Propriedades de fechamento de linguagens regulares

União, Interseção, Diferença, Concatenação, Fechamento de Kleene, Reversão, Homomorfismo, Homomorfismo Inverso

Tradução dos slides do Prof. Jeffrey D. Ullman (Stanford University)

Propriedades de Fechamento

- Uma propriedade de fechamento é uma afirmação de que determinadas operações sobre linguagens, quando aplicadas às linguagens de uma classe (ex. Linguagens regulares), produz um resultado que também está na classe.
- Para as linguagens regulares, podemos usar qualquer das suas representações para provar uma propriedade de fechamento.

Fechamento sob a união

- Se L e M são linguagens regulares, então $L \cup M$ também é.
- Prova: Seja L e M linguagens das expressões regulares R and S, respectivamente.
- Então R+S é uma expressão regular cuja linguagem é $L \cup M$.

Fechamento sob a Concatenaçao e Fechamento de Kleene

- Mesma ideia:
  - RS é uma expressão regular cuja linguagem é LM.
  - R* é uma expressão regular cuja linguagem é L*.

Fechamento sob a Interseção

- Se L e M são linguagens regulares, $L \cap M$ também o é.
- Prova: Sejam A e B DFA's cujas linguagens são L e M, respectivamente.
- Construir C, o *produto dos autômatos* A e B.

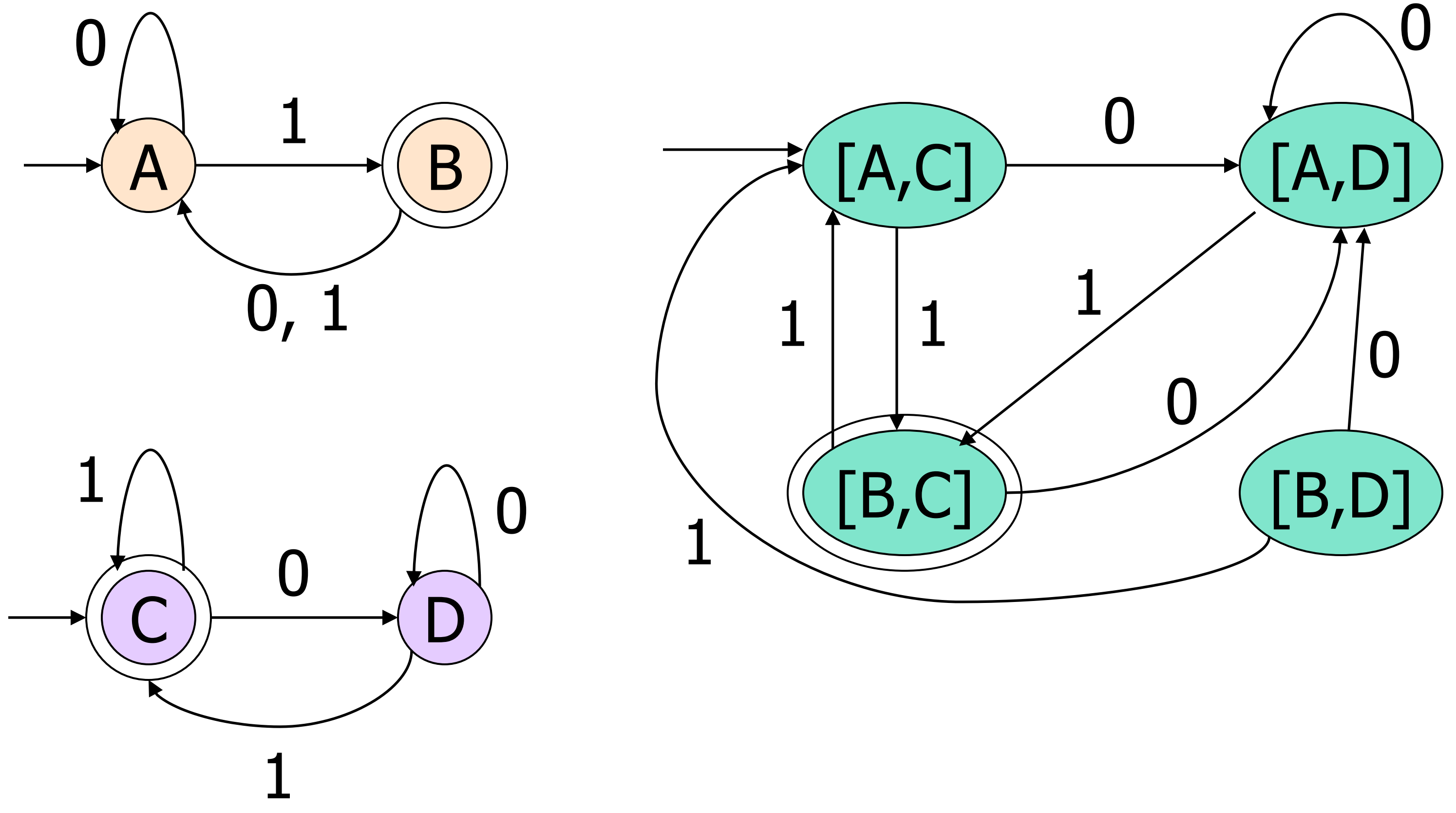
Produto de DFA’s

- Algoritmo envolve construir o *produto do DFA* a partir dos DFA’s para L and M.
- Seja estes DFA’s com conjunto de estados Q e R, respectivamente.
- Produto do DFA tem conjunto de estados QxR.
  - Ou seja, pares [q, r] com q em Q, r em R.

Produto de DFA's

- Estado Inicial = $[q_0, r_0]$ (estados iniciais dos DFA's para L, M).
- Transições: $\delta([q,r], a) = [\delta_L(q,a), \delta_M(r,a)]$
  - δ_L, δ_M são as funções de transição para os DFA's de L, M.
  - Simular os dois DFA's nos dois estados do produto do DFA.
- Seleciona-se como estados de aceitação de C todos os pares que são estado de aceitação em ambos DFA's.

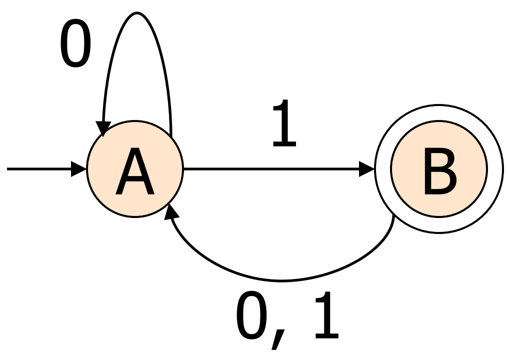
Exemplo: Produto de DFA's para Interseção

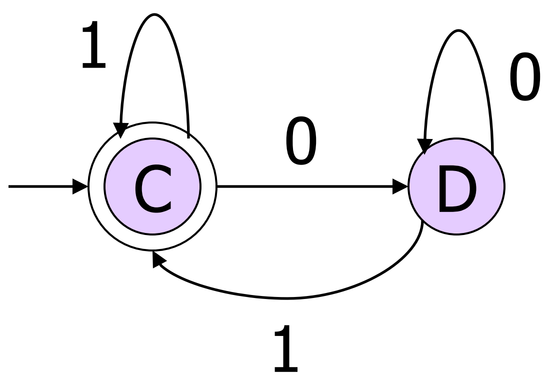


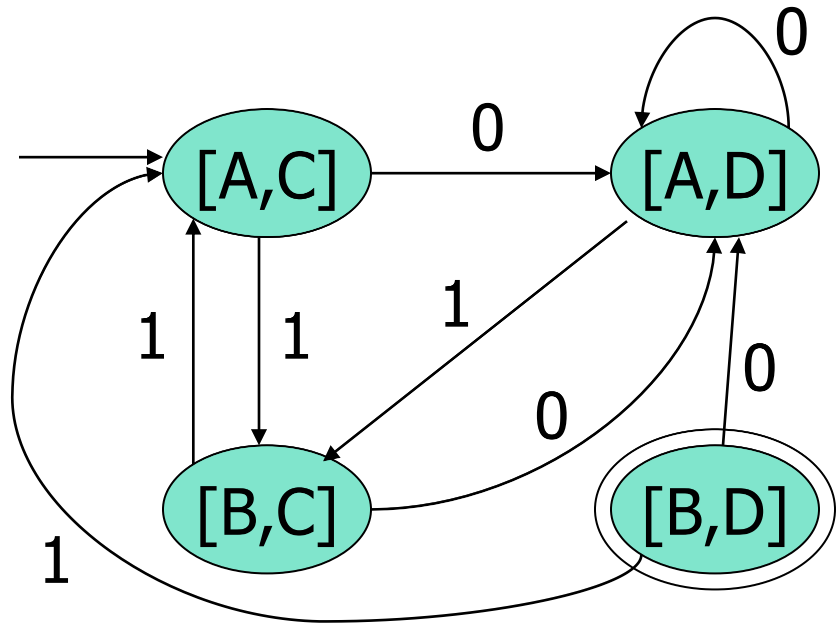
Fechamento sob a Diferença

- Se L e M são linguagens regulares, então *L – M* também o é. (strings que estão em L, mas não em M).
- Prova: Seja A e B DFA's cujas linguagens são L e M, respectivamente.
- Construir C, o produto dos autômatos A e B.
- Seleciona-se como estados de aceitação de C os pares que são estados de aceitação em A mas não em B.

Exemplo: Produto do DFA para Diferença







Observe: neste caso a diferença é a linguagem vazia

Fechamento sob o Complemento

- O *complemento* de uma linguagem L (com respeito a um alfabeto Σ tal que Σ^* contêm L) é $\Sigma^* - L$.
- Se L é uma linguagem regular sobre o alfabeto Σ, então $\overline{L} = \Sigma^* - L$ também é uma linguagem regular.

Fechamento sob a Reversão

- Dada a linguagem L, L^R é o conjunto de strings cujo reverso está em L.
- Example: $L = \{0, 01, 100\}$;
  $L^R = \{0, 10, 001\}$.
- Prova: Seja E a expressão regular para L.
- Mostramos que existe outra expressão regular E^R tal que $L(E^R) = (L(E))^R$.

Reversão de uma Expressão Regular

- **Base**: Se E é um símbolo a, ϵ, ou $\emptyset$, então $E^R = E$.
- **Indução**: Se E é
  - F+G, então $E^R = F^R + G^R$.
  - FG, então $E^R = G^R F^R$
  - F*, então $E^R = (F^R)^*$.

Exemplo: Reversão de uma RE

- Seja E = $\mathbf{01}^* + \mathbf{10}^*$.
- $E^R = (\mathbf{01}^* + \mathbf{10}^*)^R = (\mathbf{01}^*)^R + (\mathbf{10}^*)^R$
- $= (\mathbf{1}^*)^R\mathbf{0}^R + (\mathbf{0}^*)^R\mathbf{1}^R$
- $= (\mathbf{1}^R)^*\mathbf{0} + (\mathbf{0}^R)^*\mathbf{1}$
- $= \mathbf{1}^*\mathbf{0} + \mathbf{0}^*\mathbf{1}$.