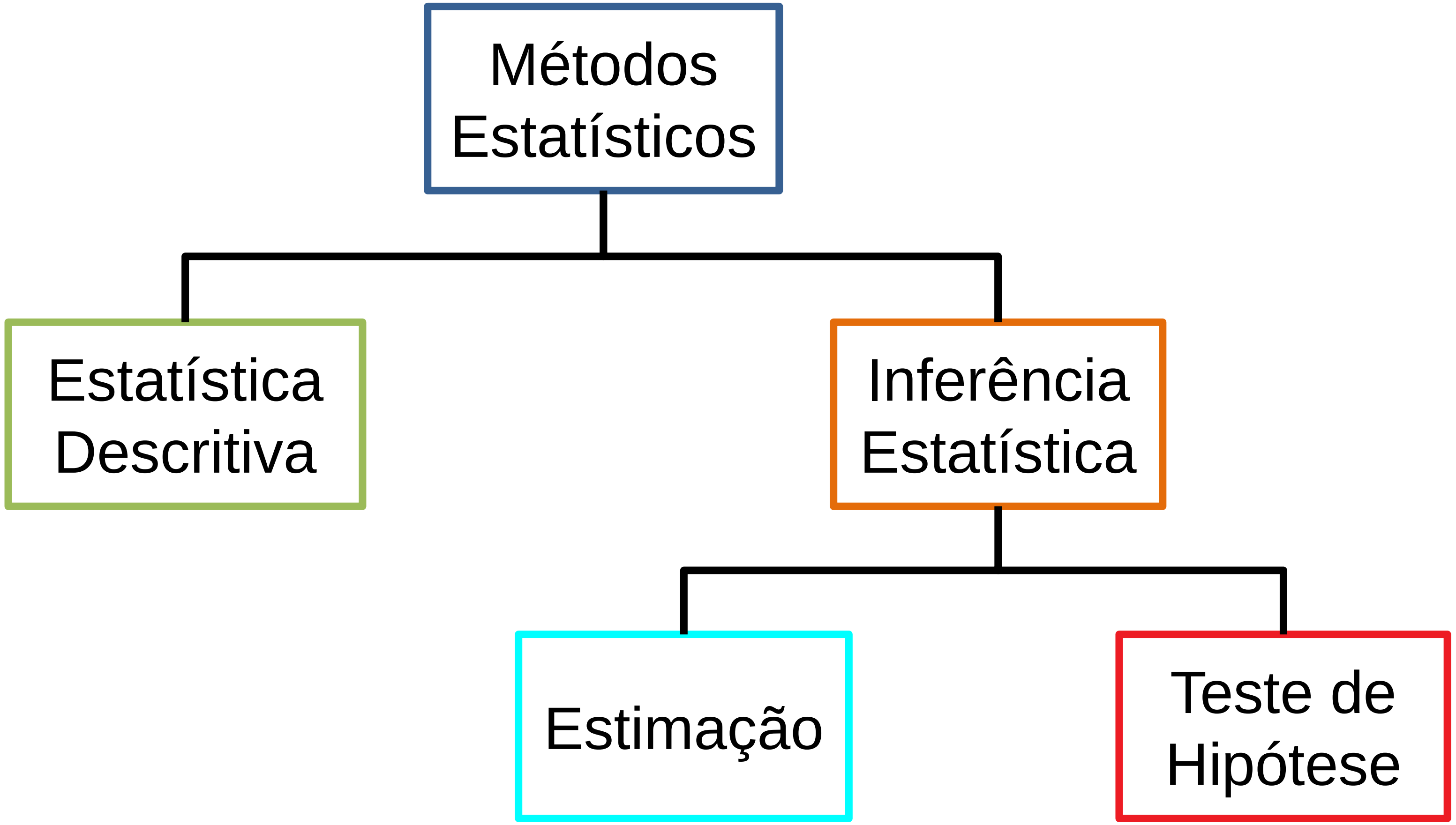
Universidade Federal de São Paulo

Testes de Hipóteses Paramétricos

Professor

Julio Cezar

MÉTODOS ESTATÍSTICOS



UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Aula de Hoje

- Tipos de Testes de hipóteses (TH);
- Tipos de erros em TH;
- Estatística de teste;
- Passos para construção de um TH;
- TH para média;
- TH para a proporção;
- TH para a variância;
- Poder do teste;
- Nível descritivo (valor ***P***).

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Hipóteses

Exemplo 1: Os pesquisadores da área da saúde têm o interesse em verificar se uma certa vacina utilizada no combate à determinada doença é ou não eficiente. Para isso, eles têm de formular as seguintes hipóteses:

Hipóteses

Exemplo 1: Os pesquisadores da área da saúde têm o interesse em verificar se uma certa vacina utilizada no combate à determinada doença é ou não eficiente. Para isso, eles têm de formular as seguintes hipóteses:

$$\begin{cases} H_0\text{: a vacina não é eficiente} \\ H_1\text{: a vacina é eficiente} \end{cases}$$

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Hipóteses

Exemplo 1: Os pesquisadores da área da saúde têm o interesse em verificar se uma certa vacina utilizada no combate à determinada doença é ou não eficiente. Para isso, eles têm de formular as seguintes hipóteses:

$$\begin{cases} H_0\text{: a vacina não é eficiente} \\ H_1\text{: a vacina é eficiente} \end{cases}$$

O estatístico envolvido na pesquisa deve procurar utilizar técnicas que tornem mínima a probabilidade de se cometer erros na decisão de qual **HIPÓTESE** considerar como verdadeira.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Hipóteses

Exemplo 2: Considere que uma indústria compra de um certo fabricante, um determinado produto alimentício cuja a quantidade média de carboidratos presente é especificada em 7,9g. Em um determinado dia, a indústria recebeu um grande lote deste produto e a equipe técnica da indústria deseja verificar se o lote atende as especificações.

HIPÓTESES

Exemplo 2: Considere que uma indústria compra de um certo fabricante, um determinado produto alimentício cuja a quantidade média de carboidratos presente é especificada em 7,9g. Em um determinado dia, a indústria recebeu um grande lote deste produto e a equipe técnica da indústria deseja verificar se o lote atende as especificações.

$$\begin{cases} H_0\text{: o lote atende as especificações} \\ H_1\text{: o lote não atende as especificações} \end{cases}$$

Hipóteses

Exemplo 2: Considere que uma indústria compra de um certo fabricante, um determinado produto alimentício cuja a quantidade média de carboidratos presente é especificada em 7,9g. Em um determinado dia, a indústria recebeu um grande lote deste produto e a equipe técnica da indústria deseja verificar se o lote atende as especificações.

A quantidade média de carboidratos
$\mu = 7{,}9g$

Valor energético	70 kcal = 298 kJ
Carboidratos	7,9 g
Proteínas	7,2 g
Gorduras totais	1,0 g
Gorduras saturadas	0,8 g
Gorduras trans	0 g
Fibra alimentar	0 g
Sódio	125 mg
Cálcio	221 mg

$$\begin{cases} H_0\text{: o lote atende as especificações} \\ H_1\text{: o lote não atende as especificações} \end{cases}$$

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Hipóteses

Exemplo 3: Duas marcas de veículos pretendem comparar o desempenho de seus modelos populares. Para isso, a marca A e a marca B selecionaram, respectivamente, uma amostra cada de 12 veículos de suas produções e realizaram um teste de consumo. As empresas afirmam que ambas tem a mesma variabilidade. Os dados estão em Km/litro.

Hipóteses

Exemplo 3: Duas marcas de veículos pretendem comparar o desempenho de seus modelos populares. Para isso, a marca A e a marca B selecionaram, respectivamente, uma amostra cada de 12 veículos de suas produções e realizaram um teste de consumo. As empresas afirmam que ambas tem a mesma variabilidade. Os dados estão em Km/litro.

$$\begin{cases} H_0\text{: o consumo médio da marca A é igual ao o consumo médio da marca B} \\ H_1\text{: o consumo médio da marca A é diferente ao o consumo médio da marca B} \end{cases}$$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

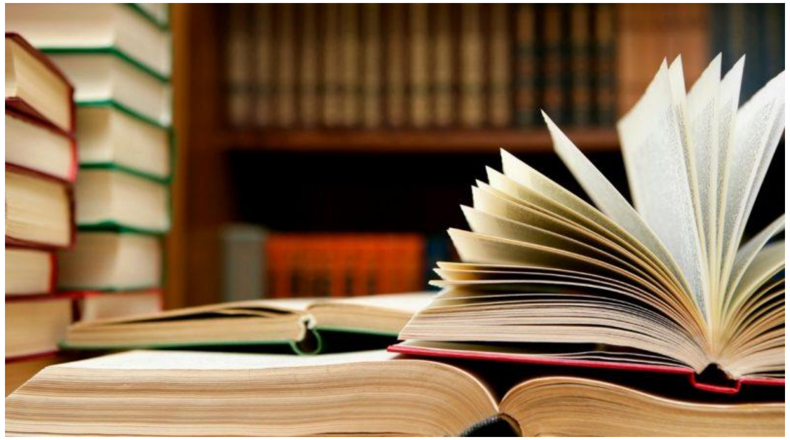
HIPÓTESES

Exemplo 4: Pelo Anuário do IBGE de 2010, a proporção de analfabetos em uma cidade era de 15%. Em 2015, entre 200 entrevistados dessa cidade, 23 eram analfabetos.

Hipóteses

Exemplo 4: Pelo Anuário do IBGE de 2010, a proporção de analfabetos em uma cidade era de 15%. Em 2015, entre 200 entrevistados dessa cidade, 23 eram analfabetos. Esses dados suportam a tese de diminuição do analfabetismo na cidade de 2010 para 2015?

$p = 0{,}15$



Teste de Hipótese

Uma hipótese estatística é uma conjectura ou uma função sobre a distribuição de uma ou mais v.a., ou seja, sobre os parâmetros populacionais, $\boldsymbol{\theta}$.

$$\boxed{H_0: \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \ \text{ versus } H_1: \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1}$$

Sendo que $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$ (**espaço de parâmetros**) e $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$, em que Θ_0 é algum subconjunto do Θ e Θ_1é o complementar de Θ_0 (Θ_0^c).

- H_0: é chamada hipótese nula (**hipótese a ser testada**).
- H_1 ou H_a: é chamada hipótese alternativa (**hipótese contrária $\boldsymbol{H_0}$**).

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

TESTE DE HIPÓTESE

Hipótese nula: Afirmação sobre o parâmetro contra a qual estaremos buscando evidências nos dados amostrais.

Hipótese Alternativa: Afirmação sobre o parâmetro que esperamos ser verdade.

- Usualmente H_0 é escolhido de forma que Θ_0 seja o "menor" ou o "mais simples" que corresponde a uma conjectura de "não haver diferença".
- Se uma hipótese específica completamente a distribuição ela é chamada hipótese simples, caso contrário é chamada de hipótese composta.

Teste de Hipótese

No caso mais geral, pretende-se testar

$$H_0: \theta = \theta_0$$

Contra alternativas

$$H_1: \theta \neq \theta_0; \qquad H_1: \theta < \theta_0 \text{ ou } H_1: \theta = \theta_1 (\theta_1 < \theta_0)$$

ou

$$H_1: \theta > \theta_0 \text{ ou } H_1: \theta = \theta_1 (\theta_1 > \theta_0)$$

Dependendo da informação que o problema traz.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Decisão

O objetivo do teste de hipótese é dizer, usando uma estatística $\hat{\theta}$, se a hipótese H_0 é ou não aceitável. Esta decisão é tomada através de uma **região crítica** ou de **rejeição**, denotada por **RC**.

Seja $\hat{\theta}_{obs}$, o valor observado da estatística (Ex.: $\hat{\theta}_{obs} = \bar{x}$)

- Se $\hat{\theta}_{obs} \in$ RC $\Rightarrow$ Rejeitamos H_0
- Se $\hat{\theta}_{obs} \notin$ RC $\Rightarrow$ Não Rejeitamos H_0

Definição: **RC** é o conjunto de valores assumidos pela variável aleatória ou estatística de teste para os quais a hipótese nula é rejeitada.

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Decisão

Considerando o exemplo 2:

Se o lote está fora de especificação, isto é , $H_1 \neq 7{,}9$g, espera-se que a média amostral seja inferior ou superior a 7,9g.

Suponha que a equipe técnica tenha decidido adotar (por algum critério) a seguinte regra: rejeitar H_0 se $\bar{x}$ for maior que 9g ou menor que 5,5g.

$\text{RC} = \{\bar{x} > 9 \ ou\ \bar{x} < 5{,}5\} \Rightarrow$ Região de rejeição de H_0.

$\overline{RC} = \{5{,}5 \leq \bar{x} \leq 9\} \Rightarrow$ Região de Aceitação de H_0.

Ao decidir pela rejeição ou não da hipótese nula H_0, podemos cometer **dois tipos de erro (erro tipo I e erro tipo II)**.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

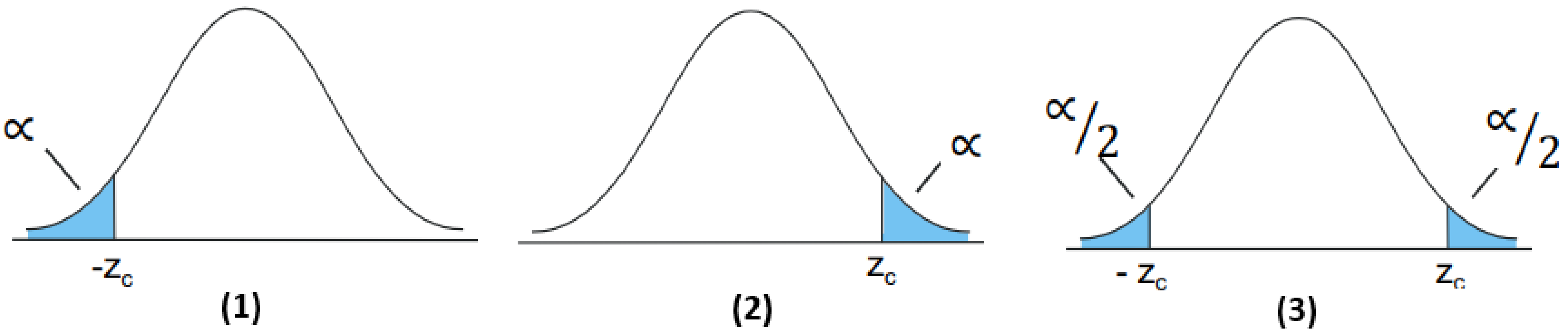
Relação Entre Hipótese e RC

Os tipos de teste de hipóteses são os seguintes:

(1) Se $H_1\colon \theta < \theta_0$ ou $H_1\colon \theta = \theta_1 (\theta_1 < \theta_0)$ - teste unilateral à esquerda $\Rightarrow$ RC na cauda esquerda;

(2) Se $H_1\colon \theta > \theta_0$ ou $H_1\colon \theta = \theta_1 (\theta_1 > \theta_0)$ - teste unilateral à direita $\Rightarrow$ RC na cauda direita;

(3) Se $H_1\colon \theta \neq \theta_0$ - teste bilateral $\Rightarrow$ RC nas caudas.



UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Relação Entre Hipótese e RC

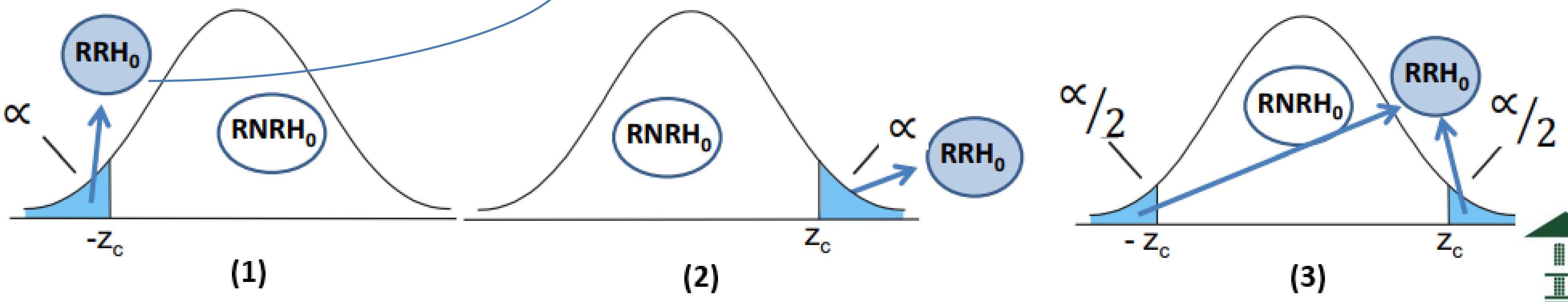
Os tipos de teste de hipóteses são os seguintes:

(1) Se $H_1: \theta < \theta_0$ ou $H_1: \theta = \theta_1 (\theta_1 < \theta_0)$ - teste unilateral à esquerda $\Rightarrow$ RC na cauda esquerda;

(2) Se $H_1: \theta > \theta_0$ ou $H_1: \theta = \theta_1 (\theta_1 > \theta_0)$ - teste unilateral à direita $\Rightarrow$ RC na cauda direita;

(3) Se $H_1: \theta \neq \theta_0$ - teste bilateral $\Rightarrow$ RC nas caudas.

RRH_0 = Região de Rejeição H_0



UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Relação Entre Hipótese e RC

Os tipos de teste de hipóteses são os seguintes:

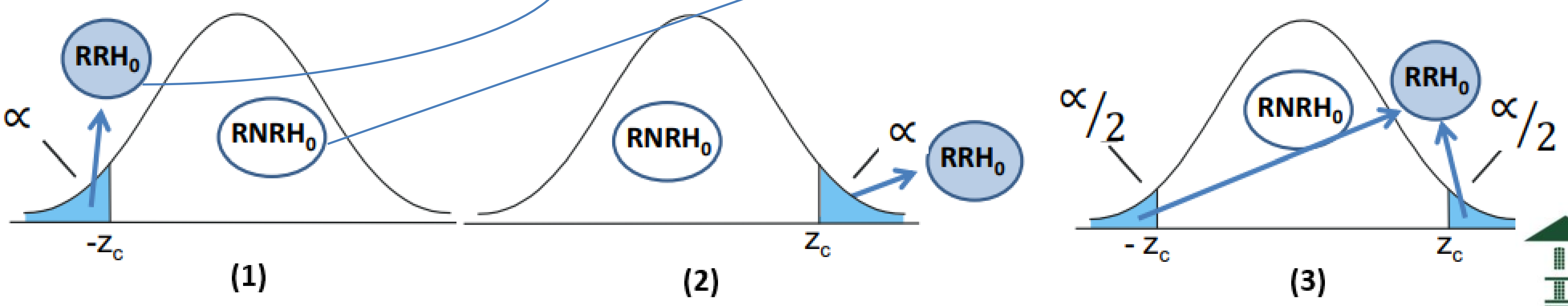
(1) Se $H_1\colon \theta < \theta_0$ ou $H_1\colon \theta = \theta_1 (\theta_1 < \theta_0)$ - teste unilateral à esquerda $\Rightarrow$ RC na cauda esquerda;

(2) Se $H_1\colon \theta > \theta_0$ ou $H_1\colon \theta = \theta_1 (\theta_1 > \theta_0)$ - teste unilateral à direita $\Rightarrow$ RC na cauda direita;

(3) Se $H_1\colon \theta \neq \theta_0$ - teste bilateral $\Rightarrow$ RC nas caudas.

RRH_0 = Região de Rejeição H_0

$RNRH_0$ = Região de Não Rejeição H_0



TIPOS DE ERROS EM TH

Situação Real	Conclusão do teste	
	Rejeitar H_0	Não rejeitar H_0
H_0 verdadeira	★	decisão correta
H_0 falsa	decisão correta	★

Tipos de Erros em TH

Situação Real	Conclusão do teste	
	Rejeitar H_0	Não rejeitar H_0
H_0 verdadeira	Erro Tipo I	decisão correta
H_0 falsa	decisão correta	Erro Tipo II

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

TIPOS DE ERROS EM TH

Situação Real	Conclusão do teste	
	Rejeitar H_0	Não rejeitar H_0
H_0 verdadeira	Erro Tipo I	decisão correta
H_0 falsa	decisão correta	Erro Tipo II

Assim, a probabilidade de se cometer cada um dos erros (**α** e **β**) pode ser escrita:

- **α** =P(**erro tipo I**) = P(rejeitar $H_0 \,|\, H_0$ verdadeira)
- **β** = P(**erro tipo II**) = P(não rejeitar $H_0 \,|\, H_0$ falsa)
- **Nível de significância – (α):** probabilidade máxima de se cometer um **erro tipo I**.
- **1 - β:** poder do teste (é a capacidade de um teste identificar diferenças que realmente existem, ou seja, de rejeitar H_0 quando é realmente falsa, ou ainda dizer que, é a probabilidade de uma decisão correta).

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Tipos de Erros em TH

Uma parte importante do teste de hipótese é controlar essas probabilidades de erro, α e β.

Voltando ao Exemplo 1, que envolve as hipóteses:

$$\begin{cases} H_0\text{: a vacina não é eficiente} \\ H_1\text{: a vacina é eficiente} \end{cases}$$

Erro Tipo I: A vacina é considerada eficaz quando na verdade ela não é eficaz.

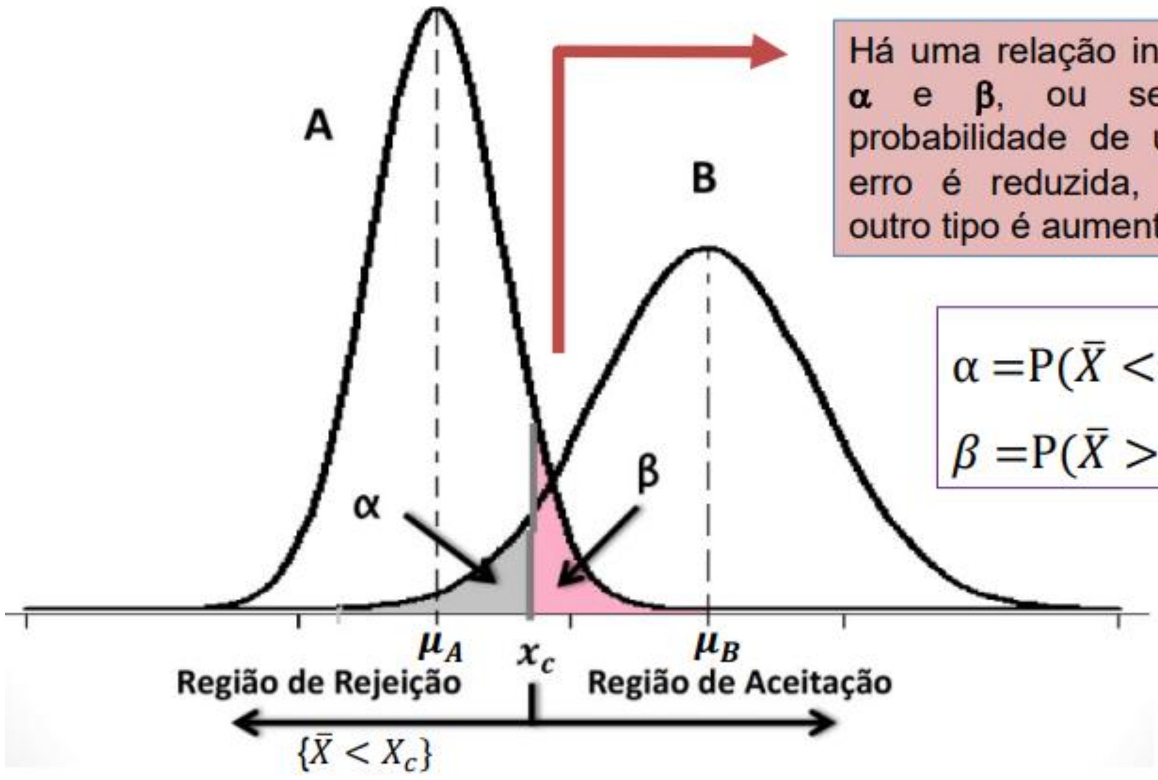
Erro Tipo II: A vacina não é considerada eficaz quando na verdade ela é eficaz.

TIPOS DE ERROS EM TH

Para entender a relação entre α e β, considere o TH unilateral dada pela seguinte hipótese unilateral a esquerda.

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_B \\ H_1: \mu < \mu_B \end{cases}$$

Ilustração do erro tipo I e erro tipo II



Há uma relação inversa entre **α** e **β**, ou seja, se a probabilidade de um tipo de erro é reduzida, aquela do outro tipo é aumentada.

$$\alpha = P(\bar{X} < X_c | \mu = \mu_0)$$

$$\beta = P(\bar{X} > X_c | \mu < \mu_0)$$

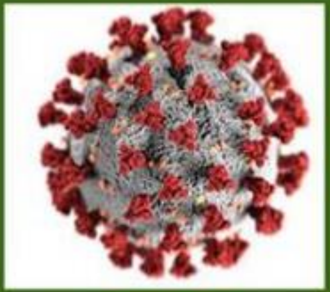
Tipos de Erros em TH

Decisão	H_0 verdadeira	H_0 falsa
Rejeitar H_0	Erro do tipo I (α)	Decisão correta ($1 - \beta$)
Não rejeitar H_0	Decisão correta ($1 - \alpha$)	Erro do tipo II (β)

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

TIPOS DE ERROS EM TH

Outro exemplo: COVID - 19



Erro tipo I (alfa): Assumir que o paciente não tem covid-19 sendo que na verdade ele tem.

Erro tipo II (beta): Assumir que o paciente tem covid-19 sendo que na verdade ele não tem.

Decisão	H_0 verdadeira	H_0 falsa
Rejeitar H_0	Erro do tipo I (α)	Decisão correta ($1-\beta$)
Não rejeitar H_0	Decisão correta ($1-\alpha$)	Erro do tipo II (β)

H0: Paciente tem COVID-19

@estatistica_oficial

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Estatística de Teste

A estatística de teste é uma estatística que pode ser calculada a partir dos dados da amostra. Como regra, existem muitos valores possíveis que pode ter a estatística de teste, dependendo o valor particular observado em uma amostra particular extraída. Como se verá, a estatística de teste serve como um produtor de decisões, já que a decisão de rejeitar ou não a hipótese nula depende da magnitude da estatística de teste. Assim, **a estatística de teste é uma variável aleatória, que é calculada a partir de dados da amostra e usada em um teste de hipótese. Pode-se usar estatísticas de teste para determinar se deve rejeitar a hipótese nula. Ela compara seus dados com o que se espera sob a hipótese nula. A estatística de teste é utilizada para calcular o valor-p**.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Estatística de Teste

A estatística de teste mede o grau de concordância entre uma amostra de dados e da hipótese nula. Seu valor observado muda aleatoriamente de uma amostra aleatória para uma amostra diferente. A estatística de teste contém informações sobre os dados que são relevantes para decidir se deve rejeitar a hipótese nula. A distribuição amostral da estatística de teste sob a hipótese nula é chamada de distribuição nula. Quando os dados mostram uma forte evidência contra os pressupostos na hipótese nula, a magnitude da estatística de teste torna-se muito grande ou muito pequena, dependendo da hipótese alternativa. Isso faz com que o valor-p do teste se torne pequeno o suficiente para rejeitar a hipótese nula.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Estatística de Teste

Se $X_1, \dots, X_n$ é uma amostra aleatória de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então sabemos

- Se σ^2 é **conhecida** então, $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

$$Z_{calc} = \sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

- Se σ^2 é **desconhecida** então,

$$t_{calc} = \sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu}{S} \sim t_{n-1}$$

em que $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$.

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Estatística de Teste

Obs: Os testes de hipóteses com relação à proporções populacionais se realizam quase da mesma maneira que os testes para média populacional, quando se satisfazem as condições necessárias para usar a curva normal. Podem ser realizados testes unilaterais ou bilaterais, dependendo da questão que se faça.

Estatística de Teste

Sabendo que a proporção amostral, de uma amostra aleatória simples de n elementos de uma população, quando o tamanho da amostra é suficientemente grande, tem distribuição normal com média π e variância $\frac{\pi(1-\pi)}{n}$ então a **estatística de teste**, supondo H_0 verdadeira, dada por:

$$Z_{calc} = \frac{\bar{X}-\pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} \sim N(0,1).$$

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Estatística de Teste

Considere uma população descrita por uma variável aleatória normal com média μ e variância σ^2: X ~ $N(\mu; \sigma^2)$. Nosso interesse é testar hipóteses sobre a variância σ^2 a partir de uma amostra aleatória simples $X_1, X_2, \ldots, X_n$, a **estatística de teste** é:

$$\chi^2{}_{calc} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

tem distribuição qui-quadrado com *n − 1* graus de liberdade. O nível de significância e o tipo de hipótese alternativa permitem a identificação precisa do que são “valores pouco prováveis”: são valores na(s) cauda(s) da distribuição de χ^2 quando a hipótese nula é verdadeira.

Passos para Construção de um TH

Procedimento geral:

Passo 1: Definir as hipóteses H_0 e H_1 a serem testadas;

Passo 2: Escolher a estatística de teste (Z_{calc}, t_{calc}, χ^2_{calc} ou F_{calc}) que será utilizada para testar H_0;

Passo 3: Fixe a probabilidade de α de **erro tipo I** e construa a RC;

Passo 4: Use as observações da amostra para calcular o valor observado da estatística de teste;

Passo 5: Tome uma decisão: se o valor observado da estatística de teste não pertencer à região crítica, não rejeite H_0; caso contrário rejeite H_0.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Teste de Hipótese para a Média

Seja X a variável aleatória de interesse com média populacional igual μ.

- Em algumas situações estamos interessados em testar se μ é igual, menor, maior ou diferente de uma **constante fixada** μ_0.

- Neste caso podemos fazer testes para μ considerando

  - Variância **conhecida.**

  - Variância **desconhecida.**

- Para algum valor de μ_0 as hipóteses de interesse são:

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_A: \mu < \mu_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_A: \mu > \mu_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_A: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

Teste de Hipótese para a Média

Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de X. Consideramos o teste de hipótese:

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{cases}$$

Como $\bar{X}$ é um estimador para μ, desta forma a RC é definida da seguinte forma $RC = \{\bar{X} | \bar{X} > \mathrm{k}\}$, em que k é um número real não aleatório e denominado de ponto crítico.

O ponto crítico k será encontrado fixando a probabilidade de cometer o **erro tipo I**. Ou seja, para cada α fixado, teremos um ponto crítico diferente.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Teste de Hipótese para a Média

Encontrando o valor de k. Por definição

$$\alpha = P(Rejeitar\ H_0|H_0 \text{ é } verdadeiro) = P(\bar{X} < \mathrm{k}|\mu \leq \mu_0)$$

$$\alpha = P\left(\sqrt{n}\frac{(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} < \sqrt{n}\frac{(k - \mu_0)}{\sigma}\right) = P\left(Z < \sqrt{n}\frac{(k - \mu_0)}{\sigma}\right)$$

$$\frac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = Z_\alpha \rightarrow k = \mu_0 + Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$RC = \left\{\bar{X}|\bar{X} > \mu_0 + Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\},$$

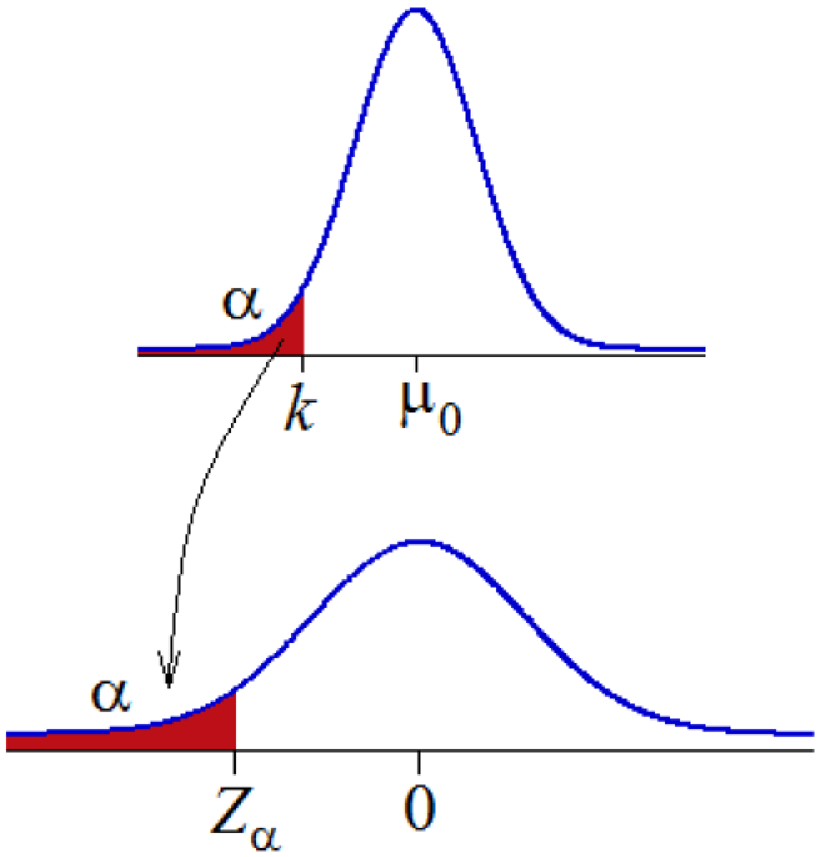
Assim, $\begin{cases} \bar{X} < k \rightarrow \text{Rejeita-se } H_0 \\ \bar{X} \geq k \rightarrow \text{Não se Rejeita } H_0 \end{cases}$

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Teste de Hipótese para a Média

Assim, $\begin{cases} \bar{X} < k \rightarrow \text{Rejeita-se } H_0 \\ \bar{X} \geq k \rightarrow \text{Não se Rejeita } H_0 \end{cases}$

$$RC = \left\{\bar{X} | \bar{X} > \mu_0 + Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\},$$



variável original

variável padronizada

Teste de Hipótese para a Média

Uma forma mais apropriada para o teste de hipótese para a média consiste em calcular o valor observado da estatística teste, denotado por Z_{calc}, e compará-lo com o respectivo valor na escala padronizada.

$$Z_{calc} = \frac{(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma/\sqrt{n}}$$

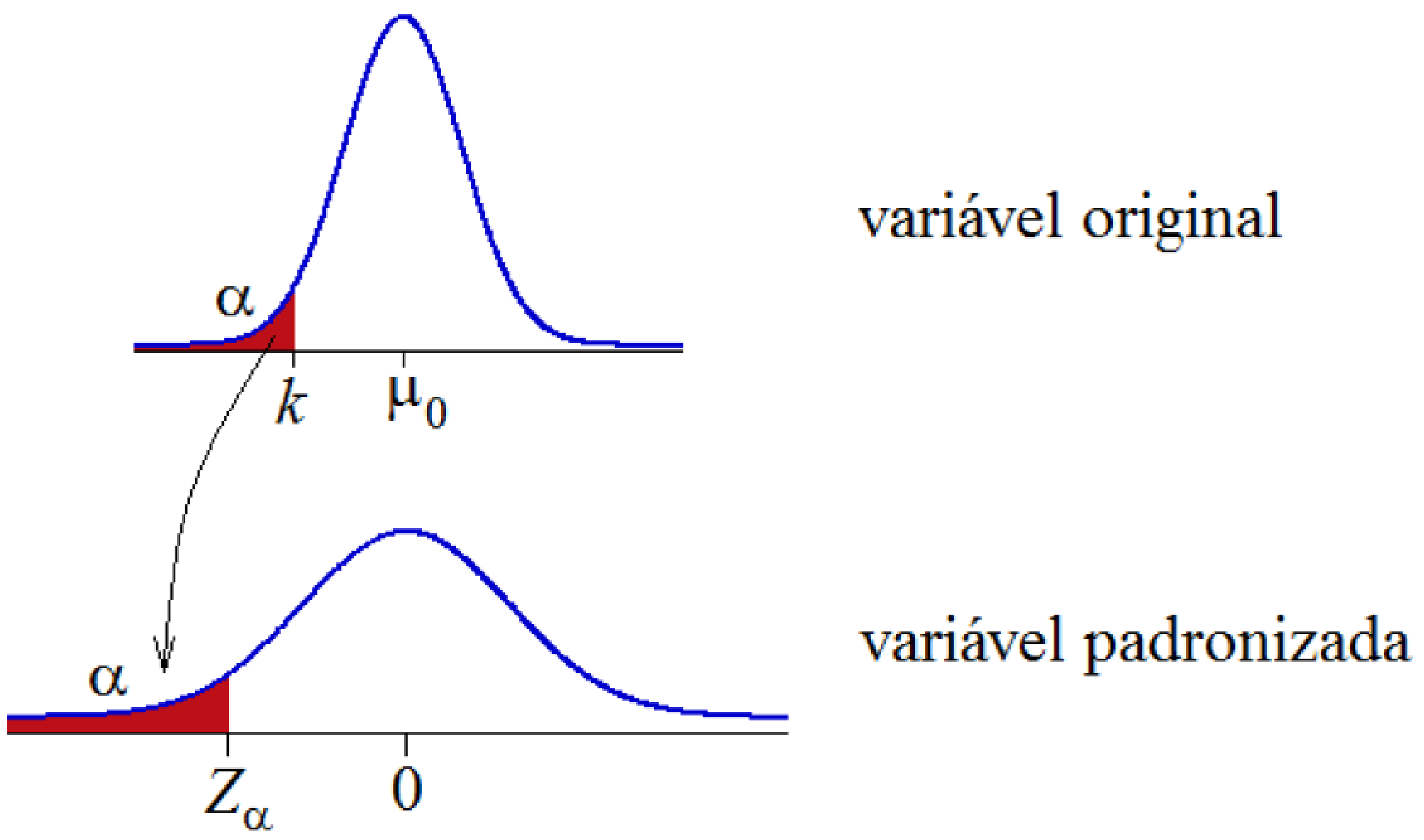
Desta forma, para o teste unilateral na cauda inferior, compara-se o valor observado da estatística teste com o percentil Z_α da distribuição normal padronizada.

Assim, $\begin{cases} Z_{calc} < Z_\alpha \rightarrow \text{Rejeita-se } H_0 \\ Z_{calc} \geq Z_\alpha \rightarrow \text{Não se Rejeita } H_0 \end{cases}$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Teste de Hipótese para a Média

Assim, $\begin{cases} Z_{calc} < Z_{\alpha} \rightarrow \text{Rejeita-se } H_0 \\ Z_{calc} \geq Z_{\alpha} \rightarrow \text{Não se Rejeita } H_0 \end{cases}$



TESTE DE HIPÓTESE PARA A MÉDIA

Importante

Na conclusão do teste de hipótese deve-se escrever:

- Se $\bar{x} \in RC$, então dizemos que há evidências para rejeitar H_0, ao nível α de significância.
- Se $\bar{x} \notin RC$, então dizemos que não há evidências para rejeitar H_0, ao nível α de significância.

Adotando o nível de significância α é equivalente a dizer que estamos dispostos a cometer, em média, o **erro tipo I** $\alpha 100\%$ dos experimentos.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Teste de Hipótese para a Média

Valor p do teste, ou probabilidade de significância, é definido por

$$p = P(Z > |Z_{calc}|)$$

Pode-se utilizar o valor p para se testar H_0 comparando-o com o nível de significância α:

1) Se p é menor do que o nível de significância α, então, o valor da estatística Z_{calc} pertence a região de rejeição.

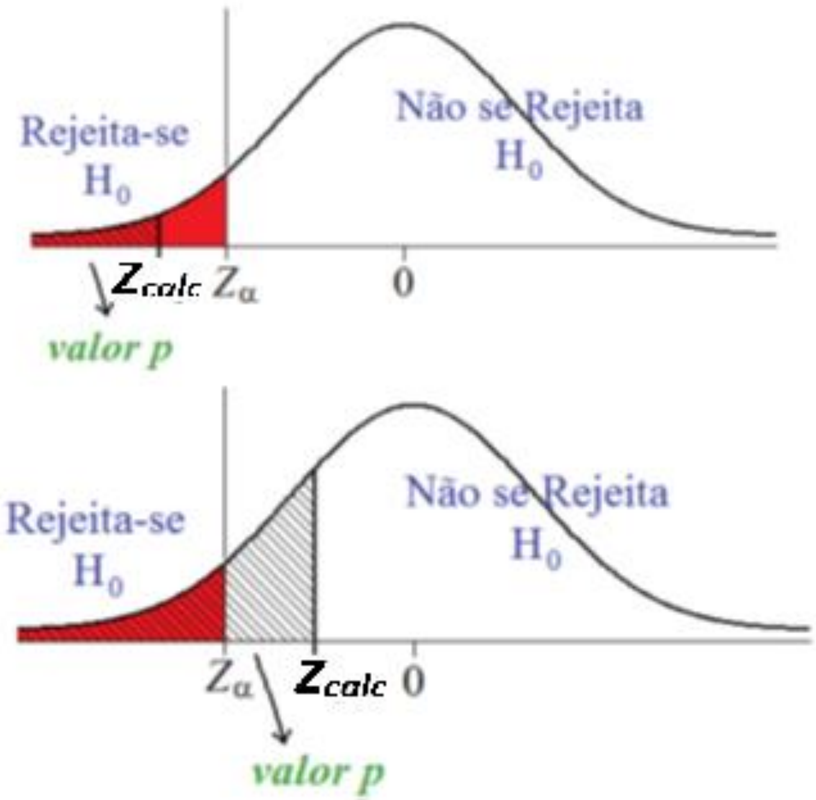
2) Se p é maior do que o nível de significância α, então, o valor da estatística Z_{calc} pertence a região de não rejeição.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Teste de Hipótese para a Média

1)

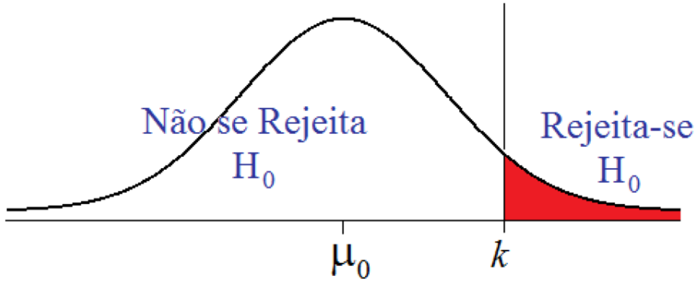
2)



Neste sentido, o nível de significância serve somente como referência para a nossa decisão de rejeitar ou não H_0.

TESTE DE HIPÓTESE PARA A MÉDIA

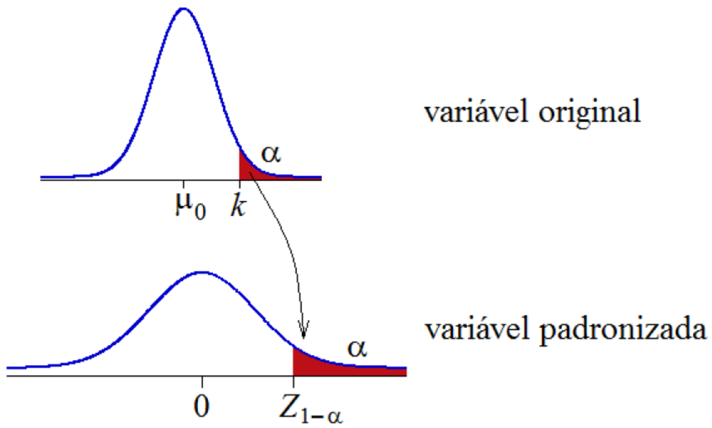
$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases}$$



$$\alpha = P(\bar{X} > k | \mu = \mu_0) \rightarrow k = \mu_0 + Z_{(1-\alpha)} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\begin{cases} \bar{X} > k \rightarrow \text{Rejeita-se } H_0 \\ \bar{X} \leq k \rightarrow \text{Não se Rejeita } H_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_{calc} > Z_{(1-\alpha)} \rightarrow \text{Rejeita-se } H_0 \\ Z_{calc} \leq Z_{(1-\alpha)} \rightarrow \text{Não se Rejeita } H_0 \end{cases}$$



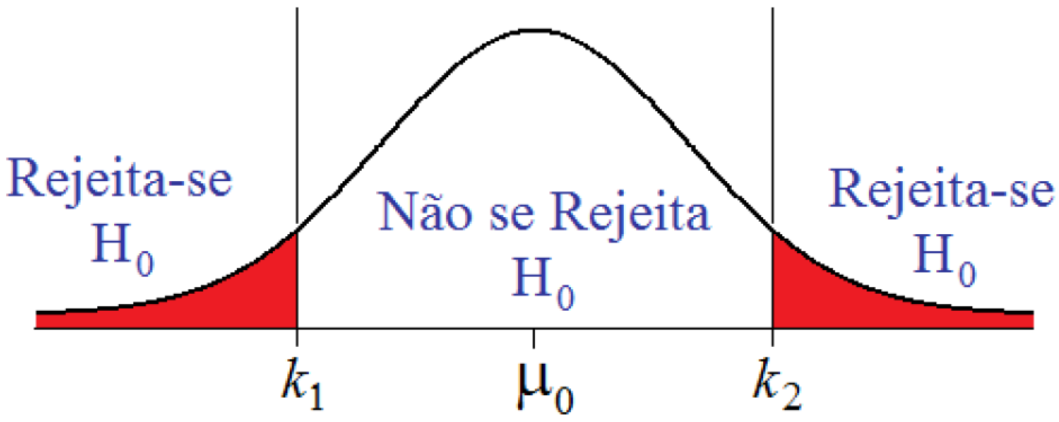
$$p = P(Z > |Z_{calc}|)$$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Teste de Hipótese para a Média

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

O teste bicaudal é definido pela região $(-\infty, k_1) \cup (k_2, \infty), k_1 < k_2$, ou seja, se o valor da média amostral $\bar{X}$, for inferior k_1 ou superior k_2, então rejeita-se H_0. Se $k_1 \leq \bar{X} \leq k_2$, então não rejeita-se H_0.



Teste de Hipótese para a Média

$$\alpha = P(\bar{X} < k_1 \; ou \; \bar{X} > k_2 | \; \mu = \mu_0)$$

$$\alpha = P\left(Z < \sqrt{n}\frac{(k_1 - \mu_0)}{\sigma}\right) + P\left(Z > \sqrt{n}\frac{(k_2 - \mu_0)}{\sigma}\right)$$

Para encontrar os valores k_1 e k_2 consideramos

$$P\left(Z < \sqrt{n}\frac{(k_1 - \mu_0)}{\sigma}\right) = P\left(Z > \sqrt{n}\frac{(k_2 - \mu_0)}{\sigma}\right)$$

Assim, a probabilidade de cometer o **erro tipo I** é dada por

$$\alpha = 2P\left(Z < \sqrt{n}\frac{(k_1 - \mu_0)}{\sigma}\right)$$

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Teste de Hipótese para a Média

Desta forma, para um nível α fixado, podemos calcular os pontos críticos:

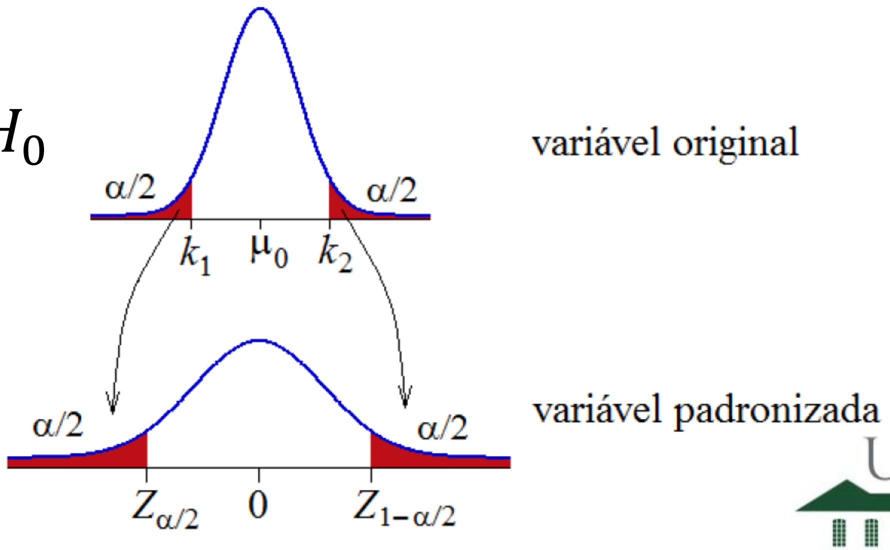
$$k_1 = \mu_0 - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ ou } k_2 = \mu_0 + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Portanto, a região crítica é dada por

$$RC = \left\{\bar{X} | \bar{X} < \mu_0 + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\; ou \;\; \bar{X} > \mu_0 + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\},$$

$$\begin{cases} Z_{calc} < Z_{\alpha/2} \text{ ou } Z_0 > Z_{1-\alpha/2} \rightarrow \text{Rejeita-se } H_0 \\ Z_{\alpha/2} \leq Z_{calc} \leq Z_{1-\alpha/2} \rightarrow \text{Não se Rejeita } H_0 \end{cases}$$

$$p = 2P(Z > |Z_{calc}|)$$



UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Teste de Hipótese para a Média

Como realizar o teste através do valor p:

Os testes de hipóteses podem ser realizados através do valor p, que é o que observamos nos softwares estatísticos.

- Se o valor p for maior ou igual a um nível de significância fixado, ou seja, se $p \geq \alpha \Rightarrow$ não rejeita-se H_o.
- Se o valor p for menor do que o nível de significância fixado, ou seja, se $p < \alpha \Rightarrow$ rejeita-se H_o.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

TH para médias, variância conhecida

Exemplo: Uma indústria elétrica fabrica lâmpadas e afirma que o tempo de vida médio das lâmpadas é de 800 horas. Tomaram-se o tempo de vida de 40 lâmpadas e obteve-se uma média $\bar{x}$ = 750 horas e sabe-se que a variância populacional é σ^2 = 1600 horas. Utilize um teste unilateral ao nível de 5% de significância para verificar se a indústria estava correta.

Teste de Hipótese para a Média

TH para médias, variância conhecida

Solução:

1) Estabelecer o parâmetro e a hipótese.

$$\begin{cases} H_0: \mu = 800 \\ H_1: \mu < 800 \end{cases}$$

Teste de Hipótese para a Média

TH para médias, variância conhecida

Solução:

2) Escolher a estatística de teste que será utilizada para testar H_0.

$$Z_{calc} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Teste de Hipótese para a Média

TH para médias, variância conhecida

Solução:

3) Fixe a probabilidade de α de erro tipo I e construa a RC;

α = 0,05 (enunciado)

Teste de Hipótese para a Média

TH para médias, variância conhecida

Solução:

4) Use as observações da amostra para calcular o valor observado da estatística de teste;

$$Z_{calc} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$= \frac{750 - 800}{\sqrt{1600}/\sqrt{40}}$$

$$= \frac{-50}{6,32}$$

$$= -7,91$$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

TESTE DE HIPÓTESE PARA A MÉDIA

TH para médias, variância conhecida

Solução:

5) Tome uma decisão: se o valor observado da estatística de teste não pertencer à região crítica, não rejeite H_0; caso contrário rejeite H_0.

$$|Z_{calc}| \geq Z_{\alpha} \text{ (tabelado)}$$

$$Z_{\alpha} = Z_{0,05} = -1{,}65$$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Teste de Hipótese para a Média

TH para médias, variância conhecida

Solução:

P(Z<z)

z	0,0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455

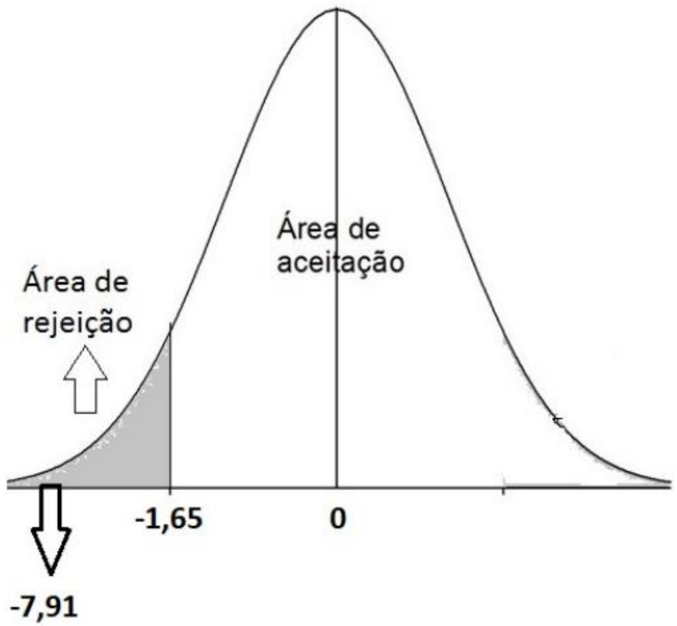
UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

TESTE DE HIPÓTESE PARA A MÉDIA

TH para médias, variância conhecida

Solução:

5) Tome uma decisão: se o valor observado da estatística de teste não pertencer à região crítica, não rejeite H_0; caso contrário rejeite H_0.

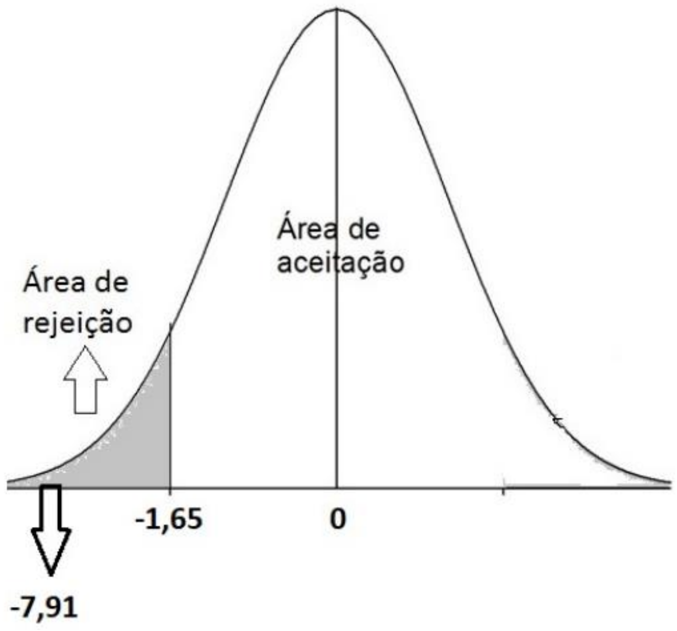


UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

TH para médias, variância conhecida

Solução:

5) Tome uma decisão: se o valor observado da estatística de teste não pertencer à região crítica, não rejeite H_0; caso contrário rejeite H_0.



Como -7,91 pertence a área de rejeição, rejeita-se H_0.

Teste de Hipótese para a Média

TH para médias, variância conhecida

Solução:

5) Tome uma decisão: se o valor observado da estatística de teste não pertencer à região crítica, não rejeite H_0; caso contrário rejeite H_0.

Observando Z_{calc} = -7, 91, tem-se que, como -7,91 < -1,65, rejeita-se H_0, a um nível de significância de 5%, ou seja, com 95% de probabilidade a empresa estava errada ao afirmar que o tempo de vida médio das lâmpadas é 800 horas.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Teste de Hipótese para a Média

TH para médias, variância desconhecida

Exemplo: Uma amostra de 30 peixes pescados numa certa represa produziu um peso médio de 13,36g e desvio padrão 4,79g. Suspeita-se que a média de peso da população desses peixes nessa região seja 12g. Utilize um teste de hipótese unilateral com 5% de significância.

Teste de Hipótese para a Média

TH para médias, variância desconhecida

Solução:

1) **Estabelecer o parâmetro e a hipótese.**

$$\begin{cases} H_0: \mu = 12\text{g} \\ H_1: \mu > 12\text{g} \end{cases}$$

TH para médias, variância desconhecida

Solução:

2) Escolher a estatística de teste que será utilizada para testar H_0.

$$t_{calc} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

TESTE DE HIPÓTESE PARA A MÉDIA

TH para médias, variância desconhecida

Solução:

3) Fixe a probabilidade de α de erro tipo I e construa a RC;

α = 0,05 (enunciado)

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

TESTE DE HIPÓTESE PARA A MÉDIA

TH para médias, variância desconhecida

Solução:

4) Use as observações da amostra para calcular o valor observado da estatística de teste;

$$t_{calc} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

$$= \frac{13{,}36 - 12}{4{,}79/\sqrt{30}}$$

$$= \frac{1{,}36}{0{,}87}$$

$$= 1{,}56$$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

TESTE DE HIPÓTESE PARA A MÉDIA

TH para médias, variância desconhecida

Solução:

5) Tome uma decisão: se o valor observado da estatística de teste não pertencer à região crítica, não rejeite H_0; caso contrário rejeite H_0.

$$|t_{calc}| > t_{\alpha}$$

$$t_{\alpha;n-1} = t_{0,05;30-1} = t_{0,05;29}$$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

TH para médias, variância desconhecida

Solução:

Tabela : Distribuição t de student - valores para $P(t > t_c) = \alpha$, considerando $\alpha = 0,250; 0,200; 0,150; 0,100; 0,050; 0,025; 0,010; 0,005; 0,001$.

GL	α								
$\nu = n - 1$	0,250	0,200	0,150	0,100	0,050	0,025	0,010	0,005	0,001
1	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656	318,289
2	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,328
3	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,214
4	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
5	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,894
6	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
8	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501
9	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297
10	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144
11	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025
12	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930
13	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852
14	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787
15	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733
16	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686
17	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646
18	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610
19	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579
20	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552
21	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527
22	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505
23	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485
24	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467
25	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450
26	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435
27	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421
28	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408
29	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

TESTE DE HIPÓTESE PARA A MÉDIA

TH para médias, variância desconhecida

Solução:

5) Tome uma decisão: se o valor observado da estatística de teste não pertencer à região crítica, não rejeite H_0; caso contrário rejeite H_0.

$$t_{0,05;29} = 1{,}699$$

Observando $|t_{calc}|$ = 1,56, temos que como 1,56 < 1,699, não há evidências para rejeitar H_0, a um nível de significância de 5%.

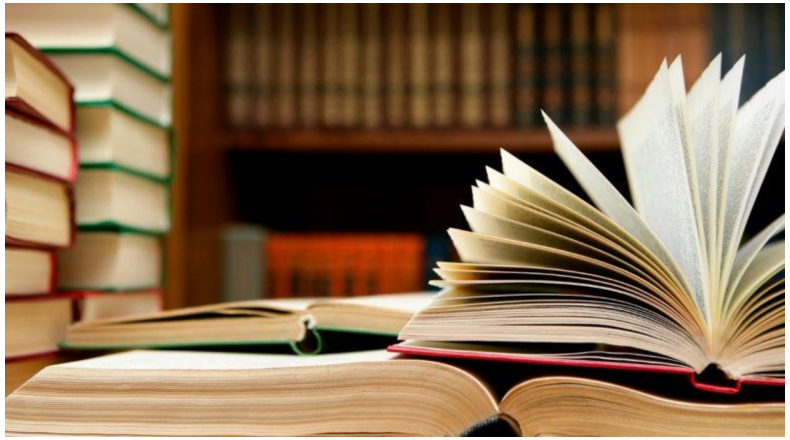
UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

DE VOLTA AO EXEMPLO 4

TH para proporção

Exemplo 4: Pelo Anuário do IBGE de 2010, a proporção de analfabetos em uma cidade era de 15%. Em 2015, entre 200 entrevistados dessa cidade, 23 eram analfabetos. Esses dados suportam a tese de diminuição do analfabetismo na cidade de 2010 para 2015?

$p = 0{,}15$



UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

De volta ao exemplo 4

TH para proporção

Solução:

1) Estabelecer o parâmetro e a hipótese.

Sendo ***p* a proporção** populacional de analfabetos na cidade em 2015, as hipóteses de interesse são:

$$\begin{cases} H_0: p = 0{,}15 \\ H_1: p < 0{,}15 \end{cases}$$

Hipótese alternativa unilateral.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

De volta ao exemplo 4

TH para proporção

Solução:

2)Escolher a estatística de teste que será utilizada para testar H_0.

$$Z_{calc} = \frac{\bar{X} - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}}$$

3) Fixe a probabilidade de α de erro tipo I e construa a RC.

Vamos fixar: α = 0,10

DE VOLTA AO EXEMPLO 4

TH para proporção

Solução:

4) Use as observações da amostra para calcular o valor observado da estatística de teste. $RC = \{\hat{p} \leq a\}$

$$0{,}10 = P(\hat{p} \leq a \mid p = 0{,}15) \cong P\left(Z \leq \frac{a - 0{,}15}{\sqrt{(0{,}15)(0{,}85)/200}}\right)$$

Pela tabela da Normal, para $A(z) = 0{,}90 \rightarrow z = 1{,}28$, então

$$\frac{a - 0{,}15}{\sqrt{(0{,}15)(0{,}85)/200}} = -1{,}28 \rightarrow a = 0{,}15 - 1{,}28\sqrt{(0{,}15 \text{ x } 0{,}85)/200} \cong 0{,}118$$

Logo $a = 0{,}118$ e $RC = \{\hat{p} \leq 0{,}118\}$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

DE VOLTA AO EXEMPLO 4

TH para proporção

Solução:

4) Use as observações da amostra para calcular o valor observado da estatística de teste.

Observou-se $\hat{p}_{obs} = \frac{23}{200} = 0{,}115.$

De volta ao exemplo 4

TH para proporção

Solução:

5) Tome uma decisão: se o valor observado da estatística de teste não pertencer à região crítica, não rejeite H_0; caso contrário rejeite H_0.

$\hat{p}_{obs} = \frac{23}{200} = 0{,}115 \in RC \rightarrow$ rejeita-se H_0 ao nível de significância de 10%.

Conclui-se que a taxa de analfabetismo diminuiu.

TESTE DE HIPÓTESE PARA VARIÂNCIA σ^2

TH para variância

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória selecionada de uma distribuição $N(\mu, \sigma^2)$.

1) Consideremos as seguintes hipóteses:

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$

em que σ^2 é um valor conhecido da variância populacional.

TESTE DE HIPÓTESE PARA VARIÂNCIA σ^2

TH para variância

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória selecionada de uma distribuição $N(\mu, \sigma^2)$.

2) a estatística de teste que será utilizada para testar H_0:

$$\chi^2{}_{calc} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}.$$

Teste de Hipótese para variância σ^2

TH para variância

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória selecionada de uma distribuição $N(\mu, \sigma^2)$.

3) Fixar a probabilidade de α de erro tipo I e construir a RC.

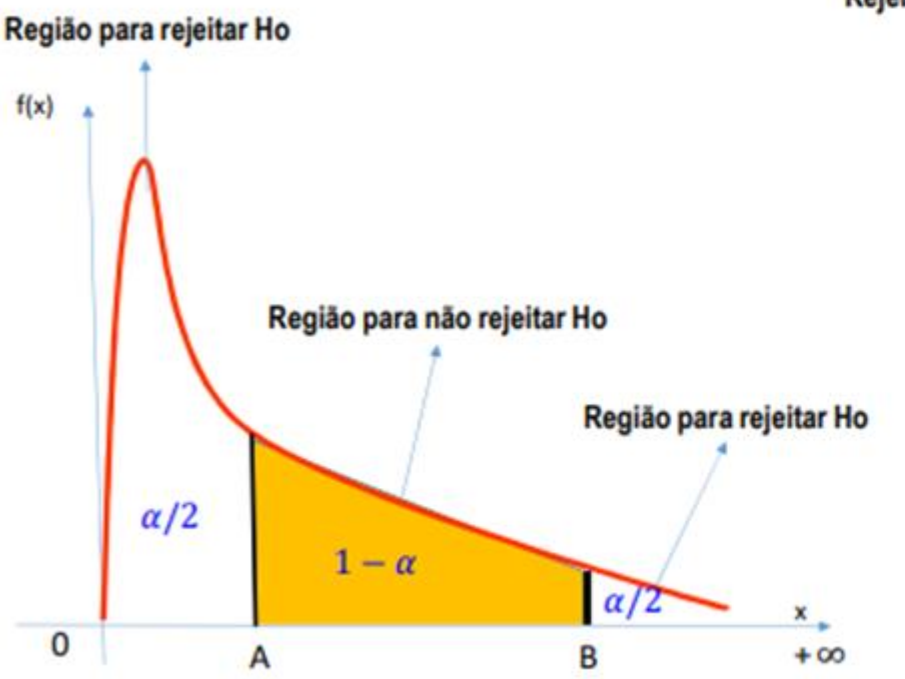
4) Usar as observações da amostra para calcular o valor observado da estatística de teste.

Teste de Hipótese para variância σ^2

TH para variância

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória selecionada de uma distribuição $N(\mu, \sigma^2)$.

5) Regra decisão:



Rejeitar Ho se: $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < A$ ou $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > B$

Onde A e B são tais que:

$P(X < A) = \frac{\alpha}{2}$ $\quad$ $P(X < B) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

$X \sim \chi^2_{n-1}$

TESTE DE HIPÓTESE PARA VARIÂNCIA σ^2

TH para variância

Exemplo: Uma das maneiras de manter sob controle a qualidade de um produto é controlar sua variabilidade. Uma máquina de encher pacotes de café está regulada para enchê-los com média de 500g e desvio padrão de 10g. O peso de cada pacote $\bar{X}$ segue uma distribuição $N(\mu,\ \sigma^2)$. Colheu-se uma amostra de 16 pacotes e observou-se uma variância de S^2=169g^2. Com esse resultado, você diria que a máquina está desregulada com relação à variância?

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

TESTE DE HIPÓTESE PARA VARIÂNCIA σ^2

TH para variância

Solução:

1) Consideremos as seguintes hipóteses:

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = 100 \\ H_1: \sigma^2 \neq 100 \end{cases}$$

Teste de Hipótese para variância σ^2

TH para variância

Solução:

2) a estatística de teste que será utilizada para testar H_0:

$$\chi^2{}_{calc} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}.$$

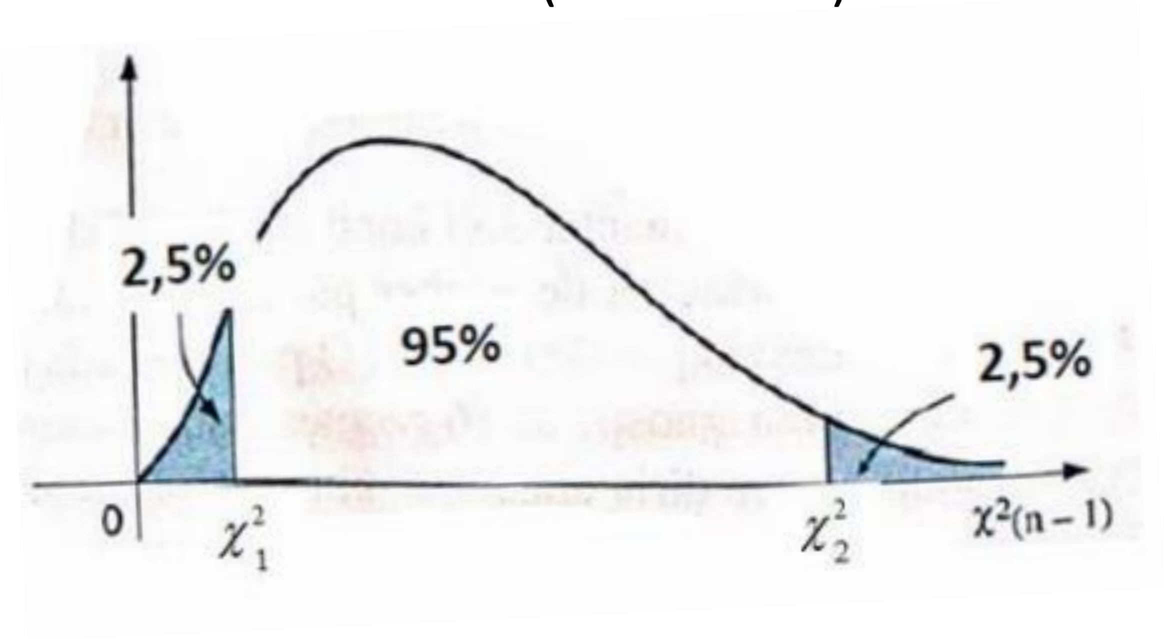
TESTE DE HIPÓTESE PARA VARIÂNCIA σ^2

TH para variância

Solução:

3) Fixar a probabilidade de α de erro tipo I.

α = 0.05 (enunciado)



UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

TESTE DE HIPÓTESE PARA VARIÂNCIA σ^2

TH para variância

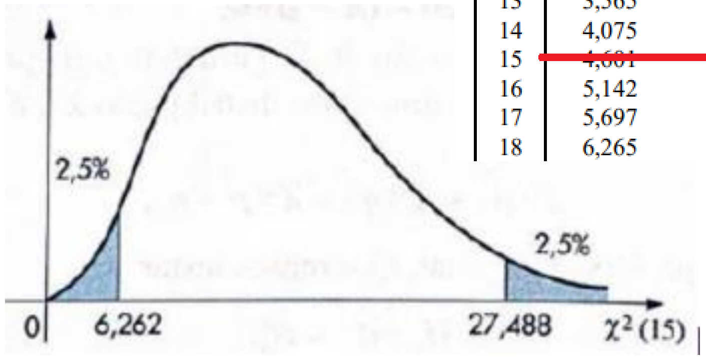
Solução:

TABELA IV

Distribuição do Qui-Quadrado - χ^2_n

Os valores tabelados correspondem aos pontos x tais que: $P(\chi^2_n \leq x)$

n	$P(\chi^2_n \leq x)$ 0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,25	0,5	0,75	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	
1	3,93E-05	0,000157	0,000982	0,003932	0,016	0,102	0,455	1,323	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879	1
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	0,575	1,386	2,773	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597	2
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	1,213	2,366	4,108	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838	3
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	1,923	3,357	5,385	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860	4
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	2,675	4,351	6,626	9,236	11,070	12,832	15,086	16,750	5
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	3,455	5,348	7,841	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548	6
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	4,255	6,346	9,037	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278	7
8	1,344	1,647	2,180	2,733	3,490	5,071	7,344	10,219	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955	8
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	5,899	8,343	11,389	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589	9
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	6,737	9,342	12,549	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188	10
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	7,584	10,341	13,701	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757	11
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	8,438	11,340	14,845	18,549	21,026	23,337	26,217	28,300	12
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,041	9,299	12,340	15,984	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819	13
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	10,165	13,339	17,117	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319	14
15	4,601	5,229	$\boxed{6,262}$	7,261	8,547	11,037	14,339	18,245	22,307	24,996	$\boxed{27,488}$	30,578	32,801	15
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	11,912	15,338	19,369	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267	16
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	12,792	16,338	20,489	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718	17
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865	13,675	17,338	21,605	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156	18



UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

TESTE DE HIPÓTESE PARA VARIÂNCIA σ^2

TH para variância

Solução:

4) Usar as observações da amostra para calcular o valor observado da estatística de teste.

$$\chi^2{}_{calc} = \frac{(n-1)S_0^2}{\sigma_0^2} = \frac{(16-1)169}{100} = 25{,}35$$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Teste de Hipótese para variância σ^2

TH para variância

Solução:

5) Regra decisão:

Como $\chi^2{}_{calc} \notin RC$, não rejeitamos H_0, ou seja, a máquina esta sob controle quanto à variância.

PODER DO TESTE

Definimos **poder de um teste** estatístico como a probabilidade do teste rejeitar H_0 quando H_0 é realmente falsa, ou seja, o poder de um teste é igual a $1 - \beta$.

O poder de um teste de hipóteses é afetado por três fatores:

- **Tamanho da amostra:** Quanto maior o tamanho da amostra, maior o poder do teste.

Poder do teste

O poder de um teste de hipóteses é afetado por três fatores:

- **Nível de Significância:** Quanto maior o nível de significância, maior o poder do teste. Se você aumenta o nível de significância, você reduz a região de aceitação. Como resultado, você tem maior chance de rejeitar a hipótese nula. Isto significa que você tem menos chance de aceitar a hipótese nula quando ela é falsa, isto é, menor chance de cometer um **erro tipo II**. Então, o poder do teste aumenta.

Poder do teste

O poder de um teste de hipóteses é afetado por três fatores:

- **O verdadeiro valor do parâmetro a ser testado:** Quanto maior a diferença entre o "verdadeiro" valor do parâmetro e o valor especificado pela hipótese nula, maior o poder do teste.

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Função Poder

Em um teste de hipótese é desejável que α e β sejam os menores possíveis, uma vez que representam as probabilidades de tomar decisões incorretas.

No entanto, dada uma dimensão de amostra, n, não é possível minimizar simultaneamente α e β. Assim:

Se α diminui então β aumenta

Se β diminui então α aumenta

Na prática, costuma-se fixar a probabilidade do **erro tipo I** em um nível pré-fixado α e então tentar minimizar a probabilidade do **erro tipo II**.

FUNÇÃO PODER

Uma função poder de um teste de hipótese é a função de θ definida por $\pi(\theta) = P_\theta(H_0 \text{ é } rejeitada)$. Ela é utilizada para verificar a adequação de um teste ou para comparar dois ou mais testes.

- Se $\theta \in \Theta_0$, $\pi(\theta) = \alpha$ é a probabilidade do **erro tipo I**.
- Se $\theta \in \Theta_1$, $\pi(\theta) = 1 - \beta$, ou seja, $\pi(\theta) = 1 - P($**erro tipo II**$)$.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

NÍVEL DESCRITIVO: P (OU VALOR *P*)

O nível descritivo corresponde à probabilidade de se observar valores tão ou mais extremos (contra H_0) que o valor obtido na amostra, caso a **hipótese nula $\boldsymbol{H_0}$** seja verdadeira, ou seja,

$$P = \boldsymbol{P(\text{valores mais extremos contra } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira})}$$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

NÍVEL DESCRITIVO: P (OU VALOR *P*)

O nível descritivo corresponde à probabilidade de se observar valores tão ou mais extremos (contra H_0) que o valor obtido na amostra, caso a **hipótese nula $\boldsymbol{H_0}$** seja verdadeira, ou seja,

$$P = \boldsymbol{P}(\textbf{valores mais extremos contra } \boldsymbol{H_0} \,|\, \boldsymbol{H_0} \textbf{ verdadeira})$$

Então, essa probabilidade P mede a força da evidência contida nos dados, contra a hipótese nula H_0.

NÍVEL DESCRITIVO: P (OU VALOR *P*)

O nível descritivo corresponde à probabilidade de se observar valores tão ou mais extremos (contra H_0) que o valor obtido na amostra, caso a **hipótese nula $\boldsymbol{H_0}$** seja verdadeira, ou seja,

$$P = \boldsymbol{P}(\textbf{valores mais extremos contra } \boldsymbol{H_0} \,|\, \boldsymbol{H_0} \textbf{ verdadeira})$$

Então, essa probabilidade P mede a força da evidência contida nos dados, contra a hipótese nula H_0.

Como saber se essa evidência é suficiente para rejeitar $\boldsymbol{H_0}$?

NÍVEL DESCRITIVO: P (OU VALOR *P*)

Se o **valor *P*** é “pequeno”, então é pouco provável observarmos valores iguais ou mais extremos que o da amostra, supondo a hipótese nula H_0 verdadeira. Logo, há indícios que a hipótese nula não seja verdadeira e, tendemos a rejeitá-la.

Para valores “não tão pequenos” de ***P*** não fica evidente que a hipótese nula H_0 seja falsa, portanto, tendemos a não rejeita-la.

Assim, ***P* “pequeno”, então rejeitamos $\boldsymbol{H_0}$**

***P* “não pequeno”, então não rejeitamos $\boldsymbol{H_0}$**

NÍVEL DESCRITIVO: P (OU VALOR *P*)

Se o **valor *P*** é "pequeno", então é pouco provável observarmos valores iguais ou mais extremos que o da amostra, supondo a hipótese nula H_0 verdadeira. Logo, há indícios que a hipótese nula não seja verdadeira e, tendemos a rejeitá-la.

Para valores "não tão pequenos" de ***P*** não fica evidente que a hipótese nula H_0 seja falsa, portanto, tendemos a não rejeita-la.

Assim, ***P* "pequeno", então rejeitamos $\boldsymbol{H_0}$**

***P* "não pequeno", então não rejeitamos $\boldsymbol{H_0}$**

Quão "pequeno" deve ser o valor de *P* para rejeitarmos $\boldsymbol{H_0}$?

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

NÍVEL DESCRITIVO: P (OU VALOR *P*)

O limite de "quão pequeno" o valor de ***P*** deve ser para rejeitar a hipótese nula é o nível de significância α de modo que:

$$\boldsymbol{P \leq \alpha}, \textbf{ então rejeita-se } \boldsymbol{H_0}$$

$$\boldsymbol{P > \alpha}, \textbf{ então não rejeita-se } \boldsymbol{H_0}$$

Se ***P*** $\leq \alpha$, diz-se que a amostra forneceu evidência suficiente para rejeitar a hipótese nula H_0.

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

NÍVEL DESCRITIVO: P (OU VALOR *P*)

Observações:

- Quanto menor o valor ***P***, maior é a evidência contra a hipótese nula H_0 contida nos dados.
- Quanto menor o nível de significância α fixado, mais forte deve ser a evidência contra a hipótese nula H_0, para que ela seja rejeitada.
- Quanto a hipótese nula H_0 é rejeitada para o nível de significância α fixado, diz-se também que a amostra é **significante** ao nível de significância α.
- O nível descrito por ***P*** (valor ***P***) é o menor nível de significância para o qual a hipótese nula H_0 é rejeitada.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Nível descritivo: P (ou valor *P*)

Exemplo: Uma empresa imobiliária fez um levantamento do valor de mercado de 16 residências do vilarejo Águas Claras com a intenção de estabelecer negócios na nova região. Na sua região de origem, os valores dos imóveis deste mesmo padrão têm preço médio de 284mil dólares e desvio padrão de 64mil dólares. Tendo como referência o valor de imóveis de sua região de origem, a firma quer verificar se pode manter o mesmo critério de avaliação para as residências de Águas Claras. Valores observados (mil dólares):

297 257 269 183 309 229

243 204 192 209 189 187

432 271 324 275

UNIFESP

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

1933

Nível descritivo: P (ou valor *P*)

Dados $\sum_{i=1}^{16} x_i = 4070.$

a) Com um nível de significância a de 5%, defina as hipóteses e faça o teste unilateral.

b) Qual é a probabilidade de significância (ou valor *p*) do teste?

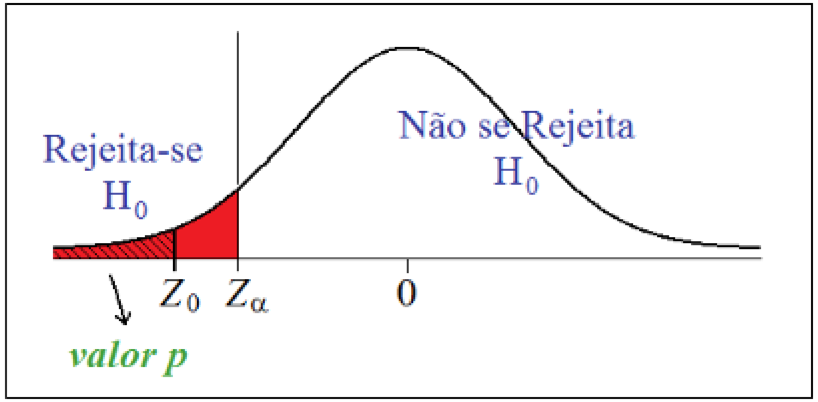
NÍVEL DESCRITIVO: P (OU VALOR *P*)

O valor *p* do teste, ou probabilidade de significância, é definido por:

$$p = P(Z > |Z_0|\,)$$

Pode-se utilizar o valor *p* para se testar H_0 comparando-o com o nível de significância α:

a) Se *p* é menor do que o nível de significância α, então, o valor da estatística teste Z_0 pertence à região de rejeição:

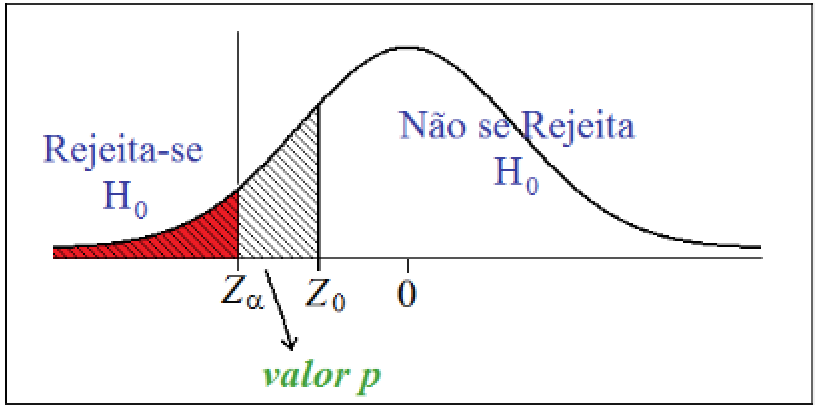


Valor *p*: região hachurada na Figura.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

NÍVEL DESCRITIVO: P (OU VALOR *P*)

b) Se p é maior do que o nível de significância α, então, o valor da estatística teste H_0 pertence à região de não rejeição:



Valor p: região hachurada na Figura.

Neste sentido, o nível de significância α serve somente como referência para a nossa decisão de rejeitar (ou não) H_0.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

NÍVEL DESCRITIVO: P (OU VALOR *P*)

Testar a hipótese utilizando se do valor *p* (α = 0.05)

$$\bar{x} = 254.375 \quad \Rightarrow \quad Z_0 = \frac{254.375 - 284}{64/\sqrt{16}} = -1.85$$

$$\text{Logo, } p = P(Z > |-1.85|) = 0.0322$$

Como 0.0322 < 0.05, então, rejeita-se H_0.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

NÍVEL DESCRITIVO: P (OU VALOR *P*)

Testar a hipótese utilizando se do valor *p* (α = 0.05)

$$\bar{x} = 254.375 \quad \Rightarrow \quad Z_0 = \frac{254.375 - 284}{64/\sqrt{16}} = -1.85$$

$$\text{Logo, } p = P(Z > |-1.85|) = 0.0322$$

Como 0.0322 < 0.05, então, rejeita-se H_0. (Lembrar que, *P*(Z > |-1.85|) = 1 - P(Z < |-1.85|) = 1 - A(1.85) = ?).

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

NÍVEL DESCRITIVO: P (OU VALOR *P*)

Tabela da Distribuição Normal Padrão

P(Z<z)

z	0,0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

NÍVEL DESCRITIVO: P (OU VALOR *P*)

Testar a hipótese utilizando se do valor *p* (α = 0.05)

$$\bar{x} = 254.375 \quad \Rightarrow \quad Z_0 = \frac{254.375 - 284}{64/\sqrt{16}} = -1.85$$

$$\text{Logo, } p = P(Z > |-1.85|) = 0.0322$$

Como 0.0322 < 0.05, então, rejeita-se H_0. (Lembrar que, *P*(Z > |-1.85|) = 1 - P(Z < |-1.85|) = 1-A(1.85) = 1 – 0.9678 = 0.0322).

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Referências

ANDRADE, D. F.; OGLIARI, P. J. **Estatística para as ciências agrárias e biológicas com noções de experimentação**. Editora da UFSC, Florianópolis, 2007.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros**. 6 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018. 628p.

MOORE, D. S. NOTZ, W. I.; FLIGNER, M. A. **A estatística básica e sua prática**. 7 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017. 628p.

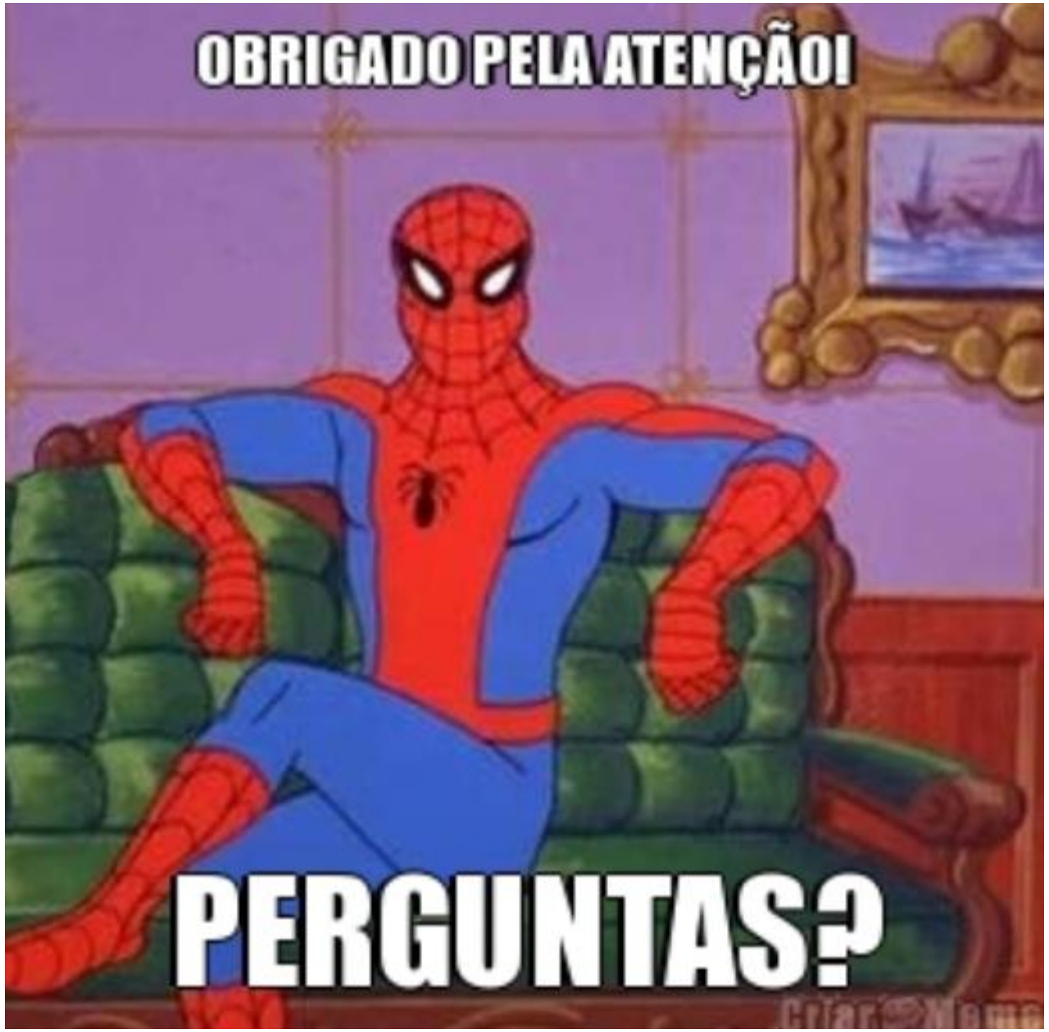
MORETTIN, P. A.; BUSSAB, W. O. **Estatística básica**. 9 ed. São Paulo: Saraiva, 2017. 554p.

UNIFESP

Universidade Federal de São Paulo

1933

Class finished



UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933