Cálculo em Várias Variáveis

Derivada Direcional

ICT-Unifesp

1. Derivada direcional

2. Exercícios

Mais detalhes na Seção 14.5 do livro do Stewart. Recurso disponível online pela Biblioteca do ICT.

Derivada direcional

Derivada direcional

Relembrando...

Derivadas parciais de $f(x, y)$ num ponto $(x_0,\ y_0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\ y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h,\ y_0) - f(x_0,\ y_0)}{h},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\ y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0,\ y_0 + k) - f(x_0,\ y_0)}{k},$$

desde que os limites **existam**.

Relembrando...

Derivadas parciais de $f(x, y)$ num ponto $(x_0,\ y_0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\ y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,\ y_0) - f(x_0,\ y_0)}{h},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\ y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0,\ y_0+k) - f(x_0,\ y_0)}{k},$$

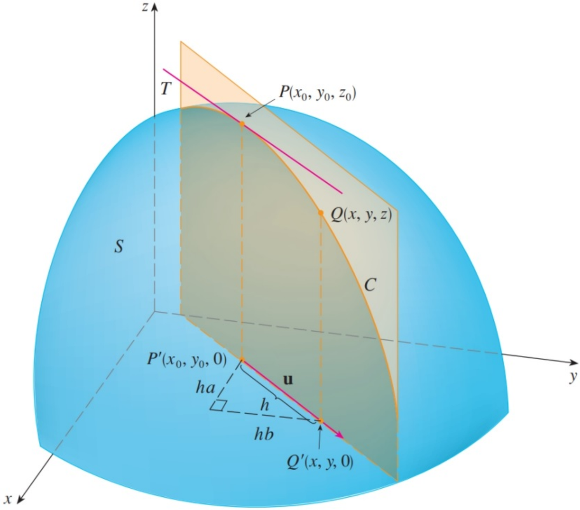
desde que os limites **existam**.

Taxas de variação de f no ponto (x_0, y_0) na direção positiva dos eixos x e y, ou seja, nas direções e sentidos dos versores $\vec{i} = (1, 0)$ e $\vec{j} = (0, 1)$, respectivamente.

Derivada direcional

Como determinar a taxa de variação de f em um ponto (x_0, y_0) numa direção qualquer?

Derivada direcional



Derivada direcional

Definição

A derivada direcional de f em $(x_0,\ y_0)$ na direção do vetor unitário $\vec{u} = (a,\ b)$ é

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0,\ y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + ah,\ y_0 + bh) - f(x_0,\ y_0)}{h},$$

desde que esse limite **exista**. *Notação:*

$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0,\ y_0).$

Derivada direcional

Definição

*A **derivada direcional** de f em (x_0, y_0) na direção do **vetor unitário** $\vec{u} = (a, b)$ é*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ah, y_0 + bh) - f(x_0, y_0)}{h},$$

desde que esse limite **existe**. *Notação:*

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0).$$

Exemplo

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{i}}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Derivada direcional

Teorema

Se f é uma função diferenciável, então f tem derivada direcional na direção de qualquer vetor $\vec{u} = (a,\, b)$, e

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x,\, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,\, y)\, a + \frac{\partial f}{\partial y}(x,\, y)\, b\,.$$

Derivada direcional

Teorema

Se f é uma função diferenciável*, então f tem derivada direcional na direção de qualquer vetor $\vec{u} = (a, b)$, e*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, a + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, b\,.$$

Observação

Se o vetor unitário $\vec{u}$ faz um ângulo θ com a direção positiva do eixo x, podemos escrever $\vec{u} = (cos(\theta), sen(\theta))$, e obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, cos(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, sen(\theta)\,.$$

Derivada direcional

Exemplo

Seja $f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$. *Determine a derivada direcional de* f *no ponto* $(1, 2)$ *e na direção do vetor unitário* $\vec{u}$ *determinado pelo ângulo* $\theta = \pi/6$.

Pela fórmula do slide anterior, temos

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}f(x, y) &= f_x(x, y)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + f_y(x, y)\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= (3x^2 - 3y)\frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y)\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, $D_{\vec{u}}f(1, 2) = \dfrac{13 - 3\sqrt{3}}{2}$.

Derivada direcional

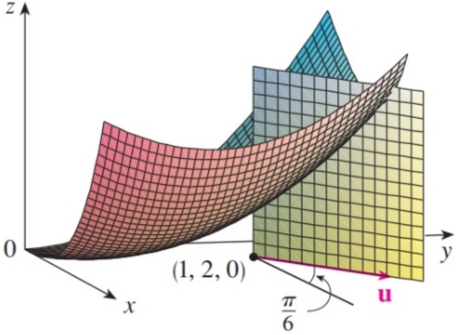


Figura: Stewart, J.; *Cálculo* - Volume 2

Será que a existência das derivadas direcionais de f em qualquer direção num determinado ponto (x_0, y_0) implica que f é contínua em (x_0, y_0)?

Derivada direcional

Exemplo

Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4} & se \ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0\,, & se \ (x, y) = (0, 0)\,. \end{cases}$$

Mostre que f tem derivadas direcionais no ponto $(0, 0)$ *na direção de qualquer vetor unitário* $\vec{u} = (a, b)$, *mas f não é contínua em* $(0, 0)$.

Derivada direcional

Vamos calcular a derivada direcional na direção do vetor $u = (a, b)$. Temos,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+ha, 0+hb) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{ab^2h^3}{h^3(a^2+b^4h^2)} = \frac{b^2}{a},\end{aligned}$$

para $a \neq 0$. Para $a = 0$, isto é, para $u = (0, b)$, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0, hb) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{0}{b^4h^4} = 0.\end{aligned}$$

Derivada direcional

Assim, a derivada direcional existe no ponto $(0, 0)$, em qualquer direção $u = (a, b)$.

Por outro lado, f não é contínua m $(0, 0)$, pois ao longo da curva $x = y^2$, temos:

$$\lim_{y \to 0} f(y^2, y) = \lim_{y \to 0} \frac{y^4}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0).$$

Exercícios

Seção 14.6 do Stewart: 4–7, 13–19, 21–25.