Cálculo em Várias Variáveis

Exemplos: teoremas de Stokes e do Divergente

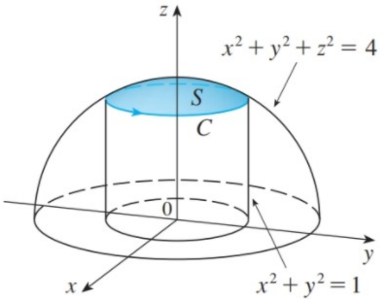
ICT-Unifesp

Exemplos: teoremas de Stokes e do Divergente

Exemplos: teoremas de Stokes e do Divergente

Exemplo

Calcule a integral $\iint_S \text{rot}\, \vec{F} \cdot d\vec{S}$, *onde* $\vec{F}(x, y, z) = xz\, \vec{i} + yz\, \vec{j} + xy\, \vec{k}$ *e* S *é a parte da esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ *que está dentro do cilindro* $x^2 + y^2 = 1$ *e acima do plano* xy.



A curva fronteira C é obtida resolvendo as equações $x^2+y^2+z^2=4$ e $x^2+y^2=1$, o que resulta em $z^2=3$, isto é, $z=\sqrt{3}$, pois $z\geq 0$. Assim, C é a circunferência descrita por $x^2+y^2=1$ e $z=\sqrt{3}$.

A curva fronteira C é obtida resolvendo as equações $x^2+y^2+z^2=4$ e $x^2+y^2=1$, o que resulta em $z^2=3$, isto é, $z=\sqrt{3}$, pois $z\geq 0$. Assim, C é a circunferência descrita por $x^2+y^2=1$ e $z=\sqrt{3}$.

Uma parametrização de C é

$$\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \operatorname{sen} t\,\vec{j} + \sqrt{3}\,\vec{k},\ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

A curva fronteira C é obtida resolvendo as equações $x^2+y^2+z^2=4$ e $x^2+y^2=1$, o que resulta em $z^2=3$, isto é, $z=\sqrt{3}$, pois $z\geq 0$. Assim, C é a circunferência descrita por $x^2+y^2=1$ e $z=\sqrt{3}$.

Uma parametrização de C é

$$\vec{r}(t)=\cos t\,\vec{i}+\operatorname{sen} t\,\vec{j}+\sqrt{3}\,\vec{k},\ 0\leq t\leq 2\pi.$$

Logo, $\vec{r}'(t)=-\operatorname{sen} t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}$.

Além disso,

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \sqrt{3}\cos t\,\vec{i} + \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,t\,\vec{j} + \cos t\,\mathrm{sen}\,t\,\vec{k}.$$

Portanto, pelo Teorema de Stokes,

$$\begin{aligned}\iint_S \mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot d\vec{S} &= \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot \vec{r}'(t)dt \\ &= \int_0^{2\pi}(-\sqrt{3}\cos t\,\mathrm{sen}\,t + \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,t\cos t)dt \\ &= \sqrt{3}\int_0^{2\pi} 0dt = 0.\end{aligned}$$

Note que no exemplo anterior, calculamos a integral de superfície apenas conhecendo os valores de $\vec{F}$ na fronteira C. Logo, se tivermos outra superfície orientada com a mesma fronteira C, obteremos o mesmo valor para a integral de superfície.

Assim, nas condições do Teorema de Stokes, se S_1 e S_2 são superfícies orientadas com mesma fronteira orientada C, então

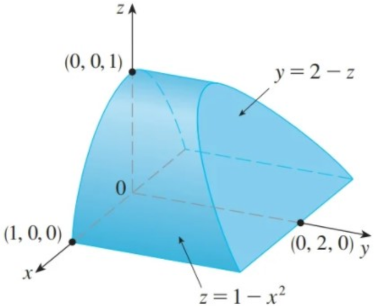
$$\iint_{S_1} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_2} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Esse fato é especialmente útil quando for difícil calcular a integral sobre uma das superfícies, mas for mais fácil sobre a outra.

Exemplos: teoremas de Stokes e do Divergente

Exemplo

Vamos calcular $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, *onde* $\vec{F}(x, y, z) = xy\,\vec{i} + (y^2 + e^{xz^2})\vec{j} + \mathit{sen}(xy)\vec{k}$ *e* S *é a superfície da região* E *delimitada pelo cilindro parabólico* $z = 1 - x^2$ *e os planos* $z = 0$, $y = 0$ *e* $y + z = 2$.



Note que seria muito trabalhoso calcular o fluxo de $\vec{F}$ através de S (seria necessário resolver quatro integrais de superfície).

Note também que o divergente de $\vec{F}$ tem expressão mais simples do que $\vec{F}$:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + e^{xz^2}) + \frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{sen} xy) = 3y.$$

Para usarmos o Teorema do Divergente, escrevemos E como

$$E=\{(x,y,z)\,|\,-1\leq x\leq 1,\,0\leq z\leq 1-x^2,\,0\leq y\leq 2-z\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} &= \iiint_E \operatorname{div}\vec{F}dV = \iiint_E 3y\,dV\\ &= 3\int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2}\int_0^{2-z} y\,dy\,dz\,dx = \cdots = \frac{184}{35}.\end{aligned}$$