Cálculo em Várias Variáveis

Limite e continuidade

ICT-Unifesp

Mais detalhes na Seção 14.2 do livro do Stewart. Recurso disponível online pela Biblioteca do ICT.

Limite

Limite de funções de várias variáveis

Definição

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* (a, b) *um ponto de acumulação de* D. *Então dizemos que o* **limite de** $f(x, y)$ **quando** (x, y) **tende a** (a, b) *é* L, *e indicamos isto por*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L,$$

se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ *tal que* $\forall (x, y) \in D$ *tivermos*

$$0 < \|(x, y) - (a, b)\| < \delta \Longrightarrow |f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

As vezes escrevemos

$$f(x, y) \to L \text{ quando } (x, y) \to (a, b).$$

Limite de funções de várias variáveis

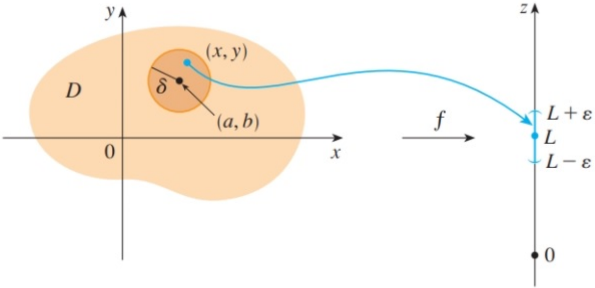


Figura: Stewart, J.; *Cálculo* - Volume 2

Exemplo

Se $f(x,y) = k$ é uma função constante, então $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ temos:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = k$$

Seja $\varepsilon > 0$. Para qualquer $\delta > 0$ e $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $0 < \|(x,y) - (a,b)\| < \delta$, temos

$$|f(x,y) - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon.$$

Exemplo

Se $f(x,y) = x$, *então* $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ *temos:*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = a$$

Primeiro, note que

$$(x-a)^2 \leqslant (x-a)^2 + (y-b)^2 \Rightarrow |x-a| \leqslant \|(x,y)-(a,b)\|.$$

Seja $\varepsilon > 0$. Tomando $\delta = \varepsilon$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ com $0 < \|(x,y)-(a,b)\| < \delta$, obtemos

$$|f(x,y) - a| = |x-a| \leqslant \|(x,y)-(a,b)\| < \delta = \varepsilon.$$

Limite de funções de várias variáveis

Se o limite $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ existe, então $f(x,y)$ se aproxima de L não importa como (x,y) tende a (a,b).

Se o limite $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ existe, então $f(x,y)$ se aproxima de L não importa como (x,y) tende a (a,b).

Se $f(x,y) \to L_1$, quando $(x,y) \to (a,b)$ ao longo do caminho C_1 e $f(x,y) \to L_2$, quando $(x,y) \to (a,b)$ ao longo do caminho C_2, com $L_1 \neq L_2$, então o limite $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ não existe.

Limite de funções de várias variáveis

Exemplo

Seja $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. *Mostre que o limite* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *não existe.*

Limite de funções de várias variáveis

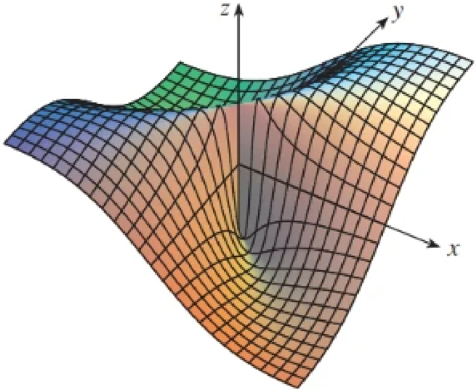
Exemplo

O limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ *existe?*

Limite de funções de várias variáveis

Exemplo

O limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ *existe?*



Importante!

Teorema

Se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$, *então* $\lim_{t\to t_0} f(\alpha(t)) = L$, *para qualquer curva* $\alpha : I \to \mathbb{R}^2, I \subset \mathbb{R}$, *tal que*

i.) α *é contínua em* t_0,

ii.) $\alpha(t_0) = (x_0, y_0)$,

iii.) $\alpha(t) \neq (x_0, y_0)$, *para* $t \neq t_0$,

iv.) $\alpha(t) \in Dom(f)$, *para t próximo de* t_0.

Importante!

Teorema

Se $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$, *então* $\lim\limits_{t\to t_0} f(\alpha(t)) = L$, *para qualquer curva* $\alpha : I \to \mathbb{R}^2, I \subset \mathbb{R}$, *tal que*

i.) α *é contínua em* t_0,

ii.) $\alpha(t_0) = (x_0, y_0)$,

iii.) $\alpha(t) \neq (x_0, y_0)$, *para* $t \neq t_0$,

iv.) $\alpha(t) \in Dom(f)$, *para* t *próximo de* t_0.

Esse é resultado que nos permite dizer que se existem $\alpha(t) \neq \gamma(t)$ satisfazendo as condições do teorema, tais que

$$\lim_{t\to t_0} f(\alpha(t)) \neq \lim_{t\to t_0} f(\gamma(t)),$$

então o limite $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ não existe.

Exemplo

O limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ *existe?*

Limite

Propriedades do limite

Propriedades do limite

Suponha que

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,\, y) \;=\; L_1} \text{ e } \boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,\, y) \;=\; L_2}.$$

1. Se $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma constante, então
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \alpha f(x,\, y) \;=\; \alpha\, L_1\,.$$

Propriedades do limite

Suponha que

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,\ y) \ = \ L_1} \ \text{e} \ \boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,\ y) \ = \ L_2}.$$

1. Se $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma constante, então
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \alpha f(x,\ y) \ = \ \alpha\, L_1\,.$$

2. $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,\ y) + g(x,\ y)] \ = \ L_1 + L_2\,.$$

Propriedades do limite

Suponha que

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,\,y) \;=\; L_1} \text{ e } \boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,\,y) \;=\; L_2}.$$

1. Se $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma constante, então
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \alpha f(x,\,y) \;=\; \alpha\, L_1\,.$$

2. $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,\,y) + g(x,\,y)] \;=\; L_1 + L_2\,.$$

3. $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,\,y)\, g(x,\,y)] \;=\; L_1\, L_2\,.$$

Propriedades do limite

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,\,y) \;=\; L_1} \text{ e } \boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,\,y) \;=\; L_2}.$$

$$4. \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left[\frac{f(x,\,y)}{g(x,\,y)}\right] \;=\; \frac{L_1}{L_2}, \quad \text{se} \quad L_2 \neq 0\,.$$

Propriedades do limite

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,\,y) \,=\, L_1} \text{ e } \boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,\,y) \,=\, L_2}.$$

4. $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left[\frac{f(x,\,y)}{g(x,\,y)}\right] \,=\, \frac{L_1}{L_2}, \quad \text{se} \quad L_2 \neq 0\,.$$

5. $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,\,y) \,=\, L_1 \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,\,y) - L_1] = 0$$

Propriedades do limite

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,\,y) \;=\; L_1} \text{ e } \boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,\,y) \;=\; L_2}.$$

4. $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left[\frac{f(x,\,y)}{g(x,\,y)}\right] \;=\; \frac{L_1}{L_2}, \quad \text{se} \quad L_2 \neq 0\,.$$

5. $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,\,y) \;=\; L_1 \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,\,y) - L_1] = 0$$

6. $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,\,y) = L_1 \Leftrightarrow \lim_{(h,\,k)\to(0,0)} [f(x_0 + h,\, y_0 + k)] \;=\; L_1$$

Propriedades do limite

Teorema (do Confronto)

Se $f(x,\, y) \,\leq\, g(x,\, y) \,\leq\, h(x,\, y)$ *para todo* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r$ *(com* $r > 0$*) e se*

$$\lim_{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)} f(x,\, y) \,=\, L \,=\, \lim_{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)} h(x,\, y),$$

então

$$\lim_{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)} g(x,\, y) \,=\, L\,.$$

Demonstração.

Exercício (análogo ao caso de funções de uma variável). □

Propriedades do limite

Dizemos que uma função $f : D \to \mathbb{R}$ (com $D \subset \mathbb{R}^2$) é limitada se existe uma constante real $M > 0$ tal que

$$|f(x,\, y)| \;\leq\; M, \qquad \forall\, (x,\, y) \in D\,.$$

Propriedades do limite

Dizemos que uma função $f : D \to \mathbb{R}$ (com $D \subset \mathbb{R}^2$) é limitada se existe uma constante real $M > 0$ tal que

$$|f(x,\, y)| \;\leq\; M, \qquad \forall\,(x,\, y) \in D\,.$$

ATENÇÃO!!! Existem funções limitadas para as quais $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,\, y)$ NÃO existe!!!

Propriedades do limite

Exemplo

A função $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$ *é* *limitada* *(pois* $|f(x, y)| \leq 1, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$*),*

mas $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ *não existe!!!*

Propriedades do limite

Teorema

Se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$ *e existe* $r > 0$ *tal que* $|g(x,y)| \leq M \in \mathbb{R}$ *(g é limitada) para todo* $(x,y) \in D_f$ *com* $0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < r$*, então*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y)g(x,y)] = 0\,.$$

Demonstração.

Exercício (análogo ao caso de funções de uma variável, usar Teorema do Confronto). $\square$

Exemplo

Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} (x+y)$.

Já vimos que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} x = a$ e $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} y = b$.

Logo,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (x+y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} x + \lim_{(x,y)\to(a,b)} y = a+b$$

Propriedades do limite

Exemplo

Calcule $\lim_{(x,y)\to(a,b)} (x+y)$.

Já vimos que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$ e $\lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b$.

Logo,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (x+y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} x + \lim_{(x,y)\to(a,b)} y = a + b$$

Exemplo

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} x^2 = \lim_{(x,y)\to(a,b)} (x \cdot x) = a \cdot a = a^2$$

Propriedades do limite

Exemplo

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ *e* $k \in \mathbb{R}$. *Então*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} kx^m y^n = ka^m b^n$$

Propriedades do limite

Exemplo

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ *e* $k \in \mathbb{R}$. *Então*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} kx^m y^n = ka^m b^n$$

Exemplo

Seja $P(x, y)$ *uma função polinomial. Então*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} P(x, y) = P(a, b)$$

Propriedades do limite

Exemplo

Sejam $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ funções polinomiais com $\lim_{(x,y)\to(a,b)} Q(x,y) \neq 0$. Então

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = \frac{P(a,b)}{Q(a,b)}$$

Propriedades do limite

Exemplo

Calcule $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}.$

Propriedades do limite

Exemplo

Calcule $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$.

Exemplo

O limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$ *existe?*

Limite de funções de três variáveis

Tudo o que vimos sobre limite para funções de duas variáveis se estende naturalmente para funções de três (ou mais) variáveis.

Limite de funções de três variáveis

Tudo o que vimos sobre limite para funções de duas variáveis se estende naturalmente para funções de três (ou mais) variáveis.

Exemplo

O limite $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xz}{x^2+y^2+z^2}$ *existe?*

Limite de funções de três variáveis

Exemplo

Calcule o limite abaixo ou mostre que o limite não existe,

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - y^2 - 2x + 2y}$$

Exercícios

Seção 14.2 do Stewart: 1–34, 51–53.