Cálculo em Várias Variáveis

Continuidade e derivadas parciais

ICT-Unifesp

Mais detalhes na Seção 14.2 do livro do Stewart. Recurso disponível online pela Biblioteca do ICT.

Continuidade

Funções de duas variáveis

Continuidade

Definição

Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $(a, b) \in D_f$. *Dizemos que* $f(x, y)$ **é contínua em** (a, b) *se*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

Continuidade

Definição

Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $(a, b) \in D_f$. *Dizemos que* $f(x, y)$ **é contínua em** (a, b) *se*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

Observação

Quando f *é contínua em todos os pontos de* $A \subset D_f$, *dizemos que* f **é contínua em** A.

Observação

Se f *é contínua em* D_f, *dizemos simplesmente que* **f é contínua**.

Continuidade

Exemplo

A função constante $f(x, y) = k$ *é contínua,*

Continuidade

Exemplo

A função constante $f(x, y) = k$ *é contínua, pois* $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} k = k = f(a, b)$$

Continuidade

Exemplo

A função constante $f(x, y) = k$ *é contínua, pois* $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} k = k = f(a, b)$$

Exemplo

A função polinomial $f(x, y) = x$ *é contínua,*

Continuidade

Exemplo

A função constante $f(x,y)=k$ *é contínua, pois* $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} k = k = f(a,b)$$

Exemplo

A função polinomial $f(x,y)=x$ *é contínua, pois* $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a = f(a,b)$$

Continuidade

Exemplo

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ *e* $k \in \mathbb{R}$. *Então* $g(x, y) = kx^m y^n$ *é contínua,*

Continuidade

Exemplo

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ *e* $k \in \mathbb{R}$. *Então* $g(x, y) = kx^m y^n$ *é contínua, pois* $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x, y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} kx^m y^n = ka^m b^n = g(a, b)$$

Continuidade

Exemplo

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ *e* $k \in \mathbb{R}$. *Então* $g(x, y) = kx^m y^n$ *é contínua, pois* $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x, y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} kx^m y^n = ka^m b^n = g(a, b)$$

Exemplo

Se $P(x, y)$ *é uma função polinomial, então* $P(x, y)$ *é contínua,*

Continuidade

Exemplo

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ *e* $k \in \mathbb{R}$. *Então* $g(x,y) = kx^m y^n$ *é contínua, pois* $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} kx^m y^n = ka^m b^n = g(a,b)$$

Exemplo

Se $P(x,y)$ *é uma função polinomial, então* $P(x,y)$ *é contínua, pois* $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} P(x,y) = P(a,b)$$

Continuidade

Exemplo

Sejam $P(x,y)$ *e* $Q(x,y)$ *funções polinomiais com* $Q(a,b) \neq 0$. *Então a função racional*

$$h(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

é contínua em (a,b), *pois* $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ *t.q.* $Q(a,b) \neq 0$,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = \frac{P(a,b)}{Q(a,b)} = h(a,b).$$

Continuidade

Exemplo

A função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é contínua em $(0,0)$*?*

Continuidade

Exemplo

A função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é contínua em $(0,0)$*?*

Continuidade

Exemplo

A função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é contínua em $(0,0)$*?*

Continuidade

Teorema

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua em (a, b), com $Im(f) \subset B$, e $g : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em $c = f(a, b)$. Então $(g \circ f)(x, y) = g(f(x, y))$ é contínua em (a, b).

Demonstração.

Seja $\varepsilon > 0$ dado. Como g é contínua em $c = f(a, b)$, $\exists \delta_1 > 0$ tal que

$$\forall u \in B, \text{ com } 0 < |u - c| < \delta_1 \Longrightarrow |g(u) - g(c)| < \varepsilon.$$

Mas, f é contínua em (a, b). Logo, existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall (x, y) \in A, \text{ com } 0 < \|(x, y) - (a, b)\| < \delta \Longrightarrow |f(x, y) - f(a, b)| < \delta_1.$$

Logo, $|g(f(x, y)) - g(f(a, b))| < \varepsilon \Longrightarrow g(f(x, y))$ é contínua em (a, b). □

Continuidade

Exemplo

A função $h(x, y) = e^{x+y}$ *é contínua.*

De fato, já vimos que a função $f(x, y) = x + y$ *é contínua. Como* $g(u) = e^u$ *é contínua, segue que* $g(f(x, y)) = e^{x+y} = h(x, y)$ *também é contínua.*

Continuidade

Teorema

Sejam $f(x,y)$ e $g(x,y)$ funções contínuas em (a,b) e seja $k \in \mathbb{R}$ uma constante. Então

$$f(x,y)+g(x,y),\ \ kf(x,y)\ \ \text{e}\ \ f(x,y)g(x,y)$$

são contínuas em (a,b). Além disso, se $g(a,b) \neq 0$, então $\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ é contínua em (a,b).

Demonstração.

Exercício (olhar teorema análogo para limites). □

Continuidade

Exemplo

Determine os pontos de continuidade da função

$$f(x,y) = \begin{cases} x\,cos\,\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Continuidade

Funções de três ou mais variáveis

Funções de três ou mais variáveis

As definições e propriedades de funções contínuas são análogas para funções de três ou mais variáveis:

Definição

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $(a, b, c) \in A$. *Dizemos que* $f(x, y, z)$ **é contínua em** (a, b, c) *se*

$$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x, y, z) = f(a, b, c).$$

Derivadas parciais

Motivação

Motivação

Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função e $(a, b) \in A$. Fixando $y = b$, definimos a **função de uma variável** $u(x) = f(x, b)$.

Motivação

Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função e $(a, b) \in A$.
Fixando $y = b$, definimos a **função de uma variável** $u(x) = f(x, b)$.

Se u **for diferenciável (derivável)** em a, podemos calcular $u'(a)$:

Motivação

Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função e $(a, b) \in A$.
Fixando $y = b$, definimos a **função de uma variável** $u(x) = f(x, b)$.

Se u **for diferenciável (derivável)** em a, podemos calcular $u'(a)$:

$$u'(a) = \lim_{x \to a} \frac{u(x) - u(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}$$

ou, equivalentemente,

$$u'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{u(a + h) - u(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

Motivação

Analogamente, tomando $x = a$, definimos $v(y) = f(a, y)$. Se esta função for diferenciável em b, temos:

$$v'(b) = \lim_{y \to b} \frac{v(y) - v(b)}{y - b} = \lim_{y \to b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}$$

ou, equivalentemente,

$$v'(b) = \lim_{h \to 0} \frac{v(b + h) - v(b)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$$

Motivação

Assim, as derivadas das funções $u(x) = f(x, b)$ e $v(y) = f(a, y)$ em a e b dão uma ideia da variação instantânea de $f(x, y)$ no ponto (a, b) nas direções dos eixos x e y, respectivamente.

Derivadas parciais

Definição

Definição

Definição

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $(a, b) \in A$. *Definimos a* **derivada parcial de** f **em relação a** x *no ponto* (a, b), *denotada por* $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$, *como o limite*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h},$$

caso este limite exista.

Definição

Definição

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a, b) \in A$. Definimos a **derivada parcial de f em relação a y** *no ponto (a, b), denotada por $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$, como o limite*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h},$$

caso este limite exista.

Definição

Observação

Definimos, de maneira análoga, derivadas parciais de funções com três ou mais variáveis:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b,c)-f(a,b,c)}{h},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h,c)-f(a,b,c)}{h},$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b,c+h)-f(a,b,c)}{h},$$

caso estes limites existam.

Definição

Observação

Seja o conjunto

$$B = \left\{ (a, b) \in A \,:\, \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \text{ existe} \right\}$$

Então podemos definir a **função derivada parcial** *de f em relação a x, ou simplesmente,* **derivada parcial** *de f em relação a x, para todo $(x, y) \in B$, por:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

Definição

Observação

Analogamente, definimos **derivada parcial de f em relação a y**:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

Derivadas parciais

As derivadas parciais $f_x(a,b)$ e $f_y(a,b)$ podem ser interpretadas como as taxas de variação instantâneas de f no ponto $(a, b, f(a, b))$ na direção dos eixos x e y:

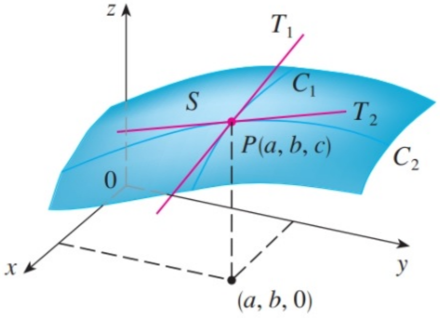

Figura: Stewart, J.; *Cálculo* - Volume 2

Definição

Dica

Para obter a função derivada parcial, basta considerar **as outras variáveis como constantes** *e derivar com relação à variável desejada.*

Definição

Dica

Para obter a função derivada parcial, basta considerar **as outras variáveis como constantes** *e derivar com relação à variável desejada.*

Exemplo

Calcule as derivadas parciais da função $f(x, y) = x^2y - 4y$.

Observação

A derivada parcial de f com respeito a x também pode ser denotada por

$$f_x, \qquad \partial_x f, \qquad D_x f, \qquad D_1 f, \qquad \frac{\partial}{\partial x} f.$$

Notações análogas são adotadas para $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Exemplo

Calcule as derivadas parciais da função

$$f(x, y) = x^2 \cos y + \operatorname{sen} x \cos y.$$

Derivadas parciais

Exemplo

Calcule as derivadas parciais da função

$$f(x,y) = x^2 \cos y + \operatorname{sen} x \cos y.$$

Exemplo

Calcule as derivadas parciais da função

$$g(x,y,z) = \frac{x \operatorname{sen} y}{z^2}.$$

Derivadas parciais

Observação

Ambas notações $\dfrac{df}{dx}(x, y)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ *existem, são* **distintas** *e não podem ser confundidas!*

$\dfrac{df}{dx}(x, y)$ *indica que* $y = y(x)$ *é função de* x

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ *indica que* x *e* y *são variáveis independentes.*

Derivadas parciais

Exemplo

Seja $f(x, y) = xy$. *Então*

$$\frac{df}{dx}(x, y) = y + x\frac{dy}{dx} \quad \neq \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y$$

Exercícios

Seção 14.2 do Stewart: 37,38, 41–50, 57.
Seção 14.3 do Stewart: 3, 4, 5, 7, 9–36.