Universidade Federal de São Paulo

Noções gerais de probabilidade

Professor

Julio Cezar

Aula de hoje

- Teoria da Probabilidade;

- Propriedades.

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Introdução

Vimos que a análise de um conjunto de dados por meio de técnicas numéricas e gráficas permite que tenhamos uma boa ideia da distribuição desse conjunto. Em particular, a distribuição de frequências é um instrumento importante para avaliarmos a variabilidade das observações de um fenômeno aleatório. A partir dessas frequências observadas podemos calcular medidas de posição, como média e mediana, etc, e também variabilidade, como variância, desvio padrão, etc.

INTRODUÇÃO

Essas frequências e medidas calculadas a partir dos dados são estimativas de quantidades desconhecidas, associadas em geral a populações das quais os dados foram extraídos na forma de amostras. Em particular, as frequências (relativas) são estimativas de **probabilidades** de ocorrências de certos eventos de interesse.

Introdução

Com suposições adequadas, e sem observarmos diretamente o fenômeno aleatório de interesse, podemos criar um modelo teórico que reproduza de maneira razoável a distribuição das frequências, quando o fenômeno é observado diretamente. Tais modelos são chamados **modelos probabilísticos** e serão objeto de estudo nas nossas aulas daqui em diante.

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Tipos de Fenômenos

Determinístico vs Probabilístico

Fenômenos Determinísticos

Dizemos que um experimento é determinístico quando repetido inúmeras vezes, em condições semelhantes, conduz a resultados essencialmente idênticos.

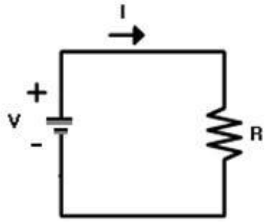
TIPOS DE FENÔMENOS

Determinístico vs Probabilístico

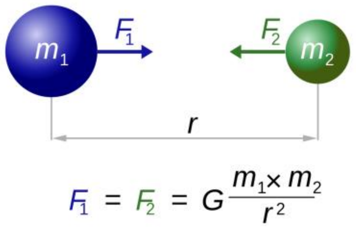
Fenômenos Determinísticos

Dizemos que um experimento é determinístico quando repetido inúmeras vezes, em condições semelhantes, conduz a resultados essencialmente idênticos.

Exemplo: Leis da Física



- Lei de Ohm (uma das leis fundamentais da eletricidade): $I = V/R$



- Aceleração de gravidade

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

TIPOS DE FENÔMENOS

Determinístico vs Probabilístico

Fenômenos Aleatórios

Os experimentos que repetidos sob as mesmas condições geram resultados diferentes, são chamados de experimentos aleatórios.

Tipos de Fenômenos

Determinístico vs Probabilístico

Fenômenos Aleatórios

Os experimentos que repetidos sob as mesmas condições geram resultados diferentes, são chamados de experimentos aleatórios.

Exemplo:

- Lançamento de uma moeda;
- Lançamento de um dado, etc.

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Tipos de Fenômenos

Fenômenos Aleatórios

Observar uma amostra de n tomates quanto ao número de tomates com defeitos graves

Coletar uma amostra de 100 tilápias de um lago e observar o número de fêmeas

Medir a altura de uma arvore

Medir a produção de uma parcela de cana-de-açucar

Colocar 20 sementes em um germinador e contar, Após determinado tempo, o número de sementes germinadas

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Tipos de Fenômenos

Determinístico vs Probabilístico

Fenômenos Aleatórios

Exemplo:

- Lançamento de um dado.

Podemos obter os seguintes valores $X = \{3, 1, 4, 2, 2, 5, 6, 5, 4, 4, \ldots\}$ qual o próximo valor?

- Não somos capazes de dizer qual será o próximo valor.
- Mas podemos determinar a probabilidade de cada saída possível.

TEORIA DAS PROBABILIDADE

O que é a Teoria da Probabilidade?

- É a base teórica para o desenvolvimento das técnicas estatística.

Qual o objetivo da teoria de probabilidade?

- Construir ou fornecer ferramentas matemáticas adequadas para descrever **fenômenos aleatórios**.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Teoria das Probabilidade

O que precisamos para começar?

- Contagem e operações com conjuntos;
- Descrever o **conjunto** de resultados possíveis do **fenômeno aleatório** de interesse;
- Atribuir **pesos** a cada possível resultado, que reflitam a suas incertezas de ocorrência.

Conceitos Fundamentais

Espaço Amostral: Conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório.

- Pode conter um número finito ou infinito de pontos.
- Exemplo: $\{cara, coroa\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $\mathbb{R}_+$.
- Notação Ω.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Conceitos Fundamentais

Pontos amostrais: São os elementos que compõem o Ω.

- Notação ω.
- Exemplo: $\omega_1 = cara, \omega_2 = coroa$.

Eventos: Todo resultado ou subconjunto de resultados de um experimento aleatório.

- Em geral são denotados por A, B, C,...
- Exemplos: A= “sair cara”, B= “sair face ímpar”.

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Conceitos Fundamentais

Exemplo 1: Retirar uma carta de um baralho de 52 cartas.

- **Espaço amostral:** $\Omega = \{\clubsuit A, \clubsuit 2, \ldots, \heartsuit A, \ldots, \spadesuit A, \ldots, \diamondsuit J, \diamondsuit Q, \diamondsuit K\}$
- **Pontos amostrais:** $\omega_1 = \clubsuit A,\ \omega_2 = \clubsuit 2,\ \ldots,\ \omega_{52} = \diamondsuit K.$
- **Eventos:** A = “sair um ás”, B = “sair um letra”, C = “sair uma carta de copas”.

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Conceitos Fundamentais

Exemplo 2: Experimento quanto à duração do tempo de vida de uma lâmpada (em horas) até queimar.

- **Espaço amostral:** $\Omega = \mathbb{R}_+$ ou $\{t|t \geq 0\}$;
- **Pontos amostrais:** espaço amostral é infinito;
- **Eventos:** A = "tempo é menor que 30 horas", B = $\{t|t \geq 50\}$.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Conceitos Fundamentais

Um **espaço amostral** que contém um **número finito** ou **um número infinito, mas enumerável de elementos** é chamado um **espaço amostral discreto.**

Exemplos:

Lançamento de um dado: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ **número finito** de elementos.

Aparecer uma reação ao antibiótico: $\Omega = \{$ R, NR, NNR, NNNR, NNNNR,NNNNNR,....$\}$ **infinito, mas enumerável**, a lista não termina mas pode ser arranjado em uma sequência.

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Conceitos Fundamentais

Quando o **espaço amostral** inclui todos os números em algum intervalo da reta real, ele é chamado um **espaço amostral contínuo**.

Exemplos:

Tempo de duração de um computador: $\Omega = \{t: t \geq 0\}$.

Aumento de altura x e mudança de peso y de crianças após 3 meses tomando vitamina:

$\Omega = \{(x,y): x \text{ real} \geq 0, y \text{ real positivo, 0 ou real negativo}\}$.

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Operações com eventos

Relações entre eventos:

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Operações com eventos

Relações entre eventos:

- **Conjunto vazio:** $\emptyset$

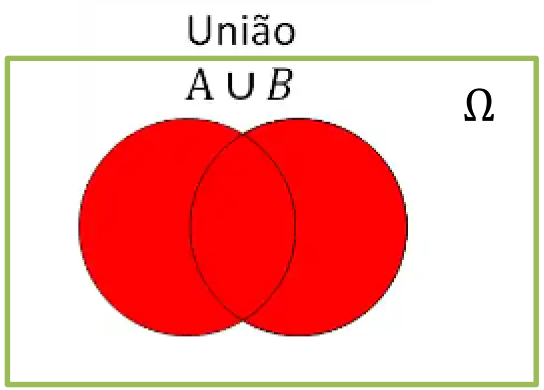
UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

OPERAÇÕES COM EVENTOS

Relações entre eventos:

- **Conjunto vazio:** $\emptyset$
- **União:** é o evento que consiste da união de todos os pontos amostrais dos eventos que a compõem. Denotamos a união do evento A com B por AUB,

AUB = $\{\omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}$



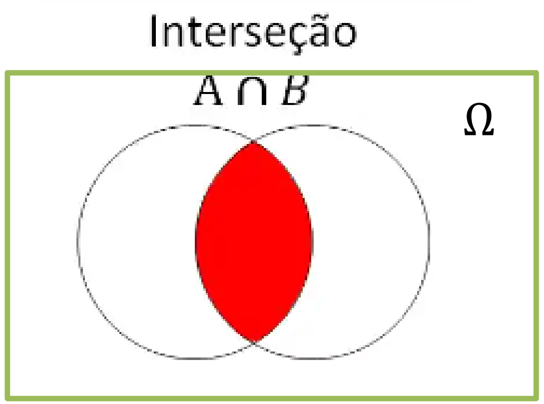
UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Operações com eventos

Relações entre eventos:

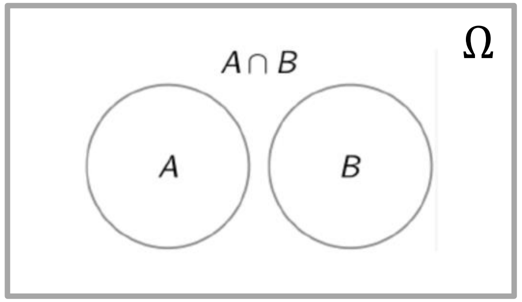
- **Interseção:** é o evento composto pelos pontos amostrais comuns aos eventos que o compõem . Denotamos a intersecção do evento A com B por A∩B,

A∩B = $\{\omega \in A \text{ e } \omega \in B\}$



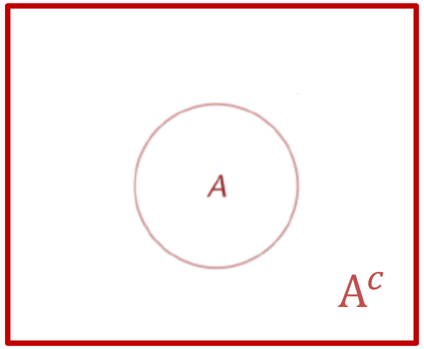
Relações entre eventos:

- **Disjuntos (multuamente exclusivos):** são eventos que possuem intersecção nula, ou seja, A∩B=∅.



- **Complementar:** são eventos que a união é o espaço amostral, ou seja,

$A \cup A^c = \Omega, A^c$ ou $\bar{A}$.



Operações com eventos

Exemplos:

Considere o lançamento de um dado e os eventos: A = $\{1, 2, 3, 4\}$, B = $\{\omega, |\omega \leq 3\}$ e C = face par

1) $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{1, 2, 3, 4\}\; ou \;\{1, 2, 3\} =$

Operações com eventos

Exemplos:

Considere o lançamento de um dado e os eventos: A = $\{1, 2, 3, 4\}$, B = $\{\omega, |\omega \leq 3\}$ e C = face par

1) $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{1, 2, 3, 4\}\, ou\, \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 4\}$

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

OPERAÇÕES COM EVENTOS

Exemplos:

Considere o lançamento de um dado e os eventos: A = $\{1, 2, 3, 4\}$, B = $\{\omega, |\omega \leq 3\}$ e C = face par

1) $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{1, 2, 3, 4\}\ ou\ \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 4\}$

2) $\mathrm{A} \cup \mathrm{C} = \{1, 2, 3, 4\}\ ou\ \{2, 4, 6\} =$

Operações com eventos

Exemplos:

Considere o lançamento de um dado e os eventos: A = $\{1, 2, 3, 4\}$, B = $\{\omega, |\omega \leq 3\}$ e C = face par

1) $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{1, 2, 3, 4\}\ ou\ \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 4\}$
2) $\mathrm{A} \cup \mathrm{C} = \{1, 2, 3, 4\}\ ou\ \{2, 4,6\} = \{1, 2, 3, 4,6\}$

Operações com eventos

Exemplos:

Considere o lançamento de um dado e os eventos: A = $\{1, 2, 3, 4\}$, B = $\{\omega, |\omega \leq 3\}$ e C = face par

1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}\ ou\ \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 4\}$
2) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4\}\ ou\ \{2, 4,6\} = \{1, 2, 3, 4,6\}$
3) $B \cup C = \{1,2,3\} ou\ \{2,4,6\} =$

Operações com eventos

Exemplos:

Considere o lançamento de um dado e os eventos: A = $\{1, 2, 3, 4\}$, B = $\{\omega, |\omega \leq 3\}$ e C = face par

1) $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{1, 2, 3, 4\}\ ou\ \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 4\}$
2) $\mathrm{A} \cup \mathrm{C} = \{1, 2, 3, 4\}\ ou\ \{2, 4{,}6\} = \{1, 2, 3, 4{,}6\}$
3) $\mathrm{B} \cup \mathrm{C} = \{1{,}2{,}3\} ou\ \{2{,}4{,}6\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

Operações com eventos

Exemplos:

Considere o lançamento de um dado e os eventos: A = $\{1, 2, 3, 4\}$, B = $\{\omega, |\omega \leq 3\}$ e C = face par

1) $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{1, 2, 3, 4\}\, ou\, \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 4\}$
2) $\mathrm{A} \cup \mathrm{C} = \{1, 2, 3, 4\}\, ou\, \{2, 4{,}6\} = \{1, 2, 3, 4{,}6\}$
3) $\mathrm{B} \cup \mathrm{C} = \{1{,}2{,}3\} ou\, \{2{,}4{,}6\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
4) $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{1, 2, 3, 4\}\, e\, \{1, 2, 3\} =$

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Operações com eventos

Exemplos:

Considere o lançamento de um dado e os eventos: A = $\{1, 2, 3, 4\}$, B = $\{\omega, |\omega \leq 3\}$ e C = face par

1) $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{1, 2, 3, 4\}\ ou\ \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 4\}$
2) $\mathrm{A} \cup \mathrm{C} = \{1, 2, 3, 4\}\ ou\ \{2, 4,6\} = \{1, 2, 3, 4,6\}$
3) $\mathrm{B} \cup \mathrm{C} = \{1,2,3\} ou\ \{2,4,6\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
4) $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{1, 2, 3, 4\}\ e\ \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$

OPERAÇÕES COM EVENTOS

Exemplos:

Considere o lançamento de um dado e os eventos: A = $\{1, 2, 3, 4\}$, B = $\{\omega, |\omega \leq 3\}$ e C = face par

1) $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{1, 2, 3, 4\}\ ou\ \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 4\}$

2) $\mathrm{A} \cup \mathrm{C} = \{1, 2, 3, 4\}\ ou\ \{2, 4,6\} = \{1, 2, 3, 4,6\}$

3) $\mathrm{B} \cup \mathrm{C} = \{1,2,3\} ou\ \{2,4,6\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

4) $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{1, 2, 3, 4\}\ e\ \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$

5) $\mathrm{A} \cap C = \{1, 2, 3, 4\}\ e\ \{2, 4, 6\} =$ 

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

OPERAÇÕES COM EVENTOS

Exemplos:

Considere o lançamento de um dado e os eventos: A = $\{1, 2, 3, 4\}$, B = $\{\omega, |\omega \leq 3\}$ e C = face par

1) $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{1, 2, 3, 4\}\ ou\ \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 4\}$
2) $\mathrm{A} \cup \mathrm{C} = \{1, 2, 3, 4\}\ ou\ \{2, 4,6\} = \{1, 2, 3, 4,6\}$
3) $\mathrm{B} \cup \mathrm{C} = \{1,2,3\} ou\ \{2,4,6\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
4) $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{1, 2, 3, 4\}\ e\ \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$
5) $\mathrm{A} \cap C = \{1, 2, 3, 4\}\ e\ \{2, 4, 6\} = \{2, 4\}$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

OPERAÇÕES COM EVENTOS

Exemplos:

Considere o lançamento de um dado e os eventos: A = $\{1, 2, 3, 4\}$, B = $\{\omega, |\omega \leq 3\}$ e C = face par

1) $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{1, 2, 3, 4\}\ ou\ \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 4\}$
2) $\mathrm{A} \cup \mathrm{C} = \{1, 2, 3, 4\}\ ou\ \{2, 4,6\} = \{1, 2, 3, 4,6\}$
3) $\mathrm{B} \cup \mathrm{C} = \{1,2,3\} ou\ \{2,4,6\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
4) $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{1, 2, 3, 4\}\ e\ \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$
5) $\mathrm{A} \cap C\ = \{1, 2, 3, 4\}\ e\ \{2, 4, 6\} = \{2, 4\}$
6) $\mathrm{B} \cap \mathrm{C} = \{1, 2, 3\}\ e\ \{2, 4, 6\} =$ 

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Operações com eventos

Exemplos:

Considere o lançamento de um dado e os eventos: A = $\{1, 2, 3, 4\}$, B = $\{\omega, |\omega \leq 3\}$ e C = face par

1) $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{1, 2, 3, 4\}\ ou\ \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 4\}$
2) $\mathrm{A} \cup \mathrm{C} = \{1, 2, 3, 4\}\ ou\ \{2, 4,6\} = \{1, 2, 3, 4,6\}$
3) $\mathrm{B} \cup \mathrm{C} = \{1,2,3\} ou\ \{2,4,6\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
4) $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{1, 2, 3, 4\}\ e\ \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$
5) $\mathrm{A} \cap C = \{1, 2, 3, 4\}\ e\ \{2, 4, 6\} = \{2, 4\}$
6) $\mathrm{B} \cap \mathrm{C} = \{1, 2, 3\}\ e\ \{2, 4, 6\} = \{2\}$

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Operações com eventos

Exemplos:

Considere o lançamento de um dado e os eventos: A = $\{1, 2, 3, 4\}$, B = $\{\omega, | \omega \leq 3\}$ e C = face par

1) $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{1, 2, 3, 4\}\ ou\ \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 4\}$
2) $\mathrm{A} \cup \mathrm{C} = \{1, 2, 3, 4\}\ ou\ \{2, 4,6\} = \{1, 2, 3, 4,6\}$
3) $\mathrm{B} \cup \mathrm{C} = \{1,2,3\} ou\ \{2,4,6\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
4) $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{1, 2, 3, 4\}\ e\ \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$
5) $\mathrm{A} \cap C = \{1, 2, 3, 4\}\ e\ \{2, 4, 6\} = \{2, 4\}$
6) $\mathrm{B} \cap \mathrm{C} = \{1, 2, 3\} e \{2, 4, 6\} = \{2\}$
7) $\mathrm{A}^c =$  , $\mathrm{B}^c =$  e $\mathrm{C}^c =$ 

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Operações com eventos

Exemplos:

Considere o lançamento de um dado e os eventos: A = $\{1, 2, 3, 4\}$, B = $\{\omega, |\omega \leq 3\}$ e C = face par

1) $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{1, 2, 3, 4\}\ ou\ \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 4\}$
2) $\mathrm{A} \cup \mathrm{C} = \{1, 2, 3, 4\}\ ou\ \{2, 4{,}6\} = \{1, 2, 3, 4{,}6\}$
3) $\mathrm{B} \cup \mathrm{C} = \{1{,}2{,}3\} ou\ \{2{,}4{,}6\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
4) $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{1, 2, 3, 4\}\ e\ \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$
5) $\mathrm{A} \cap C\ = \{1, 2, 3, 4\}\ e\ \{2, 4, 6\} = \{2, 4\}$
6) $\mathrm{B} \cap \mathrm{C} = \{1, 2, 3\} e \{2, 4, 6\} = \{2\}$
7) $\mathrm{A}^{\mathrm{c}} = \{5, 6\}$, $\mathrm{B}^{\mathrm{c}} = \{4, 5, 6\}$ e $\mathrm{C}^{\mathrm{c}} = \{1, 3, 5\}$

Definição de Probabilidade

$\boldsymbol{\sigma - \acute{a}lgebra}$**:** Uma classe de subconjunto de Ω, representada por $\mathcal{F}$, é denominada uma σ-álgebra que satisfaz as seguintes propriedades:

(P1) $\Omega \in \mathcal{F}$;

(P2) $A \in \mathcal{F}$, então $A^C \in \mathcal{F}$;

(P3) Se $A_i \in \mathcal{F}$, $i \geq 1$, então $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Qual nosso interesse?

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Definição de Probabilidade

$\boldsymbol{\sigma - \acute{a}lgebra}$: Uma classe de subconjunto de Ω, representada por $\mathcal{F}$, é denominada uma σ-álgebra que satisfaz as seguintes propriedades:

(P1) $\Omega \in \mathcal{F}$;

(P2) $A \in \mathcal{F}$, então $A^C \in \mathcal{F}$;

(P3) Se $A_i \in \mathcal{F}$, $i \geq 1$, então $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Qual nosso interesse?

Definir uma medida!!!

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

DEFINIÇÃO DE PROBABILIDADE

Definição Clássica: Baseia-se na característica teórica da realização do fenômeno (subconjunto equiprováveis (equiprovável é que possui a mesma probabilidade de se efetivar, de ocorrer)).

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\text{Número de elementos em } A}{\text{Número total de elementos em } \Omega}.$$

Definição Frequentista: Baseia-se na característica teórica da realização do fenômeno (subconjunto equiprováveis).

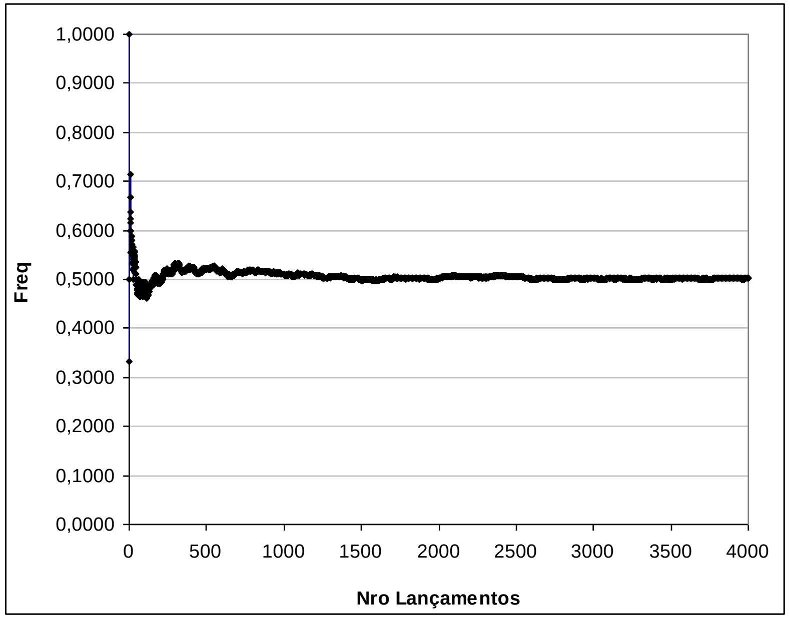
$$\mathrm{P(A)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}.$$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Definição de Probabilidade

Simulação: sorteio de um número aleatório 4000 vezes: cara (0) , coroa (1). Qual seria a probabilidade desse evento?

O experimento aleatório é repetido *n* vezes. Calcula-se a frequência relativa de ocorrência de um evento. Para um número grande de realizações, a frequência relativa aproxima-se da probabilidade.



UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Definição de Probabilidade

Probabilidades subjetivas: Subjetivo (avaliação pessoal do grau de viabilidade de um evento): A probabilidade é estimada com base no conhecimento de circunstâncias relevantes.

Exemplo: O dia amanheceu nublado, então saio de guarda-chuva pois tem grande probabilidade de chover.

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Axiomas da Probabilidade

Definição: Uma função $\mathbb{P}$, definida na σ-álgebra $\mathcal{F}$ do subconjunto de Ω e com valores em [0,1], é uma probabilidade se satisfaz os Axiomas de Kolmogorov:

a) $0 \leq \mathrm{P}(\mathrm{A}) \leq 1, \forall \mathrm{A} \subset \Omega;$

b) $\mathrm{P}(\Omega) = 1;$

c) Se $A_1, A_2, \dots,$ forem eventos mutuamente exclusivos (não podem ocorrer ao mesmo tempo), então:

$$\mathrm{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i).$$

- A tripla $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – espaço de probabilidade.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

TEOREMAS

Teorema 1: Seja A um evento de Ω

1) $\mathrm{P}(\emptyset) = 0.$
2) $\mathrm{P}(A^c) = 1 - \mathrm{P}(A).$

Teorema 2: Sejam A e B eventos quaisquer de Ω

1) $\mathrm{P}(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B).$
2) $\mathrm{P}(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$
3) Se $A \subset B$, então $\mathrm{P}(A) \leq P(B).$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

OBESERVAÇÃO

Temos ainda a seguinte fórmula para o cálculo de probabilidades:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

EXEMPLOS

Exemplo: A tabela a seguir apresenta dados relativos à distribuição de sexo e alfabetização em habitantes de Sergipe com idade entre 20 e 24 anos.

Sexo	Alfabetizado		Total
	Sim	Não	
Masc.	39.577	8.672	48.249
Fem.	46.304	7.297	53.601
Total	85.881	15.969	101.850

Fonte: IBGE- Censo 1991

Um jovem entre 20 e 24 anos é escolhido ao acaso em Sergipe.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

EXEMPLOS

Ω : conjunto de 101.850 jovens de Sergipe, com idade entre 20 e 24 anos.

Definimos os eventos:

M: jovem sorteado é do sexo masculino;
F: jovem sorteado é do sexo feminino;
S: jovem sorteado é alfabetizado;
N: jovem sorteado não é alfabetizado.

Qual a probabilidade associada a cada evento?

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

EXEMPLOS

Sexo	Alfabetizado		Total
	Sim	Não	
Masc.	39.577	8.672	48.249
Fem.	46.304	7.297	53.601
Total	85.881	15.969	101.850

$$P(M) = \frac{n^\circ \text{ de elementos em M}}{n^\circ \text{ de elementos em } \Omega} = \frac{48.249}{101.850} = 0{,}474$$

$$P(F) = \frac{n^\circ \text{ de elementos em F}}{n^\circ \text{ de elementos em } \Omega} = \frac{53.601}{101.850} = 0{,}526$$

$$P(S) = \frac{n^\circ \text{ de elementos em S}}{n^\circ \text{ de elementos em } \Omega} = \frac{85.881}{101.850} = 0{,}843$$

$$P(N) = \frac{n^\circ \text{ de elementos em N}}{n^\circ \text{ de elementos em } \Omega} = \frac{15.969}{101.850} = 0{,}157$$

EXEMPLOS

Sexo	Alfabetizado		Total
	Sim	Não	
Masc.	39.577	8.672	48.249
Fem.	46.304	7.297	53.601
Total	85.881	15.969	101.850

- ***Qual é a probabilidade do jovem escolhido ser alfabetizado e ser do sexo masculino?***

•$M \cap S$: jovem é alfabetizado e do sexo masculino

$$P(M \cap S) = \frac{\text{nº. de elementos em } M \cap S}{\text{nº. de elementos em } \Omega} = \frac{39577}{101850} = 0{,}389$$

EXEMPLOS

Sexo	Alfabetizado		Total
	Sim	Não	
Masc.	39.577	8.672	48.249
Fem.	46.304	7.297	53.601
Total	85.881	15.969	101.850

- ***Qual é a probabilidade do jovem escolhido ser alfabetizado ou ser do sexo masculino?***

$M \cup S$: jovem é alfabetizado ou é do sexo masculino

$$P(M \cup S) = \frac{\text{nº. de elementos em } M \cup S}{\text{nº. de elementos em } \Omega}$$

$$= \frac{85881 + 48249 - 39577}{101850} = 0{,}928$$

EXEMPLOS

Um dado equilibrado é lançado duas vezes e as faces resultantes observadas. Um espaço amostral natural seria $\Omega = \{1,2,\dots,6\} \times \{1,2,\dots,6\}$. Dessa forma, o espaço amostral é constituído de pares de valores, representando os resultados do primeiro e do segundo lançamento, respectivamente. Considere os eventos, **A: a soma dos resultados é impar** e **B: o resultado do primeiro lançamento é impar**. Encontre as probabilidades $P(A), P(B), \mathrm{P}(A \cup B)$.

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix}$$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

EXEMPLOS

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix}$$

EXEMPLOS

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix}$$

A

$$\begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix}$$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

EXEMPLOS

$$\Omega = \left\{\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{matrix}\right\}$$

A

$$\left\{\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{matrix}\right\}$$

B

$$\left\{\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{matrix}\right\}$$

EXEMPLOS

$$\Omega = \left\{\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{matrix}\right\}$$

A

$$\left\{\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{matrix}\right\}$$

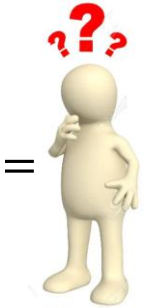
B

$$\left\{\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{matrix}\right\}$$

$P(A) =$

$P(B) =$

$P(A \cup B) =$



UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

EXEMPLOS

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{matrix} \right\}$$

A

$$\left\{ \begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{matrix} \right\}$$

B

$$\left\{ \begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{matrix} \right\}$$

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{P}(A \cup B) =$$

EXEMPLOS

$$\Omega = \left\{\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{matrix}\right\}$$

A

$$\left\{\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{matrix}\right\}$$

B

$$\left\{\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{matrix}\right\}$$

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{P}(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

EXEMPLOS

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix}$$

A

$$\begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix}$$

B

$$\begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix}$$

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ = 1/2 + 1/2 - 9/36 = 3/4

Resumo da Aula

- Teoria da Probabilidade;
- Propriedades.

PRÓXIMAS AULAS

- Probabilidade condicional e independência;
- Lei da Probabilidade Total;
- Teorema de Bayes.

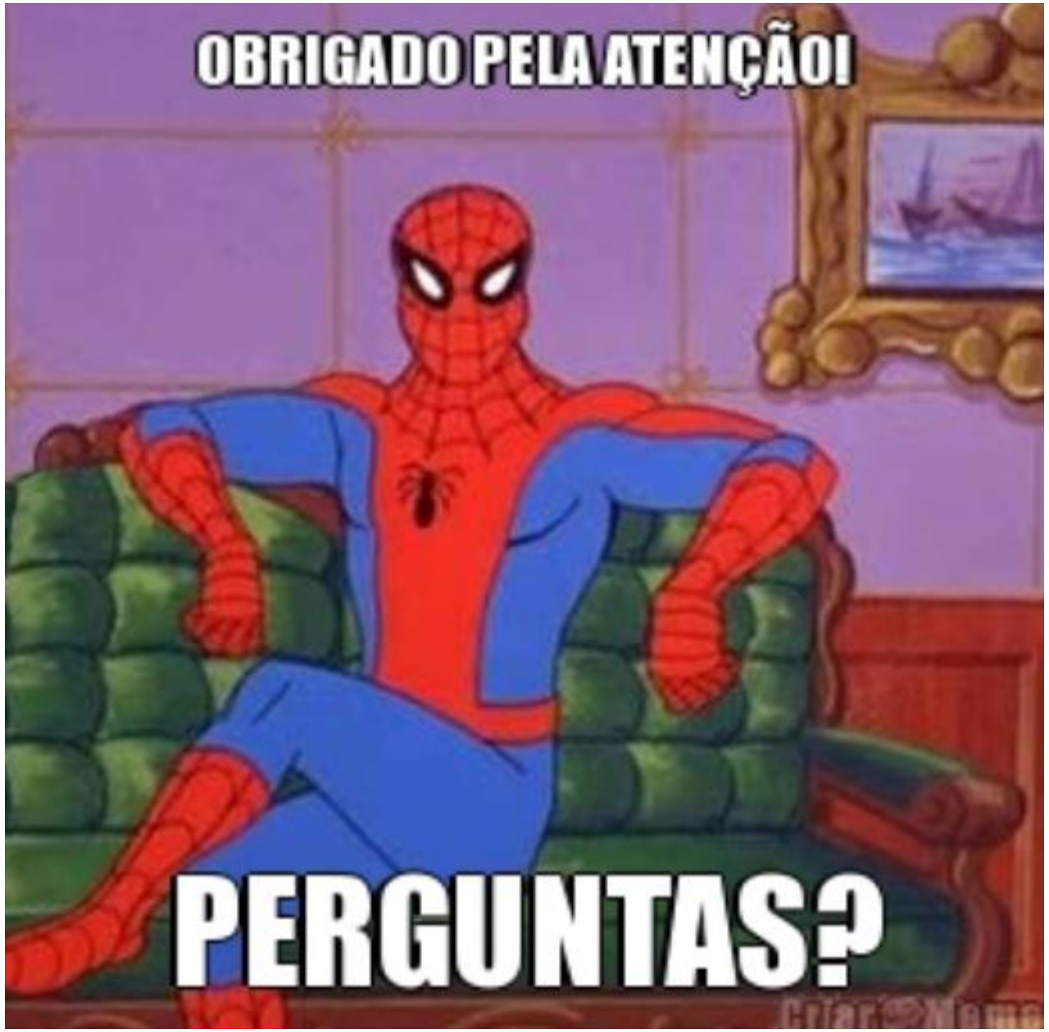
UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Referências

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros**. 6 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018. 628p.

MORETTIN, P. A.; BUSSAB, W. O. **Estatística básica**. 9 ed. São Paulo: Saraiva, 2017. 554p.

Class finished



UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933