Aula 8: Séries de potências (continuação)

8.1 Diferenciação e integração de séries de potências

A soma de uma série de potências é uma função $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ cujo domínio é o intervalo de convergência da série. Gostaríamos de poder diferenciar e integrar tais funções e o teorema a seguir diz que podemos fazer isso em cada termo da série. Isto é chamado de diferenciação e integração termo a termo.

Teorema 8.1. (Diferenciação e integração de uma série de potências)

Se a série de potências $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ *tem um raio de convergência* $R > 0$, *então a função* f *definida por*

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$$

é diferenciável (e, portanto contínua) no intervalo $(a-R, a+R)$ *e*

(a) $f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k(x-a)^{k-1}$

(b) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = C + c_0(x-a) + \frac{c_1(x-a)^2}{2} + \frac{c_2(x-a)^3}{3} + \cdots = C + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k(x-a)^{k+1}}{k+1}.$

Os raios de convergência da série de potências **(a)** *e* **(b)** *são, ambos,* R. ♡

Importante: *As equações dadas em* **(a)** *e* **(b)** *do* **Teorema 8.1** *podem ser reescritas, respectivamente, na forma*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[c_k(x-a)^k\right] \tag{8.1}$$

$$\int \left[\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k\right] \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \int c_k(x-a)^k\,\mathrm{d}x \tag{8.2}$$

Embora o **Teorema 8.1** *diga que o raio de convergência permanece o mesmo quando uma série de potências é diferenciada ou integrada, isso não significa que o intervalo de convergência permanece* *o mesmo. Pode acontecer de a série original convergir em um extremo, enquanto a série diferenciada (ou integrada) diverge nesse ponto.*

Exemplo 8.1 Use o teorema de diferenciação para obter uma representação em série de potências para

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}\,.$$

Determine o raio de convergência da série encontrada.

Resolução: Temos que

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\left[\frac{u^{-1}}{-1}\right] + C = \frac{1}{u} + C = \frac{1}{1-x} + C,$$

então

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{1-x} + C\right].$$

Assim,

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{1-x} + C\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{k=0}^{\infty} x^k + C\right] = \sum_{k=1}^{\infty} k\,x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k.$$

O raio de convergência é dado por

$$R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k+1}{k+2}\right) = \lim_{k\to\infty}\frac{\cancel{k}}{\cancel{k}}\left[\frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{2}{k}}\right] = 1.$$

Exemplo 8.2 Use o teorema de integração para obter uma representação em série de potências para

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Resolução: Temos que

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}.$$

Substituindo a série na integral e integrando termo a termo, obtemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{arctg} x = \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int x^{2k}\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + C \\
&= C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots
\end{aligned}$$

Fazendo $x = 0$, temos $C = 0$, logo

$$\operatorname{arctg} x = \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} x^{2k+1}.$$

8.2 Séries de Taylor e Maclaurin

Vimos como representar uma classe restrita de funções como uma série de potências. Queremos representar funções mais gerais, usando séries de potências, porém surgem as seguintes perguntas: "Quais funções têm representações em séries de potências?" e "Como encontrar tais representações?". Começaremos supondo que f seja qualquer função que pode ser representada por série de potências:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots \tag{8.3}$$

com $|x-a| < R$. Vamos determinar quais coeficientes c_k devem ser coeficientes de f. Se $x = a$, temos

$$f(a) = c_0.$$

Pelo **Teorema 8.1**, podemos derivar $f(x)$. Então,

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots \qquad |x-a| < R. \tag{8.4}$$

Substituindo $x = a$, na Eq.(8.4), temos

$$f'(a) = c_1.$$

Derivando a Eq.(8.4), obtemos

$$f''(x) = 2c_2 + 2\cdot 3c_3(x-a) + 3\cdot 4(x-a)^2 + \cdots \qquad |x-a| < R \tag{8.5}$$

e, fazendo $x = a$, temos

$$f''(a) = 2c_2.$$

Vamos, agora, derivar a Eq.(8.5), de modo a obter

$$f'''(x) = 2\cdot 3c_3 + 2\cdot 3\cdot 4c_4(x-a) + 3\cdot 4\cdot 5c_5(x-a)^2 + \cdots \qquad |x-a| < R \tag{8.6}$$

e, para $x = a$, temos

$$f'''(a) = 3!c_3.$$

Assim, derivando k vezes e, substituindo $x = a$, obtemos

$$f^{(k)}(a) = k!c_k \quad \Rightarrow \quad c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

Com isso, temos o seguinte teorema.

Teorema 8.2. (Séries de Taylor e Maclaurin)

Se f tem uma representação (expansão) em série de potências em torno de $x = a$, isto é, se

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k, \qquad |x-a| < R, \tag{8.7}$$

então seus coeficientes são dados por

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,.$$

A série (8.7) tem a forma

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \tag{8.8}$$

e é chamada de ***série de Taylor*** *da função f em torno de $x = a$. Para $a = 0$, temos*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots \tag{8.9}$$

que é chamada de ***série de Maclaurin***. ♡

Exemplo 8.3 Encontre a série de Maclaurin para as seguintes funções e determine o raio de convergência de cada uma delas.

(a) $f(x) = e^x$

(b) $f(x) = \operatorname{sen} x$

(c) $f(x) = \cos x$

Resolução:

(a) Se $f(x) = \mathrm{e}^x$, então $f^{(k)}(x) = \mathrm{e}^x$ e $f^{(k)}(0) = \mathrm{e}^0 = 1$, para todo k. Portanto, a série de Maclaurin para $f(x) = \mathrm{e}^x$ é dada por

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

O raio de convergência é dado por

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{k!}}{\frac{1}{(k+1)!}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left[\frac{(k+1)\cancel{k!}}{\cancel{k!}} \right] = +\infty.$$

Como $R = +\infty$, a série converge para todo x.

(b) Temos que

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen} x & \text{e} \quad & f(0) = 0 \\ f'(x) &= \cos x & \text{e} \quad & f'(0) = 1 \\ f''(x) &= -\operatorname{sen} x & \text{e} \quad & f''(0) = 0 \\ f'''(x) &= -\cos x & \text{e} \quad & f'''(0) = -1 \\ f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen} x & \text{e} \quad & f^{(4)}(0) = 0 \\ & \vdots & & \end{aligned}$$

Como as derivadas se repetem de "quatro em quatro", podemos escrever a série de Maclaurin da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}}{4!}x^4 + \cdots \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

O raio de convergência é dado por

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}}{\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)!}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left[\frac{\cancel{(-1)^k}(2k+3)(2k+2)\cancel{(2k+1)!}}{\cancel{(-1)^k}(-1)\cancel{(2k+1)!}} \right] = \lim_{k\to\infty} \left[(2k+3)(2k+2) \right] = +\infty.$$

Como $R = +\infty$, a série converge para todo x.

(c) Temos que

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x & \text{e} \quad & f(0) = 1 \\ f'(x) &= -\operatorname{sen} x & \text{e} \quad & f'(0) = 0 \\ f''(x) &= -\cos x & \text{e} \quad & f''(0) = -1 \end{aligned}$$

$$f'''(x) = \operatorname{sen} x \qquad \text{e} \qquad f'''(0) = 0$$
$$f^{(4)}(x) = \cos x \qquad \text{e} \qquad f^{(4)}(0) = 1$$
$$\vdots$$

Como as derivadas se repetem de "quatro em quatro", podemos escrever a série de Maclaurin da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}}{4!}x^4 + \cdots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

Mostre que $R = +\infty$, isto é, a série converge para todo x.

Exercícios

1. **(a)** Use diferenciação para encontrar a representação em série de potências para

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}\,.$$

Qual o raio de convergência?

(b) Use o item (a) para encontrar uma série de potências para

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}\,.$$

(c) Use o item (b) para encontrar uma série de potências para

$$f(x) = \frac{x^2}{(1+x)^3}\,.$$

2. **(a)** Encontre uma representação em série de potências para $f(x) = \ln(1+x)$. Qual o raio de convergência?

(b) Use o item (a) para encontrar uma série de potências para $f(x) = x\ln(1+x)$.

(c) Use o item (a) para encontrar uma série de potências para $f(x) = \ln(x^2+1)$.

3. Encontre uma representação em série de potências para a função e determine o raio de convergência:

(a) $f(x) = \ln(5-x)$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2}{(1-2x)^2}$

(c) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

(d) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{3}\right)$

4. Encontre uma representação em série de potências para $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

5. Para cada função a seguir, encontre sua série de Taylor em torno do ponto a indicado e, determine o raio de convergência:

(a) $f(x) = \mathrm{e}^{2x}, \quad a = 0$

(b) $f(x) = \cos x, \quad a = \dfrac{\pi}{4}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad a = 1$

(d) $f(x) = \ln x, \quad a = 1$

(e) $f(x) = \operatorname{sen}(3x), \quad a = 0$

Respostas:

1. (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)x^k.\ R = 1.$

(b) $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)(k+2)x^k$

(c) $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k k(k-1)x^k$

2. (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}.\ R = 1.$

(b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k x^k}{k-1}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^{2k}}{k}$

3. (a) $\displaystyle\ln 5 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k5^k}\cdot R = 5.$

(b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} 2^{k-2}(k-1)x^k$. $R = \dfrac{1}{2}$.

(c) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{k-2}{2^{k-1}}x^k$. $R = 2$.

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^{2k+1}(2k+1)}x^{2k+1}$. $R = 3$

4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k!(2k+1)}$.

5. **(a)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!}$ $R = +\infty$

(b) $\displaystyle\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}}{k!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^k$, $R = +\infty$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(x-1)^k$, $R = 1$

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}(x-1)^{k+1}$, $R = 1$

(e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(3x)^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $R = +\infty$