Universidade Federal do ABC
Estudos Continuados Emergenciais
1º Quadrimestre de 2020
Profa. Dra. Ana Claudia da Silva Moreira

Funções de Várias Variáveis

<u>Parte 1 - Revisão: Curvas</u>

1 Objetivo

O objetivo deste texto é fazer uma rápida revisão da teoria sobre curvas. É um texto bastante resumido para uma revisão prática, sem descuidar, no entanto, das hipóteses que validam nossos resultados. Embora a intenção seja rever a parte teórica, alguns exemplos simples foram incluídos para ilustrar os conceitos apresentados.

2 Curvas

O ponto mais importante a ser compreendido para absorção do conteúdo relacionado à curvas é, sem dúvidas, sua definição. A razão desta afirmação é simples: bem compreendidos a definição e os conceitos envolvidos, tudo o mais decorre daí e do seu conhecimento prévio sobre funções de uma variável real. Então, vamos à ela.

Definição. *Uma curva no* $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, *é uma função*

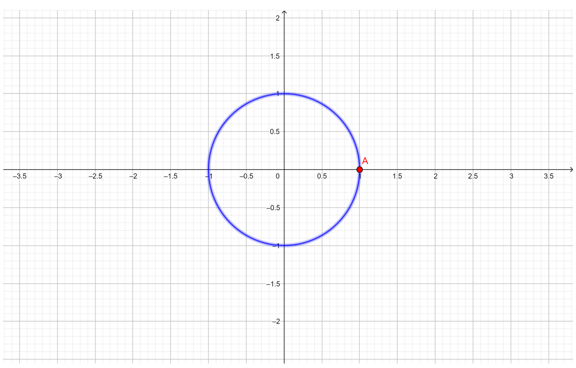
$$\gamma : I \to \mathbb{R}^n, \quad I \subset \mathbb{R},$$

que associa a cada $t \in \mathbb{R}$ *um único vetor ou* n*-upla* $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$*.*

A imagem de uma curva (também chamada de traço) é o subconjunto do $\mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{Im}(\gamma) = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^n : t \in \mathrm{Dom}(\gamma)\}\,.$$

Exemplo. *Considere* $\gamma(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t))$*, com com* $t \in [0, 2\pi]$*.*



Sabemos que o traço de γ é um círculo de raio 1*, centrado na origem, pois a coordenada* x*, de* $\gamma(t)$ *(isto é,* $\gamma_1(t) = cos(t)$*), ao quadrado somada à* y^2 *é igual à* 1*. Em outras palavras, as funções componentes da curva* $\gamma(t)$ *satisfazem a equação do círculo de raio* 1 *e centro na origem:* $x^2 + y^2 = 1$*.*

Note também que, se pensarmos que $\gamma(t)$ *descreve o deslocamento de uma partícula no plano com o passar do tempo, então, à medida que* t *varia de* 0 *à* 2π*, a partícula parte do ponto* A *(da figura) no sentido anti-horário até dar uma volta completa no círculo e retornar ao ponto* A*, novamente.*

Observe que, dada uma curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, como $\gamma(t)$ é um ponto do $\mathbb{R}^n$, existem n funções reais $\gamma_i : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, tais que

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_n(t))\,.$$

Essas funções γ_i são chamadas *funções componentes* de γ. Entender isso é essencial para o estudo de curvas, pois tudo o mais se reduzirá ao estudo das funções componentes que são funções de uma variável real.

2.1 Operações com curvas

Sejam $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ e $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, $n > 1$, $I \subset \mathbb{R}$,

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t))\,,$$

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_n(t))\,,$$

onde $\gamma_i : I \to \mathbb{R}, \alpha_i : I \to \mathbb{R}, \forall t \in I$.

Então, temos

$$\begin{aligned}
(\alpha + \gamma)(t) &= (\alpha_1(t) + \gamma_1(t), \alpha_2(t) + \gamma_2(t), \ldots, \alpha_n(t) + \gamma_n(t))\,,\\
k\alpha(t) &= (k\alpha_1(t), k\alpha_2(t), \ldots, k\alpha_n(t))\,,\\
(f\alpha)(t) &= (f(t)\alpha_1(t), f(t)\alpha_2(t), \ldots, f(t)\alpha_n(t))\,,\\
(\alpha \cdot \gamma)(t) &= (\alpha_1(t)\gamma_1(t), \alpha_2(t)\gamma_2(t), \ldots, \alpha_n(t)\gamma_n(t))\,,
\end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ e o produto é o produto interno (ou escalar) de vetores.

Observe que cada uma das operações acima se resume em operar com as funções componentes das curvas, que são operações com funções de uma variável real.

Se $n = 3$, podemos considerar o produto vetorial de curvas.

$$(\alpha \times \gamma)(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \alpha_1(t) & \alpha_2(t) & \alpha_3(t) \\ \gamma_1(t) & \gamma_2(t) & \gamma_3(t) \end{vmatrix}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned}
(\alpha \times \gamma)(t) = &(\alpha_2(t)\gamma_3(t) - \alpha_3(t)\gamma_2(t), \alpha_3(t)\gamma_1(t) - \alpha_1(t)\gamma_3(t),\\
&\alpha_1(t)\gamma_2(t) - \alpha_2(t)\gamma_1(t))\,.
\end{aligned}$$

2.2 Limite

A definição formal de limite para curvas é análoga à definição de limite para funções de uma variável real.

Definição. *Sejam* $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$, $L = (L_1, L_2, \ldots, L_n) \in \mathbb{R}^n$ *e* $t_0 \in \mathbb{R}$ *um ponto de acumulação de* I. *Então,*

$$\lim_{t \to t_0} \alpha(t) = L,$$

se dado $\varepsilon > 0$, *existir* $\delta > 0$ *tal que para todo* $t \in I$,

$$0 < |t - t_0| < \delta \Longrightarrow \|\alpha(t) - L\| < \varepsilon.$$

Veja que, na prática, calcular o limite de uma curva quando t se aproxima de um ponto, nada mais é do que calcular os limites (de funções de uma variável real) das funções componentes. É o que diz o Teorema abaixo.

Teorema. *Sejam* $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$, $L = (L_1, L_2, \ldots, L_n) \in \mathbb{R}^n$ *e* $t_0 \in \mathbb{R}$ *um ponto de acumulação de* I. *Então,*

$$\lim_{t \to t_0} \alpha(t) = L \;\Leftrightarrow\; \lim_{t \to t_0} \alpha_i(t) = L_i,$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Exemplo. *Seja* $\alpha : (0, \infty) \to \mathbb{R}^4$ *dada por* $\alpha(t) = (0, t, \cos(t), \ln(t))$.
Calcule $\lim_{t \to 0+} \alpha(t)$.

Solução: Devemos calcular

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0+} 0 &= 0, \\ \lim_{t \to 0+} t &= 0, \\ \lim_{t \to 0+} \cos(t) &= 1, \\ \lim_{t \to 0+} \ln(t) &= -\infty, \end{aligned}$$

portanto, o limite $\lim\limits_{t \to 0+} \alpha(t)$ não existe.

2.3 Continuidade

A definição de continuidade para curvas é análoga à definição de continuidade para funções de uma variável real.

Definição. *Sejam* $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ *e* $t_0 \in I$. *Dizemos que* α *é contínua em* t_0 *se*

$$\lim_{t \to t_0} \alpha(t) = \alpha(t_0).$$

De fato, a continuidade de uma curva em um ponto t_0, de seu domínio, vai se reduzir à continuidade de cada uma de suas funções componentes em t_0, como diz o seguinte Teorema.

Teorema. *A curva α é contínua em t_0, se α_i for contínua em t_0 para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Exemplo. *Verifique se a curva*

$$\gamma(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{t}, t\right), & t \neq 0, \\ (0,0), & t = 0 \end{cases}$$

é contínua em $t = 0$.

Solução: Para γ ser contínua, devemos ter $\lim\limits_{t\to 0} \gamma(t) = \gamma(0) = (0,0)$. Fazemos

$$\begin{array}{ll} \lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{1}{t} = +\infty & \lim\limits_{t\to 0-} \dfrac{1}{t} = -\infty \\ \lim\limits_{t\to 0+} t = 0 & \lim\limits_{t\to 0-} t = 0 \end{array}$$

2.4 Derivada

Novamente, a definição de derivada para curvas é análoga à definição de derivada para funções de uma variável real.

Definição. *Sejam $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ e $t_0 \in I$. A derivada de α em t_0 é dada por*

$$\frac{d}{dt}\alpha(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{t - t_0}.$$

A diferenciabilidade de uma curva em um ponto t_0 vai depender da diferenciabilidade de cada uma de suas funções componentes neste ponto.

Teorema. *A curva α é diferenciável em t_0, se α_i for diferenciável em t_0 para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ e, nesse caso, temos*

$$\alpha'(t_0) = \left(\alpha_1'(t_0), \alpha_2'(t_0), \ldots, \alpha_n'(t_0)\right),$$

um vetor tangente ao traço da curva α, em $\alpha(t_0)$.

Exemplo. *Dada a curva $\gamma(t) = (\operatorname{sen}(3t), e^{t^2}, t)$, podemos calcular*

$$\begin{aligned} Dom(\gamma) &= \mathbb{R}, \\ CDom(\gamma) &= \mathbb{R}^3, \quad \textit{(contra-domínio)} \\ \lim_{t\to 0}\gamma(t) &= \left(\lim_{t\to 0}\operatorname{sen}(3t), \lim_{t\to 0} e^{t^2}, \lim_{t\to 0} t\right) = (0,1,0) \\ \frac{d}{dt}\gamma(t) &= \left(\frac{d}{dt}\operatorname{sen}(3t), \frac{d}{dt}e^{t^2}, \frac{d}{dt}t\right) = \left(3\cos(3t), 2te^{t^2}, 1\right) \\ \frac{d^2}{dt^2}\gamma(t) &= \left(\frac{d}{dt}3\cos(3t), \frac{d}{dt}2te^{t^2}, \frac{d}{dt}1\right) = \left(-9\operatorname{sen}(3t), 2e^{t^2} + 4t^2e^{t^2}, 0\right) \\ \frac{d}{dt}\gamma(0) &= (3,0,1) \end{aligned}$$

Note que $\frac{d}{dt}\gamma(t_0)$ é um vetor tangente ao traço da curva γ no ponto $\gamma(t_0)$. A equação vetorial

$$X = \gamma(t_0) + \lambda\frac{d}{dt}\gamma(t_0), \quad \forall\lambda \in \mathbb{R},$$

onde $X \in \mathbb{R}^n$, é a equação da reta tangente à curva γ no ponto $\gamma(t_0)$.

As regras de derivação se aplicam às operações com curvas.

2.5 Integral

Definimos integral de uma curva de maneira semelhante à integral de funções de uma variável.

Definição. *Seja* $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $P : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ *uma partição do intervalo* $[a,b]$ *e* $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$ *um ponto amostral, então*

$$\int_a^b \alpha(t)dt = \lim_{max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \alpha(c_i)\Delta t_i.$$

A integrabilidade de uma curva, num intervalo $[a,b]$, depende da integrabilidade de cada uma de suas funções componentes neste intervalo.

Teorema. *A curva* $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *é integrável em* $[a,b]$ *se e somente se* $\alpha_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é integrável para todo* $i = 1, 2, \ldots, n$ *e neste caso, temos*

$$\int_a^b \alpha(t)dt = \left(\int_a^b \alpha_1(t)dt, \int_a^b \alpha_2(t)dt \ldots, \int_a^b \alpha_n(t)dt \right).$$

Aqui é importante recordar: sob qual(is) condição(ões) uma função de uma variável real é integrável em um intervalo $[a,b]$?

Vale, também, o análogo do Teorema Fundamental do Cálculo para curvas:

Teorema. *Seja* $[a,b] \subset \mathbb{R}$. *Se* $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *é integrável em* $[a,b]$ *e* γ *for uma primitiva de* α *em* $[a,b]$, *então*

$$\int_a^b \alpha(t)dt = \gamma(b) - \gamma(a).$$

Além disso, definimos o comprimento de uma curva $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ por

$$\mathcal{L}(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|dt.$$

Exemplo. *Seja* $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, *dada por* $\alpha(t) = (t, t^2)$. *Calcule*

$$\int_0^1 \gamma(t)dt$$

e o comprimento da curva restrita ao intervalo $[-2, 2]$.

Solução: Observe que o traço da curva é um parábola no $\mathbb{R}^2$ com vértice na origem, pois as funções componentes da curva α satisfazem a equação $y = x^2$.

Calculamos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \gamma(t)dt = \int_0^1 (t, t^2)dt &= \left(\int_0^1 tdt, \int_0^1 t^2 dt \right) \\ &= \left(\frac{t^2}{2}\Big|_0^1, \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right). \end{aligned}$$

Para obtermos o comprimento da curva, fazemos

$$\alpha'(t) = (1, 2t) \quad \text{e} \quad \|\alpha'(t)\| = \|(1, 2t)\| = \sqrt{1^2 + (2t)^2} = \sqrt{1 + 4t^2},$$

donde

$$\mathcal{L}(\alpha) = \int_{-2}^{2} \|\alpha'(t)\| dt = \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + 4t^2}\ dt \ = \frac{1}{2}\left[4\sqrt{17} + \frac{1}{2}\left(\ln\left(\sqrt{17} + 4\right) - \ln\left(\sqrt{17} - 4\right)\right)\right]$$

Para resolver esta última integral (de função de uma variável real), revise técnicas de integração, em particular, substituição trigonométrica.

Atenção: Caso você encontre algum erro, inconsistência ou passagem duvidosa, por favor, entre em contato para que possamos esclarecer e/ou corrigir o material. Agradeço e desejo bons estudos.