Universidade Federal do ABC
Estudos Continuados Emergenciais
1º Quadrimestre de 2020
Professora Dra. Ana Claudia da Silva Moreira

Funções de Várias Variáveis

Parte 4 - Multiplicadores de Lagrange

1 Objetivo

Nesta terceira semana de ECE, conheceremos um outro método para se estudar máximos e mínimos de funções de várias variáveis, denominado multiplicadores de Lagrange. Este método é aplicável quando estamos interessados a encontrar extremos de uma função restrita a um determinado subconjunto de seu domínio. O objetivo dessas notas de aula é expor de maneira suscinta o conteúdo oral e escrito que seria dado nas aulas presenciais sobre este assunto. Exemplos são dados para fixar os conceitos.

2 Multiplicadores de Lagrange

O métodos dos multiplicadores de Lagrange é uma estratégia específica para se estudar máximos e mínimos de funções de várias variáveis restritas à subconjuntos de seus domínios. Tais restrições podem ser descritas por uma ou mais equações do tipo

$$g(x,y) = 0 \quad \text{ou} \quad g(x,y,z) = 0,$$

onde g é uma função com o mesmo domínio de f.

Para melhor compreender como o método funciona, olhe para o gráfico da função

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2,$$

abaixo

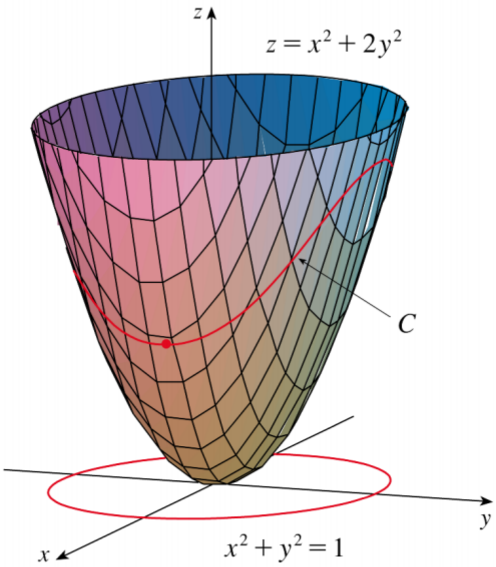


*Figura obtida na Web.

Podemos ver, claramente, que a função f tem um ponto de mínimo global na origem e, neste ponto, o valor de f é zero. Esta conclusão é válida quando consideramos f definida em todo o $\mathbb{R}^2$. Mas, o que aconteceria se quiséssemos encontrar os pontos de máximo e/ou mínimo de f quando consideramos seus valores calculados apenas nos pontos pertencentes ao círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$ (em vermelho na figura acima)?

O gráfico de f, quando consideramos apenas os pontos do $\mathbb{R}^2$ que satisfazem a equação do círculo $x^2 + y^2 = 1$, se resume à curva C, mostrada em vermelho no gráfico da função, na figura acima.

Olhando para a curva C, arriscaríamos dizer que, restrita ao círculo unitário, a função f atinge um valor mínimo local no ponto $(1, 0)$ e um valor máximo local no ponto $(0, 1)$. Por simetria, ousaríamos dizer que o mesmo acontece nos pontos $(-1, 0)$ e $(0, -1)$, respectivamente.

Se calcularmos f nesses pontos, veremos que

$$f(1, 0) = f(-1, 0) = 1 \quad \text{e} \quad f(0, 1) = f(0, -1) = 2,$$

corroborando nossas suspeitas. Vamos dar uma olhada nas respectivas curvas de nível,

$$f(x, y) = 1,$$

$$f(x, y) = 2,$$

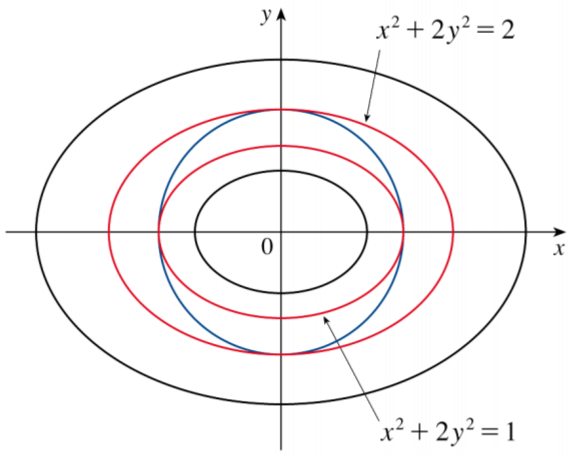


*Figura obtida na Web.

As curvas de nível de f são as elipses (em vermelho e preto) que aparecem na figura; em azul, o círculo unitário. Observe que o valor de f cresce quanto "maior" é a elipse (ou quanto mais se afasta da origem). Assim, se f atinge um máximo local (restrita ao círculo) no ponto $(0,1)$ é de se esperar que, neste ponto, o círculo seja tangente à curva de nível $f(x,y) = f(0,1) = 2$. O mesmo vale para os outros três pontos extremos. Olhando para a figura, vemos que isso, de fato, acontece.

 **Pense:** Por que é natural esperar que o círculo (a curva que representa a restrição) seja tangente à curva de nível $f(x,y) = f(0,1) = 2$ no ponto $(x_0, y_0) = (0,1)$, onde a função atinge um valor extremo, sujeita ao vínculo? O que aconteceria se não fosse?

Agora, já sabemos que o gradiente de um campo escalar é perpendicular às suas curvas de nível em cada ponto. Se escrevemos a equação do círculo como

$$g(x,y) = 0,$$

onde

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1,$$

observamos que o círculo azul que aparece na figura é uma curva de nível de g (no nível 0) e, portanto, o gradiente de g é perpendicular à ela em cada ponto. Como as curvas de nível de f e a curva de nível $g(x,y) = 0$ são tangentes nos pontos extremos, se (x_0, y_0) é um ponto extremo de f sujeita ao vínculo $g(x,y) = 0$, podemos esperar que o gradiente de f seja paralelo (múltiplo escalar) ao gradiente de g. Pois é precisamente esta a ideia do método dos multiplicadores de Lagrange.

Teorema 1. *Sejam $f(x,y)$ um campo diferenciável no aberto $A \subset \mathbb{R}^2$, $B = \{(x,y) \in A : g(x,y) = 0\}$ e $g \in \mathcal{C}^1(A)$ com $\nabla g(x,y) \neq 0$, para todo $(x,y) \in B$. Se (x_0,y_0) é um extremo local de f em B, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0).$$

O teorema acima dá uma condição necessária para (x_0,y_0) ser um extremo local de f, restrita ao conjunto B. Em outras palavras, os candidatos a pontos extremos de f em B devem satisfazer o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) & = & \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) & = & 0 \end{cases}$$

Uma vez determinados os candidatos à extremos locais, devemos analisar cada caso para decidirmos se alguns desses pontos são máximos e/ou mínimos locais de f. Nesse sentido o Teorema de Weierstrass nos será muito útil. Antes de enunciá-lo, vejamos algumas definições.

Definição 1. *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$, então*

1. *dizemos que A é um conjunto limitado se o conjunto A estiver contido em alguma bola aberta de centro na origem.*
2. *dizemos que A é um conjunto fechado se o seu complementar $A^c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \notin A\}$ for um conjunto aberto (rever Noções Topológicas).*
3. *dizemos que A é um conjunto compacto se A é fechado e limitado.*

Teorema 2 (Teorema de Weierstrass)**.** *Se $f(x,y)$ é contínua no conjunto compacto A, então existem (x_1,y_1), (x_2,y_2) em A tais que*

$$f(x_1,y_1) \leq f(x,y) \leq f(x_2,y_2),\ \forall (x,y) \in A.$$

Em outras palavras, se f é uma função contínua definida em um compacto A, então f atinge seu máximo e seu mínimo em A. O teorema também se estende para campos escalares definidos em compactos do $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 1. *Determine os pontos extremos de $f(x,y) = x+2y$ com a restrição $x^2+y^2 = 1$.*

Solução. Identificando os dados do problema, temos

$$f(x,y) = x + 2y,$$
$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1,$$

onde g é de classe $\mathcal{C}^1$ e $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}$.

Calculamos

$$\nabla f(x,y)(1,2), \quad \text{e} \quad \nabla g(x,y) = (2x, 2y),$$

observe que $\nabla g(x,y) \neq (0,0)$ em B.

Pelo Teorema 1, sabemos que os candidatos a pontos extremos de f devem satisfazer o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) &= \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1,2) &= \lambda(2x, 2y) \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda x &= 1 \\ 2\lambda y &= 2 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos

$$x = \frac{1}{2\lambda}, \text{ e } y = \frac{2}{2\lambda} = \frac{1}{\lambda}, \text{ com } \lambda \neq 0,$$

e

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Assim, os candidatos a extremos locais são

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Como f é contínua e o conjunto $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ é compacto, sabemos que f atinge seu máximo e seu mínimo em B. Assim, para sabermos quais pontos são extremos de f <u>restrita ao conjunto B</u>, basta calcular os valores de f nos pontos que encontramos. Temos

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} + 2\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} \qquad f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} - 2\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \qquad f\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{5}} - 2\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{5}{\sqrt{5}}$$

Logo,

- o valor mínimo de f, restrita ao círculo unitário, é $-\frac{5}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5}$, atingido no ponto $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, e
- o valor máximo de f, restrita ao círculo unitário, é $\frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$, atingido no ponto $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

No exemplo anterior, você notou que o gradiente de f nunca se anula? A função f não tem pontos críticos no $\mathbb{R}^2$, portanto, não tem extremos locais ou globais em $\mathbb{R}^2$. Porém, quando analisamos os valores de f apenas sobre o círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$, então encontramos alguns candidatos à pontos extremos de f. Assim, **é muito importante** frisarmos isso em nossas respostas aos exercícios. Os extremos encontrados via método dos multiplicadores de Lagrange, são extremos locais de f **restrita** à um determinado conjunto.

Exemplo 2. *Encontre o ponto sobre a curva $xy = 1$, com $x > 0$ e $y > 0$, que está mais próximo da origem do $\mathbb{R}^2$.*

Solução. Queremos encontrar o mínimo da função que calcula a distância entre um ponto (x, y) e a origem do $\mathbb{R}^2$,

$$d(x, y)\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

restrita à curva $xy = 1$, isto é,

$$g(x, y) = xy - 1 = 0.$$

Observe que minimizar a função d é equivalente a minimizar a função $D = d^2$. Então, consideraremos esta última para simplificar as contas.

Pelo Teorema 1, devemos calcular

$$\begin{cases} \nabla D(x, y) &= \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2x, 2y) &= \lambda(y, x) \\ xy &= 1 \end{cases}$$

temos

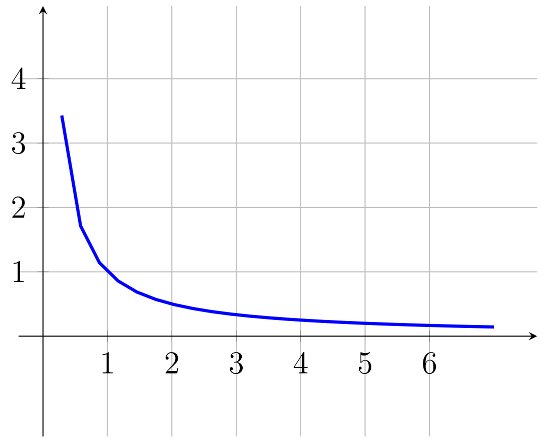
$$x = \frac{\lambda y}{2} \text{ e } y = \frac{\lambda x}{2} \Rightarrow \frac{\lambda^2 xy}{4} = 1 \Rightarrow \lambda \pm 2,$$

daí

$$x \pm y, \quad \text{e} \quad y = \pm x, \quad \text{com} \quad xy = 1 \Rightarrow x = y = \pm 1.$$

Como $x > 0, y > 0$, segue que $x = y = 1$. Logo, $(1, 1)$ é o único candidato a extremo local.

Podemos ver, graficamente (abaixo), que $(1, 1)$ é um ponto de mínimo da função D, logo é o ponto procurado.



☕

O Teorema 1 pode ser estendido para funções de mais variáveis e pode have mais vínculos.

Teorema 3. *Sejam $f(x,y,z)$ diferenciável no aberto $A \subset \mathbb{R}^3$ e*

$$B = \{(x,y,z) \in A : g(x,y,z) = 0 \text{ e } h(x,y,z) = 0\},$$

com g, h funções de classe $\mathcal{C}^1$ em A e

$$\nabla g(x,y,z) \times \nabla h(x,y,z) \neq (0,0,0), \quad \forall (x,y,z) \in B.$$

Então, se $(x_0,y_0,z_0) \in B$ é ponto extremo de f em B, existem $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \lambda_1 \nabla g(x_0,y_0,z_0) + \lambda_2 \nabla h(x_0,y_0,z_0).$$

Vejamos como aplicar este teorema.

Exemplo 3. *Determine os pontos do elipsoide $E : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ cuja soma das coordenadas seja máxima.*

Solução. Queremos maximizar a função

$$f(x,y,z) = x + y + z,$$

sujeita ao vínculo

$$g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1.$$

Calculamos

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \nabla f(x,y,z) & = & \lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z) & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} (1,1,1) & = & \lambda(2x,4y,6z) \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 & = & 0 \end{array} \right.$$

donde

$$x = \frac{1}{2\lambda}, \; y = \frac{1}{4\lambda}, \; z = \frac{1}{6\lambda}, \quad \text{com} \quad \lambda \neq 0.$$

Substituindo na equação da restrição, vem

$$\frac{1}{4\lambda^2} + 2\frac{1}{16\lambda^2} + 3\frac{1}{36\lambda^2} - 1 = 0,$$

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{8\lambda^2} + \frac{1}{12\lambda^2} = 1 \;\Rightarrow\; \lambda = \pm\sqrt{\frac{11}{24}}.$$

Assim, os candidatos a extremos locais de f restrita ao elipsoide E, são

$$P = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{24}}, \frac{1}{4}\sqrt{\frac{11}{24}}, \frac{1}{6}\sqrt{\frac{11}{24}}\right),$$

e

$$Q = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{24}}, -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{11}{24}}, -\frac{1}{6}\sqrt{\frac{11}{24}}\right).$$

Como f é contínua e o elipsoide é um conjunto compacto e estamos procurando pontos cuja soma das coordenadas seja máxima, só podemos contar com o ponto P (que tem entradas positivas) para isso. ☕

Exemplo 4. *Estude o exemplo gráfico que demos no início deste material, aplicando o Teorema 1, e prove ou refute nossas conjecturas a respeito dos pontos de máximo e mínimo de f sujeita ao vínculo $g(x, y) = 0$.*

Aviso: este material está em sua primeira edição. Caso você encontre algum erro, inconsistência ou passagem duvidosa, por favor, entre em contato para que possamos esclarecer, melhorar e/ou corrigir o material. Agradeço e desejo bons estudos.