Cálculo em Várias Variáveis

Rotacional e divergente.

ICT-Unifesp

Mais detalhes na Seção 16.5 do livro do Stewart.

Rotacional

Rotacional

Definição

Dado um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$,

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k},$$

com derivadas parciais de primeira ordem contínuas, o **rotacional** *de* $\vec{F}$ *é a função vetorial*

$$rot\,\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Rotacional

Apenas para efeito de memorização, podemos escrever

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

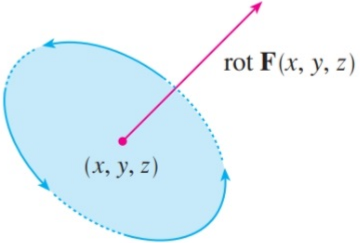
$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Por essa razão, o rotacional de um campo vetorial $\vec{F}$ é também denotado por $\nabla \times \vec{F}$.

Interpretação física do rotacional

Suponha que $\vec{F}$ represente um campo vetorial de velocidades de um fluido.

As partículas do fluido que estão próximas do ponto (x, y, z) tendem a girar em torno do eixo que aponta na direção do vetor rot $\vec{F}(x, y, z)$, formando um redemoinho.



Rotacional

O comprimento do rotacional no ponto (x, y, z), dado por $\left\| \text{rot}\, \vec{F}(x, y, z) \right\|$, indica quão rápido as partículas giram em torno desse eixo.

Se $\text{rot}\, \vec{F}(x, y, z) = \vec{0}$, então o fluido é isento de rotações em (x, y, z).

Rotacional

Exemplo

Seja $\vec{F}(x,y,z) = xyz\vec{i} + \ sen\,(x)\vec{j} + \ln(yz)\vec{k}$. *Então*

$$rot\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xyz & sen\,x & \ln(yz) \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{y}\right)\vec{i} + (xy)\vec{j} + (cos\,x - xz)\vec{k}.$$

Rotacional

Lembremos que $\nabla f(x, y, z)$ é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$. O teorema a seguir nos diz que o rotacional do campo gradiente é $\vec{0}$.

Teorema

Se f é uma função de três variáveis que tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então

$$rot \nabla f = \vec{0}.$$

Rotacional

Demonstração.

Temos que

$$\operatorname{rot} \nabla f = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right)\vec{i}$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)\vec{k}$$

$$= 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = \vec{0},$$

pelo Teorema de Schwarz-Clairaut. $\square$

Rotacional

Lembre que um campo vetorial é conservativo se $\vec{F} = \nabla f$.

Corolário

Se $\vec{F}$ é um campo vetorial conservativo, então $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$.

Rotacional

Lembre que um campo vetorial é conservativo se $\vec{F} = \nabla f$.

Corolário

Se $\vec{F}$ é um campo vetorial conservativo, então $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$.

A recíproca vale, se $\vec{F}$ está definido em todo o $\mathbb{R}^3$.

Teorema

Se $\vec{F}$ for um campo vetorial definido sobre o $\mathbb{R}^3$ (aberto e convexo) cujas funções componentes tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas e $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$, *então $\vec{F}$ é um campo vetorial conservativo.*

Exemplo

Usando o teorema anterior, podemos mostrar que $\vec{F}(x,y,z) = y^2z^3\,\vec{i} + 2xyz^3\,\vec{j} + 3xy^2z^2\,\vec{k}$ *é um campo vetorial conservativo.*

Rotacional

Observação

Se $\vec{F}$ é um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$,

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j},$$

com derivadas parciais de primeira ordem contínuas, podemos definir o **rotacional** *de $\vec{F}$ vendo-o como um campo vetorial no $\mathbb{R}^3$ com $R = 0$, fazendo*

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & O \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Divergente

Divergente

Definição

Se $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ *é um campo vetorial em* $\mathbb{R}^3$ *e as derivadas parciais* $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$ *e* $\partial R/\partial z$ *existem, então o* **divergente** *de* $\vec{F}$ *é a função de três variáveis*

$$div\,\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Divergente

Para efeito de memorização, podemos escrever o divergente em termos do operador ∇, fazendo

$$\nabla = (\partial/\partial x)\vec{i} + (\partial/\partial j)\vec{j} + (\partial/\partial z)\vec{k},$$

e

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}.$$

Divergente

Exemplo

Seja $\vec{F} = xz\,\vec{i} + xyz\,\vec{j} - y^2\vec{k}$. *Então*

$$\begin{aligned} div\,\vec{F} &= \nabla \cdot \vec{F} \\ &= \frac{\partial(xz)}{\partial x} + \frac{\partial(xyz)}{\partial y} + \frac{\partial(-y^2)}{\partial z} \\ &= z + xz. \end{aligned}$$

Lembremos que se $\vec{F}$ é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$, então rot $\vec{F}$ também é. Logo, podemos calcular o seu divergente e temos

Teorema

Se $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ e P, Q e R têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então

$$div\, rot\, \vec{F} = 0.$$

Divergente

Demonstração.

Pelas definições do rotacional e do divergente, temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{F} &= \nabla\cdot(\nabla\times\vec{F}) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right) \\
&\quad+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 R}{\partial y\partial x} \\
&\quad+\frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 P}{\partial z\partial y}=0,
\end{aligned}$$

pelo Teorema de Schwarz-Clairaut. $\square$

Interpretação física do divergente

Se $\vec{F}(x, y, z)$ é a velocidade de um fluido, então $\operatorname{div}\vec{F}(x, y, z)$ é a taxa de variação da massa do fluido escoando do ponto (x, y, z) por unidade de volume, isto é, $\operatorname{div}\vec{F}(x, y, z)$ mede a tendência de o fluido divergir do ponto (x, y, z).

Importância matemática do rotacional e divergente

Vimos que o Teorema Fundamental das Integrais de Linha é uma generalização do Teorema Fundamental do Cálculo. O Teorema de Green é também uma versão 2-dimensional do Teorema Fundamental das Integrais de Linha.

O Rotacional e o Divergente desempenharão papéis importantes na formulação do Teorema Fundamental em dimensões mais altas.

Forma vetorial do Teorema de Green

Forma vetorial do Teorema de Green

Vamos reescrever o Teorema de Green, em termos do divergente e do rotacional, em uma nova versão que será útil mais adiante.

Forma vetorial do Teorema de Green

Vamos reescrever o Teorema de Green, em termos do divergente e do rotacional, em uma nova versão que será útil mais adiante.

Considere uma região $D \subset \mathbb{R}^2$, sua curva fronteira C e funções P e Q que satisfazem as hipóteses do Teorema de Green.

Forma vetorial do Teorema de Green

Vamos reescrever o Teorema de Green, em termos do divergente e do rotacional, em uma nova versão que será útil mais adiante.

Considere uma região $D \subset \mathbb{R}^2$, sua curva fronteira C e funções P e Q que satisfazem as hipóteses do Teorema de Green. Se $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ é um campo vetorial, sabemos que sua integral de linha é

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C Pdx + Qdy.$$

Forma vetorial do Teorema de Green

Considerando $\vec{F}$ como um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ com $R = 0$, temos

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Forma vetorial do Teorema de Green

Logo,

$$(\operatorname{rot}\vec{F})\cdot\vec{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}\cdot\vec{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Logo,

$$(\text{rot}\,\vec{F}) \cdot \vec{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \cdot \vec{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Assim, a primeira forma vetorial do Teorema de Green é dada por

Teorema (de Green)

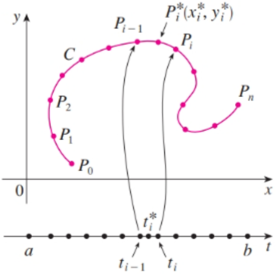
$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D (rot\,\vec{F}) \cdot \vec{k}\, dA.$$

Forma vetorial do Teorema de Green

Para compreendermos a segunda forma vetorial do Teorema de Green, vejamos que, dados um campo escalar f definido em uma região $D \subset \mathbb{R}^2$ e uma curva C, parametrizada por $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, cuja imagem está contida em D, podemos calcular a integral de linha de f ao longo de C.

Forma vetorial do Teorema de Green

Para compreendermos a segunda forma vetorial do Teorema de Green, vejamos que, dados um campo escalar f definido em uma região $D \subset \mathbb{R}^2$ e uma curva C, parametrizada por $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, cuja imagem está contida em D, podemos calcular a integral de linha de f ao longo de C.



Assim, a integral de linha de f sobre C é dada por

$$\int_C f(x,y)ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta_{S_i},$$

se o limite existir.

Forma vetorial do Teorema de Green

Assim, a integral de linha de f sobre C é dada por

$$\int_C f(x,y)ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta_{S_i},$$

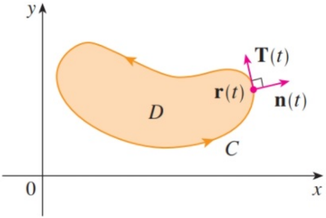
se o limite existir.

Segue da fórmula para o comprimento de arco que

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(x(t),y(t))\|\vec{r'}(t)\|dt.$$

Agora, seja C uma curva fechada simples, parametrizada por $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$. Temos

- Vetor tangente unitário: $\vec{T}(t) = \left(\dfrac{x'(t)}{\|\vec{r'}(t)\|}, \dfrac{y'(t)}{\|\vec{r'}(t)\|} \right)$,
- Vetor normal unitário: $\vec{n}(t) = \left(\dfrac{y'(t)}{\|\vec{r'}(t)\|}, \dfrac{-x'(t)}{\|\vec{r'}(t)\|} \right)$.

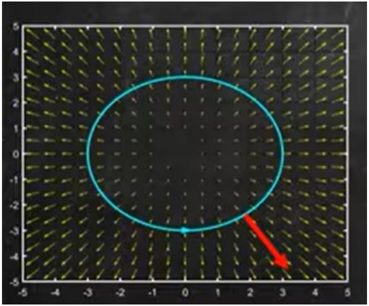


Forma vetorial do Teorema de Green

Vamos calcular o fluxo de um campo vetorial $\vec{F}$ definido em $D \subset \mathbb{R}^2$ através da curva C, isto é, a tendência do campo vetorial de estar alinhado ao campo normal da curva,

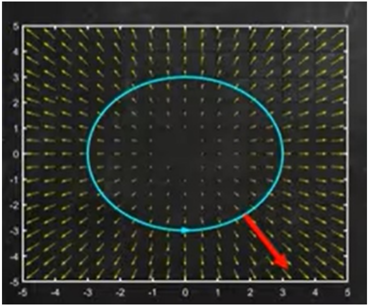
Forma vetorial do Teorema de Green

Vamos calcular o fluxo de um campo vetorial $\vec{F}$ definido em $D \subset \mathbb{R}^2$ através da curva C, isto é, a tendência do campo vetorial de estar alinhado ao campo normal da curva,



Forma vetorial do Teorema de Green

Vamos calcular o fluxo de um campo vetorial $\vec{F}$ definido em $D \subset \mathbb{R}^2$ através da curva C, isto é, a tendência do campo vetorial de estar alinhado ao campo normal da curva,



$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds$$

Forma vetorial do Teorema de Green

Então

$$
\begin{aligned}
\oint_C \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds &= \int_a^b (\vec{F} \cdot \vec{n})(t) \|\vec{r'}(t)\| dt \\
&= \int_a^b \left(\frac{P(x(t), y(t))y'(t)}{\|\vec{r'}(t)\|} - \frac{Q(x(t), y(t))x'(t)}{\|\vec{r'}(t)\|} \right) \|\vec{r'}(t)\| dt \\
&= \int_a^b P(x(t), y(t))y'(t) - Q(x(t), y(t))x'(t) dt \\
&= \oint_C P dy - Q dx = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA,
\end{aligned}
$$

pelo Teorema de Green.

Forma vetorial do Teorema de Green

Como o integrando na integral dupla é o divergente de $\vec{F}$, temos uma segunda forma vetorial do Teorema de Green:

Teorema (de Green)

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = \iint_D div\, \vec{F}(x, y) dA.$$

Forma vetorial do Teorema de Green

Exemplo

Considere o campo vetorial $\vec{F}(x, y) = (0, y^3)$. *Calcule o fluxo de* $\vec{F}$ *através da curva* C *formada pelas quatro arestas do retângulo* $1 \leq x \leq 3$, $1 \leq y \leq 2$. *Considere o campo normal unitário apontando para fora do retângulo.*

Forma vetorial do Teorema de Green

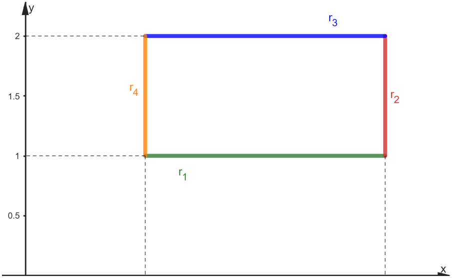
O fluxo do campo $\vec{F}$ através de C é dado por

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \int_C \left(P(x(t), y(t))y'(t) - Q(x(t), y(t))x'(t) \right) dt,$$

onde C é a união dos segmentos que compõe as arestas do retângulo: $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$.

Para calcularmos esta integral de linha (de um campo escalar) devemos parametrizar os quatro segmentos de reta e calcular o campo tangente em cada caso.

Forma vetorial do Teorema de Green



$$\begin{array}{llll}
\vec{r_1}(t) = (1+2t, 1), & \vec{r_1'}(t) = (2,0), & \vec{n_1}(t) = (0,-2), & \\
\vec{r_2}(t) = (3, 1+t), & \vec{r_2'}(t) = (0,1), & \vec{n_2}(t) = (1,0), & \text{com } 0 \leq t \leq 1. \\
\vec{r_3}(t) = (3-2t, 2), & \vec{r_3'}(t) = (-2,0), & \vec{n_3}(t) = (0,2), & \\
\vec{r_4}(t) = (1, 2-t), & \vec{r_4'}(t) = (0,-1), & \vec{n_4}(t) = (-1,0), &
\end{array}$$

Forma vetorial do Teorema de Green

Temos

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \int_0^1 (0,1) \cdot (0,-2) dt = -2,$$

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \int_0^1 (0,(1+t)^3) \cdot (1,0) dt = 0,$$

$$\int_{C_3} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \int_0^1 (0,8) \cdot (0,2) dt = 16,$$

$$\int_{C_4} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \int_0^1 (0,(1-t)^3) \cdot (-1,0) dt = 0.$$

Logo,

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \int_{C_1} \vec{F} \cdot \vec{n} ds + \int_{C_3} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = -2 + 16 = 14$$

Forma vetorial do Teorema de Green

Logo,

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \int_{C_1} \vec{F} \cdot \vec{n} ds + \int_{C_3} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = -2 + 16 = 14$$

Plote o campo $\vec{F}$ e analise: por que as integrais através de C_2 e C_4 se anularam?

Forma vetorial do Teorema de Green

Aplicando o teorema anterior, temos

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = \iint_D \operatorname{div} \vec{F}(x, y) dA,$$

onde $\operatorname{div} \vec{F}(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial x} 0 + \dfrac{\partial}{\partial y} y^3 = 3y^2$ e D é o retângulo cheio (arestas e interior), isto é,

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds &= \iint_D \operatorname{div} \vec{F}(x, y) dA \\ &= \int_1^3 \int_1^2 3y^2 dy dx = 14. \end{aligned}$$

Exercícios

Seção 16.5 do Stewart (p. 989): 1–33.