Cálculo em Várias Variáveis

Teoremas de Stokes e do Divergente

ICT-Unifesp

Mais detalhes nas Seções 16.8 e 16.9 do livro do Stewart.

Teorema de Stokes

Teorema de Stokes

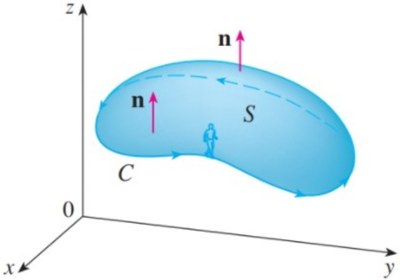
O Teorema de Stokes estabelece uma relação entre a integral sobre uma superfície S e a integral de linha ao longo de uma curva C que representa a fronteia (ou bordo) dessa superfície.

O Teorema de Stokes pode ser visto como uma versão em dimensões mais altas do Teorema de Green.

Teorema de Stokes

Definição

Dizemos que a curva C, fronteira da superfície S, tem **orientação positiva** *se a superfície estiver sempre à esquerda quando percorremos a curva com a cabeça na mesma direção e no mesmo sentido do vetor normal $\vec{n}$ à superfície.*



Teorema de Stokes

Teorema (de Stokes)

Seja S uma superfície orientada, suave por partes, cuja fronteira é formada por uma curva C fechada, simples, suave por partes e com orientação positiva. Seja $\vec{F}$ um campo vetorial cujas funções componentes têm derivadas parciais contínuas num aberto contendo S. Então

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS,$$

onde $\vec{n}$ é o vetor normal unitário à superfície S.

Teorema de Stokes

Exemplo

Seja $\vec{F}(x, y, z) = (y, 0, x + y)$ *um campo vetorial e* S *a superfície parametrizada por* $\vec{r}(u, v) = (u, v, 2 - u^2 - v^2)$*, com* $u^2 + v^2 \leqslant 1$*. Use o Teorema de Stokes para calcular*

$$\iint_S rot\,\vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Temos $A = \{(u,v) \mid u^2 + v^2 \leqslant 1\}$ e uma parametrização positiva da fronteira de A é dada por:

$$\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Logo, a parametrização da fronteira C, orientada positivamente em relação à normal, é dada por

$$\begin{aligned}\gamma(t) = \vec{r}(\alpha(t)) &= (\cos t, \operatorname{sen} t, 2 - \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t)\\ &= (\cos t, \operatorname{sen} t, 1).\end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema de Stokes, temos que

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} \\
&= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t, 0, \cos t + \operatorname{sen} t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0) dt \\
&= \int_0^{2\pi} -\operatorname{sen}^2 t \; dt = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) dt \\
&= -\frac{1}{2} \left(t - \frac{\operatorname{sen} 2t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = -\pi.
\end{aligned}$$

Teorema de Stokes

Sejam $P, Q : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1 e uma região $D \subset \mathbb{R}^2$ com fronteira C^1 por partes. Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, com $a \leq t \leq b$, uma parametrização com orientação positiva da fronteira C' de D.

Podemos definir:

$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, 0), Q(x, y, 0), 0)$

$S = \{(x, y, 0) \,|\, (x, y) \in D\}$

$\mathit{\Gamma}(t) = (x(t), y(t), 0)$ uma parametrização da fronteira C de S.

O vetor $\vec{n} = (0,0,1)$ é o vetor normal a S. Logo, pelo Teorema de Stokes, temos que

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\Gamma} = \iint_S (\text{rot}\, \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS.$$

Mas,

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\Gamma} &= \int_a^b \big(P(x(t),y(t),0), Q(x(t),y(t),0), 0\big) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, 0\right) dt \\ &= \int_a^b \left(P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt}\right) dt = \oint_{C'} P\ dx + Q\ dy.\end{aligned}$$

Teorema de Stokes

Por outro lado,

$$\text{rot}\,\vec{F} = \left(-\frac{\partial Q}{\partial z}, \ \frac{\partial P}{\partial z}, \ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \iint_S (\text{rot}\,\vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS &= \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dS \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA. \end{aligned}$$

Teorema de Stokes

Portanto,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\Gamma} = \iint_S (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS,$$

o que implica

$$\oint_{C'} P\ dx + Q\ dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA,$$

ou seja, o Teorema de Green é um caso particular do Teorema de Stokes.

Teorema do Divergente

Teorema do Divergente

Em aulas anteriores, provamos, como consequência do Teorema de Green, que

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = \iint_D \operatorname{div} \vec{F}(x, y)\; dA,$$

onde C é a fronteira positivamente orientada da região D do plano.

O Teorema do Divergente, sob certas condições, estende esse resultado para campos vetoriais em $\mathbb{R}^3$:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\; dS = \iiint_E \operatorname{div} \vec{F}(x, y, z)\; dV,$$

onde S é a superfície fronteira da região sólida E.

Teorema do Divergente

Teorema (do Divergente)

Seja E uma região sólida simples do $\mathbb{R}^3$ e seja S a superfície fronteira de E, orientada positivamente (vetor normal aponta para fora). Seja $\vec{F}$ um campo vetorial cujas funções coordenadas têm derivadas parciais contínuas em um aberto que contém E. Então,

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \operatorname{div} \vec{F}(x, y, z)\, dV.$$

Teorema do Divergente

Exemplo

Sejam $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z^2)$ *um campo vetorial e o cilindro*

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}.$$

Use o Teorema do Divergente para calcular a integral $\displaystyle\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, *sendo* S *a fronteira de* E.

Teorema do Divergente

Seja $D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.
Como $\operatorname{div} \vec{F} = 1 + 1 + 2z = 2 + 2z$, temos que

$$\iiint_E \operatorname{div} \vec{F}\; dV = \iint_D \int_0^1 (2 + 2z)\; dz\, dx\, dy$$
$$= \iint_D \left(2z + z^2\right) \Big|_0^1 \; dx\, dy$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 3r\; dr d\theta = 3\pi.$$

Portanto, pelo Teorema do Divergente,

$$\iint_S \vec{F} \cdot dS = 3\pi.$$

Teorema do Divergente

De modo semelhante ao feito com o Teorema de Green, podemos estender o Teorema do Divergente para sólidos obtidos pela união de um número finito de sólidos simples.

Podemos usar o Teorema do Divergente para calcular o volume de sólidos, bastando escolher um campo vetorial $\vec{F}$ tal que $\operatorname{div} \vec{F} = 1$.

O Teorema do Divergente tem papel fundamental no estudo do escoamento de fluidos (veja Guidorizzi, vol 3, exemplos 2 da Seção 10.1, 4 e 5 da Seção 10.2) e campos elétricos (Guidorizzi, vol 3, Exemplo 6 da Seção 10.1; Stewart, vol. 2, Exemplo 3 da Seção 16.9)

Teoremas Fundamentais

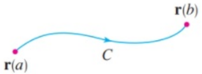
Teoremas Fundamentais

Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

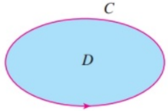
Teorema Fundamental para as Integrais de Linha

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$



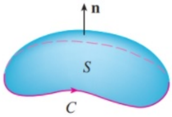
Teorema de Green

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_C P\,dx + Q\,dy$$



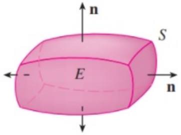
Teorema de Stokes

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$



Teorema do Divergente

$$\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\,dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$



Exercícios

Seção 16.8 do Stewart: 1–14, 17–19.

Seção 16.9 do Stewart: 1– 17.