Universidade Federal do ABC

Estudos Continuados Emergenciais

1º Quadrimestre de 2020

Professora Dra. Ana Claudia da Silva Moreira

Funções de Várias Variáveis

Parte 5 - Integrais Duplas

1 Objetivo

Estamos começando a quarta semana de Estudos Continuados Emergenciais. Semana passada, concluímos nossos estudos sobre diferenciabilidade de funções de várias variáveis, estudando máximo e mínimos. Nesta semana começamos a estudar integração de campos escalares. O objetivo dessas notas de aula é expor de maneira suscinta o conteúdo oral e escrito que seria dado nas aulas presenciais sobre este assunto. Exemplos são dados para fixar os conceitos.

2 Integrais Duplas

2.1 Integrais duplas sobre retângulos

Vamos começar fazendo uma breve recordação de como definimos integral de uma função de uma variável real.

Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função real e $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$. Para cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, com i variando de 1 à n, seja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ o comprimento do subintervalo e $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ um ponto qualquer do subintervalo (chamado de ponto amostral). Denotaremos por Δ o maior de todos os Δx_i. Então, definimos

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i.$$

Se $f(x) \geq 0$, a integral acima representa a área sob o gráfico de $f(x)$, entre a e b,

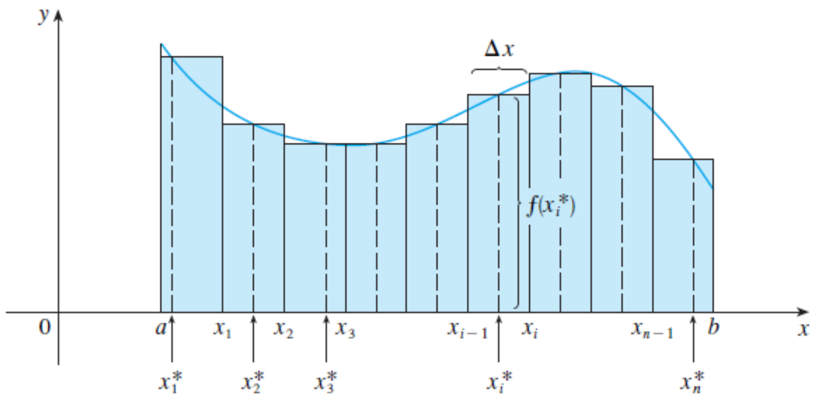


Figura do Stewart, vol. 2: o Stewart assume que os subintervalos da partição têm todos o mesmo comprimento Δx, como aparece na figura, para definir a integral de a até b. Isto porém, não é necessário, como vimos.

Para funções de várias variáveis a definição é feita de maneira análoga.

Considere uma função $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ definida em um retângulo do $\mathbb{R}^2$,

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d\}.$$

Uma partição de R é um conjunto de pares ordenados

$$P = \{(x_i, y_j) : i = 0, 1, 2, \ldots, n, j = 0, 1, 2, \ldots, m\},$$

tais que

$$P_1 = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

é uma partição do intervalo $[a, b]$ e

$$P_2 = \{c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{n-1} < y_m = d\}$$

é uma partição do intervalo $[c, d]$. Seja

$$\Delta = \text{ máx } \{\Delta x_i, \Delta y_j, \forall i = 0, 1, 2, \ldots, n, j = 0, 1, 2, \ldots, m\}.$$

A partição P determina, em R, a existência de $n \cdot m$ subretângulos

$$R_{ij} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}.$$

Sejam $(x_i^*, y_j^*) \in R_{ij}$ pontos amostrais em cada subretângulo.

Definição 1. *A integral dupla de f sobre o retângulo*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

é denotada e definida por

$$\iint_R f(x, y)dA = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j,$$

se o limite existe. Nesse caso, dizemos que f é (Riemann-)integrável.

A partícula dA é o chamado elemento de área, representando a área do subretângulo infinitesinal de lados dx, dy.

Se $f(x,y) \geq 0$, a integral dupla calcula o volume do sólido abaixo do gráfico de f e acima do retângulo R.

É importante saber que toda função contínua é integrável. Mais do que isso, se f é limitada em um retângulo R e contínua, exceto em um número finito de curvas suaves por partes, então f é integrável em R.

Proposição 1. *Sejam f e g funções integráveis em um retângulo R e $c \in \mathbb{R}$. Valem as propriedades:*

1. $\displaystyle\iint_R f(x,y) + g(x,y)dA = \iint_R f(x,y)dA + \iint_R g(x,y)dA,$
2. $\displaystyle\iint_R c \cdot f(x,y)dA = c \cdot \iint_R f(x,y)dA,$
3. *Se* $f \geq g$ *em* $\mathbb{R}$, *então* $\displaystyle\iint_R f(x,y)dA \geq \iint_R g(x,y)dA.$
4. *Em particular, se* $f \geq 0$ *em* $\mathbb{R}$, *então* $\displaystyle\iint_R f(x,y)dA \geq 0.$

2.2 Integrais Iteradas e o Teorema de Fubbini

Seja $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ um retângulo e seja $f(x,y)$ uma função de duas variáveis integrável em R. Fixe $y \in [c,d]$ e considere a função de uma variável

$$g(x) = f(x,y).$$

Daí, se para cada $y \in [c,d]$, a função g for integrável em $[a,b]$, defina

$$\alpha(y) = \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x,y)dx.$$

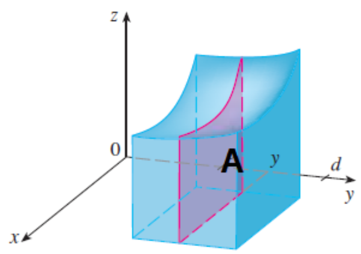


Figura do Stewart, vol. 2: se $f(x,y) \geq 0$, observe que $\alpha(y)$ corresponde à área da região A.

Então, a função $\alpha(y)$ será integrável em $[c, d]$ e

$$\begin{aligned}\iint\limits_R f(x,y)dxdy &= \int_c^d \alpha(y)dy \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy\end{aligned}$$

Analogamente, podemos definir uma função $\beta(x)$ e escrever

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \int_a^b \beta(x)dx.$$

Faça isto!

Temos, assim, o conhecido Teorema de Fubbini.

Teorema 1. *Seja $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ um retângulo em $\mathbb{R}^2$ e $f(x,y)$ uma função integrável em R. Assuma que $\displaystyle\int_a^b f(x,y)dx$ exista para cada $y \in [c,d]$ e que $\displaystyle\int_c^d f(x,y)dy$ exista para cada $x \in [a,b]$, então*

$$\begin{aligned}\iint\limits_R f(x,y)dA &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy.\end{aligned}$$

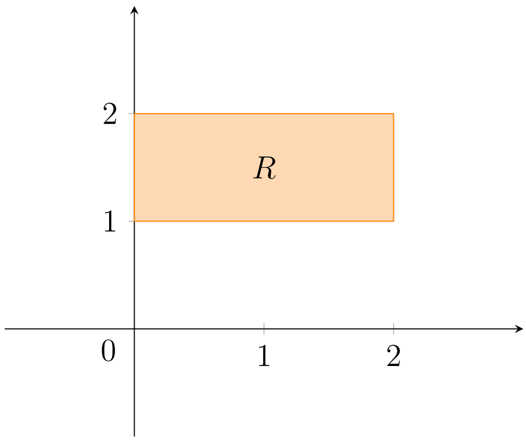
As integrais acima, em que se troca a ordem de integração, são chamadas integrais iteradas (porque integramos primeiro em uma variável e depois *repetimos* a integração, integrando na outra variável).

O Teorema de Fubbini nos diz que para calcularmos o valor de uma integral dupla de uma função de duas variáveis, basta calcular duas integrais de f considerando-a função de uma variável de cada vez.

Exemplo 1. *Resolva a integral $\iint\limits_R (x - 3y^2)dA$, onde*

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}.$$

Solução. Queremos calcular a integral dupla da função $f(x,y) = x - 3y^2$, cujo domínio é $\mathbb{R}^2$, sobre o retângulo R, esboçado abaixo,



Usamos o Teorema de Fubbini para escrever

$$\iint\limits_R (x-3y^2)dA = \int_1^2 \left(\int_0^2 (x-3y^2)dx \right) dy.$$

Observe que, dentro dos parênteses, vamos integrar em x, portanto os limites de integração obedecem a variação de x, que é entre 0 e 2. A integral de fora dos parênteses é uma integral em y, portanto, os limites de integração obedecem à variação de y, que é entre 1 e 2.

Começamos resolvendo a integral dentro dos parênteses. A situação é semelhante à da derivada parcial, só que agora vamos integrar a função $(x-3y^2)$ em x e vamos considerar y como se fosse uma constante. Temos

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left(\int_0^2 (x-3y^2)dx \right) dy &= \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2}\bigg|_0^2 - 3xy^2\bigg|_0^2 \right) dy \\ &= \int_1^2 \left(2-6y^2\right) dy\end{aligned}$$

Atenção no momento de avaliar a função nos limites de integração. Como x é nossa variável, e não y, é apenas x que assume os valores dos limites de integração nesta etapa.

Para concluir, vamos integrar a função obtida, $2-6y^2$, com respeito à y,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left(\int_0^2 (x-3y^2)dx \right) dy &= \int_1^2 \left(2-6y^2\right) dy \\ &= 2y\bigg|_1^2 - 6\frac{y^3}{3}\bigg|_1^2 \\ &= -12\end{aligned}$$

Agora, vamos verificar que o resultado se mantém ao trocarmos a ordem de integração.

Procedendo de maneira análoga, fazemos

$$\begin{aligned}
\iint\limits_R (x-3y^2)dA &= \int_0^2 \left(\int_1^2 (x-3y^2)dy\right) dx \\
&= \int_0^2 \left(xy\Big|_1^2 - \cancel{3}\frac{y^3}{\cancel{3}}\Big|_1^2 \right) dx \\
&= \int_0^2 (2x - x - 8 + 1)\, dx \\
&= \int_0^2 (x-7)\, dx \\
&= \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 - 7x\Big|_0^2 \\
&= -12
\end{aligned}$$

☕

Exemplo 2. *Resolva a integral* $\iint\limits_R y \operatorname{sen}(xy) dA$*, no retângulo* $R = [1,2] \times [0,\pi]$*, trocando a ordem de integração.*

Solução. Observe que x varia entre 1 e 2 e y varia entre 0 e π. Assim, começamos escrevendo a integral como

$$\iint\limits_R y \operatorname{sen}(xy) dxdy = \int_1^2 \left(\int_0^\pi y \operatorname{sen}(xy) dy \right) dx.$$

Se ficar mais fácil, podemos resolver, separadamente, a integral "de dentro",

$$\int_0^\pi y \operatorname{sen}(xy) dy.$$

Para resolver esta integral com respeito a y, vamos aplicar a técnica de integração por partes, fazendo

$$\begin{aligned}
u &= y & dv &= \operatorname{sen}(xy)dy \\
du &= dy & v &= -\frac{\cos(xy)}{x}
\end{aligned}$$

(lembre que x se comporta como constante).

Lembrete: É fácil lembrar a integração por partes, basta lembrar-se da regra (de derivação) do produto e integrá-la usando o Teorema Fundamental do Cálculo:

$$(uv)' = du \cdot v + u \cdot dv \;\Rightarrow\; u \cdot dv = (uv)' - du \cdot v \;\Rightarrow\; \int u \cdot dv = uv - \int du \cdot v$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}\int_0^\pi y\,\mathrm{sen}(xy)dy &= \Big[-\frac{y}{x}\cos(xy)\Big]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos(xy)}{x}dy\\ &= -\frac{\pi}{x}\cos(\pi x) + \left[\frac{\mathrm{sen}(xy)}{x^2}\right]_0^\pi\\ &= -\frac{\pi}{x}\cos(\pi x) + \frac{\mathrm{sen}(\pi x)}{x^2}\end{aligned}$$

Voltando à nossa integral iterada, temos

$$\begin{aligned}\int_1^2\left(\int_0^\pi y\,\mathrm{sen}(xy)dy\right)dx &= \int_1^2 -\frac{\pi}{x}\cos(\pi x) + \frac{\mathrm{sen}(\pi x)}{x^2}dx\\ &= \int_1^2 -\frac{\pi}{x}\cos(\pi x)dx + \int_1^2 \frac{\mathrm{sen}(\pi x)}{x^2}dx\end{aligned}$$

Para calcular a primeira integral, vamos usar integração por partes novamente, fazendo

$$u = -\frac{1}{x} \qquad dv = \pi\cos(\pi x)dx$$

$$du = \frac{1}{x^2}dx \qquad v = \mathrm{sen}(\pi x)$$

daí

$$\begin{aligned}\int_1^2\left(\int_0^\pi y\,\mathrm{sen}(xy)dy\right)dx &= \int_1^2 -\frac{\pi}{x}\cos(\pi x)dx + \int_1^2 \frac{\mathrm{sen}(\pi x)}{x^2}dx\\ &= -\frac{\mathrm{sen}(\pi x)}{x}\bigg|_1^2 - \int_1^2 \frac{\mathrm{sen}(\pi x)}{x^2}dx + \int_1^2 \frac{\mathrm{sen}(\pi x)}{x^2}dx\\ &= -\frac{\mathrm{sen}(2\pi)}{2} + \mathrm{sen}(\pi)\\ &= 0\end{aligned}$$

Agora, vamos inverter a ordem de integração, escrevendo

$$\iint_R y\,\mathrm{sen}(xy)dxdy = \int_0^\pi\left(\int_1^2 y\,\mathrm{sen}(xy)dx\right)dy.$$

Como apenas a função seno depende de x, não há necessidade de usar integração por partes aqui. De fato, nesta ordem, a integração fica muito mais simples

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\left(\int_1^2 y\,\mathrm{sen}(xy)dx\right)dy &= \int_0^{\pi} -\cos(xy)\Big|_1^2\,dy\\
&= \int_0^{\pi} -\cos(2y)+\cos(y)dy\\
&= \left[-\frac{\mathrm{sen}(2y)}{2}+\mathrm{sen}(y)\right]_0^{\pi}\\
&= 0
\end{aligned}$$

☕

O exemplo anterior nos mostra que, além de obtermos sempre o mesmo resultado, independente da ordem de integração, em alguns casos, uma escolha astuciosa para a ordem de integração pode nos poupar muito trabalho. Como saber qual é a melhor escolha? Fazendo muitos exercícios para "pegar o jeito".

Exemplo 3. *Calcule* $\displaystyle\int_0^1\int_1^2 xy\ dxdy.$

Solução. Fazemos

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_1^2 xy\ dxdy &= \int_0^1\left[\frac{x^2}{2}y\right]_1^2 dy\\
&= \int_0^1 2y-\frac{1}{2}y\ dy\\
&= \left[\frac{3}{2}-\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

☕

Se $f(x,y)=g(x)\cdot h(y)$, podemos escrever

$$\iint f(x,y)\ dxdy = \int g(x)\ dx\cdot\int h(y)\ dy.$$

Note que isso ocorre no exemplo anterior, isto é,

$$\int_0^1\left(\int_1^2 xy\ dx\right)dy = \int_0^1 y\left(\int_1^2 x\ dx\right)dy = \int_0^1 y\ dy\cdot\int_1^2 x\ dx,$$

e, integrando desta forma, obtém-se o mesmo resultado (experimente!).

2.3 Integrais duplas sobre regiões mais gerais

Na seção anterior vimos como integrar funções de duas variáveis em regiões retangulares do plano, mas o que acontece se nosso domínio de integração for uma região mais geral, compreendida entre duas curvas, por exemplo? Nesta seção aprenderemos como lidar com este problema.

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto limitado contido no domínio de $f(x, y)$. Suponha que queiramos integrar f sobre D. Observe que, como D é limitado, existe um retângulo R tal que $D \subset R$ (Por quê? Qual é a definição de conjunto limitado?).

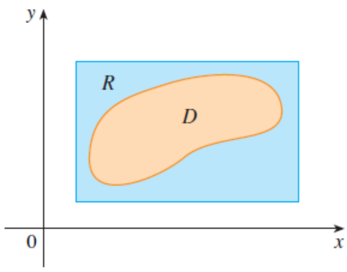


Figura do Stewart, vol. 2.

Suponha que queiramos calcular a integral de f sobre D. O que fazemos? Até agora só aprendemos a calcular integrais sobre retângulos, então não temos outra alternativa se não trabalhar com o que temos. Consideramos uma função auxiliar

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{se } x \in D, \\ 0, & \text{se } \in R \backslash \{D\} \end{cases} \tag{1}$$

(note que o domínio de F é R) e definimos a integral de f sobre uma região limitada qualquer como a integral de F sobre o retângulo R,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_R F(x, y) dx dy.$$

Obs.: A função f é integrável em D se D é limitado, f é contínua por partes e limitada em D e o conjunto dos pontos de descontinuidade de f é composto por pontos isolados ou curvas suaves por partes. Portanto, não importa se f não é contínua no bordo (fronteira) do conjunto D.

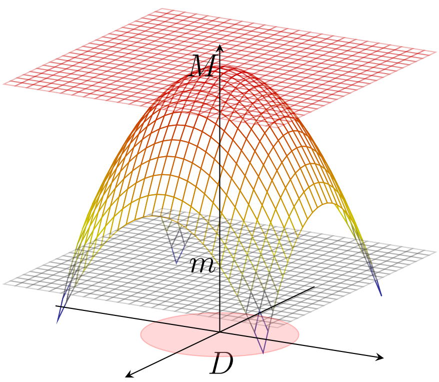
Proposição 2. *As quatro propriedades, vistas na* Proposição 1, *também são válidas para qualquer região limitada D. Além disso, temos*

5. *Se $D = D_1 \cup D_2$, então*
$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy,$$

6. $\displaystyle\iint\limits_{D} 1dxdy = \acute{A}rea(D) =$ *o volume do sólido de base D com altura $h = 1$,*

7. *Se $m \leq f(x,y) \leq M$, temos*
$$m \cdot \acute{A}rea(D) \leq \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy \leq M \cdot \acute{A}rea(D).$$

Não faremos a demonstração das propriedades, contudo observe que, na propriedade 7, como $m \leq f(x,y) \leq M$, o gráfico de f está entre dois planos $z = m$ e $z = M$. Se $f(x,y) \geq 0$, fica fácil ver o volume da região sob o gráfico de f e acima de D está entre os volumes dos sólidos de base D e alturas m e M, respectivamente.



Analiticamente, temos
$$m \leq f(x,y) \leq M \;\Rightarrow\; \iint\limits_{D} mdxdy \leq \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy \leq \iint\limits_{D} Mdxdy,$$

e pelas propriedade 2 e 6,
$$\iint\limits_{D} mdxdy = m\iint\limits_{D} 1dxdy = m\text{Área}(D),$$

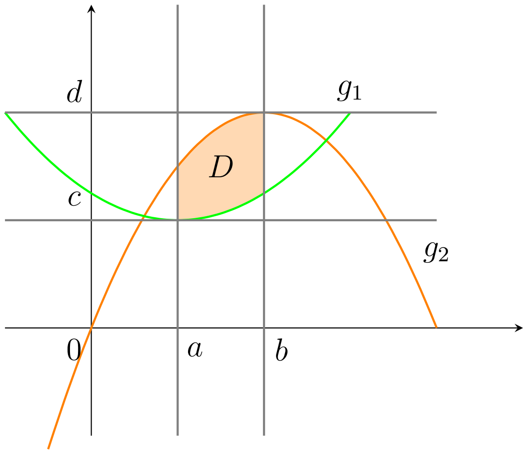
o mesmo vale para a integral de M e o resultado segue.

Em nossos estudos, vamos nos deparar, basicamente, com dois tipos de região de integração.

2.3.1 Regiões do tipo I

Regiões do tipo I são aquelas compreendidas entre os gráficos de duas funções contínuas de x,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}.$$



A região D está contida no retângulo $[a, b] \times [c, d]$. Neste caso, observe que a função auxiliar, $F(x, y)$, definida em (1), é igual a zero se $c < y < g_1(x)$ e $g_2(x) < y < d$. Daí, temos

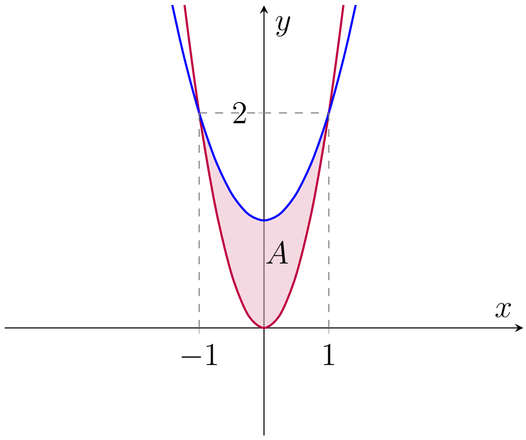
$$\begin{aligned}
\iint\limits_D f(x, y)dA &= \int_a^b \int_c^d F(x, y)dydx \\
&= \int_a^b \left(\int_c^{g_1(x)} F(x, y)dy + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x, y)dy + \int_{g_2(x)}^{d} F(x, y)dy \right) dx \\
&= \int_a^b \int_c^{g_1(x)} 0dydx + \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dydx + \int_a^b \int_{g_2(x)}^{d} 0dydx \\
&= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dydx.
\end{aligned}$$

Exemplo 4. *Calcule a integral*

$$\iint\limits_A (x + 2y)\ dxdy,$$

onde A é a região entre as parábolas $y = 2x^2$ e $y = 1 + x^2$.

Solução. Vamos esboçar a região A:



Vemos que, enquanto x varia entre -1 e 1, y varia entre as duas curvas (funções de x). Logo, A é uma região do tipo I que pode ser descrita como

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1,\ 2x^2 \leq y \leq 1 + x^2\}.$$

Agora, temos informações bastante precisas para usar o Teorema de Fubbini para reescrever a integral do enunciado e resolvê-la:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_A x + 2y\ dxdy &= \int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y)\ dydx \\
&= \int_{-1}^{1} \left[xy + \cancel{2}\frac{y^2}{\cancel{2}} \right]_{2x^2}^{1+x^2} dx \\
&= \int_{-1}^{1} x(1 - x^2) + (1 + x^2)^2 - 2x^3 - (2x^2)^2\ dx \\
&= \int_{-1}^{1} -3x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x + 1\ dx \\
&= \left[-3\frac{x^5}{5} - 3\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{32}{15}
\end{aligned}$$

Observe com atenção a ordem de integração. Como os limites de integração em y dependem de x, não faz sentido integrarmos primeiro em x (integral de dentro) e depois em y, pois terminaríamos com incógnitas.

2.3.2 Regiões do tipo II

Regiões do tipo II são assim definidas,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h_1(y) \le x \le h_2(y),\ c \le y \le d\}.$$

Nesse caso,

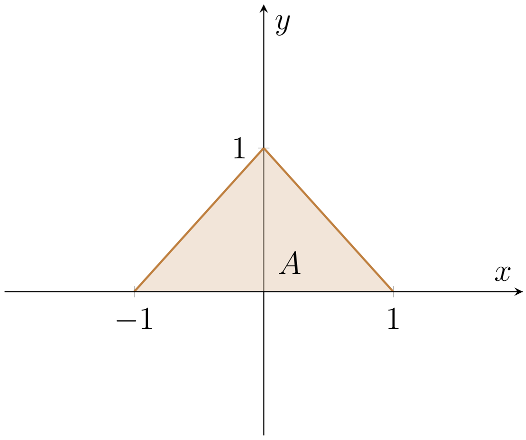
$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int_c^d \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y)dxdy.$$

Exemplo 5. *Calcule a integral*

$$\iint\limits_A xy\ dxdy,$$

onde A *é o triângulo de vértices* $(-1, 0), (0, 1)$ *e* $(1, 0)$.

Solução. Vamos começar, esboçando a região:



Vemos que x varia entre as duas retas que ligam $(-1, 0)$ à $(0, 1)$ e $(1, 0)$ à $(0, 1)$, enquanto y varia entre 0 e 1. Logo, trata-se de uma região do tipo II. Para escrevermos a integral é necessário descrevermos as retas como funções de y. Temos

$$y = 1 + x \ \Rightarrow\ x = y - 1 \quad \text{e} \quad y = 1 - x \ \Rightarrow\ x = 1 - y.$$

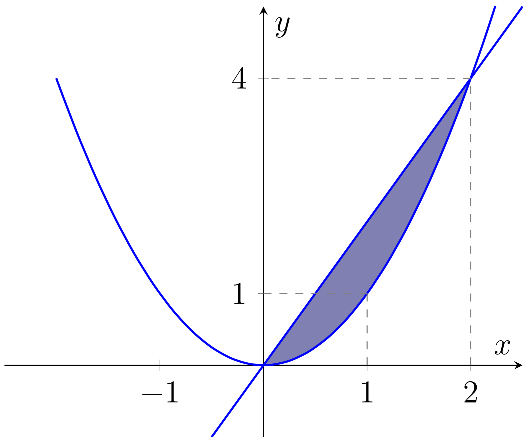
Daí,

$$\begin{aligned}
\iint\limits_A xy\ dxdy &= \int_0^1 \int_{y-1}^{1-y} xy\ dxdy \\
&= \int_0^1 \frac{x^2}{2}y\Big|_{y-1}^{1-y}\ dy \\
&= \int_0^1 \frac{(1-y)^2}{2}y - \frac{(y-1)^2}{2}y\ dy \\
&= \int_0^1 \frac{1-2y+y^2-y^2+2y-1}{2}y\ dy = 0
\end{aligned}$$

Algumas regiões podem ser interpretadas tanto como regiões do tipo I quanto como regiões do tipo II (você consegue observar isso no exemplo anterior?). Nestes casos devemos fazer uma escolha e, algumas vezes, uma opção é mais vantajosa do que a outra para facilitar as contas. Novamente, apenas a experiência vai nos ensinar como tomar a melhor decisão.

Exemplo 6. *Calcule o volume do sólido que está abaixo de $z = x^2 + y^2$ e acima da região A do plano-xy limitada pela reta $y = 2x$ e pela parábola $y = x^2$.*

Solução. Vamos esboçar a região A:



Lembre-se: a região A está no plano-xy, no domínio da função $f(x, y) = x^2 + y^2$, que queremos integrar. O gráfico de f está no $\mathbb{R}^3$ e o sólido S, cujo volume queremos calcular, tem por base a região A e por "topo" o gráfico de f.

Olhando para a região A, podemos descrevê-la de duas maneiras: como o conjunto dos pontos (x, y) do plano tais que

$$0 \leq x \leq 2 \quad \text{e} \quad x^2 \leq y \leq 2x,$$

ou tais que

$$0 \leq y \leq 4 \quad \text{e} \quad \frac{y}{2} \leq x \leq \sqrt{y}.$$

No primeiro caso, temos uma região do tipo I (y varia entre duas funções de x),

$$Vol(S) = \iint_A x^2 + y^2 \; dxdy = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} x^2 + y^2 \; dydx,$$

e no segundo caso, uma região do tipo II (x varia entre duas funções de y),

$$Vol(S) = \iint_A x^2 + y^2 \; dxdy - \int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} x^2 + y^2 \; dxdy.$$

Observe que para encontrar os limites de integração para descrever a região como tipo II, bastou inverter as funções $y = x^2$ e $y = 2x$ (escolhendo o sinal apropriado para a raiz quadrada).

Resolva as integrais e conclua a exercício.

Exemplo 7. *Calcule a integral*

$$\iint_A xy \; dxdy,$$

onde A é a região limitada por $y = x - 1$ e $y^2 = 2x + 6$.

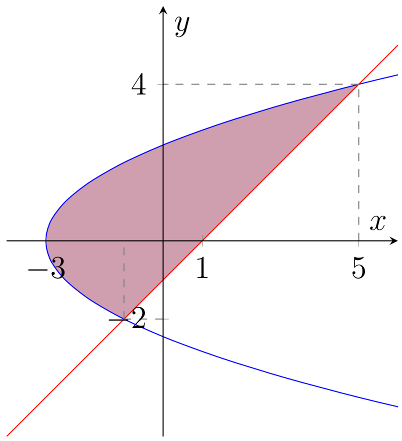
Solução. Observe que $y = x - 1$ é uma reta que passa pelos pontos $(1, 0)$ e $(0, -1)$. A equação $y^2 = 2x + 6$ descreve uma parábola com concavidade voltada para a direita e pode ser descrita como a união dos gráficos de duas funções $y = \pm\sqrt{2x + 3}$. Podemos calcular alguns pontos desta parábola para fazermos o esboço:

$$x = -3 \quad \Rightarrow \quad y = 0,$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 4,$$

$$x = -1 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 2,$$

por exemplo. E temos



O mais natural parece ser descrever a região A como tipo II, pois a parábola delimita a região à esquerda enquanto a reta delimita a região à direita. Nesse caso, temos

$$\frac{y^2-6}{2} \leq x \leq y+1, \quad \text{e} \quad -2 \leq y \leq 4,$$

e a integral fica

$$\iint_A xy \; dxdy = \int_{-2}^{4} \int_{\frac{y^2-6}{2}}^{y+1} xy \; dxdy.$$

Também é possível descrever a região como tipo I. Neste caso, é necessário considerar algumas subdivisões da região. Note que quando x varia entre -3 e -1, y varia entre os gráficos das funções $y = -\sqrt{2x+3}$ e $y = \sqrt{2x+3}$. Por outro lado, quando x varia entre -1 e 5, y está variando entre a reta $y = x-1$ e o gráfico da função $y = \sqrt{2x+3}$. Portanto,

$$-3 \leq x \leq -1, \quad -\sqrt{2x+3} \leq y \leq \sqrt{2x+3},$$
$$-1 \leq x \leq 5, \quad x-1 \leq y \leq \sqrt{2x+3},$$

e a integral fica

$$\iint_A xy \; dxdy = \int_{-3}^{-1} \int_{-\sqrt{2x+3}}^{\sqrt{2x+3}} xy \; dydx + \int_{-1}^{5} \int_{x-1}^{\sqrt{2x+3}} xy \; dydx.$$

Resolva as integrais e conclua o exercício. ☕

Aviso: este material está em sua primeira edição. Caso você encontre algum erro, inconsistência ou passagem duvidosa, por favor, entre em contato para que possamos esclarecer, melhorar e/ou corrigir o material. Agradeço e desejo bons estudos.