Universidade Federal de São Paulo

Principais modelos discretos

Professor

Julio Cezar

AULA DE HOJE

- Variáveis aleatórias discretas (principais modelos).

PRINCIPAIS MODELOS DISCRETOS

Vimos alguns exemplos na aula anterior que ajudam a esclarecer a relação entre a variável e a realização do experimento aleatório que a origina. Cada possível elemento do espaço amostral é uma realização do experimento e corresponde a um valor da variável, nem sempre distinto.

PRINCIPAIS MODELOS DISCRETOS

Vimos alguns exemplos na aula anterior que ajudam a esclarecer a relação entre a variável e a realização do experimento aleatório que a origina. Cada possível elemento do espaço amostral é uma realização do experimento e corresponde a um valor da variável, nem sempre distinto.

Algumas variáveis aleatórias aparecem com bastante frequência em situações práticas e justificam um estudo mais aprofundado. Em geral nesses casso, a função de probabilidade pode ser escrita de uma maneira a mais compacta, isto é, existe uma lei para atribuir as probabilidades.

PRINCIPAIS MODELOS DISCRETOS

Por exemplo, se uma variável aleatória W tem função de probabilidade dada por:

W	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

PRINCIPAIS MODELOS DISCRETOS

Por exemplo, se uma variável aleatória W tem função de probabilidade dada por:

W	1	2	3	4	5	6
$\mathbf{P(X = x_i)}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

Então, podemos escrever a expressão $P(W = k) = \frac{k}{21}$, para $k = 1, 2, \dots, 6$.

PRINCIPAIS MODELOS DISCRETOS

Por exemplo, se uma variável aleatória W tem função de probabilidade dada por:

W	1	2	3	4	5	6
$\mathbf{P(X = x_i)}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

Então, podemos escrever a expressão $P(W = k) = \frac{k}{21}$, para $k = 1, 2, \dots, 6$.

Dessa maneira, obtemos uma forma abreviada para a função de probabilidade da variável. A seguir serão exibidos os principais modelos de variáveis aleatórias discreta.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Distribuição Uniforme Discreta

A variável aleatória discreta mais simples é aquela que assume somente um número finito de valores possíveis, cada um com igual probabilidade. Uma variável aleatória X que assume cada um dos valores $x_1, x_2, \dots, x_n$, com igual probabilidade $\frac{1}{n}$ é frequentemente de interesse.

Distribuição Uniforme Discreta

A variável aleatória discreta mais simples é aquela que assume somente um número finito de valores possíveis, cada um com igual probabilidade. Uma variável aleatória X que assume cada um dos valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, com igual probabilidade $\frac{1}{n}$ é frequentemente de interesse.

Uma variável aleatória X tem uma **distribuição uniforme discreta** se cada um dos n valores em sua faixa, isto é, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tiver igual probabilidade. Então a função de probabilidade é dada por:

$$\boxed{P(X = x_i) = \frac{1}{n}} \quad , \qquad \text{para todo } i = 1, 2, \ldots, n$$

Distribuição Uniforme Discreta

Exemplo: O primeiro dígito de um número de uma peça é igualmente provável de ser cada um dos números de 0 a 9. Uma peça é selecionada aleatoriamente. Seja X o primeiro dígito do número da peça. X tem uma distribuição uniforme discreta. Seus valores possíveis são $\mathrm{R} = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Distribuição Uniforme Discreta

Exemplo: O primeiro dígito de um número de uma peça é igualmente provável de ser cada um dos números de 0 a 9. Uma peça é selecionada aleatoriamente. Seja X o primeiro dígito do número da peça. X tem uma distribuição uniforme discreta. Seus valores possíveis são $\mathrm{R} = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Sua função de probabilidade é dada por.

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{x}) = \frac{1}{\mathrm{n}} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

para cada valor em R.

Distribuição Uniforme Discreta

A função de probabilidade é exibida na Figura 1:

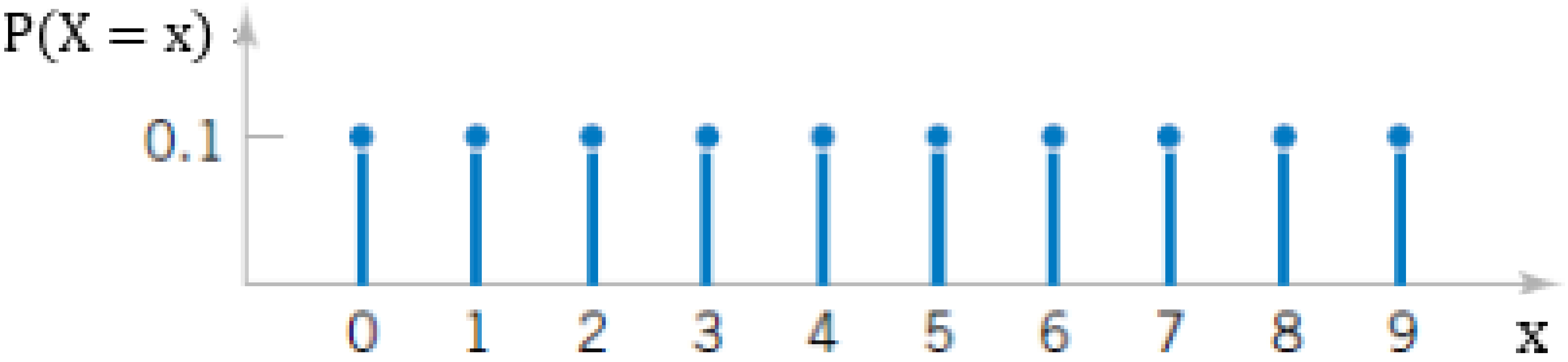


Figura 1: Função de probabilidade uma variável aleatória discreta uniforme.

Distribuição Uniforme Discreta

Suponha que X pode assumir quaisquer valores consecutivos

$$a, a+1, a+2, \ldots, b, \text{para } a \leq b.$$

X pode assumir $(b-a+1)$ valores distintos, cada um com probabilidade

$$\frac{1}{b-a+1}.$$

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Distribuição Uniforme Discreta

Suponha que X pode assumir quaisquer valores consecutivos

$$a, a+1, a+2, \dots, b, \text{para } a \leq b.$$

X pode assumir $(b-a+1)$ valores distintos, cada um com probabilidade

$$\frac{1}{b-a+1}.$$

Portanto, a função de probabilidade de X é dada por

$$P(X = x_i) = \frac{1}{b-a+1}$$

para $x_i \in \{a, a+1, a+2, \dots, b\}$.

Distribuição Uniforme Discreta

Média e Variância

Suponha que X seja uma variável aleatória uniforme discreta nos inteiro consecutivos $a, a+1, a+2, \ldots, b$, para $a \leq b$.

Distribuição Uniforme Discreta

Média e Variância

Suponha que X seja uma variável aleatória uniforme discreta nos inteiro consecutivos $a, a+1, a+2, \ldots, b$, para $a \leq b$.

A média de X é:

$$\mu = E(X) = \frac{b+a}{2}$$

Distribuição Uniforme Discreta

Média e Variância

Suponha que X seja uma variável aleatória uniforme discreta nos inteiro consecutivos $a, a+1, a+2, \ldots, b$, para $a \leq b$.

A média de X é:

$$\mu = E(X) = \frac{b+a}{2}$$

A variância de X é

$$\sigma^2 = Var(X) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}.$$

Distribuição de Bernoulli

Imagine um experimento aleatório que podem ocorrer dois possíveis resultados, “sucesso” e “fracasso”. Veja alguns exemplos:

- um cliente pode ser adimplente ou inadimplente;
- uma peça produzida por uma cia, pode ser perfeita ou defeituosa;
- um consumidor que entra numa loja pode comprar ou não comprar um produto;
- lança-se uma moeda e observa-se se o resultado é cara ou coroa;
- aplicam-se doses de um inseticida e verifica-se se uma determinada praga morreu ou não morreu;
- semente pode germinar ou não germinar.

Distribuição de Bernoulli

Associando-se uma variável aleatória X aos possíveis resultados do experimento, de forma que

X= 1 se o resultado for "sucesso",

X= 0 se o resultado for "fracasso".

DISTRIBUIÇÃO DE BERNOULLI

Associando-se uma variável aleatória X aos possíveis resultados do experimento, de forma que

X= 1 se o resultado for "sucesso",

X= 0 se o resultado for "fracasso".

Então, a variável aleatória X, assim definida, tem **distribuição de Bernoulli**, com **p** sendo a probabilidade de ocorrer **"sucesso"**, e **q = (1-p)** a probabilidade de ocorrer **"fracasso"**.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Distribuição de Bernoulli

Função de probabilidade: $P(X = x) = \begin{cases} p & \text{se } x = 1 \\ 1 - p & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Valor esperado (média): $\mu = p$

Variância: $\sigma^2 = pq = p(1 - p)$

Desvio padrão: $\sigma = \sqrt{pq} = \sqrt{p(1 - p)}$

Podemos utilizar p como sendo a proporção de sucessos.

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Distribuição de Bernoulli

Exemplo 1: Lançamento de uma moeda honesta: podemos associar cara a sucesso e coroa a fracasso. Além de igualmente provável a distribuição de probabilidade é do tipo Bernoulli:

Distribuição de Bernoulli

Exemplo 1: Lançamento de uma moeda honesta: podemos associar cara a sucesso e coroa a fracasso. Além de igualmente provável a distribuição de probabilidade é do tipo Bernoulli:

Distribuição de Bernoulli: $P(x) = \begin{cases} 1/2 & \textbf{se} \quad x = 1 \\ 1/2 & \textbf{se} \quad x = 0 \end{cases}$

$\mu = 1/2 \qquad \sigma^2 = 1/4 \qquad \sigma = 1/2$

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Distribuição de Bernoulli

Exemplo 1: Lançamento de uma moeda honesta: podemos associar cara a sucesso e coroa a fracasso. Além de igualmente provável a distribuição de probabilidade é do tipo Bernoulli:

Distribuição de Bernoulli: $P(x) = \begin{cases} 1/2 & \textbf{se} \quad x = 1 \\ 1/2 & \textbf{se} \quad x = 0 \end{cases}$

$\mu = 1/2 \qquad \sigma^2 = 1/4 \qquad \sigma = 1/2$

Exemplo 2: A experiência tem mostrado que durante as vendas de Natal, um cliente que entra em uma determinada loja tem 60% de chance de comprar um produto qualquer. Temos, portanto, uma probabilidade de sucesso X=1 **(o cliente adquirir um produto qualquer)** de 0,6 e uma probabilidade de não adquirir X=0 um produto de q = 1-p = 0,4. Neste caso p é a proporção das vezes que um cliente compra um produto.

Distribuição de Bernoulli

Exemplo 1: Lançamento de uma moeda honesta: podemos associar cara a sucesso e coroa a fracasso. Além de igualmente provável a distribuição de probabilidade é do tipo Bernoulli:

Distribuição de Bernoulli: $P(x) = \begin{cases} 1/2 & \textbf{se} \quad \mathbf{x=1} \\ 1/2 & \textbf{se} \quad \mathbf{x=0} \end{cases}$

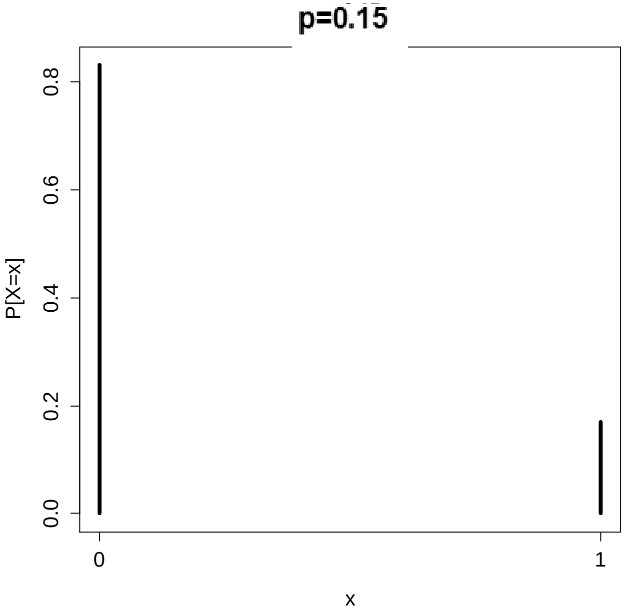
$\boldsymbol{\mu} = 1/2 \qquad \boldsymbol{\sigma}^2 = 1/4 \qquad \boldsymbol{\sigma} = 1/2$

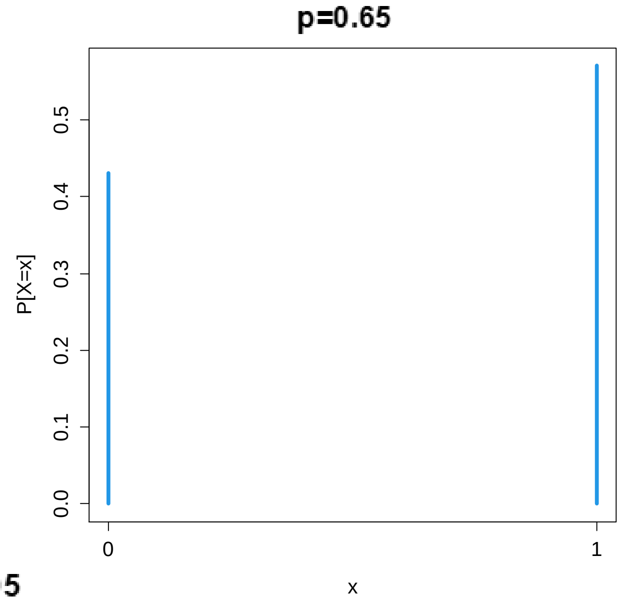
Exemplo 2: A experiência tem mostrado que durante as vendas de Natal, um cliente que entra em uma determinada loja tem 60% de chance de comprar um produto qualquer. Temos, portanto, uma probabilidade de sucesso X=1 **(o cliente adquirir um produto qualquer)** de 0,6 e uma probabilidade de não adquirir X=0 um produto de q = 1-p = 0,4. Neste caso p é a proporção das vezes que um cliente compra um produto.

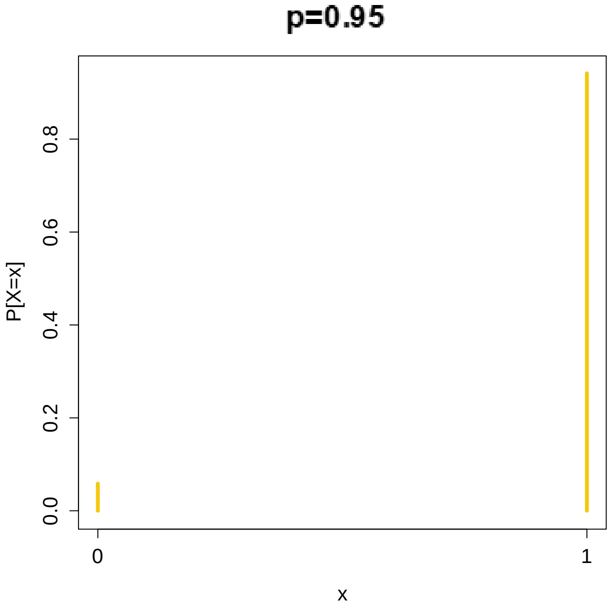
Distribuição de Bernoulli: $P(x) = \begin{cases} 0{,}6 & \textbf{se} \quad \mathbf{x=1} \\ 0{,}4 & \textbf{se} \quad \mathbf{x=0} \end{cases}$

$\boldsymbol{\mu} = 0{,}6 \qquad \boldsymbol{\sigma}^2 = 0{,}24 \qquad \boldsymbol{\sigma} = 0{,}4898$

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933







UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Distribuição binomial

Para que uma situação possa se enquadrar em uma **distribuição binomial**, deve atender às seguintes condições:

- são realizadas n repetições (tentativas, ensaios, provas) independentes;

- cada tentativa é um ensaio de Bernoulli, isto é, só podem ocorrer dois resultados possíveis, com probabilidades p e q=1-p;

- a probabilidade p de sucesso em cada ensaio é constante.

Se uma situação atende a todas as condições acima, então a variável aleatória X = número de sucessos obtidos nos n ensaios terá uma distribuição binomial, com n tentativas e p (probabilidade de sucesso).

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Distribuição binomial

Vamos determinar a distribuição e probabilidade de X, através da probabilidade de um número genérico x de sucessos.

Suponha que ocorram sucessos (1) apenas nas x primeiras provas, e fracasso (0) na $n - x$ provas restantes

$$\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1,}_{x}\underbrace{0, 0, 0, \ldots, 0}_{n-x}$$

Como as provas são independentes, a probabilidade de ocorrência de x sucesso em n tentativas é uma **extensão do modelo Bernoulli para n ensaios**, ou seja,

$$\underbrace{p.p.p\ldots p}_{x}\underbrace{(1-p).(1-p)\ldots(1-p)}_{n-x} = p^x(1-p)^{n-x}$$

UNIFESP

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

1933

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

Porém, o evento: “x sucesso em n provas” pode ocorrer de diferentes maneiras (ordens) distintas, todas com a mesma probabilidade.

Como o número de ordens é o número de combinações de n elementos tomados x a x, então a **probabilidade de ocorrerem x sucessos em n provas de Bernoulli** será então a **distribuição binomial**, dada pela função de probabilidade:

$$\boxed{P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}}, \qquad x = 0,1, \dots, n$$

em que,

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$

é o **coeficiente binomial**, que da o número total de combinações possíveis de n elementos, com x sucessos.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

Simbolicamente: $X \sim B(n, p)$, ou seja, a variável aleatória X tem **distribuição binomial** com **n ensaios** e uma **probabilidade p de sucesso**:

p: probabilidade de sucesso

q = 1- p : probabilidade de não sucesso

A função de probabilidade da variável aleatória **X = x sucessos**, em **n ensaios**, é dada por:

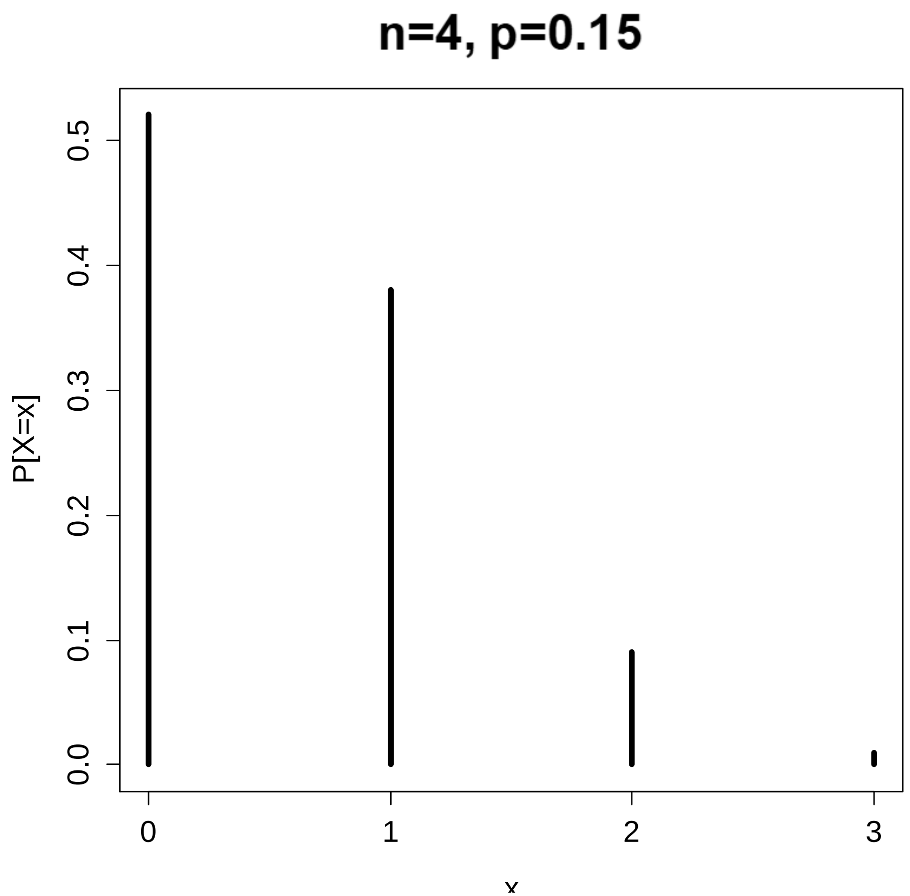
$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

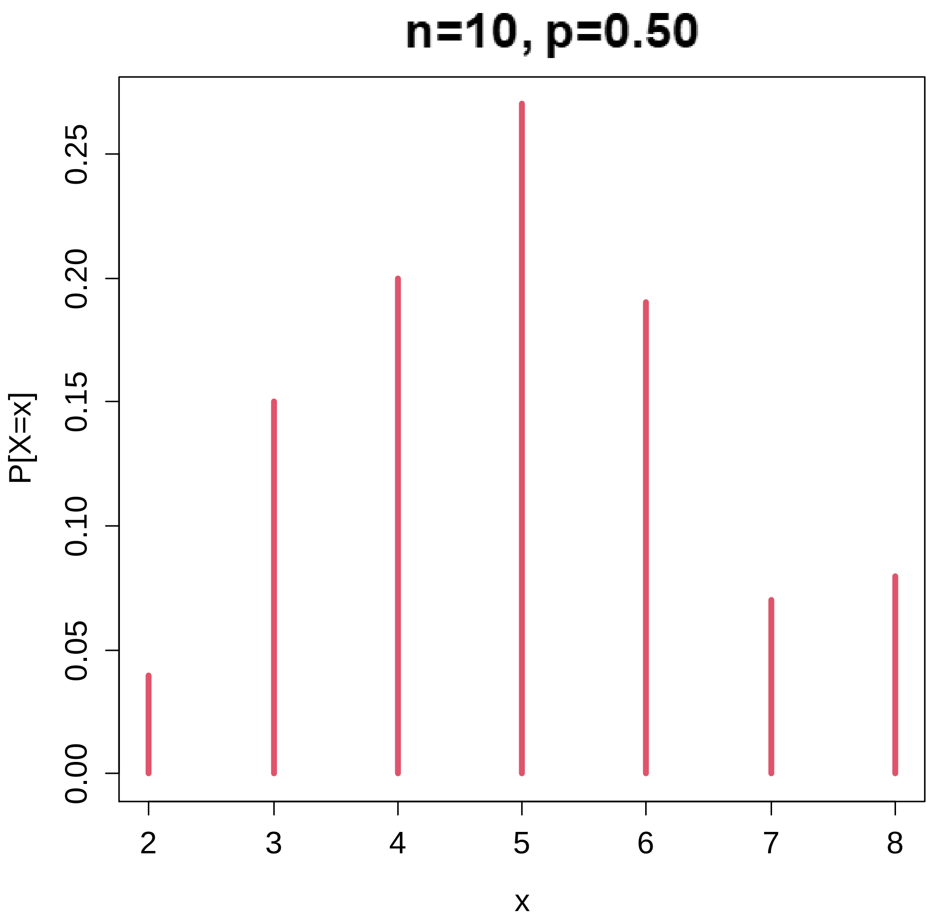
Valor esperado (média): $\mu = np$

Variância: $\sigma^2 = npq$

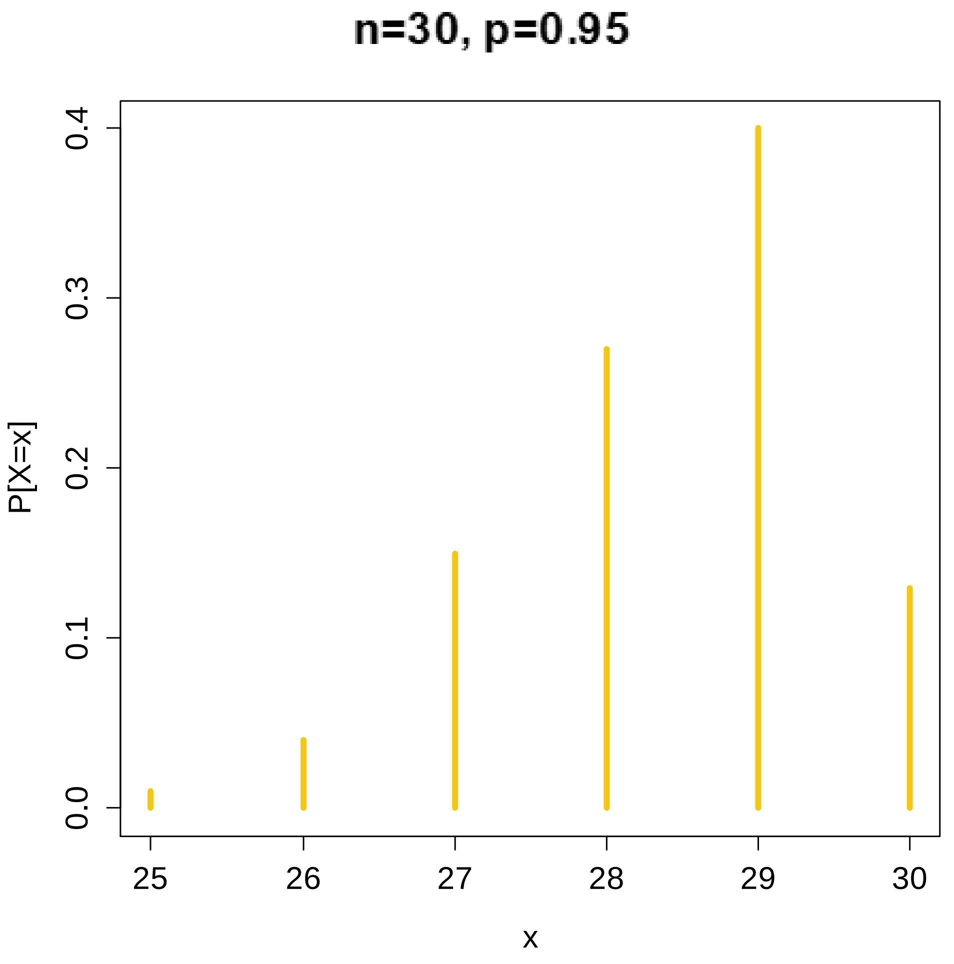
Desvio padrão: $\sigma = \sqrt{npq}$

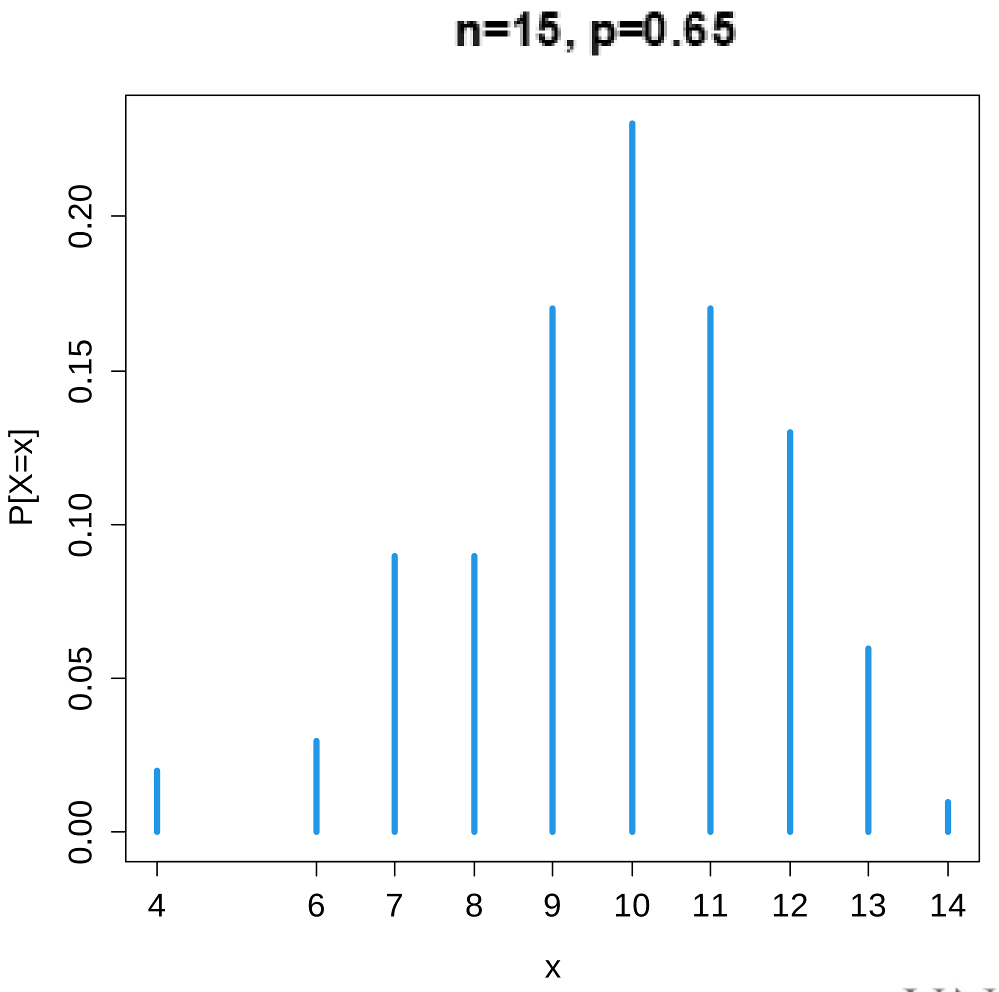
UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933





UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933





UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

Probabilidade de se obter valores maiores ou iguais ao valor observado:

$$P_n(X \geq k) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} (p)^i (1-p)^{n-i}$$

Distribuição binomial

Probabilidade de se obter valores maiores ou iguais ao valor observado:

$$P_n(X \geq k) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} (p)^i (1-p)^{n-i}$$

Probabilidade de se obter valores menores ou iguais ao valor observado:

$$P_n(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} (p)^i (1-p)^{n-i}$$

Distribuição binomial

Exemplo: Uma certa doença pode ser curada através de procedimento cirúrgico em 80% dos casos. Dentre os que têm essa doença, sorteamos 15 pacientes que serão submetidos à cirurgia. Fazendo alguma suposição adicional que julgar necessária, responda qual é a probabilidade de:

Distribuição binomial

Exemplo: Uma certa doença pode ser curada através de procedimento cirúrgico em 80% dos casos. Dentre os que têm essa doença, sorteamos 15 pacientes que serão submetidos à cirurgia. Fazendo alguma suposição adicional que julgar necessária, responda qual é a probabilidade de:

a) Todos serem curados?

Distribuição binomial

Exemplo: Uma certa doença pode ser curada através de procedimento cirúrgico em 80% dos casos. Dentre os que têm essa doença, sorteamos 15 pacientes que serão submetidos à cirurgia. Fazendo alguma suposição adicional que julgar necessária, responda qual é a probabilidade de:

a) Todos serem curados?

b) Pelo menos dois não serem curados?

Distribuição binomial

Exemplo: Uma certa doença pode ser curada através de procedimento cirúrgico em 80% dos casos. Dentre os que têm essa doença, sorteamos 15 pacientes que serão submetidos à cirurgia. Fazendo alguma suposição adicional que julgar necessária, responda qual é a probabilidade de:

a) Todos serem curados?

b) Pelo menos dois não serem curados?

c) Ao menos 10 ficarem livres da doença?

DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

- A **distribuição de Poisson** é aplicada quando:

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

- A **distribuição de Poisson** é aplicada quando:

\- Estamos interessados em contar o número de vezes em que um evento específico ocorre em um determinado intervalo (de tempo, de comprimento, de área, volume,...);

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Distribuição de Poisson

- A **distribuição de Poisson** é aplicada quando:

- Estamos interessados em contar o número de vezes em que um evento específico ocorre em um determinado intervalo (de tempo, de comprimento, de área, volume,...);
- A probabilidade de que um evento específico ocorra em um determinado intervalo é a mesma para todos os intervalos;

Distribuição de Poisson

- A **distribuição de Poisson** é aplicada quando:

- Estamos interessados em contar o número de vezes em que um evento específico ocorre em um determinado intervalo (de tempo, de comprimento, de área, volume,...);
- A probabilidade de que um evento específico ocorra em um determinado intervalo é a mesma para todos os intervalos;
- O número de eventos que ocorrem em um determinado intervalo é independente do número de eventos que ocorrem em outros intervalos;

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

- A **distribuição de Poisson** é aplicada quando:

\- A probabilidade de que dois ou mais eventos venham a ocorrer em um determinado intervalo se aproxima de zero à medida que o intervalo se torna menor.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Distribuição de Poisson

Vale ressaltar que, **a** **distribuição de Poisson** é útil para descrever o **número de ocorrências num Intervalo contínuo (tempo, distância)**.

DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

Vale ressaltar que, **a distribuição de Poisson** é útil para descrever o **número de ocorrências num Intervalo contínuo (tempo, distância)**.

- Chamadas telefônicas por unidade de tempo;

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

Vale ressaltar que, **a distribuição de Poisson** é útil para descrever o **número de ocorrências num Intervalo contínuo (tempo, distância)**.

- Chamadas telefônicas por unidade de tempo;
- Defeitos por unidade de área;

Distribuição de Poisson

Vale ressaltar que, **a distribuição de Poisson** é útil para descrever o **número de ocorrências num Intervalo contínuo (tempo, distância)**.

- Chamadas telefônicas por unidade de tempo;
- Defeitos por unidade de área;
- Acidentes por unidade de tempo;

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Distribuição de Poisson

Vale ressaltar que, **a distribuição de Poisson** é útil para descrever o **número de ocorrências num Intervalo contínuo (tempo, distância)**.

- Chamadas telefônicas por unidade de tempo;
- Defeitos por unidade de área;
- Acidentes por unidade de tempo;
- Chegada de clientes a um supermercado por unidade de tempo;

Distribuição de Poisson

Vale ressaltar que, **a distribuição de Poisson** é útil para descrever o **número de ocorrências num Intervalo contínuo (tempo, distância)**.

- Chamadas telefônicas por unidade de tempo;
- Defeitos por unidade de área;
- Acidentes por unidade de tempo;
- Chegada de clientes a um supermercado por unidade de tempo;
- Número de glóbulos sanguíneos visíveis ao microscópio por unidade de área;

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

Vale ressaltar que, **a distribuição de Poisson** é útil para descrever o **número de ocorrências num Intervalo contínuo (tempo, distância)**.

- Chamadas telefônicas por unidade de tempo;
- Defeitos por unidade de área;
- Acidentes por unidade de tempo;
- Chegada de clientes a um supermercado por unidade de tempo;
- Número de glóbulos sanguíneos visíveis ao microscópio por unidade de área;
- Número de partículas emitidas por uma fonte de material radioativo por unidade de tempo.

Distribuição de Poisson

Uma variável aleatória X segue uma **distribuição de Poisson** (Notação: $X \sim P(\lambda)$, dada pela função de probabilidade:

Distribuição de Poisson

Uma variável aleatória X segue uma **distribuição de Poisson** (Notação: $X \sim P(\lambda)$), dada pela função de probabilidade:

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Distribuição de Poisson

Uma variável aleatória X segue uma **distribuição de Poisson** (Notação: $X \sim P(\lambda)$, dada pela função de probabilidade:

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \text{em que}$$

Distribuição de Poisson

Uma variável aleatória X segue uma **distribuição de Poisson** (Notação: $X \sim P(\lambda)$, dada pela função de probabilidade:

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \text{em que}$$

x = número de ocorrências $(0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, \infty)$;

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

Uma variável aleatória X segue uma **distribuição de Poisson** (Notação: $X \sim P(\lambda)$, dada pela função de probabilidade:

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \text{em que}$$

x = número de ocorrências $(0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, \infty)$;

λ = taxa média por unidade (de tempo, de distância, de área...);

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Distribuição de Poisson

Uma variável aleatória X segue uma **distribuição de Poisson** (Notação: $X \sim P(\lambda)$, dada pela função de probabilidade:

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \text{em que}$$

x = número de ocorrências $(0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, \infty)$;

λ = taxa média por unidade (de tempo, de distância, de área...);

t = número de unidades (de tempo, distância, área, volume,...);

UNIFESP

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

1933

Distribuição de Poisson

Uma variável aleatória X segue uma **distribuição de Poisson** (Notação: $X \sim P(\lambda)$, dada pela função de probabilidade:

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \text{em que}$$

x = número de ocorrências $(0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, \infty)$;

λ = taxa média por unidade (de tempo, de distância, de área...);

t = número de unidades (de tempo, distância, área, volume,...);

$\mu = \lambda t$ = número médio (valor esperado) de ocorrências no intervalo t;

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Distribuição de Poisson

Uma variável aleatória X segue uma **distribuição de Poisson** (Notação: $X \sim P(\lambda)$, dada pela função de probabilidade:

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \text{em que}$$

x = número de ocorrências $(0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, \infty)$;

λ = taxa média por unidade (de tempo, de distância, de área...);

t = número de unidades (de tempo, distância, área, volume,...);

$\mu = \lambda t$ = número médio (valor esperado) de ocorrências no intervalo t;

e = 2,71828... (base dos logaritmos naturais).

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Distribuição de Poisson

Média e Variância

Função de probabilidade: $P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$

Valor esperado (média): $\mu = \lambda t$

Variância: $\sigma^2 = \mu$

Desvio padrão: $\sigma = \sqrt{\mu}$

Distribuição de Poisson

Exemplo: A aplicação de fundo anticorrosivo em chapas de aço de $1\,\mathrm{m}^2$ é feita mecanicamente e pode produzir defeitos (pequenas bolhas na pintura), de acordo com uma variável aleatória de Poisson de parâmetro $\lambda = 1$ por m^2. Uma chapa é sorteada ao acaso para ser inspecionada, pergunta-se a probabilidade de:

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Distribuição de Poisson

Exemplo: A aplicação de fundo anticorrosivo em chapas de aço de $1\,\mathrm{m}^2$ é feita mecanicamente e pode produzir defeitos (pequenas bolhas na pintura), de acordo com uma variável aleatória de Poisson de parâmetro $\lambda = 1 \text{ por } \mathrm{m}^2$. Uma chapa é sorteada ao acaso para ser inspecionada, pergunta-se a probabilidade de:

a) Encontrarmos pelo menos 1 defeito.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Distribuição de Poisson

Exemplo: A aplicação de fundo anticorrosivo em chapas de aço de $1\,\mathrm{m}^2$ é feita mecanicamente e pode produzir defeitos (pequenas bolhas na pintura), de acordo com uma variável aleatória de Poisson de parâmetro $\lambda = 1 \text{ por } \mathrm{m}^2$. Uma chapa é sorteada ao acaso para ser inspecionada, pergunta-se a probabilidade de:

a) Encontrarmos pelo menos 1 defeito.

b) No máximo 2 defeitos serem encontrados.

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Distribuição de Poisson

Exemplo: A aplicação de fundo anticorrosivo em chapas de aço de $1\,\mathrm{m}^2$ é feita mecanicamente e pode produzir defeitos (pequenas bolhas na pintura), de acordo com uma variável aleatória de Poisson de parâmetro $\lambda = 1 \text{ por } \mathrm{m}^2$. Uma chapa é sorteada ao acaso para ser inspecionada, pergunta-se a probabilidade de:

a) Encontrarmos pelo menos 1 defeito.

b) No máximo 2 defeitos serem encontrados.

c) Encontrarmos de 2 a 4 defeitos.

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Distribuição de Poisson

Exemplo: A aplicação de fundo anticorrosivo em chapas de aço de $1\,\mathrm{m}^2$ é feita mecanicamente e pode produzir defeitos (pequenas bolhas na pintura), de acordo com uma variável aleatória de Poisson de parâmetro $\lambda = 1$ por m^2. Uma chapa é sorteada ao acaso para ser inspecionada, pergunta-se a probabilidade de:

a) Encontrarmos pelo menos 1 defeito.

b) No máximo 2 defeitos serem encontrados.

c) Encontrarmos de 2 a 4 defeitos.

d) Não mais de 1 defeito ser encontrado.

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Distribuição de Poisson

A **distribuição de Poisson** aparece em vários problemas físicos, com a seguinte formulação: considerando uma data inicial (t = 0), seja N(t) o número de eventos que ocorrem até uma certa data t. Por exemplo, N(t) pode ser um modelo para o **número de impactos de asteroides maiores** que um certo tamanho desde uma certa data de referência.

Distribuição de Poisson

A **distribuição de Poisson** aparece em vários problemas físicos, com a seguinte formulação: considerando uma data inicial (t = 0), seja N(t) o número de eventos que ocorrem até uma certa data t. Por exemplo, N(t) pode ser um modelo para o **número de impactos de asteroides maiores** que um certo tamanho desde uma certa data de referência.

Uma aproximação que pode ser considerada é que a probabilidade de acontecer um evento em qualquer intervalo não depende (no sentido de independência estatística) da probabilidade de acontecer em qualquer outro intervalo disjunto.

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Distribuição de Poisson

Neste caso, a solução para o problema é o processo estocástico chamado de **Processo de Poisson**, para o qual vale:

Universidade Federal de São Paulo

1933

Distribuição de Poisson

Neste caso, a solução para o problema é o processo estocástico chamado de **Processo de Poisson**, para o qual vale:

$$P(N(t) = k) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$$

.

Distribuição de Poisson

Neste caso, a solução para o problema é o processo estocástico chamado de **Processo de Poisson**, para o qual vale:

$$P(N(t) = k) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$$

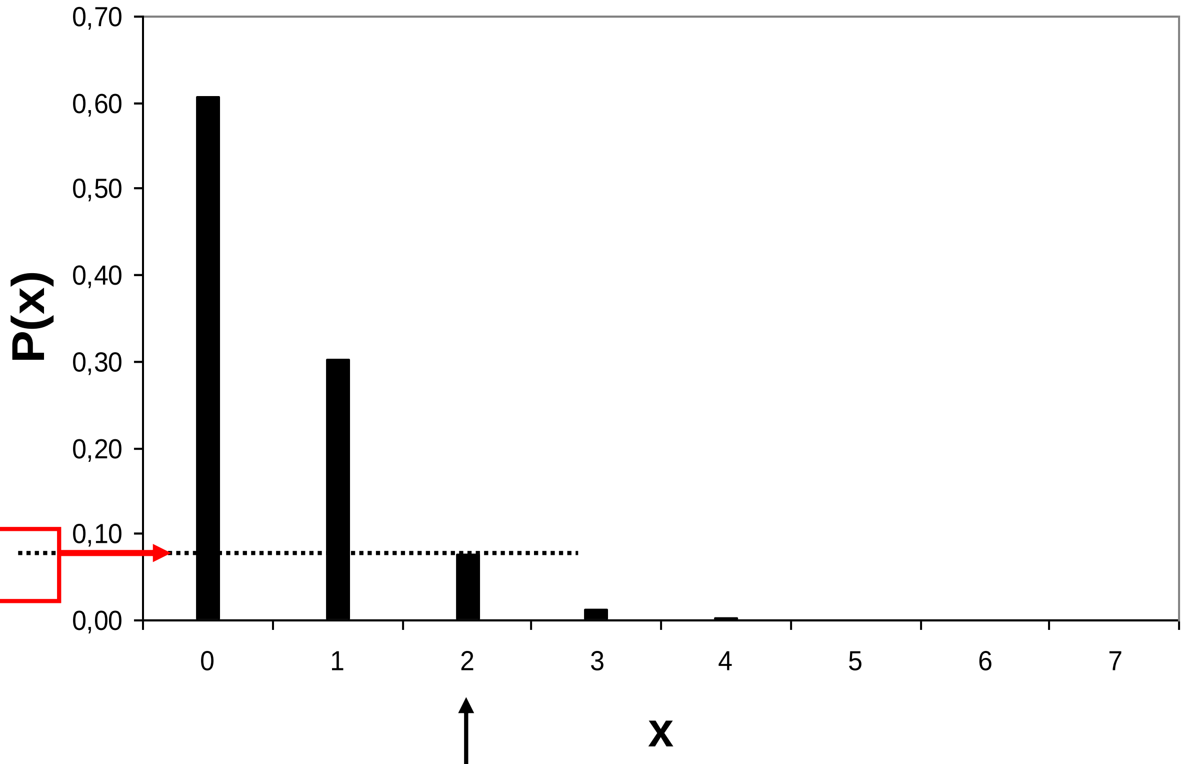
em que, λ é uma constante (de unidade inversa da unidade do tempo). Ou seja, o número de eventos até uma época qualquer t é uma **distribuição de Poisson** com parâmetro λt.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

GRÁFICO DAS PROBABILIDADES DE POISSON

μ = 0,50

X	μ = 0,50
0	0,6065
1	0,3033
2	0,0758
3	0,0126
4	0,0016
5	0,0002
6	0.000013
7	0.00000094

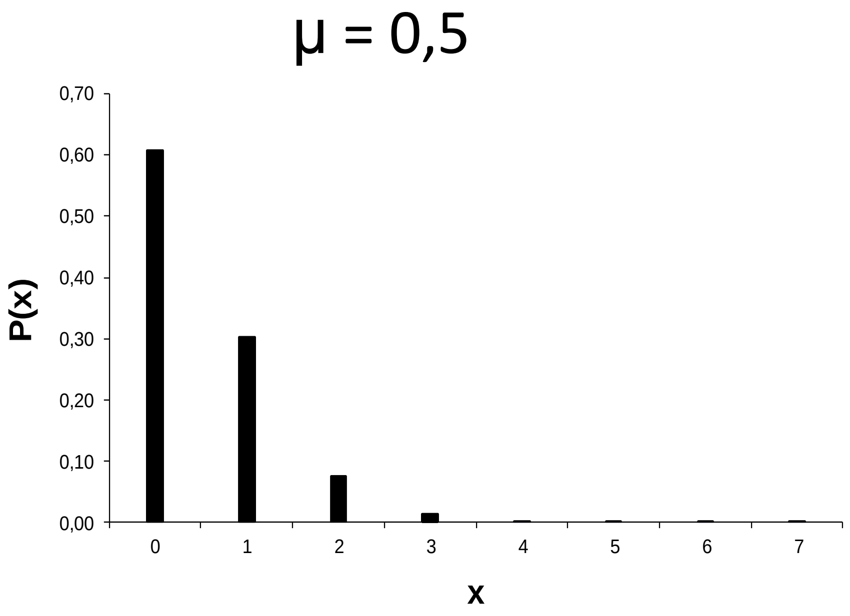


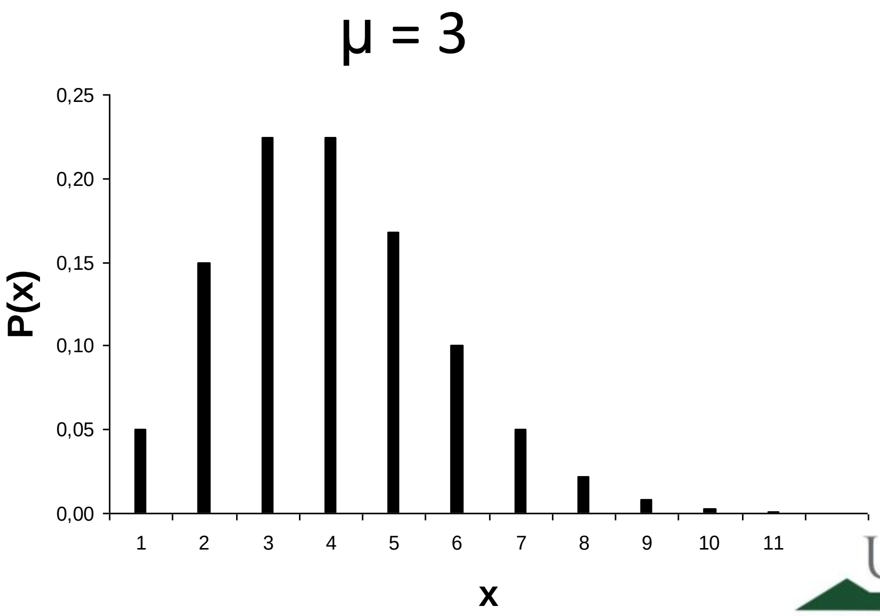
P(X = 2) = 0,0758

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Forma da Distribuição de Poisson

- A forma da Distribuição de Poisson depende do parâmetro μ:





Comparação entre as distribuições Binomial e de Poisson

	Binomial	Poisson
Resultados possíveis	Inteiros de 0 a n	Inteiros de 0 a $+\infty$
Observações	Contagem de sucessos ou falhas	Contagem de sucessos somente
Parâmetros	n e p	μ

Comparação entre as distribuições Binomial e de Poisson

	Binomial	**Poisson**
Resultados possíveis	Inteiros de 0 a n	Inteiros de 0 a $+\infty$
Observações	Contagem de sucessos ou falhas	Contagem de sucessos somente
Parâmetros	n e p	μ

Aproximação da binomial pela Poisson

Para um número muito grande de repetições e probabilidade de sucesso pequena, ou seja, se **n é grande** e **p pequeno** de modo que **np ≤ 7**, podemos calcular a probabilidade de sucessos aproximando a **distribuição binomial** pela **distribuição de Poisson** com **μ = np**.

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Comparação entre as distribuições Binomial e de Poisson

Exemplo: Determinar a probabilidade de haver 4 peças defeituosas numa amostra de 300 peças, extraída de um grande lote onde há 2% de defeituosas.

Comparação entre as distribuições Binomial e de Poisson

Exemplo: Determinar a probabilidade de haver 4 peças defeituosas numa amostra de 300 peças, extraída de um grande lote onde há 2% de defeituosas. **Solução:** Temos uma distribuição binomial com n=300 e p=0,02. Assim,

$$P(X = 4) = \frac{300!}{4!\,(300-4)!}(0{,}02)^4(0{,}98)^{296}$$

Comparação entre as distribuições Binomial e de Poisson

Exemplo: Determinar a probabilidade de haver 4 peças defeituosas numa amostra de 300 peças, extraída de um grande lote onde há 2% de defeituosas. **Solução:** Temos uma distribuição binomial com n=300 e p=0,02. Assim,

$$P(X = 4) = \frac{300!}{4!\,(300-4)!}(0{,}02)^4(0{,}98)^{296}$$ Dureza fazer esse cálculo!!!

Comparação entre as distribuições Binomial e de Poisson

Exemplo: Determinar a probabilidade de haver 4 peças defeituosas numa amostra de 300 peças, extraída de um grande lote onde há 2% de defeituosas. **Solução:** Temos uma distribuição binomial com n=300 e p=0,02. Assim,

$$P(X = 4) = \frac{300!}{4!\,(300-4)!}(0{,}02)^4(0{,}98)^{296}$$ Dureza fazer esse cálculo!!!

mas temos uma situação em que n é grande e p é pequeno, portanto podemos aproximar a distribuição binomial por uma distribuição de Poisson com $\mu = np = 300 \text{ x } 0{,}02 = 6.$

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Comparação entre as distribuições Binomial e de Poisson

Exemplo: Determinar a probabilidade de haver 4 peças defeituosas numa amostra de 300 peças, extraída de um grande lote onde há 2% de defeituosas. **Solução:** Temos uma distribuição binomial com n=300 e p=0,02. Assim,

$$P(X = 4) = \frac{300!}{4!\,(300-4)!}(0{,}02)^4(0{,}98)^{296}$$ Dureza fazer esse cálculo!!!

mas temos uma situação em que n é grande e p é pequeno, portanto podemos aproximar a distribuição binomial por uma distribuição de Poisson com $\mu = np = 300 \text{ x } 0{,}02 = 6.$

$$P(X = 4) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} = \frac{6^4 e^{-6}}{4!} = 0{,}135.$$ Mais fácil fazer esse cálculo né?

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Distribuição geométrica

Considere um experimento aleatório que esteja bem relacionado àquele usado na definição de uma distribuição binomial. Novamente, suponha uma série de tentativas de Bernoulli (tentativas independentes, com probabilidade constante p de um sucesso em cada tentativa).

DISTRIBUIÇÃO GEOMÉTRICA

Considere um experimento aleatório que esteja bem relacionado àquele usado na definição de uma distribuição binomial. Novamente, suponha uma série de tentativas de Bernoulli (tentativas independentes, com probabilidade constante p de um sucesso em cada tentativa).

Entretanto, em vez de serem em número fixo, as tentativas são realizada até que um sucesso seja obtido. Seja a variável aleatória o numero de tentativas até que o primeiro sucesso seja atingido.

Distribuição geométrica

Definição: Dizemos que uma variável aleatória X tem **distribuição geométrica** de parâmetro p (Notação: $X \sim G(p)$), se sua função de probabilidade tem forma

$$\boxed{P(X = k) = p(1 - k)^k}, \qquad 0 \le p \le 1 \quad e \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Distribuição geométrica

Definição: Dizemos que uma variável aleatória X tem **distribuição geométrica** de parâmetro p (Notação: $X \sim G(p)$), se sua função de probabilidade tem forma

$$\boxed{P(X = k) = p(1 - k)^k}, \qquad 0 \leq p \leq 1 \quad e \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Interpretando p como a probabilidade de sucesso, a distribuição Geométrica pode ser pensada como o número de ensaios de Bernoulli que procedem do primeiro sucesso.

Distribuição geométrica

Definição: Dizemos que uma variável aleatória X tem **distribuição geométrica** de parâmetro p (Notação: $X \sim G(p)$), se sua função de probabilidade tem forma

$$\boxed{P(X = k) = p(1 - k)^k}, \qquad 0 \leq p \leq 1 \quad \text{e} \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Interpretando p como a probabilidade de sucesso, a distribuição Geométrica pode ser pensada como o número de ensaios de Bernoulli que procedem do primeiro sucesso.

Média e Variância

Se X for uma variável aleatória geométrica com parâmetro p,

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Distribuição geométrica

Definição: Dizemos que uma variável aleatória X tem **distribuição geométrica** de parâmetro p (Notação: $X \sim G(p)$), se sua função de probabilidade tem forma

$$\boxed{P(X = k) = p(1 - k)^k}, \qquad 0 \leq p \leq 1 \quad e \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Interpretando p como a probabilidade de sucesso, a distribuição Geométrica pode ser pensada como o número de ensaios de Bernoulli que procedem do primeiro sucesso.

Média e Variância

Se X for uma variável aleatória geométrica com parâmetro p,

$$\mu = E(X) = \frac{1}{p} \quad e \quad \sigma^2 = Var(X) = \frac{1 - p}{p^2}$$

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

DISTRIBUIÇÃO GEOMÉTRICA

Exemplo: Uma linha de produção está sendo analisada para efeito de controle da qualidade das peças produzidas. Tendo em vista o alto padrão requerido, a produção é interrompida para regulagem toda vez que uma peça defeituosa é observada. Se 0,01 é a probabilidade da peça ser defeituosa, estude o comportamento da variável **Q**, ***quantidade de peças boas produzidas antes da 1ª peça defeituosa***.

UNIFESP

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

1933

Distribuição geométrica

Continuação do Exemplo:

Solução:

Vamos admitir que cada peça tem a mesma probabilidade de ser defeituosa, independentemente da qualidade das demais. Sendo a ocorrência de peça defeituosa um sucesso, podemos aplicar o modelo Geométrico. Observe que o número de peças boas produzidas é exatamente o quanto se "espera" para a ocorrência do primeiro sucesso.

Distribuição geométrica

Continuação do Exemplo:

Solução:

Vamos admitir que cada peça tem a mesma probabilidade de ser defeituosa, independentemente da qualidade das demais. Sendo a ocorrência de peça defeituosa um sucesso, podemos aplicar o modelo Geométrico. Observe que o número de peças boas produzidas é exatamente o quanto se "espera" para a ocorrência do primeiro sucesso. Temos,

$$P(Q = k) = 0{,}01 \times 0{,}99^{k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

cuja representação gráfica está na Figura 2.

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Distribuição geométrica

Continuação do Exemplo:

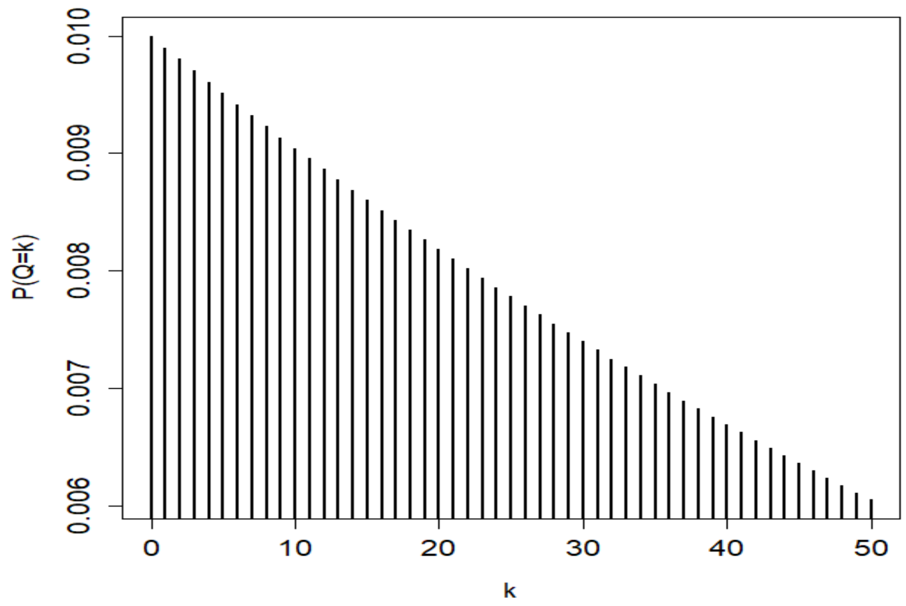


Figura 2: Modelo geométrico (p=0,01).

Como podemos verificar através da Figura 2, a probabilidade vai ficando muito pequena para valores grande de k. Em tese, a produção nunca seria interrompida se não houvesse o aparecimento de uma peça defeituosa.

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

Distribuição Hipergeométrica

- Relacionada com o número de sucessos em uma **amostra** contendo **n observações** – **população finita de tamanho N**;
- Amostra retirada sem reposição;
- Os resultados das observações são dependentes;
- A probabilidade de sucesso varia de um experimento para outro;
- Probabilidade da variável aleatória X = **x sucessos em uma amostra** retirada de uma população com **“r” sucessos**.

UNIFESP
Universidade Federal de São Paulo
1933

DISTRIBUIÇÃO HIPERGEOMÉTRICA

Uma variável aleatória X segue uma **distribuição Hipergeométrica**, dada pela função de probabilidade:

$$\boxed{P(X = x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}}$$

DISTRIBUIÇÃO HIPERGEOMÉTRICA

Uma variável aleatória X segue uma **distribuição Hipergeométrica**, dada pela função de probabilidade:

$$\boxed{P(X = x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}}$$

em que

N = tamanho da população;

r = número de sucessos na população;

N – r = número de insucessos na população;

n = tamanho da amostra;

x = número de sucessos na amostra;

n – x = número de insucessos na amostra.

DISTRIBUIÇÃO HIPERGEOMÉTRICA

A **média** (valor esperado de X) da distribuição hipergeométrica é:

μ=np, em que, p=r/N é a proporção de sucessos na população e o **desvio padrão** é

$$\sigma=\sqrt{\frac{nr(N-r)}{N^2}}\cdot\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}=\sqrt{np(1-p)}.\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

em que, $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ é chamado "**fator de correção de população finita**", que resulta à amostragem sem reposição de uma população finita. Quando N é grande comparado com n, a distribuição hipergeométrica de parâmetros n, N, p se aproximada da distribuição binomial com parâmetros n, p.

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Distribuição Hipergeométrica

Exemplo: Um departamento possui 10 computadores, dos quais 3 são verificados. 4 desses computadores possuem software ilegal. Qual a probabilidade de que 2 dos 3 computadores verificados tenham o software ilegal?

Distribuição Hipergeométrica

Exemplo: Um departamento possui 10 computadores, dos quais 3 são verificados. 4 desses computadores possuem software ilegal. Qual a probabilidade de que 2 dos 3 computadores verificados tenham o software ilegal?

$N = 10 \qquad n = 3 \qquad r = 4 \qquad x = 2$

Distribuição Hipergeométrica

Exemplo: Um departamento possui 10 computadores, dos quais 3 são verificados. 4 desses computadores possuem software ilegal. Qual a probabilidade de que 2 dos 3 computadores verificados tenham o software ilegal?

$N = 10 \qquad n = 3 \qquad r = 4 \qquad x = 2$

$$\boxed{P(X = x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}}$$

Distribuição Hipergeométrica

Exemplo: Um departamento possui 10 computadores, dos quais 3 são verificados. 4 desses computadores possuem software ilegal. Qual a probabilidade de que 2 dos 3 computadores verificados tenham o software ilegal?

$N = 10 \qquad n = 3 \qquad r = 4 \qquad x = 2$

$$\boxed{P(X = 2) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{6 \text{ x } 6}{120} = 0{,}3}$$

DISTRIBUIÇÃO HIPERGEOMÉTRICA

Exemplo: Um departamento possui 10 computadores, dos quais 3 são verificados. 4 desses computadores possuem software ilegal. Qual a probabilidade de que 2 dos 3 computadores verificados tenham o software ilegal?

N = 10 n = 3 r = 4 x = 2

$$\boxed{P(X=2) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{6 \text{ x } 6}{120} = 0{,}3}$$

A probabilidade de que 2 dos 3 computadores checados tenham o software ilegal é 0,30 ou 30%.

Distribuição Hipergeométrica

Exercício: Pequenos motores elétricos são expedidos em lotes de 30 unidades. Antes que uma remessa seja aprovada, um inspetor escolhe 3 desses motores e os inspeciona. Se nenhum dos motores inspecionados for defeituoso, o lote é aprovado. Se um ou mais forem verificados defeituosos, todos os motores da remessa são inspecionados. Suponha que existam, de fato, 2 motores defeituosos no lote. Qual é a probabilidade de que a inspeção de todos os motores desse lote seja necessária?

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

AULA DE HOJE

- Variáveis aleatórias discretas (principais modelos).

PRÓXIMAS AULAS

- Propriedades (Esperança e Variância) de variáveis aleatórias contínuas;
- Variáveis aleatórias contínuas (Principais modelos).

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

Referências

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros**. 6 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018. 628p.

MORETTIN, P. A.; BUSSAB, W. O. **Estatística básica**. 9 ed. São Paulo: Saraiva, 2017. 554p.

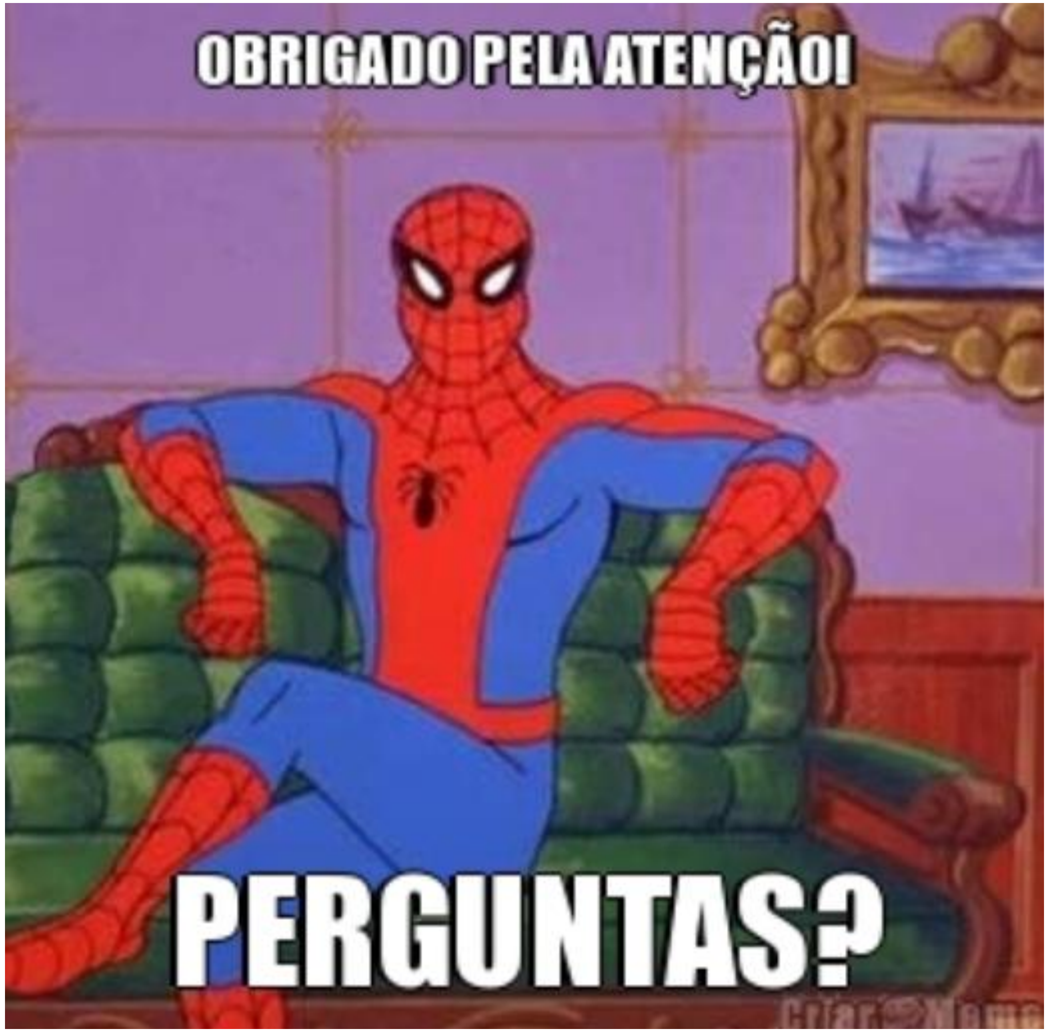
MAGALHÃES, M. N. **Probabilidade e variáveis aleatórias**. 3 ed. Edusp, 2011. 411p.

UNIFESP

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

1933

CLASS FINISHED



UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933