Transformações Geométricas 3D

Profa. Ana Luísa D. Martins Lemos

April 11, 2018

Introdução

- Métodos para transformações geométricas 3D são extensões de métodos 2D, incluindo a coordenada z
- A translação e a escala são simples adaptações, mas a rotação é mais complexa
  - Em 2D somente são consideradas rotações em torno de um eixo perpendicular ao plano xy
  - Em 3D pode-se considerar qualquer orientação espacial como eixo de rotação
- Uma posição 3D expressa em coordenadas homogêneas é representada usando vetores coluna de 4 elementos, portanto as transformações 3D são matrizes 4×4

Translação 3D

- Um objeto é movimentado adicionando-se *offsets* a cada uma das três direções Cartesianas

$$x' = x + t_x$$

$$y' = y + t_y$$

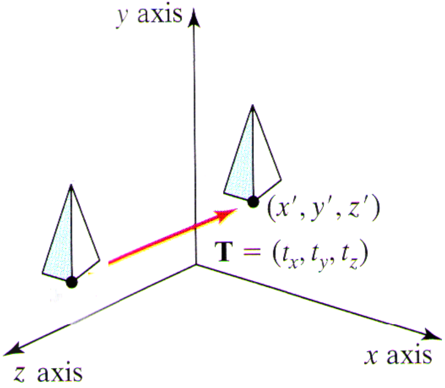
$$z' = z + t_z$$

- Representando matricialmente usando coordenadas homogêneas, temos

$$P' = TP$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Translação 3D



Translação Inversa 3D

- A translação inversa 3D é dada de forma semelhante à 2D, negando os *offsets* de translação

$$T^{-1}(t_x, t_y, t_z) = T(-t_x, -t_y, -t_z)$$

$$T^{-1}(t_x, t_y, t_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & 0 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 & -t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escala 3D

- A matriz de escala 3D é uma simples extensão da 2D, incluindo a variável z
- Considerando os fatores de escala $s_x > 0$, $s_y > 0$ e $s_z > 0$, temos

$$x' = xs_x$$

$$y' = ys_y$$

$$z' = zs_z$$

Escala 3D

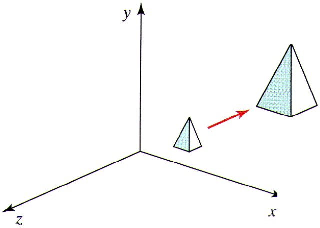
- Que definem a transformação

$$P' = SP$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Escala 3D

- Essa definição de escala muda a posição do objeto com relação à origem
  - Valores > 1 afastam da origem
  - Valores < 1 aproximam da origem



- Se $s_x = s_y = s_z$, então temos uma **escala uniforme**, caso contrário temos uma **escala diferencial**

Escala 3D

- Para se evitar esse problema podemos definir a escala com relação a uma posição fixa (x_f, y_f, z_f)
  1. Translado o ponto fixo para a origem
  2. Aplico a transformação de escala
  3. Translado o ponto fixo de volta para sua posição original

$$T(x_f, y_f, z_f)S(s_x, s_y, s_z)T(-x_f, -y_f, -z_f)$$

$$\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & (1 - s_x)x_f \\ 0 & s_y & 0 & (1 - s_y)y_f \\ 0 & 0 & s_z & (1 - s_z)z_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escala Inversa 3D

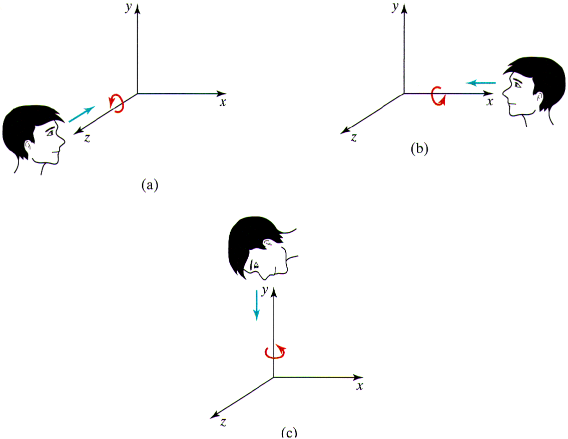
- A matriz de escala inversa 3D é obtida trocando os fatores de escala por seus opostos

$$S^{-1}(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} 1/s_x & 0 & 0 & (1 - 1/s_x)x_f \\ 0 & 1/s_y & 0 & (1 - 1/s_y)y_f \\ 0 & 0 & 1/s_z & (1 - 1/s_z)z_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação 3D

- É possível rotacionar um objeto ao redor de qualquer eixo no espaço 3D, porém, as rotações mais fáceis são executadas ao redor dos eixos de coordenadas Cartesianas
  - É possível combinar rotações em torno dos eixos Cartesianos para se obter rotações em torno de qualquer eixo no espaço
- Por convenção, ângulos positivos produzem rotações no sentido anti-horário

Rotação 3D



Rotação 3D nos Eixos Coordenados

- Uma rotação 2D é facilmente estendida para uma rotação 3D ao redor do eixo z

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$

$$z' = z$$

- Na forma matricial usando coordenadas homogêneas

$$P' = R_z(\theta)P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

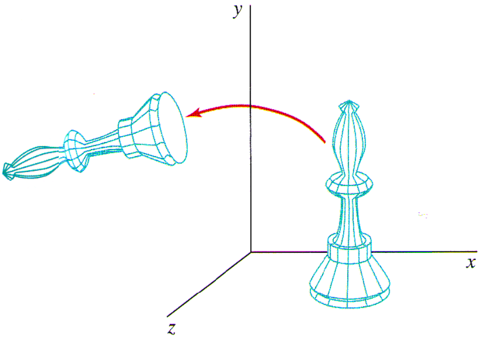
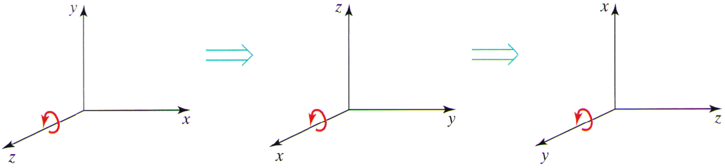


Figure: Rotação de um objeto em torno do eixo-z

Rotação 3D nos Eixos Coordenados

- As transformações de rotação para os outros eixos de coordenadas podem ser obtidas por meio de uma permutação cíclica das coordenadas x, y e z

$$x \to y \to z \to x$$



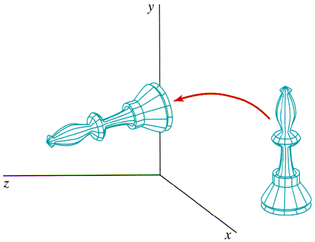
Rotação 3D nos Eixos Coordenados

- Considerando essa permutação e substituindo na equação da rotação 3D, compomos a rotação em torno do eixo-x

$$y' = y\cos\theta - z\sin\theta$$

$$z' = y\sin\theta + z\cos\theta$$

$$x' = x$$



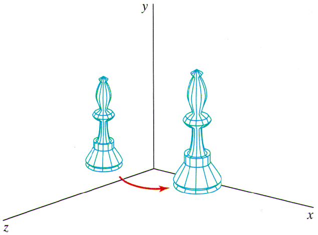
Rotação 3D nos Eixos Coordenados

- O mesmo ocorrendo para se obter as equações para rotação em torno do eixo-y

$$z' = z\cos\theta - x\sin\theta$$

$$x' = z\sin\theta + x\cos\theta$$

$$y' = y$$



Rotação 3D nos Eixos Coordenados

- Portanto as matrizes de rotação em torno dos eixos x e y são, respectivamente

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

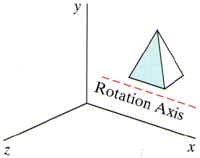
Rotação Inversa 3D

- A inversa de uma rotação é obtida trocando θ por $-\theta$
- Como somente o sinal do seno é alterado, a inversa pode ser obtida trocando as linhas pelas colunas, isto é $R^{-1} = R^T$

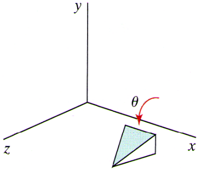
Rotação 3D Geral

- A rotação em torno de qualquer eixo pode ser obtida como a combinação de rotações e translações
- No caso especial quando o eixo de rotação é paralelo e algum eixo de coordenadas, obtemos a rotação desejada fazendo
  1. Translado o objeto de forma que o eixo de rotação coincida com o eixo paralelo de coordenadas
  2. Executo a rotação
  3. Translado o objeto de forma que o eixo de rotação é movido de volta à posição original

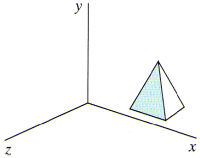
Rotação 3D Geral



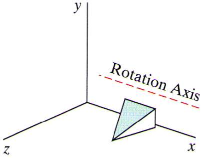
(a)
Original Position of Object



(c)
Rotate Object Through Angle θ



(b)
Translate Rotation Axis onto x Axis



(d)
Translate Rotation
Axis to Original Position

Rotação 3D Geral

- Essa sequência de transformações sobre um ponto P é

$$P' = T^{-1} R_x(\theta) T P$$

ou seja, a matriz composta de rotação é

$$R(\theta) = T^{-1} R_x(\theta) T$$

que é a mesma forma da matriz de rotação 2D quando o eixo de rotação (ortogonal ao plano xy) não coincide com a origem

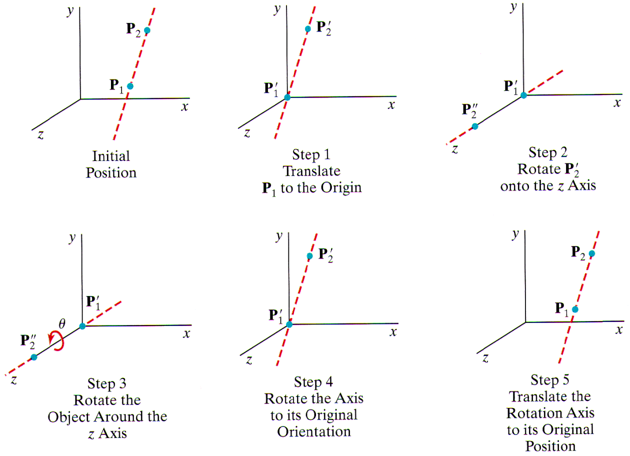
Rotação 3D Geral

- Quando o eixo de rotação não é paralelo aos eixos coordenados, algumas transformações adicionais são necessárias
  - Também são necessárias rotações para alinhar o eixo de rotação com o eixo de coordenadas escolhido, e para trazer de volta o eixo de rotação para a posição original

Rotação 3D Geral

- Dado o eixo de rotação e o ângulo de rotação, isso pode ser feito como
  1. Transladar o objeto de forma que o eixo de rotação passe pela origem do sistema de coordenadas
  2. Rotacionar o objeto para que o eixo de rotação coincida com um dos eixos de coordenadas
  3. Realizar a rotação sobre o eixo de coordenadas escolhido
  4. Aplicar a rotação inversa para trazer o eixo de rotação para sua orientação original
  5. Aplicar a translação inversa para trazer o eixo de rotação para sua posição espacial original
- Por conveniência, o eixo de coordenadas escolhido para o alinhamento normalmente é o eixo-z

Rotação 3D Geral



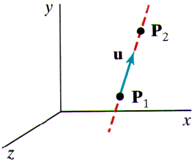
Rotação 3D Geral

- Assumindo que o eixo de rotação é definido por dois pontos (P_2 para P_1) e que a rotação se dá em sentido anti-horário em relação e esse eixo, podemos calcular suas componentes como

$$V = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

- E o vetor unitário do eixo de rotação é

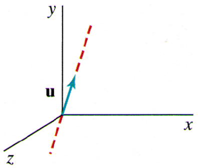
$$u = \frac{V}{|V|} = (a, b, c)$$



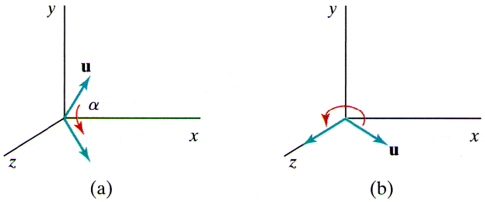
Rotação 3D Geral

- O primeiro passo da sequência de rotação é definir uma matriz de translação para reposicionar o eixo de rotação de forma que esse passe pela origem
  - Como a rotação se dá no sentido anti-horário, movemos o ponto P_1 para a origem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & 0 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 & -z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

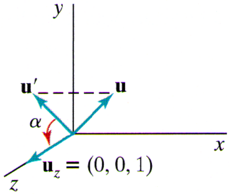


- Após isso, encontramos a transformação que coloca o eixo de rotação sobre o eixo z
  - Existem várias maneiras de se realizar esse alinhamento, por exemplo, primeiro rotacionamos sobre o eixo x, depois sobre o eixo y
  - A rotação sobre o eixo x define o vetor u no plano xz, e a rotação no eixo y rotaciona u até sobrepor o eixo z



Rotação 3D Geral

- A rotação em torno do eixo x pode ser definida determinando os senos e cossenos do ângulo de rotação necessário para projetar u no plano xz
- Esse ângulo de rotação (α) é o ângulo entre a projeção de u no plano yz com o eixo z positivo



Rotação 3D Geral

- Se a projeção de u no plano yz for $u' = (0, b, c)$, então o cosseno do ângulo de rotação α pode ser determinado a partir do produto escalar de u' com o vetor unitário u_z ao longo do eixo z

$$\cos\alpha = \frac{u'.u_z}{|u'||u_z|} = \frac{c}{d}$$

- Onde d é a magnitude de u', isto é

$$d = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Rotação 3D Geral

- Similarmente é possível determinar o seno de α igualando a forma independente de coordenadas do produto vetorial

$$u' \times u_z = u_x |u'||u_z| \sin \alpha$$

- Com a sua forma Cartesiana

$$u' \times u_z = u_x . b$$

$$u' \times u_z = u_x |u'||u_z| \sin \alpha = u_x . b$$

- Como $|u_z| = 1$ e $|u'| = d$, então

$$\sin \alpha = \frac{b}{d}$$

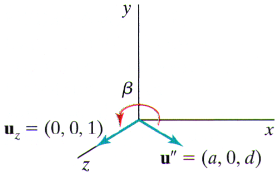
Rotação 3D Geral

- Com os senos e cossenos de α determinados, podemos definir a matriz para a rotação de u sobre o eixo x no plano xz

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c/d & -b/d & 0 \\ 0 & b/d & c/d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação 3D Geral

- O próximo passo é determinar a matriz de rotação que vai rotacionar o vetor unitário u'' (resultante da rotação anterior) no plano xz em torno do eixo y até sobrepor o eixo z
  - Como $u = (a, b, c)$, então $u'' = (a, 0, d)$ pois a rotação em torno do eixo x não altera a coordenada x, a coordenada y é zerada pela projeção no plano xz e a coordenada $z = d$ porque $|u''| = |u|$



Rotação 3D Geral

- Com isso podemos novamente encontrar os senos e cossenos do ângulo β fazendo

$$\cos\beta = \frac{u''.u_z}{|u''||u_z|}$$

- Como $|u_z| = |u''| = 1$

$$\cos\beta = d$$

Rotação 3D Geral

- Igualando a forma independente de coordenadas do produto vetorial

$$u'' \times u_z = u_y |u''||u_z| \sin\beta$$

com a forma Cartesiana

$$u'' \times u_z = u_y.(-a)$$

$$u'' \times u_z = u_y |u''||u_z| \sin\beta = u_y.(-a)$$

temos

$$\sin\beta = -a$$

Rotação 3D Geral

- Portanto, a matriz de rotação é u'' sobre o eixo y é

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} d & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação 3D Geral

- Com essas rotações em α e β nós alinhamos o eixo de rotação sobre o eixo z, então agora a rotação de um ângulo θ pode ser aplicada

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação 3D Geral

- Assim a matriz de rotação completa sobre um eixo arbitrário fica

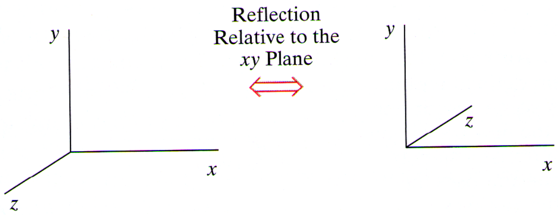
$$R(\theta) = T^{-1} R_x^{-1}(\alpha) R_y^{-1}(\beta) R_z(\theta) R_y(\beta) R_x(\alpha) T$$

Compondo Transformações 3D

- Assim como nas transformações 2D, as transformações 3D são compostas multiplicando matrizes
- Novamente a transformação mais à direita será a primeira a ser aplicada, e é necessário observar se a API gráfica utiliza pós- ou pré-multiplicação

Reflexão 3D

- É semelhante à reflexão 2D: rotação de 180^0 sobre um eixo (plano) de rotação
- Quando o plano de rotação é um plano coordenado (xy, xz ou yz), essa transformação pode ser vista como uma conversão entre um sistema orientado com a mão-esquerda e um sistema orientado com a mão-direita (ou vice-versa)



Reflexão 3D

- Essa conversão entre um sistema orientado pela mão-direita, para um orientado pela mão-esquerda é obtida trocando o sinal da coordenada z, mantendo as coordenadas x e y (reflexão relativa ao plano xy)

$$M_{Z_{\text{reflect}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- As reflexões relativas aos planos yz e xz são obtidas de forma semelhante

Cisalhamento 3D

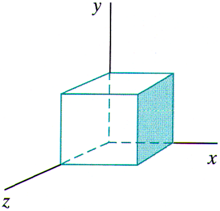
- Transformações de cisalhamento relativas aos eixos x e y ocorrem da mesma forma que em 2D, mas em 3D também é possível realizar o cisalhamento relativo ao eixo z
- O cisalhamento geral em torno do eixo-z, dado um ponto de referência z_{ref} é produzido pela seguinte matriz

$$M_{Z_{\text{shear}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & sh_{zx} & -sh_{zx} z_{\text{ref}} \\ 0 & 1 & sh_{zy} & -sh_{zy} z_{\text{ref}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- O efeito de sh_{zx} e sh_{zy} é alterar os valores das coordenadas x e y uma quantidade proporcional à distância de z_{ref}, enquanto mantém a coordenada z inalterada

Cisalhamento 3D

- Exemplo de matriz de cisalhamento com $sh_{zx} = sh_{zy} = 1$ e $z_{\text{ref}} = 0$ aplicada sobre um cubo unitário



(a)