a_n = \dfrac{3(-1)^n}{n!}$,
- **(d)** $\{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)\}$
- **(e)** $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n - 1$,
- **(f)** $a_1 = 4,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n - 1}$

4. Encontre uma fórmula para o termo geral a_n da sequência, admitindo que o padrão dos primeiros termos continua.

- **(a)** $\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \cdots\right\}$
- **(b)** $\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{8}, \cdots\right\}$

(c) $\{2, 7, 12, 17, \dots\}$

(d) $\left\{-\dfrac{1}{4}, \dfrac{2}{9}, -\dfrac{3}{16}, \dfrac{4}{25}, \cdots\right\}$

(e) $\left\{1, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{9}, -\dfrac{8}{27}, \cdots\right\}$

(f) $\{5, 1, 5, 1, 5, \dots\}$

5. Em cada item, determine duas fórmulas para o termo geral da sequência, uma começando com $n = 1$ e a outra começando com $n = 0$:

(a) $1, -r, r^2, -r^3, \dots$

(b) $r, -r^2, r^3, -r^4, \dots$

6. Determine se as sequências convergem ou divergem. Se ela convergir, determine seu limite:

(a) $a_n = \dfrac{5 - 2n}{3n - 7}$

(b) $a_n = \dfrac{n^2 - 4}{n + 5}$

(c) $a_n = \dfrac{n^2}{n^3 + 1}$

(d) $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n^3 + 3}$

(e) $a_n = \dfrac{n^2 - 2\sqrt{n} + 1}{1 - n - 3n^2}$

(f) $a_n = \dfrac{\mathrm{e}^n - \mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}}$

(g) $a_n = \left(\dfrac{n - 3}{n}\right)^n$

(h) $a_n = \dfrac{n}{\ln(n + 1)}$

(i) $a_n = \sqrt{n + 1} - \sqrt{n}$

(j) $a_n = n - \sqrt{n^2 - 4n}$

(k) $a_n = \cos\left(\dfrac{2}{n}\right)$

(l) $a_n = \dfrac{(2n - 1)!}{(2n + 1)!}$

(m) $a_n = \dfrac{\ln n}{\ln(2n)}$

(n) $a_n = n^2 e^{-n}$

(o) $a_n = n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

(p) $a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

(q) $a_n = n\cos(n\pi)$

Respostas:

1. $\left\{\frac{1}{n}\right\}, \left\{\frac{1}{2^n}\right\}$

2. $\{n\}, \{\operatorname{sen} n\}$

3. (a) $\{0,8; 0,96; 0,992; 0,9984; 0,99968; \dots\}$

   (b) $\left\{1, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{5}{11}, \frac{3}{7}, \cdots\right\}$

   (c) $\left\{-3, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{40}, \cdots\right\}$

   (d) $\{2, 8, 48, 384, 3840, \dots\}$

   (e) $\{3, 5, 9, 17, 33, \dots\}$

   (f) $\left\{4, \frac{4}{3}, 4, \frac{4}{3}, 4, \cdots\right\}$

4. (a) $a_n = \frac{1}{2^n}$

   (b) $a_n = \frac{1}{2n}$

   (c) $a_n = 5n - 3$

   (d) $a_n = (-1)^n \frac{n}{(n+1)^2}$

   (e) $a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

   (f) $a_n = 3 + (-1)^{n+1} \cdot 2$

5. (a) $(-r)^{n-1},\ n \geq 1;\ (-r)^n,\ n \geq 0$

   (b) $(-1)^{n+1} r^n,\ n \geq 1;\ (-1)^n r^{n+1},\ n \geq 0.$

6. (a) Converge. $-\frac{2}{3}$

(b) Diverge.

(c) Converge. 0

(d) Converge. 0

(e) Converge. $-\frac{1}{3}$

(f) Converge. 1

(g) Converge. e^{-3}

(h) Diverge.

(i) Converge para 0

(j) Converge para 2

(k) Converge. 1

(l) Converge. 0

(m) Converge. 1

(n) Converge. 0

(o) Converge. 1

(p) Converge. 1

(q) Diverge.

Aula 2: Sequências numéricas (continuação)

Importante: *Uma sequência $\{a_n\}$ é dita **divergente** se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ou se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ ou ainda se a sequência oscila.*

2.1 Exemplo: Sequência $a_n = r^n$

Exemplo 2.1 Determine os valores de r para os quais a sequência $a_n = r^n$ é convergente.

Resolução: Sabemos que

$$\lim_{x\to\infty} r^x = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq r < 1 \\ 1, & \text{se } r = 1 \\ +\infty, & \text{se } r > 1 \end{cases}$$

Definindo $f(x) = r^x$ para $x \geq 1$, temos $f(n) = a_n$, $n \geq 1$. Então, pelo **Teorema 1.4**, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq r < 1 \\ 1, & \text{se } r = 1 \\ +\infty, & \text{se } r > 1 \end{cases}$$

Obs:

$$\begin{cases} \text{Se } a_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad |a_n| \to 0 \\ \text{Se } |a_n| \to 0 \quad \Rightarrow \quad a_n \to 0 \\ \text{Se } a_n \to +\infty \quad \Rightarrow \quad |a_n| \to +\infty \\ \text{Se } |a_n| \to +\infty \quad \Rightarrow \quad a_n \to +\infty \text{ ou } a_n \to -\infty \text{ ou } a_n \to \pm\infty \ (oscila) \end{cases}$$

Se $-1 < r < 0$, como $|r|^n \to 0 \quad \Rightarrow \quad r^n \to 0$. a_n converge.
Se $r = -1$, $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ não existe (oscila). a_n diverge.
Se $r < -1$, como $|r|^n \to +\infty \quad \Rightarrow \quad r^n \to +\infty$ ou $r^n \to -\infty$ ou $r^n \to \pm\infty$ (oscila). a_n diverge.

Deste modo, concluímos que $a_n = r^n$ é convergente se $-1 < r \leq 1$ e é divergente para todos os outros valores de r.

2.2 Sequências monótonas

Definição 2.1. (Sequências monótonas)

Uma sequência $\{a_n\}$ é denominada **crescente** *se $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \geq 1$, isto é, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$. A sequência é denomidada* **decrescente** *se $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \geq 1$, isto é, $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > a_{n+1} > \cdots$. A sequência $\{a_n\}$ é dita* **monótona** *se for crescente ou decrescente.* ♣

Observação: A sequência $\{a_n\}$ é **não decrescente** se

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots .$$

A sequência $\{a_n\}$ é **não crescente** se

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \cdots$$

.

Exemplo 2.2 Mostre que a sequência $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ é decrescente.

Resolução: Faremos a demonstração de duas formas:

1. Temos que mostrar que

$$\begin{aligned} a_n &> a_{n+1} \\ \frac{n}{n^2+1} &> \frac{n+1}{(n+1)^2+1} . \end{aligned}$$

Como $n^2+1 >$ e $(n+1)^2+1 > 0$ para todo $n \geq 1$, podemos multiplicar cruzado

$$\begin{aligned} n[(n+1)^2+1] &> (n+1)(n^2+1) \\ n[n^2+2n+2] &> n^3+n+n^2+1 \\ \cancel{n^3}+2n^2+2n &> \cancel{n^3}+n^2+n+1 \\ n^2+n &> 1 \end{aligned}$$

Esta última desigualdade é verdadeira para todo $n \geq 1$, portanto $a_n > a_{n+1}$, isto é, a sequência é decrescente.

2. Consideremos a função $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, então

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} < 0,$$

sempre que $1 - x^2 < 0$, uma vez que o denominador é positivo para todo x. A função $1 - x^2$ é sempre negativa para $x > 1$. Logo, $f(x)$ é decrescente para $x > 1$. Assim, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ a sequência a_n é decrescente.

Importante: *Existem sequências que não são crescentes e nem decrescentes. Por exemplo,* $a_n = (-1)^n$.

2.3 Sequências limitadas

Definição 2.2. (Sequências limitadas)

Uma sequência $\{a_n\}$ *é* ***limitada superiormente*** *se existir um número* M *tal que*

$$a_n \leq M \quad \textit{para todo } \ n \geq 1.$$

A sequência é ***limitada inferiormente*** *se existir um número* m *tal que*

$$m \leq a_n \quad \textit{para todo } \ n \geq 1.$$

Se a sequência for limitada inferiormente e superiormente, então ela é uma ***sequência limitada***.

Teorema 2.1

Toda sequência monótona e limitada é convergente.

Exemplo 2.3 Prove que a sequência $a_n = \dfrac{3^{n+2}}{(n+2)!}$ é convergente.

Resolução: Basta verificar se as hipóteses do **Teorema 2.1** são satisfeitas, isto é, mostrar que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ é monótona e limitada. De fato:

(i) Como $a_n > 0$ para todo n, então

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{3^{n+3}}{(n+3)!}}{\frac{3^{n+2}}{(n+2)!}} = \frac{3^{n+3}}{(n+3)!}\,\frac{(n+2)!}{3^{n+2}} = \frac{3\cdot \cancel{3^{n+2}}}{(n+3)\cancel{(n+2)!}}\,\frac{\cancel{(n+2)!}}{\cancel{3^{n+2}}} = \frac{3}{(n+3)} < 1. \tag{2.1}$$

Logo, $a_{n+1} < a_n$ para todo $n \geq 1$. Logo, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ é monótona decrescente.

(ii) Note que, $a_n > 0$ e que

$$a_n = \frac{3\cdot 3\cdot 3\cdots 3\cdot 3\cdot 3}{(n+2)(n+1)n\cdots 3\cdot 2\cdot 1} = \underbrace{\underbrace{\frac{3}{(n+2)}}_{<1}\cdot\underbrace{\frac{3}{(n+1)}}_{<1}\cdot\underbrace{\frac{3}{n}}_{<1}}_{<1}\cdot\cdots\cdot\underbrace{\frac{3}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{1}}_{=\frac{9}{2}} \leq \frac{9}{2}. \tag{2.2}$$

Portanto, $0 < a_n \leq \frac{9}{2}$, ou seja, $\{a_n\}$ é limitada. Portanto, de (i) e (ii) e, pelo **Teorema 2.1**, a sequência $\{a_n\}$ é convergente.

Exercícios

1. Determine se a sequência dada é crescente, decrescente ou não monotônica. A sequência dada é limitada?

(a) $a_n = \dfrac{1}{5^n}$

(b) $a_n = \dfrac{1}{2n+3}$

(c) $a_n = \dfrac{2n-3}{3n+4}$

(d) $a_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$

(e) $a_n = n\mathrm{e}^{-n}$

(f) $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$

(g) $a_n = n + \dfrac{1}{n}$

2. Decida se cada uma das sequências abaixo é convergente ou divergente, calculando o limite no caso convergente:

(a) $a_n = \dfrac{2n + \operatorname{sen} n}{5n+1}$

(b) $a_n = \dfrac{(n+3)! - n!}{(n+4)!}$

(c) $a_n = \dfrac{n \operatorname{sen}(n!)}{n^2+1}$

(d) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

(e) $a_n = n(\alpha)^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

(f) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$

(g) $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$, onde $0 < a < b$

3. Calcule, justificando, o limite das seguintes sequências:

(a) $a_n = \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}$

(b) $a_n = \dfrac{1}{3^n}\left(\dfrac{6n-1}{2n+5}\right)^n$

(c) $a_n = \left(1 - 2\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{3n}$

(d) $a_n = \sqrt{n - \sqrt{n}} - \sqrt{n}$

(e) $a_n = \left(e^{3/n} - \dfrac{2}{n}\right)^n$

Respostas:

1. (a) Decrescente. $0 < a_n \leq \dfrac{1}{5},\ n \geq 1.$

   (b) Decrescente. $0 < a_n \leq \dfrac{1}{5},\ n \geq 1.$

   (c) Crescente. $-\dfrac{1}{7} \leq a_n < \dfrac{2}{3},\ n \geq 1.$

   (d) Não monotônica. $-1 \leq a_n \leq 1,\ n \geq 1.$

   (e) Decrescente. $0 \leq a_n \leq \dfrac{1}{n}.$

   (f) Decrescente. $0 < a_n \leq \dfrac{1}{2}.$

   (g) Crescente. Não é limitada.

2. (a) Converge para $\dfrac{2}{5}$

   (b) Converge para 0

   (c) Converge para 0

   (d) Diverge

   (e) Converge para 0 se $|\alpha| < 1$

   (f) Converge para $\dfrac{1}{2}$

   (g) Converge para b

3. (a) 1

   (b) $e^{-8/3}$

   (c) e^{-6}

(d) $-\dfrac{1}{2}$

(e) e

Aula 3: Séries numéricas

3.1 Séries infinitas

O objetivo agora é discutir somas com um número infinito de termos. O exemplo mais conhecido de tais somas ocorre na representação decimal de números reais. Por exemplo, o número $0,3333\ldots$ pode ser escrita na forma de uma série infinita:

$$0,333333\ldots = 0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + \ldots.$$

Seja S_n a soma dos n primeiros termos da série. Assim,

$$\begin{aligned} S_1 &= u_1 \\ S_2 &= u_1 + u_2 \\ S_3 &= u_1 + u_2 + u_3 \\ &\vdots \\ S_n &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k. \end{aligned}$$

O número S_n é chamado **n-ésima soma parcial** da série. Essas somas formam uma nova sequência, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, que é chamada **sequência das somas parciais**.

Quando n cresce, a soma parcial $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ inclui mais e mais termos da série. Assim, se S_n tende a um limite quando $n \to \infty$, é razoável que este limite seja a soma de todos os termos da série. Isto sugere a seguinte definição:

Definição 3.1. (Convergência de uma série)

Seja $\{S_n\}$ a sequência das somas parciais da série

$$u_1 + u_2 + \cdots u_n.$$

Se a sequência $\{S_n\}$ convergir para um limite S, então dizemos que a série ***converge*** *para S e que S é a* ***soma*** *da série. Denotamos por*

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k.$$

Se a sequência das somas parciais divergir, dizemos que a série ***diverge****. Uma série divergente não tem soma.* ♣

3.2 Séries geométricas

Na série geométrica cada termo é obtido a partir do anterior pela multiplicação dele por uma razão em comum r.

Teorema 3.1. (Série geométrica)

Uma série geométrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^k + \cdots \qquad \textit{onde } a \neq 0 \tag{3.1}$$

converge se $|r| < 1$ *e diverge se* $|r| \geq 1$. *Se a série convergir, então a soma da série será*

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}. \tag{3.2}$$

♡

Demonstração Vamos tratar do primeiro caso: $|r| = 1$. Se $r = 1$, então a série é

$$a + a + a + a + \cdots$$

A n-ésima soma parcial é $S_n = (n+1)a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1)a = \pm\infty$ (depende do sinal de a). Assim, para $r = 1$, a série diverge.

Se $r = -1$, a série é

$$a - a + a - a + a - a + a - \cdots$$

que diverge, pois a sequência gerada pela n-ésima soma parcial é $\{a, 0, a, 0, a, 0, \ldots\}$ é divergente.

Agora consideremos $|r| \neq 1$. A n-ésima soma parcial da série é

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n. \tag{3.3}$$

Multiplicando a Eq.(3.3) por r, obtemos

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n + ar^{n+1}. \tag{3.4}$$

Subtraindo (3.4) de (3.3), obtemos

$$\begin{aligned} S_n - rS_n &= (a + \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} + \cdots + \cancel{ar^n}) - (\cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} + \cdots + \cancel{ar^n} + ar^{n+1}) \\ (1-r)S_n &= a(1 - r^{n+1}) \\ S_n &= \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}. \end{aligned}$$

Devemos calcular

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \left(\frac{a}{1-r}\right) \lim_{n\to\infty} (1 - r^{n+1}). \tag{3.5}$$

Se $|r| < 1$, então $\lim\limits_{n\to\infty} (1 - r^{n+1}) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 - r \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} r^n}_{=0} = 1$ (demonstrado no Exemplo 2.1). Assim, pela Eq.(3.5), temos

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}.$$

Se $|r| > 1$, então ou $r > 1$ ou $r < -1$. No caso $r > 1$, $\lim_{n\to\infty}(1 - r^{n+1}) = \lim_{n\to\infty} 1 - r \underbrace{\lim_{n\to\infty} r^n}_{=+\infty} = -\infty$ (Exemplo 2.1). No caso em que $r < -1$, $\lim_{n\to\infty} r^{n+1}$ diverge, pois o limite é: $+\infty$ ou $-\infty$ ou $\pm\infty$. Portanto, S_n diverge em ambos os casos.

Exemplo 3.1 Determine se a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{5^k}$$

é convergente ou divergente.

Resolução: Esta série é uma série geométrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{5^k} = 4\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k$$

com razão $r = 1/5 < 1$. Portanto, a série converge. A soma da série é

$$S = 4\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k = \frac{4}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)} = 4\left(\frac{5}{4}\right) = 5.$$

3.3 Séries telescópicas

Considere a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e suponha que $a_k = f(k+1) - f(k),\ k \geq 1$. Esta série é denominada **série telescópica**. Em geral, o cálculo da n-ésima soma parcial desta série é bem simples:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \overbrace{\cancel{f(2)} - f(1)}^{a_1} + \overbrace{\cancel{f(3)} - \cancel{f(2)}}^{a_2} + \overbrace{\cancel{f(4)} - \cancel{f(3)}}^{a_3} + \cdots + \overbrace{f(n+1) - \cancel{f(n)}}^{a_n} \\ &= f(n+1) - f(1). \end{aligned}$$

A partir daí, basta calcular $\lim_{n\to\infty} S_n$.

Exemplo 3.2 Determine se a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots$$

converge ou diverge. Se convergir encontre a sua soma.

Resolução: A n-ésima soma parcial da série é

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Para calcular $\lim_{n\to\infty} S_n$, vamos reescrever $1/[k(k+1)]$ utilizando frações parciais, isto é,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} = \frac{A(k+1)+Bk}{k(k+1)} \qquad \Rightarrow \qquad A(k+1)+Bk = 1.$$

- Seja $k = 0$, então $A = 1$.
- Seja $k = -1$, então $B = -1$.

Portanto,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

assim

$$S = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

A série converge e sua soma é $S = 1$.

3.4 Série harmônica

Uma das séries mais importantes de todas as séries divergentes é a **série harmônica**

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots. \tag{3.6}$$

Para mostrar que a série diverge, consideremos as somas parciais:

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 \\ S_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\ S_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{2}{2} \\ S_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{16} &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right) \\ &> 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\underbrace{\left(\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{8}\right)}_{\text{4 termos}}+\underbrace{\left(\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)}_{\text{8 termos}} \\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{4}{2}. \end{aligned}$$

Da mesma forma $S_{32} > 1+\frac{5}{2}$, $S_{64} > 1+\frac{6}{2}$ e, em geral,

$$S_{2^n} > 1+\frac{n}{2}.$$

Quando $n \to \infty$, $S_{2^n} \to \infty$ e, portanto, $\{S_n\}$ diverge. Portanto, a série harmônica diverge.

Exercícios

1. Determine se a série

$$1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots$$

converge ou diverge. Se convergir encontre a sua soma.

2. Encontre a soma da série dada ou mostre que a série diverge:

(a) $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}$

(b) $3-\frac{3}{4}+\frac{3}{16}-\frac{3}{64}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}3\left(-\frac{1}{4}\right)^{k-1}$

(c) $\sum_{k=5}^{\infty}\frac{1}{(2+\pi)^{2k}}$

(d) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{5}{10^{3k}}$

(e) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-5)^k}{8^{2k}}$

(f) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{e^k}$

(g) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{k+3}}{e^{k-3}}$

(h) $\sum_{k=1}^{\infty}\pi^{k/2}\cos(k\pi)$

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3+2^k}{2^{k+2}}$

(j) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3+2^k}{3^{k+2}}$

3. Calcule a soma das séries:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right)}{\ln(k+1)\ln(k+2)}$

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}}\right)$

(g) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$

(h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}$

4. Expresse os números dados como uma razão de inteiros (usando séries):

(a) $0,22222\ldots$

(b) $0,73737373\ldots$

(c) $3,417417417\ldots$

(d) $6,254254254\ldots$

5. Sendo $x \in \mathbb{R}$, calcule a soma da série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \operatorname{sen}^k x.$$

Respostas:

1. A série diverge.

2. (a) Converge. $S = \dfrac{1}{2}$,

   (b) Converge. $S = \dfrac{12}{5}$,

   (c) Converge. $S = \dfrac{1}{(2+\pi)^8\left[(2+\pi)^2 - 1\right]}$,

   (d) Converge. $S = \dfrac{5000}{999}$

   (e) Converge. $S = \dfrac{25}{4416}$

   (f) Converge. $S = \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$

   (g) Converge. $S = \dfrac{8\mathrm{e}^4}{\mathrm{e}-2}$

   (h) Diverge.

   (i) Diverge.

   (j) Converge. $S = \dfrac{5}{6}$.

3. (a) $S = \dfrac{3}{4}$

   (b) $S = \dfrac{1}{2}$

   (c) $S = \dfrac{1}{3}$

   (d) $S = \dfrac{1}{4}$

   (e) $S = \dfrac{1}{\ln 2}$

   (f) $S = \dfrac{1}{2}$

   (g) $S = \dfrac{3}{4}$

   (h) $S = 1$

4. (a) $\dfrac{2}{9}$

   (b) $\dfrac{73}{99}$

(c) $\dfrac{1138}{333}$

(d) $\dfrac{344}{55}$

5. $S = \dfrac{2\,\text{sen}\,x}{2 + \text{sen}\,x}\,.$

Aula 4: Testes de convergência

4.1 Observações

Importante: *Dada uma sequência* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, *temos a liberdade de ajustar o índice inicial da série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. *Observe que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1} = \sum_{k=3}^{\infty} a_{k-2} = \cdots = \sum_{k=n}^{\infty} a_{k-n+1}$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$. *Além disso, note que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \sum_{k=3}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k.$$

O objetivo é desenvolver vários testes que nos permitam determinar se uma dada série converge ou diverge.

Importante: *A convergência ou divergência de uma dada série não é afetada pela retirada de um número finito de termos. Em particular, para qualquer número inteiro* K, *as séries*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} a_k &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \\ \sum_{k=K}^{\infty} a_k &= a_K + a_{K+1} + a_{K+2} + \cdots \end{aligned}$$

ambas convergem ou ambas divergem. Porém, estas séries têm somas diferentes.

Teorema 4.1

Se a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *for convergente, então* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

♡

Demonstração Consideremos a n-ésima soma parcial da série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$:

$$S_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}}_{S_{n-1}} + a_n.$$

Então, $a_n = S_n - S_{n-1}$. Como $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é convergente, a sequência $\{S_n\}$ é convergente. Seja $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Como $(n-1) \to \infty$ quando $n \to \infty$, também temos $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(S_n - S_{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Importante: *A recíproca do* **Teorema 4.1** *não é verdadeira, em geral. Se* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *não podemos concluir que* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *seja convergente. Observe que, para a série harmônica* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, *temos* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, *mas a série é divergente.*

4.2 Teste da divergência

O teste do termo geral é, na verdade, o teorema da divergência.

Teorema 4.2. (Teorema da divergência)

Se $\lim\limits_{k\to\infty} a_k$ *não existir ou se* $\lim\limits_{k\to\infty} a_k \neq 0$, *então a série* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *é divergente.* ♡

Exemplo 4.1 A série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}$$

é convergente ou divergente?

Resolução: Note que,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{k}} = 1 \neq 0.$$

Pelo Teorema da divergência (**Teorema 4.2**), a série é divergente.

Teorema 4.3

Se $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *e* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *forem convergentes, então as séries*

(i) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k = c \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, *onde* c *é uma constante*

(ii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$

também são convergentes. ♡

Importante: ***MUITO CUIDADO!!!!*** *As duas "propriedades" abaixo* ***NÃO EXISTEM****:*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cdot b_k) \neq \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{b_k}\right) \neq \frac{\sum_{k=1}^{\infty} a_k}{\sum_{k=1}^{\infty} b_k}$$

4.3 Teste da integral

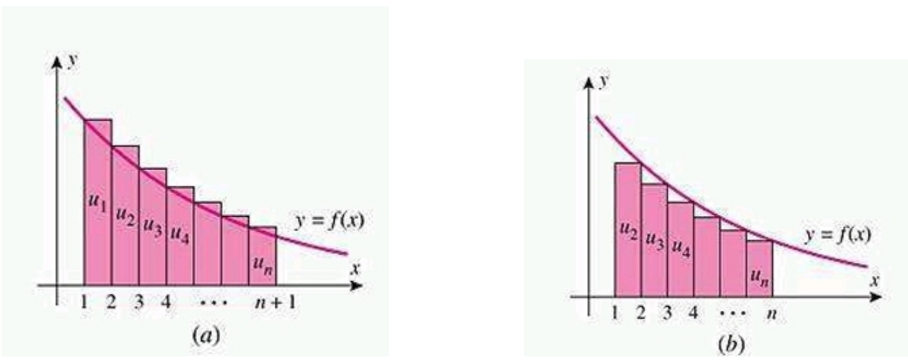
Teorema 4.4. (Teste da integral)

Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente em $[1,\infty)$ e seja $a_k = f(k)$. Então, a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é convergente se, e somente se, a integral imprópria $\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ for convergente. Em outras palavras:

(a) *Se $\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ diverge, então $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.*

(b) *Se $\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge, então $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.* ♡

Ideia da demonstração: *Comentários em aula.



Exemplo 4.2 Utilize o teste da integral para verificar se as seguintes séries convergem ou divergem:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k\mathrm{e}^{-k^2}$

Resolução:

(a) Seja $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$. $f(x)$ é contínua e positiva em $[1,\infty)$. Vamos verificar que f é decrescente em $[1,\infty)$. De fato

$$f'(x) = \frac{0\cdot(2x+1) - 1\cdot 2}{(2x+1)^2} = -\frac{2}{(2x+1)^2} < 0 \quad \text{em} \quad [1,\infty).$$

As hipóteses do teste da integral são satisfeitas. Então,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x.$$

Consideremos a substituição

$$u = 2x+1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = 2\mathrm{d}u \qquad \begin{cases} x = 1 & \Rightarrow \quad u = 3 \\ x = t & \Rightarrow \quad u = 2t+1, \end{cases}$$

assim

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty} \int_3^{2t+1} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\Big[\ln u\Big]_3^{2t+1} = \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\Big[\ln(2t+1) - \ln 3\Big] = +\infty.$$

Como $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x$ diverge, então $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}$ diverge.

(b) Seja $f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$. $f(x)$ é contínua e positiva em $[1,\infty)$. Vamos verificar que $f(x)$ é decrescente em $[1,\infty)$. De fato,

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x^2} - 2x^2\mathrm{e}^{-x^2} = (1-2x^2)\mathrm{e}^{-x^2} < 0 \quad \text{em} \quad [1,\infty).$$

Fazendo a substituição $u = -x^2$ $\big(\mathrm{d}u = -2x\,\mathrm{d}x\big)$, temos

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{t\to\infty}\int_1^t x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\int_{-1}^{-t^2}\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\Big[\mathrm{e}^u\Big]_{-1}^{-t^2} = -\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-t^2}-\mathrm{e}^{-1}\right]\\ &= \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\left[\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-t^2}\right] = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}.\end{aligned}$$

Como $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge, então $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k\mathrm{e}^{-k^2}$ converge.

Exercícios

1. Use o **Teorema 4.3** para determinar a soma da série:

(a) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{4^k}\right)+\cdots$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{5^k}-\frac{1}{k(k+1)}\right]$,

(c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{1}{k^2-1}-\frac{7}{10^{k-1}}\right]$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[7^{-k}3^{k+1}-\frac{2^{k+1}}{5^k}\right]$

2. Aplique o Teorema da divergência e escreva a conclusão obtida sobre a série:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2+k+3}{2k^2+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\cos(k\pi)$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{\mathrm{e}^k}$

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\ln k$

(g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}$

(h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}+3}$

3. Verifique se as hipóteses do teste da integral são satisfeitas. Em caso afirmativo, utilize o teste para determinar se a série converge ou diverge.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5k+2}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+9k^2}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4+2k)^{3/2}}$

4. Determine se a série converge:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{\mathrm{e}}}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2k-1}}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\ln(k+1)}$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k}$

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^2+3}$

(g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} k}{k^2+1}$

(h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{k}\right)$

(j) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \mathrm{e}^{-k^3}$

(k) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \ln k \cdot \ln(\ln k)}$

5. Use o teste da integral para investigar a relação entre o valor de p e a convergência das séries:

(a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^p}$.

(b) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \ln k \cdot [\ln(\ln k)]^p}$

Respostas:

1. **(a)** $\dfrac{4}{3}$

(b) $-\dfrac{3}{4}$

(c) $-\dfrac{1}{36}$

(d) $\dfrac{11}{12}$

2. **(a)** O limite é $\dfrac{1}{2}$. A série diverge.

(b) O limite é e. A série diverge.

(c) O limite não existe. A série diverge.

(d) O limite é 0. Não é possível afirmar nada sobre a série.

(e) O limite é 0. Não é possível afirmar nada sobre a série.

(f) O limite é $+\infty$. A série diverge.

(g) O limite é 0. Não é possível afirmar nada sobre a série.

(h) O limite é 1. A série diverge.

3. **(a)** As hipóteses são satisfeitas. A série diverge.

(b) As hipóteses são satisfeitas. A série converge.

(c) As hipóteses são satisfeitas. A série diverge.

(d) As hipóteses são satisfeitas. A série converge.

4. **(a)** Diverge. Use o teorema da divergência.

(b) Diverge. Use o teste da integral.

(c) Diverge. Use o teste da integral.

(d) Diverge. Use o teorema da divergência.

(e) Diverge. Use o teorema da divergência.

(f) Diverge. Use o teorema da divergência.

(g) Converge. Use o teste da integral.

(h) Diverge. Use o teste da integral.

(i) Diverge. Use o teorema da divergência.

(j) Converge. Use o teste da integral.

(k) Diverge. Use o teste da integral.

5. **(a)** A série converge para $p > 1$.

(b) A série converge para $p > 1$.

Aula 5: p-séries. Testes de convergência (continuação)

5.1 p-séries

Teorema 5.1. (Convergência da p-série)

A série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$. ♡

Demonstração Se $p < 0$, então $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^p} = +\infty$. Se $p = 0$, então $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^p} = 1$. Em ambos os casos, pelo teorema da divergência, a série diverge. Vamos analisar o caso em que $p > 0$.

Vamos utilizar o teste da integral. Seja $f(x) = \frac{1}{x^p}$. f é contínua e positiva para $p > 0$. Vamos verificar que $f(x)$ é decrescente:

$$f'(x) = -px^{-p-1} = -\frac{p}{x^{p+1}} < 0 \quad \text{para} \quad p > 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ é decrescente.}$$

Vamos analisar a integral para $p \neq 1$:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_1^t x^{-p}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{1-p}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{t^{-p+1}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right].$$

Se $-p + 1 > 0 \;\Rightarrow\; p < 1$, temos

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = +\infty.$$

A integral diverge para $0 < p < 1$. Em $p = 1$, a série também diverge (série harmônica). Então, a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ diverge para $p \leq 1$.

Se $-p + 1 < 0 \;\Rightarrow\; p > 1$, temos

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{1-p}.$$

Como a integral converge para $p > 1$, então a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ converge quando $p > 1$.

5.2 Teste da comparação

A ideia deste teste é usar o conhecimento da convergência ou divergência de uma série para deduzir a convergência ou divergência de uma outra série.

Teorema 5.2. (Teste da comparação)

Suponha que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *e* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *sejam séries com termos positivos.*

(i) Se $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *for convergente e* $a_k \leq b_k$ *para todo* k*, então* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *também será convergente.*

Se a "série maior" $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *convergir, então a "série menor"* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *também convergirá.*

(ii) Se $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *for divergente e* $a_k \geq b_k$ *para todo* k*, então* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *também será divergente.*

Se a "série menor" $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *divergir, então a "série maior"* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *também divergirá.*

♡

Exemplo 5.1 Utilize o teste da comparação para estabelecer a convergência ou divergência das seguintes séries:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k-1}$

Resolução:

(a) Note que

$$\frac{1}{k^2+1} < \frac{1}{k^2}.$$

Sabemos que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ é uma p-série com $p = 2$, logo a série converge. Pelo item (i) do **Teorema 5.2**, a série dada converge.

(b) Note que

$$\frac{\sqrt{k}}{k-1} > \frac{\sqrt{k}}{k} = \frac{1}{k^{1/2}}.$$

Sabemos que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/2}}$ diverge, pois é uma p-série com $p = (1/2) < 1$. Pelo item (ii) do **Teorema 5.2**, a série dada diverge.

5.3 Teste de comparação no limite

No teste da comparação, os termos da série que está sendo testada devem ser menores que aqueles de uma série convergente ou maiores que aqueles de uma série divergente. Se os termos forem maiores que os de uma série convergente ou menores que os de uma série divergente, então o teste da comparação não se aplica. Considere, por exemplo, a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k - 1}.$$

A desigualdade

$$\frac{1}{2^k - 1} > \frac{1}{2^k}$$

é inútil para ser usada com o teste da comparação, pois $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ é convergente, porém $a_k > b_k$.

Teorema 5.3. (Teste da comparação no limite)

Suponha que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *e* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *sejam séries com termos positivos. Se*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = L,$$

então

(a) *se* $L > 0$, L *real (finito), ou ambas são convergentes ou ambas são divergentes.*

(b) *se* $L = +\infty$ *e se* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *for divergente,* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *também será divergente.*

(c) *se* $L = 0$ *e se* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *for convergente,* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *também será convergente.*

♡

Exemplo 5.2 Determine se as séries são convergentes ou divergentes:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k - 1}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2 + 3k}{\sqrt{5 + k^5}}$

Resolução:

(a) Vamos utilizar o teste da comparação no limite com

$$a_k = \frac{1}{2^k - 1} \qquad \text{e} \qquad b_k = \frac{1}{2^k}$$

de modo a obter

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2^k-1}\right)}{\left(\frac{1}{2^k}\right)}=\lim_{k\to\infty}\frac{2^k}{2^k-1}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{2^k}}=1>0.$$

Como este limite existe e $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$ é uma série geométrica convergente, então a série dada converge pelo teste da comparação no limite.

(b) O termo dominante do numerador é $2k^2$ e o termo dominante do denominador é $\sqrt{k^5}=k^{5/2}$. Isto sugere considerar

$$a_k=\frac{2k^2+3k}{\sqrt{5+k^5}}\qquad\text{e}\qquad b_k=\frac{2k^2}{k^{5/2}}=\frac{2}{k^{1/2}},$$

então

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}&=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{2k^2+3k}{\sqrt{5+k^5}}\right)\cdot\left(\frac{k^{1/2}}{2}\right)=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{2k^{5/2}+3k^{3/2}}{2\sqrt{5+k^5}}\right)\\&=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{\cancel{k^{5/2}}}{\cancel{k^{5/2}}}\left(\frac{2+\frac{3}{k}}{2\sqrt{\frac{5}{k^5}+1}}\right)\right]=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{2+\frac{3}{k}}{2\sqrt{\frac{5}{k^5}+1}}\right]=\frac{2}{2\sqrt{1}}=1>0.\end{aligned}$$

Como $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k^{1/2}}=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1/2}}$ é divergente (p-série com $p=1/2$), a série dada diverge pelo teste da comparação no limite.

Exercícios

1. Determine se a série converge:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+6}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{5k}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k+5}}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=5}^{\infty}7k^{-1{,}01}$

2. Use o teste da comparação para mostrar que a série dada converge ou diverge:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5k^2 - k}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k - \frac{1}{4}}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k+1}{k^2 - k}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^4 + k}$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k + 5}$

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5\,\mathrm{sen}^2 k}{k!}$

(g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$

(h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^{3/2} - \frac{1}{2}}$

3. Use o teste da comparação no limite para mostrar que a série dada converge ou diverge:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{k}}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+5}{k^3 - 2k + 3}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^4 - 2}$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k^2 + k + 1}$

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^k - k^\pi}$

Respostas:

1. (a) Diverge. Compare com a série harmônica.

   (b) Diverge. Compare com a série harmônica.

   (c) Diverge. Compare com a p-série.

   (d) Converge. Compare com a p-série.

2. (a) Converge.

   (b) Diverge.

   (c) Diverge.

   (d) Converge.

   (e) Converge.

   (f) Converge.

   (g) Diverge.

   (h) Diverge.

3. (a) Diverge. Considere $b_k = \dfrac{1}{\sqrt{k}}\cdot$

   (b) Converge. Considere $b_k = \dfrac{1}{k^2}\cdot$

   (c) Converge. Considere $b_k = \dfrac{1}{\sqrt{k}}\cdot$

   (d) Converge. Considere $b_k = \dfrac{1}{k^3}\cdot$

   (e) Converge. Considere $b_k = \dfrac{1}{k^{3/2}}\cdot$

   (f) Converge. Considere $b_k = \dfrac{1}{\pi^k}\cdot$

Aula 6: Séries alternadas

6.1 Séries alternadas

As séries cujos termos alternam entre positivo e negativo são chamadas **séries alternadas**. Por exemplo:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

Em geral, uma série alternada tem as seguintes formas:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots \tag{6.1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots \tag{6.2}$$

O teorema a seguir nos fala sobre a convergência de uma série alternada.

Teorema 6.1. (Teste da série alternada)

Uma série alternada da forma (6.1) *ou da forma* (6.2) *converge se satisfizer as duas condições:*

(i) $a_k \geq a_{k+1}$ *para todo* k.

(ii) $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

♡

Exemplo 6.1 Determine se as séries são convergente ou divergentes:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k^2}{k^3+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{3k}{4k-1}$

Resolução:

(a) Vamos verificar se $a_k = (-1)^{k+1}\dfrac{k^2}{k^3+1}$ satisfaz as duas hipóteses do **Teorema 6.1**.

(i) Seja $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3+1}$, então

$$f'(x) = \frac{2x(x^3+1) - x^2(3x^2)}{(x^3+1)^2} = \frac{2x^4+2x-3x^4}{(x^3+1)^2} = \frac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2}.$$

Como estamos considerando apenas x positivo, temos que $f'(x) < 0$ se $(2-x^3) < 0$, isto é, se $x > \sqrt[3]{2}$. Então, f decresce no intervalo $(\sqrt[3]{2}, +\infty)$. Isto significa que $f(k+1) < f(k)$ e, portanto $a_{k+1} < a_k$ quando $k \geq 2$.

(ii) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{k^3+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k^3}} = 0.$

Portanto, a série converge.

(b) Note que

(ii) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{3k}{4k-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{3}{4-\frac{1}{k}} = \frac{3}{4} \neq 0.$

Como o item (ii) do **Teorema 6.1** não é satisfeito, a série diverge.

6.2 Convergência absoluta

A série

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^6} + \cdots$$

não se ajusta a nenhuma das séries estudadas até aqui (há uma mistura de sinais, mas não é alternada).

Definição 6.1. (Convergência absoluta)

Dizemos que uma série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

converge absolutamente *se a série de valores absolutos*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$$

convergir e dizemos que ***diverge absolutamente*** *se a série de valores absolutos divergir.* ♣

Teorema 6.2. (Convergência absoluta)

Se a série $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *convergir, então a série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *também converge.* ♡

Exemplo 6.2 Determine se as seguintes séries convergem absolutamente.

(a) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^6} + \cdots$

(b) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$

Resolução:

(a) A série de valores absolutos é a série geométrica convergente $\left[r = (1/2) < 1\right]$:

$$|1| + \left|-\frac{1}{2}\right| + \left|-\frac{1}{2^2}\right| + \left|\frac{1}{2^3}\right| + \left|\frac{1}{2^4}\right| + \left|-\frac{1}{2^5}\right| + \left|-\frac{1}{2^6}\right| + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

Portanto, a série dada é absolutamente convergente.

(b) A série de valores absolutos é a série harmônica divergente,

$$|1| + \left|-\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{1}{3}\right| + \left|-\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{1}{5}\right| + \left|-\frac{1}{6}\right| + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Assim, a série dada diverge.

6.3 Convergência condicional

Definição 6.2. (Convergência condicional)

Uma série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *é chamada* ***condicionalmente convergente*** *se ela for convergente, mas não for absolutamente convergente.* ♣

Exemplo 6.3 A série harmônica alternada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge, pois

(i) $a_{k+1} < a_k$ porque $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}$ para todo k.

(ii) $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$.

Porém, a série de valores absolutos diverge. Assim, a série harmônica alternada é condicionalmente convergente.

6.4 Teste da razão

O teste da razão é usado frequentemente para determinar se uma dada série é absolutamente convergente.

Teorema 6.3. (Teste da razão)

Seja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *uma série infinita dada, onde* a_k *é não nulo e seja*

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = L.$$

Então:

(a) *Se* $L < 1$*, a série dada é absolutamente convergente.*

(b) *Se* $L > 1$ *ou se* $L = +\infty$*, a série dada é divergente.*

(c) *Se* $L = 1$*, o teste é inconclusivo.*

♡

Exemplo 6.4 Use o teste da razão para determinar se as séries convergem ou divergem:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^3}{3^k}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$

Resolução:

(a) Temos que

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{k+1}(k+1)^3}{3^{k+1}}}{\frac{(-1)^k k^3}{3^k}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\cancel{(-1)^k}(-1)(k+1)^3}{\cancel{3^k}\cdot 3}\cdot\frac{\cancel{3^k}}{\cancel{(-1)^k}\cdot k^3}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-1)}{3}\cdot\left(\frac{k+1}{k}\right)^3\right|$$
$$= \frac{1}{3}\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^3 = \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3} < 1.$$

Portanto, pelo teste da razão, a série dada é absolutamente convergente e, portanto convergente.

(b) Temos que

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{k^k}\right| &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)^k\cdot\cancel{(k+1)}}{\cancel{(k+1)}\cancel{k!}}\cdot\frac{\cancel{k!}}{k^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k\\ &= \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \mathrm{e} > 1.\end{aligned}$$

Portanto, a série diverge.

(c) Note que

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{2(k+1)-1}\cdot(2k-1)\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{2k-1}{2k+1}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{\cancel{k}\left(2-\frac{1}{k}\right)}{\cancel{k}\left(2+\frac{1}{k}\right)} = 1.$$

Neste caso, o teste da razão é inconclusivo.

Exercícios

1. Teste a série para convergência ou divergência:

(a) $-\frac{1}{3}+\frac{2}{4}-\frac{3}{5}+\frac{4}{6}-\frac{5}{7}+\cdots$

(b) $\frac{4}{7}-\frac{4}{8}+\frac{4}{9}-\frac{4}{10}+\frac{4}{11}-\cdots$

(c) $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\frac{1}{\ln 6}-\cdots$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{3k-1}$

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{3k-1}{2k+1}$

(g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2k}{4k^2+1}$

(h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{4k^2+1}$

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sqrt{k}}{1+2\sqrt{k}}$

(j) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k^2}{k^3+4}$

(k) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{1/k}}{k}$

(l) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k}\frac{k}{\ln k}$

(m) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\ln k}{k}$

(n) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(k\pi)}{k^{3/4}}$

(o) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(k\pi/2)}{k!}$

(p) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\cos\left(\frac{\pi}{k}\right)$

2. Use o teste da razão para determinar se a série converge ou diverge. Se o teste for inconclusivo, aponte isso.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^{k}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2^k}{k!}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{3^k}{k^2}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{k}{5^k}$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{k^3}{e^k}$

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{(2k-1)!}{3^k}$

3. Classifique a série como absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{3k}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{4/3}}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-4)^{k}}{k^2}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{k}$

(f) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^{k}\ln k}{k}$

(g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{k+2}{k(k+3)}$

(h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{k^2}{k^3+1}$

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right)$

(j) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} k}{k^3}$

(k) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k}\frac{1}{k\ln k}$

(l) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k}\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$

(m) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\cos(k\pi)}{k^2+1}$

(n) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}k!}{(2k-1)!}$

(o) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{3^{2k-1}}{k^2+1}$

Respostas:

1. (a) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{k}{k+2}$. Diverge.

   (b) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{4}{k+6}$. Converge.

   (c) $\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k}\frac{1}{\ln k}$. Converge.

   (d) Converge.

   (e) Converge.

   (f) Diverge.

   (g) Converge.

   (h) Converge.

   (i) Diverge.

   (j) Converge.

   (k) Converge.

   (l) Diverge.

   (m) Converge.

   (n) Converge.

   (o) Converge.

   (p) Diverge.

2. (a) Converge absolutamente.

   (b) Converge absolutamente.

   (c) Diverge.

   (d) Converge absolutamente.

(e) Converge absolutamente.

(f) Diverge.

3. (a) Condicionalmente convergente.

   (b) Absolutamente convergente.

   (c) Divergente.

   (d) Abslutamente convergente.

   (e) Condicionalmente convergente.

   (f) Condicionalmente convergente.

   (g) Condicionalmente convergente.

   (h) Condicionalmente convergente.

   (i) Divergente.

   (j) Absolutamente convergente.

   (k) Condicionalmente convergente.

   (l) Condicionalmente convergente.

   (m) Condicionalmente convergente.

   (n) Absolutamente convergente.

   (o) Divergente.

Aula 7: Séries de potências

7.1 Definição e exemplos

Definição 7.1. (Série de potências)

Uma série de potências centrada em a tem a seguinte forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots, \tag{7.1}$$

onde x é variável e c_k's são chamados ***coeficientes*** *da série. Para cada x fixo, a série (7.1) é uma série numérica que podemos testar para convergência ou divergência.* ♣

Um caso especial da série (7.1) é, quando $a = 0$. Neste caso, temos

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots.$$

Os exemplos a seguir ilustram como o teste da razão pode ser usado para determinar os valores de x para os quais uma série de potências é convergente.

Exemplo 7.1 Determine os valores de x para os quais a série de potências

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^k \cdot x^k}{k \cdot 3^k}$$

é convergente.

Resolução: Pelo teste da razão temos que

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{(-1)^{k+2} \cdot 2^{k+1} \cdot x^{k+1}}{(k+1) \cdot 3^{k+1}} \cdot \frac{k \cdot 3^k}{(-1)^{k+1} \cdot 2^k \cdot x^k} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\cancel{(-1)^{k+1}}(-1) \cdot \cancel{2^k} \cdot 2 \cdot \cancel{x^k} \cdot x}{(k+1) \cdot \cancel{3^k} \cdot 3} \cdot \frac{k \cdot \cancel{3^k}}{\cancel{(-1)^{k+1}} \cdot \cancel{2^k} \cdot \cancel{x^k}} \right|$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{2xk}{3(k+1)} \right| = \frac{2}{3} \lim_{k\to\infty} \left| \frac{x}{(1+\frac{1}{k})} \right| = \frac{2}{3}|x|.$$

Logo, a série de potências é absolutamente convergente quando $\frac{2}{3}|x| < 1$, isto é, quando $|x| < \frac{3}{2}$. A série é divergente se $\frac{2}{3}|x| > 1$. Se $|x| = \frac{3}{2}$ $\left(\text{ou seja, } x = \pm\frac{3}{2}\right)$ nada podemos concluir sobre a série.

- Quando $x = \dfrac{3}{2}$, a série de potências torna-se:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \cancel{2^k} \cancel{\left(\frac{3}{2}\right)^k} \frac{1}{k \cdot \cancel{3^k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

que é a série harmônica alternada, convergente.

- Quando $x = -\frac{3}{2}$, a série de potências, torna-se:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} \cdot \cancel{2^k}\left(-\frac{3}{\cancel{2}}\right)^{\cancel{k}} \cdot \frac{1}{k \cdot \cancel{3^k}} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty}-\frac{1}{k} = -\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}}_{\text{diverge}} \cdot$$

Portanto, o intervalo de convergência da série é $-\frac{3}{2} < x \leq \frac{3}{2}$.

7.2 Intervalo e raio de convergência

Toda série de potências possui um intervalo de convergência. O intervalo de convergência é o conjunto de todos os números para os quais a série converge.

Todo intervalo de convergência possui um raio de convergência R. Para uma série de potências, temos três possibilidades, dadas pelo teorema a seguir.

Teorema 7.1. (Convergência de uma série de potências)

Para uma série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$*, existem três possibilidades:*

(a) *A série converge apenas para* $x = a$.

(b) *A série converge para todo* x.

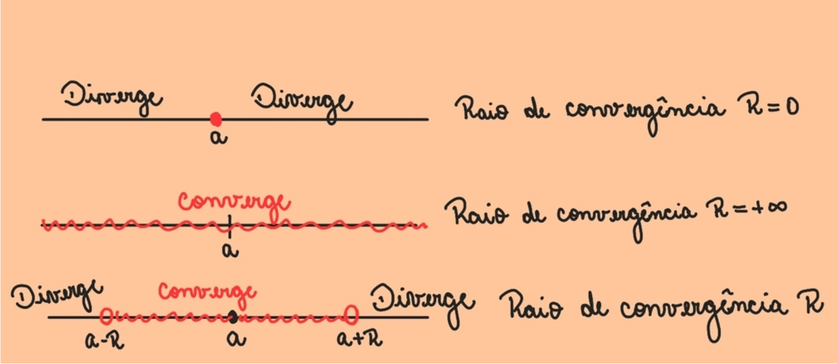
(c) *Existe um número positivo* R *tal que a série converge se* $|x-a| < R$ *e diverge se* $|x-a| > R$. *O número* R *é chamado* ***raio de convergência***.

♡

Observação:

- No caso **(a)**, o raio de convergência é $R = 0$. O intervalo de convergência é o ponto $x = a$.
- No caso **(b)**, o raio de convergência é $R = +\infty$. O intervalo de convergência é $(-\infty, +\infty)$.
- No caso **(c)**, note que o intervalo de convergência pode ser escrito como $a - R < x < a + R$. Quando x é uma extremidade do intervalo, isto é, $x = a \pm R$, qualquer coisa pode acontecer - a série pode convergir em um ou ambos os extremos ou divergir em ambos os extremos. Então, existem quatro possibilidades para o intervalo de convergência:

$$(a-R, a+R), \quad (a-R, a+R], \quad [a-R, a+R), \quad [a-R, a+R].$$



Teorema 7.2. (Raio de convergência)

Considere a série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ *e suponha* $c_k \neq 0$ *para todo* $k \geq p$*, onde* p *é um número natural fixo. Então, o raio de convergência* R *desta série é dado por*

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right|$$

quando o limite existe finito ou infinito. ♡

Exemplo 7.2 Encontre o raio e o intervalo de convergência da série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(x+2)^k}{3^{k+1}}.$$

Resolução: Utilizando o teste da razão, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \left| \frac{(k+1)(x+2)^{k+1}}{3^{k+2}} \cdot \frac{3^{k+1}}{k(x+2)^k} \right| &= \lim_{k\to\infty} \left| \left(\frac{k+1}{k}\right) \cdot \frac{(x+2)}{3} \right| \\
&= \frac{|x+2|}{3} \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right) = \frac{|x+2|}{3} \underbrace{\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)}_{=1} = \frac{|x+2|}{3}.
\end{aligned}$$

Assim, a série converge quando $\frac{|x+2|}{3} < 1$, isto é,

$$|x+2| < 3 \quad \Rightarrow \quad -3 < x+2 < 3 \quad \Rightarrow \quad -5 < x < 1.$$

A série diverge quando $|x+2| > 3$, isto é, quando $x > 1$ ou quando $x < -5$.
Precisamos testar a série nos extremos do intervalo, isto é, em $x = -5$ e em $x = 1$.

- Quando $x = -5$, temos

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(-5+2)^k}{3^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(-3)^k}{3^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot k}{3} = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot k.$$

Como $\lim_{k\to\infty} k = +\infty$, pelo teste da série alternada, a série dada diverge.

- Quando $x = 1$, temos

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(1+2)^k}{3^{k+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \cdot 3^k}{3^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{3} = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} k.$$

Esta série diverge pois. pelo teorema da divergência, $\lim\limits_{k\to\infty} k = +\infty$.

Portanto, a série converge quando $-5 < x < 1$.

7.3 Representação de funções como séries de potências

Veremos como representar certos tipos de funções como somas de séries de potências pela manipulação de séries geométricas ou pela diferenciação ou integração de tais séries.

Exemplo 7.3 Encontre uma representação em série de potências para as funções e determine os intervalos de convergência:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^3}{x+2}$

Resolução:

(a) Note que

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = 1 - x^2 + x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots .$$

Como esta série é uma série geométrica, sabemos que converge quando $|-x^2| < 1$, isto é, quando $x^2 < 1$ ou $|x| < 1$. Portanto, o raio de convergência é $R = 1$ e o intervalo de convergência é $-1 < x < 1$.

(b) Note que

$$\frac{x^3}{x+2} = x^3 \cdot \frac{1}{x+2} = x^3 \cdot \frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)} = \frac{x^3}{2} \frac{1}{\left[1-\left(-\frac{x}{2}\right)\right]} = \frac{x^3}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} \cdot x^{k+3},$$

ou ainda, trocando o índice da série, temos $(n = k+3)$

$$\frac{x^3}{x+2} = \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-3}}{2^{n-3}} x^n = \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^{k-3}}{2^{k-3}} x^k = -\frac{1}{2^{1-3}} \sum_{k=3}^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^k = -4 \sum_{k=3}^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^k .$$

Esta série geométrica converge para $\left| -\dfrac{x}{2} \right| < 1$, isto é, converge para $|x| < 2$. O raio de convergência da série é $R = 2$ e o intervalo de convergência é $-2 < x < 2$.

Exercícios

1. Reescreva as expressões dadas como uma única série de potências envolvendo x^k no termo geral.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2kc_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} 6c_k x^{k+1}$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^k + 2\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + 3\sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^k$.

2. Determine o raio e o intervalo de convergência das séries de potências. Não esqueça de testar os extremos dos intervalos:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!x^k}{2^k}$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k x^k}{k^2}$

(f) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{\ln k}$

(g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k(k+1)}$

(h) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k x^{k+1}}{k+1}$

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{\sqrt{k}}$

(j) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$

(k) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k x^k}{k!}$

(l) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k(\ln k)^2}$

(m) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k (x+5)^k$

(n) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1)!}{k^3}(x-2)^k$

(o) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x-3)^k}{4^{2k}}$

3. Encontre uma representação em série de potências para a função e determine o intervalo de convergência:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

(b) $f(x) = \dfrac{3}{1-x^4}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^3}$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{1+9x^2}$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{x-5}$

(f) $f(x) = \dfrac{x}{4x+1}$

(g) $f(x) = \dfrac{x}{9+x^2}$

4. Expresse a função como a soma de uma série de potências usando primeiro frações parciais. Determine o intervalo de convergência:

(a) $f(x) = \dfrac{3}{x^2+x-2}$

(b) $f(x) = \dfrac{7x-1}{3x^2+2x-1}$

Respostas:

1. **(a)** $\displaystyle 2c_1 + \sum_{k=1}^{\infty}[2(k+1)c_{k+1} + 6c_{k-1}]x^k,$

(b) $4c_2 + (3c_1 + 12c_3)x + \sum_{k=2}^{\infty}[k(k+2)c_k + 2(k+1)(k+2)c_{k+2}]x^k.$

2. (a) $R = 1$ e $x \in [-1, 1)$

(b) $R = \frac{1}{3}$ e $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

(c) $R = +\infty$ e $x \in (-\infty, +\infty)$

(d) $R = 0$ e $x = 0$

(e) $R = \frac{1}{5}$ e $x \in \left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]$

(f) $R = 1$ e $x \in [-1, 1)$

(g) $R = 1$ e $x \in [-1, 1]$

(h) $R = \frac{1}{2}$ e $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

(i) $R = 1$ e $x \in (-1, 1]$

(j) $R = +\infty$ e $x \in (-\infty, +\infty)$

(k) $R = +\infty$ e $x \in (-\infty, +\infty)$

(l) $R = 1$ e $x \in [-1, 1]$

(m) $R = \frac{4}{3}$ e $x \in \left(-\frac{19}{3}, -\frac{11}{3}\right)$

(n) $R = 0$ e $x = 2$

(o) $R = 8$ e $x \in \left(-\frac{13}{2}, \frac{19}{2}\right)$

3. (a) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k, \quad x \in (-1, 1)$

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} 3x^{4k}, \quad x \in (-1, 1)$

(c) $\sum_{k=0}^{\infty} x^{3k}, \quad x \in (-1, 1)$

(d) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 3^{2k} x^{2k}, \quad x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

(e) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{5^{k+1}}, \quad x \in (-5, 5)$

(f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 2^{2k} x^{k+1}, \quad x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

(g) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{9^{k+1}}, \quad x \in (-3, 3)$

4. **(a)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} - 1\right] x^k, \quad x \in (-1, 1)$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left[2(-1)^k - 3^k\right] x^k, \quad x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Aula 8: Séries de potências (continuação)

8.1 Diferenciação e integração de séries de potências

A soma de uma série de potências é uma função $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ cujo domínio é o intervalo de convergência da série. Gostaríamos de poder diferenciar e integrar tais funções e o teorema a seguir diz que podemos fazer isso em cada termo da série. Isto é chamado de diferenciação e integração termo a termo.

Teorema 8.1. (Diferenciação e integração de uma série de potências)

Se a série de potências $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ tem um raio de convergência $R > 0$, então a função f definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$$

é diferenciável (e, portanto contínua) no intervalo $(a-R, a+R)$ e

(a) $f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k(x-a)^{k-1}$

(b) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = C + c_0(x-a) + \dfrac{c_1(x-a)^2}{2} + \dfrac{c_2(x-a)^3}{3} + \cdots = C + \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{c_k(x-a)^{k+1}}{k+1}$.

Os raios de convergência da série de potências **(a)** *e* **(b)** *são, ambos, R.* ♡

Importante: *As equações dadas em* **(a)** *e* **(b)** *do* **Teorema 8.1** *podem ser reescritas, respectivamente, na forma*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[c_k(x-a)^k\right] \tag{8.1}$$

$$\int \left[\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k\right] \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \int c_k(x-a)^k\,\mathrm{d}x \tag{8.2}$$

Embora o **Teorema 8.1** *diga que o raio de convergência permanece o mesmo quando uma série de potências é diferenciada ou integrada, isso não significa que o intervalo de convergência permanece* *o mesmo. Pode acontecer de a série original convergir em um extremo, enquanto a série diferenciada (ou integrada) diverge nesse ponto.*

Exemplo 8.1 Use o teorema de diferenciação para obter uma representação em série de potências para

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}\,.$$

Determine o raio de convergência da série encontrada.

Resolução: Temos que

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\left[\frac{u^{-1}}{-1}\right] + C = \frac{1}{u} + C = \frac{1}{1-x} + C,$$

então

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{1-x} + C\right].$$

Assim,

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{1-x} + C\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{k=0}^{\infty} x^k + C\right] = \sum_{k=1}^{\infty} k\,x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k.$$

O raio de convergência é dado por

$$R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k+1}{k+2}\right) = \lim_{k\to\infty}\frac{\cancel{k}}{\cancel{k}}\left[\frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{2}{k}}\right] = 1.$$

Exemplo 8.2 Use o teorema de integração para obter uma representação em série de potências para

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Resolução: Temos que

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}.$$

Substituindo a série na integral e integrando termo a termo, obtemos

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg} x = \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int x^{2k}\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + C \\ &= C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots\end{aligned}$$

Fazendo $x = 0$, temos $C = 0$, logo

$$\operatorname{arctg} x = \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} x^{2k+1}.$$

8.2 Séries de Taylor e Maclaurin

Vimos como representar uma classe restrita de funções como uma série de potências. Queremos representar funções mais gerais, usando séries de potências, porém surgem as seguintes perguntas: “Quais funções têm representações em séries de potências?” e “Como encontrar tais representações?”. Começaremos supondo que f seja qualquer função que pode ser representada por série de potências:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots \tag{8.3}$$

com $|x-a| < R$. Vamos determinar quais coeficientes c_k devem ser coeficientes de f. Se $x = a$, temos

$$f(a) = c_0.$$

Pelo **Teorema 8.1**, podemos derivar $f(x)$. Então,

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots \qquad |x-a| < R. \tag{8.4}$$

Substituindo $x = a$, na Eq.(8.4), temos

$$f'(a) = c_1.$$

Derivando a Eq.(8.4), obtemos

$$f''(x) = 2c_2 + 2\cdot 3c_3(x-a) + 3\cdot 4(x-a)^2 + \cdots \qquad |x-a| < R \tag{8.5}$$

e, fazendo $x = a$, temos

$$f''(a) = 2c_2.$$

Vamos, agora, derivar a Eq.(8.5), de modo a obter

$$f'''(x) = 2\cdot 3c_3 + 2\cdot 3\cdot 4c_4(x-a) + 3\cdot 4\cdot 5c_5(x-a)^2 + \cdots \qquad |x-a| < R \tag{8.6}$$

e, para $x = a$, temos

$$f'''(a) = 3!c_3.$$

Assim, derivando k vezes e, substituindo $x = a$, obtemos

$$f^{(k)}(a) = k!c_k \quad \Rightarrow \quad c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

Com isso, temos o seguinte teorema.

Teorema 8.2. (Séries de Taylor e Maclaurin)

Se f tem uma representação (expansão) em série de potências em torno de $x = a$, isto é, se

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k, \qquad |x-a| < R, \tag{8.7}$$

então seus coeficientes são dados por

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,.$$

A série (8.7) tem a forma

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \tag{8.8}$$

*e é chamada de **série de Taylor** da função f em torno de $x = a$. Para $a = 0$, temos*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots \tag{8.9}$$

*que é chamada de **série de Maclaurin**.* ♡

Exemplo 8.3 Encontre a série de Maclaurin para as seguintes funções e determine o raio de convergência de cada uma delas.

(a) $f(x) = e^x$

(b) $f(x) = \operatorname{sen} x$

(c) $f(x) = \cos x$

Resolução:

(a) Se $f(x) = \mathrm{e}^x$, então $f^{(k)}(x) = \mathrm{e}^x$ e $f^{(k)}(0) = \mathrm{e}^0 = 1$, para todo k. Portanto, a série de Maclaurin para $f(x) = \mathrm{e}^x$ é dada por

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

O raio de convergência é dado por

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{k!}}{\frac{1}{(k+1)!}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left[\frac{(k+1)\cancel{k!}}{\cancel{k!}} \right] = +\infty.$$

Como $R = +\infty$, a série converge para todo x.

(b) Temos que

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen} x & \text{e} \quad & f(0) = 0 \\ f'(x) &= \cos x & \text{e} \quad & f'(0) = 1 \\ f''(x) &= -\operatorname{sen} x & \text{e} \quad & f''(0) = 0 \\ f'''(x) &= -\cos x & \text{e} \quad & f'''(0) = -1 \\ f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen} x & \text{e} \quad & f^{(4)}(0) = 0 \\ & \vdots \end{aligned}$$

Como as derivadas se repetem de "quatro em quatro", podemos escrever a série de Maclaurin da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}}{4!}x^4 + \cdots \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

O raio de convergência é dado por

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}}{\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)!}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left[\frac{\cancel{(-1)^k}(2k+3)(2k+2)\cancel{(2k+1)!}}{\cancel{(-1)^k}(-1)\cancel{(2k+1)!}} \right] = \lim_{k\to\infty} \Big[(2k+3)(2k+2) \Big] = +\infty.$$

Como $R = +\infty$, a série converge para todo x.

(c) Temos que

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x & \text{e} \quad & f(0) = 1 \\ f'(x) &= -\operatorname{sen} x & \text{e} \quad & f'(0) = 0 \\ f''(x) &= -\cos x & \text{e} \quad & f''(0) = -1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f'''(x) &= \operatorname{sen} x \qquad \text{e} \qquad f'''(0) = 0\\
f^{(4)}(x) &= \cos x \qquad \text{e} \qquad f^{(4)}(0) = 1\\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

Como as derivadas se repetem de "quatro em quatro", podemos escrever a série de Maclaurin da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen} x &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}}{4!}x^4 + \cdots\\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}
\end{aligned}
$$

Mostre que $R = +\infty$, isto é, a série converge para todo x.

Exercícios

1. **(a)** Use diferenciação para encontrar a representação em série de potências para

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}\,.$$

Qual o raio de convergência?

(b) Use o item (a) para encontrar uma série de potências para

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}\,.$$

(c) Use o item (b) para encontrar uma série de potências para

$$f(x) = \frac{x^2}{(1+x)^3}\,.$$

2. **(a)** Encontre uma representação em série de potências para $f(x) = \ln(1+x)$. Qual o raio de convergência?

(b) Use o item (a) para encontrar uma série de potências para $f(x) = x\ln(1+x)$.

(c) Use o item (a) para encontrar uma série de potências para $f(x) = \ln(x^2+1)$.

3. Encontre uma representação em série de potências para a função e determine o raio de convergência:

(a) $f(x) = \ln(5-x)$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2}{(1-2x)^2}$

(c) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

(d) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{3}\right)$

4. Encontre uma representação em série de potências para $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

5. Para cada função a seguir, encontre sua série de Taylor em torno do ponto a indicado e, determine o raio de convergência:

(a) $f(x) = \mathrm{e}^{2x}, \quad a = 0$

(b) $f(x) = \cos x, \quad a = \dfrac{\pi}{4}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad a = 1$

(d) $f(x) = \ln x, \quad a = 1$

(e) $f(x) = \operatorname{sen}(3x), \quad a = 0$

Respostas:

1. **(a)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)x^k.\ R = 1.$

(b) $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)(k+2)x^k$

(c) $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k k(k-1)x^k$

2. **(a)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}.\ R = 1.$

(b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k x^k}{k-1}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^{2k}}{k}$

3. **(a)** $\displaystyle\ln 5 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k5^k}\cdot R = 5.$

(b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} 2^{k-2}(k-1)x^k.\ R = \frac{1}{2}.$

(c) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{k-2}{2^{k-1}}x^k.\ R = 2.$

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^{2k+1}(2k+1)}x^{2k+1}.\ R = 3$

4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{k!(2k+1)}.$

5. **(a)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!}\ R = +\infty$

(b) $\displaystyle\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}}{k!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^k,\ R = +\infty$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(x-1)^k,\ R = 1$

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}(x-1)^{k+1},\ R = 1$

(e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(3x)^{2k+1}}{(2k+1)!},\ R = +\infty$

Aula 9: Séries de Fourier

9.1 Resultados importantes

Nesta seção, vamos relembrar algumas definições e propriedades que serão úteis, quando definirmos as séries de Fourier.

9.1.1 Funções par e ímpar

Definição 9.1. (Função par e função ímpar)

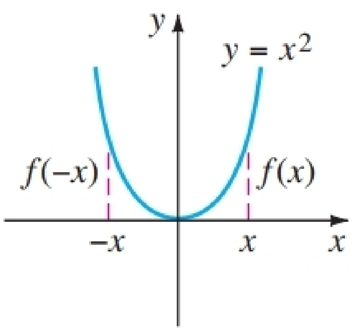
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Chama-se função par a toda função que satisfaça a relação

$$f(-x) = f(x)$$

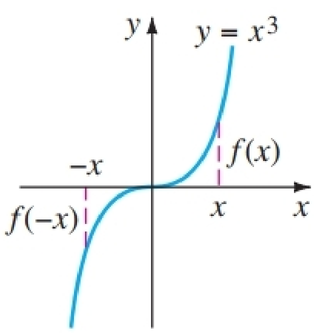
analogamente, definimos uma função ímpar, através da relação

$$f(-x) = -f(x).$$

♣



Função par



Função ímpar

Propriedades: Se f é par, então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$;

Se f é ímpar, então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

9.1.2 Funções periódicas

Definição 9.2. (Função periódica)

Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica de período p ou ainda, que f é p-periódica se $f(x+p) = f(x)$ para todo x. ♣

Se o domínio da função f não for todo $\mathbb{R}$ não faz sentido perguntar se ela é periódica.

Observação: A função $\operatorname{sen} x$ é 2π-periódica e a função $\cos(ax)$ é $\dfrac{2\pi}{a}$-periódica.

Importante: *Se uma função $f(x)$ é p-periódica, então ela também é $2p$-periódica, pois*

$$f(x+2p) = f[(x+p)+p] = f(x+p) = f(x).$$

Portanto, se f é p-periódica, ela também será (np)-periódica, para $n = 2, 3, \ldots$, isto é,

$$f(x+np) = f(x).$$

*Com isso, concluímos que, se existe um período ele não é único. O mais interessante é determinar o menor período de uma função, chamado **período fundamental**.*

9.1.3 Ortogonalidade

As funções periódicas mais importantes são as funções do sistema trigonométrico (2π-periódicas)

$$1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \ldots, \cos mx, \ldots, \operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x, \operatorname{sen} 3x, \ldots, \operatorname{sen} nx, \ldots,$$

onde m e n são números inteiros positivos.

Dizemos que duas funções $f(x)$ e $g(x)$ são ortogonais no intervalo $[a, b]$, se

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0. \tag{9.1}$$

Propriedade 9.1: Sejam m e n inteiros positivos. O sistema trigonométrico admite as seguintes propriedades de ortogonalidade:

(a) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad m \neq n, \\ \pi, & \text{se} \quad m = n, \end{cases}$$

(b) $$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad m \neq n, \\ \pi, & \text{se} \quad m = n, \end{cases}$$

(c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\,\mathrm{sen}(nx)\mathrm{d}x = 0,$ para todo m e n.

Demonstração: (a) Considere a relação trigonométrica

$$\cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\Big\{\cos[(m+n)x] + \cos[(m-n)x]\Big\}$$

e denotemos

$$\Omega = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\mathrm{d}x.$$

Assim, podemos reescrever a integral Ω da seguinte forma

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\Big\{\cos[(m+n)x] + \cos[(m-n)x]\Big\}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left\{\int_0^{\pi}\cos[(m+n)x]\mathrm{d}x + \int_0^{\pi}\cos[(m-n)x]\mathrm{d}x\right\}.\end{aligned}$$

- Se $m \neq n$:

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{1}{2(m+n)}\Big\{\mathrm{sen}[\underbrace{(m+n)}_{\text{inteiro}}x]\Big\}_0^{\pi} + \frac{1}{2(m-n)}\Big\{\mathrm{sen}[\underbrace{(m-n)}_{\text{inteiro}}x]\Big\}_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2(m+n)}[\,\mathrm{sen}(k_1\pi) - \,\mathrm{sen}\,0] + \frac{1}{2(m-n)}[\,\mathrm{sen}(k_2\pi) - \,\mathrm{sen}\,0] = 0,\end{aligned}$$

  onde $k_1 = m+n$ e $k_2 = m-n$.

- Se $m = n$:

$$\begin{aligned}\Omega &= \int_0^{\pi}\cos(2mx)\mathrm{d}x + \int_0^{\pi}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2m}\Big[\,\mathrm{sen}(2mx)\Big]_0^{\pi} + \Big[\,x\Big]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2m}[\,\mathrm{sen}(2m\pi) - \,\mathrm{sen}\,0] + \pi = \pi.\end{aligned}$$

  Portanto,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad m \neq n, \\ \pi, & \text{se} \quad m = n \end{cases}.$$

9.2 Séries de Fourier

Seja $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$. Uma série de Fourier é uma série do tipo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(kx) + b_k\,\mathrm{sen}(kx)],$$

onde a_0, a_k e b_k são coeficientes que devem ser determinados.

9.2.1 Coeficientes de uma série de Fourier

Teorema 9.1. (Coeficientes de uma série de Fourier)

Seja $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$*. Suponha que* $f(x)$ *tem representação em série de Fourier*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)]. \tag{9.2}$$

Os coeficientes a_0*,* a_k *e* b_k *são chamados coeficientes de Fourier de* f *e são dados por*

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x, \tag{9.3}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\mathrm{d}x, \quad k = 1, 2, 3, \cdots \tag{9.4}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(kx)\mathrm{d}x, \quad k = 1, 2, 3, \cdots. \tag{9.5}$$

♡

Demonstração Para determinar o coeficiente a_0 da série de Fourier, vamos integrar ambos os lados da Eq.(9.2) de $-\pi$ a π, isto é,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\mathrm{d}x + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}(kx)\mathrm{d}x\right\}.$$

As duas integrais, que estão entre chaves, são nulas para $k = 1, 2, \ldots$, então

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\Big[x\Big]_{-\pi}^{\pi} = a_0\pi,$$

logo

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x.$$

Agora, vamos determinar os coeficientes a_k. Para isso, multiplicamos ambos os lados da Eq.(9.2) por $\cos(mx)$, sendo $m = 1, 2, 3, \ldots$ e, integramos de $-\pi$ a π, de modo a obter

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\mathrm{d}x &= a_0\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\mathrm{d}x}_{=0} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(mx)\mathrm{d}x \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} b_k\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}(kx)\cos(mx)\mathrm{d}x}_{k=0}.\end{aligned}$$

Para $m = k$ e, utilizando a **Propriedade 9.1**, podemos escrever

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\mathrm{d}x = a_k \cdot \pi,$$

logo,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\mathrm{d}x, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Finalmente, vamos determinar os coeficientes b_k. Para isso, multiplicamos ambos os lados da Eq.(9.2) por $\operatorname{sen}(mx)$, sendo $m = 1, 2, 3, \ldots$ e, integramos de $-\pi$ a π, de modo a obter

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(mx)\mathrm{d}x &= a_0 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\mathrm{d}x}_{=0} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\operatorname{sen}(mx)\mathrm{d}x}_{=0} \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(kx)\operatorname{sen}(mx)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Para $m = k$ e, utilizando a **Propriedade 9.1**, podemos escrever

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(kx)\mathrm{d}x = b_k \cdot \pi,$$

logo,

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(kx)\mathrm{d}x, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Exemplo 9.1 Seja $f(x)$ uma função dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad -\pi < x \leq 0, \\ x, & \text{se} \quad 0 < x < \pi, \end{cases}$$

Obtenha a série de Fourier para $f(x)$.

Resolução: A função $f(x)$ tem o seguinte gráfico

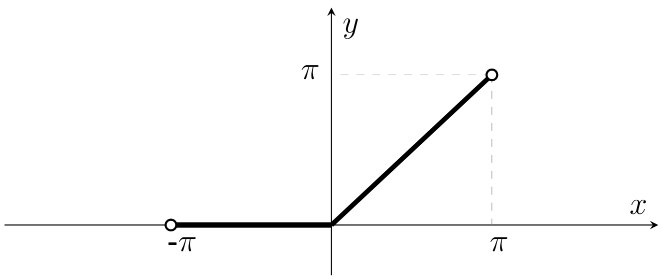


Figura 9.1: $f(x), \quad -\pi < x < \pi.$

e, sua série de Fourier é dada por

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)],$$

onde

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\cos(kx)\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} x\cdot\cos(kx)\mathrm{d}x\right\}.$$

Integrando por partes com $u = x$ e $\mathrm{d}v = \cos(kx)\mathrm{d}x$, obtemos

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\,\mathrm{sen}(kx)}{k}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\mathrm{sen}(kx)\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{k\pi}\left[\frac{\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi}.$$

Como não é possível calcular a_0 a partir da expressão anterior, devemos calculá-lo separadamente, isto é,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} x\cdot\mathrm{d}x\right\} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Resta-nos calcular os coeficientes b_k:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\,\mathrm{sen}(kx)\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} x\cdot\,\mathrm{sen}(kx)\mathrm{d}x\right\}.$$

Integrando por partes com $u = x$ e $\mathrm{d}v = \,\mathrm{sen}(kx)\mathrm{d}x$, obtemos

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos(kx)}{k}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos(kx)\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi\cos(k\pi)}{k}\right] + \frac{1}{k}\underbrace{\left[\frac{\mathrm{sen}(kx)}{k}\right]_0^{\pi}}_{=0} \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{k}. \end{aligned}$$

A série de Fourier é dada por

$$S(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi}\cos(kx) + \frac{(-1)^{k+1}}{k}\,\mathrm{sen}(kx)\right]. \tag{9.6}$$

A série $S(x)$ tem o seguinte gráfico

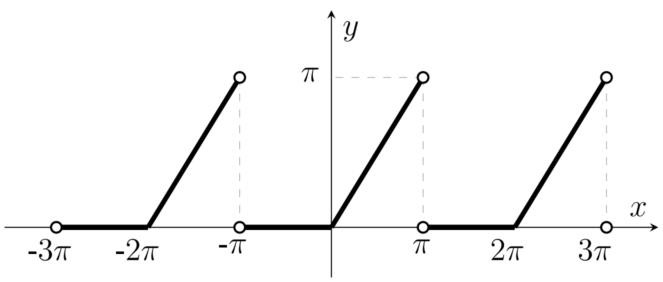


Figura 9.2: Série $S(x)$.

Exemplo 9.2 Use o **Exemplo 9.2** para mostrar que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Resolução: Note que, se $x = 0$ na Eq.(9.6), temos que $S(0) = 0$, logo

$$0 = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{-2}{(2k-1)^2 \pi} \right] = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2},$$

ou ainda,

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Finalmente, obtemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Exercícios

1. Mostre que:
   (a) a soma (diferença) de duas funções pares é uma função par;
   (b) a soma (diferença) de duas funções ímpares é uma função ímpar;
   (c) o produto de duas funções pares é uma função par;
   (d) o produto de duas funções ímpares é uma função par;
   (e) o produto de uma função par por uma função ímpar é uma função ímpar;

2. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções com o mesmo período p e $c \in \mathbb{R}$. Mostre que:
   (a) $f(x) + g(x)$ é p-periódica;
   (b) $f(x) - g(x)$ é p-periódica;
   (c) $f(x)g(x)$ é p-periódica;

3. Mostre os itens (b) e (c) da **Propriedade 9.1**.

4. Mostre que as funções dadas são ortogonais nos intervalos indicados:
   (a) $f_1(x) = x^3, \;\; f_2(x) = x^2 + 1; \quad [-1, 1],$

(b) $f_1(x) = \mathrm{e}^x, \; f_2(x) = x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}; \quad [0, 2],$

(c) $f_1(x) = \cos x, \; f_2(x) = \operatorname{sen}^2 x; \quad [0, \pi],$

5. Obtenha a série de Fourier para as seguintes funções:

(a) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad -\pi < x < 0, \\ \pi - x, & \text{se} \quad 0 \leq x < \pi, \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad -\pi < x < 0, \\ 1, & \text{se} \quad 0 \leq x < \pi, \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{se} \quad -\pi < x < 0, \\ 2, & \text{se} \quad 0 \leq x < \pi, \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad -\pi < x < 0, \\ x^2, & \text{se} \quad 0 \leq x < \pi, \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} \pi^2, & \text{se} \quad -\pi < x < 0, \\ \pi^2 - x^2, & \text{se} \quad 0 \leq x < \pi, \end{cases}$

(f) $f(x) = x + \pi, \quad -\pi < x < \pi,$

(g) $f(x) = 3 - 2x, \quad -\pi < x < \pi,$

(h) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad -\pi < x < 0, \\ \operatorname{sen} x, & \text{se} \quad 0 \leq x < \pi, \end{cases}$

6. Utilize o resultado do **Exercício 5 (d)** para mostrar que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

7. Utilize o resultado do **Exercício 5 (f)** para mostrar que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

8. Utilize o resultado do **Exercício 5 (h)** para mostrar que

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} - \frac{1}{7 \cdot 9} + \cdots.$$

Respostas:

1. (a) Sejam f e g funções pares, isto é, $f(x) = f(-x)$ e $g(x) = g(-x)$. Seja $h(x) = f(x) \pm g(x) = f(-x) \pm g(-x) = h(-x)$. Como, $h(x) = h(-x)$, então h é par.

   (b) Análogo ao item (a).

   (c) Análogo ao item (a).

   (d) Análogo ao item (a).

   (e) Análogo ao item (a).

2. (a) Sejam f e g funções p-periódicas, isto é, $f(x) = f(x+p)$ e $g(x) = g(x+p)$. Seja $h(x) = f(x) + g(x) = f(x+p) + g(x+p) = h(x+p)$. Como, $h(x) = h(x+p)$, então h é p-periódica.

   (b) Análogo ao item (a).

   (c) Análogo ao item (a).

3. (a) Use a relação trigonométrica $\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx) = \dfrac{1}{2}\Big\{\cos[(m-n)x] - \cos[(m+n)x]\Big\}$.

   (b) Note que o integrando é uma função ímpar.

4. Basta usar a Eq.(9.1).

5. (a) $S(x) = \dfrac{\pi}{4} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1-(-1)^k}{k^2\pi}\cos(kx) + \frac{1}{k}\operatorname{sen}(kx)\right\}$,

   (b) $S(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k}\operatorname{sen}(kx)$,

   (c) $S(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k}\operatorname{sen}(kx)$,

   (d) $S(x) = \dfrac{\pi^2}{6} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2(-1)^k}{k^2}\cos(kx) + \left(\frac{\pi}{k}(-1)^{k+1} + \frac{2[(-1)^k - 1]}{k^3\pi}\right)\operatorname{sen}(kx)\right]$,

   (e) $S(x) = \dfrac{5\pi^2}{6} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2(-1)^{k+1}}{k^2}\cos(kx) + \left(\frac{\pi(-1)^k}{k} + \frac{2[1-(-1)^k]}{k^3\pi}\right)\operatorname{sen}(kx)\right]$,

   (f) $S(x) = \pi + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{k+1}}{k}\operatorname{sen}(kx)$,

(g) $S(x) = 3 + 4\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{sen}(kx),$

(h) $S(x) = \dfrac{1}{\pi} + \dfrac{1}{2} \operatorname{sen} x + \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1+(-1)^k}{\pi(1-k^2)} \cos(kx),$

6. Basta tomar $x = 0$ na solução obtida no Exercício 5 (d).

7. Basta tomar $x = \dfrac{\pi}{2}$ na solução obtida no Exercício 5 (f).

8. Basta tomar $x = \dfrac{\pi}{2}$ na solução obtida no Exercício 5 (h).

Aula 10: Convergência da série de Fourier. Série de Fourier com período arbitrário

10.1 Convergência pontual de uma série de Fourier

Teorema 10.1. (Teorema da convergência pontual de uma série de Fourier)

Seja $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ uma função contínua por partes, isto é, existem $-\pi = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_p = \pi$ tais que f e f' são contínuas e limitadas em (x_{i-1}, x_i), onde $i = 1, 2, \ldots, p$ e, nos pontos x_i, os limites laterais são finitos. Então, a série de Fourier de $f(x)$, $S(x)$ satisfaz $S(x) = f(x)$ em (x_{i-1}, x_i). Em $x = x_i$, temos

$$S(x_i) = \frac{\lim_{x \to x_i^+} f(x) + \lim_{x \to x_i^-} f(x)}{2}.$$

♡

10.2 Série de Fourier definida em intervalos arbitrários

Definimos, na aula anterior, a série de Fourier para uma função definida no intervalo $(-\pi, \pi)$, porém é possível definir a série de Fourier para uma função definida no intervalo arbitrário $(-\ell, \ell)$.

Teorema 10.2. (Série de Fourier em intervalos arbitrários)

A série de Fourier de uma função f definida no intervalo $(-\ell, \ell)$ é dada por

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \right] \tag{10.1}$$

onde

$$a_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \mathrm{d}x, \tag{10.2}$$

$$a_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \mathrm{d}x, \tag{10.3}$$

$$b_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \mathrm{d}x. \tag{10.4}$$

A série de Fourier converge para $f(x)$ em (x_{i-1}, x_i), isto é,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \right].$$

Em x_i (pontos de descontinuidade), a série de Fourier converge para

$$S(x_i) = \frac{\lim_{x\to x_i^+} f(x) + \lim_{x\to x_i^-} f(x)}{2}.$$

♡

10.3 Séries de Fourier em senos e cossenos

Teorema 10.3. (Série de Fourier em senos e cossenos)

(a) *Seja $f(x)$ uma **função ímpar**, definida no intervalo $(-\ell, \ell)$, então a série de Fourier $S(x)$ é uma **série em senos***

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right), \tag{10.5}$$

onde

$$b_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)\mathrm{d}x.$$

(b) *Seja $f(x)$ uma **função par**, definida no intervalo $(-\ell, \ell)$, então a série de Fourier $S(x)$ é uma **série em cossenos***

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right), \tag{10.6}$$

onde

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\mathrm{d}x, \\ a_k &= \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

♡

Exemplo 10.1 Seja $f(x)$ uma função definida por

$$f(x) = \begin{cases} -n, & \text{se} \quad -\pi < x < 0, \\ n, & \text{se} \quad 0 < x < \pi, \end{cases}$$

onde $n \in \mathbb{R}$. Obtenha a série de Fourier para $f(x)$ e desenhe seu gráfico.

Resolução: O gráfico de $f(x)$ é

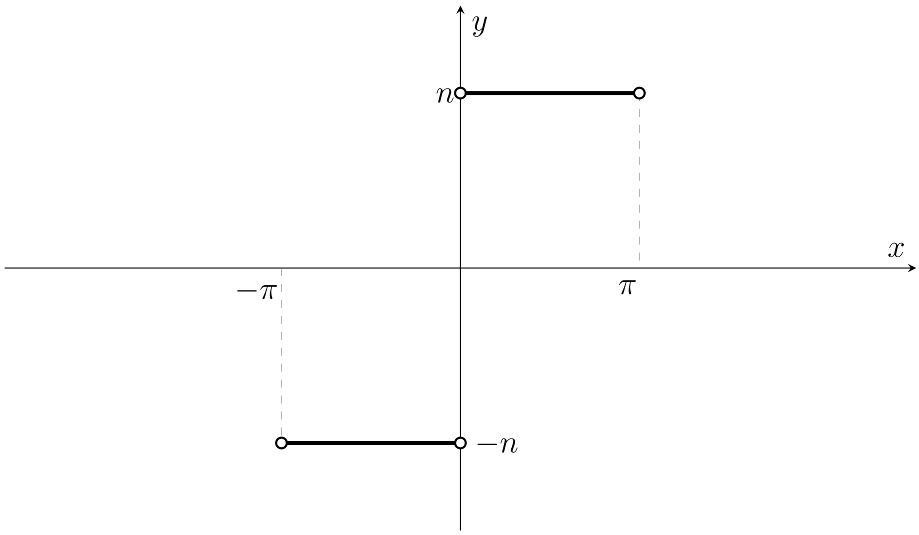


Figura 10.1: $f(x), \quad -\pi < x < \pi.$

Note que, f é ímpar, temos então uma série de Fourier em senos, logo $a_k = 0$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$. Vamos calcular os coeficientes b_k :

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} n\,\mathrm{sen}(kx)\mathrm{d}x = \frac{2n}{\pi}\left[-\frac{\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{-2n}{k\pi}[\cos(k\pi) - 1] = -\frac{2n}{k\pi}[(-1)^k - 1] \\ &= -\frac{2n}{k\pi}\begin{cases} 0, & \text{se} \quad k \text{ é par}, \\ -2, & \text{se} \quad k \text{ é ímpar}, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se} \quad k \text{ é par}, \\ \dfrac{4n}{k\pi}, & \text{se} \quad k \text{ é ímpar}. \end{cases} \end{aligned}$$

A série de Fourier para $f(x)$ é

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4n}{\pi(2k-1)}\,\mathrm{sen}[(2k-1)x] = \frac{4n}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}[(2k-1)x]}{(2k-1)}.$$

A série de Fourier possui descontinuidades em $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$. Nestes pontos f converge para

$$\frac{\lim_{x\to 0^+} f(x) + \lim_{x\to 0^-}}{2} = \frac{n-n}{2} = 0.$$

O gráfico para a série de Fourier é

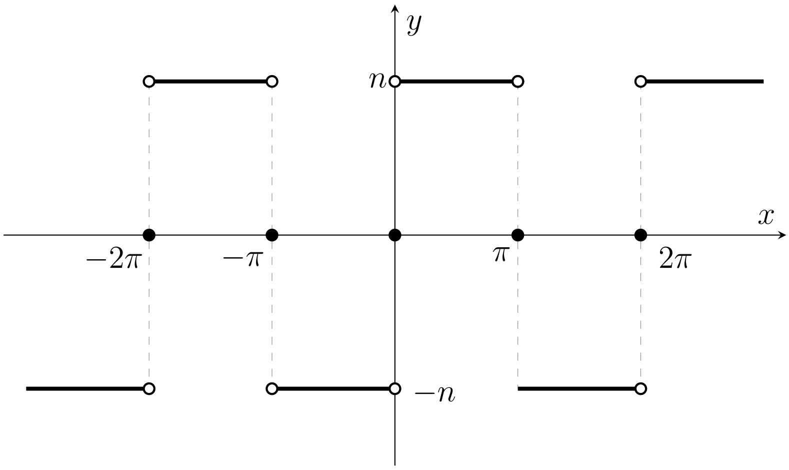


Figura 10.2: $S(x)$ é 2π-periódica.

Exemplo 10.2 Seja $f(x)$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{se} \quad -2 < x < 0, \\ 2, & \text{se} \quad 0 < x < 2 \end{cases}$$

(a) Determine a série de Fourier para $f(x)$ e esboce seu gráfico no intervalo $[-6, 6]$.

(b) Se $S(x)$ denota a série de Fourier obtida no item (a), determine o valor de $S(0)$ e $S(7)$.

Resolução: **(a)** O gráfico de $f(x)$ é

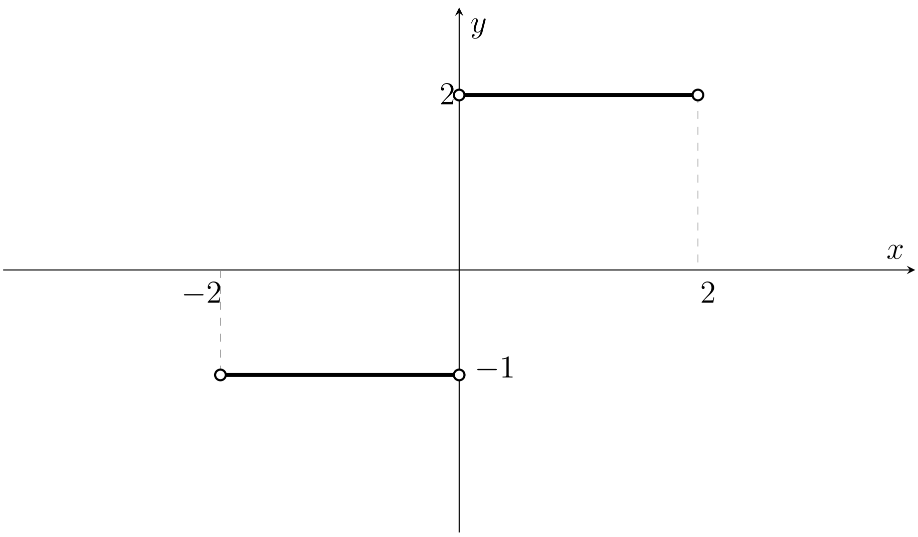


Figura 10.3: $f(x), \quad -2 < x < 2$.

Como $f(x)$ não é par nem ímpar, devemos calcular a_0, a_k e b_k, isto é,

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left\{-\int_{-2}^{0}\mathrm{d}x + 2\int_{0}^{2}\mathrm{d}x\right\} = \frac{1}{2}\left\{-\left[x\right]_{-2}^{0} + 2\left[x\right]_{0}^{2}\right\} = \frac{1}{2}\Big[-2+4\Big] = 1.$$

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{2}\left\{-\int_{-2}^{0}\cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right)\,\mathrm{d}x + 2\int_{0}^{2}\cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right)\,\mathrm{d}x\right\}\\
&= \frac{1}{\cancel{2}}\left\{-\frac{\cancel{2}}{k\pi}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}x\right)\right]_{-2}^{0} + \cancel{2}\cdot\frac{2}{k\pi}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}x\right)\right]_{0}^{2}\right\}\\
&= -\frac{1}{k\pi}\big[\operatorname{sen}(0) - \operatorname{sen}(-k\pi)\big] + \frac{2}{k\pi}\big[\operatorname{sen}(k\pi) - \operatorname{sen}(0)\big] = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{2}\left\{-\int_{-2}^{0}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}x\right)\,\mathrm{d}x + 2\int_{0}^{2}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}x\right)\,\mathrm{d}x\right\}\\
&= \frac{1}{\cancel{2}}\left\{\frac{\cancel{2}}{k\pi}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right)\right]_{-2}^{0} - \cancel{2}\cdot\frac{2}{k\pi}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right)\right]_{0}^{2}\right\}\\
&= \frac{1}{k\pi}\big[\cos(0) - \underbrace{\cos(-k\pi)}_{\cos(k\pi)}\big] - \frac{2}{k\pi}\big[\cos(k\pi) - \cos(0)\big]\\
&= \frac{1}{k\pi}\left[1-(-1)^k\right] - \frac{2}{k\pi}\left[(-1)^k - 1\right]\\
&= \frac{1}{k\pi}\left[1-(-1)^k\right] + \frac{2}{k\pi}\left[1-(-1)^k\right]\\
&= \frac{3}{k\pi}\left[1-(-1)^k\right] = \frac{3}{k\pi}\begin{cases} 0 & \text{se} \quad k \text{ é par}\\ 2 & \text{se} \quad k \text{ é ímpar}\end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad k \text{ é par}\\ \dfrac{6}{k\pi} & \text{se} \quad k \text{ é ímpar}\end{cases}
\end{aligned}
$$

A série de Fourier possui descontinuidades em $x = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots$. Nestes pontos, a série converge para

$$
S(0) = \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to 0^-} f(x) + \lim_{x\to 0^+} f(x)\right] = \frac{1}{2}[-1+2] = \frac{1}{2}.
$$

Portanto, a série de Fourier para $f(x)$ é dada por

$$
S(x) = \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)}\operatorname{sen}\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}x\right].
$$

O gráfico para $S(x)$ é

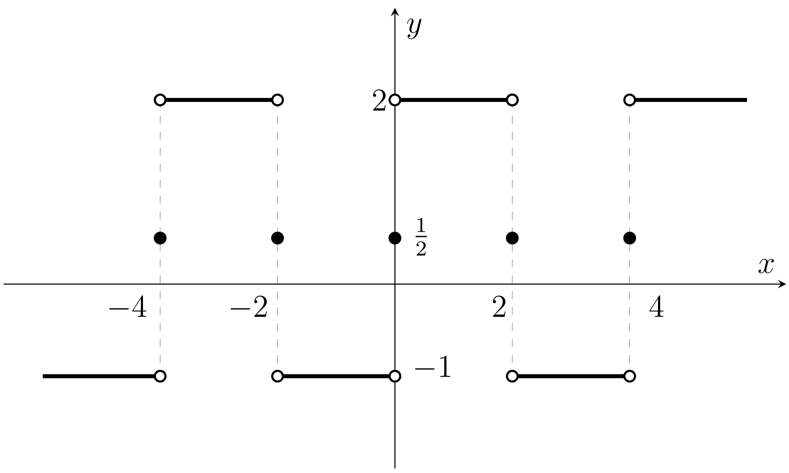


Figura 10.4: Série de Fourier para $f(x)$

(b) Já calculamos no item (a), $S(0)$. Note que, f é contínua em $x = 7$, então $S(7) = f(7) = -1$ (observe o gráfico da série de Fourier).

Exercícios

1. Obtenha a série de Fourier para as funções dadas e desenhe o seu gráfico (gráfico da série obtida):

   (a) $f(x) = x, \quad -2 < x < 2,$

   (b) $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{se} \quad -\pi < x < 0, \\ 1, & \text{se} \quad 0 < x < \pi, \end{cases}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad -2 < x < -1, \\ 0, & \text{se} \quad -1 < x < 1, \\ 1, & \text{se} \quad 1 < x < 2, \end{cases}$

   (d) $f(x) = |x|, \quad -\pi < x < \pi,$

   (e) $f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi,$

   (f) $f(x) = x^2, \quad -1 < x < 1,$

   (g) $f(x) = x|x|, \quad -1 < x < 1,$

   (h) $f(x) = \pi^2 - x^2, \quad -\pi < x < \pi,$

   (i) $f(x) = x^3, \quad -\pi < x < \pi,$

   (j) $f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{se} \quad -\pi < x < 0, \\ x + 1, & \text{se} \quad 1 \leq x < \pi, \end{cases}$

   (k) $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se} \quad -1 < x < -0, \\ x - 1, & \text{se} \quad 0 \leq x < 1, \end{cases}$

   (l) $f(x) = |\operatorname{sen} x|, \quad -\pi < x < \pi,$

Respostas:

1. **(a)** $S(x) = \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2} x\right),$

   (b) $S(x) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{k} \operatorname{sen}(kx),$

(c) $S(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right),$

(d) $S(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{[(-1)^k - 1]}{k^2}\cos(kx),$

(e) $S(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\operatorname{sen}(kx),$

(f) $S(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}\cos(k\pi x),$

(g) $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2(-1)^{k+1}}{k\pi} + \frac{4}{(k\pi)^3}[(-1)^k - 1]\right]\operatorname{sen}(k\pi x),$

(h) $S(x) = \frac{2\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}\cos(kx),$

(i) $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2\pi^2}{k}(-1)^{k+1} + \frac{12}{k^3}(-1)^k\right]\operatorname{sen}(kx),$

(j) $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2(-1)^{k+1}}{k\pi}(\pi + 1) + \frac{2}{k\pi}\right]\operatorname{sen}(kx),$

(k) $S(x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(k\pi x)}{k},$

(l) $S(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1 + (-1)^k}{(1 - k^2)}\right]\cos(kx),$

Parte II

Equações diferenciais ordinárias de primeira ordem

Aula 11: Equações diferenciais ordinárias.

11.1 Equações diferenciais: ordinária e parcial

Chama-se equação diferencial ordinária (EDO) uma equação que contém somente derivadas ordinárias dependentes de apenas uma variável independente. A função incógnita será denotada por $y(x)$, onde x é a variável independente.

Por outro lado, uma equação diferencial é chamada parcial (EDP) se contém derivadas parciais e contém mais de uma variável independente.

Notações: $F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x), \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y(x), \cdots\right) = 0,$ (EDO)

$F\left(x, y, z, \cdots, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \cdots, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \cdots\right) = 0,$ (EDP), onde $x, y, z, \ldots$ são as variáveis independentes e $w = w(x, y, z, \ldots)$ a única variável dependente.

Exemplo 11.1 A seguir, temos uma EDO e uma EDP, respectivamente, como exemplos:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) = y(x), \qquad \text{(EDO)}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x, y) = 0, \qquad \text{(EDP)}.$$

11.2 Classificação das equações diferenciais ordinárias

As equações diferenciais ordinárias podem ser classificadas quando à ordem e a linearidade.

- **Ordem:** A ordem de uma EDO é dada pelo índice da maior derivada existente na equação.

Exemplo 11.2 Seja $y = y(x)$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y, \qquad \text{(EDO de primeira ordem)}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 0, \qquad \text{(EDO de segunda ordem)}$$

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 3y = 0, \qquad \text{(EDO de ordem } n, n \in \mathbb{N}\text{)}.$$

- **Linearidade:** Uma EDO de ordem n é dita linear se ela puder ser escrita na forma:

$$[a_n(x)]y^{(n)}(x) + [a_{n-1}(x)]y^{(n-1)}(x) + \cdots + [a_1(x)]y'(x) + [a_0(x)]y(x) = g(x).$$

Exemplo 11.3 Seja $y = y(x)$.

$$(\operatorname{sen} x)y'' + y^{(4)} = \ln x, \qquad \text{(EDO linear)}$$
$$yy'' + y^{(4)} = \ln x, \qquad \text{(EDO não linear)}$$
$$y^{(5)} + 3x^2y^2 = x^2, \qquad \text{(EDO não linear)}$$
$$\sqrt{x}y'' + (\ln x)y' = x^3, \qquad \text{(EDO linear).}$$

11.3 Solução

Denomina-se solução de uma EDO, uma função $y = \varphi(x)$ definida no intervalo aberto $I = (a, b)$, tal que a substituição $y = \varphi(x)$ e suas derivadas convertem a equação em uma identidade.

Exemplo 11.4 Sejam $c \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$. Determine o(s) possível(is) valor(es) de α a fim de que a função $\varphi(x) = c\,\mathrm{e}^{\alpha x^2}$ seja solução da equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) + xy(x) = 0, \qquad x \neq 0.$$

Resolução: Calculando a derivada primeira, temos $\varphi'(x) = 2\alpha c x \mathrm{e}^{\alpha x^2}$ e substituindo na EDO, temos

$$2\alpha c x \mathrm{e}^{\alpha x^2} + cx\mathrm{e}^{\alpha x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x\mathrm{e}^{\alpha x^2}(2\alpha c + c) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\alpha c + c = 0.$$

Temos duas possibilidades: (i) $c = 0$, neste caso temos a solução trivial $y = 0$. (ii) Para $c \neq 0$, temos $2\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = -1/2$. Portanto, $y = c\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$.

11.4 Problema de valor inicial (PVI)

Antes de definirmos um Problema de Valor Inicial, definimos o que é uma EDO de primeira linear homogênea e não homogênea.

Definição 11.1. (Homogeneidade)

Sejam $p(x)$ e $q(x)$ funções conhecidas. A EDO *de primeira ordem linear*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) + p(x)y(x) = q(x)$$

é dita homogênea se $q(x) = 0$, caso contrário é dita não homogênea. ♣

A seguir, definimos problema de valor inicial.

Definição 11.2. (Problema de valor inicial - PVI)

Sejam $p(x)$ e $q(x)$ duas funções dadas, definidas e contínuas no intervalo $I = (a, b)$. Um PVI *é composto por uma* EDO *de primeira ordem, linear e não homogênea e uma condição dada na função, isto é,*

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

com $x_0 \in I$ e y_0 um número real arbitrário. ♣

Exemplo 11.5 Verifique que $y(x) = c\,\mathrm{e}^{3x}$ é solução da EDO $y' - 3y = 0$, onde $c \in \mathbb{R}$. Dada a condição $y(0) = 2$, determine c.

Resolução: Calculando a derivada primeira, temos $y' = 3c\,\mathrm{e}^{3x}$. Substituindo na EDO segue que

$$3c\,\mathrm{e}^{3x} - 3c\,\mathrm{e}^{3x} = 0. \quad \checkmark$$

Sabemos que $y(x) = c\,\mathrm{e}^{3x}$. Em $x = 0$, temos

$$y(0) = c = 2.$$

Portanto, $y(x) = 2\,\mathrm{e}^{3x}$ é uma solução particular para a EDO.

Importante: *Muitas vezes uma* EDO *de primeira ordem é escrita da seguinte forma:*

$$y' = f(x, y), \qquad \textit{onde} \qquad y = y(x).$$

Exercícios

1. Classifique as equações diferenciais quanto a ordem e a linearidade (linear ou não linear). Se a equação diferencial é linear, então classifique-a quanto a homogeneidade (homogênea ou não homogênea):

   (a) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 5y,$

   (b) $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + x = y,$

   (c) $y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x,$

   (d) $y''' + xy' = x \operatorname{sen} x,$

   (e) $y'' + x \operatorname{sen} x\, y' = y,$

   (f) $y'' + 4y' - 3y = 2y^2,$

   (g) $\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3} + t\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + t^2y = t^3,$

   (h) $\cos x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x \operatorname{sen} t = 0,$

   (i) $y^{(4)} + \mathrm{e}^x y'' = x^3y',$

(j) $x^2y'' + e^x y' = \dfrac{1}{y}$.

2. Verifique que cada função dada é uma solução da equação diferencial dada:

(a) $y'' - y = 0; \qquad y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = \cosh t,$

(b) $y'' + 2y' - 3y = 0; \qquad y_1(x) = e^{-3x}, \quad y_2(x) = e^x,$

(c) $ty' - y = t^2; \qquad y(t) = 3t + t^2,$

(d) $y^{(4)} + 4y^{(3)} + 3y = x; \qquad y_1(x) = \dfrac{x}{3}, \quad y_2(x) = e^{-x} + \dfrac{x}{3},$

(e) $2t^2y'' + 3ty' - y = 0,\ t > 0; \qquad y_1(t) = t^{1/2}, \quad y_2(t) = t^{-1},$

(f) $t^2y'' + 5ty' + 4y = 0,\ t > 0; \qquad y_1(t) = t^{-2}, \quad y_2(t) = t^{-2}\ln t,$

(g) $y'' + y = \sec t,\ 0 < t < \dfrac{\pi}{2}; \qquad y(t) = (\cos t)\ln(\cos t) + t \operatorname{sen} t,$

(h) $y' - 2ty = 1,\ t > 0; \qquad y(t) = e^{t^2} \cdot \displaystyle\int_0^t e^{-s^2} ds + e^{t^2}.$

Respostas:

1. (a) Primeira ordem, linear e homogênea;
   (b) Segunda ordem, linear e não homogênea;
   (c) Primeira ordem e não linear;
   (d) Terceira ordem, linear e não homogênea;
   (e) Segunda ordem, linear e homogênea;
   (f) Segunda ordem e não linear;
   (g) Terceira ordem, linear e não homogênea;
   (h) Primeira ordem e não linear;
   (i) Quarta ordem, linear e homogênea;
   (j) Segunda ordem e não linear.

Aula 12: Equações diferenciais separáveis.

12.1 Equações diferenciais separáveis.

Chama-se equação diferencial ordinária de primeira ordem e separável a toda equação diferencial ordinária que possa ser conduzida à forma

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{f(x)}{g(y)}, \qquad y = y(x),\ g(y) \neq 0. \tag{12.1}$$

Para resolver esta EDO, vamos reescrevê-la na forma

$$g(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x).$$

Se $y = \varphi(x)$ é solução da Eq.(12.1), podemos escrever

$$\begin{aligned} g(\varphi(x))\varphi'(x) &= f(x) \\ \int g(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x &= \int f(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Note que, $\mathrm{d}y = \varphi'(x)\mathrm{d}x$, logo

$$\int g(y)\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x$$

ou ainda,

$$G(y) = F(x) + c,$$

onde $F(x)$ e $G(y)$ são as primitivas de $f(x)$ e $g(y)$, respectivamente e c uma constante de integração.

Importante: *Este método pode ser aplicado à* EDOs *de primeira ordem lineares e não lineares.*

12.2 Exemplos

Exemplo 12.1 Resolva a seguinte EDO:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y, \qquad y = y(x).$$

Resolução: A EDO é separável, isto é,

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \mathrm{d}x.$$

Integrando ambos os membros da equação, segue que

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int \mathrm{d}x \\ \ln|y| &= x+k, \qquad k \text{ é constante}, \\ y(x) &= c\,\mathrm{e}^x, \qquad \text{onde} \quad c=\mathrm{e}^k.\end{aligned}$$

Exemplo 12.2 Seja $y = y(x) \neq 0$. Determine a solução para a equação diferencial ordinária de primeira ordem e não linear

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{y}.$$

Resolução: A EDO é separável. De fato,

$$\begin{aligned} y\mathrm{d}y &= x\mathrm{d}x \\ \int y\mathrm{d}y &= \int x\mathrm{d}x \\ \frac{y^2}{2} &= \frac{x^2}{2}+c \\ y^2-x^2 &= c_1, \qquad \text{(família de hipérboles)},\end{aligned}$$

onde $c_1 = 2c$ com c e c_1 constantes arbitrárias. Esta solução está na forma implícita. Sua forma explícita é $y = \pm\sqrt{c_1+x^2}$.

Exemplo 12.3 Obtenha a solução explícita para a EDO

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2+2}{x^2-3x+2}.$$

Resolução: A EDO é separável, ou seja,

$$\mathrm{d}y = \left(\frac{x^2+2}{x^2-3x+2}\right)\mathrm{d}x.$$

Dividindo os polinômios, podemos escrever

$$\begin{aligned}\mathrm{d}y &= \left(1+\frac{3x}{x^2-3x+2}\right)\mathrm{d}x \\ \int \mathrm{d}y &= \int \mathrm{d}x + \int \left(\frac{3x}{x^2-3x+2}\right)\mathrm{d}x \\ \int \mathrm{d}y &= \int \mathrm{d}x + \int \left[\frac{3x}{(x-2)(x-1)}\right]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

O integrando da segunda integral, do lado direito, pode ser escrito como sendo a soma de duas frações

(frações parciais)

$$\frac{3x}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1}, \qquad \Rightarrow \qquad A = 6, \quad B = -3,$$

logo

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}y &= \int \mathrm{d}x + 6\int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} - 3\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} \\ y(x) &= x + 6\ln|x-2| - 3\ln|x-1| + c, \end{aligned}$$

onde c é a constante de integração.

Exemplo 12.4 Determine a solução geral para a EDO

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{xy + 2y - x - 2}{xy - 3y + x - 3}, \qquad x \neq 3, \quad y \neq -1.$$

Resolução: Podemos reescrever a EDO da seguinte forma

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y(x+2) - (x+2)}{y(x-3) + (x-3)} = \frac{(y-1)(x+2)}{(y+1)(x-3)},$$

logo

$$\left(\frac{y+1}{y-1}\right)\mathrm{d}y = \left(\frac{x+2}{x-3}\right)\mathrm{d}x,$$

que é uma EDO na forma separável. Através de integração e frações parciais, obtemos

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{y+1}{y-1}\right)\mathrm{d}y &= \int \left(\frac{x+2}{x-3}\right)\mathrm{d}x \\ \int \left(1 + \frac{2}{y-1}\right)\mathrm{d}y &= \int \left(1 + \frac{5}{x-3}\right)\mathrm{d}x \\ y + 2\ln|y-1| &= x + 5\ln|x-3| + c \\ \ln|y-1|^2 - \ln|x-3|^5 &= x - y + c \\ \ln\left(\frac{|y-1|^2}{|x-3|^5}\right) &= x - y + c \\ \frac{(y-1)^2}{(x-3)^5} &= c_1\,\mathrm{e}^{x-y}, \end{aligned}$$

onde $c_1 = \mathrm{e}^c$ é uma constante.

Exercícios

1. Resolva as seguintes equações diferenciais ordinárias:

(a) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 - 4,$

(b) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{3x+2y},$

(c) $\mathrm{e}^x\, y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{-2x-y},$

(d) $y\, \ln x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \left(\dfrac{y+1}{x}\right)^2,$

(e) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x^2}{y(1+x^3)},$

(f) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left(\dfrac{2y+3}{4x+5}\right)^2,$

(g) $\sec(t)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \mathrm{e}^{y+\,\mathrm{sen}t} = 0,$

(h) $xy^3\mathrm{d}x + (y+1)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}y = 0,$

(i) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{xy+3x-y-3}{xy-2x+4y-8},$

(j) $\sec y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \mathrm{sen}(x-y) = \mathrm{sen}(x+y),$

(k) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{3x+1}{(x-1)^2(x+2)},$

(l) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x^3+1}{x^2+1},$

(m) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2(1-y).$

2. Resolva a seguinte equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{ay+b}{cy+d},$$

onde a, b, c e d são constantes com $a \neq 0$ e $ay + b \neq 0$.

3. Resolva os seguintes PVIs:

(a) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 12x^3y, \\ y(0) = 2, \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\mathrm{e}^{x-y}, \\ y(1) = \ln(2\mathrm{e}+1), \end{cases}$

(c) $\begin{cases} (\mathrm{e}^{2y} - y)\cos x \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{y} \operatorname{sen} 2x, \\ y(0) = 0, \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y' = \dfrac{2\cos(2x)}{3+2y}, \\ y(0) = -1, \end{cases}$

(e) $\begin{cases} (3\mathrm{e}^{x}\tan y)\mathrm{d}x + [(1-\mathrm{e}^{x})\sec^2 y]\mathrm{d}y = 0, \\ y(\ln 2) = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

Respostas:

1. **(a)** $y(x) = 2\left(\dfrac{1+C\mathrm{e}^{4x}}{1-C\mathrm{e}^{4x}}\right),$

   (b) $3\mathrm{e}^{-2y} + 2\mathrm{e}^{3x} = C,$

   (c) $y\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-x} + \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x} = C,$

   (d) $\dfrac{y^2}{2} + 2y + \ln|y| = \dfrac{x^3}{3}\ln|x| - \dfrac{1}{9}x^3 + C,$

   (e) $y(x) = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}\ln|1+x^3| + C},$

   (f) $\dfrac{2}{2y+3} - \dfrac{1}{4x+5} = C,$

   (g) $y(x) = -\ln(C - \mathrm{e}^{\operatorname{sen} t}),$

   (h) $(x-1)\mathrm{e}^{x} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{2y^2} + C,$

   (i) $\left(\dfrac{y+3}{x+4}\right)^5 = C\,\mathrm{e}^{y-x},$

   (j) $\dfrac{1}{2}\ln|\operatorname{cosec}(2y) - \cot(2y)| = \operatorname{sen} x + C,$

   (k) $y(x) = \dfrac{5}{9}\ln|x+1| - \dfrac{4}{3}\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{5}{9}\ln|x+2| + C,$

   (l) $y(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C,$

(m) $-\dfrac{1}{y} + \ln|y| - \ln|1-y| = x + C.$

2. $x = \dfrac{c}{a}y + \left(\dfrac{ad-bc}{a^2}\right)\ln|ay+b| + C.$

3. **(a)** $y(x) = 2\mathrm{e}^{3x^4}$,

(b) $y(x) = \ln(2\mathrm{e}^x + 1)$,

(c) $\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{-y} = 4 - 2\cos x$,

(d) $y(x) = -\dfrac{3}{2} + \sqrt{\dfrac{1}{4} + \operatorname{sen}(2x)}$,

(e) $y(x) = \operatorname{arccot}\left(\dfrac{1}{(\mathrm{e}^x - 1)^3}\right)$,

Aula 13: Equações que podem ser reduzidas à forma separável.

13.1 Funções homogêneas

Existe uma classe de equações diferenciais que podem ser reduzidas à equações separáveis através de uma mudança de variável. A condição é que os coeficientes $M(x,y)$ e $N(x,y)$ da equação diferencial

$$M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0 \tag{13.1}$$

sejam funções homogêneas.

Definição 13.1. (Função homogênea)

Uma função contínua, $f(x,y)$, é dita ser homogênea de grau n, em x e y, se para todo número real λ, temos

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y).$$

♣

Exemplo 13.1 Mostre que a função $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$ é homogênea de grau dois.

Resolução: Temos que,

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + 2(\lambda x)(\lambda y) + (\lambda y)^2 = \lambda^2(x^2 + 2xy + y^2) = \lambda^2 f(x,y).$$

Portanto, a função é homogênea de grau dois.

Exemplo 13.2 A função $f(x,y) = \dfrac{x\,\mathrm{e}^{x/y}}{x^2+y^2}$ é homogênea?

Resolução: Neste caso, temos que

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x\,\mathrm{e}^{(\lambda x)/(\lambda y)}}{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{x\,\mathrm{e}^{x/y}}{x^2+y^2}\right) = \lambda^{-1} f(x,y).$$

Portanto, f é homogênea de grau $n = -1$.

✍ **Exercício 1.** Verifique que $f(x,y) = 2x + y + 5$ não é uma função homogênea.

13.2 Equações que podem ser reduzidas à forma separável

A condição para que uma equação diferencial ordinária (não separável) possa ser reduzida à forma separável é dada no seguinte teorema:

Teorema 13.1

Considere a equação diferencial ordinária dada pela Eq.(13.1). *Se os coeficientes* $M(x,y)$ *e* $N(x,y)$*, desta equação, são funções homogêneas de mesmo grau, então a equação diferencial pode ser reduzida a uma equação separável através da mudança de variável* $v(x) = y/x$. ♡

Exemplo 13.3 Resolva a equação diferencial $y^2 \mathrm{d}x - x(x+y)\mathrm{d}y = 0$.

Resolução: A equação diferencial não é separável. Vamos verificar se os coeficientes $M(x,y) = y^2$ e $N(x,y) = -x(x+y)$ são funções homogêneas de mesmo grau. Temos que,

$$\begin{aligned} M(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda y)^2 = \lambda^2 y^2 = \lambda^2 M(x,y) \\ N(\lambda x, \lambda y) &= -\lambda x(\lambda x + \lambda y) = \lambda^2[-x(x+y)] = \lambda^2 N(x,y), \end{aligned}$$

de onde concluímos que as funções M e N são homogêneas de grau dois. Então, através da mudança de variável $v = y/x$, podemos tornar a equação separável, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{y^2}{x^2 + xy} \\ x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v &= \frac{(xv)^2}{x^2 + x(xv)} \\ x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v &= \frac{v^2}{1+v} \\ x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= \frac{v^2}{1+v} - v, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{-v}{1+v}.$$

Esta é uma EDO separável e pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+v}{v}\right)\mathrm{d}v &= -\frac{\mathrm{d}x}{x} \\ \int \left(\frac{1}{v} + 1\right)\mathrm{d}v &= -\int \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ \ln|v| + v &= -\ln|x| + c. \end{aligned}$$

Como $v = y/x$, obtemos

$$\begin{aligned}
\ln\left|\frac{y}{x}\right| + \frac{y}{x} &= -\ln|x| + c \\
\ln|y| - \cancel{\ln|x|} + \frac{y}{x} &= -\cancel{\ln|x|} + c \\
\ln|y| &= c_1 - \frac{y}{x}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$y(x) = c_1\, \mathrm{e}^{-y/x},$$

onde $c_1 = \mathrm{e}^c$ é constante.

Exemplo 13.4 Seja $y = y(x) \neq 0$. Resolva o seguinte PVI

$$\begin{cases} y' + \dfrac{x}{y} + 2 = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Resolução: A equação não é separável. Verifique que $M(x,y) = x + 2y$ e $N(x,y) = y$ são funções homogêneas de grau um! Com a mudança de variável $v = y/x$ a equação diferencial torna-se separável, isto é,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{x+2y}{y} \\
x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v &= -\frac{x+2xv}{xv} \\
x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= -\frac{1+2v}{v} - v,
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= -\frac{(v+1)^2}{v} \\
\left(\frac{v}{(v+1)^2}\right)\mathrm{d}v &= -\frac{\mathrm{d}x}{x}.
\end{aligned}$$

Integrando ambos os membros desta última equação, tem-se

$$\int \left[\frac{v}{(v+1)^2}\right] \mathrm{d}v = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x}. \tag{13.2}$$

O integrando da integral do lado esquerdo pode ser reescrito em termos de frações parciais, ou seja,

$$\frac{v}{(v+1)^2} = \frac{A}{v+1} + \frac{B}{(v+1)^2} \qquad \Rightarrow \qquad A = 1, \quad B = -1.$$

Assim, a Eq.(13.2), pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}v}{v+1} - \int \frac{\mathrm{d}v}{(v+1)^2} &= -\frac{\mathrm{d}x}{x} \\
\ln|v+1| + \frac{1}{v+1} &= \ln|x| + c \\
\ln\left|\frac{y}{x}+1\right| + \frac{1}{\frac{y}{x}+1} &= -\ln|x| + c \\
\ln|y+x| - \cancel{\ln|x|} + \frac{x}{x+y} &= -\cancel{\ln|x|} + c \\
\ln|y+x| + \frac{x}{x+y} &= c.
\end{aligned}$$

Utilizando a condição inicial $y(0) = 1$, temos

$$\ln|1+0| + \frac{0}{0+1} = c \qquad \Rightarrow \qquad c = 0.$$

Finalmente, uma solução particular para a EDO é dada por

$$\ln|y+x| + \frac{x}{x+y} = 0.$$

Exercícios

1. Resolva as seguintes equações diferenciais ordinárias:

(a) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x+3y}{3x+y}$,

(b) $-y\,\mathrm{d}x + (x + \sqrt{xy})\mathrm{d}y = 0$,

(c) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y + \sqrt{x^2+y^2}, \quad x > 0$,

(d) $(x+y)y' = x - y$,

(e) $[1 + \mathrm{e}^{-y/x}]\mathrm{d}y + \left(1 - \dfrac{y}{x}\right)\mathrm{d}x = 0$,

(f) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y^2+xy+x^2}{x^2}$,

(g) $y(x^2-y^2)\mathrm{d}x - x(x^2+y^2)\mathrm{d}y = 0$,

(h) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y + x\cos^2\left(\dfrac{y}{x}\right)$,

(i) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y}{x} - \mathrm{e}^{-y/x}$,

(j) $y' = \dfrac{t^2+3y^2}{2ty}, \quad t > 0$,

(k) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x^3 + 3xy^2}{3x^2y + y^3}$,

(l) $x(\ln x - \ln y)\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 0, \quad x > 0, \quad y > 0$,

2. Resolva os seguintes PVIs:

(a) $$\begin{cases} (x + y\,\mathrm{e}^{y/x})\mathrm{d}x - x\,\mathrm{e}^{y/x}\mathrm{d}y = 0, \\ y(1) = 0, \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y - \sqrt{x^2 + y^2}}{x}, \\ y(3) = 4, \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = x\cot\left(\dfrac{y}{x}\right)\mathrm{d}x, \\ y(1) = 0, \end{cases}$$

(d) $$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{x}{y} + 2 = 0, \quad y \neq 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

3. Determine a **solução explícita** para o seguinte PVI:

$$\begin{cases} (t^2 + 2ty)y' = y^2, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Respostas:

1. (a) $(y - x)^2 = C(y + x)$,

   (b) $y(\ln|y| - C)^2 = 4x$,

   (c) $y + \sqrt{y^2 + x^2} = Cx^2$,

   (d) $x^2 - 2xy - y^2 = C$,

   (e) $x\mathrm{e}^{y/x} + y = C$,

   (f) $y(x) = x\tan(\ln Cx)$,

   (g) $\ln|xy| - \dfrac{x^2}{2y^2} = C$,

   (h) $y = x\,\mathrm{arctg}(\ln|x| + C)$,

(i) $y = \ln \ln \left| \dfrac{C}{x} \right|$,

(j) $y = \pm t\sqrt{Ct - 1}$,

(k) $x^2 + y^2 = C(x^2 - y^2)^2$,

(l) $\dfrac{y}{1 + \ln y - \ln x} = C$,

2. **(a)** $\ln |x| = \mathrm{e}^{y/x} - 1$,

(b) $y(x) = \dfrac{1}{18}(81 - x^2)$,

(c) $\cos\left(\dfrac{y}{x}\right) - \dfrac{1}{x} = 0$,

(d) $\dfrac{x}{y + x} + \ln |y + x| = 0$.

3. $y = \dfrac{1}{2}(-t + \sqrt{t^2 + 8t})$.

Aula 14: Equações diferenciais exatas.

14.1 Equações exatas - Definição

Definimos a seguir equação diferencial exata.

Definição 14.1. (Equação exata)

Chama-se equação diferencial ordinária exata à toda equação diferencial que pode ser conduzida à forma

$$M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0 \tag{14.1}$$

satisfazendo a seguinte condição

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

A solução para a Eq.(14.1) *é dada na forma implícita por $F(x,y) = c$, onde F satisfaz*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y).$$

♣

14.2 Exemplos

Exemplo 14.1 Resolva a equação diferencial

$$(6xy - y^3)\mathrm{d}x + (4y + 3x^2 - 3xy^2)\mathrm{d}y = 0.$$

Resolução: A equação diferencial parcial não é separável e não pode ser reduzida a uma equação separável, pois as funções $M(x,y) = 6xy - y^3$ e $N(x,y) = 4y + 3x^2 - 3xy^2$ não são homogêneas. A equação diferencial é exata, pois

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6x - 3y^2 = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

A solução $F(x,y)$ satisfaz $\dfrac{\partial F}{\partial x} = M$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y} = N$. Consideremos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= 6xy - y^3 \\
\int \frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x &= \int (6xy - y^3)\mathrm{d}x \\
F(x,y) &= 3x^2y - xy^3 + g(y),
\end{aligned}$$

onde $g(y)$ é uma função que depende apenas de y. Derivando $F(x,y)$ em relação a y e igualando a N, temos

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \cancel{3x^2} - \cancel{3xy^2} + g'(y) = 4y + \cancel{3x^2} - \cancel{3xy^2} \qquad \Rightarrow \qquad g'(y) = 4y.$$

Integrando $g'(y)$, obtemos $g(y) = 2y^2 + c_1$, onde c_1 é uma constante arbitrária. Portanto,

$$\begin{aligned} F(x,y) &= 3x^2y - xy^3 + 2y^2 + c_1 = c \\ F(x,y) &= 3x^2y - xy^3 + 2y^2 = k, \end{aligned}$$

onde $k = c - c_1$ é constante.

Exemplo 14.2 Resolva a equação diferencial

$$(\cos x + \ln y)\mathrm{d}x + \left(\frac{x}{y} + \mathrm{e}^y\right)\mathrm{d}y = 0, \qquad y > 0.$$

Resolução: Temos que $M(x,y) = \cos x + \ln y$ e $N(x,y) = \dfrac{x}{y} + \mathrm{e}^y$. A equação diferencial é exata, pois

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

A solução $F(x,y)$ satisfaz $\dfrac{\partial F}{\partial x} = M$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y} = N$. Consideremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{x}{y} + \mathrm{e}^y = N \\ \int \frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y &= \int \left(\frac{x}{y} + \mathrm{e}^y\right)\mathrm{d}y \\ F(x,y) &= x\ln y + \mathrm{e}^y + f(x) \end{aligned}$$

onde $f(x)$ é uma função dependendo apenas de x. Derivando $F(x,y)$ em relação a x e igualando a M, obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cancel{\ln y} + f'(x) = \cos x + \cancel{\ln y},$$

logo $f'(x) = \cos x$. Integrando $f'(x)$ em relação a x, segue que $f(x) = \operatorname{sen} x + c_1$, onde c_1 é a constante de integração. Portanto,

$$F(x,y) = x\ln y + \mathrm{e}^y \operatorname{sen} x = c_2,$$

onde $c_2 = c - c_1$.

Exercícios

1. Resolva as seguintes equações diferenciais ordinárias:

(a) $[1+\ln(xy)]\mathrm{d}x + xy^{-1}\mathrm{d}y = 0,$

(b) $(4\mathrm{e}^{2x} + 2xy - y^2)\mathrm{d}x + (x-y)^2\mathrm{d}y = 0,$

(c) $(3 + y + 2y^2 \operatorname{sen}^2 x)\mathrm{d}x + (x + 2xy - y \operatorname{sen} 2x)\mathrm{d}y = 0,$

(d) $(2xy + y^2)\mathrm{d}x + (x^2 + 2xy + y^2)\mathrm{d}y = 0,$

(e) $y' = -\left(\dfrac{2xy^3 + 2}{3x^2y^2 + 8\mathrm{e}^{4y}}\right),$

(f) $(2x + \operatorname{sen} y - y\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x + (x\cos y + \cos y + \mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}y = 0,$

(g) $\mathrm{e}^{xy}(1+xy)\mathrm{d}x + x^2\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}y = 0,$

(h) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y \operatorname{sen} x - \mathrm{e}^x \operatorname{sen}(2y)}{\cos x + 2\mathrm{e}^x \cos(2y)},$

(i) $\left(2x + 1 - \dfrac{y^2}{x^2}\right)\mathrm{d}x + \dfrac{2y}{x}\mathrm{d}y = 0,$

(j) $2x(3x + y - y\mathrm{e}^{-x^2})\mathrm{d}x + (x^2 + 3y^2 + \mathrm{e}^{-x^2})\mathrm{d}y = 0,$

(k) $\left[\dfrac{1}{y}\operatorname{sen}\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x} + 1\right]\mathrm{d}x + \left[\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y^2}\operatorname{sen}\dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y^2}\right]\mathrm{d}y = 0.$

2. Resolva os seguintes PVIs:

(a) $\begin{cases} (3x^2\ln x + x^2 - y)\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0, \\ y(1) = 5, \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x\cos(2y-x) - \operatorname{sen}(2y-x) - 2x\cos(2y-x)y' = 0, \\ y(\pi/12) = \pi/8, \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 3y^4 - 1 + 12xy^3y' = 0, \\ y(1) = 2, \end{cases}$

(d) $\begin{cases} (y^2\cos x - 3x^2y - 2x)\mathrm{d}x + (2y\operatorname{sen} x - x^3 + \ln y)\mathrm{d}y = 0, \\ y(0) = \mathrm{e}, \end{cases}$

(e) $\begin{cases} (2x - y)\mathrm{d}x + (2y - x)\mathrm{d}y = 0, \\ y(1) = 3, \end{cases}$

(f) $\begin{cases} (9x^2 + y - 1)\mathrm{d}x - (4y - x)\mathrm{d}y = 0, \\ y(1) = 0. \end{cases}$

3. Determine o valor de b (constante) para o qual a equação

$$(y\mathrm{e}^{2xy} + x)\mathrm{d}x + (bx\mathrm{e}^{2xy})\mathrm{d}y = 0$$

é exata e, então resolva-a usando esse valor de b.

4. Determine o valor de α (constante) para o qual a equação

$$2xy^3 - 3y - (3x + \alpha x^2 y^2 - 2\alpha y)y' = 0$$

é exata e, então resolva-a usando esse valor de α.

5. Verdadeiro ou falso: Toda equação diferencial ordinária de primeira ordem separável,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{g(x)}{h(y)},$$

é exata. Justifique.

Respostas:

1. (a) $y(x) = x^{-1}\mathrm{e}^{C/x}$,
   (b) $y(x) = x + \sqrt[3]{C - x^3 - 6\mathrm{e}^{2x}}$,
   (c) $3x + xy + xy^2 - \frac{1}{2}y^2 \operatorname{sen} 2x = C$,
   (d) $x^2y + xy^2 + \frac{1}{3}y^3 = C$,
   (e) $x^2y^3 + 2x + 2\mathrm{e}^{4y} = C$,
   (f) $x^2 + x \operatorname{sen} y + y\mathrm{e}^{-x} + \operatorname{sen} y = C$,
   (g) $x\mathrm{e}^{xy} = C$,
   (h) $y \cos x + \mathrm{e}^x \operatorname{sen}(2y) = C$,
   (i) $\frac{y^2}{x} + x^2 + x = C$,
   (j) $x^2y + y^3 + y\mathrm{e}^{-x^2} + 2x^3 = C$,
   (k) $-\cos\left(\frac{x}{y}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right) + x - \frac{1}{y} = C$.

2. (a) $y(x) = x^{-1}(x^3 \ln x + 5)$,
   (b) $x \operatorname{sen}(2y - x) = \pi/24$,
   (c) $3xy^4 - x = 47$,

(d) $y^2 \operatorname{sen} x - x^3y - x^2 + y \ln y - y = 0,$

(e) $x^2 - xy + y^2 = 7,$

(f) $3x^3 + xy - x - 2y^2 = 2.$

3. $b = 1;\ \mathrm{e}^{2xy} + x^2 = C.$

4. $\alpha = -3;\ x^2y^3 - 3xy - 3y^2 = C.$

5. Verdadeiro.

Aula 15: Equações exatas e o fator integrante.

15.1 Exemplo

Exemplo 15.1 Verifique se a equação diferencial

$$(y\cos x + y\ln y)\mathrm{d}x + (x + y\,\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y = 0 \tag{15.1}$$

é exata.

Resolução: Tem-se que $M(x,y) = y\cos x + y\ln y$ e $N(x,y) = x + y\,\mathrm{e}^y$. A equação diferencial não é exata, pois

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos x + \ln y + 1 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 1.$$

Porém, se multiplicarmos a Eq.(15.1) pelo fator $1/y$, obtemos

$$(\cos x + \ln y)\mathrm{d}x + \left(\frac{x}{y} + \mathrm{e}^y\right)\mathrm{d}y = 0$$

que é a equação diferencial exata dada no Exemplo 14.2. Chamamos este fator de: **fator integrante**.

15.2 Fator integrante para equações que não são exatas

$\ast$ A pergunta que surge é: Quando conseguimos encontrar um fator integrante? Vejamos a seguir.
Considere a equação

$$M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0, \tag{15.2}$$

e, suponha que $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$, isto é, a equação não é exata. Multiplicando a Eq.(15.2) pelo fator integrante $\mu(x,y)$, obtemos

$$\underbrace{\mu(x,y)M(x,y)}_{\tilde{M}(x,y)}\mathrm{d}x + \underbrace{\mu(x,y)N(x,y)}_{\tilde{N}(x,y)}\mathrm{d}y = 0,$$

isto é, uma equação exata. Portanto,

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}.$$

Suponha que $\mu(x,y) = \mu(y) > 0$ dependa apenas de y, então

$$\underbrace{\mu(y)M(x,y)}_{\tilde{M}(x,y)}\,\mathrm{d}x + \underbrace{\mu(y)N(x,y)}_{\tilde{N}(x,y)}\,\mathrm{d}y = 0.$$

Como a equação é exata, ela satisfaz

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} &= \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} \\
\frac{\partial}{\partial y}[\mu(y)M(x,y)] &= \frac{\partial}{\partial x}[\mu(y)N(x,y)] \\
\mu'(y)M + \mu(y)\frac{\partial M}{\partial y} &= \mu(y)\frac{\partial N}{\partial x} \\
\mu'(y)M &= \underbrace{\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)}_{\neq 0}\mu(y) \\
\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} &= \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{1}{M}.
\end{aligned}$$

Integrando ambos os membros desta última equação, em relação à variável y e, utilizando a notação $M_y = \dfrac{\partial M}{\partial y}$ e $N_x = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mu'(y)}{\mu(y)}\mathrm{d}y &= \int \left(\frac{N_x - M_y}{M}\right)\mathrm{d}y \\
\ln \mu(y) &= \int \underbrace{\left(\frac{N_x - M_y}{M}\right)}_{\text{função só de } y!!!}\mathrm{d}y \\
\mu(y) &= \exp\left[\int \left(\frac{N_x - M_y}{M}\right)\mathrm{d}y\right].
\end{aligned}$$

De maneira análoga, se supusermos que $\mu(x,y) = \mu(x) > 0$ é função apenas da variável x, obteremos

$$\mu(x) = \exp\left[\int \underbrace{\left(\frac{M_y - N_x}{N}\right)}_{\text{função só de } x!!!}\mathrm{d}x\right].$$

Exemplo 15.2 Resolva a equação diferencial

$$(4x^2 + 3\cos y)\mathrm{d}x - (x \operatorname{sen} y)\mathrm{d}y = 0.$$

Resolução: Temos que $M(x,y) = 4x^2 + 3\cos y$ e $N(x,y) = -x \operatorname{sen} y$, logo

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -3\operatorname{sen} y \neq \frac{\partial N}{\partial x} = -\operatorname{sen} y.$$

Como $M_y \neq N_x$, a equação não é exata. Vamos verificar se é possível determinar um fator integrante para esta EDO,

$$\begin{aligned}
\frac{N_x - M_y}{M} &= \frac{-\operatorname{sen} y + 3\operatorname{sen} y}{4x^2 + 3\cos y} = \frac{2\operatorname{sen} y}{4x^2+3\cos y}, && \text{Não é função só de } y!! \\
\frac{M_y - N_x}{N} &= \frac{-3\operatorname{sen} y + \operatorname{sen} y}{-x\,\mathrm{sen}y} = \frac{-2\operatorname{sen} y}{-x\operatorname{sen} y} = \frac{2}{x}, && \text{É função só de } x!!
\end{aligned}$$

Então, o fator integrante é dado por

$$\mu(x) = \exp\left[\int \left(\frac{M_y - N_x}{N}\right) \mathrm{d}x\right] = \exp\left[\int \frac{2}{x}\mathrm{d}x\right] = \mathrm{e}^{2\ln|x|} = \mathrm{e}^{\ln|x|^2} = x^2.$$

Multiplicando a EDO por este fator integrante, $\mu(x)$, obtemos

$$\begin{aligned}
x^2(4x^2 + 3\cos y)\mathrm{d}x - x^2(x\operatorname{sen} y)\mathrm{d}y = 0 \\
\underbrace{\left(4x^4 + 3x^2\cos y\right)}_{\tilde{M}}\mathrm{d}x - \underbrace{\left(x^3\operatorname{sen} y\right)}_{\tilde{N}}\mathrm{d}y = 0
\end{aligned}$$

e, esta equação é exata, pois

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = -3x^2\operatorname{sen} y = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}.$$

Portanto, a solução para a equção diferencial é $F(x,y) = c$, satisfazendo $F_x = \tilde{M}$ e $F_y = \tilde{N}$. Consideremos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial y} &= -x^3\operatorname{sen} y = \tilde{N}(x,y) \\
\int \frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y &= -\int (x^3\operatorname{sen} y)\mathrm{d}y \\
F(x,y) &= x^3\cos y + f(x) \qquad .
\end{aligned}$$

Derivando $F(x,y)$ em relação à variável x e igualando a $\tilde{M}$, temos

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cancel{3x^2\cos y} + f'(x) = 4x^4 + \cancel{3x^2\cos y},$$

ou seja, $f'(x) = 4x^4$. Integrando $f'(x)$, obtemos

$$f(x) = \frac{4}{5}x^5 + c_1.$$

Finalmente, obtemos a solução da EDO,

$$F(x,y) = x^3\cos y + \frac{4}{5}x^5 = k,$$

onde $k = c - c_1$.

Exercícios

1. Resolva as seguintes equações diferenciais ordinárias:

(a) $(2x - y^2)\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y = 0, \quad x > 0,$

(b) $xy\,\mathrm{d}x + (2x^2 + 3y^2 - 20)\mathrm{d}y = 0,$

(c) $x - xy - y' = 0,$

(d) $(x^2 - \operatorname{sen}^2 y)\mathrm{d}x + x \operatorname{sen} 2y\,\mathrm{d}y = 0,$

(e) $y(2x - y + 2)\mathrm{d}x + 2(x - y)\mathrm{d}y = 0,$

(f) $(4xy + 3y^2 - x)\mathrm{d}x + x(x + 2y)\mathrm{d}y = 0,$

(g) $y\,\mathrm{d}x + x(y^2 + \ln x)\mathrm{d}y = 0,$

(h) $(2y^2 + 3x)\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y = 0,$

(i) $\cos x\,\mathrm{d}x + \left(1 + 2y^{-1}\right)\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}y = 0$

(j) $y(x + y + 1)\mathrm{d}x + (x + 2y)\mathrm{d}y = 0,$

(k) $6xy\,\mathrm{d}x + (4y + 9x^2)\mathrm{d}y = 0,$

(l) $(10 - 6y + \mathrm{e}^{-3x})\mathrm{d}x - 2\,\mathrm{d}y = 0,$

(m) $(y^2 + xy^3)\mathrm{d}x + (5y^2 - xy + y^3 \operatorname{sen} y)\mathrm{d}y = 0$

2. Resolva os seguintes PVIs:

(a) $\begin{cases} 1 + xy' = 0, \\ y(\mathrm{e}^4) = 0, \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y(1 + x) + 2xy' = 0, \\ y(4) = 6, \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x\,\mathrm{d}x + (x^2 y + 4y)\mathrm{d}y = 0, \\ y(4) = 0, \end{cases}$

(d) $\begin{cases} (x^2 + y^2 - 5)\mathrm{d}x = (y + xy)\mathrm{d}y, \\ y(0) = 1, \end{cases}$

3. Verifique que as equações diferenciais não são exatas. Multiplique, estas equações diferenciais dadas, pelo fator integrante $\mu(x,y)$ e verifique que a nova equação diferencial é exata. Resolva esta EDO:

   (a) $(-xy\,\mathrm{sen}\,x + 2y\cos x)\mathrm{d}x + 2x\cos x\,\mathrm{d}y = 0; \quad \mu(x,y) = xy,$

   (b) $(x^2 + 2xy - y^2)\mathrm{d}x + (y^2 + 2xy - x^2)\mathrm{d}y = 0; \quad \mu(x,y) = (x+y)^{-2}.$

4. Determine os valores das constantes r e s tal que $\mu(x,y) = x^r y^s$ é um fator integrante para a equação diferencial dada. Resolva a EDO exata.

   (a) $(y^{-1} - x^{-1})\mathrm{d}x + (xy^{-2} - 2y^{-1})\mathrm{d}y = 0;$

   (b) $2y(y + 2x^2)\mathrm{d}x + x(4y + 3x^2)\mathrm{d}y = 0,$

   (c) $y(5xy^2 + 4)\mathrm{d}x + x(xy^2 - 1)\mathrm{d}y = 0.$

5. Considere a seguinte equação diferencial

$$e^{x^3} + \mathrm{sen}\,y + \frac{x}{3}\cos y \cdot y' = 0.$$

   (a) Determine a solução geral.

   (b) Determine a solução que passa pelo ponto $(0,0)$.

6. Considere a seguinte equação diferencial

$$2x + \tan y + (x - x^2\tan y)y'.$$

   (a) Determine a solução geral.

   (b) Determine a solução que passa pelo ponto $(1,0)$.

Respostas:

1. (a) $y^2 - 4x = Cx^2,$

   (b) $\frac{1}{2}x^2y^4 + \frac{1}{2}y^6 - 5y^4 = C,$

   (c) $y(x) = 1 - C\mathrm{e}^{-x^2/2},$

   (d) $x + x^{-1}\,\mathrm{sen}^2 y = C,$

   (e) $y\mathrm{e}^x(2x - y) = C,,$

   (f) $4x^4y + 4x^3y^2 - x^4 = C,,$

   (g) $3y\ln x + y^3 = C,$

(h) $x^2y^2 + x^3 = C,$

(i) $\ln(\operatorname{sen} x) + y + \ln y^2 = C,$

(j) $xye^x + y^2e^x = C,$

(k) $3x^2y^3 + y^4 = C,$

(l) $-2ye^{3x} + \dfrac{10}{3}e^{3x} + x = C,$

(m) $\dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{2}x^2 + 5\ln|y| - \cos y = C.$

2. **(a)** $y(x) = 4 - \ln|x|,$

(b) $x^2(y^3 - 2) = -9,$

(c) $e^{y^2}(x^2 + 4) = 20,$

(d) $-\dfrac{y^2}{2(1+x)^2} + \dfrac{2}{(1+x)^2} + \dfrac{2}{1+x} + \ln|1+x| = \dfrac{7}{2}.$

3. **(a)** $x^2y^2\cos x = C,$

(b) $x^2 + y^2 = C(x+y).$

4. **(a)** $r = 2$ e $s = 4;\quad \dfrac{x^3}{3}y^3 - \dfrac{x^2}{2}y^4 = C,$

(b) $r = 1$ e $s = 2;\quad x^2y^4 + x^4y^3 = C,$

(c) $r = 3$ e $s = -2;\quad x^5y + x^4y^{-1} = C.$

5. **(a)** $\dfrac{x^3}{3}\operatorname{sen} y + \dfrac{1}{3}e^{x^3} = C,$

(b) $x^3\operatorname{sen} y + e^{x^3} = 1.$

6. **(a)** $x^2\cos y + x\operatorname{sen} y = C,$

(b) $x^2\cos y + x\operatorname{sen} y = 1.$

Aula 16: Equações diferenciais lineares e o fator integrante.

16.1 Equações diferenciais lineares

Uma equação diferencial ordinária, linear, de primeira ordem admite a seguinte forma

$$a(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + b(x)y = f(x), \qquad y = y(x) \tag{16.1}$$

onde a, b e f são funções de x. Se $a(x) \neq 0$, a Eq.(16.1) pode ser reescrita como

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x), \qquad \textbf{(forma padrão)} \tag{16.2}$$

onde $p(x) = \dfrac{b(x)}{a(x)}$ e $q(x) = \dfrac{f(x)}{a(x)}$ são, ambas, funções de x e contínuas.

Consideremos a EDO, linear de primeira ordem e homogênea, isto é,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = 0. \tag{16.3}$$

Queremos determinar solução(ões) não triviais para a EDO, dada pela Eq.(16.3). Podemos reescrevê-la da seguinte forma

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -p(x)\mathrm{d}x.$$

Integrando esta equação, obtemos

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int p(x)\mathrm{d}x \\ \ln|y| &= -\int p(x)\mathrm{d}x + C \\ y(x) &= C_1 \exp\left[-\int p(x)\mathrm{d}x\right], \end{aligned}$$

onde $C_1 = \mathrm{e}^C$. Podemos reescrever a solução da seguinte forma

$$C_1 = y \exp\left[\int p(x)\mathrm{d}x\right]$$

e, derivando em relação a x, temos

$$
\begin{gathered}
y' \exp\left[\int p(x)\mathrm{d}x\right] + y \cdot p(x) \exp\left[\int p(x)\mathrm{d}x\right] = 0 \\
\exp\left[\int p(x)\mathrm{d}x\right] [y' + p(x)\, y] = 0,
\end{gathered}
$$

isto é, o fator integrante da EDO linear e homogênea é

$$
\mu(x) = \exp\left[\int p(x)\mathrm{d}x\right]
$$

e também será para a EDO, linear e não homogênea

$$
\exp\left[\int p(x)\mathrm{d}x\right] [y' + p(x)y] = \exp\left[\int p(x)\mathrm{d}x\right] \cdot q(x).
$$

16.2 Exemplos

Exemplo 16.1 Resolva a equação diferencial

$$
y' + xy = 2x, \qquad y = y(x).
$$

Resolução: Neste caso, temos que $p(x) = x$ e $q(x) = 2x$. O fator integrante é

$$
\mu(x) = \exp\left[\int x\,\mathrm{d}x\right] = \mathrm{e}^{x^2/2}.
$$

Multiplicando a EDO por $\mu(x)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{x^2/2}[y' + xy] &= 2x\,\mathrm{e}^{x^2/2} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathrm{e}^{x^2/2}\,y] &= 2x\,\mathrm{e}^{x^2/2} \\
\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathrm{e}^{x^2/2}\,y]\mathrm{d}x &= 2\underbrace{\int x\,\mathrm{e}^{x^2/2}\mathrm{d}x}_{u=x^2/2,\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x} \\
\mathrm{e}^{x^2/2}\,y &= 2\int \mathrm{e}^{u}\mathrm{d}u \\
\mathrm{e}^{x^2/2}\,y &= 2\mathrm{e}^{x^2/2} + C,
\end{aligned}
$$

onde C é constante. A solução geral, na forma explícita, é dada por

$$
y(x) = 2 + C\,\mathrm{e}^{x^2/2}.
$$

Exemplo 16.2 Resolva o PVI

$$\begin{cases} xy' + 2y = 4x^2, \\ y(1) = 2, \quad x > 0. \end{cases}$$

Resolução: Devemos colocar a EDO na forma padrão, isto é,

$$y' + \frac{2}{x}y = 4x, \tag{16.4}$$

onde $p(x) = 2/x$. O fator integrante é

$$\mu(x) = \exp\left[\int \frac{2}{x}\mathrm{d}x\right] = \mathrm{e}^{2\ln x} = x^2.$$

Multiplicando a EDO (16.4) pelo fator integrante, podemos escrever

$$\begin{aligned} x^2\left[y' + \frac{2}{x}y\right] &= 4x^3 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^2y] &= 4x^3 \\ \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^2y]\mathrm{d}x &= 4\int x^3\mathrm{d}x \\ x^2y &= x^4 + C, \end{aligned}$$

onde C é constante, logo

$$y(x) = x^2 + Cx^{-2}.$$

Utilizando a condição inicial, $y(1) = 2$, temos

$$y(1) = 1^2 + C \cdot 1^{-2} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad C = 1.$$

Portanto, uma solução particular para a EDO é

$$y(x) = x^2 + x^{-2}, \qquad x > 0.$$

Exercícios

1. Resolva as seguintes equações diferenciais:

   (a) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{1}{x}y = \mathrm{e}^x, \quad x > 0,$

   (b) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2y = 2x^2\ln x, \quad x > 0,$

   (c) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 4\mathrm{e}^x,$

   (d) $x^2y' - 4xy = x^7\operatorname{sen} x, \quad x > 0,$

(e) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{2x}{1-x^2}y = 4x, \quad -1 < x < 1,$

(f) $2(\cos^2 x)y' + y \operatorname{sen} 2x = 4\cos^4 x, \quad 0 \leq x < \pi/2,$

(g) $y' - y\tan x = 8\operatorname{sen}^3 x,$

(h) $y' = \operatorname{sen} x(y\sec x - 2),$

(i) $y' - 2x^{-1}y = 2x^2 \ln x, \quad x > 0,$

(j) $y' + mx^{-1}y = \ln x$, onde m é constante e $x > 0$,

(k) $(\cos^2 x)\operatorname{sen} x \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (\cos^3 x)y = 1,$

(l) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + xy = x^3.$

2. Resolva os seguintes PVIs:

(a) $\begin{cases} (\operatorname{sen} x)y' - y\cos x = \operatorname{sen} 2x, \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2, \end{cases}$

(b) $\begin{cases} (y - \mathrm{e}^x)\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$

(c) $\begin{cases} ty' = 2y + 4t^3\cos 4t, \quad t > 0, \\ y\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 0, \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x^2y' + y = x^2\mathrm{e}^{1/x}, \quad x > 0, \\ y(1) = 3\mathrm{e}, \end{cases}$

(e) $\begin{cases} y' + (\cos x)y = 2x\mathrm{e}^{-\operatorname{sen} x}, \\ y(\pi) = 0, \end{cases}$

3. Determine todas as soluções, $y(t)$, para a EDO

$$ty' + n\,y = t^2, \qquad t > 0$$

com n um inteiro positivo.

4. A corrente $I(t)$ em um circuito elétrico com indutância L e resistência R é dada pela equação diferencial

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI = E(t),$$

onde $E(t)$ é a tensão aplicada. Suponha que $L \neq 0$ e R são constantes, $I(0) = 0$ e que $E(t)$ seja dada por $E(t) = \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) E_0 \operatorname{sen}(\omega t)$, sendo E_0 e $\omega \neq 0$ também constantes. Determine $I(t)$.

Respostas:

1. **(a)** $y(x) = x^{-1}[\mathrm{e}^x(x-1) + C]$,

(b) $y(x) = x^2[(\ln x)^2 + C]$,

(c) $y(x) = 2\mathrm{e}^x + C\mathrm{e}^{-x}$,

(d) $y(x) = x^4(\operatorname{sen} x - x\cos x + C)$,

(e) $y(x) = (1-x^2)[-\ln(1-x^2)^2 + C]$,

(f) $y(x) = \operatorname{sen} 2x + C\cos x$,

(g) $y(x) = \dfrac{1}{\cos x}(2\operatorname{sen}^4 x + C)$,

(h) $y(x) = \dfrac{1}{\cos x}\left(\dfrac{1}{2}\cos 2x + C\right)$,

(i) $y(x) = 2x^3(\ln x - 1) + Cx^2$,

(j) $y(x) = \dfrac{x}{m+1}\ln x - \dfrac{x}{(m+1)^2} + \dfrac{C}{x^m}$,

(k) $y(x) = \sec x + C\operatorname{cosec} x, \quad 0 < x < \pi/2$,

(l) $y(x) = x^2 - 2 + C\mathrm{e}^{-x^2/2}$.

2. **(a)** $y(x) = 2\operatorname{sen} x[\ln(\operatorname{sen} x) + 1]$,

(b) $y(x) = \cosh x$,

(c) $y(t) = t^2\operatorname{sen}(4t) - t^2$,

(d) $y(x) = (x+2)\mathrm{e}^{1/x}$,

(e) $y(x) = (x^2 - \pi^2)\mathrm{e}^{-\operatorname{sen} x}$.

3. $y(t) = \dfrac{t^2}{n+2} + Ct^{-n}$.

4. $I(t) = \dfrac{E_0}{\omega L}\exp\left(-\dfrac{R}{L}t\right)[1 - \cos\omega t]$, onde $\exp = \mathrm{e}$.

Aula 17: Equação de Bernoulli. Teorema de existência e unicidade.

17.1 Redução à forma linear. Equação de Bernoulli.

Considere a equação diferencial de Bernoulli, com $y = y(x)$,

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \qquad \alpha \text{ é um número real.} \tag{17.1}$$

Se $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$, a EDO é linear, caso contrário ela é não linear. Porém, é possível tornar a EDO (17.1) em uma EDO linear, através da mudança de variável $u(x) = y^{1-\alpha}$, isto é,

$$\begin{aligned}
y' + p(x)y &= q(x)y^{\alpha}, && (\div\ y^{\alpha}) \\
y^{-\alpha}y' + y^{-\alpha}p(x)y &= q(x) \\
y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} &= q(x) && \times (1-\alpha) \\
(1-\alpha)y^{-\alpha}y' + (1-\alpha)p(x)y^{1-\alpha} &= (1-\alpha)q(x) && u = y^{1-\alpha} \Rightarrow u' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' \\
u' + (1-\alpha)p(x)u &= (1-\alpha)q(x). && (17.2)
\end{aligned}$$

Resolvendo a EDO (17.2) (linear) e depois admitindo $u = y^{1-\alpha}$, obtemos a solução para a equação diferencial de Bernoulli (17.1).

17.2 Exemplo

Exemplo 17.1 Resolva a EDO

$$x^2y' + 2xy = y^3, \qquad x > 0.$$

Resolução: A equação diferencial é do tipo Bernoulli, com $\alpha = 3$. Admitindo $u = y^{1-\alpha} = y^{-2} \Rightarrow u' = -2y^{-3}y'$, obtemos

$$\begin{aligned}
y' + \frac{2}{x}y &= \frac{1}{x^2}y^3 \\
y^{-3}y' + \frac{2}{x}y^{-2} &= \frac{1}{x^2} \\
-2y^{-3}y' - \frac{4}{x}y^{-2} &= -\frac{2}{x^2} \\
u' - \frac{4}{x}u &= -\frac{2}{x^2}.
\end{aligned}$$

O fator integrante desta EDO linear é

$$\mu(x) = \exp\left[-4\int \frac{\mathrm{d}x}{x}\right] = \mathrm{e}^{-4\ln x} = x^{-4},$$

logo

$$\begin{aligned}
x^{-4}u' - 4x^{-5}u &= -2x^{-6}\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-4}u] &= -2x^{-6}\\
\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-4}u]\mathrm{d}x &= -2\int x^{-6}\mathrm{d}x\\
x^{-4}u &= \frac{2}{5}x^{-5} + C\\
u(x) &= \frac{2}{5}x^{-1} + Cx^4,
\end{aligned}$$

onde C é uma constante de integração. Sendo $u = y^{-2}$, segue que

$$\begin{aligned}
y^{-2} &= \frac{2}{5x} + Cx^4\\
y^2 &= \frac{5x}{2+5Cx^5},
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{5x}{2+5Cx^5}}.$$

17.3 Teorema de Existência e Unicidade (TEU)

Teorema 17.1. (Teorema de Existência e Unicidade)

Considere o seguinte PVI

$$\begin{cases} y'(x) = f(x,y),\\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

onde $x \in \mathbb{R}$ e y_0 uma constante real. Dado o retângulo

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \le x \le b, c \le y \le d\}$$

com $(x_0, y_0) \in R$.

1. *Se $f(x,y)$ é contínua em R, então existe solução, $y(x)$, em um intervalo J contendo x_0.*
2. *Se $\dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ é contínua em R, então a solução $y(x)$ é única.*

♡

17.4 Exemplos

Exemplo 17.2 Determine uma região do plano xy onde as hipóteses do TEU são satisfeitas

$$(4 - x^2)y' + 2xy = 3x^2.$$

Resolução: A EDO pode ser reescrita da seguinte forma

$$y' = \underbrace{\frac{3x^2}{4 - x^2} - \frac{2x}{4 - x^2}y}_{f(x,y)}.$$

$f(x, y)$ é contínua quando $4 - x^2 \neq 0$, ou seja, quando $x \neq \pm 2$ e

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = -\frac{2x}{4 - x^2}$$

também será contínua se $x \neq \pm 2$.
Assim, uma região do plano xy onde certamente existe solução única é $x > 2$.

Exemplo 17.3 Determine (sem resolver) um intervalo no qual **existe** solução para o seguinte PVI

$$\begin{cases} x(x-4)y' + y = 0, \\ y(2) = 1. \end{cases}$$

Resolução: O TEU garante solução para o PVI, contendo $x_0 = 2$ se $f(x, y)$ é contínua. Neste caso,

$$f(x, y) = -\frac{y}{x(x-4)}$$

é contínua se $x \neq 0$ e $x \neq 4$. Os possíveis intervalos para a existência de solução são: $(-\infty, 0)$, $(0, 4)$ e $(4, \infty)$. Porém, faz-se necessário que $x_0 = 2$ esteja contido neste intervalo. Tal intervalo é $(0, 4)$.

Exemplo 17.4 Determine (sem resolver) um intervalo no qual, certamente, existe solução para o seguinte PVI

$$\begin{cases} (x^2 + 4x - 5)y' + [\tan(2x)]y = x^2 - 16, \\ y(\pi) = 7. \end{cases}$$

Resolução: A função $f(x, y)$, neste caso, é

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 16}{(x-1)(x+5)} - \left[\frac{\tan(2x)}{(x-1)(x+5)}\right] y$$

é contínua se $x \neq -5$, $x \neq 1$ e $x \neq (2k-1)\frac{\pi}{4}$ com $k \in \mathbb{Z}$ (inteiro). Assim, temos infinitos intervalos, alguns deles são:

$$\ldots, \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right), \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right), \ldots$$

Porém o intervalo contendo $x_0 = \pi$ que garante a existência de solução é $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$.

Exercícios

1. Resolva as seguintes equações difrenciais de Bernoulli:

(a) $y' + \dfrac{1}{x}y = 3x^2y^3, \quad x > 0,$

(b) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{3}{x}y = 27y^{1/3}\ln x, \quad x > 0,$

(c) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{1}{2}(\tan x)y = 2y^3 \operatorname{sen} x,$

(d) $y' + 2x^{-1}y = 6\sqrt{1+x^2}\sqrt{y}, \quad x > 0,$

(e) $2x(y' + y^3x^2) + y = 0,$

(f) $y' + 6x^{-1}y = 3x^{-1}y^{2/3}\cos x, \quad x > 0,$

(g) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \dfrac{1}{2x\ln x}y = 2xy^3, \quad x > 0,$

(h) $(1-\sqrt{3})y' + y\sec x = y^{\sqrt{3}}\sec x,$

(i) $(1+x)(y' + y^2) - y = 0,$

(j) $y' - 4y = 2\mathrm{e}^x\sqrt{y},$

(k) $ty' = 3y + t^5y^{1/3}, \quad t > 0,$

2. Resolva os seguintes PVIs:

(a) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{2x}{1+x^2}y = xy^2, \\ y(0) = 1, \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2xy = 3y^4, \\ y(1) = 1/2, \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y^{1/2}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y^{3/2} = 1, \\ y(0) = 4. \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2xyy' = y^2 - 2x^3, \\ y(1) = 2, \end{cases}$

3. Dada a equação diferencial ordinária

$$y' + xy = xy^2, \quad \text{onde} \quad y = y(x).$$

(a) Classifique a equação diferencial quanto a ordem e a linearidade;

(b) Determine a solução geral;

(c) Encontre a solução para o equação diferencial dada sujeita à condição inicial, $y(0) = 1/2$.

4. Determine (sem resolver o problema) o maior intervalo, contendo x_0, no qual a solução da equação diferencial certamente existe.

(a) $(x^2 - 1)y' + (x - 1)y = x^3 + x^2 - x - 1; \quad x_0 = -1/2,$

(b) $(x^3 - 5x^2 + 6x)y' - xy = \operatorname{sen} x; \quad x_0 = 5/2,$

(c) $x(2 + x)y' + 2(1 + x)y = 1 + 3x^2; \quad x_0 = -1/2,$

(d) $(\operatorname{sen} x)y' + y = \cos x, \quad x_0 = 3\pi/2,$

5. Determine a região do plano xy onde as hipóteses do Teorema de Existência e Unicidade são satisfeitas:

(a) $y' = \dfrac{\ln|xy|}{1 - x^2 + y^2},$

(b) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{(\cot x)y}{1 + y},$

(c) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{xy},$

(d) $(4 - y^2)y' = x^2,$

(e) $(1 + y^3)y' = x^2,$

(f) $(y - x)y' = y + x.$

6. Considere o seguinte PVI, composto pela EDO **separável** e uma condição inicial:

$$\begin{cases} y' = 2(1 + x)(1 + y^2), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

(a) Obtenha a solução explícita para o PVI.

(b) Determine o maior intervalo para o qual a solução encontrada é válida.

Respostas:

1. (a) $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{Cx^2 - 6x^3}}$,

   (b) $y^{2/3} = 2x(3\ln x - 1) + Cx^{-2}$,

   (c) $y^{-2} = 2\cos x + \dfrac{C}{\cos x}$,

   (d) $y^{1/2} = x^{-1}(1 + x^2)^{3/2} + Cx^{-1}$,

   (e) $y^{-2} = x^3 + Cx$,

   (f) $y^{1/3} = \dfrac{\cos x + x\,\mathrm{sen}\,x + C}{x^2}$,

   (g) $y^2 = \dfrac{\ln x}{x^2(1 - 2\ln x) + C}$,

   (h) $y^{1-\sqrt{3}} = 1 + \dfrac{C}{|\tan x + \sec x|}$,

   (i) $y^{-1} = \dfrac{1}{1+x}\left(\dfrac{x^2}{2} + x + C\right)$,

   (j) $y(x) = \mathrm{e}^{2x}(C\mathrm{e}^x - 1)^2$,

   (k) $y(x) = \dfrac{1}{27}(Cx^2 + 2x^5)^{3/2}$.

2. (a) $y(x) = \dfrac{2}{(1 + x^2)[2 - \ln(1 + x^2)]}$,

   (b) $y^{-3} = -\dfrac{9}{5}x^{-1} + \dfrac{49}{5}x^{-6}$

   (c) $y^{3/2} = 1 + 7\mathrm{e}^{-3x/2}$

   (d) $y(x) = \sqrt{-x(x^2 - 5)}$.

3. (a) Primeira ordem e não linear;

   (b) $y(x) = \dfrac{1}{1 + C\mathrm{e}^{x^2/2}}$;

   (c) $y(x) = \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^{x^2/2}}$;

4. (a) $-1 < x < \infty$,

   (b) $2 < x < 3$,

   (c) $-2 < x < 0$,

   (d) $\pi < x < 2\pi$.

5. **(a)** $1 - x^2 + y^2 > 0$ ou $1 - x^2 + y^2 < 0$, $x \neq 0$, $y \neq 0$,

(b) $x \neq k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ e $y \neq -1$,

(c) $x > 0$ e $y > 0$ ou $x < 0$ e $y < 0$,

(d) $y < -2, -2 < y < 2$ ou $y > 2$,

(e) $y \neq -1$,

(f) $y < x$ ou $y > x$.

6. **(a)** $y(x) = \tan(x^2 + 2x)$,

(b) $-1 - \sqrt{1 + \frac{\pi}{2}} < x < -1 + \sqrt{1 + \frac{\pi}{2}}$.

Aula 18: Equações diferenciais de segunda ordem lineares.

18.1 Forma geral de EDO de segunda ordem linear

A forma mais geral de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem linear é

$$A(x)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + B(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + C(x)y = F(x), \qquad y = y(x),$$

com $A(x), B(x), C(x)$ e $F(x)$ funções reais, sendo $A(x) \neq 0$. Assim, podemos reescrever a EDO da seguinte forma

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + q(x)y = f(x), \qquad \textbf{(forma padrão)}$$

onde $p(x) = B(x)/A(x)$, $q(x) = C(x)/A(x)$ e $f(x) = F(x)/A(x)$. Se $f(x) \neq 0$, dizemos que a equação diferencial é **não homogênea**. Por outro lado, se $f(x) = 0$ dizemos que a equação diferencial é **homogênea**.

18.2 Problema de Valor Inicial

Um PVI é composto por uma EDO de segunda ordem, linear e não homogênea e duas condições, uma dada na função e outra na derivada, no mesmo ponto. Sejam $p(x), q(x)$ e $f(x)$ três funções dadas, admitidas definidas e contínuas no intervalo aberto $I = (a, b)$. O PVI é dado por

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \\ y(x_0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(x_0) = y_1, \end{cases}$$

com $x_0 \in I$, y_0 e y_1 dois números reais arbitrários. As condições $y(x_0) = y_0$ e $y(x_0) = y_1$ são chamadas de **condições iniciais**.

18.3 Existência e unicidade

Sejam $p(x), q(x)$ e $f(x)$ funções contínuas em um intervalo $I = (a, b)$, para todo x neste intervalo. Se $x = x_0$ é um ponto deste intervalo, então existe uma única solução para o PVI:

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \\ y(x_0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(x_0) = y_1, \end{cases}$$

no intervalo I, com y_0 e y_1 constantes quaisquer.

Exemplo 18.1 Sem resolver o PVI, determine o maior intervalo no qual existe solução única

$$\begin{cases} (x+10)y'' - (5-x)y' + \ln|x|y = \mathrm{e}^{2x}\cos x, \\ y(-9) = 3 \quad \text{e} \quad y'(-9) = -2. \end{cases}$$

Resolução: Devemos colocar a equação diferencial na forma padrão, isto é,

$$y'' - \frac{(5-x)}{x+10}y' + \frac{\ln|x|}{x+10}y = \frac{\mathrm{e}^{2x}\cos x}{x+10},$$

onde identificamos $p(x) = -\dfrac{(5-x)}{x+10}$, $q(x) = \dfrac{\ln|x|}{x+10}$ e $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}\cos x}{x+10}$. As funções $p(x)$ e $f(x)$ são contínuas se $x \neq -10$, porém a função $q(x)$ é contínua se $x \neq -10$ e $x \neq 0$. Assim, os possíveis intervalos onde existe uma única solução são: $(-\infty, -10), (-10, 0)$ e $(0, \infty)$. É necessário que o intervalo, onde existe a solução única, contenha o ponto $x_0 = -9$. Portanto, tal intervalo é $(-10, 0)$.

18.4 Problema de Valor de Contorno (PVC)

Um PVC é composto por uma EDO de segunda ordem, linear e não homogênea e duas condições, em dois pontos distintos, isto é,

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \\ y(x_0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(x_1) = y_1, \end{cases}$$

com $x_0, x_1 \in I$, y_0 e y_1 dois números reais arbitrários. As condições $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$ são chamadas de **condições de contorno**.

18.5 Solução

Exemplo 18.2 Verifique que $y_1(x) = c_1\mathrm{e}^{x}$ e $y_2(x) = c_2\mathrm{e}^{-x}$ são soluções da equação diferencial $y'' - y = 0$, onde c_1 e c_2 são constantes quaisquer.

Resolução: Temos que,

$$y_1(x) = c_1\mathrm{e}^{x}, \qquad y_1'(x) = c_1\mathrm{e}^{x} \qquad \text{e} \qquad y_1''(x) = c_1\mathrm{e}^{x},$$

então

$$y_1'' - y_1 = c_1 e^x - c_1 e^x = 0. \quad \checkmark$$

Temos, também, que

$$y_2(x) = c_2 e^{-x}, \qquad y_2'(x) = -c_2 e^{-x} \qquad \text{e} \qquad y_2''(x) = c_2 e^{-x},$$

então

$$y_2'' - y_2 = c_2 e^{-x} - c_2 e^{-x} = 0. \quad \checkmark$$

Exemplo 18.3 Verifique que $y_1(x) = c_1 \cos x$ e $y_2(x) = c_2 \operatorname{sen} x$ são soluções da equação diferencial $y'' + y = 0$, onde c_1 e c_2 são constantes quaisquer.

Resolução: Temos que,

$$y_1(x) = c_1 \cos x, \qquad y_1'(x) = -c_1 \operatorname{sen} x \qquad \text{e} \qquad y_1''(x) = -c_1 \cos x,$$

então

$$y_1'' + y_1 = -c_1 \cos x + c_1 \cos x = 0. \quad \checkmark$$

Temos, também, que

$$y_2(x) = c_2 \operatorname{sen} x, \qquad y_2'(x) = c_2 \cos x \qquad \text{e} \qquad y_2''(x) = -c_2 \operatorname{sen} x,$$

então

$$y_2'' + y_2 = -c_2 \operatorname{sen} x + c_2 \operatorname{sen} x = 0. \quad \checkmark$$

Teorema 18.1. (Princípio da Superposição)

Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, então a combinação linear $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, com c_1 e c_2 constantes arbitrárias, também é solução de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, onde $p(x)$ e $q(x)$ são funções contínuas em $I = (a, b)$. ♡

Demonstração Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da equação diferencial $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, então $y_1(x)$ e $y_2(x)$ satisfazem, respectivamente,

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0 \qquad \text{e} \qquad y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0.$$

Para mostrar que $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ também é solução da equação diferencial devemos derivar $y(x)$ e substituir na equação diferencial, isto é,

$$\begin{aligned} y'' + p(x)y' + q(x)y &= (c_1y_1'' + c_2y_2'') + p(x)(c_1y_1' + c_2y_2') + q(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1 \underbrace{(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1)}_{=0} + c_2 \underbrace{(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2)}_{0} = 0. \quad \checkmark \end{aligned}$$

✍ **Exercício 1.** Mostre que $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$ é solução de $y'' + y = 0$, com c_1 e c_2 constantes arbitrárias.

18.6 Dependência e independência linear

Duas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$, da EDO $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, no intervalo I são ditas **linearmente dependentes**, se existirem constantes c_1 e c_2, não simultaneamente nulas, tais que

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0, \quad \text{para} x \in I.$$

Caso contrário, se a equação anterior só for válida para todo $x \in I$ e as constantes c_1 e c_2 forem ambas nulas, dizemos que as soluções são **linearmente independentes**.

18.7 Wronskiano

Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$, duas soluções da equação diferencial $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. O **Wronskiano**, denotado por $W[y_1(x), y_2(x)]$, destas duas soluções, é dado por

$$W[y_1(x), y_2(x)] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Teorema 18.2

Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$, funções deriváveis no intervalo aberto $I = (a, b)$, duas soluções de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.

- *$y_1(x)$ e $y_2(x)$ são linearmente independentes se, e somente se, $W[y_1(x), y_2(x)] \neq 0$;*
- *$y_1(x)$ e $y_2(x)$ são linearmente dependentes se, e somente se, $W[y_1(x), y_2(x)] = 0$.*

♡

Exemplo 18.4 Mostre que as soluções $y_1 = c_1 \mathrm{e}^x$ e $y_2 = c_2 \mathrm{e}^{-x}$ da EDO, $y'' - y = 0$ são linearmente independentes.

Resolução: Calculemos o Wronskiano das duas soluções y_1 e y_2, isto é,

$$W[c_1 \mathrm{e}^x, c_2 \mathrm{e}^{-x}] = \begin{vmatrix} c_1 \mathrm{e}^x & c_2 \mathrm{e}^{-x} \\ c_1 \mathrm{e}^x & -c_2 \mathrm{e}^{-x} \end{vmatrix} = -2c_1 c_2$$

e, como c_1 e c_2 não são nulas, as soluções são linearmente independentes.

18.8 Conjunto fundamental de soluções

Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções da EDO, $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Se estas duas soluções são linearmente independentes, temos um **conjunto fundamental de soluções**. A expressão

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

com c_1 e c_2 constantes arbitrárias, denomina-se **solução geral** da equação diferencial homogênea.

Exercícios

1. Determine, sem resolver, o maior intervalo no qual existe solução para os seguintes PVIs:

(a) $\begin{cases} (x-2)y'' + 3y = x, \\ y(0) = 0 \quad \text{e} \quad y'(0) = 1, \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y'' + (\tan x)y = \mathrm{e}^x, \\ y(0) = 1 \quad \text{e} \quad y'(0) = 0. \end{cases}$

2. Nos problemas a seguir, $y(x)$ é uma família de soluções para a equação diferencial dada no intervalo $(-\infty, \infty)$. Determine se pode ser encontrado um membro da família que satisfaça as condições de contorno.

(a) $y(x) = c_1\mathrm{e}^x \cos x + c_2\mathrm{e}^x\,\mathrm{sen}x; \quad y'' - 2y' + 2y = 0.$

(i) $y(0) = 1,\ y'(\pi) = 0,$

(ii) $y(0) = 1,\ y(\pi) = -1,$

(iii) $y(0) = 1,\ y(\pi/2) = 1,$

(iv) $y(0) = 0,\ y(\pi) = 0,$

(b) $y(x) = c_1x^2 + c_2x^4 + 3; \quad x^2y'' - 5xy' + 8y = 24.$

(i) $y(-1) = 0,\ y(1) = 4,$

(ii) $y(0) = 1,\ y(1) = 2,$

(iii) $y(0) = 3,\ y(1) = 0,$

(iv) $y(1) = 3,\ y(2) = 15.$

3. Determine se as funções dadas são linearmente independentes ou linearmente dependentes no intervalo $(-\infty, \infty)$:

(a) $f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2,\ f_3(x) = 4x - 3x^2,$

(b) $f_1(x) = 0,\ f_2(x) = x,\ f_3(x) = \mathrm{e}^x,$

(c) $f_1(x) = 5,\ f_2(x) = \cos^2 x,\ f_3(x) = \mathrm{sen}^2 x,$

(d) $f_1(x) = \cos 2x,\ f_2(x) = 1,\ f_3(x) = \cos^2 x,$

(e) $f_1(x) = x,\ f_2(x) = x - 1,\ f_3(x) = x + 3,$

(f) $f_1(x) = 1 + x,\ f_2(x) = x,\ f_3(x) = x^2,$

(g) $f_1(x) = \mathrm{e}^x,\ f_2(x) = \mathrm{e}^{-x},\ f_3(x) = \operatorname{senh} x.$

4. Mostre que as funções dadas formam um conjunto fundamental de soluções para as equações diferenciais dadas, nos intervalos indicados. Escreva a solução geral para cada EDO:

(a) $y'' - y' - 12y = 0; \quad \mathrm{e}^{-3x},\ \mathrm{e}^{4x},\ (-\infty, \infty),$

(b) $y'' - 4y = 0; \quad \cosh 2x,\ \operatorname{senh} 2x\ (-\infty, \infty)$

(c) $y'' - 2y' + 5y = 0; \quad \mathrm{e}^x \cos 2x,\ \mathrm{e}^x \operatorname{sen} 2x,\ (-\infty, \infty),$

(d) $4y'' - 4y' + y = 0; \quad \mathrm{e}^{x/2},\ x\mathrm{e}^{x/2},\ (-\infty, \infty),$

(e) $x^2y'' - 6xy' + 12y = 0; \quad x^3,\ x^4,\ (0, \infty),$

(f) $x^2y'' + xy' + y = 0; \quad \cos(\ln x),\ \operatorname{sen}(\ln x),\ (0, \infty),$

(g) $x^3y''' + 6x^2y'' + 4xy' - 4y = 0; \quad x,\ x^{-2},\ x^{-2}\ln x,\ (0, \infty),$

(h) $y^{(4)} + y'' = 0; \quad 1,\ x,\ \cos x,\ \operatorname{sen} x,\ (-\infty, \infty).$

5. Se o Wronskiano de f e g é $3\mathrm{e}^{4x}$ e, se $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$, determine $g(x)$.

6. Verifique que a família de funções é a solução geral da respectiva equação diferencial não homogênea dada, no intervalo indicado:

(a) $y'' - 7y' + 10y = 24\mathrm{e}^x; \quad y = c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2\mathrm{e}^{5x} + 6\mathrm{e}^x, \quad (-\infty, \infty),$

(b) $y'' + y = \sec x; \quad y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x \operatorname{sen} x + (\cos x)\ln(\cos x), \quad (-\pi/2, \pi/2),$

(c) $y'' - 4y' + 4y = 2\mathrm{e}^{2x} + 4x - 12; \quad y = c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2x\mathrm{e}^{2x} + x^2\mathrm{e}^{2x} + x - 2, \quad (-\infty, \infty)$

(d) $2x^2y'' + 5xy' + y = x^2 - x; \quad y = c_1x^{-1/2} + c_2x^{-1} + \dfrac{1}{15}x^2 - \dfrac{1}{6}x, \quad (0, \infty).$

Respostas:

1. **(a)** $-\infty < x < 2,$

(b) $-\pi/2 < x < \pi/2.$

2. **(a)** (i) $c_1 = 1$ e $c_2 = -1; \quad y = \mathrm{e}^x \cos x - \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x,$

(ii) Não é possível,

(iii) $c_1 = 1$ e $c_2 = \mathrm{e}^{-\pi/2}; \quad y = \mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^{-(\pi/2 - x)} \operatorname{sen} x,$

(iv) $c_1 = 0$ e c_2 arbitrário; $\quad y = c_2\mathrm{e}^x \operatorname{sen} x,$

(b) (i) Não é possível,

(ii) Não é possível,

(iii) c_1 arbitrário e $c_2 = -3 - c_1; \quad y = c_1x^2 - (c_1 + 3)x^4 + 3,$

(iv) $c_1 = -1 \quad \text{e} \quad c_2 = 1; \quad y = -x^2 + x^4 + 3.$

(a) Linearmente dependentes,

(b) Linearmente dependentes,

(c) Linearmente dependentes,

(d) Linearmente dependentes,

(e) Linearmente dependentes,

(f) Linearmente independentes,

(g) Linearmente dependentes.

3. **(a)** $W = 7\mathrm{e}^x \neq 0, \quad y = c_1\mathrm{e}^{-3x} + c_2\mathrm{e}^{4x},$

(b) $W = 2 \neq 0, \quad y = c_1 \cosh 2x + c_2 \operatorname{senh} 2x,$

(c) $W = 2\mathrm{e}^x \neq 0, \quad y = c_1\mathrm{e}^x \cos 2x + c_2\mathrm{e}^x \operatorname{sen} 2x,$

(d) $W = \mathrm{e}^x \neq 0, \quad y = c_1\mathrm{e}^{x/2} + c_2 x\mathrm{e}^{x/2},$

(e) $W = x^6 \neq 0, \quad y = c_1x^3 + c_2x^4,$

(f) $W = x^{-1} \neq 0, \quad y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \operatorname{sen}(\ln x),$

(g) $W = 9x^{-6} \neq 0, \quad y = c_1x + c_2x^{-2} + c_3x^{-2}\ln x,$

(h) $W = 1 \neq 0, \quad y = c_1 + c_2x + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x.$

4. $g(x) = (3x + c)\mathrm{e}^{2x}$, onde c é uma constante arbitrária.

Aula 19: Equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, lineares, homogêneas com coeficientes constantes.

19.1 Caso geral e exemplos

Considere a EDO de segunda ordem, linear e homogênea

$$y'' + ay' + by = 0, \qquad y = y(x),$$

onde a e b são constantes reais. Queremos determinar a solução geral para esta equação.

Já observamos que:

- e^{cx} é uma solução da equação diferencial de primeira ordem, $y' = cy$;
- A função exponencial possui a propriedade de suas derivadas serem múltiplas dela mesma.

Isto sugere tentar $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ como possível solução para $y'' + ay' + by = 0$ para um valor apropriado de λ. Vamos calcular as derivadas de y e substituir na EDO, isto é,

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)\mathrm{e}^{\lambda x} = 0. \tag{19.1}$$

Como $\mathrm{e}^{\lambda x} \neq 0$, para que a Eq.(19.1) tenha solução, devemos ter

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

$p(\lambda)$ é chamado **polinômio característico** e $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ é chamada **equação característica** de $y'' + ay' + b = 0$. Sabemos que o polinômio $p(\lambda)$ tem duas raízes, isto é,

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Devemos analisar três casos:

1. Quando $a^2 - 4b > 0$. Neste caso, λ_1 e λ_2 são raízes reais e distintas. Assim, a solução geral é

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}.$$

Exemplo 19.1 Encontre a solução geral para a equação diferencial, $y'' - y = 0$.

Resolução: Supondo $y = e^{\lambda x}$, temos

$$(\lambda^2 - 1)e^{\lambda x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda^2 - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \pm 1.$$

Portanto, a solução geral é

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}.$$

2. Quando $a^2 - 4b < 0$. Neste caso, λ_1 e λ_2 são raízes complexas conjugadas. Supomos

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta,$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. A solução geral da EDO é

$$y(x) = a_1 e^{(\alpha - i\beta)x} + a_2 e^{(\alpha + i\beta)x},$$

onde a_1 e a_2 são constantes reais arbitrárias. Sabendo que

$$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\,\mathrm{sen}\theta,$$

vale para todo θ real, tem-se

$$\begin{aligned} y(x) &= a_1 e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\,\mathrm{sen}\beta x) + a_2 e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\,\mathrm{sen}\beta x) \\ &= e^{\alpha x}[(a_1 + a_2)\cos\beta x + i(a_1 - a_2)\,\mathrm{sen}\beta x] \\ &= e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2\,\mathrm{sen}\beta x), \end{aligned}$$

onde $c_1 = (a_1 + a_2)$ e $c_2 = i(a_1 - a_2)$.

Exemplo 19.2 Resolva a equação diferencial $y'' + y = 0$.

Resolução: Supomos que $y = e^{\lambda x}$, então

$$(\lambda^2 + 1)e^{\lambda x} = 0.$$

Como $e^{\lambda x} \neq 0$, devemos ter $\lambda^2 + 1 = 0$, ou seja, $\lambda = \pm i$. A solução geral é

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2\,\mathrm{sen}x.$$

3. Quando $a^2 - 4b = 0$. Neste caso, as raízes são repetidas, assim $\lambda_1 = \lambda_2$. Uma das soluções é $e^{\lambda x}$, com $\lambda = -a/2$. Para determinar a outra solução, vamos utilizar o método de redução de ordem, ou seja,

$$y_2 = u y_1 = u e^{-(a/2)x}.$$

Temos que,

$$y_2 = \mathrm{e}^{-(a/2)x} \int \frac{\mathrm{e}^{-a\int \mathrm{d}x}}{[\mathrm{e}^{-(a/2)x}]^2}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-(a/2)x} \int \frac{\mathrm{e}^{-ax}}{\mathrm{e}^{-ax}}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-(a/2)x} \int \mathrm{d}x = x\mathrm{e}^{-(a/2)x}.$$

Portanto, a solução geral é dada por

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{\lambda x} + c_2 x\mathrm{e}^{\lambda x}.$$

Exemplo 19.3 Resolva a equação diferencial $y'' - 2y' + y = 0$.

Resolução: Suponha que $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$, então

$$(\lambda^2 - 2\lambda + 1)\mathrm{e}^{\lambda x} = 0.$$

Devemos ter $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, ou seja, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Portanto,

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{x} + c_2 x\mathrm{e}^{x}.$$

Importante: *A equação diferencial de ordem n, linear, homogênea, com coeficientes constantes*

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

com $a_n \neq 0$ admite as seguintes soluções:

- *Raízes reais e distintas:*

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n\mathrm{e}^{\lambda_n x}.$$

- *Raízes reais iguais:*

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2 x\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_3 x^2\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + \cdots + c_n x^{n-1}\mathrm{e}^{\lambda_1 x}.$$

- *Raízes complexas de multiplicidade k:*

$$\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x), x\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x), x^2\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x), \ldots$$
$$\mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{sen}(\beta x), x\mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{sen}(\beta x), x^2\mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{sen}(\beta x), \ldots$$

Exercícios

1. Determine a solução geral para as seguintes equações diferenciais:

(a) $4y'' + y' = 0$,

(b) $y'' - y' - 6y = 0$,

(c) $y'' + 8y' + 16y = 0$,

(d) $12y'' - 5y' - 2y = 0$,

(e) $y'' + 9y = 0$,

(f) $3y'' + y = 0$,

(g) $y'' - 4y' + 5y = 0$,

(h) $y'' - 10y' + 25y = 0$,

(i) $y'' - 6y' + 9y = 0$,

(j) $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 0$,

(k) $y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0$,

(l) $y''' + 3y'' + 3y' - 7y = 0$,

(m) $y''' - 4y'' - 5y' = 0$,

(n) $y''' + y'' - 2y = 0$,

(o) $y^{(4)} + y''' + y'' = 0$,

(p) $2y^{(5)} - 7y^{(4)} + 12y''' + 8y'' = 0$.

2. Determine a solução para os seguintes problemas de valor inicial:

(a) $y'' - 8y' + 16y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 7$,

(b) $y'' + 3y' = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 6$,

(c) $y'' - 2y' + y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0$,

(d) $y'' + y' - 12y = 0, \quad y(2) = 2, \quad y'(2) = 1$,

(e) $y'' - 2y' + y = 0, \quad y(1) = 12, \quad y'(1) = -5$,

(f) $y'' - y' + 4y = 0, \quad y(-2) = 1, \quad y'(-2) = 3$,

(g) $y'' + 16y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -2$,

(h) $y'' + y = 0, \quad y(\pi/3) = 0, \quad y'(\pi/3) = 2$,

(i) $y'' - 4y' - 5y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 2$,

(j) $4y'' - 4y' - 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 5$,

(k) $y'' + y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$,

(l) $y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 10$,

(m) $y'' - 4y' + 53y = 0, \quad y(\pi) = -3, \quad y'(\pi) = 2$,

(n) $y''' + 12y'' + 36y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -7$,

(o) $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1$.

3. Resolva o problema de valor inicial

$$y'' - 2my' + (m^2 + k^2)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = k,$$

onde m e k são constantes positivas.

4. Resolva os seguintes problemas de valor de contorno:

(a) $y'' - 10y' + 25y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0,$

(b) $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0,$

(c) $y'' + y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi/2) = 2,$

(d) $y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 1.$

Respostas:

1. (a) $y(x) = c_1 + c_2 \mathrm{e}^{-x/4},$

(b) $y(x) = c_1 \mathrm{e}^{3x} + c_2 \mathrm{e}^{-2x},$

(c) $y(x) = c_1 \mathrm{e}^{-4x} + c_2 x \mathrm{e}^{-4x},$

(d) $y(x) = c_1 \mathrm{e}^{-x/4} + c_2 \mathrm{e}^{2x/3},$

(e) $y(x) = c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x,$

(f) $y(x) = c_1 \cos(x/\sqrt{3}) + c_2 \operatorname{sen}(x/\sqrt{3}),$

(g) $y(x) = \mathrm{e}^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x),$

(h) $y(x) = c_1 \mathrm{e}^{5x} + c_2 x \mathrm{e}^{5x},$

(i) $y(x) = c_1 \mathrm{e}^{3x} + c_2 x \mathrm{e}^{3x},$

(j) $y(x) = c_1 \mathrm{e}^{-2x} + (c_2 + c_3 x)\mathrm{e}^{2x},$

(k) $y(x) = \mathrm{e}^{2x}(c_1 + c_2 x) + \mathrm{e}^{-2x}(c_3 + c_4 x),$

(l) $y(x) = c_1 \mathrm{e}^{x} + c_2 \mathrm{e}^{-2x} \cos(\sqrt{3}x) + c_3 \mathrm{e}^{-2x} \operatorname{sen}(\sqrt{3}x),$

(m) $y(x) = c_1 + c_2 \mathrm{e}^{5x} + c_3 \mathrm{e}^{-x},$

(n) $y(x) = c_1 \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}(c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x),$

(o) $y(x) = c_1 + c_2 x + \mathrm{e}^{-x/2}\left[c_3 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_4 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right],$

(p) $y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 \mathrm{e}^{-x/2} + \mathrm{e}^{2x}(c_4 \cos 2x + c_5 \operatorname{sen} 2x).$

2. (a) $y(x) = 2\mathrm{e}^{4x} - x\mathrm{e}^{4x},$

(b) $y(x) = 5 - 2\mathrm{e}^{-3x},$

(c) $y(x) = 0,$

(d) $y(x) = \frac{9}{7}\mathrm{e}^{3(x-2)} + \frac{5}{7}\mathrm{e}^{-4(x-2)},$

(e) $y(x) = \mathrm{e}^{x-1}(29 - 17x),$

(f) $y(x) = \mathrm{e}^{(x+2)/2}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}(x+2)\right) + \frac{5}{\sqrt{15}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}(x+2)\right)\right],$

(g) $y(x) = 2\cos 4x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 4x,$

(h) $y(x) = -\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen} x$,

(i) $y(x) = -\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{1-x} + \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{5(x-1)}$,

(j) $y(x) = -\dfrac{7}{4}\mathrm{e}^{-x/2} + \dfrac{11}{4}\mathrm{e}^{3x/2}$,

(k) $y(x) = 0$,

(l) $y(x) = 5\mathrm{e}^{x} + 5x\mathrm{e}^{x}$,

(m) $y(x) = \mathrm{e}^{2(x-\pi)}\left(3\cos 7x - \dfrac{8}{7}\operatorname{sen} 7x\right)$,

(n) $y(x) = \dfrac{5}{36} - \dfrac{5}{36}\mathrm{e}^{-6x} + \dfrac{1}{6}x\mathrm{e}^{-6x}$,

(o) $y(x) = -\dfrac{1}{6}\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{1}{15}\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{1}{10}\mathrm{e}^{-3x}$.

3. $y(x) = \mathrm{e}^{mx}\operatorname{sen} kx$.

4. (a) $y(x) = \mathrm{e}^{5x} - x\mathrm{e}^{5x}$,

(b) $y(x) = c_2 \operatorname{sen} 2x$,

(c) $y(x) = -2\cos x$,

(d) O problema não tem solução.

Aula 20: Equações diferenciais lineares não homogêneas. Método dos coeficientes indeterminados.

20.1 Solução geral para EDOs de segunda ordem, lineares e não homogêneas

Seja

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \qquad y = y(x), \tag{20.1}$$

onde $p(x), q(x)$ e $f(x)$ são funções reais contínuas no intervalo I.

Seja $y_p(x)$ uma solução particular para a Eq.(20.1) e, seja $y(x)$ uma outra solução para a Eq.(20.1), então

$$(y'' + p(x)y' + q(x)y) - (y_p'' + p(x)y_p' + q(x)y_p) = f(x) - f(x) = 0.$$

Isso mostra que $(y - y_p)$ satisfaz a equação diferencial homogênea, $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Se y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, então $(y - y_p)$ pode ser representada como

$$y - y_p = c_1y_1 + c_2y_2 \qquad \Rightarrow \qquad y(x) = c_1y_1 + c_2y_2 + y_p,$$

que é a solução geral para a Eq.(20.1). Podemos representar tal solução por

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

onde $y_h(x) = c_1y_1 + c_2y_2$ é solução da equação diferencial homogênea associada, com c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

Teorema 20.1. (Princípio da Superposição - Equações diferenciais não homogêneas) *Sejam $y_{p_1}(x), y_{p_2}(x), \ldots, y_{p_n}(x)$, $n \in \mathbb{N}$, soluções particulares para as equações diferenciais não homogêneas, $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$, $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$, $\cdots$, $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_n(x)$, respectivamente. Então, a combinação linear $y_p(x) = c_1 y_{p_1}(x) + c_2 y_{p_2}(x) + \cdots + c_n y_{p_n}(x)$, com $c_1, c_2, \ldots, c_n$ constantes arbitrárias, é uma solução particular para a equação diferencial*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x). \tag{20.2}$$

♡

Demonstração Para mostrar que $y_p(x)$ é solução da equação diferencial (20.2), devemos derivar y_p duas vezes e substituir em tal equação, de modo a obter

$$\begin{aligned}
y_p'' + p(x)y_p' + q(x)y_p &= [c_1 y_{p_1}'' + c_2 y_{p_2}'' + \cdots + c_n y_{p_n}''] \\
&+ p(x)[c_1 y_{p_1}' + c_2 y_{p_2}' + \cdots + c_n y_{p_n}'] + q(x)[c_1 y_{p_1} + c_2 y_{p_2} + \cdots + c_n y_{p_n}] \\
&= c_1[y_{p_1}'' + p(x)y_{p_1}' + q(x)y_{p_1}] + c_2[y_{p_2}'' + p(x)y_{p_2}' + q(x)y_{p_2}] \\
&+ \cdots + c_n[y_{p_n}'' + p(x)y_{p_n}' + q(x)y_{p_n}] \\
&= c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x).
\end{aligned}$$

Portanto, $y_p(x) = c_1 y_{p_1}(x) + c_2 y_{p_2}(x) + \cdots + c_n y_{p_n}(x)$ é uma solução particular para a equação diferencial $y'' + p(x)y' + q(x)y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x)$.

20.2 Método dos coeficientes indeterminados

O método dos coeficientes indeterminados pode ser utilizado para determinar uma solução particular, $y_p(x)$, para a equação diferencial ordinária, linear, não homogênea, com coeficientes constantes, isto é,

$$y'' + ay' + by = f(x).$$

Para determinar $y_p(x)$ é necessária uma hipótese inicial sobre a forma desta solução. A hipótese é bastante restritiva, pois permite apenas considerar polinômios, exponenciais, senos e cossenos.

Exemplo 20.1 Determine a solução geral para a seguinte EDO

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x}.$$

Resolução: A solução geral da EDO tem a forma

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x).$$

Vamos determinar a solução para a EDO homogênea associada, $y'' - 3y' - 4y = 0$ Suponha que $y_h(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$, então

$$(\lambda^2 - 3\lambda - 4)\mathrm{e}^{\lambda x} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = 4 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -1.$$

Logo,

$$y_h(x) = c_1\mathrm{e}^{4x} + c_2\mathrm{e}^{-x},$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

Suponha que $y_p(x) = A\mathrm{e}^{2x}$, onde A é uma constante a ser determinada. Derivando y_p, temos

$$y_p' = 2A\mathrm{e}^{2x} \qquad \text{e} \qquad y_p'' = 4A\mathrm{e}^{2x}.$$

Substituindo y_p, y_p' e y_p'' na EDO, tem-se

$$\begin{aligned} y_p'' - 3y_p' - 4y_p = 4A\mathrm{e}^{2x} - 6A\mathrm{e}^{2x} - 4A\mathrm{e}^{2x} = 3\mathrm{e}^{2x} \\ (\cancel{4A} - 6A - \cancel{4A})\mathrm{e}^{2x} = 3\mathrm{e}^{2x} \\ -6A = 3 \qquad \Rightarrow \qquad A = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, $y_p(x) = -(1/2)\mathrm{e}^{2x}$. A solução geral da EDO é

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{4x} + c_2\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}.$$

Exemplo 20.2 Encontre a solução geral da EDO

$$y'' - 3y' - 4y = 2\,\mathrm{sen}x.$$

Resolução: Vimos que $y_h(x) = c_1\mathrm{e}^{4x} + c_2\mathrm{e}^{-x}$. Vamos, inicialmente, supor que $y_p(x) = A\,\mathrm{sen}x$, então

$$y_p' = A\cos x \qquad \text{e} \qquad y_p'' = -A\,\mathrm{sen}x.$$

Substituindo y_p, y_p' e y_p'' na EDO, obtemos

$$\begin{aligned} y_p'' - 3y_p' - 4y_p = -A\,\mathrm{sen}x - 3A\cos x - 4A\,\mathrm{sen}x = 2\,\mathrm{sen}x \\ -5A\,\mathrm{sen}x - 3A\cos x = 2\,\mathrm{sen}x \\ -5A = 2 \qquad \text{e} \qquad -3A = 0 \qquad\qquad . \end{aligned}$$

Temos um **ABSURDO!** A constante A não pode admitir valores distintos. A aparição do termo $\cos x$, sugere a seguinte escolha: $y_p(x) = A\,\text{sen}x + B\cos x$, logo

$$y_p' = A\cos x - B\,\text{sen}x \qquad \text{e} \qquad y_p'' = -A\,\text{sen}x - B\cos x.$$

Substituindo y_p, y_p' e y_p'' na EDO, obtemos

$$y_p'' - 3y_p' - 4y_p = -A\,\text{sen}x - B\cos x - 3A\cos x + 3B\,\text{sen}x - 4A\,\text{sen}x - 4B\cos x = 2\,\text{sen}x$$
$$(-A + 3B - 4A)\,\text{sen}x + (-B - 3A - 4B)\cos x = 2\,\text{sen}x$$

$$\begin{cases} -5A + 3B = 2, \\ -3A - 5B = 0, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad A = -\frac{5}{17}, \quad B = \frac{3}{17}.$$

Portanto, $y_p(x) = -\dfrac{5}{17}\,\text{sen}x + \dfrac{3}{17}\cos x$. A solução geral é

$$y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x} - \frac{5}{17}\,\text{sen}x + \frac{3}{17}\cos x.$$

Exemplo 20.3 Determine a solução geral para

$$y'' - 3y' - 4y = 4x^2 - 1.$$

Resolução: Supomos $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$, então

$$y_p' = 2Ax + B \qquad \text{e} \qquad y_p'' = 2A.$$

Substituindo y_p, y_p' e y_p'' na EDO, obtemos

$$y_p'' - 3y_p' - 4y_p = 2A - 6Ax - 3B - 4Ax^2 - 4Bx - 4C = 4x^2 - 1$$

$$\begin{cases} -4A = 4, \\ -6A - 4B = 0, \\ 2A - 3B - 4C = -1, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad A = -1, \quad B = \frac{3}{2}, \quad C = -\frac{11}{8}.$$

A solução geral é

$$y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x} - x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{11}{8}.$$

Exercícios

1. **(a)** Verifique que $y_{p_1}(x) = 3\mathrm{e}^{2x}$ e $y_{p_2}(x) = x^2 + 3x$ são, respectivamente, soluções particulares para

$$y'' - 6y' + 5y = -9\mathrm{e}^{2x}$$

e

$$y'' - 6y' + 5y = 5x^2 + 3x - 16.$$

(b) Utilize o **item (a)** para determinar soluções particulares para

$$y'' - 6y' + 5y = 5x^2 + 3x - 16 - 9\mathrm{e}^{2x}$$

e

$$y'' - 6y' + 5y = -10x^2 - 6x + 32 + \mathrm{e}^{2x}.$$

Respostas:

1. **(a)** Basta derivar y_{p_1} e y_{p_2} e substituir nas respectivas equações diferenciais.

(b) Utilizando o Teorema 20.1, temos $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ e $y_p = -2y_{p_2} - \frac{1}{9}y_{p_1}$, respectivamente.

Aula 21: Método dos coeficientes indeterminados (continuação).

21.1 Exemplos

Exemplo 21.1 Determine a solução geral para a EDO

$$y'' - 3y' - 4y = -8\mathrm{e}^x \cos 2x.$$

Resolução: Supomos $y_p(x) = A\mathrm{e}^x \cos 2x + B\mathrm{e}^x \operatorname{sen} 2x$, então

$$\begin{aligned} y_p' &= A\mathrm{e}^x \cos 2x - 2A\mathrm{e}^x \operatorname{sen} 2x + B\mathrm{e}^x \operatorname{sen} 2x + 2B\mathrm{e}^x \cos 2x \\ &= (A+2B)\mathrm{e}^x \cos 2x + (-2A+B)\mathrm{e}^x \operatorname{sen} 2x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y_p'' &= (A+2B)\mathrm{e}^x \cos 2x - 2(A+2B)\mathrm{e}^x \operatorname{sen} 2x + (-2A+B)\mathrm{e}^x \operatorname{sen} 2x + 2(-2A+B)\mathrm{e}^x \cos 2x \\ &= (-3A+4B)\mathrm{e}^x \cos 2x + (-4A-3B)\mathrm{e}^x \operatorname{sen} 2x. \end{aligned}$$

Substituindo y_p, y_p' e y_p'' na EDO, obtemos

$$\begin{aligned} y_p'' - 3y_p' - 4y_p &= (-3A+4B)\mathrm{e}^x \cos 2x + (-4A-3B)\mathrm{e}^x \operatorname{sen} 2x + (-3A-6B)\mathrm{e}^x \cos 2x \\ &+ (6A-3B)\mathrm{e}^x \operatorname{sen} 2x - 4A\mathrm{e}^x \cos 2x - 4B\mathrm{e}^x \operatorname{sen} 2x = -8\mathrm{e}^x \cos 2x \\ &= (-10A-2B)\mathrm{e}^x \cos 2x + (2A-10B)\mathrm{e}^x \operatorname{sen} 2x = -8\mathrm{e}^x \cos 2x. \end{aligned}$$

Devemos resolver o seguinte sistema

$$\begin{cases} -10A - 2B = -8, \\ 2A - 10B = 0, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{10}{13}, \quad B = \frac{2}{13}.$$

A solução geral é

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{4x} + c_2\mathrm{e}^{-x} + \frac{10}{13}\mathrm{e}^x \cos 2x + \frac{2}{13}\mathrm{e}^x \operatorname{sen} 2x.$$

Exemplo 21.2 Encontre uma solução particular para a EDO

$$y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x} + 2\operatorname{sen} x - 8\mathrm{e}^x \cos 2x.$$

Resolução: Encontramos soluções particulares para

$$\begin{aligned} y'' - 3y' - 4y &= 3e^{2x} \\ y'' - 3y' - 4y &= 2\operatorname{sen} x \\ y'' - 3y' - 4y &= -8e^{x}\cos 2x. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 20.1, uma solução particular para a EDO é dada pela soma das três soluções particulares encontradas, isto é,

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{5}{17}\operatorname{sen} x + \frac{3}{17}\cos x + \frac{10}{13}e^{x}\cos 2x + \frac{2}{13}e^{x}\operatorname{sen} 2x.$$

Exemplo 21.3 Encontre a solução geral para a EDO

$$y'' - 3y' - 4y = 2e^{-x}.$$

Resolução: Suponha $y_p(x) = Ae^{-x}$, então $y_p' = -Ae^{-x}$ e $y_p''(x) = Ae^{-x}$. Substituindo estas expressões na EDO, obtemos

$$\begin{gathered} y_p'' - 3y_p' - 4y_p = Ae^{-x} + 3Ae^{-x} - 4Ae^{-x} = 2e^{-x} \\ 2e^{-x} = 0, \qquad \textbf{ABSURDO!!} \end{gathered}$$

Note que, ao supor que $y_p(x) = Ae^{-x}$ é uma solução particular para a equação diferencial não homogênea obtivemos um absurdo. Isto ocorreu, pois Ae^{-x} já aparece como solução da equação diferencial homogênea ($y_h(x) = c_1e^{4x} + c_2e^{-x}$). Assim, sempre que isto acontecer devemos multiplicar $y_p(x)$ por x^n, onde n é o menor inteiro positivo que elimina a multiplicidade de soluções.

Neste caso, devemos supor $y_p(x) = Axe^{-x}$, então $y_p' = Ae^{-x} - Axe^{-x} = (1-x)Ae^{-x}$ e $y_p'' = -(1-x)Ae^{-x} - Ae^{-x} = -2Ae^{-x} + Axe^{-x}$. Substituindo y_p, y_p' e y_p'' na EDO, temos

$$\begin{gathered} y_p'' - 3y_p' - 4y_p = -2Ae^{-x} + \cancel{Axe^{-x}} - 3Ae^{-x} + \cancel{3Axe^{-x}} - \cancel{4Axe^{-x}} = 2e^{-x} \\ -5Ae^{-x} = 2e^{-x}, \qquad \Rightarrow \qquad A = -\frac{2}{5}. \end{gathered}$$

Logo, a solução geral para a EDO é

$$y(x) = c_1e^{4x} + c_2e^{-x} - \frac{2}{5}xe^{-x}.$$

21.2 Tabela com soluções particulares

Supondo que nenhuma forma de $y_p(x)$ aparece em $y_h(x)$, ou seja, $y_p(x)$ não aparece na solução geral da EDO homogênea associada, então dada a EDO $y'' + ay' + by = f(x)$, algumas formas para a solução particular estão na tabela a seguir:

$f(x)$	$y_p(x)$
1	A
$3x-1$	$Ax+B$
x^2	Ax^2+Bx+c
x^3-3	Ax^3+Bx^2+Cx+D
$\operatorname{sen} 7x$	$A\operatorname{sen} 7x + B\cos 7x$
$\cos 3x$	$A\cos 3x + B\operatorname{sen} 3x$
e^{-2x}	$A\mathrm{e}^{-2x}$
$5x\mathrm{e}^{3x}$	$(Ax+B)\mathrm{e}^{3x}$
$2x^2\mathrm{e}^{4x}$	$(Ax^2+Bx+C)\mathrm{e}^{4x}$
$\mathrm{e}^{4x}\cos 2x$	$A\mathrm{e}^{4x}\cos 2x + B\mathrm{e}^{4x}\operatorname{sen} 2x$
$x^2\operatorname{sen} 5x$	$(Ax^2+Bx+C)\operatorname{sen} 5x + (Dx^2+Ex+F)\cos 5x$
$x\mathrm{e}^{x}\cos 2x$	$(Ax+B)\mathrm{e}^{x}\cos 2x + (Cx+D)\mathrm{e}^{x}\operatorname{sen} 2x$

Exercícios

1. Determine uma solução particular para as seguintes equações diferenciais, utilizando o método dos coeficientes indeterminados. Escreva a solução geral.

(a) $y'' - y' - 2y = 2x^2 + 5$,
(b) $y'' - 2y' + 10y = 20x^2 + 2x - 8$,
(c) $y'' - 6y' + 8y = 3\mathrm{e}^{x}$,
(d) $y'' - 3y' + 2y = 10\operatorname{sen} x$,
(e) $y'' - 4y' + 13y = 3\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^{3x}$,
(f) $y'' - 2y' + y = 3x + 25\operatorname{sen} 3x$,
(g) $y'' - 4y' = 8x^2 + 2\mathrm{e}^{3x}$,
(h) $y'' - 8y' + 20y = 100x^2 - 26x\mathrm{e}^{x}$,
(i) $y'' - y' + \dfrac{1}{4}y = 3 + \mathrm{e}^{x/2}$,
(j) $y'' - 16y = 2\mathrm{e}^{4x}$,
(k) $y'' + 4y = 3\operatorname{sen} 2x$,

(l) $y'' - 4y' + 4y = (1 + x)e^x + 2e^{2x} + 3e^{3x}$,

(m) $y''' + y' = \operatorname{sen} x + x \cos x$,

(n) $y''' - 4y'' + 3y' = xe^{2x} + x^2$,

(o) $y^{(4)} + 2y'' + y = (x - 1)^2$,

(p) $y^{(4)} - y'' = 4x + 2xe^{-x}$.

2. Resolva os seguintes problemas de valor inicial, através do método dos coeficientes indeterminados:

(a) $y'' - 4y = -7e^{2x} + x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$,

(b) $y'' + 4y' = 8 + 34 \cos x, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2$,

(c) $y'' + 8y' + 12y = e^{-x} + 7, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$,

(d) $y'' - 3y' = 2e^{2x} \operatorname{sen} x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$,

(e) $y'' - y = 5 \operatorname{sen}^2 x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -4$,

(f) $y'' + 4y = -2, \quad y(\pi/8) = 1/2, \quad y'(\pi/8) = 2$,

(g) $y'' + 4y' + 5y = 35e^{-4x}, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 1$,

(h) $y'' - y = \cosh x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 12$,

(i) $y''' - 2y'' + y' = 2 - 24e^x + 40e^{5x}, \quad y(0) = 1/2, \quad y'(0) = 5/2, \quad y''(0) = -9/2$,

(j) $y''' + 8y = 2x - 5 + 8e^{-2x}, \quad y(0) = -5, \quad y'(0) = 3, \quad y''(0) = -4$.

3. Resolva os problemas de valor de contorno, através do método dos coeficientes indeterminados:

(a) $y'' + y = x^2 + 1, \quad y(0) = 5, \quad y(1) = 0$,

(b) $y'' - 2y' + 2y = 2x - 2, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = \pi$.

Respostas:

1. (a) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} - x^2 + x - 4$,

(b) $y = e^x(c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x) + 2x^2 + x - 1$,

(c) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{4x} + e^x$,

(d) $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + 3 \cos x + \operatorname{sen} x$,

(e) $y = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x) + \dfrac{1}{3}e^{2x} - \dfrac{1}{2}e^{3x}$,

(f) $y = c_1e^x + c_2xe^x + 3x + 6 - 2 \operatorname{sen} 3x + \dfrac{3}{2} \cos 3x$,

(g) $y = c_1e^{4x} + c_2 - \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{4} - \dfrac{2}{3}e^{3x}$,

(h) $y = \mathrm{e}^{4x}(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x) + 5x^2 + 4x + \dfrac{11}{10} - \left(2x + \dfrac{12}{13}\right)\mathrm{e}^x,$

(i) $y = c_1\mathrm{e}^{x/2} + c_2 x\mathrm{e}^{x/2} + 12 + \dfrac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{x/2},$

(j) $y = c_1\mathrm{e}^{4x} + c_2\mathrm{e}^{-4x} + \dfrac{1}{4}x\mathrm{e}^{4x},$

(k) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x - \dfrac{3}{4}x \cos 2x,$

(l) $y = c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2 x\mathrm{e}^{2x} + (x+3)\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^{3x},$

(m) $y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x + \dfrac{1}{4}x \operatorname{sen} x - \dfrac{1}{4}x^2 \cos x,$

(n) $y = c_1 + c_2\mathrm{e}^x + c_3\mathrm{e}^{3x} + \left(-\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{1}{9}\left(x^3 + 4x^2 + \dfrac{26}{3}x\right),$

(o) $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + c_3 x \cos x + c_4 x \operatorname{sen} x + x^2 - 2x - 3,$

(p) $y = c_1 + c_2 x + c_3\mathrm{e}^x + c_4\mathrm{e}^{-x} - \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}(x^2 + 5x)\mathrm{e}^{-x}.$

2. **(a)** $y = \dfrac{1}{4}(7\mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^{-2x} - 7x\mathrm{e}^{2x} - x),$

(b) $y = 2x + 2\mathrm{e}^{-4x} + 8 \operatorname{sen} x - 2\cos x + 3,$

(c) $y = \dfrac{3}{8}\mathrm{e}^{-2x} - \dfrac{19}{120}\mathrm{e}^{-6x} + \dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{7}{12},$

(d) $y = \dfrac{1}{5}(5\mathrm{e}^{3x} - 3\mathrm{e}^{2x} \operatorname{sen} x - \mathrm{e}^{2x} \cos x + 1),$

(e) $y = 4\mathrm{e}^{-x} - \operatorname{sen}^2 x - 2,$

(f) $y = \sqrt{2} \operatorname{sen} 2x - \dfrac{1}{2},$

(g) $y = \mathrm{e}^{-2x}(-10\cos x + 9 \operatorname{sen} x) + 7\mathrm{e}^{-4x},$

(h) $y = 2\cosh x + 12 \operatorname{senh} x + \dfrac{1}{2}x \operatorname{senh} x,$

(i) $y = 11 - 11\mathrm{e}^x + 9x\mathrm{e}^x + 2x - 12x^2\mathrm{e}^x + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{5x},$

(j) $y = -\dfrac{23}{12}\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^x\left(-\dfrac{59}{24}\cos(\sqrt{3}x) + \dfrac{17\sqrt{3}}{72}\operatorname{sen}(\sqrt{3}x)\right) + \dfrac{1}{4}x - \dfrac{5}{8} + \dfrac{2}{3}x\mathrm{e}^{-2x}.$

3. **(a)** $y = 6\cos x - 6\cot(1) \operatorname{sen} x + x^2 - 1,$

(b) $y = c_2\mathrm{e}^x \operatorname{sen} x + x.$

Aula 22: Método de variação de parâmetros.

Seja

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \qquad y = y(x),$$

onde a solução geral da EDO é dada por $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$. A solução da EDO homogênea associada ($y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$) é $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, onde as constantes c_1 e c_2 são chamadas de parâmetros. A ideia do método, para obter y_p, consiste em variar estes parâmetros, isto é, admitimos

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x),$$

onde $u_1(x)$ e $u_2(x)$ são duas funções a serem determinadas.

22.1 Caso geral

Supomos que uma solução particular para a EDO, $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$, é $y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$, onde $u_1(x)$ e $u_2(x)$ são duas funções a serem determinadas. Derivando $y_p(x)$, obtemos

$$y_p'(x) = u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2'.$$

Vamos impor $u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$, então

$$y_p'(x) = u_1y_1' + u_2y_2' \qquad \text{e} \qquad y_p''(x) = u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2''.$$

Substituindo y_p, y_p' e y_p'' na EDO, obtemos

$$\begin{aligned}[u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2''] + p(x)[u_1y_1' + u_2y_2'] + q(x)[u_1y_1 + u_2y_2] &= f(x)\\ \underbrace{[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1]}_{=0}u_1 + \underbrace{[y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2]}_{=0}u_2 + u_1'y_1' + u_2'y_2' &= f(x).\end{aligned}$$

Como y_1 e y_2 são soluções da equação homogênea $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, temos

$$u_1'y_1' + u_2'y_2' = f(x).$$

Portanto, devemos resolver o seguinte sistema nas variáveis u_1' e u_2':

$$\begin{cases} u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0,\\ u_1'y_1' + u_2'y_2' = f(x). \end{cases} \tag{22.1}$$

O sistema de equações (22.2) admite solução única se o determinante da matriz dos coeficientes (Wronskiano) for não nulo, isto é,

$$W[y_1(x), y_2(x)] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 \neq 0.$$

Para determinar u_1' e u_2', vamos utilizar a regra de Cramer, logo

$$u_1' = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = -\frac{y_2 \cdot f(x)}{W},$$

e

$$u_2' = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix} = \frac{y_1 \cdot f(x)}{W}.$$

Integrando u_1' e u_2', tem-se

$$u_1(x) = -\int \frac{y_2 \cdot f(x)}{W}\,\mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad u_2 = \int \frac{y_1 \cdot f(x)}{W}\,\mathrm{d}x.$$

Portanto, $y_p(x)$ tem a seguinte forma

$$y_p(x) = -y_1 \int \frac{y_2 \cdot f(x)}{W}\,\mathrm{d}x + y_2 \int \frac{y_1 \cdot f(x)}{W}\,\mathrm{d}x.$$

22.2 Exemplo

Exemplo 22.1 Utilize o método de variação de parâmetros para determinar a solução geral para a EDO

$$y'' + y = \sec x.$$

Resolução: Primeiro, devemos resolver a EDO homogênea associada, $y'' + y = 0$. Supomos $y_h(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$, logo $y_h' = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}$ e $y_h'' = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x}$. Substituindo estas expressões na EDO, temos

$$(\lambda^2 + 1)\mathrm{e}^{\lambda x} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda^2 + 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = -i \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -i.$$

A solução geral para a EDO homogênea é $y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$. Para utilizar o método de variação de parâmetros para determinar uma solução particular para a EDO, devemos supor $y_p(x) = \cos x\, u_1 + \operatorname{sen} x\, u_2$, então $y_p' = -\operatorname{sen} x\, u_1 + \cos x\, u_1' + \cos x\, u_2 + \operatorname{sen} x\, u_2'$. Vamos impor $\cos x\, u_1' + \operatorname{sen} x\, u_2' = 0$, assim

$$y_p' = -\operatorname{sen} x\, u_1 + \cos x\, u_2 \qquad \text{e} \qquad y_p'' = -\cos x\, u_1 + -\operatorname{sen} x\, u_1' - \operatorname{sen} x\, u_2 + \cos x\, u_2'.$$

Substituindo y_p e y_p'' na EDO não homogênea, obtemos

$$\begin{aligned} y_p'' + y_p &= \cancel{-\cos x\, u_1} - \operatorname{sen} x\, u_1' \cancel{- \operatorname{sen} x\, u_2} + \cos x\, u_2' + \cancel{\cos x\, u_1} + \cancel{\operatorname{sen} x\, u_2} = \sec x \\ &= -\operatorname{sen} x\, u_1' + \cos x\, u_2' = \sec x. \end{aligned}$$

Devemos resolver o seguinte sistema

$$\begin{cases} \cos x\, u_1' + \operatorname{sen} x\, u_2' = 0, \\ -\operatorname{sen} x\, u_1' + \cos x\, u_2' = \sec x. \end{cases} \tag{22.2}$$

O sistema admite solução única, pois

$$W[\cos x, \operatorname{sen} x] = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \neq 0.$$

Utilizamos a regra de Cramer para resolver o sistema de equações, ou seja,

$$u_1' = \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ \sec x & \cos x \end{vmatrix} = -\operatorname{sen} x \cdot \sec x = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x},$$

e

$$u_2' = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & \sec x \end{vmatrix} = \cos\, x \cdot \sec x = 1.$$

Integrando u_1' e u_2', obtemos

$$u_1 = \int -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, \mathrm{d}x = \ln|\cos x| \qquad \text{e} \qquad u_2 = \int \mathrm{d}x = x.$$

Portanto, a solução geral para a EDO é

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + \ln|\cos x| \cos x + x\, \operatorname{sen} x.$$

Exercícios

1. Determine uma solução particular para as seguintes equações diferenciais, utilizando o método de variação de parâmetros. Escreva a solução geral.

(a) $y'' - 6y' + 9y = 4\mathrm{e}^{3x} \ln x, \quad x > 0,$

(b) $y'' + 9y = 18 \sec^3(3x), \quad |x| < \pi/6,$

(c) $y'' + 6y' + 9y = \dfrac{2\mathrm{e}^{-3x}}{x^2 + 1},$

(d) $y'' - 4y = \dfrac{8}{e^{2x}+1}$,
(e) $y'' - 6y' + 13y = 4e^{3x}\sec^2(2x), \quad |x| < \pi/4$,
(f) $y'' + y = \sec x + 4e^x, \quad |x| < \pi/2$,
(g) $y'' + y = \operatorname{cosec} x + 2x^2 + 5x + 1, \quad 0 < x < \pi$,
(h) $y'' - 2my' + m^2 y = \dfrac{e^{mx}}{1+x^2}, \quad m$ constante,
(i) $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{4-x^2}}, \quad |x| < 2$,

2. Resolva os seguintes problemas de valor inicial utilizando o método de variação de parâmetros:

(a) $4y'' - y = xe^{x/2}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$,
(b) $2y'' + y' - y = x + 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$,
(c) $y'' + 2y' - 8y = 2e^{-2x} - e^{-x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$,
(d) $y'' - 4y' + 4y = (12x^2 - 6x)e^{2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$.

3. Desenvolva o método de variação de parâmetros para determinar uma solução particular para a equação diferencial de terceira ordem,

$$y''' + p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x).$$

4. Utilize a fórmula encontrada para $y_p(x)$ no **Exercício 3** e, então obtenha a solução geral para as equações diferenciais:

(a) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 2x^{-2}e^x, \quad x > 0$,
(b) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 36e^{2x}\ln x, \quad x > 0$,
(c) $y''' + 3y'' + 3y' + y = \dfrac{2e^{-x}}{x^2+1}$,
(d) $y''' + y' = \tan x$,
(e) $y''' + 4y' = \sec 2x$,

5. Combine o método dos coeficientes indeterminados e o método de variação de parâmetros (desenvolva o método) para resolver a seguinte equação diferencial,

$$3y'' - 6y' + 30y = 15\operatorname{sen} x + e^x \tan 3x.$$

Respostas:

1. (a) $y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + x^2 e^{3x}(2\ln x - 3)$,
   (b) $y(x) = c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 3x \tan 3x$,
   (c) $y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x} - e^{-3x}\ln(x^2+1) + 2xe^{-3x}\operatorname{arctg} x$,
   (d) $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + [\ln(e^{2x}+1) - 2x - e^{-2x}]e^{2x} - \ln(e^{2x}+1)e^{-2x}$,
   (e) $y(x) = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2x \ln|\sec 2x + \tan 2x| - 1)$,
   (f) $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + 2e^x + x \operatorname{sen} x + \cos x \ln(\cos x)$,
   (g) $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - x\cos x + \operatorname{sen} x \ln(\operatorname{sen} x) - 3 + 5x + 2x^2$,
   (h) $y(x) = e^{mx}(c_1 + c_2 x + x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2})$,
   (i) $y(x) = e^{-x}\left[c_1 + c_2 x + x \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{4-x^2}\right]$,

2. (a) $y(x) = \frac{3}{4}e^{x/2} + \frac{1}{4}e^{-x/2} + \frac{1}{8}x^2 e^{x/2} - \frac{1}{4}xe^{x/2}$,
   (b) $y(x) = \frac{8}{3}e^{x/2} + \frac{1}{3}e^{-x} - x - 2$,
   (c) $y(x) = \frac{25}{36}e^{2x} + \frac{4}{9}e^{-4x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{9}e^{-x}$,
   (d) $y(x) = e^{2x}(x^4 - x^3 - 2x + 1)$,

3. Proceda como no caso geral para uma equação diferencial de segunda ordem.

4. (a) $y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x - 2xe^x \ln x$,
   (b) $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 x^2 e^{2x} - 11x^3 e^{2x} + 6x^3 e^{2x}\ln x$,
   (c) $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x^2 e^{-x} + (x - \operatorname{arctg} x)e^{-x} - xe^{-x}\ln(x^2+1) + x^2 e^{-x}\operatorname{arctg} x$,
   (d) $y(x) = c_4 + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x - \ln|\cos x| - \operatorname{sen} x \ln|\sec x + \tan x|$,
   (e) $y(x) = c_1 + c_2 \cos 2x + c_3 \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8}\ln|\sec 2x + \tan 2x| - \frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{8}\operatorname{sen} 2x \ln|\cos 2x|$,

5. $y(x) = e^x(c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x) + \frac{9}{17}\operatorname{sen} x + \frac{2}{17}\cos x - \frac{1}{27}\ln|\sec 3x + \tan 3x| e^x \cos 3x$.

Parte III

Soluções em séries de potências.
Sistemas de equações diferenciais ordinárias

Aula 23: Soluções em séries para equações diferenciais de segunda ordem lineares.

23.1 Ponto ordinário

Definição 23.1. (Ponto ordinário)

Dizemos que um ponto $x = x_0$ é um ponto ordinário da equação diferencial

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0, \quad y = y(x), \tag{23.1}$$

se $P(x_0) \neq 0$. ♣

23.2 Soluções em série para equações diferenciais

Como $P(x)$ é contínua, então existe um intervalo em torno de x_0 no qual $P(x)$ nunca se anula. Nesse intervalo, podemos dividir a Eq.(23.1) por $P(x)$, de modo a obter

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

onde $p(x) = Q(x)/P(x)$ e $q(x) = R(x)/P(x)$ são funções contínuas.

Vamos resolver a Eq.(23.1) na vizinhança de um ponto ordinário x_0. Procuramos soluções na forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

e, supomos que a série converge no intervalo $|x - x_0| < R$ para algum $R > 0$.

Exemplo 23.1 Encontre a solução em série, em torno de $x_0 = 0$, para a equação diferencial

$$y'' + y = 0, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Resolução: Neste caso, $P(x) = 1, Q(x) = 0$ e $R(x) = 1$, logo todo ponto é ponto ordinário. Vamos procurar uma solução em forma de série de potências em torno do ponto $x_0 = 0$, isto é,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{23.2}$$

Supomos que a série converge em algum intervalo $|x| < R$. Derivando, termo a termo, a série

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad \text{e} \qquad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Substituindo y e y'' na equação diferencial, temos que

$$\begin{gathered}
y'' + y = 0 \\
\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}}_{n \to n+2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 0 \\
\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \\
\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n] x^n = 0.
\end{gathered}$$

Para que esta equação seja satisfeita, devemos ter

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{23.3}$$

A Eq.(23.3) é conhecida como **relação de recorrência**. Assim,

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+1)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

então

$$\begin{array}{lcl}
n = 0 & \Rightarrow & a_2 = -\dfrac{a_0}{2} = -\dfrac{a_0}{2!}, \\
n = 1 & \Rightarrow & a_3 = -\dfrac{a_1}{3 \cdot 2} = -\dfrac{a_1}{3!}, \\
n = 2 & \Rightarrow & a_4 = -\dfrac{a_2}{4 \cdot 3} = \dfrac{a_0}{4 \cdot 3 \cdot 2!} = \dfrac{a_0}{4!}, \\
n = 3 & \Rightarrow & a_5 = -\dfrac{a_3}{5 \cdot 4} = \dfrac{a_1}{5 \cdot 4 \cdot 3!} = \dfrac{a_1}{5!}, \\
n = 4 & \Rightarrow & a_6 = -\dfrac{a_1}{6 \cdot 5} = -\dfrac{a_0}{6 \cdot 5 \cdot 4!} = -\dfrac{a_0}{6!}, \\
n = 5 & \Rightarrow & a_7 = -\dfrac{a_5}{7 \cdot 6} = -\dfrac{a_1}{7 \cdot 6 \cdot 5!} = -\dfrac{a_1}{7!}, \\
\vdots & \vdots &
\end{array}$$

Para $n = 2k$, temos

$$a_0, a_2, a_4, \cdots = a_0, -\frac{a_0}{2!}, \frac{a_0}{4!}, -\frac{a_0}{6!}, \cdots,$$

ou ainda,

$$a_n = a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} a_0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Para $n = 2k + 1$, temos

$$a_1, a_3, a_5, \cdots = a_1, -\frac{a_1}{3!}, \frac{a_1}{5!}, -\frac{a_1}{7!}, \cdots,$$

ou seja,

$$a_n = a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}a_1, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Logo,

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots \\
&= a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2!}x^2 - \frac{a_1}{3!}x^3 + \frac{a_0}{4!}x^4 + \frac{a_1}{5!}x^5 - \frac{a_0}{6!}x^6 - \frac{a_1}{7!}x^7 + \cdots \\
&= a_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) \\
&= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},
\end{aligned}$$

isto é,

$$y(x) = a_0 \cos x + a_1 \operatorname{sen} x.$$

Exemplo 23.2 Resolva a equação diferencial

$$(x^2 - 1)y'' + 8xy' + 12y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3,$$

através de uma série de potências em torno do ponto $x_0 = 0$. Encontre a relação de recorrência e as duas soluções linearmente independentes indicando o termo geral de cada solução. Verifique para quais valores de x as séries convergem.

Resolução: Suponha que $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, então

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad \text{e} \qquad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}.$$

Substituindo y, y' e y'' na EDO, obtemos

$$(x^2-1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 8\cancel{x}\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-\cancel{1}} + 12\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\cancel{x^2}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-\cancel{2}} - \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}}_{n\to n+2} + 8\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + 12\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + 8\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + 12\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[n(n-1)a_n - (n+2)(n+1)a_{n+2} + 8na_n + 12a_n]x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n^2-n+8n+12)a_n - (n+2)(n+1)a_{n+2}]x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[\underbrace{(n^2+7n+12)}_{(n+4)(n+3)}a_n - (n+2)(n+1)a_{n+2}]x^n = 0.$$

A relação de recorrência é

$$a_{n+2} = \frac{(n+4)(n+3)}{(n+2)(n+1)}a_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\begin{array}{lcl}
n=0 & \Rightarrow & a_2 = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}a_0,\\
n=1 & \Rightarrow & a_3 = \frac{5\cdot 4}{3\cdot 2}a_1,\\
n=2 & \Rightarrow & a_4 = \frac{6\cdot 5}{4\cdot 3}a_2 = \frac{6\cdot 5}{\cancel{4\cdot 3}}\left(\frac{\cancel{4\cdot 3}}{2\cdot 1}a_0\right) = \frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}a_0,\\
n=3 & \Rightarrow & a_5 = \frac{7\cdot 6}{5\cdot 4}a_3 = \frac{7\cdot 6}{\cancel{5\cdot 4}}\left(\frac{\cancel{5\cdot 4}}{3\cdot 2}a_1\right) = \frac{7\cdot 6}{3\cdot 2}a_1,\\
n=4 & \Rightarrow & a_6 = \frac{8\cdot 7}{6\cdot 5}a_4 = \frac{8\cdot 7}{\cancel{6\cdot 5}}\left(\frac{\cancel{6\cdot 5}}{2\cdot 1}a_0\right) = \frac{8\cdot 7}{2\cdot 1}a_0,\\
\vdots & \vdots &
\end{array}$$

Para $n = 2k$, com $k = 1, 2, \ldots$

$$a_{2k} = \frac{(2k+2)(2k+1)}{2}a_0.$$

Para $n = 2k+1$, onde $k = 1, 2, \ldots$

$$a_{2k+1} = \frac{(2k+3)(2k+2)}{6}a_1.$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
y(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots \\
&= a_0 + a_1 x + \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}a_0x^2 + \frac{5\cdot 4}{3\cdot 2}a_1x^3 + \frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}a_0x^4 + \frac{7\cdot 6}{3\cdot 2}a_1x^5 + \frac{8\cdot 7}{2\cdot 1}a_0x^6 + \cdots \\
&= a_0\left(1 + \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}x^2 + \frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}x^4 + \frac{8\cdot 7}{2\cdot 1}x^6 + \cdots\right) + a_1\left(x + \frac{5\cdot 4}{3\cdot 2}x^3 + \frac{7\cdot 6}{3\cdot 2}x^5 + \cdots\right) \\
&= a_0 + a_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{2}x^{2n} + a_1x + a_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+3)(2n+2)}{6}x^{2n+1}.
\end{aligned}
$$

Usando as condições iniciais, $y(0) = 2$ e $y'(0) = 3$, obtemos

$$
y(0) = a_0 = 2
$$

e

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= a_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{\cancel{2}}\cancel{2}nx^{2n-1} + a_1 + a_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+3)(2n+2)(2n+1)}{6}x^{2n} \\
y'(0) &= a_1 = 3.
\end{aligned}
$$

Finalmente, uma solução particular para a equação diferencial é

$$
y(x) = 2 + 3x + \sum_{n=1}^{\infty}(2n+2)(2n+1)x^{2n} + \cancel{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+3)\cancel{2}(n+1)}{\cancel{6}}x^{2n+1}.
$$

Para analisar a convergência da série, vamos usar o teste da razão. Seja $y_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(2n+2)(2n+1)x^{2n}$,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+2+2)(2n+2+1)x^{\cancel{2n}+2}}{(2n+2)(2n+1)x^{\cancel{2n}}}\right| &= |x|^2\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n+4)(2n+3)}{(2n+2)(2n+1)}\right] \\
|x|^2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+14n+12}{4n^2+6n+2}\right) &= |x|^2.
\end{aligned}
$$

A série converge para $|x| < 1$. Seja $y_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(2n+3)(n+1)x^{2n+1}$. Verifique que a série converge para $|x| < 1$.

Exercícios

1. Encontre duas soluções em séries de potências, linearmente independentes, em torno do ponto ordinário $x_0 = 0$.

   (a) $y'' - xy = 0$,

   (b) $y'' + x^2y = 0$,

   (c) $y'' - 2xy' + y = 0$,

(d) $y'' - xy' + 2y = 0,$

(e) $y'' + x^2y' + xy = 0,$

(f) $y'' - 2xy' - 4y = 0,$

(g) $y'' + (2 - 4x^2)y' - 8xy = 0,$

(h) $y'' - y = 0,$

(i) $y'' + xy = 0,$

(j) $y'' - x^2y' - 3xy = 0,$

(k) $(x^2 - 3)y'' - 3xy' - 5y = 0.$

2. Utilize o método de série de potências, em torno do ponto ordinário $x = 0$, para resolver a equação diferencial dada sujeita às condições iniciais indicadas.

(a) $(x - 1)y'' - xy' + y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 6,$

(b) $(x + 1)y'' - (2 - x)y' + y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1,$

(c) $y'' - 2xy' + 8y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0,$

(d) $(x^2 + 1)y'' + 2xy' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

3. Utilize o método de série de potências, em torno do ponto ordinário $x = 0$, para resolver as seguintes equações diferenciais:

(a) $y'' + (\operatorname{sen} x)y = 0,$

(b) $y'' + e^x y' - y = 0.$

Dica: Utilize a representação em série de potências para as funções $\operatorname{sen} x$ e e^x.

Respostas:

1. **(a)** $y_1(x) = 1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6 + \cdots$ e $y_2(x) = x + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{504}x^7 + \cdots,$

(b) $y_1(x) = 1 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{672}x^8 - \cdots$ e $y_2(x) = x - \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{1440}x^9 - \cdots,$

(c) $y_1(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{240}x^6 - \cdots$ e $y_2(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^5 + \frac{1}{112}x^7 + \cdots,$

(d) $y_1(x) = 1 - x^2$ e $y_2(x) = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 - \cdots,$

(e) $y_1(x) = 1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{45}x^6 - \cdots$ e $y_2(x) = x - \frac{1}{6}x^4 + \frac{5}{232}x^7 - \cdots$,

(f) $y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} x^{2n}$ e $y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$,

(g) $y_1(x) = 1 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{15}x^5 + \cdots$ e $y_2(x) = x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{16}{15}x^5 + \cdots$,

(h) $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ e $y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$,

(i) $y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 7 \cdots (3n-2)(-1)^n}{(3n)!} x^{3n}$ e $y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)(-1)^n}{(3n+1)!} x^{3n+1}$,

(j) $y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)} x^{3n}$ e $y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 6 \cdots (3n)} x^{3n+1}$,

(k) $y_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)(-3)(-1) \cdots (2n-7)}{3^n (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n))} x^{2n}$ e $y_2(x) = x - \frac{4}{9}x^3 + \frac{8}{135}x^5$.

2. **(a)** $y(x) = -2\left[1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right] + 6x = 8x - 2e^x$,

(b) $y(x) = 2 - x - 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \cdots$,

(c) $y(x) = 3 - 12x^2 + 4x^4$,

(d) $y(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots$.

3. **(a)** $y_1(x) = 1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots$ e $y_2(x) = x - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{180}x^6 + \cdots$,

(b) $y_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \cdots$ e $y_2(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \cdots$.

Aula 24: Sistemas de EDOs de primeira ordem

24.1 Autovalores e autovetores

Definição 24.1. (Autovalores e autovetores)

Seja A *uma matriz* $n \times n$*. Diz-se que um número* λ *é um autovalor de* A *se existe um vetor solução não nulo* $\vec{v}$ *do sistema linear*

$$\mathsf{A}\vec{v} = \lambda\vec{v} \qquad \Rightarrow \qquad (\mathsf{A} - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}.$$

♣

O vetor $\vec{v}$ é chamado de autovetor correspondente ao autovalor λ.

Exemplo 24.1 Determine os autovalores e os autovetores de $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Resolução: A partir da **Definição 24.1**, temos

$$\det(\mathsf{A} - \lambda \mathsf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) - 15 = 0,$$

ou seja,

$$\lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda+2)(\lambda-6) = 0.$$

Os autovalores são $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 6$.

Para $\lambda_1 = -2$: $(\mathsf{A} - \lambda_1 \mathsf{I})\vec{v_1} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_{\vec{v_1}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e, através de escalonamento tem-se

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{array}\right) \; L_2 = 3L_2 - 5L_1 \qquad \Rightarrow \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

logo

$$3a_1 + 3a_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_2 = -a_1.$$

Portanto, o autovetor $\vec{v_1}$, associado ao autovalor $\lambda_1 = -2$, é

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ -a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} a_1.$$

Como a_1 é arbitrário, podemos escolher, por conveniência, $a_1 = 1$, de modo a obter

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda_2 = 6$: $(\mathsf{A} - \lambda_2 \mathsf{I})\vec{v_2} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_{\vec{v_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e, através de escalonamento tem-se

$$\left(\begin{array}{cc|c} -5 & 3 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \end{array}\right) \; L_2 = L_2 + L_1 \qquad \Rightarrow \qquad \left(\begin{array}{cc|c} -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

logo

$$-5a_1 + 3a_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_1 = \frac{3}{5}a_2.$$

Portanto, o autovetor $\vec{v_2}$, associado ao autovalor $\lambda_2 = 6$, é

$$\vec{v_2} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}a_2 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} a_2.$$

Como a_2 é arbitrário, podemos escolher, por conveniência, $a_2 = 5$, de modo a obter

$$\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

24.2 Sistemas de EDOs de primeira ordem

Um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem é um conjunto de equações que envolvem as variáveis dependentes, suas derivadas de primeira ordem, e a variável independente.

Definição 24.2. (Sistemas de EDOs de primeira ordem)

Se $\mathsf{X}(\mathsf{t}), \mathsf{A}(\mathsf{t})$ *e* $\mathsf{F}(\mathsf{t})$ *denotam, respectivamente, as matrizes*

$$\mathsf{X}(\mathsf{t}) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}(\mathsf{t}) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathsf{F}(\mathsf{t}) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

então o ***sistema de EDOs de primeira ordem não homogêneo***

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + f_1(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) + f_2(t) \\ \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}x_n(t)}{\mathrm{d}t} = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + f_n(t) \end{cases}$$

pode ser escrito como

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{dX(t)}}{\mathrm{d}t} &= \mathsf{A(t)\cdot X(t) + F(t)} \\ \mathsf{X'(t)} &= \mathsf{A(t)\cdot X(t) + F(t)}. \end{aligned}$$

♣

Importante: *Se* $\mathsf{F(t)} = \vec{0}$*, então o sistema de EDOs é dito* ***homogêneo****.*

Exemplo 24.2 Mostre que, uma EDO linear de ordem 3,

$$a_3(t)y^{(3)}(t) + a_2(t)y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = g(t),$$

onde $a_3(t) \neq 0$, pode ser vista como um sistema de equações de primeira ordem.

Resolução: Primeiramente, escrevemos a EDO acima na forma

$$y^{(3)}(t) = \frac{1}{a_3(t)}[-a_2(t)y''(t) - a_1(t)y'(t) - a_0(t)y(t) + g(t)].$$

Denotemos $y_1(t) = y(t), y_2(t) = y'(t)$ e $y_3(t) = y''(t)$, assim

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_2(t), \\ y_2'(t) &= y_3(t), \\ y_3'(t) &= \frac{1}{a_3(t)}[-a_2(t)y_3(t) - a_1(t)y_2(t) - a_0(t)y_1(t) + g(t)]. \end{aligned}$$

Matricialmente, o sistema acima tem a forma

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{a_0(t)}{a_3(t)} & -\dfrac{a_1(t)}{a_3(t)} & -\dfrac{a_2(t)}{a_3(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{g(t)}{a_3(t)} \end{pmatrix}.$$

✍ **Exercício 1.** Escreva a seguinte equação diferencial

$$y''' + \ln x \cdot y'' + 3xy = x^2, \quad x \in (0, \infty)$$

na forma de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem.

Definição 24.3. (Vetor solução)

Um vetor solução, em um intervalo I, é qualquer matriz coluna

$$\mathsf{X}(\mathsf{t}) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

cujos elementos são funções diferenciáveis que verificam o sistema no intervalo dado. ♣

✍ **Exercício 2.** Verifique que, no intervalo $(-\infty, \infty)$,

$$\mathsf{X}_1(\mathsf{t}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} \qquad \text{e} \qquad \mathsf{X}_2(\mathsf{t}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{6t}$$

são soluções do sistema

$$\mathsf{X}'(\mathsf{t}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \mathsf{X}(\mathsf{t}).$$

24.3 Problema de Valor Inicial

Denotamos por t_0 um ponto em um intervalo I e

$$\mathsf{X}(\mathsf{t}_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathsf{X}_0 = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix},$$

onde $\gamma_i, \; i = 1, 2, \ldots, n$ são constantes dadas. Então, o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathsf{X}(\mathsf{t})}{\mathrm{d}t} = \mathsf{A}(\mathsf{t})\mathsf{X}(\mathsf{t}) + \mathsf{F}(\mathsf{t}), \\ \mathsf{X}(\mathsf{t}_0) = \mathsf{X}_0, \end{cases} \tag{24.1}$$

é um problema de valor inicial.

24.4 Sistemas de EDOs lineares e homogêneos

Nas próximas definições e teoremas, estamos preocupados apenas com sistemas de EDOs lineares e homogêneos. Sem dizê-lo, sempre admitiremos que a_{ij} são funções contínuas de t em algum intervalo comum I.

24.4.1 Princípio da superposição

O seguinte resultado é o princípio da superposição para soluções de sistemas lineares e homogêneos.

Teorema 24.1. (Princípio da superposição)

Seja $\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \ldots, \mathsf{X}_\mathsf{k}$ um conjunto de vetores solução do sistema homogêneo, $(\mathsf{X}'(\mathsf{t}) = \mathsf{A}(\mathsf{t})\mathsf{X}(\mathsf{t}))$, em um intervalo I. Então, a combinação linear

$$\mathsf{X}(\mathsf{t}) = c_1\mathsf{X}_1(\mathsf{t}) + c_2\mathsf{X}_2(\mathsf{t}) + \cdots + c_k\mathsf{X}_\mathsf{k}(\mathsf{t}),$$

onde os c_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ são constantes arbitrárias, é também solução no intervalo dado. ♡

24.4.2 Dependência e independência linear

Estamos interessados em obter soluções linearmente independentes para sistemas lineares e homogêneos.

Definição 24.4. (Dependência e independência linear)

*Seja $\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \ldots, \mathsf{X}_\mathsf{k}$ um conjunto de vetores solução do sistema homogêneo, $(\mathsf{X}'(\mathsf{t}) = \mathsf{A}(\mathsf{t})\mathsf{X}(\mathsf{t}))$, em um intervalo I. Dizemos que o conjunto é **linearmente dependente** no intervalo dado, se existem constantes $c_1, c_2, \ldots, c_k$ não simultaneamente nulas, tais que*

$$\mathsf{X}(\mathsf{t}) = c_1\mathsf{X}_1(\mathsf{t}) + c_2\mathsf{X}_2(\mathsf{t}) + \cdots + c_k\mathsf{X}_\mathsf{k}(\mathsf{t}) = \vec{0},$$

*para todo t no intervalo. Se o conjunto não é linearmente dependente dizemos que é **linearmente independente**.* ♣

24.4.3 Wronskiano

Introduzimos o conceito do determinante Wronskiano como um teste de independência linear, sem demonstrá-lo.

Teorema 24.2. (Wronskiano)

Sejam $\mathsf{X}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \mathsf{X}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \cdots, \mathsf{X}_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$, *$n$ vetores solução do sistema homogêneo. Uma condição necessária e suficiente para que o conjunto de soluções seja linearmente independente é que o Wronskiano*

$$W(\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \ldots, \mathsf{X}_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

para todo t em I. ♡

24.4.4 Solução geral para sistemas homogêneos

A seguinte definição nos diz como deve ser a forma para a solução de um sistema de EDOs homogêneo.

Definição 24.5. (Solução geral - Sistemas homogêneos)

Seja $\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \ldots, \mathsf{X}_k$ um conjunto fundamental de soluções do sistema homogêneo, $(\mathsf{X}'(\mathsf{t}) = \mathsf{A}(\mathsf{t})\mathsf{X}(\mathsf{t}))$, em um intervalo I. Define-se a **solução geral** *do sistema no intervalo como*

$$\mathsf{X}_h(\mathsf{t}) = c_1\mathsf{X}_1(\mathsf{t}) + c_2\mathsf{X}_2(\mathsf{t}) + \cdots + c_k\mathsf{X}_k(\mathsf{t}),$$

onde $c_i,\ i = 1, \ldots, n$ são constantes arbitrárias. ♣

Exercícios

1. Determine os autovalores e autovetores associados às seguintes matrizes:

(a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} -8 & -1 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$,

(e) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 9 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

(f) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Seja $y = y(t)$. Escreva as seguintes equações diferenciais na forma de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem:

(a) $y'' + 4e^t y' - 9t^2 y = 7t^2$,

(b) $y'' + 2ty' + y = \cos t$,

(c) $y''' + t^2 y' - e^t y = t$.

3. Verifique que o vetor X é uma solução para o sistema dado.

(a) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 7y, \end{cases} \qquad \mathsf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-5t}$

(b) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 4y, \end{cases} \qquad \mathsf{X} = \begin{pmatrix} 5\cos t \\ 3\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix} e^t,$

(c) $\mathsf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathsf{X}, \qquad \mathsf{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-3t/2},$

(d) $\mathsf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathsf{X}, \qquad \mathsf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} te^t,$

(e) $\mathsf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\mathsf{X}, \qquad \mathsf{X} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}\cos t \\ -\operatorname{sen} t + \cos t \end{pmatrix}.$

Respostas:

1. **(a)** $\lambda_1 = 6, \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ e $\lambda_2 = 1, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(b) $\lambda_1 = 0, \vec{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\lambda_2 = 3, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(c) $\lambda_1 = \lambda_2 = -4, \vec{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$,

(d) $\lambda_1 = \frac{3}{2}, \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\lambda_2 = \frac{1}{2}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(e) $\lambda_1 = 0, \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 9 \\ 45 \\ 25 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 4, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\lambda_3 = -4, \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(f) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -2, \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. **(a)** $y_1' = y_2,\ y_2' = 9t^2 y_1 - 4\mathrm{e}^t y_2 + 7t^2$,

(b) $y_1' = y_2,\ y_2' = -2t y_2 - y_1 + \cos t$,

(c) $y_1' = y_2,\ y_2' = y_3,\ y_3' = \mathrm{e}^t y_1 - t^2 y_2 + t$.

Aula 25: Soluções de sistemas de EDOs lineares e homogêneos.

25.1 Sistemas homogêneos

Supomos que $\mathsf{X}(\mathsf{t}) = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \vec{K}e^{\lambda t}$, com $k_1, k_2, \ldots, k_n$ constantes reais, é um vetor solução do sistema homogêneo $\mathsf{X}'(\mathsf{t}) = \mathsf{AX}(\mathsf{t})$. Então, $\mathsf{X}'(\mathsf{t}) = \vec{K}\lambda e^{\lambda t}$ de modo que o sistema se torna

$$\begin{aligned} \mathsf{X}'(\mathsf{t}) &= \mathsf{AX}(\mathsf{t}) \\ \vec{K}\lambda e^{\lambda t} &= \mathsf{A}\vec{K}e^{\lambda t}, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \mathsf{A}\vec{K} &= \lambda\vec{K} \\ (\mathsf{A} - \lambda\mathsf{I})\vec{K} &= \vec{0}. \end{aligned} \tag{25.1}$$

Para que a Eq.(25.1) tenha soluções não triviais, devemos ter

$$\det(\mathsf{A} - \lambda\mathsf{I}) = 0.$$

Esta equação polinomial, em λ, é chamada **equação característica** da matriz A. As soluções desta equação são os **autovalores** de A. Uma solução $\vec{K} \neq 0$ da Eq.(25.1), correspondendo a um autovalor λ, é chamado um **autovetor** de A. Vamos estudar três casos.

25.2 Autovalores reais e distintos

Quando a matriz A, $n \times n$, possui n autovalores reais e distintos, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, então um conjunto de n autovetores linearmente independentes, $\vec{K}_1, \vec{K}_2, \ldots, \vec{K}_n$, pode sempre ser encontrado e

$$\mathsf{X}_1 = \vec{K}_1 e^{\lambda_1 t}, \ \mathsf{X}_2 = \vec{K}_2 e^{\lambda_2 t}, \ \ldots, \ \mathsf{X}_n = \vec{K}_n e^{\lambda_n t}$$

é um conjunto fundamental de soluções do sistema homogêneo no intervalo $(-\infty, \infty)$.

Teorema 25.1. (Solução geral - Autovalores reais e distintos)

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, n autovalores reais e distintos da matriz de coeficientes A*, do sistema homogêneo* $\mathsf{X}' = \mathsf{AX}$ *e, sejam $\vec{K}_1, \vec{K}_2, \ldots, \vec{K}_n$ os autovetores correspondentes. Então, a solução geral do sistema* $\mathsf{X}' = \mathsf{AX}$*, no intervalo $(-\infty, \infty)$, é*

$$\mathsf{X} = c_1\vec{K}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\vec{K}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\vec{K}_n e^{\lambda_n t}.$$

♡

Exemplo 25.1 Sejam $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Resolva

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 3y. \end{cases}$$

Resolução: Pelo **Exemplo 24.1**, sabemos que a matriz

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},$$

possui dois autovalores reais e distintos. São eles: $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 6$. Os autovetores, associados aos autovalores λ_1 e λ_2, são

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

respectivamente.

A solução geral para o sistema de EDOs é

$$\mathsf{X(t)} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}.$$

25.3 Autovalores complexos

Teorema 25.2. (Solução geral - Autovalores complexos)

Sejam $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ os autovalores complexos da matriz A *de coeficientes do sistema homogêneo* $\mathsf{X}' = \mathsf{AX}$ *e, denotemos por $\vec{B}_1$ e $\vec{B}_2$ os vetores coluna definidos por*

$$\vec{B}_1 = \mathrm{Re}(\vec{v_1}) \qquad \vec{B}_2 = \mathrm{Im}(\vec{v_1}).$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathsf{X}_1(\mathsf{t}) &= (\vec{B}_1 \cos\beta t - \vec{B}_2 \operatorname{sen}\beta t)\mathrm{e}^{\alpha t}, \\ \mathsf{X}_2(\mathsf{t}) &= (\vec{B}_2 \cos\beta t + \vec{B}_1 \operatorname{sen}\beta t)\mathrm{e}^{\alpha t} \end{aligned}$$

são soluções linearmente independentes do sistema de EDOs, no intervalo $(-\infty, \infty)$. ♡

Exemplo 25.2 Sejam $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Resolva

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 6x - y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 5x + 4y. \end{cases}$$

Resolução: Primeiro, vamos determinar os autovalores associados à matriz do sistema de equações diferenciais. A equação característica é

$$\det(\mathsf{A} - \lambda\mathsf{I}) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(4-\lambda) + 5 = 0,$$

ou seja,

$$\lambda^2 - 10\lambda + 29 = 0.$$

Os autovalores são $\lambda_1 = 5 + 2i$ e $\lambda_2 = 5 - 2i$.

Para $\lambda_1 = 5 + 2i$: $(\mathsf{A} - \lambda_1\mathsf{I})\vec{v_1} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 1-2i & -1 \\ 5 & -1-2i \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_{\vec{v_1}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e, através de escalonamento tem-se

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-2i & -1 & 0 \\ 5 & -1-2i & 0 \end{array}\right) \; L_1 = (1+2i)L_1 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -1-2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

logo

$$5a_1 - (1+2i)a_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{(1+2i)}{5}a_2.$$

Portanto, o autovetor $\vec{v_1}$, associado ao autovalor $\lambda_1 = 5 + 2i$, é

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} \dfrac{(1+2i)}{5}a_2 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1+2i \\ 5 \end{pmatrix} a_2.$$

Como a_2 é arbitrário, podemos escolher, por conveniência, $a_2 = 5$, de modo a obter

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1+2i \\ 5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\vec{B_1}} + i \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{B_2}}$$

O autovetor $\vec{v_2}$ é o vetor complexo conjugado de $\vec{v_1}$, ou seja,

$$\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1-2i \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Portanto, pelo **Teorema 25.3**, a solução geral para o sistema de EDOs é dada por

$$\mathsf{X}(\mathsf{t}) = c_1 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cos 2t - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \operatorname{sen} 2t \right] \mathrm{e}^{5t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cos 2t + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \operatorname{sen} 2t \right] \mathrm{e}^{5t}.$$

Exercícios

1. Sejam $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$. Determine a solução geral para os sistemas dados.

(a) $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -3x - 2y, \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x' = 2y, \\ y' = -2x, \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = 2x + 4y, \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 4x + 3y, \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x' = -4x + 2y, \\ y' = -\frac{5}{2}x + 2y, \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x' = 6x - y, \\ y' = 5x + 2y, \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = -2x - y, \end{cases}$

(h) $\begin{cases} x' = 10x - 5y, \\ y' = 8x - 12y, \end{cases}$

(i) $\mathsf{X}' = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \mathsf{X}$

(j) $\begin{cases} x' = 2x + 2y, \\ y' = x + 3y, \end{cases}$

(k) $\begin{cases} x' = 5y + 4x, \\ y' = -2x + 6y, \end{cases}$

(l) $\mathsf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathsf{X}$

(m) $\mathsf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathsf{X}$

(n) $\mathsf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 0 \\ 5 & 10 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \mathsf{X}$

(o) $\begin{cases} x' = 2x + 4y + 4z, \\ y' = -2y - x, \\ z' = -x - 2z, \end{cases}$

(p) $\begin{cases} x' = y - x, \\ y' = x + 2y + z, \\ z' = 3y - z, \end{cases}$

2. Resolva os seguintes PVIs:

(a) $\mathsf{X}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathsf{X}, \quad \mathsf{X}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix},$

(b) $\mathsf{X}' = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \mathsf{X}, \quad \mathsf{X}(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix},$

(c) $\mathsf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathsf{X}, \quad \mathsf{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$

(d) $\mathsf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -12 & -14 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \mathsf{X}, \quad \mathsf{X}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}.$

Respostas:

1. **(a)** $x(t) = c_1 \mathrm{e}^t + c_2 \mathrm{e}^{-t},$
$y(t) = -c_1 \mathrm{e}^t - 3c_2 \mathrm{e}^{-t},$

(b) $x(t) = c_1 \operatorname{sen} 2t - c_2 \cos 2t,$
$y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t,$

(c) $x(t) = \mathrm{e}^{3t}(c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t),$
$y(t) = \mathrm{e}^{3t}[c_1(\operatorname{sen} t - \cos t) - c_2(\operatorname{sen} t + \cos t)],$

(d) $\mathsf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t},$

(e) $\mathsf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3t},$

(f) $\mathsf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 2\cos t - \operatorname{sen} t \\ 5\cos t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} 2\operatorname{sen} t + \cos t \\ 5\operatorname{sen} t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{4t},$

(g) $\mathsf{X} = c_1 \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t - \cos t \\ 2\cos t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\cos t - \operatorname{sen} t \\ 2\operatorname{sen} t \end{pmatrix},$

(h) $\mathsf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{8t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-10t},$

(i) $\mathsf{X} = c_1 \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t - \cos t \\ 2\cos t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} -\cos t - \operatorname{sen} t \\ 2\operatorname{sen} t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{4t},$

(j) $\mathsf{X} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{4t},$

(k) $\mathsf{X} = c_1 \begin{pmatrix} \cos 3t + 3\,\mathrm{sen}\, 3t \\ 2\cos 3t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5t} + c_2 \begin{pmatrix} \mathrm{sen}\, 3t - 3\cos 3t \\ 2\cos 3t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5t},$

(l) $\mathsf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t},$

(m) $\mathsf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t} + c_2 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\mathrm{sen}\, t \\ -\mathrm{sen}\, t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t} + c_3 \begin{pmatrix} \mathrm{sen}\, t \\ \cos t \\ \cos t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t},$

(n) $\mathsf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5t} + c_3 \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{7t},$

(o) $\mathsf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} -2\cos 2t + 2\,\mathrm{sen}\, 2t \\ \cos 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -2\cos 2t - 2\,\mathrm{sen}\, 2t \\ \mathrm{sen}\, 2t \\ \mathrm{sen}\, 2t \end{pmatrix},$

(p) $\mathsf{X} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t}.$

2. **(a)** $\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t/2} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t/2},$

(b) $\mathsf{X} = -2 \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + 2\,\mathrm{sen}\, 2t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5t} + 5 \begin{pmatrix} \mathrm{sen}\, 2t \\ \mathrm{sen}\, 2t - 2\cos 2t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5t},$

(c) $\mathsf{X} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t},$

(d) $\mathsf{X} = \begin{pmatrix} -25 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t} - \begin{pmatrix} \cos 5t - 5\,\mathrm{sen}\, 5t \\ \cos 5t \\ \cos 5t \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} \mathrm{sen}\, 5t + 5\cos 5t \\ \mathrm{sen}\, 5t \\ \mathrm{sen}\, 5t \end{pmatrix}.$

Aula 26: Soluções de sistemas de EDOs lineares e homogêneos (continuação).

26.1 Autovalores repetidos

Exemplo 26.1 Seja $\mathsf{X} = \mathsf{X}(t)$. Resolva o seguinte sistema

$$\mathsf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \mathsf{X}.$$

Resolução: Primeiro, vamos determinar os autovalores associados à matriz do sistema de equações diferenciais. A equação característica é

$$\det(\mathsf{A} - \lambda \mathsf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 + 8 + 8 - 4(1-\lambda) - 4(1-\lambda) - 4(1-\lambda) = 0,$$

ou seja,

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad -(\lambda+1)^2(\lambda-5) = 0.$$

Os autovalores são $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 5$.
Para $\lambda_1 = \lambda_2 = -1: \;\; (\mathsf{A} - \lambda_1 \mathsf{I})\vec{v_1} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e, através de escalonamento tem-se

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 = L_2 + L_1 \\ L_3 = L_3 - L_1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

logo

$$2a_1 - a_2 + a_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 - a_3.$$

Portanto,

$$\begin{pmatrix} a_2 - a_3 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v_1}} a_2 + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v_2}} a_3.$$

Como a_1 e a_2 são arbitrários, podemos escolher, por conveniência, $a_1 = a_2 = 1$, de modo a obter

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda_3 = 5: \;\; (\mathsf{A} - \lambda_3 \mathsf{I})\vec{v_3} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}}_{\vec{v_3}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e, através de escalonamento tem-se

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 = 2L_2 - L_1 \\ L_3 = 2L_3 + L_1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \end{array}\right) L_3 = L_3 + L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

logo

$$\begin{aligned} -6a_2 - 6a_3 = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_2 = -a_3, \\ -4a_1 - 2a_2 + 2a_3 = 0 \quad &\Rightarrow \quad -4a_1 = 2a_2 - 2a_3 = -2a_3 - 2a_3 = -4a_3 \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_3. \end{aligned}$$

Portanto, o autovetor $\vec{v_3}$, associado ao autovalor $\lambda_3 = 5$, é

$$\vec{v_3} = \begin{pmatrix} a_3 \\ -a_3 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} a_3.$$

Como a_3 é arbitrário, podemos escolher, por conveniência, $a_3 = 1$, de modo a obter

$$\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A solução geral para o sistema de EDOs é

$$\mathsf{X}(\mathsf{t}) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5t}.$$

Exercícios

1. Sejam $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$. Determine a solução geral para os sistemas dados.

(a) $\begin{cases} x' = 3x - y - z, \\ y' = x + y - z, \\ z' = x - y + z, \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x' = 3x + 2y + 4z, \\ y' = 2x + 2z, \\ z' = 4x + 2y + 3z, \end{cases}$

2. Resolva o seguinte PVI:

(a) $\mathsf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathsf{X}, \quad \mathsf{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$

Respostas:

1. **(a)** $\mathsf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t},$

(b) $\mathsf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{8t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t},$

2. **(a)** $\mathsf{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t}.$