Aula 1: Sequências numéricas

1.1 Sequências numéricas: Exemplos e definição

Uma sequência numérica, ou simplesmente, uma sequência, é uma sucessão de números. Ela pode ser pensada como uma lista de números escritos em uma ordem definida $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$.

Os valores $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ são chamados termos da sequência. O número a_1 é chamado de primeiro termo, a_2 é o segundo termo e, em geral, a_n é chamado de n-ésimo termo.

Observação: Em alguns casos é conveniente denotar o primeiro termo da sequência por a_0. Neste caso, a sequência tem a forma: $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

Importante: *A sequência* $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ *é também denotada por*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{ou} \quad (a_1, a_2, a_3, \ldots) \quad \text{ou} \quad \{a_n\} \quad \text{ou} \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{ou} \quad a_n$$

onde admitimos $n \geq 1$ *quando nada for dito sobre* n.

Exemplo 1.1 Nos exemplos a seguir, apresentamos três descrições distintas para a mesma sequência

$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} \qquad a_n = \frac{n}{n+1} \qquad \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\right\}$$

$$\left\{\sqrt{n-3}\right\}_{n=3}^{\infty} \qquad a_n = \sqrt{n-3},\ n \geq 3 \qquad \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n-3}, \ldots\}.$$

Exemplo 1.2 A **sequência de Fibonacci** é definida recursivamente pelas condições

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \ n \geq 3.$$

Cada termo é a soma dos dois termos precedentes. Os primeiros termos são

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}.$$

Exemplo 1.3 Determine uma fórmula para o termo geral, a_n, da sequência

$$\left\{\frac{3}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{5}{125}, -\frac{6}{625}, \frac{7}{3125}, \ldots\right\}.$$

Resolução: Sabemos que

$$a_1 = \frac{3}{5}, \; a_2 = -\frac{4}{25}, \; a_3 = \frac{5}{125}, \; a_4 = -\frac{6}{625}, \; a_5 = \frac{7}{3125}.$$

Note que os numeradores possuem sinais alternados e iniciam com o número 3 e são incrementados pelo número 1 à medida que avançamos para o próximo termo. Assim, o numerador por ser descrito por $(-1)^{n-1}(n+2)$. Os denominadores são potências de 5 e podem ser descritos por 5^n. Portanto, a fórmula para o termo geral, a_n, é dada por

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}(n+2)}{5^n}.$$

Importante: *Nem sempre é possível representar o termo geral de uma sequência por uma fórmula. Não existe uma fórmula para representar a sequência de números primos*

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, \ldots\}.$$

Definição 1.1. (Sequência numérica)

Uma sequência de números reais é uma função

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$$f(n) = a_n$$

qua associa a cada número narural n um número real a_n. ♣

1.2 Gráfico de sequências

O gráfico da sequência $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ é o gráfico de

$$f(n) = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Como o lado direito da equação está definido somente para números naturais, o gráfico consiste de pontos de isolados, isto é, distinto do gráfico de

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \geq 1$$

que é uma curva contínua.

*Gráficos em aula.

- O que acontece com a sequência quando n cresce?

1.3 Convergência de sequências numéricas

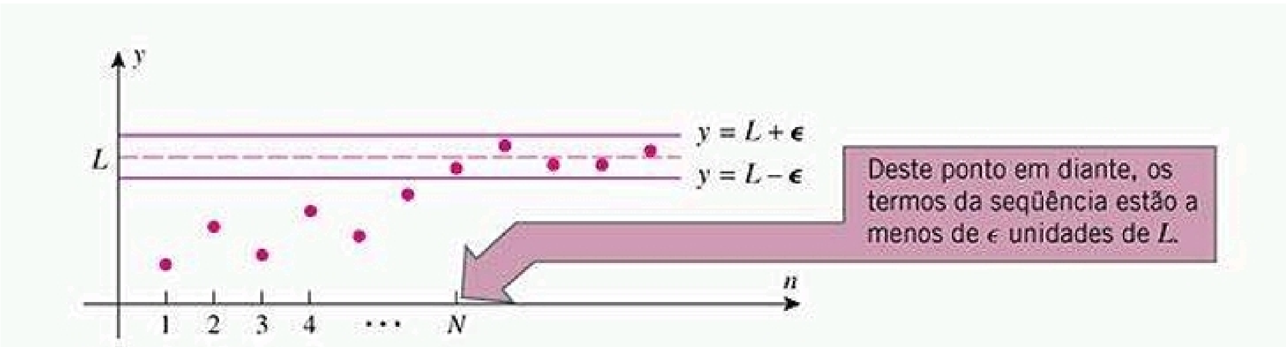
Definição 1.2. (Convergência)

*Uma sequência $\{a_n\}$ **converge** para L se, para todo número $\epsilon > 0$, existir um número inteiro positivo N tal que $|a_n - L| < \epsilon$ para $n \geq N$. Neste caso escrevemos*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

*Dizemos que a sequência **diverge** (ou é divergente) quando não convergir para algum limite finito.* ♣

Observação: Ao representar os pontos (n, a_n) no plano cartesiano, pode-se observar que a_n convergir para L significa que para todo $\epsilon > 0$, existe um ponto na sequência a partir do qual todos os termos estão entre as retas $y = L - \epsilon$ e $y = L + \epsilon$.



1.4 Calculando limites de sequências

Suponha que as sequências (a_n) e (b_n) convirjam, respectivamente, para L e M e que c seja uma constante. Então:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(c \cdot a_n\right) = c \cdot L$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(a_n \pm b_n\right) = L \pm M$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(a_n \cdot b_n\right) = L \cdot M$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{L}{M}, \quad M \neq 0$

Teorema 1.1

Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ *e* $f(n) = a_n$ *quando* n *é um inteiro, então* $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Exemplo 1.4 Determine se a sequência $a_n = \dfrac{1}{n}$ converge ou diverge.

Resolução: Temos que,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Então, pelo **Teorema 1.1**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Importante: *A recíproca do* **Teorema 1.1** *não é verdadeira, isto é, não podemos afirmar que: Se* $f(n) \to L$ *quando* $n \to \infty$*, então* $f(x) \to L$ *quando* $x \to \infty$*. Um exemplo para este fato é dado por*

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}(\pi x) \quad \textit{não existe} \quad (\textit{oscila}).$$

No entanto,

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(n\pi) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

O teorema do confronto também pode ser adaptado para sequências numéricas.

Teorema 1.2. (Teorema do Confronto para sequências)

Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ *para* $n \geq n_0$ *e* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$*, então* $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Outros dois resultados importantes sobre limites de sequências são dados pelos seguintes teoremas.

Teorema 1.3

Se $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$*, então* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Teorema 1.4

Se $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ *e se a função for contínua em* L*, então*

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L).$$

1.5 Exemplo

Exemplo 1.5 Determine se as sequências convergem ou divergem.

(a) $a_n = \sqrt[n]{n}$

(b) $a_n = (-1)^n$

(c) $a_n = \ln(\sqrt[n]{n})$

(d) $a_n = \dfrac{\cos^2 n}{2^n}$

(e) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

Resolução:

(a) Para determinar se a sequência converge, devemos calcular o seguinte limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}.$$

Consideremos $f(x) = \sqrt[x]{x}$ e calculemos

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\ln x^{1/x}} = \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}}, \tag{1.1}$$

onde utilizamos a continuidade da função exponencial na última igualdade. Temos uma indeterminação do tipo ∞/∞ no limite. Podemos utilizar a regra de L'Hopital de modo a obter

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Retornando a Eq.(1.1), obtemos

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

Como o $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ e a sequência a_n é convergente.

(b) A sequência $a_n = (-1)^n$ é dada por

$$\{-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots\}.$$

Uma vez que a sequência oscila entre -1 e 1 com frequência indefinida, a sequência a_n não se aproxima de nenhum número. Portanto, a_n diverge.

(c) Como a função logaritmo natural, $\ln$, é contínua em 1 (item (a)), pelo **Teorema 1.4**, podemos escrever

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\sqrt[n]{n}\right) = \ln\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right) = \ln(1) = 0.$$

Portanto, a sequência $a_n = \ln\left(\sqrt[n]{n}\right)$ converge para zero.

(d) Note que

$$0 \leq \cos^2 n \leq 1$$
$$0 \leq \frac{\cos^2 n}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

Como $\lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, pelo **Teorema 1.2**, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos^2 n}{2^n} = 0.$$

Portanto, $a_n = \frac{\cos^2 n}{2^n}$ converge para zero.

(e) Calculemos o limite do valor absoluto, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Pelo **Teorema 1.3**,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0,$$

logo a sequência é convergente e converge para zero.

Importante: *Todos os limites que foram calculados usando-se $f(n)$, foram aplicados à sua respectiva função $f(x)$.*

Exercícios

1. O que é uma sequência convergente? Dê dois exemplos.
2. O que é uma sequência divergente? Dê dois exemplos.
3. Escreva os cinco primeiros termos de cada sequência:

   (a) $a_n = 1 - (0,2)^n$,

   (b) $a_n = \frac{n+1}{3n-1}$,

   (c) $a_n = \frac{3(-1)^n}{n!}$,

   (d) $\{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)\}$

   (e) $a_1 = 3, \;\; a_{n+1} = 2a_n - 1$,

   (f) $a_1 = 4, \;\; a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n - 1}$

4. Encontre uma fórmula para o termo geral a_n da sequência, admitindo que o padrão dos primeiros termos continua.

   (a) $\left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots \right\}$

(b) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots\right\}$

(c) $\{2, 7, 12, 17, \dots\}$

(d) $\left\{-\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, -\frac{3}{16}, \frac{4}{25}, \dots\right\}$

(e) $\left\{1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \dots\right\}$

(f) $\{1, 5, 1, 5, 1, 5, \dots\}$

5. Em cada item, determine duas fórmulas para o termo geral da sequência, uma começando com $n = 1$ e a outra começando com $n = 0$:

(a) $1, -r, r^2, -r^3, \dots$

(b) $r, -r^2, r^3, -r^4, \dots$

6. Determine se as sequências convergem ou divergem. Se ela convergir, determine seu limite:

(a) $a_n = \dfrac{5 - 2n}{3n - 7}$

(b) $a_n = \dfrac{n^2 - 4}{n + 5}$

(c) $a_n = \dfrac{n^2}{n^3 + 1}$

(d) $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n^3 + 3}$

(e) $a_n = \dfrac{n^2 - 2\sqrt{n} + 1}{1 - n - 3n^2}$

(f) $a_n = \dfrac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}$

(g) $a_n = \left(\dfrac{n - 3}{n}\right)^n$

(h) $a_n = \dfrac{n}{\ln(n + 1)}$

(i) $a_n = \sqrt{n + 1} - \sqrt{n}$

(j) $a_n = n - \sqrt{n^2 - 4n}$

(k) $a_n = \cos\left(\dfrac{2}{n}\right)$

(l) $a_n = \dfrac{(2n - 1)!}{(2n + 1)!}$

(m) $a_n = \dfrac{\ln n}{\ln(2n)}$

(n) $a_n = n^2 e^{-n}$

(o) $a_n = n \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)$

(p) $a_n = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

(q) $a_n = n\cos(n\pi)$

Respostas:

1. $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}, \left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$

2. $\{n\}, \{\operatorname{sen} n\}$

3. (a) $\{0,8; 0,96; 0,992; 0,9984; 0,99968; \dots\}$

   (b) $\left\{1, \dfrac{3}{5}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{11}, \dfrac{3}{7}, \cdots\right\}$

   (c) $\left\{-3, \dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{8}, -\dfrac{1}{40}, \cdots\right\}$

   (d) $\{2, 8, 48, 384, 3840, \dots\}$

   (e) $\{3, 5, 9, 17, 33, \dots\}$

   (f) $\left\{4, \dfrac{4}{3}, 4, \dfrac{4}{3}, 4, \cdots\right\}$

4. (a) $a_n = \dfrac{1}{2^n}$

   (b) $a_n = \dfrac{1}{2n}$

   (c) $a_n = 5n - 3$

   (d) $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{(n+1)^2}$

   (e) $a_n = \left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

   (f) $a_n = 3 + (-1)^{n+1} \cdot 2$

5. (a) $(-r)^{n-1}$, $n \geq 1$; $(-r)^n$, $n \geq 0$

(b) $(-1)^{n+1}r^n,\ n \geq 1;\ (-1)^n r^{n+1},\ n \geq 0.$

6. **(a)** Converge. $-\dfrac{2}{3}$

(b) Diverge.

(c) Converge. 0

(d) Converge. 0

(e) Converge. $-\dfrac{1}{3}$

(f) Converge. 1

(g) Converge. e^{-3}

(h) Diverge.

(i) Converge para 0

(j) Converge para 2

(k) Converge. 1

(l) Converge. 0

(m) Converge. 1

(n) Converge. 0

(o) Converge. 1

(p) Converge. 1

(q) Diverge.