Cálculo em Várias Variáveis

Derivadas parciais

ICT-Unifesp

Mais detalhes na Seção 14.3 do livro do Stewart. Recurso disponível online pela Biblioteca do ICT.

Derivadas parciais

Derivação implícita

Derivação implícita

Lembre que

Observação

Para obter a função derivada parcial, basta considerar **as outras variáveis como constantes** *e derivar com relação à variável desejada.*

Derivação implícita

Definição

Uma função de duas variáveis f é definida implicitamente pela equação

$$g(x, y, z) = 0,$$

se para todo $(x, y) \in Dom(f)$, temos $g(x, y, f(x, y)) = 0$.

Derivação implícita

Definição

Uma função de duas variáveis f é definida implicitamente pela equação

$$g(x, y, z) = 0,$$

se para todo $(x, y) \in Dom(f)$*, temos* $g(x, y, f(x, y)) = 0$.

A função $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ é dada implicitamente por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, pois para todo (x, y) tal que $x^2 + y^2 \leq 1$, temos $x^2 + y^2 + \left(\sqrt{1 - x^2 - y^2}\right)^2 = 1$

Derivação implícita

Exemplo

Seja $z = f(x, y)$ *dada implicitamente pela equação* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, *com* $z > 0$. *Calcule* $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

Neste exemplo, devemos derivar parcialmente ambos os lados da equação com respeito a x, considerando z como uma função de (x, y).

Derivação implícita

Exemplo

Seja $z = f(x, y)$ *dada implicitamente por*

$$e^{xyz} = x^2 + y^2 + z^2$$

Expresse $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *em função de* x, y *e* z.

Derivação implícita

Exemplo

Seja $z = f(x, y)$ *dada implicitamente por*

$$e^{xyz} = x^2 + y^2 + z^2$$

Expresse $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *em função de* x, y *e* z.

Como z **é variável dependente** de x,

$$\frac{\partial}{\partial x}(e^{xyz}) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\Leftrightarrow e^{xyz}\frac{\partial(xyz)}{\partial x} = 2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x}$$

Derivação implícita

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow e^{xyz}\frac{\partial(xyz)}{\partial x} &= 2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} \\
\Leftrightarrow e^{xyz}\left(z\frac{\partial(xy)}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial x}\right) &= 2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} \\
\Leftrightarrow e^{xyz}\left(yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}\right) &= 2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} \\
\Leftrightarrow (xye^{xyz} - 2z)\frac{\partial z}{\partial x} &= 2x - yze^{xyz} \\
\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{2x - yze^{xyz}}{xye^{xyz} - 2z}
\end{aligned}
$$

desde que $xye^{xyz} - 2z \neq 0$.

Derivadas parciais

Exemplos

Exemplos

Lembre que

Definição

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $(a, b) \in A$. *As derivadas parciais de* f *com respeito a* x *e* y, *respectivamente, são dadas por*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k},$$

caso este limite exista.

Exemplos

Exemplo

Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{se} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Exemplos

Exemplo

Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Se $(x,y) \neq (0,0)$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\dfrac{\partial (x^3 - y^2)}{\partial x}(x^2 + y^2) - (x^3 - y^2)\dfrac{\partial (x^2 + y^2)}{\partial x}}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{3x^2(x^2 + y^2) - (x^3 - y^2)2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 + (3x + 2)xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Exemplos

Para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, fazemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{h^2}}{h} = 1\end{aligned}$$

Exemplos

Para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, fazemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{h^2}}{h} = 1\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+(3x+2)xy^2}{(x^2+y^2)^2}, & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 1, & \text{se} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Exemplos

Se $(x, y) \neq (0, 0)$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\frac{\partial(x^3 - y^2)}{\partial y}(x^2 + y^2) - (x^3 - y^2)\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y}}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$= \frac{-2y(x^2 + y^2) - (x^3 - y^2)2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2yx^2(x + 1)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Exemplos

Para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, fazemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}\\ &= \lim_{k\to 0}\frac{\frac{-k^2}{k^2}}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{-1}{k}\end{aligned}$$

Exemplos

Para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, fazemos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k}$$
$$= \lim_{k\to 0} \frac{\frac{-k^2}{k^2}}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-1}{k}$$

Portanto, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-2yx^2(x+1)}{(x^2+y^2)^2}$, para $(x,y) \neq (0,0)$, e não existe para $(x,y) = (0,0)$.

Exemplos

Observação

Seja $f(x,y)$ uma função tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$, para todo $(x,y) \in D_f$. Então $f(x,y)$ **não depende de** *x, ou seja, existe uma função $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \phi(y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.*

De fato, fixado $y = y_0$, a função $h(x) = f(x, y_0)$ é constante, pois

$$h'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) = 0 \Longrightarrow h(x) = C, \ \forall x$$

Exemplos

Observação

Seja $f(x,y)$ uma função tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$, para todo $(x,y) \in D_f$. Então $f(x,y)$ **não depende de** *x, ou seja, existe uma função $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \phi(y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.*

Em particular, $h(0) = C = h(x) \Longrightarrow f(0,y_0) = f(x,y_0)$, para todo x.

Como a escolha de y_0 foi arbitrária, segue que

$$f(x,y) = f(0,y), \ \forall (x,y),$$

isto é, f não depende de x.

Derivadas parciais

Derivadas parciais vs continuidade

Derivadas parciais vs continuidade

Sabemos que se uma função de uma variável $f(x)$ tem derivada no ponto x_0, então f é contínua em x_0.

Derivadas parciais vs continuidade

Sabemos que se uma função de uma variável $f(x)$ tem derivada no ponto x_0, então f é contínua em x_0.

Será que a existência das derivadas parciais de uma função de duas variáveis $f(x, y)$ no ponto (x_0, y_0) garante que f é contínua neste ponto?

Derivadas parciais vs continuidade

Sabemos que se uma função de uma variável $f(x)$ tem derivada no ponto x_0, então f é contínua em x_0.

Será que a existência das derivadas parciais de uma função de duas variáveis $f(x, y)$ no ponto (x_0, y_0) garante que f é contínua neste ponto?

NÃO!

Derivadas parciais vs continuidade

Exemplo

A função $f(x,y)$ a seguir tem derivadas parciais em $(0,0)$, mas não é contínua em $(0,0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Pela definição, temos que as derivadas parciais existem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0$$

Derivadas parciais vs continuidade

Exemplo

A função $f(x,y)$ a seguir tem derivadas parciais em $(0,0)$, mas não é contínua em $(0,0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Mas, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ não existe.

Portanto, $f(x,y)$ não é contínua em $(0,0)$.

Derivadas parciais

Derivadas parciais de ordem superior

Derivadas parciais de ordem superior

Seja $f(x, y)$ uma função de duas variáveis. Então

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

também são funções de duas variáveis. Logo, suas derivadas parciais serão dadas por:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Derivadas parciais de ordem superior

Observação

As derivadas parciais das derivadas parciais de uma função são denominadas de **derivadas parciais de segunda ordem** *da função.*

Exemplo

Seja $f(x, y) = x^2y + e^{xy}$. *Calcule as derivadas de segunda ordem de* f.

As derivadas de primeira ordem de f são:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy + ye^{xy} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + xe^{xy}$$

Derivadas parciais de ordem superior

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + ye^{xy} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + xe^{xy}$$

As derivadas parciais de segunda ordem de f são:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y + y^2e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2x + e^{xy} + xye^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x + e^{xy} + xye^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^2e^{xy}$$

Derivadas parciais de ordem superior

No exemplo anterior, temos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

Será que isto sempre ocorre?

Derivadas parciais de ordem superior

No exemplo anterior, temos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

Será que isto sempre ocorre?

NÃO!

Exemplo

Vamos verificar que a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

satisfaz $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$

Derivadas parciais de ordem superior

Vamos encontrar primeiramente $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$:

Se $(x, y) \neq (0, 0)$, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3(x^2 + y^2) - xy^3 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^3(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{3xy^2(x^2 + y^2) - xy^3 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{xy^2(3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Se $(x, y) = (0, 0)$, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \frac{0-0}{x} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \frac{0-0}{y} = 0.$$

Portanto

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Derivadas parciais de ordem superior

Vamos agora calcular as derivadas segundas em $(0,0)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = \frac{y-0}{y} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = \frac{0-0}{x} = 0$$

Derivadas parciais de ordem superior

Observação

Outras notações para as derivadas parciais de ordem superior:

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$f_{xyz} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}$$

Exercícios

Seção 14.3 do Stewart: 37–52, 57–64, 77, 78.