Cálculo em Várias Variáveis

Integrais de superfície

ICT-Unifesp

Mais detalhes na Seção 16.7 do livro do Stewart.

Integrais de superfície de campos escalares

Integrais de superfície de campos escalares

Definição

Seja $S \subset R^3$ *uma superfície suave descrita pela equação vetorial*

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\,\vec{i} + y(u,v)\,\vec{j} + z(u,v)\,\vec{k},$$

com $(u,\ v) \in D \subset \mathbb{R}^2$. *A* **integral de superfície** *de uma função* f *de três variáveis cujo domínio contém* S *é definida por*

$$\iint_S f(x,y,z)\ dS = \iint_D f \circ \vec{r}(u,v) \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|\ dA.$$

Integrais de superfície de campos escalares

Tomando a função constante $f(x, y, z) = 1$, a integral de superfície representa a área da superfície S:

$$A(S) = \iint_D \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \, dA.$$

Integrais de superfície de campos escalares

Exemplo

Calcular a integral $\iint_S x^2 \, dS$, *sendo* S *a esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

A esfera unitária pode ser parametrizada por

$$\vec{r} : \begin{cases} x = \operatorname{sen} u \cos v \\ y = \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ z = \cos u \end{cases}$$

com $(u, v) \in D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$.

Integrais de superfície de campos escalares

Temos que

$$\vec{r}_u(u,v) = (\cos u \cos v,\ \cos u \operatorname{sen} v, -\operatorname{sen} u),$$
$$\vec{r}_v(u,v) = (-\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v,\ \operatorname{sen} u \cos v, 0).$$

E, $\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v) =$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos u \cos v & \cos u \operatorname{sen} v & -\operatorname{sen} u \\ -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v & \operatorname{sen} u \cos v & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (\operatorname{sen}^2 u \cos v,\ \ \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen} v,\ \ \operatorname{sen} u \cos u).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|\vec{r}_u(u,v)\times\vec{r}_v(u,v)\|^2 &= \operatorname{sen}^4 u\cos^2 v \\ &\quad+\operatorname{sen}^4 u\operatorname{sen}^2 v+\operatorname{sen}^2 u\cos^2 u \\ &= \operatorname{sen}^4 u+\operatorname{sen}^2 u\cos^2 u \\ &= \operatorname{sen}^2 u(\operatorname{sen}^2 u+\cos^2 u) \\ &= \operatorname{sen}^2 u.\end{aligned}$$

donde

$$\|\vec{r}_u(u,v)\times\vec{r}_v(u,v)\| = \operatorname{sen} u$$

Integrais de superfície de campos escalares

Assim,

$$\begin{aligned}
\iint_S x^2 \, dS &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 u \cos^2 v \, dv \, du \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 u \int_0^{2\pi} 1 - \cos(2v) \, dv \, du \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 u \left(v - \frac{\operatorname{sen}(2v)}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} du =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 u \ du = \pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen} u (1 - \cos^2 u) \ du \\
&= \pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen} u - \operatorname{sen} u \cos^2 u \ du \\
&= \pi \left(-\cos u + \frac{\cos^3 u}{3} \right) \Bigg|_0^{\pi} = \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\displaystyle\iint_S x^2 \ dS = \frac{4\pi}{3}$.

Integrais de superfície de campos escalares

Exemplo

Seja S o cilindro

$$S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ 0 \leq z \leq 5 \end{cases}$$

e suponha que a distribuição de cargas elétricas em S seja dada por uma função f proporcional à distância de cada ponto ao plano-xy. Calcule a carga elétrica total distribuída na superfície S.

Integrais de superfície de campos escalares

A carga elétrica total em S é dada pela integral

$$C = \iint_S f(x, y, z)\, dS.$$

A distância de qualquer ponto do cilindro S ao plano-xy é z. Logo, $f(x, y, z) = kz, k \in \mathbb{R}$.

Uma parametrização do cilindro S é dada por

$$\vec{r}(\theta, t) = (3\cos\theta, 3\,\mathrm{sen}\,\theta, t),$$

com $0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq t \leq 5$.

Calculamos

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}(\theta, t) = (-3 \operatorname{sen} \theta, 3 \cos \theta, 0),$$
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}(\theta, t) = (0, 0, 1),$$
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}(\theta, t) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}(\theta, t) = (3 \cos \theta, 3 \operatorname{sen} \theta, 0),$$
$$\|\vec{r}_\theta(\theta, t) \times \vec{r}_t(\theta, t)\| = \sqrt{9 \cos^2\theta + 9 \operatorname{sen}^2\theta} = 3$$

Integrais de superfície de campos escalares

Finalmente, obtemos

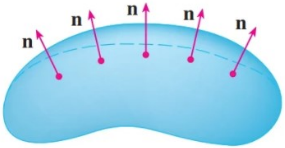
$$\begin{aligned}
C &= \iint_S f(x,y,z)\ dS \\
&= \int_0^5 \int_0^{2\pi} f \circ \vec{r}(\theta,t) \cdot \|\vec{r}_\theta(\theta,t) \times \vec{r}_t(\theta,t)\| d\theta dt \\
&= \int_0^5 \int_0^{2\pi} kt \cdot 3\ d\theta dt \\
&= \int_0^5 3kt\theta\Big|_0^{2\pi} dt = \int_0^5 6k\pi t\ dt = 6k\pi \frac{t^2}{2}\Bigg|_0^5 \\
&= 75k\pi.
\end{aligned}$$

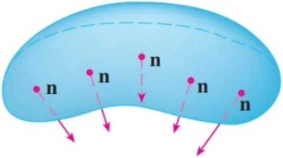
Integrais de superfície de campos vetoriais

Orientação

Definição

Suponha que a superfície S tenha plano tangente em qualquer ponto (x, y, z) de S. Dizemos que S é uma **superfície orientada** *se for possível escolher um vetor normal unitário $\vec{n}$ em cada ponto $(x, y, z) \in S$, de modo que $\vec{n}$ varie continuamente sobre S.*

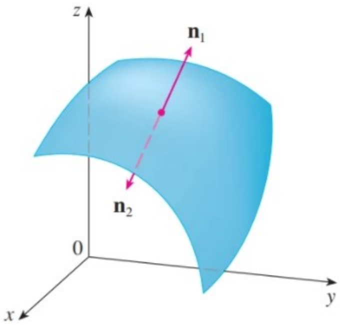




Orientação

Note que, para cada ponto $(x, y, z) \in S$, existem dois vetores normais associados: $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1$.

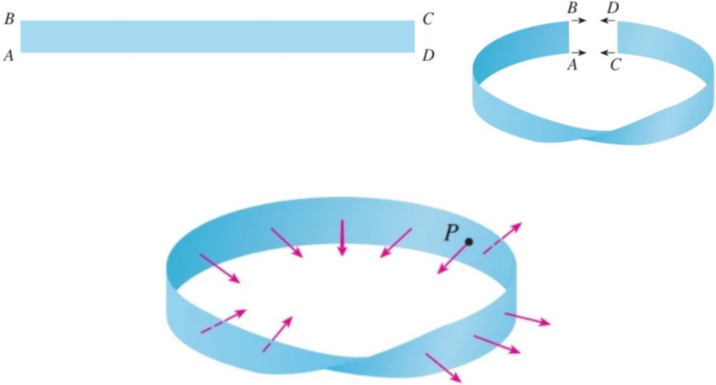
Toda superfície orientável tem "dois lados", duas orientações possíveis.



Orientação

Exemplo

A faixa de Möbius é um exemplo de superfície **não-orientável**.



Orientação

Considere a parametrização

$$\vec{r}: \begin{cases} x = \left(1 + v \operatorname{sen} \frac{u}{2}\right) \cos u \\ y = \left(1 + v \operatorname{sen} \frac{u}{2}\right) \operatorname{sen} u \\ z = 1 + v \cos \frac{u}{2} \end{cases}$$

da faixa de Möbius, com $0 \leqslant u \leqslant 2\pi$ e $-1 \leqslant v \leqslant 1$.

Temos que

$$\vec{r}_u = \left(\frac{v}{2} \cos \frac{u}{2} \cos u - \left(1 + v \operatorname{sen} \frac{u}{2}\right) \operatorname{sen} u, \right.$$
$$\left. \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2} \operatorname{sen} u - \left(1 + v \operatorname{sen} \frac{u}{2}\right) \cos u, -\frac{v}{2} \operatorname{sen} \frac{u}{2}\right)$$

Orientação

e

$$\vec{r}_v = \left(\operatorname{sen} \frac{u}{2} \cos u,\ \operatorname{sen} \frac{u}{2} \operatorname{sen} u,\ \cos \frac{u}{2} \right).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \Bigg(& \frac{v}{2} \operatorname{sen} u + \left(v \sin\left(\frac{u}{2}\right) + 1 \right) \cos u \cos\left(\frac{u}{2}\right), \\ & -\frac{v}{2} \cos u + \left(v \sin\left(\frac{u}{2}\right) + 1 \right) \sin u \cos\left(\frac{u}{2}\right), \\ & -\left(v \operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right) + 1 \right) \operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right) \Bigg)\end{aligned}$$

Orientação

Observamos que ao completar uma volta (de $u = 0$ a $u = 2\pi$)

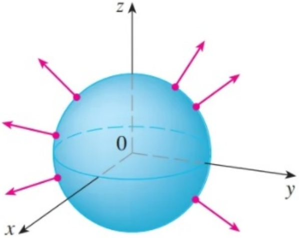
$$\vec{r}(0,0) = \vec{r}(2\pi,0) = (1,0,1),$$

o campo normal "dá um salto":

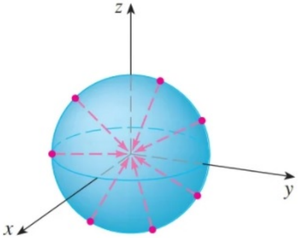
$$\left(\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right)(0,v) = \left(1, -\frac{v}{2}, 0\right)$$
$$\left(\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right)(2\pi,v) = \left(-1, -\frac{v}{2}, 0\right).$$

Orientação

Se S é uma **superfície fechada**, ou seja, se ela é a fronteira de uma região sólida $E \subset \mathbb{R}^3$, dizemos que a orientação de S é positiva se os vetores normais apontam para fora de E.



Orientação positiva



Orientação negativa

Integrais de superfície de campos vetoriais

Definição

Seja $\vec{F}$ um campo vetorial contínuo definido sobre uma superfície orientada S com vetor unitário $\vec{n}$. A **integral de superfície** *de $\vec{F}$ sobre S é definida por*

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS.$$

Se $\vec{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é uma parametrização de S, temos $\vec{n} = \dfrac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$ e $dS = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|\; dA$ e podemos escrever

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F} \circ \vec{r}(u, v) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\; dA.$$

Interpretação:

A integral de superfície $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ calcula o fluxo do campo vetorial $\vec{F}$ através da superfície S, ou seja, o quanto o campo $\vec{F}$ tende a se alinhar com o campo normal à superfície.

Em termos físicos, poderíamos pensar na vazão de um fluido através de uma membrana representada por S, medida em unidade de massa por unidade de tempo.

Integrais de superfície de campos vetoriais

Exemplo

Determinar o fluxo de $\vec{F}(x, y, z) = (z, y, x)$ *através da esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Consideremos novamente a seguinte parametrização da esfera unitária:

$$\vec{r}(\phi, \theta) = \operatorname{sen}\phi\cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\,\vec{j} + \cos\phi\,\vec{k},$$

onde $0 \leq \phi \leq \pi$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Então,

$$\vec{F}(\vec{r}(\phi,\theta)) = \cos\phi\,\vec{i} + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\,\vec{j} + \operatorname{sen}\phi\cos\theta\,\vec{k}.$$

Além disso, temos que

$$\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta = \operatorname{sen}^2\phi\cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}^2\phi\operatorname{sen}\theta\,\vec{j} + \operatorname{sen}\phi\cos\phi\,\vec{k}.$$

Segue que

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{r}(\phi,\theta)) \cdot (\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta) &= \cos\phi\operatorname{sen}^2\phi\cos\theta + \operatorname{sen}^3\phi\operatorname{sen}^2\theta \\ &\quad + \operatorname{sen}^2\phi\cos\phi\cos\theta \\ &= 2\operatorname{sen}^2\phi\cos\phi\cos\theta + \operatorname{sen}^3\phi\operatorname{sen}^2\theta.\end{aligned}$$

Portanto, o fluxo é

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_D \vec{F} \cdot (\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta) dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos\phi \cos\theta + \operatorname{sen}^3 \phi \operatorname{sen}^2 \theta \right) d\phi d\theta \\
&= \cdots \\
&= \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Integrais de superfície de campos vetoriais

Exemplo

Sejam $\vec{F}(x, y, z) = (y, 0, x + y)$ *um campo vetorial e* S *a superfície parametrizada por* $\vec{r}(u, v) = (u, v, 2 - u^2 - v^2)$, *com* $u^2 + v^2 \leqslant 1$. *Vamos calcular*

$$\iint_S rot\,\vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Integrais de superfície de campos vetoriais

Temos $D = \{(u, v) \mid u^2 + v^2 \leqslant 1\}$ e

$$\begin{aligned} \vec{r}_u &= (1, 0, -2u), \\ \vec{r}_v &= (0, 1, -2v). \end{aligned}$$

Logo, $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (2u, 2v, 1)$ e

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & 0 & x + y \end{vmatrix} = (1, -1, -1)$$

Integrais de superfície de campos vetoriais

Assim,

$$\iint_S \text{rot}\,\vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_D \text{rot}\vec{F}\cdot(\vec{r_u}\times\vec{r_v})dA$$
$$= \iint_D (1,-1,-1)\cdot(2u,2v,1)dA$$
$$= \iint_D 2u-2v-1\ dA.$$

Passando para coordenadas polares temos:

$$\iint_S \text{rot}\,\vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (2\rho\cos\theta - 2\rho\,\text{sen}\,\theta - 1)\rho\ d\rho\ d\theta$$
$$= -\pi.$$

Exercícios

Seção 16.7 do Stewart: 1–32, 37–43.