Cálculo em Várias Variáveis
Limite

ICT-Unifesp

1. Limite
   - Limite de funções de duas variáveis
   - Propriedades do limite
   - Limite de funções de três variáveis

2. Exercícios

Mais detalhes na Seção 14.2 do livro do Stewart. Recurso disponível online pela Biblioteca do ICT.

Limite

Limite de funções de duas variáveis

Limite de funções de duas variáveis

Definição

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* (a, b) *um ponto de acumulação de* D*. Então dizemos que o* **limite de** $f(x, y)$ **quando** (x, y) **tende a** (a, b) *é* L*, e indicamos isto por*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L,$$

se, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ *tal que* $\forall (x, y) \in D$ *tivermos*

$$0 < \|(x, y) - (a, b)\| < \delta \Longrightarrow |f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

As vezes escrevemos

$$f(x, y) \to L \text{ quando } (x, y) \to (a, b).$$

Limite de funções de duas variáveis

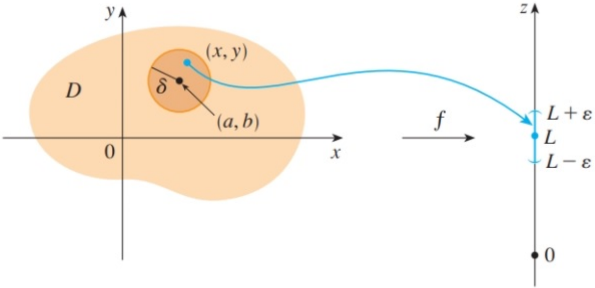


Figura: Stewart, J.; *Cálculo* - Volume 2

Limite de funções de duas variáveis

Exemplo

Se $f(x, y) = k$ *é uma função constante, então* $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ *temos:*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = k$$

Exemplo

Se $f(x,y) = k$ *é uma função constante, então* $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ *temos:*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = k$$

Seja $\varepsilon > 0$. Para qualquer $\delta > 0$ e $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $0 < \|(x,y) - (a,b)\| < \delta$, temos

$$|f(x,y) - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon.$$

Limite de funções de duas variáveis

Exemplo

Se $f(x, y) = x$, *então* $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ *temos:*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = a$$

Limite de funções de duas variáveis

Exemplo

Se $f(x,y) = x$, *então* $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ *temos:*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = a$$

Primeiro, note que

$$(x-a)^2 \leqslant (x-a)^2 + (y-b)^2 \Rightarrow |x-a| \leqslant \|(x,y)-(a,b)\|.$$

Seja $\varepsilon > 0$. Tomando $\delta = \varepsilon$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ com $0 < \|(x,y) - (a,b)\| < \delta$, obtemos

$$|f(x,y) - a| = |x - a| \leqslant \|(x,y) - (a,b)\| < \delta = \varepsilon.$$

Se o limite $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ existe, então $f(x,y)$ se aproxima de L não importa como (x,y) tende a (a,b).

Se o limite $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ existe, então $f(x,y)$ se aproxima de L não importa como (x,y) tende a (a,b).

Se $f(x,y) \to L_1$, quando $(x,y) \to (a,b)$ ao longo do caminho C_1 e $f(x,y) \to L_2$, quando $(x,y) \to (a,b)$ ao longo do caminho C_2, com $L_1 \neq L_2$, então o limite $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ não existe.

Exemplo

Seja $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. *Mostre que o limite* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *não existe.*

Limite de funções de duas variáveis

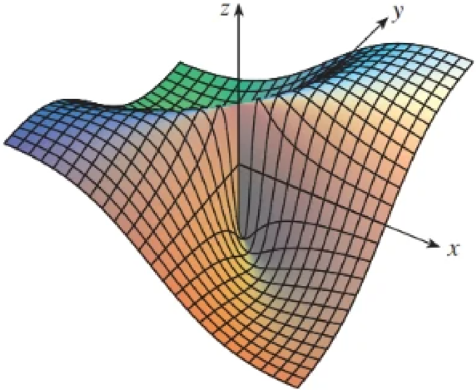
Exemplo

O limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ *existe?*

Limite de funções de duas variáveis

Exemplo

O limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ *existe?*



Importante!

Teorema

Se $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$*, então* $\lim\limits_{t\to t_0} f(\alpha(t)) = L$*, para qualquer curva* $\alpha : I \to \mathbb{R}^2, I \subset \mathbb{R}$*, tal que*

i.) α *é contínua em* t_0*,*

ii.) $\alpha(t_0) = (x_0, y_0)$*,*

iii.) $\alpha(t) \neq (x_0, y_0)$*, para* $t \neq t_0$*,*

iv.) $\alpha(t) \in Dom(f)$*, para* t *próximo de* t_0*.*

Importante!

Teorema

Se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$, *então* $\lim_{t\to t_0} f(\alpha(t)) = L$, *para qualquer curva* $\alpha : I \to \mathbb{R}^2, I \subset \mathbb{R}$, *tal que*

i.) α *é contínua em* t_0,

ii.) $\alpha(t_0) = (x_0, y_0)$,

iii.) $\alpha(t) \neq (x_0, y_0)$, *para* $t \neq t_0$,

iv.) $\alpha(t) \in Dom(f)$, *para* t *próximo de* t_0.

Esse é o resultado que nos permite dizer que se existem $\alpha(t) \neq \gamma(t)$ satisfazendo as condições do teorema, tais que

$$\lim_{t\to t_0} f(\alpha(t)) \neq \lim_{t\to t_0} f(\gamma(t)),$$

então o limite $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ não existe.

Limite de funções de duas variáveis

Exemplo

O limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ *existe?*

Limite

Propriedades do limite

Propriedades do limite

Suponha que

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,\, y) \;=\; L_1} \text{ e } \boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,\, y) \;=\; L_2}.$$

1. Se $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma constante, então
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \alpha f(x,\, y) \;=\; \alpha\, L_1 \,.$$

Propriedades do limite

Suponha que

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,\,y) \;=\; L_1} \text{ e } \boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,\,y) \;=\; L_2}\,.$$

1. Se $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma constante, então
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \alpha f(x,\,y) \;=\; \alpha\, L_1\,.$$

2. $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,\,y) + g(x,\,y)] \;=\; L_1 + L_2\,.$$

Propriedades do limite

Suponha que

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,\ y) \;=\; L_1} \text{ e } \boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,\ y) \;=\; L_2}.$$

1. Se $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma constante, então
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \alpha f(x,\ y) \;=\; \alpha\, L_1\,.$$
2. $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,\ y) + g(x,\ y)] \;=\; L_1 + L_2\,.$$
3. $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,\ y)\, g(x,\ y)] \;=\; L_1\, L_2\,.$$

Propriedades do limite

$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,\ y) \ = \ L_1}$ e $\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,\ y) \ = \ L_2}$.

4. $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left[\frac{f(x,\ y)}{g(x,\ y)}\right] \ = \ \frac{L_1}{L_2}\,, \quad \text{se} \quad L_2 \neq 0\,.$$

Propriedades do limite

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,\ y) \ = \ L_1} \text{ e } \boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,\ y) \ = \ L_2}.$$

4. $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left[\frac{f(x,\ y)}{g(x,\ y)}\right] \ = \ \frac{L_1}{L_2}, \quad \text{se} \quad L_2 \neq 0\,.$$

5. $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,\ y) \ = \ L_1 \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,\ y) - L_1] = 0$$

Propriedades do limite

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,\ y) \ = \ L_1} \text{ e } \boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,\ y) \ = \ L_2}.$$

4. $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left[\frac{f(x,\ y)}{g(x,\ y)}\right] \ = \ \frac{L_1}{L_2}, \quad \text{se} \quad L_2 \neq 0\,.$$

5. $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,\ y) \ = \ L_1 \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,\ y) - L_1] = 0$$

6. $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,\ y) = L_1 \Leftrightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)} [f(x_0 + h,\ y_0 + k)] \ = \ L_1$$

Propriedades do limite

Teorema (do Confronto)

Se $f(x,\, y) \,\leq\, g(x,\, y) \,\leq\, h(x,\, y)$ *para todo* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r$ *(com* $r > 0$*) e se*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,\, y) \,=\, L \,=\, \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,\, y),$$

então

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,\, y) \,=\, L\,.$$

Demonstração.

Exercício (análogo ao caso de funções de uma variável). □

Propriedades do limite

Dizemos que uma função $f : D \to \mathbb{R}$ (com $D \subset \mathbb{R}^2$) é limitada se existe uma constante real $M > 0$ tal que

$$|f(x, y)| \leq M, \qquad \forall\, (x, y) \in D\,.$$

Dizemos que uma função $f : D \to \mathbb{R}$ (com $D \subset \mathbb{R}^2$) é limitada se existe uma constante real $M > 0$ tal que

$$|f(x,\, y)| \,\leq\, M, \qquad \forall\, (x,\, y) \in D\,.$$

ATENÇÃO!!! Existem funções limitadas para as quais $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,\, y)$ NÃO existe!!!

Propriedades do limite

Exemplo

A função $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$ *é* *limitada* *(pois* $|f(x, y)| \leq 1, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$*),* *mas* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ *não existe!!!*

Propriedades do limite

Teorema

Se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$ *e existe* $r > 0$ *tal que* $|g(x,y)| \leq M \in \mathbb{R}$ *(g é limitada) para todo* $(x,y) \in D_f$ *com* $0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < r$, *então*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y)g(x,y)] = 0\,.$$

Demonstração.

Exercício (análogo ao caso de funções de uma variável, usar Teorema do Confronto). □

Exemplo

Calcule $\lim_{(x,y)\to(a,b)} (x+y)$.

Já vimos que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$ e $\lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b$.

Logo,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (x+y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} x + \lim_{(x,y)\to(a,b)} y = a + b$$

Propriedades do limite

Exemplo

Calcule $\lim_{(x,y)\to(a,b)} (x+y)$.

Já vimos que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$ e $\lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b$.

Logo,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (x+y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} x + \lim_{(x,y)\to(a,b)} y = a+b$$

Exemplo

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} x^2 = \lim_{(x,y)\to(a,b)} (x\cdot x) = a\cdot a = a^2$$

Propriedades do limite

Exemplo

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ *e* $k \in \mathbb{R}$. *Então*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} kx^m y^n = ka^m b^n$$

Propriedades do limite

Exemplo

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ *e* $k \in \mathbb{R}$. *Então*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} kx^m y^n = ka^m b^n$$

Exemplo

Seja $P(x, y)$ *uma função polinomial. Então*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} P(x, y) = P(a, b)$$

Propriedades do limite

Exemplo

Sejam $P(x,y)$ *e* $Q(x,y)$ *funções polinomiais com* $\lim_{(x,y)\to(a,b)} Q(x,y) \neq 0$. *Então*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = \frac{P(a,b)}{Q(a,b)}$$

Propriedades do limite

Exemplo

Calcule $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$.

Propriedades do limite

Exemplo

Calcule $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$.

Exemplo

O limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ *existe?*

Limite de funções de três variáveis

Tudo o que vimos sobre limite para funções de duas variáveis se estende naturalmente para funções de três (ou mais) variáveis.

Limite de funções de três variáveis

Tudo o que vimos sobre limite para funções de duas variáveis se estende naturalmente para funções de três (ou mais) variáveis.

Exemplo

O limite $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xz}{x^2+y^2+z^2}$ *existe?*

Limite de funções de três variáveis

Definição

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* (a, b, c) *um ponto de acumulação de* A*. Então dizemos que o* **limite de** $f(x, y, z)$ **quando** (x, y, z) **tende a** (a, b, c) *é* L*, e indicamos isto por*

$$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x, y, z) = L,$$

se, $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 | \forall (x, y, z) \in A,$ *tivermos* $0 < \|(x, y, z) - (a, b, c)\| < \delta \Longrightarrow |f(x, y, z) - L| < \varepsilon.$

Exemplo

Calcule o limite abaixo ou mostre que o limite não existe,

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - y^2 - 2x + 2y}$$

Limite

Exemplo

Calcule o limite abaixo ou mostre que o limite não existe,

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{2x^2 - xy - y^2}{x^2 - y^2}$$

Exercícios

Seção 14.2 do Stewart: 1–34, 51–53.