Cálculo em Várias Variáveis

Teorema de Clairaut/Schwarz, Plano tangente, Aproximações lineares

ICT-Unifesp

Mais detalhes nas Seções 14.3 e 14.4 do livro do Stewart.
Recurso disponível online pela Biblioteca do ICT.

Teorema de Clairaut/Schwarz

Teorema de Clairaut/Schwarz

Teorema de Clairaut/Schwarz

Definição

Dizemos que uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*, com* A *aberto, é* **de classe** C^n*, se todas as derivadas parciais de ordem* n *existem e são contínuas.*

Teorema de Clairaut/Schwarz

Definição

Dizemos que uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, com A aberto, é **de classe** C^n*, se todas as derivadas parciais de ordem n existem e são contínuas.*

Teorema (Clairaut/Schwarz)

Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, com A aberto, de classe C^2 em A. Então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y).$$

Assim, se a função é de classe $\mathcal{C}^2$, não importa a ordem em que calculamos as derivadas parciais mistas.

Teorema de Clairaut/Schwarz

Observação

O Teorema de Clairaut/Schwarz pode ser aplicado para derivadas parciais de ordem maior do que 2.

Se $f(x, y, z)$ é de classe C^3, então

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial y},$$

ou ainda,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial z}.$$

Teorema de Clairaut/Schwarz

Exemplo

Suponha que queiramos calcular as derivadas parciais mistas da função de classe $\mathcal{C}^2$, $f(x, y) = x \cdot\ sen\left(\frac{y}{x}\right)$.

Teorema de Clairaut/Schwarz

Exemplo

Suponha que queiramos calcular as derivadas parciais mistas da função de classe $\mathcal{C}^2$, $f(x,y) = x \cdot \ sen \left(\frac{y}{x}\right)$.

Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \ sen \left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\, cos \left(\frac{y}{x}\right).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \ cos \left(\frac{y}{x}\right).$$

Note que é bem mais trabalhoso calcular $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *do que* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. *Daí a utilidade do Teorema de Clairaut/Schwarz.*

Diferenciabilidade

Plano Tangente

Plano Tangente

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função e $(x_0, y_0) \in A$. O gráfico da função f pode ser descrito por:

$$S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in A\} \subset \mathbb{R}^3$$

Plano Tangente

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função e $(x_0, y_0) \in A$. O gráfico da função f pode ser descrito por:

$$S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in A\} \subset \mathbb{R}^3$$

Suponha que f tenha **derivadas parciais de primeira ordem contínuas** (f é de classe C^1).

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função e $(x_0, y_0) \in A$. O gráfico da função f pode ser descrito por:

$$S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in A\} \subset \mathbb{R}^3$$

Suponha que f tenha **derivadas parciais de primeira ordem contínuas** (f é de classe C^1).

Seja $P = (x_0, y_0, z_0) \in S$.

Plano Tangente

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função e $(x_0, y_0) \in A$. O gráfico da função f pode ser descrito por:

$$S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in A\} \subset \mathbb{R}^3$$

Suponha que f tenha **derivadas parciais de primeira ordem contínuas** (f é de classe C^1).

Seja $P = (x_0, y_0, z_0) \in S$.

Sejam C_1 e C_2 as curvas obtidas ao fazer a intersecção de S com os planos $y = y_0$ e $x = x_0$, respectivamente.

Note que P pertence à intersecção das curvas C_1 e C_2.

Sejam T_1 e T_2 as retas tangentes às curvas C_1 e C_2 no ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$.
O **plano tangente** à superfície S no ponto P é o plano que contém as retas T_1 e T_2.

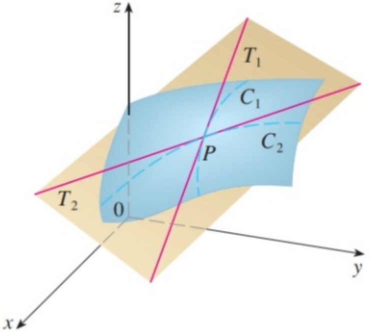


Figura: Stewart, J.; *Cálculo* - Volume 2

Plano Tangente

Vamos determinar a equação do plano tangente.

Plano Tangente

Vamos determinar a equação do plano tangente.

Note que esse plano contém os vetores tangentes às curvas:

$$C_1 : x \mapsto (x, y_0, f(x, y_0)),$$

$$C_2 : y \mapsto (x_0, y, f(x_0, y)),$$

Plano Tangente

Vamos determinar a equação do plano tangente.

Note que esse plano contém os vetores tangentes às curvas:

$$C_1 : x \mapsto (x, y_0, f(x, y_0)),$$

$$C_2 : y \mapsto (x_0, y, f(x_0, y)),$$

que são

$$u = (1, 0, f_x(x_0, y_0))$$

$$v = (0, 1, f_y(x_0, y_0))$$

respectivamente.

Plano Tangente

Como u e v são l.i., o plano paralelo a estes vetores contendo o ponto P é dado por:

$$X = P + hu + kv, \;\; h, k \in \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + hu + kv$$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + (h, k, hf_x(x_0, y_0) + kf_y(x_0, y_0))$$

$$\begin{cases} x = x_0 + h \\ y = y_0 + k \\ z = f(x_0, y_0) + hf_x(x_0, y_0) + kf_y(x_0, y_0) \end{cases}$$

Plano Tangente

Como u e v são l.i., o plano paralelo a estes vetores contendo o ponto P é dado por:

$$X = P + hu + kv, \ \ h, k \in \mathbb{R}$$
$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + hu + kv$$
$$(x, y, z) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + (h, k, hf_x(x_0, y_0) + kf_y(x_0, y_0))$$
$$\begin{cases} x = x_0 + h \\ y = y_0 + k \\ z = f(x_0, y_0) + hf_x(x_0, y_0) + kf_y(x_0, y_0) \end{cases}$$

Portanto, a equação do plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é dada por

$$\boxed{z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}$$

Plano Tangente

Exemplo

Determinar a equação do plano tangente ao gráfico de $f(x, y) = 3x^2y - x$ *no ponto* $(1, 2, 5)$.

Plano Tangente

Exemplo

Determinar a equação do plano tangente ao gráfico de $f(x,y) = 3x^2y - x$ *no ponto* $(1,2,5)$.

Solução: O plano tangente é dado por

$$z = f(1,2) + f_x(1,2)(x-1) + f_y(1,2)(y-2).$$

Plano Tangente

Exemplo

Determinar a equação do plano tangente ao gráfico de $f(x, y) = 3x^2y - x$ *no ponto* $(1, 2, 5)$.

Solução: O plano tangente é dado por

$$z = f(1, 2) + f_x(1, 2)(x - 1) + f_y(1, 2)(y - 2).$$

Temos que

$$\begin{cases} f(1, 2) = 5, \\ f_x(x, y) = 6xy - 1 \implies f_x(1, 2) = 11, \\ f_y(x, y) = 3x^2 \implies f_y(1, 2) = 3. \end{cases}$$

Exemplo

Determinar a equação do plano tangente ao gráfico de $f(x,y) = 3x^2y - x$ no ponto $(1,2,5)$.

Solução: O plano tangente é dado por

$$z = f(1,2) + f_x(1,2)(x-1) + f_y(1,2)(y-2).$$

Temos que

$$\begin{cases} f(1,2) = 5, \\ f_x(x,y) = 6xy - 1 \Longrightarrow f_x(1,2) = 11, \\ f_y(x,y) = 3x^2 \Longrightarrow f_y(1,2) = 3. \end{cases}$$

Portanto, a equação do plano é $11x + 3y - z = 12$.

Plano Tangente

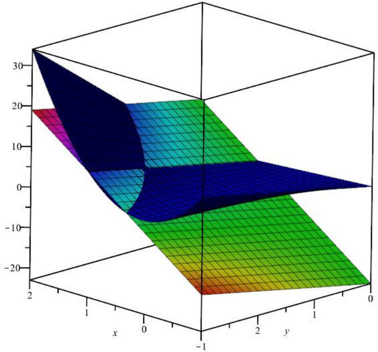


Figura: gráfico de $f(x, y) = 3x^2y - x$ e do plano tangente em $(1, 2, 5)$

Atenção!

Se as derivadas parciais de f existem e são contínuas em um ponto $(a, b) \in D_f$, então existe o plano tangente ao gráfico de f em $(a, b, f(a, b))$.

Se, por outro lado, as derivadas parciais existem, mas não são contínuas, não podemos garantir a existência do plano tangente.

Plano Tangente

Exemplo

A função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

tem derivadas parciais em $(0,0)$*, mas elas não são contínuas (verifique!). Nesse caso, a equação*
$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$
não *fornece o plano tangente.*

Diferenciabilidade

Aproximação linear

Aproximação linear

Seja $f(x, y)$ uma função com derivadas parciais contínuas. Sabemos que a equação do plano tangente ao gráfico de f em $(a, b, f(a, b))$ é

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

Aproximação linear

Seja $f(x, y)$ uma função com derivadas parciais contínuas. Sabemos que a equação do plano tangente ao gráfico de f em $(a, b, f(a, b))$ é

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

A função

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

é chamada de **linearização** de f em (a, b).

Aproximação linear

Seja $f(x, y)$ uma função com derivadas parciais contínuas. Sabemos que a equação do plano tangente ao gráfico de f em $(a, b, f(a, b))$ é

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

A função

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

é chamada de **linearização** de f em (a, b).

A aproximação

$$f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

é chamada de **aproximação linear** de f em (a, b).

Aproximação linear

Exemplo

Determinar a aproximação linear de $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ *no ponto* $(1, 1, 3)$.

Aproximação linear

Exemplo

Determinar a aproximação linear de $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ *no ponto* $(1, 1, 3)$.

Temos que

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 4x \Longrightarrow f_x(1, 1) = 4, \\ f_y(x, y) = 2y \Longrightarrow f_y(1, 1) = 2. \end{cases}$$

Aproximação linear

Exemplo

Determinar a aproximação linear de $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ *no ponto* $(1,1,3)$.

Temos que

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 4x \Longrightarrow f_x(1,1) = 4, \\ f_y(x,y) = 2y \Longrightarrow f_y(1,1) = 2. \end{cases}$$

Logo, o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,1,3)$ é

$$z = 3 + 4(x-1) + 2(y-1),$$

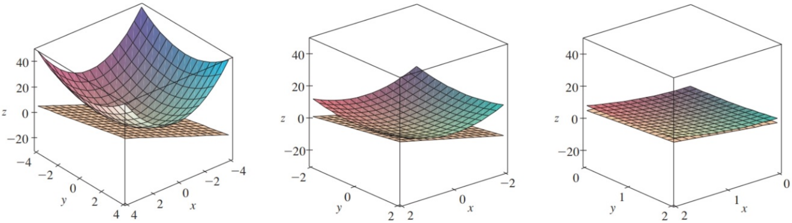
ou seja, $z = 4x + 2y - 3$.

Aproximação linear

Exemplo

Determinar a aproximação linear de $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ *no ponto* $(1, 1, 3)$.

$L(x, y) = 4x + 2y - 3$ é a linearização de f em $(1, 1)$ e a aproximação linear neste ponto é $f(x, y) \approx 4x + 2y - 3$.



Aproximação linear

A noção de aproximação linear se estende de maneira natural para funções de três ou mais variáveis:

$$
\begin{aligned}
f(x, y, z) \approx\ & f(a, b, c) + f_x(a, b, c)(x - a) \\
& + f_y(a, b, c)(y - b) + f_z(a, b, c)(z - c)
\end{aligned}
$$

Aproximação linear

Exemplo

A linearização da função $f(x,y) = xe^{xy}$ *no ponto* $(1,0)$ *é dada por* $L(x,y) = x + y$.

Podemos aproximar o valor de f *no ponto* $(1,1;-0,1)$, *calculando* $L(1,1;-0,1) = 1$.

O valor real de f *neste ponto é* $f(1,1;-0,1) \simeq 0,98542$.

Exemplo

Calcule a linearização da função

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

no ponto $P = (1, 0, 1)$.

Aproximação linear

Exemplo

Calcule a linearização da função

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

no ponto $P = (1, 0, 1)$. *Interprete a noção de plano tangente.*

Aproximação linear

Exemplo

Calcule a linearização da função

$$f(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$$

no ponto $P = (1,0,1)$. *Interprete a noção de plano tangente.*

O gráfico de uma função de três variáveis é uma **hipersuperfície** (de dimensão 3) no $\mathbb{R}^4$. O "plano" tangente ao gráfico de f é um **hiperplano 3-dimensional**.

Exercícios

Seção 14.3 do Stewart: 53–56, 67, 68.
Seção 14.4 do Stewart: 1–10, 15–19, 31, 33, 41, 43.