Funções Limitadas

Uma função $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *é limitada se existe um número real positivo* μ *que satisfaz*

$$|f(x_1, x_2, ..., x_n)| \leq \mu$$

para qualquer $(x_1, x_2, ..., x_n) \in D_f$.

A condição anterior é equivalente a

$$-\mu \leq f(x_1, x_2, ..., x_n) \leq \mu \quad (\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in D_f)$$

Assim, uma função limitada de duas variáveis reais a valores reais tem seu gráfico compreendido entre dois planos paralelos ao plano xy*, a saber,* $z = \mu$ *e* $z = -\mu$.

Observemos que toda função constante é limitada.

Exemplo 4 *Mostre que cada uma das seguintes funções é limitada*

1. $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$.

   Resolução:

   $$x^2 \leq x^2 + y^2 \Rightarrow \frac{x^2}{x^+ y^2} \leq 1 \Rightarrow \left|\frac{x^2}{x^+ y^2}\right| \leq 1$$

   Portanto, f *é limitada. Analogamente, a função* $g(x, y) = \dfrac{y^2}{x^2 + y^2}$ *é limitada.*

2. $f(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

   Resolução:

   $$\left|\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right| = \frac{|x|}{|\sqrt{x^2 + y^2}|} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2}} \leq \sqrt{1} = 1$$

   Portanto, f *é limitada.*

3. $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + 1}$.

   Resolução:

$$\left|\frac{x}{x^2+y^2+1}\right| = \frac{|x|}{x^2+y^2+1} \leq \frac{|x|}{x^2+y^2} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{(x+1)^2}} = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}\frac{1}{x^2+1}} \leq \sqrt{1.1} = 1$$

Portanto, f é limitada. Analogamente, a função $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2+1}$ *é limitada.*

4. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$;

Resolução:

$$\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| = \frac{|xy|}{x^2+y^2} = \frac{\sqrt{(xy)^2}}{\sqrt{(x^2+y^2)^2}} = \sqrt{\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}} = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{y^2}{x^2+y^2}} \leq \sqrt{1.1} = 1$$

Portanto, f é limitada. Na verdade, podemos mostrar que

$$\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{1}{2}$$

5. $f(x,y,z) = \dfrac{x(y+z)}{x^2+y^2+z^2}$.

Resolução:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x(y+z)}{x^2+y^2+z^2}\right| &= \left|\frac{xy+xz}{x^2+y^2+z^2}\right| = \left|\frac{xy}{x^2+y^2+z^2} + \frac{xz}{x^2+y^2+z^2}\right| \\
&\leq \left|\frac{xy}{x^2+y^2+z^2}\right| + \left|\frac{xz}{x^2+y^2+z^2}\right| = \frac{|xy|}{x^2+y^2+z^2} + \frac{|xz|}{x^2+y^2+z^2} \\
&\leq \frac{|xy|}{x^2+y^2} + \frac{|xz|}{x^2+z^2} \leq 1+1 = 2
\end{aligned}$$

Portanto, f é limitada.

Exemplo 5 *Mostre que a função*

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

não é limitada.

Resolução:

Se considerarmos apenas pontos do $\mathbb{R}^2$ da forma $(x,0)$ com $x \neq 0$, temos

$$f(x,0) = \frac{x}{x^2+0^2} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

Tomando x próximo de zero, $\frac{1}{x}$ assume valores arbitrariamente grandes. Logo, $f(x, y)$ não é limitada.

Proposição 1 *Sejam, $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$. Se f e g são limitadas, então $kf, f+g, f-g, fg$ são limitadas.*

Demosntração:

Se f e g são limitadas, então existem números positivos μ_1 e μ_2 tais que

$$|f(x_1, ..., x_n)| \leq \mu_1 \quad e \quad |g(x_1, ..., x_n)| \leq \mu_2,$$

para quaisquer $(x_1, ..., x_n) \in A$. Logo,

- $|kf(x_1, ..., x_n)| = |k||f(x_1, ..., x_n)| \leq |k|\mu_1$
- $|f(x_1, ..., x_n) + g(x_1, ..., x_n)| \leq |f(x_1, ..., x_n)| + |g(x_1, ..., x_n)| \leq \mu_1 + \mu_2$
- $|f(x_1, ..., x_n) - g(x_1, ..., x_n)| \leq |f(x_1, ..., x_n)| + |g(x_1, ..., x_n)| \leq \mu_1 + \mu_2$
- $|f(x_1, ..., x_n)g(x_1, ..., x_n)| = |f(x_1, ..., x_n)||g(x_1, ..., x_n)| \leq \mu_1\mu_2$

Portanto, $kf, f+g, f-g, fg$ são limitadas.