Cálculo em Várias Variáveis

Vetor gradiente

ICT-Unifesp

Mais detalhes na Seção 14.6 do livro do Stewart. Recurso disponível online pela Biblioteca do ICT.

Vetor gradiente

Vetor gradiente

Definição

Se f é uma função de duas variáveis x e y, o vetor gradiente de f é o campo vetorial ∇f, definido por

$$\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,\vec{j}.$$

Vetor gradiente

Definição

Se f é uma função de duas variáveis x e y, o vetor gradiente de f é o campo vetorial ∇f, definido por

$$\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,\vec{j}.$$

Assim, se f é diferenciável, podemos escrever

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \nabla f(x, y) \cdot u\,,$$

ou seja, a derivada direcional de f é escrita como o produto escalar entre o vetor gradiente de f e o vetor unitário u.

Exemplo

Seja $f(x,\, y) \;=\; sen(x) \,+\, e^{xy}$ *. Encontre* $\nabla f(x,\, y)$ *e* $\nabla f(0,\, 1)$ *.*

Temos que

$$\nabla f(x,\, y) = (f_x(x,\, y),\, f_y(x,\, y)) = (\cos(x) + ye^{xy}, xe^{xy})$$

e

$$\nabla f(0,1) = (2,0).$$

Vetor gradiente

Exemplo

Determine a derivada direcional da função $f(x, y) = x^2y^3 - 4y$ no ponto $(2, -1)$ e na direção do vetor $v = 2\vec{i} + 5\vec{j}$.

O vetor gradiente no ponto $(2, -1)$ é dado por

$$\nabla f(x, y) = (2xy^3, 3x^2y^2 - 4) \Longrightarrow \nabla f(2, -1) = (-4, 8).$$

Como $\|v\| = \sqrt{29}$, o vetor unitário na direção de v é

$$u = \frac{v}{\|v\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}\right).$$

Vetor gradiente

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u}(2,-1) &= \nabla f(2,-1)\cdot u\\ &= (-4,8)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{29}},\frac{5}{\sqrt{29}}\right)\\ &= \frac{32}{\sqrt{29}}.\end{aligned}$$

Vetor gradiente

Dado um ponto (x_0, y_0) no domínio de uma função diferenciável f, será que existe uma direção na qual a taxa de variação de f é a maior/menor possível?

Observe que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,\, y_0) &= \nabla f(x_0,\, y_0) \cdot u \\ &= \|\nabla f(x_0,\, y_0)\|\, \|u\|\, \cos(\theta) \\ &= \|\nabla f(x_0,\, y_0)\|\, \cos(\theta),\end{aligned}$$

onde θ é o ângulo entre $\nabla f(x_0,\, y_0)$ e o vetor unitário u.

Vetor gradiente

O valor máximo de $\cos(\theta)$ é igual a 1, e ocorre quando $\theta = 0$, ou seja, quando u tem a mesma direção e o mesmo sentido de $\nabla f(x_0, y_0)$.

Vetor gradiente

O valor máximo de $\cos(\theta)$ é igual a 1, e ocorre quando $\theta = 0$, ou seja, quando u tem a mesma direção e o mesmo sentido de $\nabla f(x_0, y_0)$.

Logo, o valor máximo de $\dfrac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0)$ é igual a $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$ e ocorre quando $\theta = 0$, ou seja, quando u tem a mesma direção e o mesmo sentido de $\nabla f(x_0, y_0)$.

Vetor gradiente

O valor mínimo de $\cos(\theta)$ é igual a -1, e ocorre quando $\theta = \pi$, ou seja, quando u tem a mesma direção e o sentido contrário ao de $\nabla f(x_0, y_0)$.

Vetor gradiente

O valor mínimo de $\cos(\theta)$ é igual a -1, e ocorre quando $\theta = \pi$, ou seja, quando u tem a mesma direção e o sentido contrário ao de $\nabla f(x_0, y_0)$.

Portanto, o valor mínimo de $\dfrac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0)$ é igual a $-\|\nabla f(x_0, y_0)\|$ e ocorre quando $\theta = \pi$, ou seja, quando u tem a mesma direção e o sentido contrário ao de $\nabla f(x_0, y_0)$.

O valor mínimo de $\cos(\theta)$ é igual a -1, e ocorre quando $\theta = \pi$, ou seja, quando u tem a mesma direção e o sentido contrário ao de $\nabla f(x_0, y_0)$.

Portanto, o valor mínimo de $\dfrac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0)$ é igual a $-\|\nabla f(x_0, y_0)\|$ e ocorre quando $\theta = \pi$, ou seja, quando u tem a mesma direção e o sentido contrário ao de $\nabla f(x_0, y_0)$.

Se $\theta = \pi/2$, temos que $\dfrac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = 0$. Neste caso, $\nabla f(x_0, y_0)$ é ortogonal a u.

Exemplo

Seja $f(x, y) = xe^y$.

(a) Determine a taxa de variação de f *no ponto* $P = (2, 0)$ *na direção de* P *a* $Q = (1/2, 2)$.

(b) Em qual direção f *tem a maior taxa de variação a partir do ponto* P? *Qual a taxa máxima de variação de* f *a partir desse ponto?*

Vetor gradiente

Exemplo

Seja $f(x, y) = xe^y$.

(a) Determine a taxa de variação de f *no ponto* $P = (2, 0)$ *na direção de* P *a* $Q = (1/2, 2)$.

(b) Em qual direção f *tem a maior taxa de variação a partir do ponto* P*? Qual a taxa máxima de variação de* f *a partir desse ponto?*

Temos que

$$\nabla f(x, y) = (e^y, xe^y) \Longrightarrow \nabla f(2, 0) = (1, 2).$$

(a) O vetor unitário na direção de $\vec{PQ} = (-3/2, 2)$ é $u = (-3/5, 4/5)$.

(a) O vetor unitário na direção de $\vec{PQ} = (-3/2, 2)$ é $u = (-3/5, 4/5)$.

Logo a taxa de variação de f no ponto $P = (2,\ 0)$ na direção de P a Q é $D_u f(2,0) = \nabla f(2,0) \cdot u = 1$.

(a) O vetor unitário na direção de $\vec{PQ} = (-3/2, 2)$ é $u = (-3/5, 4/5)$.
Logo a taxa de variação de f no ponto $P = (2, 0)$ na direção de P a Q é $D_u f(2, 0) = \nabla f(2, 0) \cdot u = 1$.

(b) Como f aumenta mais rapidamente na direção de $\nabla f(2, 0) = (1, 2)$, então sua taxa de variação máxima é $\|\nabla f(2, 0)\| = \|(1, 2)\| = \sqrt{5}$.

Vetor gradiente

Vejamos como o vetor gradiente nos ajuda a encontrar o plano tangente às superfícies de nível de uma função de três variáveis $f(x, y, z)$.

Vetor gradiente

Sejam

S: superfície de equação $F(x, y, z) = k$,

$P = (x_0, y_0, z_0) \in S$,

C: curva qualquer contida em S e que passa por P,

$$C \text{ é descrita por } r(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

t_0: valor do parâmetro t correspondente ao ponto P,

$$r(t_0) = (x_0, y_0, z_0) = P,$$

$$C \subset S \implies F(x(t), y(t), z(t)) = k.$$

Supondo que x, y e z sejam funções diferenciáveis de t e que F também seja diferenciável, temos, pela Regra da Cadeia,

$$\frac{d}{dt}F = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0.$$

Vetor gradiente

Supondo que x, y e z sejam funções diferenciáveis de t e que F também seja diferenciável, temos, pela Regra da Cadeia,

$$\frac{d}{dt}F = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0.$$

Como $\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$ e $r'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$, a equação acima pode ser escrita como

$$\nabla F \cdot r'(t) = 0.$$

Em particular, no ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$, temos

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot r'(t_0) = 0.$$

Em particular, no ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$, temos

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot r'(t_0) = 0.$$

Logo, $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ é perpendicular ao vetor tangente $r'(t_0)$ a qualquer curva C em S que passe por P .

Vetor gradiente

Se $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$, definimos o plano tangente à superfície de nível $F(x, y, z) = k$ em $P(x_0, y_0, z_0)$ como o plano que passa por P e tem vetor normal $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

Se $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$, definimos o plano tangente à superfície de nível $F(x, y, z) = k$ em $P(x_0, y_0, z_0)$ como o plano que passa por P e tem vetor normal $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

Usando argumento semelhante, pode-se mostrar que, se f é uma função diferenciável de duas variáveis, então $\nabla f(x, y)$ é perpendicular a qualquer curva de nível de f.

Exemplo

Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao elipsoide

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$

no ponto $(-2, 1, 2)$.

Note que esse elipsoide é a superfície de nível 1 da função

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16}.$$

Vetor gradiente

Temos que

$$F_x(x,y,z) = \frac{x}{4}, \qquad F_y(x,y,z) = \frac{y}{2}, \qquad F_z(x,y,z) = \frac{z}{8},$$

$$F_x(-2,\,1,\,2) = -\frac{1}{2}, \quad F_y(-2,\,1,\,2) = \frac{1}{2}, \quad F_z(-2,\,1,\,2) = \frac{1}{4}.$$

Então, a equação do plano tangente no ponto $(-2,1,2)$ é

$$-\frac{1}{2}(x+2) + \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{4}(z-2) = 0,$$

ou seja,

$$-2x + 2y + z - 8 = 0.$$

A reta normal ao elipsoide tem equações simétricas dadas por

$$\frac{x-(-2)}{-\frac{1}{2}} = \frac{y-1}{\frac{1}{2}} = \frac{z-2}{\frac{1}{4}} \;\Rightarrow\; -2(x+2) = 2(y-1) = 4(z-2).$$

Vetor gradiente

Qual a importância do vetor gradiente?

Vetor gradiente

Sejam $f(x, y, z)$ uma função de três variáveis e $P = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto em seu domínio.

- $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ dá a direção de maior crescimento de f no ponto P.
- $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ é ortogonal à superfície de nível S de f em P.

Sejam $f(x, y)$ uma função de duas variáveis e $P = (x_0, y_0)$ um ponto em seu domínio.

- $\nabla f(x_0, y_0)$ dá a direção de maior crescimento de f no ponto P.
- $\nabla f(x_0, y_0)$ é ortogonal à curva de nível de f que passa por P.

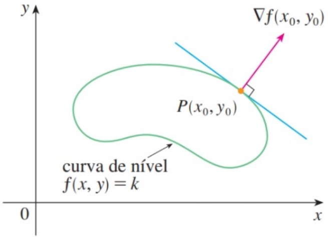

Figura: Stewart, J.; *Cálculo* - Volume 2

Se $f(x, y)$ representa a altitude de um ponto (x, y), a partir de um mapa topográfico podemos construir curvas de maior crescimento:

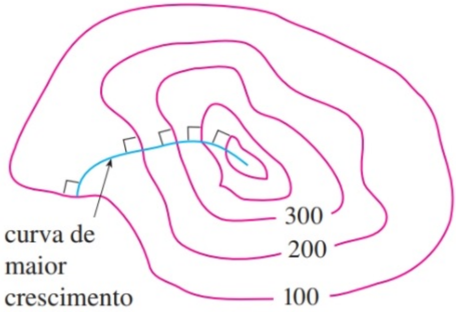

Figura: Stewart, J.; *Cálculo* - Volume 2

Exercícios

Seção 14.6 do Stewart: 8–12, 27–32, 34, 35, 37, 38, 43, 47–52, 55, 63, 64, 66, 69.