Aula 3: Séries numéricas

3.1 Séries infinitas

O objetivo agora é discutir somas com um número infinito de termos. O exemplo mais conhecido de tais somas ocorre na representação decimal de números reais. Por exemplo, o número $0,3333\ldots$ pode ser escrita na forma de uma série infinita:

$$0,333333\ldots = 0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + \ldots.$$

Seja S_n a soma dos n primeiros termos da série. Assim,

$$\begin{aligned} S_1 &= u_1 \\ S_2 &= u_1 + u_2 \\ S_3 &= u_1 + u_2 + u_3 \\ &\vdots \\ S_n &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k. \end{aligned}$$

O número S_n é chamado ***n*-ésima soma parcial** da série. Essas somas formam uma nova sequência, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, que é chamada **sequência das somas parciais**.

Quando n cresce, a soma parcial $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ inclui mais e mais termos da série. Assim, se S_n tende a um limite quando $n \to \infty$, é razoável que este limite seja a soma de todos os termos da série. Isto sugere a seguinte definição:

Definição 3.1. (Convergência de uma série)

Seja $\{S_n\}$ a sequência das somas parciais da série

$$u_1 + u_2 + \cdots u_n.$$

*Se a sequência $\{S_n\}$ convergir para um limite S, então dizemos que a série **converge** para S e que S é a **soma** da série. Denotamos por*

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k.$$

*Se a sequência das somas parciais divergir, dizemos que a série **diverge**. Uma série divergente não tem soma.* ♣

3.2 Séries geométricas

Na série geométrica cada termo é obtido a partir do anterior pela multiplicação dele por uma razão em comum r.

Teorema 3.1. (Série geométrica)

Uma série geométrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^k + \cdots \qquad \textit{onde } a \neq 0 \tag{3.1}$$

converge se $|r| < 1$ *e diverge se* $|r| \geq 1$. *Se a série convergir, então a soma da série será*

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}. \tag{3.2}$$

♡

Demonstração Vamos tratar do primeiro caso: $|r| = 1$. Se $r = 1$, então a série é

$$a + a + a + a + \cdots$$

A n-ésima soma parcial é $S_n = (n+1)a$ e $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (n+1)a = \pm\infty$ (depende do sinal de a). Assim, para $r = 1$, a série diverge.

Se $r = -1$, a série é

$$a - a + a - a + a - a + a - \cdots$$

que diverge, pois a sequência gerada pela n-ésima soma parcial é $\{a, 0, a, 0, a, 0, \ldots\}$ é divergente.

Agora consideremos $|r| \neq 1$. A n-ésima soma parcial da série é

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n. \tag{3.3}$$

Multiplicando a Eq.(3.3) por r, obtemos

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n + ar^{n+1}. \tag{3.4}$$

Subtraindo (3.4) de (3.3), obtemos

$$\begin{aligned} S_n - rS_n &= (a + \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} + \cdots + \cancel{ar^n}) - (\cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} + \cdots + \cancel{ar^n} + ar^{n+1}) \\ (1-r)S_n &= a(1 - r^{n+1}) \\ S_n &= \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}. \end{aligned}$$

Devemos calcular

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \left(\frac{a}{1-r}\right) \lim_{n\to\infty} (1 - r^{n+1}). \tag{3.5}$$

Se $|r| < 1$, então $\lim_{n\to\infty} (1 - r^{n+1}) = \lim_{n\to\infty} 1 - r \underbrace{\lim_{n\to\infty} r^n}_{=0} = 1$ (demonstrado no Exemplo 2.1). Assim, pela Eq.(3.5), temos

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}.$$

Se $|r| > 1$, então ou $r > 1$ ou $r < -1$. No caso $r > 1$, $\lim_{n\to\infty}(1 - r^{n+1}) = \lim_{n\to\infty} 1 - r \underbrace{\lim_{n\to\infty} r^n}_{=+\infty} = -\infty$ (Exemplo 2.1). No caso em que $r < -1$, $\lim_{n\to\infty} r^{n+1}$ diverge, pois o limite é: $+\infty$ ou $-\infty$ ou $\pm\infty$. Portanto, S_n diverge em ambos os casos.

Exemplo 3.1 Determine se a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{5^k}$$

é convergente ou divergente.

Resolução: Esta série é uma série geométrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{5^k} = 4\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k$$

com razão $r = 1/5 < 1$. Portanto, a série converge. A soma da série é

$$S = 4\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k = \frac{4}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)} = 4\left(\frac{5}{4}\right) = 5.$$

3.3 Séries telescópicas

Considere a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e suponha que $a_k = f(k+1) - f(k),\ k \geq 1$. Esta série é denominada **série telescópica**. Em geral, o cálculo da n-ésima soma parcial desta série é bem simples:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \overbrace{\cancel{f(2)} - f(1)}^{a_1} + \overbrace{\cancel{f(3)} - \cancel{f(2)}}^{a_2} + \overbrace{\cancel{f(4)} - \cancel{f(3)}}^{a_3} + \cdots + \overbrace{f(n+1) - \cancel{f(n)}}^{a_n} \\ &= f(n+1) - f(1). \end{aligned}$$

A partir daí, basta calcular $\lim_{n\to\infty} S_n$.

Exemplo 3.2 Determine se a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots$$

converge ou diverge. Se convergir encontre a sua soma.

Resolução: A n-ésima soma parcial da série é

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Para calcular $\lim_{n\to\infty} S_n$, vamos reescrever $1/[k(k+1)]$ utilizando frações parciais, isto é,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} = \frac{A(k+1)+Bk}{k(k+1)} \qquad \Rightarrow \qquad A(k+1)+Bk = 1.$$

- Seja $k = 0$, então $A = 1$.
- Seja $k = -1$, então $B = -1$.

Portanto,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

assim

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

A série converge e sua soma é $S = 1$.

3.4 Série harmônica

Uma das séries mais importantes de todas as séries divergentes é a **série harmônica**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots . \tag{3.6}$$

Para mostrar que a série diverge, consideremos as somas parciais:

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 \\ S_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\ S_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{2}{2} \\ S_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
S_{16} &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)\\
&> 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\underbrace{\left(\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{8}\right)}_{\text{4 termos}}+\underbrace{\left(\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)}_{\text{8 termos}}\\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{4}{2}\cdot
\end{aligned}
$$

Da mesma forma $S_{32} > 1+\dfrac{5}{2}$, $S_{64} > 1+\dfrac{6}{2}$ e, em geral,

$$S_{2^n} > 1+\frac{n}{2}\cdot$$

Quando $n \to \infty,\ S_{2^n} \to \infty$ e, portanto, $\{S_n\}$ diverge. Portanto, a série harmônica diverge.

Exercícios

1. Determine se a série

$$1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots$$

converge ou diverge. Se convergir encontre a sua soma.

2. Encontre a soma da série dada ou mostre que a série diverge:

(a) $\displaystyle \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}$

(b) $\displaystyle 3-\frac{3}{4}+\frac{3}{16}-\frac{3}{64}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}3\left(-\frac{1}{4}\right)^{k-1}$

(c) $\displaystyle \sum_{k=5}^{\infty}\frac{1}{(2+\pi)^{2k}}$

(d) $\displaystyle \sum_{k=0}^{\infty}\frac{5}{10^{3k}}$

(e) $\displaystyle \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-5)^k}{8^{2k}}$

(f) $\displaystyle \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{e^k}$

(g) $\displaystyle \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{k+3}}{e^{k-3}}$

(h) $\displaystyle \sum_{k=1}^{\infty}\pi^{k/2}\cos(k\pi)$

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3+2^k}{2^{k+2}}$

(j) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3+2^k}{3^{k+2}}$

3. Calcule a soma das séries:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right)}{\ln(k+1)\ln(k+2)}$

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}}\right)$

(g) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$

(h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}}$

4. Expresse os números dados como uma razão de inteiros (usando séries):

(a) $0,22222\ldots$

(b) $0,73737373\ldots$

(c) $3,417417417\ldots$

(d) $6,254254254\ldots$

5. Sendo $x \in \mathbb{R}$, calcule a soma da série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \operatorname{sen}^k x.$$

Respostas:

1. A série diverge.

2. **(a)** Converge. $S = \dfrac{1}{2}$,

(b) Converge. $S = \dfrac{12}{5}$,

(c) Converge. $S = \dfrac{1}{(2+\pi)^8\left[(2+\pi)^2 - 1\right]}$,

(d) Converge. $S = \dfrac{5000}{999}$

(e) Converge. $S = \dfrac{25}{4416}$

(f) Converge. $S = \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$

(g) Converge. $S = \dfrac{8\mathrm{e}^4}{\mathrm{e}-2}$

(h) Diverge.

(i) Diverge.

(j) Converge. $S = \dfrac{5}{6}$.

3. **(a)** $S = \dfrac{3}{4}$

(b) $S = \dfrac{1}{2}$

(c) $S = \dfrac{1}{3}$

(d) $S = \dfrac{1}{4}$

(e) $S = \dfrac{1}{\ln 2}$

(f) $S = \dfrac{1}{2}$

(g) $S = \dfrac{3}{4}$

(h) $S = 1$

4. **(a)** $\dfrac{2}{9}$

(b) $\dfrac{73}{99}$

(c) $\dfrac{1138}{333}$

(d) $\dfrac{344}{55}$

5. $S = \dfrac{2\,\text{sen}\,x}{2 + \,\text{sen}\,x}\,.$