Cálculo em Várias Variáveis

Integrais duplas sobre regiões gerais

ICT-Unifesp

1. Integrais duplas sobre regiões mais gerais

2. Exercícios

Mais detalhes na Seção 15.2 do livro do Stewart. Recurso disponível online pela Biblioteca do ICT.

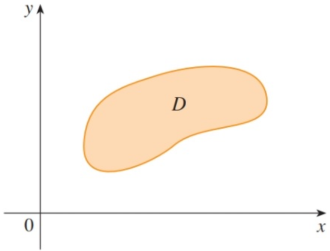
Integrais duplas sobre regiões mais gerais

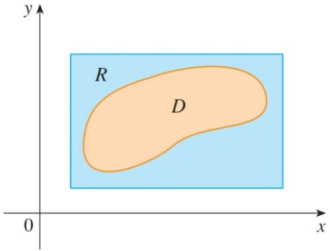
OBJETIVO: Calcular a integral dupla

$$\iint_D f(x, y)\, dA,$$

em que $D \subset \mathbb{R}^2$ é uma região mais geral.

Suponhamos que D seja uma região limitada





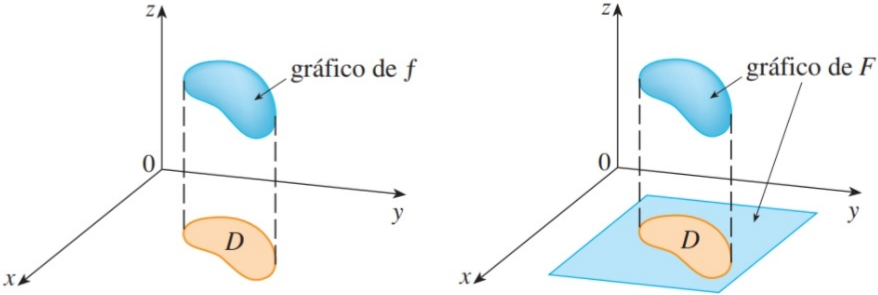
Definimos, então, uma nova função F, cujo domínio é a região retangular $\mathcal{R}$, da seguinte forma:

$$F(x,\, y) = \begin{cases} f(x,\, y)\,, & \text{se } (x,\, y) \in D, \\ 0\,, & \text{se } (x,\, y) \in \mathcal{R} \text{ e } (x,\, y) \notin D. \end{cases}$$

Se F é uma função integrável no retângulo $\mathcal{R}$, então definimos a integral dupla de f na região D como

$$\iint_D f(x,\, y)\; dA = \iint_{\mathcal{R}} F(x,\, y)\; dA\,.$$

Integrais duplas sobre regiões mais gerais



Integrais duplas sobre regiões mais gerais

Exemplo

Calcule a integral $\displaystyle\iint_B xy\ dxdy$, *sobre a região* $B = \{(x, y) | 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x^2\}$.

Integrais duplas sobre regiões mais gerais

Se $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in D$, a integral dupla $\displaystyle\iint_D f(x, y)\, dA$ representa o volume do sólido que está acima da região D e que está abaixo da superfície $z = f(x, y)$.

Integrais duplas sobre regiões mais gerais

Se $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in D$, a integral dupla $\iint_D f(x, y)\, dA$ representa o volume do sólido que está acima da região D e que está abaixo da superfície $z = f(x, y)$.

Mesmo que a função F seja descontínua nos pontos da fronteira de D, ainda assim é possível mostrar que $\iint_{\mathcal{R}} F(x, y)\, dA$ existe, e que, portanto, $\iint_D f(x, y)\, dA$ também existe.

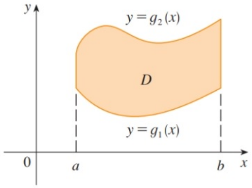
Integrais duplas sobre regiões mais gerais

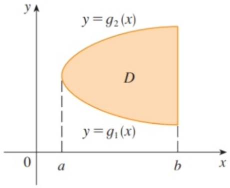
Definição

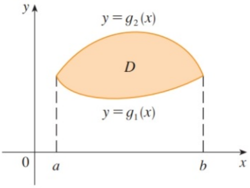
Uma região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ é do **tipo I** *se ela é delimitada pelos gráficos de duas funções contínuas de x, ou seja,*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \ \text{ e } \ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

em que g_1 e g_2 são contínuas em $[a, b]$.







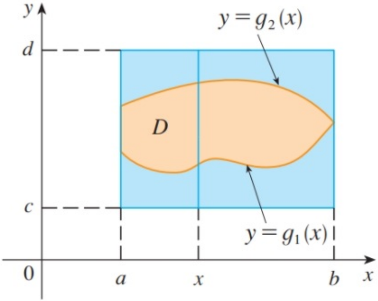
Integrais duplas sobre regiões mais gerais

Para calcular $\iint_D f(x,\, y)\; dA$ quando a região D é do tipo I, escolhemos um retângulo

$$\mathcal{R} \;=\; \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b\,,\;\; c \leq y \leq d\right\}.$$

que contenha D e consideramos a função $F(x, y)$, como definida anteriormente.

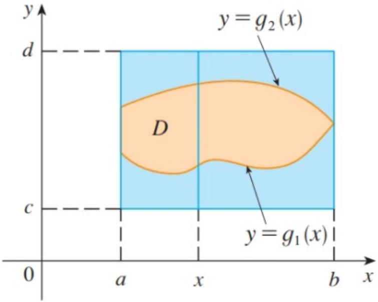
Integrais duplas sobre regiões mais gerais



Assim, pelo Teorema de Fubini, temos

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{\mathcal{R}} F(x,y)\,dA = \int_a^b \left[\int_c^d F(x,y)\,dy\right] dx$$

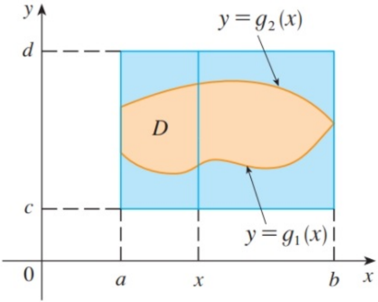
Integrais duplas sobre regiões mais gerais



Pela maneira como F foi definida, temos que

$$F(x, y) = 0 \text{ se } y < g_1(x) \text{ ou } y > g_2(x),$$

pois, neste caso, $(x, y) \in \mathcal{R}$, mas $(x, y) \notin D$.

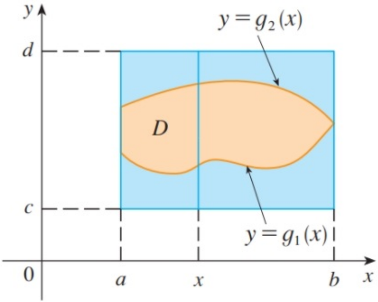


Logo, para cada $x \in [a, b]$ fixado, temos

$$\int_c^d F(x, y)\, dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x, y)\, dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy,$$

pois $F(x,\ y) = f(x,\ y)$ quando $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$.

Integrais duplas sobre regiões mais gerais



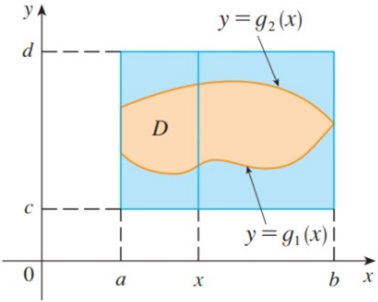
Assim, se f é contínua na região $D \subset \mathbb{R}^2$ do tipo I,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ e } g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

então

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\right] dx.$$

Integrais duplas sobre regiões mais gerais



Neste caso, a integral dupla também pode ser expressa como uma integral iterada, na qual os limites de integração $g_1(x)$ e $g_2(x)$ para a variável y são tratados como constantes em relação a y.

Integrais duplas sobre regiões mais gerais

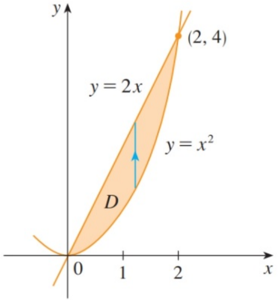
Exemplo

Calcule o volume do sólido que está abaixo do paraboloide $z = x^2 + y^2$ *e acima da região* $D \subset \mathbb{R}^2$ *limitada pela reta* $y = 2x$ *e pela parábola* $y = x^2$.

Exemplo

Calcule o volume do sólido que está abaixo do paraboloide $z = x^2 + y^2$ *e acima da região* $D \subset \mathbb{R}^2$ *limitada pela reta* $y = 2x$ *e pela parábola* $y = x^2$.

Temos que $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\}$:

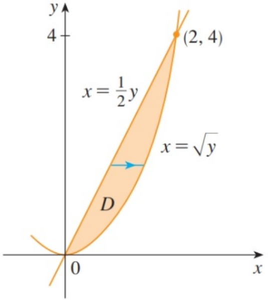


Temos que D é do tipo I e o volume procurado é

$$V = \iint_D (x^2+y^2)\, dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2+y^2) dydx$$
$$= \int_0^2 \left[\frac{y^3}{3} + x^2 y\right]_{x^2}^{2x} dx = \int_0^2 \left(-\frac{x^6}{3} - x^4 + \frac{14x^3}{3}\right) dx$$
$$= \left[-\frac{x^7}{21} - \frac{x^5}{5} + \frac{7x^4}{6}\right]_0^2 = \frac{216}{35}.$$

Integrais duplas sobre regiões mais gerais

A mesma região D acima poderia ser descrita da seguinte maneira:



$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq y \leq 4, \frac{y}{2} \leq x \leq \sqrt{y}\}.$$

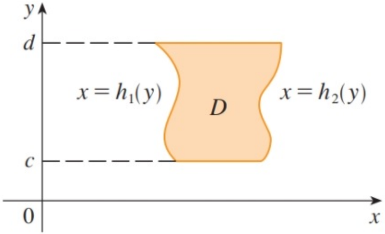
Integrais duplas sobre regiões mais gerais

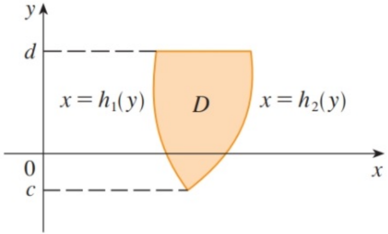
Definição

Uma região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ é do **tipo II** *se ela é delimitada pelos gráficos de duas funções contínuas de y, ou seja,*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d \;\text{ e }\; h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\},$$

em que h_1 e h_2 são contínuas em $[c, d]$.





Assim, se f é contínua em uma região $D \subset \mathbb{R}^2$ do tipo II, tal que

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, c \leq y \leq d \text{ e } h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\right\},$$

então

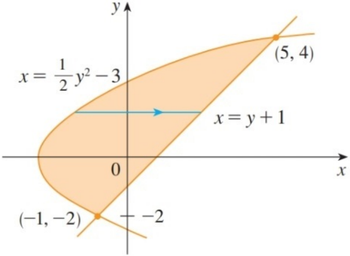
$$\iint_D f(x,\, y)\; dA \;=\; \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\right] dy.$$

Neste caso, a integral dupla também pode ser expressa como uma integral iterada, na qual os limites de integração $h_1(y)$ e $h_2(y)$ para a variável x são tratados como constantes em relação a x.

Integrais duplas sobre regiões mais gerais

Exemplo

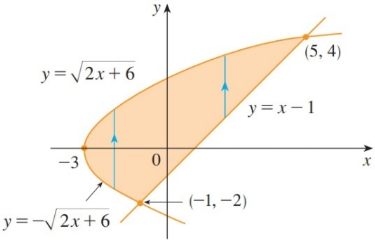
Calcule $\iint_D xy\, dA$, *onde* D *é a região limitada pela reta* $y = x - 1$ *e pela parábola* $y^2 = 2x + 6$.



região do tipo II

Integrais duplas sobre regiões mais gerais

Se tivéssemos expressado D como uma região do tipo I, teríamos



região do tipo I

$$\iint_D xy\,dA = \int_{-3}^{-1}\int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} xy\,dydx + \int_{-1}^{5}\int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} xydydx,$$

que é uma integral muito mais trabalhosa para se resolver.

Propriedades das integrais duplas

Suponha que f e g sejam integráveis em um conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ e que $\alpha \in \mathbb{R}$ seja uma constante. Então

$$\iint_D \alpha\, f(x, y)\, dA = \alpha \iint_D f(x, y)\, dA,$$

$$\iint_D [f(x, y) + g(x, y)]\, dA = \iint_D f(x, y)\, dA + \iint_D g(x, y)\, dA,$$

Se $f(x, y) \geq g(x, y)$ para todo $x \in D$, então

$$\iint_D f(x, y)\, dA \geq \iint_D g(x, y)\, dA.$$

Propriedades das integrais duplas

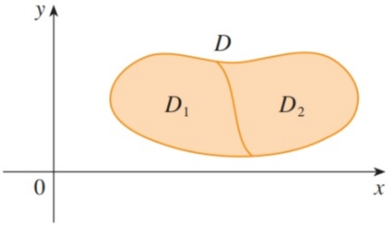
Se $f(x,\ y) \geq 0$ para todo $x \in D$, então

$$\iint_D f(x, y)\, dA \geq 0.$$

Propriedades das integrais duplas

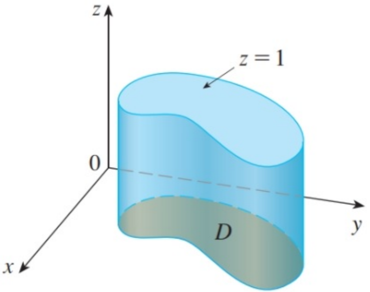
Se a região D é composta de duas subregiões D_1 e D_2 que não têm pontos em comum, exceto possivelmente em suas fronteiras, então

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA.$$



Se integrarmos a função constante $f(x, y) = 1$ sobre a região D, obtemos a área de D (denotada por $A(D)$):

$$A(D) = \iint_D 1\, dA = \iint_D dA.$$



Exercícios

Seção 15.2 do Stewart: 1–40, 43–46, 47–50, 55–68.