# Revisão de Geometria Analítica

Profa. Ana Luísa D. Martins Lemos

April 10, 2018

# Revisão

- Vetor do ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ao ponto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$

$$\overrightarrow{P_0P_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$

- O vetor $\vec{v} = (1, 2, 3)$ equivale ao vetor que vai da origem $O = (0, 0, 0)$ ao ponto $P = (1, 2, 3)$

$$\vec{v} = \overrightarrow{OP} = (1 - 0, 2 - 0, 3 - 0)$$

- Comprimento do vetor $\overrightarrow{P_0P_1}$

$$\left|\overrightarrow{P_0P_1}\right| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$

  - Para calcular a distância entre dois pontos, basta calcular o tamanho do vetor entre esses dois pontos

# Revisão

- Soma de dois vetores $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

- Cálculo de vetor unitário na direção de $\vec{a}$

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

- Produto escalar entre os vetores $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

- Propriedades, sendo $k$ é um escalar:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(i)$ | $\vec{a}.\vec{a} = \|\vec{a}^2\|$ | $(vi)$ | $\|k\vec{a}\| = \|k\|\|\vec{a}\|$ |
| $(ii)$ | $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ | $(vii)$ | $\|\vec{a}.\vec{b}\| \leq \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$ |
| $(iii)$ | $\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$ | $(viii)$ | $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ |
| $(iv)$ | $(k.\vec{a}).\vec{b} = k(\vec{a}.\vec{b}) = \vec{a}.(k.\vec{b})$ | | |
| $(v)$ | $0.\vec{a} = 0$ | | |

# Revisão

- Se $\theta$ é o ângulo entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, então

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$$

Assim

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

- Dois vetores são ortogonais se

$$\vec{a}.\vec{b} = 0$$

- Dois vetores são paralelos se existe uma constante $k \neq 0$, tal que

$$\vec{b} = k\vec{a}$$

- Produto vetorial
  - Determinante de ordem 2

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

  - Determinante de ordem 3

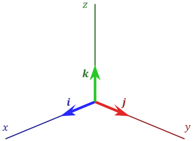
$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3$$

- Produto vetorial
  - Obtido substituindo $c_1$, $c_2$ e $c_3$ pelos vetores unitários nas direções dos eixos coordenados $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

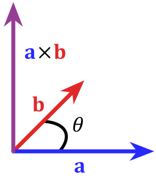
  - Modo conveniente de memorizar

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$



- Produto vetorial

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, -(a_1 b_3 - a_3 b_1), a_1 b_2 - a_2 b_1)$$



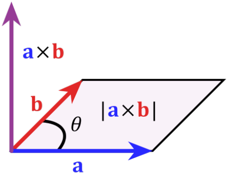

- O vetor resultante do produto vetorial é ortogonal a $\vec{a}$ e a $\vec{b}$

- Produto vetorial
  - Se $\theta$ é o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \theta$$

  - $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são paralelos se

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = 0$$



- Produto vetorial
  - Propriedades

$$
\begin{array}{ll}
(i) & \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \\
(ii) & (k\vec{a}) \times \vec{b} = k(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (k\vec{b}) \\
(iii) & \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \\
(iv) & (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \\
(v) & (\vec{a} \times \vec{b}).\vec{c} = \vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) \\
(vi) & \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c}) \times \vec{b} - (\vec{a}.\vec{b}) \times \vec{c}
\end{array}
$$