Cálculo em Várias Variáveis
Superfícies parametrizadas

ICT-Unifesp

1. Superfícies parametrizadas

2. Exercícios

Mais detalhes na Seção 16.6.

Superfícies parametrizadas

Superfícies parametrizadas

Definição

Dizemos que $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma **superfície parametrizada** *se existe uma função vetorial $\vec{r} : D \to \mathbb{R}^3$, onde*

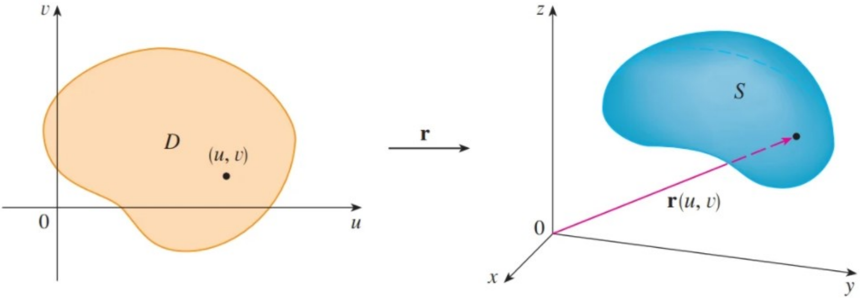
$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\,\vec{i} + y(u, v)\,\vec{j} + z(u, v)\,\vec{k},$$

tal que $D \subset \mathbb{R}^2$ e S é a imagem de $\vec{r}$.

As equações paramétricas da superfície S são dadas por:

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v), \text{ com } (u, v) \in D.$$

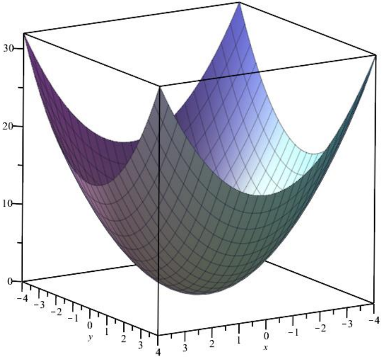
Superfícies parametrizadas



Superfícies parametrizadas

Exemplo

A função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *dada por* $F(u,v) = (u,\ v,\ u^2 + v^2)$ *é uma superfície parametrizada.*



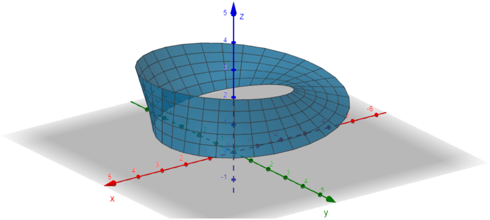
Superfícies parametrizadas

Exemplo

A faixa de Möbius é a superfície parametrizada por

$$\vec{r}: \begin{cases} x = \left(3 - v\, sen\, \frac{u}{2}\right)\ cos\, u \\ y = \left(3 - v\, sen\, \frac{u}{2}\right)\ sen\, u \\ z = 2 + v\, cos\, \frac{u}{2} \end{cases}$$

com $0 \leqslant u \leqslant 2\pi$ *e* $-1 \leqslant v \leqslant 1$.



Superfícies parametrizadas

Seja S uma superfície parametrizada e considere um ponto $P_0 \in S$, cujo vetor posição é $\vec{r}(u_0, v_0)$.

Seja S uma superfície parametrizada e considere um ponto $P_0 \in S$, cujo vetor posição é $\vec{r}(u_0,\, v_0)$.

Considere uma curva $C_1 \subset S$ definida pela equação vetorial

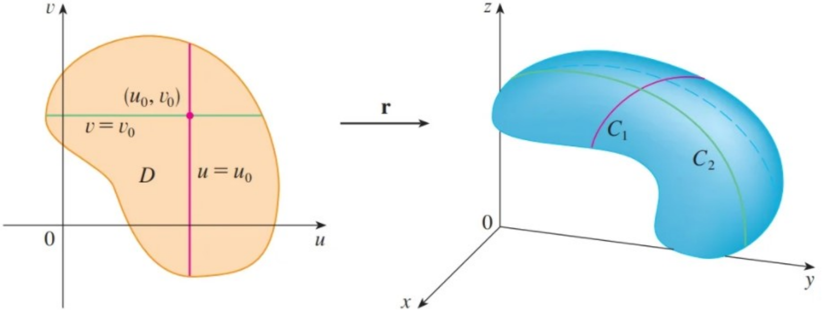
$$\vec{r}(u_0,\, v) \,=\, x(u_0,\, v)\,\vec{i} + y(u_0,\, v)\,\vec{j} + z(u_0,\, v)\,\vec{k},$$

em que $u = u_0$ é constante, e uma curva $C_2 \subset S$ definida pela equação vetorial

$$\vec{r}(u,\, v_0) \,=\, x(u,\, v_0)\,\vec{i} + y(u,\, v_0)\,\vec{j} + z(u,\, v_0)\,\vec{k},$$

com $v = v_0$ constante.

As curvas C_1 e C_2 definidas acima passam pelo ponto P_0, e são chamadas de curvas coordenadas.



Vetor tangente à curva C_1 no ponto P_0:

$$\vec{r}_v(u_0,\ v_0) = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,\ v_0)\,\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,\ v_0)\,\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,\ v_0)\,\vec{k}.$$

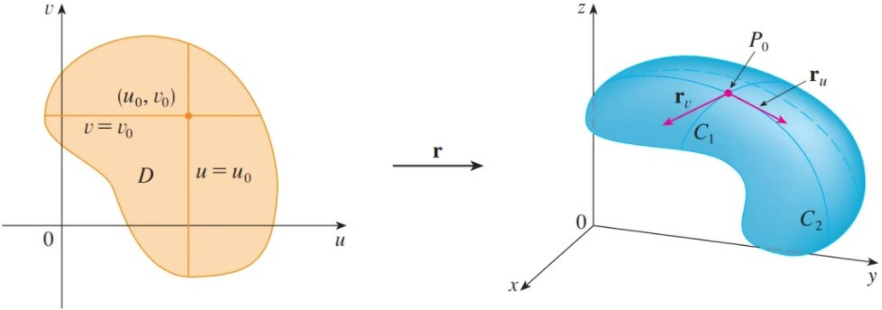
Vetor tangente à curva C_1 no ponto P_0:

$$\vec{r}_v(u_0,\ v_0) = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,\ v_0)\,\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,\ v_0)\,\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,\ v_0)\,\vec{k}.$$

Vetor tangente à curva C_2 no ponto P_0:

$$\vec{r}_u(u_0,\ v_0) = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,\ v_0)\,\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,\ v_0)\,\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,\ v_0)\,\vec{k}.$$

Superfícies parametrizadas



Superfícies parametrizadas

Se $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$, dizemos que S é uma superfície suave.

Se S é uma superfície suave, então o plano tangente à S no ponto P_0 cujo vetor posição é $\vec{r}(u_0, v_0)$ é o plano que contém os vetores

$$\vec{r}_u(u_0, v_0) \qquad \text{e} \qquad \vec{r}_v(u_0, v_0),$$

e o vetor normal a esse plano é

$$\vec{n} = \vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0).$$

Superfícies parametrizadas

Exemplo

Vamos determinar o plano tangente à superfície S parametrizada por $x = u^2$, $y = v^2$ e $z = u + 2v$ no ponto $(1, 1, 3)$.

Superfícies parametrizadas

Exemplo

Vamos determinar o plano tangente à superfície S *parametrizada por* $x = u^2$, $y = v^2$ *e* $z = u + 2v$ *no ponto* $(1, 1, 3)$.

Os vetores tangentes são

$$\vec{r}_u = 2u\,\vec{i} + \vec{k}$$
$$\vec{r}_v = 2v\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$$

O vetor normal é dado por

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2u & 0 & 1 \\ 0 & 2v & 2 \end{vmatrix} = -2v\,\vec{i} - 4u\,\vec{j} + 4uv\,\vec{k}.$$

Superfícies parametrizadas

O ponto $(1, 1, 3)$ corresponde aos valores dos parâmetros $u = 1$ e $v = 1$. Logo, o vetor normal neste ponto é

$$-2\,\vec{i} - 4\,\vec{j} + 4\,\vec{k}.$$

Portanto, a equação do plano tangente é

$$-2(x-1) - 4(y-1) + 4(z-3) = 0,$$

ou seja,

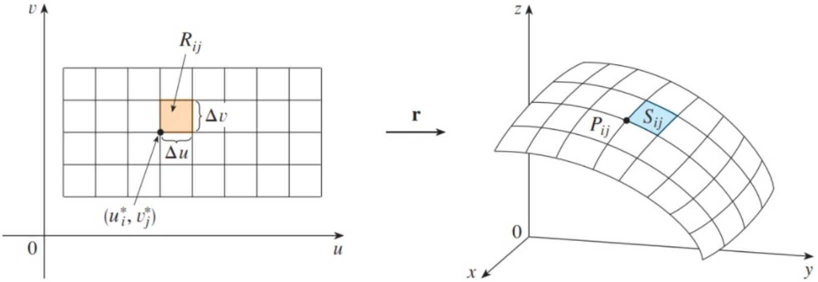
$$x + 2y - 2z + 3 = 0.$$

Superfícies parametrizadas

Seja S uma superfície parametrizada por

$$\vec{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

Considere um retângulo $R_{ij} = [u_i^*, u_i^* + \Delta u] \times [v_j^*, v_j^* + \Delta v] \subset D$. O conjunto $S_{ij} = \vec{r}(R_{ij})$ corresponde à um retângulo “curvilíneo” sobre a superfície S.



A área deste paralelogramo pode ser aproximada pela área do paralelogramo formado pelos vetores tangentes à superfície no ponto $\vec{r}(u, v)$, ou seja,

$$A(\vec{r}(R_{ij})) \approx \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \Delta u \Delta v.$$

Assim, uma aproximação para a área de S é

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v(u_i^*, v_j^*)\| \Delta u \Delta v.$$

Superfícies parametrizadas

Definição

Se a superfície parametrizada suave S é descrita por

$$\vec{r}(u,\, v) \,=\, x(u,\, v)\,\vec{i} \,+\, y(u,\, v)\,\vec{j} \,+\, z(u,\, v)\,\vec{k}\,,$$

e S é coberta uma única vez quando $(u,\, v)$ percorre D, então a área da superfície S é definida por

$$A(S) \,=\, \iint_D \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \; dA\,,$$

onde

$$\vec{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\,\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\,\vec{k} \text{ e } \vec{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\,\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\,\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\,\vec{k}.$$

Superfícies parametrizadas

Exemplo

Calcular a área da superfície da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Exemplo

Calcular a área da superfície da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Uma parametrização da esfera é

$$\vec{r} : \begin{cases} x = r \operatorname{sen} u \cos v \\ y = r \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ z = r \cos u \end{cases}$$

com $(u, v) \in D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$.

Temos que

$$\vec{r_u}(u,v) = (r\cos u \cos v, r\cos u \,\mathrm{sen}\, v, -r\,\mathrm{sen}\, u),$$
$$\vec{r_v}(u,v) = (-r\,\mathrm{sen}\, u\,\mathrm{sen}\, v, r\,\mathrm{sen}\, u \cos v, 0).$$

E, $\vec{r_u}(u,v) \times \vec{r_v}(u,v) =$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r\cos u\cos v & r\cos u\,\mathrm{sen}\, v & -r\,\mathrm{sen}\, u \\ -r\,\mathrm{sen}\, u\,\mathrm{sen}\, v & r\,\mathrm{sen}\, u\cos v & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (r^2\,\mathrm{sen}\,^2 u\cos v,\ r^2\,\mathrm{sen}\,^2 u\,\mathrm{sen}\, v,\ r^2\,\mathrm{sen}\, u\cos u).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|\vec{r}_u(u,v)\times\vec{r}_v(u,v)\|^2 &= r^4\operatorname{sen}^4 u\cos^2 v\\ &\quad + r^4\operatorname{sen}^4 u\operatorname{sen}^2 v + r^4\operatorname{sen}^2 u\cos^2 u\\ &= r^4\operatorname{sen}^4 u + r^4\operatorname{sen}^2 u\cos^2 u\\ &= r^4\operatorname{sen}^2 u(\operatorname{sen}^2 u+\cos^2 u)\\ &= r^4\operatorname{sen}^2 u.\end{aligned}$$

Portanto, área da esfera é dada por:

$$A(\vec{r}(D)) = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2\operatorname{sen} u\; dv\; du = \cdots = 4\pi r^2.$$

Exercícios

Seção 16.6 do Stewart: 1–6, 13–26, 33–36, 39-50.