Cálculo em Várias Variáveis

Multiplicadores de Lagrange.

ICT-Unifesp

Mais detalhes na Seção 14.8 do livro do Stewart. Recurso disponível online pela Biblioteca do ICT.

Multiplicadores de Lagrange

Multiplicadores de Lagrange

Sejam $f(x, y, z)$ uma função diferenciável no aberto A e

$$B = \{(x, y, z) \in A : g(x, y, z) = 0\},$$

sendo g uma função de classe C^1 em A e $\nabla g \neq (0, 0, 0)$, $\forall (x, y, z) \in B$.

Queremos determinar os extremos locais de f restrita ao conjunto B.

Suponha que f tenha um valor extremo no ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in B$.

Suponha que f tenha um valor extremo no ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in B$.

Seja C uma curva $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ contida em B tal que $\gamma(t_0) = P_0$.

Suponha que f tenha um valor extremo no ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in B$.

Seja C uma curva $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ contida em B tal que $\gamma(t_0) = P_0$.

A função composta

$$h(t) = f \circ \gamma(t) = f(x(t), y(t), z(t))$$

fornece os valores de f restrita à curva C.

Multiplicadores de Lagrange

Como f tem valor extremo em $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, então h tem valor extremo em t_0, isto é, $h'(t_0) = 0$.

Como f tem valor extremo em $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, então h tem valor extremo em t_0, isto é, $h'(t_0) = 0$.

Pela Regra da Cadeia,

$$\begin{aligned} 0 &= h'(t_0) \\ &= f_x(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) \\ &\quad + f_z(x_0, y_0, z_0)z'(t_0) \\ &= \langle \nabla f(x_0, y_0, z_0), \gamma'(t_0) \rangle \end{aligned}$$

Multiplicadores de Lagrange

Como f tem valor extremo em $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, então h tem valor extremo em t_0, isto é, $h'(t_0) = 0$.

Pela Regra da Cadeia,

$$\begin{aligned} 0 &= h'(t_0) \\ &= f_x(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) \\ &\quad + f_z(x_0, y_0, z_0)z'(t_0) \\ &= \langle \nabla f(x_0, y_0, z_0), \gamma'(t_0) \rangle \end{aligned}$$

Logo,

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \perp \gamma'(t_0).$$

Multiplicadores de Lagrange

Lembremos que o vetor gradiente $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ também é ortogonal a $\gamma'(t_0)$.

Lembremos que o vetor gradiente $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ também é ortogonal a $\gamma'(t_0)$.

Portanto, existe um número real λ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0).$$

Lembremos que o vetor gradiente $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ também é ortogonal a $\gamma'(t_0)$.

Portanto, existe um número real λ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0).$$

Definição

O número λ é chamado de **multiplicador de Lagrange**.

Multiplicadores de Lagrange

Temos o seguinte teorema...

Teorema

Sejam $f(x, y, z)$ *uma função diferenciável no aberto* A *e* $B = \{(x, y, z) \in A : g(x, y, z) = 0\}$ *onde* g *é de classe* C^1 *em* A *e* $\nabla g \neq (0, 0, 0)$, $\forall (x, y, z) \in B$. *Se* (x_0, y_0, z_0) *é um extremo local de* f *restrita a* B, *então existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$$

Multiplicadores de Lagrange

Método dos multiplicadores de Lagrange: Para determinar os valores máximos e mínimos de $f(x, y, z)$ sujeita à restrição $g(x, y, z) = 0$, supondo $\nabla g(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ sobre a superfície $g(x, y, z) = 0$, devemos:

Método dos multiplicadores de Lagrange: Para determinar os valores máximos e mínimos de $f(x, y, z)$ sujeita à restrição $g(x, y, z) = 0$, supondo $\nabla g(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ sobre a superfície $g(x, y, z) = 0$, devemos:

1. determinar todos os valores de x, y, z e λ tais que

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Multiplicadores de Lagrange

Método dos multiplicadores de Lagrange: Para determinar os valores máximos e mínimos de $f(x, y, z)$ sujeita à restrição $g(x, y, z) = 0$, supondo $\nabla g(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ sobre a superfície $g(x, y, z) = 0$, devemos:

1. determinar todos os valores de x, y, z e λ tais que

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

2. calcular f em todos os pontos obtidos no item anterior. O maior desses valores é o valor máximo de f e o menor valor é o valor mínimo de f.

Multiplicadores de Lagrange

Tudo o que vimos até aqui se aplica a funções de duas variáveis também.

Multiplicadores de Lagrange

Tudo o que vimos até aqui se aplica a funções de duas variáveis também.

Exemplo

Encontre os extremantes de $f(x, y) = x^2 + y^2$ *restrita ao conjunto dado por* $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

Multiplicadores de Lagrange

$\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}, \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$ é ponto de mínimo de f restrita a B com valor mínimo $3-2\sqrt{2}$.

$\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}, \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$ é ponto de máximo de f restrita a B com valor máximo $3+2\sqrt{2}$.

Multiplicadores de Lagrange

Podemos ter mais de uma restrição...

Teorema

Sejam $f(x,y,z)$ *uma função diferenciável no aberto* A *e* $B = \{(x,y,z) \in A : g(x,y,z) = 0 \text{ e } h(x,y,z) = 0\}$, *sendo* g, h *de classe* C^1 *em* A *e* $\nabla g \times \nabla h \neq (0,0,0)$, $\forall (x,y,z) \in B$. *Se* $(x_0, y_0, z_0) \in B$ *é um extremo local de* f *restrita a* B, *então existem* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \lambda_1 \nabla g(x_0,y_0,z_0) + \lambda_2 \nabla h(x_0,y_0,z_0)$$

Definição

λ_1, λ_2 *são chamados de* **multiplicadores de Lagrange**.

Exemplo

Encontre os pontos pertencentes à intersecção do elipsoide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$ com o plano $x + y + z = 1$ que estejam mais afastados e mais próximos da origem.

- Queremos encontrar os extremos da função $f(x, y, z) = \|(x - 0, y - 0, z - 0)\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Multiplicadores de Lagrange

Exemplo

Encontre os pontos pertencentes à intersecção do elipsoide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$ com o plano $x + y + z = 1$ que estejam mais afastados e mais próximos da origem.

- Queremos encontrar os extremos da função $f(x, y, z) = \|(x - 0, y - 0, z - 0)\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$
- As restrições são dadas pelas funções $g(x, y, z) = x + y + z - 1$ e $h(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2 - 4$.

Exemplo

Encontre os pontos pertencentes à intersecção do elipsoide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$ com o plano $x + y + z = 1$ que estejam mais afastados e mais próximos da origem.

- Queremos encontrar os extremos da função $f(x, y, z) = \|(x - 0, y - 0, z - 0)\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$
- As restrições são dadas pelas funções $g(x, y, z) = x + y + z - 1$ e $h(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2 - 4$.
- Temos que $\nabla g(x, y, z) = (1, 1, 1)$ e $\nabla h(x, y, z) = (2x, 8y, 2z)$.

Assim,

$$\nabla g(x,y,z) \times \nabla h(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x & 8y & 2z \end{vmatrix}$$

$$= (2z - 8y, 2x - 2z, 8y - 2x) = (0,0,0)$$

$$\iff x = z = 4y.$$

Mas, $g(4y, y, 4y) = 9y - 1 = 0 \iff y = 1/9$ e $h(4y, y, 4y) = 36y^2 - 4 = 0 \iff y = \pm 1/3$. Portanto, o produto vetorial é não-nulo em todos os pontos do conjunto de restrição.

Multiplicadores de Lagrange

Pelo método do multiplicadores de Lagrange, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda_1 \nabla g(x,y,z) + \lambda_2 \nabla h(x,y,z) \\ g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (2x, 2y, 2z) = \lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(2x, 8y, 2z) \\ x + y + z - 1 = 0 \\ x^2 + 4y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{cases} \iff$$

Multiplicadores de Lagrange

$$\iff \begin{cases} 2x = \lambda_1 + 2\lambda_2 x \\ 2y = \lambda_1 + 8\lambda_2 y \\ 2z = \lambda_1 + 2\lambda_2 z \\ x + y + z = 1 \\ x^2 + 4y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 2(1 - \lambda_2)x \\ \lambda_1 = 2(1 - 4\lambda_2)y \\ \lambda_1 = 2(1 - \lambda_2)z \\ x + y + z = 1 \\ x^2 + 4y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

Se $\lambda_2 = 1 \implies \lambda_1 = 0 \implies y = 0$

$$\implies \begin{cases} x + z = 1 \implies x = 1 - z \\ x^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

Logo,
$(1-z)^2+z^2=4 \Longrightarrow 2z^2-2z-3=0 \Longrightarrow z=\frac{1-\sqrt{7}}{2}$ ou $z=\frac{1+\sqrt{7}}{2}$. Portanto, temos os pontos

$$\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right) \qquad \left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right),$$

com

$$f\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right) = \frac{8+2\sqrt{7}}{4} + \frac{8-2\sqrt{7}}{4} = 4$$

e

$$f\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right) = 4.$$

Se $\lambda_2 \neq 1 \Longrightarrow x = z \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2x + y = 1 \Longrightarrow y = 1 - 2x \\ 2x^2 + 4y^2 = 4 \Longrightarrow x^2 + 2y^2 = 2 \end{cases}$$

Logo, $x^2 + 2(1-2x)^2 = 2 \Longrightarrow 9x^2 - 8x = 0 \Longrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{8}{9}$. Portanto, temos os pontos

$$(0,1,0) \qquad \left(\frac{8}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$$

com

$$f\,(0,1,0) = 1 \ \text{ e } \ f\left(\frac{8}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) = \frac{177}{81} \approx 2.185$$

Como o conjunto de restrição é compacto, existem mínimo e máximo:

- mínimo em $(0, 1, 0)$ com valor 1, que é o ponto mais próximo da origem.
- máximo em $\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)$ e $\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)$ com valor 4, sendo que estes são os pontos mais distantes da origem.

Exercícios

Seção 14.8 do Stewart: 1, 3–16, 23, 25, 27–33, 37, 39, 55, 57.