Cálculo em Várias Variáveis
Diferenciabilidade, regra da cadeia

ICT-Unifesp

1. Diferenciabilidade

2. Exercícios

Mais detalhes nas Seção 14.4 do livro do Stewart e Seções 11.1 e 11.2 do livro do Guidorizzi. Recursos disponíveis online pela Biblioteca do ICT.

Diferenciabilidade

Diferenciabilidade

Diferenciabilidade

O que acontece com a aproximação linear ou com o plano tangente se as derivadas parciais f_x e f_y não são contínuas?

Diferenciabilidade

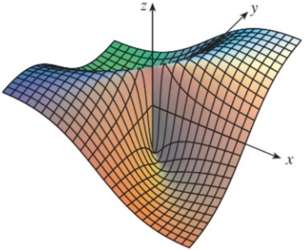
O que acontece com a aproximação linear ou com o plano tangente se as derivadas parciais f_x e f_y não são contínuas?

Considere, por exemplo, a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Temos que $f_x(0,0) = 0 = f_y(0,0)$, mas f_x e f_y não são contínuas.

Diferenciabilidade



A aproximação linear de f em $(0,0)$, neste caso, seria $f(x,y) \approx 0$, mas $f(x,y) = \dfrac{1}{2}$ ao longo da reta $y = x$. Para evitarmos esse tipo de comportamento, introduzimos a ideia de diferenciabilidade.

Diferenciabilidade

Lembremos que uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável (derivável) em $x_0 \in A$ se existe um número $a = f'(x_0) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a \\ \Leftrightarrow &\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-ah}{h} = 0 \\ \Leftrightarrow &\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-(f(x_0)+ah)}{|h|} = 0 \end{aligned}$$

Ou seja, $f(x_0) + ah$ está mais próximo de $f(x_0+h)$ do que a distância entre $x_0 + h$ e x_0, que é $|h|$.

Diferenciabilidade

Definição

Dada uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e dado* $(x_0, y_0) \in A$, *dizemos que* f *é* **diferenciável** *em* (x_0, y_0) *se existirem* $a, b \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - ah - bk}{\|(h, k)\|} = 0.$$

Notação:

$$E(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - ah - bk.$$

Diferenciabilidade

Teorema

Se f é diferenciável em (x_0, y_0), então f é contínua em (x_0, y_0).

Demonstração.

Como f é diferenciável em (x_0, y_0) e

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \|(h,k)\| = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2} = 0,$$

então

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|}\|(h,k)\| = 0 \Longrightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)} E(h,k) = 0$$
$$\Longrightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left(f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - ah - bk\right) = 0$$
$$\Longrightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)} f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0).$$

Diferenciabilidade

Teorema

Se f é diferenciável em (x_0, y_0), então existem as derivadas parciais de f em (x_0, y_0).

Demonstração.

Como f é diferenciável em (x_0, y_0), existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0 \Longrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{E(h,0)}{\|(h,0)\|} = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0) - ah}{|h|} = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = a \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = a.$$

Diferenciabilidade

Demonstração.

Analogamente,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0 \Longrightarrow \lim_{k\to 0} \frac{E(0,k)}{\|(0,k)\|} = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - bk}{|k|} = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} = b \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = b.$$

$\square$

Diferenciabilidade

Corolário

A função f é diferenciável em (x_0, y_0) se, e somente se, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existem e

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0,$$

onde

$$\boxed{E(h,k) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

Diferenciabilidade

Observação

Note que

$$L(\underbrace{x_0 + h}_{x}, \underbrace{y_0 + k}_{y}) = f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

é a linearização de f no ponto (x_0, y_0).

Assim, se f é uma função diferenciável, então a aproximação linear é uma boa aproximação perto de (x_0, y_0), pois

$$E(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - L(x_0 + h, y_0 + k) \to 0$$

quando $(h, k) \to (0, 0)$.

Diferenciabilidade

Teorema

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função,* A *um aberto e* $(x_0, y_0) \in A$. *Se as derivadas parciais de* f *em* A *existem e são contínuas em* (x_0, y_0), *então* f *é diferenciável neste ponto.*

Demonstração.

Ver Guidorizzi, vol 2, Seção 11.2. □

Diferenciabilidade

Teorema

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função, A um aberto e $(x_0, y_0) \in A$. Se as derivadas parciais de f em A existem e são contínuas em (x_0, y_0), então f é diferenciável neste ponto.

Demonstração.

Ver Guidorizzi, vol 2, Seção 11.2. $\square$

Corolário

Se uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é de classe $\mathcal{C}^1(A)$, então f é diferenciável em A.

Diferenciabilidade

Exemplo

A função $f(x, y) = x^2 + y^2$ *é diferenciável em* $\mathbb{R}^2$*, pois as derivadas parciais* $f_x(x, y) = 2x$ *e* $f_y(x, y) = 2y$ *existem e são contínuas em* $\mathbb{R}^2$*.*

Diferenciabilidade

Em resumo, para $X_0 = (x_0, y_0)$, temos

$$1.)\ \ f \text{ é diferenciável em } X_0 \iff \begin{cases} f \text{ admite derivadas parciais em } X_0 \\ \text{e } \displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0. \end{cases}$$

Diferenciabilidade

Em resumo, para $X_0 = (x_0, y_0)$, temos

1.) f é diferenciável em $X_0 \iff \begin{cases} f \text{ admite derivadas parciais em } X_0 \\ \text{e } \displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0. \end{cases}$

2.) f é diferenciável em $X_0 \Longrightarrow f$ é contínua em X_0.

Diferenciabilidade

Em resumo, para $X_0 = (x_0, y_0)$, temos

1.) f é diferenciável em $X_0 \Longleftrightarrow \begin{cases} f \text{ admite derivadas parciais em } X_0 \\ \text{e } \displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0. \end{cases}$

2.) f é diferenciável em $X_0 \Longrightarrow f$ é contínua em X_0.

3.) f é diferenciável em $X_0 \Longrightarrow f$ admite derivadas parciais em X_0.

Diferenciabilidade

Em resumo, para $X_0 = (x_0, y_0)$, temos

1.) f é diferenciável em $X_0 \Longleftrightarrow \begin{cases} f \text{ admite derivadas parciais em } X_0 \\ \text{e } \displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0. \end{cases}$

2.) f é diferenciável em $X_0 \Longrightarrow f$ é contínua em X_0.

3.) f é diferenciável em $X_0 \Longrightarrow f$ admite derivadas parciais em X_0.

4.) $\left.\begin{array}{l} f \text{ admite derivadas parciais em } B_r(X_0) \\ \text{e as derivadas parciais de } f \text{ são} \\ \text{contínuas em } X_0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$ f é diferenciável em X_0.

As conclusões que podem ser tiradas daí são:

1.) Se f não é contínua, então f não é diferenciável.

Diferenciabilidade

As conclusões que podem ser tiradas daí são:

1.) Se f não é contínua, então f não é diferenciável.

2.) Se uma das derivadas parciais de f não existe, então f não é diferenciável.

Diferenciabilidade

As conclusões que podem ser tiradas daí são:

1.) Se f não é contínua, então f não é diferenciável.

2.) Se uma das derivadas parciais de f não existe, então f não é diferenciável.

3.) Se as derivadas parciais de f existem, mas $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} \neq 0$, então f não é diferenciável.

Diferenciabilidade

Exemplo

Encontre os pontos em que a função abaixo é diferenciável.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se } \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Exemplo

Encontre os pontos em que a função abaixo é diferenciável.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Derivadas parciais de $f(x,y)$, para $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2(x^2+y^2) - x^3 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{0(x^2+y^2) - x^3 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

Diferenciabilidade

Para $(x, y) = (0, 0)$, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x - 0}{x} = 1,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{0 - 0}{y} = 0.$$

Portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + 3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Diferenciabilidade

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Assim, as derivadas parciais são contínuas para todo $(x,y) \neq (0,0)$ e, portanto, $f(x,y)$ é diferenciável para todo $(x,y) \neq (0,0)$.

Resta verificar o caso $(x,y) = (0,0)$.

Diferenciabilidade

Tomando a curva $y = x$, temos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\partial f}{\partial y}(x, x) = \lim_{x\to 0} \frac{-2x^4}{(x^2 + x^2)^2} = -\frac{1}{2} \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$$

Portanto, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ não é contínua em $(0, 0)$,

Diferenciabilidade

Tomando a curva $y = x$, temos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\partial f}{\partial y}(x, x) = \lim_{x \to 0} \frac{-2x^4}{(x^2 + x^2)^2} = -\frac{1}{2} \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$$

Portanto, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ não é contínua em $(0, 0)$, mas ainda não podemos afirmar nada sobre a diferenciabilidade de f em $(0, 0)$.

Devemos verificar usando o Corolário 1.1 (equivalência de diferenciabilidade).

Temos

$$E(h,k) = f(0+h,0+k) - f(0,0) - h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

$$\Longrightarrow E(h,k) = f(h,k) - 0 - h\cdot 1 - k\cdot 0$$

$$\Longrightarrow E(h,k) = \frac{h^3}{h^2+k^2} - h = \frac{-hk^2}{h^2+k^2}$$

Assim, f é diferenciável em $(0,0)$ se, e somente se,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Diferenciabilidade

Mas, tomando as curvas $(h, 0)$ e (h, h), temos:

$$\lim_{h\to 0} \frac{-h \cdot 0^2}{(h^2 + 0^2)\sqrt{h^2 + 0^2}} = 0$$

e

$$\lim_{h\to 0+} \frac{-h \cdot h^2}{(h^2 + h^2)\sqrt{h^2 + h^2}} = \lim_{h\to 0+} \frac{-h^3}{2h^3\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

O limite não existe e, então, $f(x, y)$ não é diferenciável em $(0, 0)$.

Portanto, f é diferenciável apenas para $(x, y) \neq (0, 0)$.

Diferenciabilidade

Observação

O teorema e o corolário estabelecem uma **condição suficiente**, *mas não necessária, para a diferenciabilidade.*

De fato, há funções diferenciáveis em um ponto, cujas derivadas parciais não são contínuas neste ponto.

Diferenciabilidade

Exemplo

Verifique a diferenciabilidade da função abaixo no ponto $(0, 0)$*:*

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cdot\ sen\,\dfrac{1}{x^2+y^2}, & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Diferenciabilidade

Exemplo

Verifique a diferenciabilidade da função abaixo no ponto $(0,0)$*:*

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cdot\ sen\,\dfrac{1}{x^2+y^2}, & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Derivadas parciais de $f(x,y)$, para $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

Para $(x, y) = (0, 0)$, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}}{x} = 0$$

Fazendo cálculos semelhantes, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Diferenciabilidade

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases} 2x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{se}(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases} 2y \operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{se}(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Diferenciabilidade

Observe que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(t,t) = \lim_{t\to 0} \left(2t \operatorname{sen} \frac{1}{2t^2} - \frac{1}{t} \cos \frac{1}{2t^2} \right) \text{ não existe,}$$

Diferenciabilidade

Observe que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(t,t) = \lim_{t\to 0} \left(2t \operatorname{sen} \frac{1}{2t^2} - \frac{1}{t} \cos \frac{1}{2t^2} \right) \text{ não existe,}$$

logo, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ não é contínua em $(0,0)$.

De modo análogo, mostramos que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ também não é contínua em $(0,0)$.

Contudo, como

$$\frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\|(h,k)\|}$$

$$= \frac{(h^2+k^2)\operatorname{sen}\dfrac{1}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \sqrt{h^2+k^2}\operatorname{sen}\frac{1}{h^2+k^2}$$

temos

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2}\operatorname{sen}\frac{1}{h^2+k^2} = 0.$$

Logo, f é diferenciável em $(0,0)$.

Diferenciabilidade

Exemplo

Verifique se a função abaixo é diferenciável no ponto $(1,0)$*:*

$$f(x,y) = xe^{xy}.$$

Exercícios

Do livro *"Um curso de cálculo"*, volume 2, Hamilton Guidorizzi (disponível na biblioteca online):

Seção 11.1: 1, 2.

Seção 11.2: 1, 2.