Cálculo em Várias Variáveis
Teorema fundamental das integrais de linha

ICT-Unifesp

1. Teorema fundamental das integrais de linha

Mais detalhes na Seção 16.3 do livro do Stewart. Recurso disponível online pela Biblioteca do ICT.

Teorema fundamental das integrais de linha

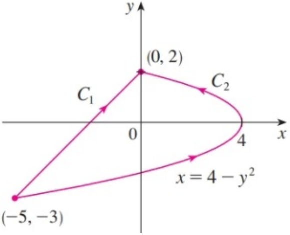
Teorema fundamental das integrais de linha

Exemplo

Calcule $\displaystyle\int_C y^2\, dx + x\, dy$ *nos seguintes casos:*

(a) $\mathcal{C} = C_1$ *é o segmento de reta que liga os pontos* $(-5, -3)$ *a* $(0, 2)$ *.*

(b) $\mathcal{C} = C_2$ *é o arco de parábola* $x = 4 - y^2$ *que liga os pontos* $(-5, -3)$ *a* $(0, 2)$*.*



(a) A curva C_1 (uma reta) é parametrizada por

$$x = 5t - 5, \qquad y = 5t - 3, \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Logo, $dx = 5dt$ e $dy = 5dt$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} y^2 dx + x dy &= \int_0^1 (5t-3)^2 (5\,dt) + (5t-5)(5\,dt) \\
&= 5\int_0^1 (25t^2 - 25t + 4) dt = -\frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

(b) A curva C_2 é parametrizada por

$$x = 4 - t^2, \qquad y = t, \qquad -3 \leq t \leq 2.$$

Logo, $dx = -2tdt$. Portanto,

$$\begin{aligned}\int_{C_1} y^2 dx + x dy &= \int_{-3}^{2} t^2(-2t)dt + (4 - t^2)dt \\ &= \int_{-3}^{2} (-2t^3 - t^2 + 4)dt = \frac{245}{6}.\end{aligned}$$

Teorema fundamental das integrais de linha

Observe que, no exemplo anterior, calculamos a integral de linha de um campo vetorial ao longo de duas curvas distintas C_1 e C_2, que têm os mesmos pontos iniciais e finais.

Teorema fundamental das integrais de linha

Observe que, no exemplo anterior, calculamos a integral de linha de um campo vetorial ao longo de duas curvas distintas C_1 e C_2, que têm os mesmos pontos iniciais e finais.

Embora os pontos iniciais e finais fossem os mesmos para essas duas curvas, os valores da integral de integral de linha são diferentes para cada curva.

Observe que, no exemplo anterior, calculamos a integral de linha de um campo vetorial ao longo de duas curvas distintas C_1 e C_2, que têm os mesmos pontos iniciais e finais.

Embora os pontos iniciais e finais fossem os mesmos para essas duas curvas, os valores da integral de integral de linha são diferentes para cada curva.

PERGUNTA: Será que é possível estabelecer uma condição sobre o campo vetorial $\vec{F}$ de modo que o valor da integral de linha dependa apenas dos pontos iniciais e finais da curva?

Teorema fundamental das integrais de linha

Relembramos o Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a),$$

em que F é uma primitiva de f, ou seja, uma função tal que $F' = f$.

Teorema fundamental das integrais de linha

Relembramos o Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

em que F é uma primitiva de f, ou seja, uma função tal que $F' = f$.

Assim, podemos escrever

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Teorema fundamental das integrais de linha

Relembramos o Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

em que F é uma primitiva de f, ou seja, uma função tal que $F' = f$.

Assim, podemos escrever

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Existe um resultado análogo para integrais de linha!

Teorema fundamental das integrais de linha

Teorema (Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha)

Sejam $\mathcal{C}$ uma curva suave parametrizada por $\vec{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, e uma função diferenciável f de duas ou três variáveis, cujo campo gradiente ∇f é contínuo em $\mathcal{C}$. Então,

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla f \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)).$$

Observe que o Teorema Fundamental das Integrais de Linha estabelece que a integral de linha de um campo vetorial conservativo $\vec{F}$ depende apenas do valor da função potencial f nas extremidades da curva:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}} \nabla f \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)).$$

Teorema fundamental das integrais de linha

Observe que o Teorema Fundamental das Integrais de Linha estabelece que a integral de linha de um campo vetorial conservativo $\vec{F}$ depende apenas do valor da função potencial f nas extremidades da curva:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}} \nabla f \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)).$$

Neste caso, dizemos que a integral de linha $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é independente do caminho.

Teorema fundamental das integrais de linha

Definição

Seja $\vec{F}$ *um campo vetorial contínuo em um domínio* D *. Dizemos que a integral de linha* $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ *é independente do caminho se*

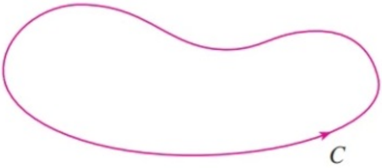
$$\int_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

para quaisquer duas curvas suaves $\mathcal{C}_1$ *e* $\mathcal{C}_2$ *que tenham os mesmos pontos iniciais e os mesmos pontos finais.*

Teorema fundamental das integrais de linha

Definição

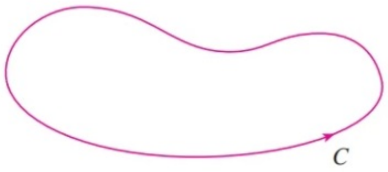
Dizemos que uma curva $\mathcal{C}$ é fechada se o seu ponto final coincide com o seu ponto inicial, ou seja, se $\vec{r}(b) = \vec{r}(a)$.



Teorema fundamental das integrais de linha

Definição

Dizemos que uma curva $\mathcal{C}$ é fechada se o seu ponto final coincide com o seu ponto inicial, ou seja, se $\vec{r}(b) = \vec{r}(a)$.



O que acontece com uma integral de linha independente do caminho se a curva $\mathcal{C}$ é fechada?

Teorema fundamental das integrais de linha

Teorema

A integral de linha $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ *é independente do caminho em* D *se e somente se* $\oint_{\mathcal{C}'} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ *para toda curva suave fechada* $\mathcal{C}'$ *contida em* D.

Teorema fundamental das integrais de linha

Teorema

A integral de linha $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ *é independente do caminho em* D *se e somente se* $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}'} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ *para toda curva suave fechada* $\mathcal{C}'$ *contida em* D.

Observação

A notação $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ *é utilizada para indicar integração sobre curvas fechadas.*

Teorema fundamental das integrais de linha

Já vimos que se $\vec{F}$ é um campo vetorial conservativo sobre uma região D, então a integral de linha $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é independente do caminho.

Já vimos que se $\vec{F}$ é um campo vetorial conservativo sobre uma região D, então a integral de linha $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é independente do caminho.

Será que a recíproca é verdadeira?

Teorema fundamental das integrais de linha

Definição

Uma região D é aberta se todo ponto P_0 de D contém uma bola aberta com centro em P_0 inteiramente contida em D.

Definição

Uma região D é conexa por caminhos se quaisquer dois pontos de D podem ser ligados por uma curva inteiramente contida em D.

Teorema fundamental das integrais de linha

Teorema

Suponha que $\vec{F}$ seja um campo vetorial contínuo sobre uma região D aberta e conexa por caminhos. Se a integral de linha $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é independente do caminho em D, então $\vec{F}$ é um campo vetorial conservativo, ou seja, existe uma função escalar f tal que $\vec{F} = \nabla f$.

Como descobrir, na prática, se um campo vetorial $\vec{F}$ é conservativo?

Teorema fundamental das integrais de linha

Como descobrir, na prática, se um campo vetorial $\vec{F}$ é conservativo?

Teorema

Seja $\vec{F} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j}$ é um campo vetorial conservativo, em que P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas em uma região D, então

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

em todos os pontos de D.

Teorema fundamental das integrais de linha

Exemplo

Verifique se o campo vetorial $\vec{F}(x, y) = (x - y)\,\vec{i} + (x - 2)\,\vec{j}$ *é conservativo.*

Note que P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas. Logo, se $\vec{F}$ fosse conservativo, teríamos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

mas

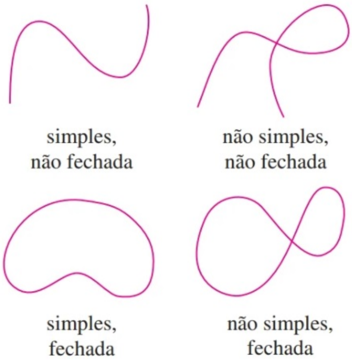
$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \text{ e } \frac{\partial Q}{\partial x} = 1.$$

Portanto, $\vec{F}$ não é conservativo.

Teorema fundamental das integrais de linha

Definição

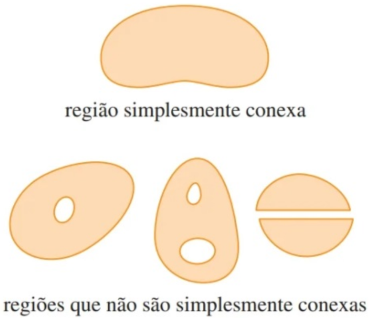
Uma curva C é uma curva simples se ela **não** *se autointercepta em nenhum ponto entre as suas extremidades.*



Teorema fundamental das integrais de linha

Definição

Uma região $D \subset \mathbb{R}^2$ simplesmente conexa é uma região conexa por caminhos onde toda curva fechada simples contorna apenas pontos que estão em D.



Teorema fundamental das integrais de linha

Teorema

Seja $\vec{F} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j}$ um campo vetorial sobre uma região D aberta e simplesmente conexa. Suponha que P e Q tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas e que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{em} \quad D.$$

Então, $\vec{F}$ é um campo vetorial conservativo.

Teorema fundamental das integrais de linha

Em resumo, seja F é um campo vetorial contínuo no domínio D.

1.) F é conservativo em $D \Rightarrow \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é independente do caminho em D.

Teorema fundamental das integrais de linha

Em resumo, seja F é um campo vetorial contínuo no domínio D.

1.) F é conservativo em $D \Rightarrow \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é independente do caminho em D.

2.) $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é independente do caminho em $D \iff \int_{\mathcal{C}'} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ sobre toda curva fechada $\mathcal{C}'$ em D.

Teorema fundamental das integrais de linha

Em resumo, seja F é um campo vetorial contínuo no domínio D.

1.) F é conservativo em $D \Rightarrow \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é independente do caminho em D.

2.) $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é independente do caminho em $D \iff \int_{\mathcal{C}'} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ sobre toda curva fechada $\mathcal{C}'$ em D.

3.) $\begin{cases} D \text{ é aberto e conexo por caminhos,} \\ \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \text{ independe do caminho} \end{cases} \Longrightarrow F$ é conservativo em D.

Teorema fundamental das integrais de linha

Em resumo, seja F é um campo vetorial contínuo no domínio D.

1.) F é conservativo em $D \Rightarrow \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é independente do caminho em D.

2.) $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é independente do caminho em $D \iff \int_{\mathcal{C}'} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ sobre toda curva fechada $\mathcal{C}'$ em D.

3.) $\begin{cases} D \text{ é aberto e conexo por caminhos,} \\ \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \text{ independe do caminho} \end{cases} \implies F$ é conservativo em D.

4.) $\begin{cases} F \text{ é conservativo} \\ P_y \text{ e } Q_x \text{ são contínuas em } D \end{cases} \implies \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ em D.

Teorema fundamental das integrais de linha

Em resumo, seja F é um campo vetorial contínuo no domínio D.

1.) F é conservativo em $D \Rightarrow \displaystyle\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é independente do caminho em D.

2.) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é independente do caminho em $D \iff \displaystyle\int_{\mathcal{C}'} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ sobre toda curva fechada $\mathcal{C}'$ em D.

3.) $$\begin{cases} D \text{ é aberto e conexo por caminhos,} \\ \displaystyle\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \text{ independe do caminho} \end{cases} \Longrightarrow F \text{ é conservativo em } D.$$

4.) $$\begin{cases} F \text{ é conservativo} \\ P_y \text{ e } Q_x \text{ são contínuas em } D \end{cases} \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ em } D.$$

5.) $$\begin{cases} D \text{ é aberto e simplesmente conexo,} \\ P_y \text{ e } Q_x \text{ são contínuas e } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases} \Longrightarrow F \text{ é conservativo em } D.$$

Teorema fundamental das integrais de linha

Exemplo

Considere o campo vetorial

$$\vec{F}(x,\, y) \;=\; (3 + 2xy)\,\vec{i} + (x^2 - 3y^2)\,\vec{j}.$$

(a) Mostre que $\vec{F}$ é conservativo.

(b) Determine uma função escalar f tal que $\vec{F} \;=\; \nabla f$.

(c) Calcule a integral de linha $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, em que $\mathcal{C}$ é a curva dada por

$$\vec{r}(t) \;=\; e^t\, sen(t)\,\vec{i} + \; e^t\, cos(t)\,\vec{j}, \qquad 0 \le t \le \pi.$$

(a) Sejam $P(x, y) = 3 + 2xy$ e $Q(x, y) = x^2 - 3y^2$. Então,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Como o domínio de $\vec{F}$, isto é $\mathbb{R}^2$, é aberto e simplesmente conexo, segue que $\vec{F}$ é conservativo.

Teorema fundamental das integrais de linha

(b) Pelo item anterior, sabemos que existe uma função f tal que $\nabla f = \vec{F}$, ou seja,

$$f_x(x, y) = 3 + 2xy,$$
$$f_y(x, y) = x^2 - 3y^2.$$

Integrando a primeira igualdade com relação à x, obtemos

$$f(x, y) = 3x + x^2y + g(y),$$

onde $g(y)$ é uma função que depende apenas de y.

Derivando com relação à y, devemos ter

$$x^2 + g'(y) = f_y(x, y) = x^2 - 3y^2,$$

o que implica $g'(y) = -3y^2$, ou seja, $g(y) = -y^3 + k$.
Portanto,

$$f(x, y) = 3x + x^2y - y^3 + k$$

é a função potencial tal que $\nabla f = \vec{F}$.

Teorema fundamental das integrais de linha

(c) O ponto inicial de C é $\vec{r}(0) = (0, 1)$ e o ponto final é $\vec{r}(\pi) = (0, e^{\pi})$.

Tomando $k = 0$ na expressão obtida em (b), pelo Teorema Fundamental das Integrais de Linha, temos

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(0, -e^{\pi}) - f(0, 1) = e^{3\pi} + 1.$$

Teorema fundamental das integrais de linha

Seção 16.3 do Stewart: 1–26, 29, 30, 35.