Aula 2: Sequências numéricas (continuação)

Importante: *Uma sequência $\{a_n\}$ é dita **divergente** se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ou se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ ou ainda se a sequência oscila.*

Exemplo 2.1 Determine os valores de r para os quais a sequência $a_n = r^n$ é convergente.

Resolução: Sabemos que

$$\lim_{x\to\infty} r^x = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq r < 1 \\ 1, & \text{se } r = 1 \\ +\infty, & \text{se } r > 1 \end{cases}$$

Definindo $f(x) = r^x$ para $x \geq 1$, temos $f(n) = a_n$, $n \geq 1$. Então, pelo **Teorema 1.4**, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq r < 1 \\ 1, & \text{se } r = 1 \\ +\infty, & \text{se } r > 1 \end{cases}$$

Obs:

$$\begin{cases} \text{Se } a_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad |a_n| \to 0 \\ \text{Se } |a_n| \to 0 \quad \Rightarrow \quad a_n \to 0 \\ \text{Se } a_n \to +\infty \quad \Rightarrow \quad |a_n| \to +\infty \\ \text{Se } |a_n| \to +\infty \quad \Rightarrow \quad a_n \to +\infty \text{ ou } a_n \to -\infty \text{ ou } a_n \to \pm\infty\ (oscila) \end{cases}$$

Se $-1 < r < 0$, como $|r|^n \to 0 \quad \Rightarrow \quad r^n \to 0$. a_n converge.
Se $r = -1$, $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ não existe (oscila). a_n diverge.
Se $r < -1$, como $|r|^n \to +\infty \quad \Rightarrow \quad r^n \to +\infty$ ou $r^n \to -\infty$ ou $r^n \to \pm\infty$ (oscila). a_n diverge.

Deste modo, concluímos que $a_n = r^n$ é convergente se $-1 < r \leq 1$ e é divergente para todos os outros valores de r.

2.1 Sequências monótonas

Definição 2.1. (Sequências monótonas)

Uma sequência $\{a_n\}$ é denominada **crescente** *se $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \geq 1$, isto é, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$. A sequência é denomidada* **decrescente** *se $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \geq 1$, isto é, $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > a_{n+1} > \cdots$. A sequência $\{a_n\}$ é dita* **monótona** *se for crescente ou decrescente.* ♣

Observação: A sequência $\{a_n\}$ é **não decrescente** se

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots .$$

A sequência $\{a_n\}$ é **não crescente** se

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \cdots$$

.

Exemplo 2.2 Mostre que a sequência $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ é decrescente.

Resolução: Faremos a demonstração de duas formas:

1. Temos que mostrar que

$$\begin{aligned} a_n &> a_{n+1} \\ \frac{n}{n^2+1} &> \frac{n+1}{(n+1)^2+1} . \end{aligned}$$

Como $n^2+1 >$ e $(n+1)^2+1 > 0$ para todo $n \geq 1$, podemos multiplicar cruzado

$$\begin{aligned} n[(n+1)^2+1] &> (n+1)(n^2+1) \\ n[n^2+2n+2] &> n^3+n+n^2+1 \\ \cancel{n^3}+2n^2+2n &> \cancel{n^3}+n^2+n+1 \\ n^2+n &> 1 \end{aligned}$$

Esta última desigualdade é verdadeira para todo $n \geq 1$, portanto $a_n > a_{n+1}$, isto é, a sequência é decrescente.

2. Consideremos a função $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, então

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} < 0,$$

sempre que $1 - x^2 < 0$, uma vez que o denominador é positivo para todo x. A função $1 - x^2$ é sempre negativa para $x > 1$. Logo, $f(x)$ é decrescente para $x > 1$. Assim, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ a sequência a_n é decrescente.

Importante: *Existem sequências que não são crescentes e nem decrescentes. Por exemplo,* $a_n = (-1)^n$.

Definição 2.2. (Sequências limitadas)

*Uma sequência $\{a_n\}$ é **limitada superiormente** se existir um número M tal que*

$$a_n \leq M \quad \text{para todo } \ n \geq 1.$$

*A sequência é **limitada inferiormente** se existir um número m tal que*

$$m \leq a_n \quad \text{para todo } \ n \geq 1.$$

*Se a sequência for limitada inferiormente e superiormente, então ela é uma **sequência limitada**.* ♣

Teorema 2.1

Toda sequência monótona e limitada é convergente. ♡

Exemplo 2.3 Prove que a sequência $a_n = \dfrac{3^{n+2}}{(n+2)!}$ é convergente.

Resolução: Basta verificar se as hipóteses do **Teorema 2.1** são satisfeitas, isto é, mostrar que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ é monótona e limitada. De fato:

(i) Como $a_n > 0$ para todo n, então

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{3^{n+3}}{(n+3)!}}{\frac{3^{n+2}}{(n+2)!}} = \frac{3^{n+3}}{(n+3)!}\,\frac{(n+2)!}{3^{n+2}} = \frac{3 \cdot \cancel{3^{n+2}}}{(n+3)\cancel{(n+2)!}}\,\frac{\cancel{(n+2)!}}{\cancel{3^{n+2}}} = \frac{3}{(n+3)} < 1. \tag{2.1}$$

Logo, $a_{n+1} < a_n$ para todo $n \geq 1$. Logo, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ é monótona decrescente.

(ii) Note que, $a_n > 0$ e que

$$a_n = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdots 3 \cdot 3 \cdot 3}{(n+2)(n+1)n \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} = \underbrace{\underbrace{\frac{3}{(n+2)}}_{<1} \cdot \underbrace{\frac{3}{(n+1)}}_{<1} \cdot \underbrace{\frac{3}{n}}_{<1}}_{<1} \cdot \cdots \cdot \underbrace{\frac{3}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{1}}_{=\frac{9}{2}} \leq \frac{9}{2}. \tag{2.2}$$

Portanto, $0 < a_n \leq \dfrac{9}{2}$, ou seja, $\{a_n\}$ é limitada. Portanto, de (i) e (ii) e, pelo **Teorema 2.1**, a sequência $\{a_n\}$ é convergente.

Exercícios

1. Determine se a sequência dada é crescente, decrescente ou não monotônica. A sequência dada é limitada?

(a) $a_n = \dfrac{1}{5^n}$

(b) $a_n = \dfrac{1}{2n+3}$

(c) $a_n = \dfrac{2n-3}{3n+4}$

(d) $a_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$

(e) $a_n = ne^{-n}$

(f) $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$

(g) $a_n = n + \dfrac{1}{n}$

2. Decida se cada uma das sequências abaixo é convergente ou divergente, calculando o limite no caso convergente:

(a) $a_n = \dfrac{2n + \operatorname{sen} n}{5n+1}$

(b) $a_n = \dfrac{(n+3)! - n!}{(n+4)!}$

(c) $a_n = \dfrac{n \operatorname{sen}(n!)}{n^2+1}$

(d) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

(e) $a_n = n(\alpha)^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

(f) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$

(g) $\sqrt[n]{a^n + b^n}$, onde $0 < a < b$

3. Calcule, justificando, o limite das seguintes sequências:

(a) $a_n = \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}$

(b) $a_n = \dfrac{1}{3^n}\left(\dfrac{6n-1}{2n+5}\right)^n$

(c) $a_n = \left(1 - 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{3n}$

(d) $a_n = \sqrt{n - \sqrt{n}} - \sqrt{n}$

(e) $a_n = \left(\mathrm{e}^{3/n} - \frac{2}{n}\right)^{n}$

Respostas:

1. **(a)** Decrescente. $0 < a_n \leq \frac{1}{5}, \; n \geq 1.$

(b) Decrescente. $0 < a_n \leq \frac{1}{5}, \; n \geq 1.$

(c) Crescente. $-\frac{1}{7} \leq a_n < \frac{2}{3}, \; n \geq 1.$

(d) Não monotônica. $-1 \leq a_n \leq 1, \; n \geq 1.$

(e) Decrescente. $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}.$

(f) Decrescente. $0 < a_n \leq \frac{1}{2}.$

(g) Crescente. Não é limitada.

2. **(a)** Converge para $\frac{2}{5}$

(b) Converge para 0

(c) Converge para 0

(d) Diverge

(e) Converge para 0 se $|\alpha| < 1$

(f) Converge para $\frac{1}{2}$

(g) Converge para b

3. **(a)** 1

(b) $\mathrm{e}^{-8/3}$

(c) e^{-6}

(d) $-\frac{1}{2}$

(e) e