# Transformações 2D

Profa. Ana Luísa D. Martins Lemos

April 4, 2018

# Introdução

- Tranformações geométricas são operações aplicadas à descrição geométrica de um objeto para mudar sua
  - Posição - Translação
  - Orientação - Rotação
  - Tamanho - Escala
- Além dessas **transformações básicas**, existem outras
  - Reflexão
  - Cisalhamento

# Translação

- Consiste em adicionar *offsets* às coordenadas que definem um objeto

$$x' = x + t_x$$

$$y' = y + t_y$$

- Usando notação matricial, uma translação 2D pode ser descrita como

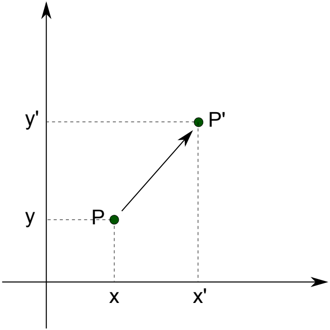
$$P' = P + T$$

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

# Translação

$$P' = P + T$$

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

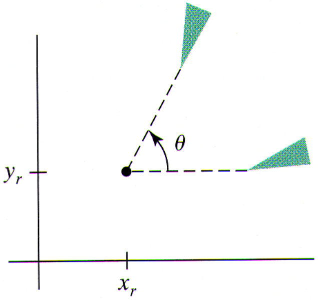


# Rotação

- Define-se uma transformação de rotação por meio de um **eixo de rotação** e um **ângulo de rotação**
- Em 2D a rotação se dá em um caminho circular no plano, rotacionando o objeto considerando-se um eixo perpendicular ao plano $xy$

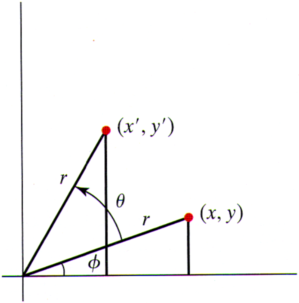
# Rotação

- Parâmetros de rotação 2D são o ângulo de rotação $\theta$ e o ponto de rotação $(x_r, y_r)$, que é a interseção do eixo de rotação com o plano $xy$
  - Se $\theta > 0$ a rotação é anti-horário
  - Se $\theta < 0$ a rotação é horária



# Rotação

- Para simplificar considera-se que o ponto de rotação está na origem do sistema de coordenadas
  - O raio $r$ é constante, $\phi$ é o ângulo original de $P = (x, y)$ e $\theta$ é o ângulo de rotação



# Rotação

- Sabendo que

$$\cos(\phi+\theta) = \frac{x'}{r} \Rightarrow x' = r\cos(\phi+\theta)$$

$$\sin(\phi+\theta) = \frac{y'}{r} \Rightarrow y' = r\sin(\phi+\theta)$$

como

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$$

então

$$x' = r\cos\phi\cos\theta - r\sin\phi\sin\theta$$

$$y' = r\cos\phi\sin\theta + r\sin\phi\cos\theta$$

# Rotação

- $P = (x, y)$ pode ser descrito por meio de coordenadas polares

$$x = r\cos\phi, y = r\sin\phi$$

Então por substituição

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$

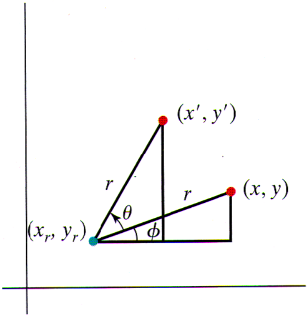
Escrevendo na forma matricial temos

$$P' = RP$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

# Rotação

- Rotação em torno de um ponto arbitrário $(x_r, y_r)$



# Rotação

- Encontrando $x'$

$$\cos(\phi + \theta) = \frac{x' - x_r}{r}$$

$$x' = r\cos(\phi + \theta) + x_r$$

$$x' = x_r + r\cos\phi\cos\theta - r\sin\phi\sin\theta$$

como

$$\cos\phi = \frac{x - x_r}{r}, \sin\phi = \frac{y - y_r}{r}$$

então

$$x' = x_r + (x - x_r)\cos\theta - (y - y_r)\sin\theta$$

$$y' = y_r + (x - x_r)\sin\theta + (y - y_r)\cos\theta$$

# Rotação

- A forma matricial pode ser conseguida criando-se um valor coluna, mas existe uma forma melhor de se fazer isso que será apresentada mais adiante

$$P' = RP + T$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_r - x_r\cos\theta + y_r\sin\theta \\ y_r - x_r\sin\theta - y_r\cos\theta \end{bmatrix}$$

# Transformação de Corpo Rígido

- A **rotação** e a **translação** são **Transformações de Corpo Rígido** pois direcionam ou movem um objeto sem deformá-lo
    - Mantém ângulos e distâncias entre as coordenadas do objeto

# Escala

- Altera o tamanho de um objeto
- As coordenadas de um objeto são multiplicadas por fatores de escala

$$x' = xs_x, \; y' = ys_y$$

- Na forma matricial

$$P' = SP$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

# Escala

- Propriedades de $s_x$ e $s_y$
  - $s_x$ e $s_y$ devem ser maiores que zero
  - Se $s_x > 1$ e $s_y > 1$ o objeto aumenta
  - Se $s_x < 1$ e $s_y < 1$ o objeto diminui
  - Se $s_x = s_y$ a escala é uniforme
  - Se $s_x \neq s_y$ a escala é diferencial

# Escala

- Pela formulação definida, o objeto é escalado e movido

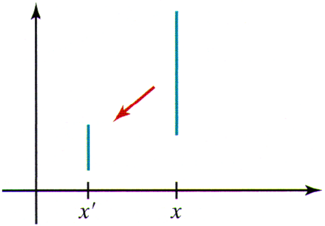



Figure: Escala de uma linha usando $s_x = s_y = 0.5$

# Escala

- Para se manter a posição do objeto, escolhe-se uma posição fixa $(x_f, y_f)$ e **escala-se a distância entre as coordenadas do objeto e esse ponto fixo**

$$x' - x_f = s_x(x - x_f)$$

$$y' - y_f = s_y(y - y_f)$$

ou seja,

$$x' = xs_x + x_f(1 - s_x)$$
$$y' = ys_y + y_f(1 - s_y)$$

# Escala

- Na forma matricial podemos escrever adicionando um vetor coluna

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_f(1 - s_x) \\ y_f(1 - s_y) \end{bmatrix}$$

- $x_f(1 - s_x)$ e $y_f(1 - s_y)$ são constantes para todas as coordenadas do objeto

# Coordenadas Homogêneas

- As três transformações básicas podem ser expressas por

$$P' = M_1 P + M_2$$

  - $M_1$: matriz $2 \times 2$ com fatores multiplicativos
  - $M_2$: matriz coluna com termos para translação
- Para se aplicar uma sequência de transformações, esse formato não ajuda
  - Eliminar a adição de matrizes permite escrever uma sequência de transformações como uma multiplicação de matrizes

# Coordenadas Homogêneas

- Isso pode ser feito expandindo-se para uma representação $3 \times 3$
- A terceira coluna é usada para os termos da translação
- Um ponto no espaço 2D representado em coordenadas homogêneas é descrito por 3 valores $(x_h, y_h, h)$, onde $h$ é o parâmetro homogêneo ($h \neq 0$)
- Pode ser vista como a projeção de um ponto 3D no plano (Cartesiano) $h$

# Coordenadas Homogêneas

- A projeção do sistema homogêneo para o sistema Cartesiano se dá pela seguinte relação

$$x = \frac{x_h}{h}, y = \frac{y_h}{h}$$

- $h$ pode ser qualquer valor diferente de zero, mas por conveniência, escolhemos $h = 1$
    - Coordenadas homogêneas $(x_h, y_h, h)$ ficam $(x, y, 1)$
- Usando coordenadas homogêneas, as transformações são convertidas em multiplicações de matrizes

# Coord. Homogêneas - Translação 2D

- A translação no espaço homogêneo é dada por

$$x'_h = 1x_h + 0y_h + t_x h$$

$$y'_h = 0x_h + 1y_h + t_y h$$

$$h = 0x_h + 0y_h + 1h$$

- Na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x'_h \\ y'_h \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ h \end{bmatrix}$$

# Coord. Homogêneas - Translação 2D

$$\begin{bmatrix} x'_h \\ y'_h \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ h \end{bmatrix}$$

- Voltando para o espaço Cartesiano

$$x'_h/h = (1x_h + 0y_h + t_x h)/h \Rightarrow x' = x + t_x$$

$$y'_h/h = (0x_h + 1y_h + t_y h)/h \Rightarrow y' = y + t_y$$

$$h/h = (0x_h + 0y_h + 1h)/h \Rightarrow 1 = 1$$

# Coord. Homogêneas - Translação 2D

- Por conveniência, com $h = 1$, definimos a translação no espaço Cartesiano como

$$P' = T(t_x, t_y)P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Coord. Homogêneas - Rotação 2D

- Uma rotação pode ser definida usando coordenadas homogêneas da seguinte forma

$$P' = R(\theta)P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Coord. Homogêneas - Escala 2D

- Uma escala pode ser definida usando coordenadas homogêneas da seguinte forma

$$P' = S(s_x, s_y)P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Translação Inversa

- Para a translação, inverte-se o sinal das translações

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Rotação Inversa

- Uma rotação inversa é obtida trocando o ângulo de rotação por seu negativo

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Isso rotaciona no sentido horário
- $R^{-1} = R^T$

# Escala Inversa

- O inverso da escala é obtido trocando os parâmetros por seus inversos

$$S^{-1}(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} 1/s_x & 0 & 1 \\ 0 & 1/s_y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Transformações 2D Compostas

- Usando representações matriciais homogêneas, uma sequência de transformações pode ser representada como uma única matriz obtida a partir de multiplicações de matrizes de transformação

$$\begin{aligned} P' &= M_2 M_1 P \\ &= (M_2 M_1) P \\ &= MP \end{aligned}$$

- A transformação é dada por $M$ ao invés de $M_1$ e $M_2$

# Compondo Translações

- Para se compor duas translações podemos fazer

$$
\begin{aligned}
P' &= T(t_{2x}, t_{2y})\{T(t_{1x}, t_{1y})P\} \\
&= \{T(t_{2x}, t_{2y})T(t_{1x}, t_{1y})\}P \\
&= T(t_{2x} + t_{1x}, t_{2y} + t_{1y})P
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{2x} \\ 0 & 1 & t_{2y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{1x} \\ 0 & 1 & t_{1y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{2x} + t_{1x} \\ 0 & 1 & t_{2y} + t_{1y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

# Compondo Rotações

- Para se compor duas rotações podemos fazer

$$\begin{aligned} P' &= R(\theta_2)\{R(\theta_1)P\} \\ &= \{R(\theta_2)R(\theta_1)\}P \\ &= R(\theta_2+\theta_1)P \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Compondo Escalas

- Para se compor duas escalas podemos fazer

$$\begin{aligned} P' &= S(s_{2x}, s_{2y})\{S(s_{1x}, s_{1y})P\} \\ &= \{S(s_{2x}, s_{2y})S(s_{1x}, s_{1y})\}P \\ &= S(s_{2x}s_{1x}, s_{2y}s_{1y})P \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} s_{2x} & 0 & 0 \\ 0 & s_{2y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{1x} & 0 & 0 \\ 0 & s_{1y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{2x}s_{1x} & 0 & 0 \\ 0 & s_{2y}s_{1y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Rotação 2D com Ponto de Rotação

- Rotação com ponto de rotação é feita combinando-se múltiplas transformações
  - Movo o ponto de rotação para a origem
  - Executo a rotação
  - Movo o ponto de rotação para a posição inicial

$$R(x_r, y_r, \theta) = T(x_r, y_r)R(\theta)T^{-1}(x_r, y_r)$$

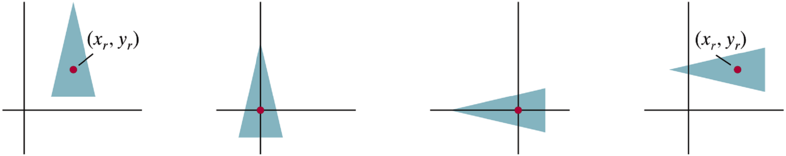
$$R(x_r, y_r, \theta) = T(x_r, y_r)R(\theta)T(-x_r, -y_r)$$

# Rotação 2D com Ponto de Rotação

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_r \\ 0 & 1 & y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_r - x_r\cos\theta + y_r\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & y_r - y_r\cos\theta - x_r\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Rotação 2D com Ponto de Rotação




(a)
Original Position of Object and Pivot Point

(b)
Translation of Object so that Pivot Point $(x_r, y_r)$ is at Origin

(c)
Rotation about Origin

(d)
Translation of Object so that the Pivot Point is Returned to Position $(x_r, y_r)$

# Escala 2D com Ponto Fixo

- Escala com ponto fixo é feita combinando-se múltiplas transformações
  - Movo o ponto fixo para a origem
  - Executo a escala
  - Movo o ponto fixo para a posição inicial

$$S(x_f, y_f, s_x, s_y) = T(x_f, y_f)S(s_x, s_y)T^{-1}(x_f, y_f)$$

$$S(x_f, y_f, s_x, s_y) = T(x_f, y_f)S(s_x, s_y)T(-x_f, -y_f)$$

# Escala 2D com Ponto Fixo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_f \\ 0 & 1 & y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_f \\ 0 & 1 & -y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s_x & 0 & x_f(1 - s_x) \\ 0 & s_y & y_f(1 - s_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Escala 2D com Ponto Fixo


(a) Original Position of Object and Fixed Point

(b) Translate Object so that Fixed Point $(x_f, y_f)$ is at Origin

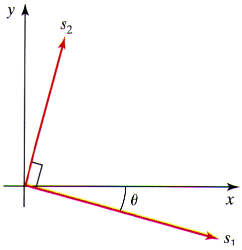
(c) Scale Object with Respect to Origin

(d) Translate Object so that the Fixed Point is Returned to Position $(x_f, y_f)$

# Escala 2D em Direções Gerais

- Os parâmetros $s_x$ e $s_y$ realizam a escala nas direções de $x$ e $y$
- Para outras direções, rotaciona, escala e rotaciona de volta

$$S(s_1, s_2) = R^{-1}(\theta)S(s_1, s_2)R(\theta)$$



# Escala 2D em Direções Gerais

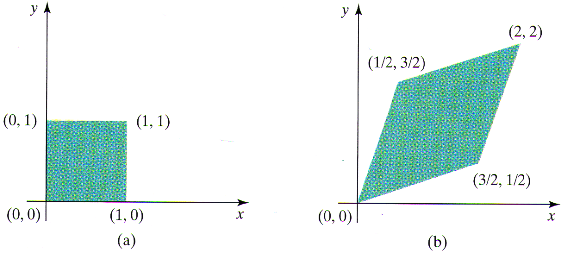



Figure: Transformação com $s_1 = 1$, $s_2 = 2$ e $\theta = 45^0$

# Propriedade da Concatenação de Matrizes

- Multiplicação de matriz é associativa

$$M_3 M_2 M_1 = (M_3 M_2) M_1 = M_3 (M_2 M_1)$$

- Multiplicação nos dois sentidos é possível, da esquerda para a direita e da direita para a esquerda
  - **Pré-multiplicação**: da esquerda para a direita - as transformações são especificadas na ordem em que são aplicadas ($M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3$)
  - **Pós-multiplicação**: da direita para a esquerda - as transformações são especificadas na ordem inversa em que são aplicadas ($M_3 \rightarrow M_2 \rightarrow M_1$)
  - OpenGL $\rightarrow$ pós-multiplicação

# Propriedade da Concatenação de Matrizes

- Multiplicação de matrizes não é comutativa

$$M_2 M_1 \neq M_1 M_2$$

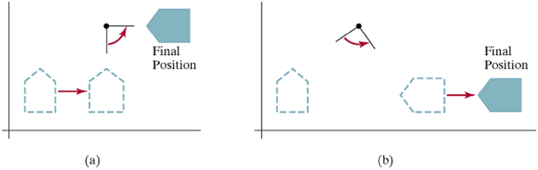



Figure: (a) primeiro o objeto é transladado depois rotacionado em $90^0$ (b) primeiro o objeto é rotacionado em $90^0$, depois transladado.

# Reflexão

- Espelha-se as coordenadas de um objeto relativo a um eixo de reflexão, rotacionando em um ângulo de $180^0$
- Reflexão em $y = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Reflexão

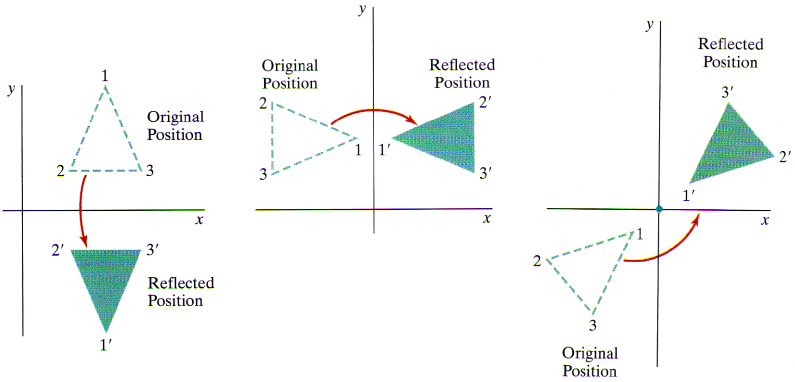
- Reflexão em $x = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Reflexão em $x = 0$ e $y = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Reflexão



y
x
1
2
3
Original Position
2′
3′
1′
Reflected Position
y
x
Original Position
Reflected Position
2
3
1
1′
2′
3′
y
x
Reflected Position
3′
2′
1′
1
2
3
Original Position

# Cisalhamento

- Distorce o formato do objeto na direção de $x$ ou $y$
- Cisalhamento na direção $x$

$$\begin{bmatrix} 1 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- O que transforma as coordenadas como

$$x' = x + sh_x y$$

$$y' = y$$

# Cisalhamento

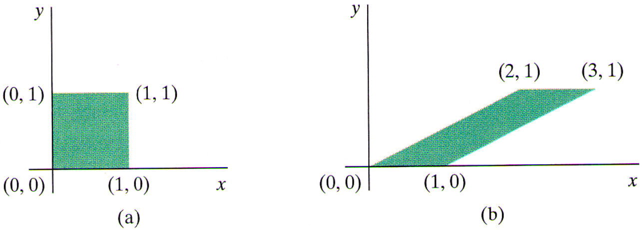



Figure: Convertendo um quadrado em um paralelogramo usando $sh_x = 2$.

# Cisalhamento

- É possível gerar cisalhamento na direção de $x$ relativos a outras linhas de referência

$$\begin{bmatrix} 1 & sh_x & -sh_x y_{\text{ref}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Transformando

$$x' = x + sh_x(y - y_{\text{ref}})$$

$$y' = y$$

# Cisalhamento

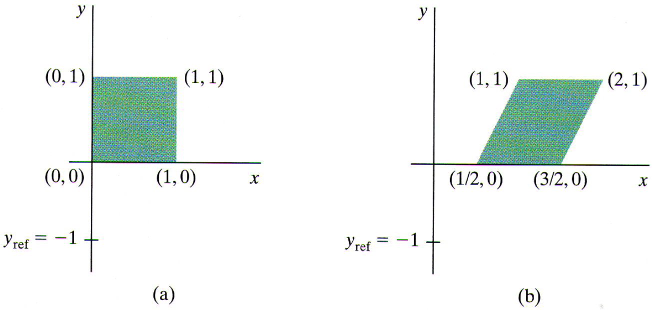



Figure: Exemplo de cisalhamento com $sh_x = 1/2$ e $y_{ref} = -1$.

# Cisalhamento

- O cisalhamento na direção de $y$ relativo à linha $x = x_{\text{ref}}$ é dado por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ sh_y & 1 & -sh_y x_{\text{ref}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Transformando

$$y' = y + sh_y(x - x_{\text{ref}})$$

$$x' = x$$

- O que transforma as coordenadas verticalmente seguindo um valor proporcional à distância da linha de referência $x = x_{\text{ref}}$

# Cisalhamento

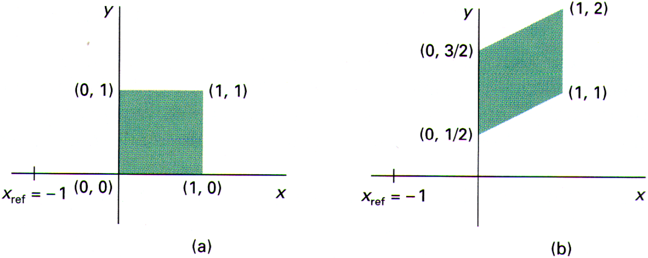



Figure: Exemplo de cisalhamento com $sh_y = 1/2$ e $x_{\text{ref}} = -1$.

# Referências

1. Slides Prof. Fernando V. Paulovich - ICMC/USP São Carlos
2. Donald D. Hearn, M. Pauline Baker. Computer Graphics with OpenGL, 3rd Edition