Representação 3D

Regina Célia Coelho

Definição do Plano no Espaço

- Para obter a exibição de um objeto tridimensional, precisamos dos valores das coordenadas dos vértices e das equações que descrevem os planos do polígono.

- Equação de uma superfície do plano:

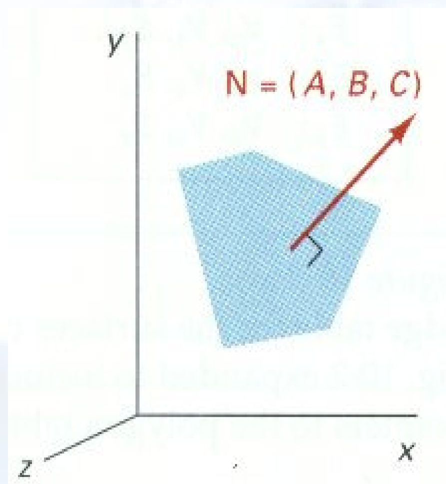
$$Ax + By + Cz + D = 0$$

sendo (x, y, z) um ponto qualquer no plano e A, B, C e D constantes.

Definição do Plano no Espaço

- Podemos obter os valores de A, B, C e D usando valores de coordenadas para 3 pontos não colineares no plano.

- A orientação da superfície de um plano no espaço pode ser determinada com o vetor normal ao plano.



Definição do Plano no Espaço

- Podemos identificar se um ponto está dentro ou fora da superfície do plano de acordo com o sinal de $Ax + By + Cz + D$:

  $Ax + By + Cz + D \leq 0$ $\rightarrow$ ponto (x,y,z) está dentro

  $Ax + By + Cz + D > 0$ $\rightarrow$ ponto (x,y,z) está fora

- Teste válidos para o sistema de coordenadas da regra da mão direita

Superfícies Quadráticas

- Classe de objetos descritas com equações do segundo grau (quadráticas): esferas, elipsóides, toro, parabolóides e hiperbolóides.

- Esferas

  Coordenadas cartesianas com r centrado na origem:

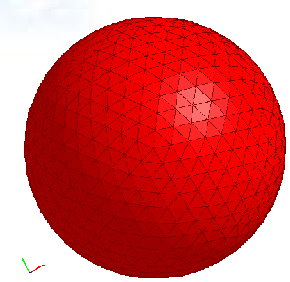
  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

  Forma paramétrica

  $x = r\cos\phi\cos\theta$ $\quad -\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2 \rightarrow$ *polar*

  $y = r\cos\phi\sin\theta$ $\quad -\pi \leq \theta \leq \pi$ *azimute*

  $z = r\sin\phi$



Superfícies Quadráticas

- Elipsóide: extensão da esfera, porém os raios nas 3 direções podem mudar.

Coordenadas cartesianas:

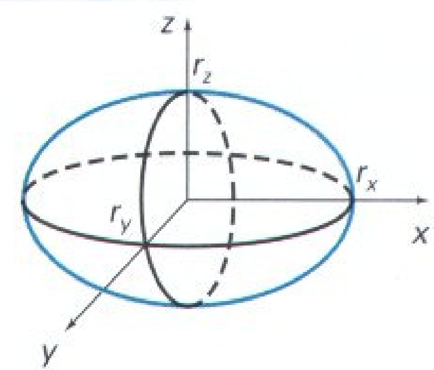
$$\left(\frac{x}{r_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{r_y}\right)^2 + \left(\frac{z}{r_z}\right)^2 = 1$$

Forma paramétrica

$x = r_x \cos\phi \cos\theta \qquad -\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$

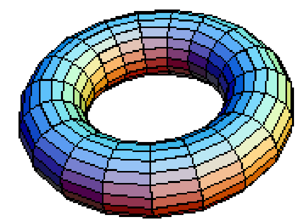
$y = r_y \cos\phi \sin\theta \qquad -\pi \leq \theta \leq \pi$

$z = r_z \sin\phi$



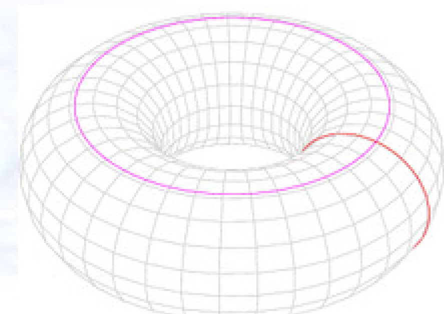
Superfícies Quadráticas

- Torus: objeto na forma de uma rosca



Coordenadas cartesianas (*r* é um valor de compensação):

$$\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+z^2=r^2$$



Forma paramétrica

$x = (R + r\cos\phi)\cos\theta \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$

$y = (R + r\cos\phi)\sin\theta \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$z = r\sin\phi$

R é o raio do círculo rosa (maior) e *r* é o raio do círculo vermelho (menor).

Superfícies Superquadráticas

- Generalização das representações quadráticas.
- É formada incorporando parâmetros adicionais nas equações quadráticas para fornecer maior flexibilidade para ajustar formas e objetos.
- O número de parâmetros adicionais é igual à dimensão do objeto: 1 parâmetro para curvas e 2 para superfícies.
- Aqui temos as super elipses e super elipsóides.

Superfícies Superquadráticas

- Super elipse: permite que os expoentes de *x* e *y* sejam variáveis

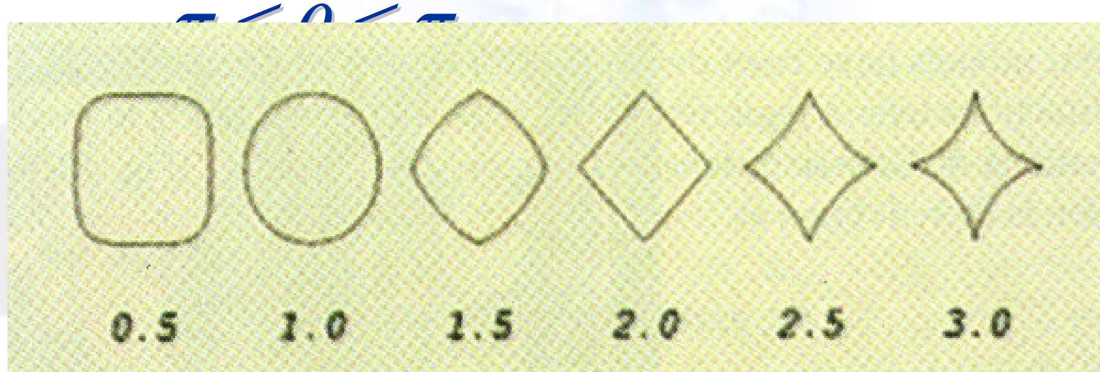
Coordenadas cartesianas:

$$\left(\frac{x}{r_x}\right)^{2/s} + \left(\frac{y}{r_y}\right)^{2/s} = 1$$

Forma paramétrica

$x = r_x \cos^s\theta$ $\qquad \pi \le \theta \le \pi$

$y = r_y \sin^s\theta$



Super elipse p/ vários parâmetros de *s* (*s*=1 é uma elipse) e $r_x = r_y$

Superfícies Superquadráticas

- Super elipsóide: obtida incorporando 2 parâmetros ao expoente

Coordenadas cartesianas:

$$\left[\left(\frac{x}{r_x}\right)^{2/s_2}+\left(\frac{y}{r_y}\right)^{2/s_2}\right]^{s_1/s_2}+\left(\frac{z}{r_z}\right)^{2/s_1}=1$$

Forma paramétrica

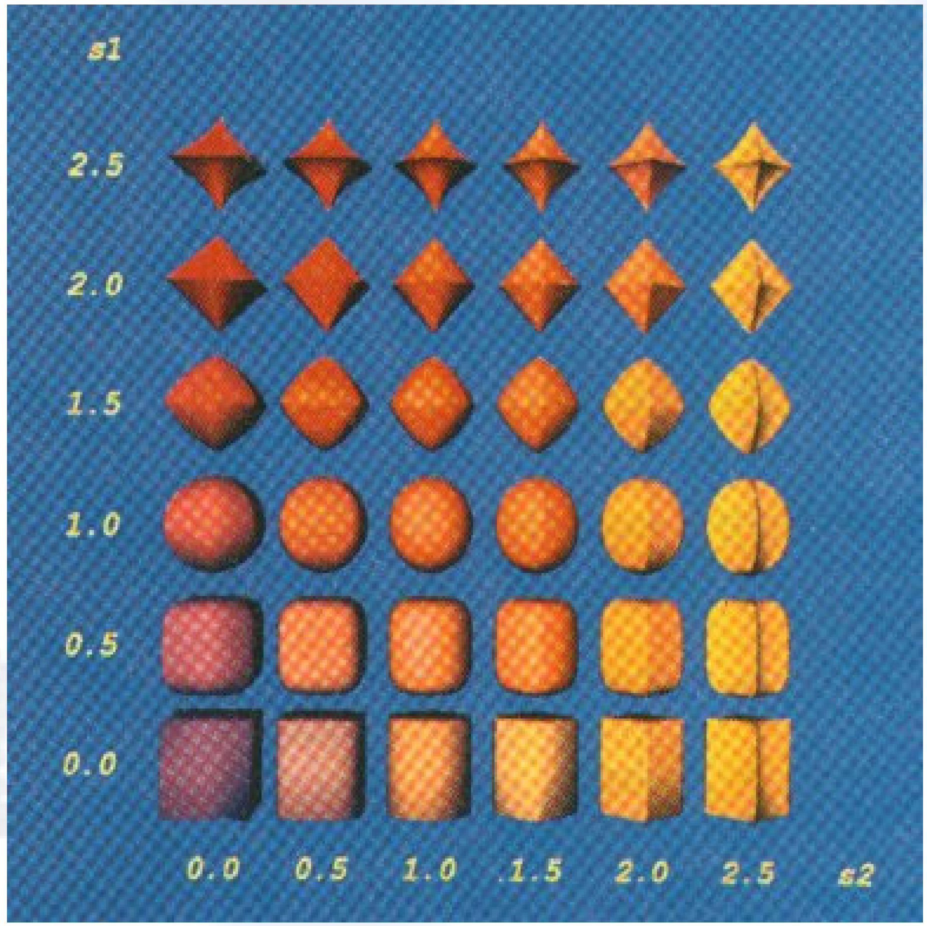
$$x=r_x\cos^{s_1}\varphi\cos^{s_2}\theta \qquad -\pi/2\le\varphi\le\pi/2$$

$$y=r_y\cos^{s_1}\varphi\, sin^{s_2}\theta \qquad -\pi\le\theta\le\pi$$

$$z=r_z\sin^{s_1}\varphi$$

Superfícies Super Quadráticas

Elipsóides c/ diferentes valores para os parâmetros s_x e s_y e c/ $r_x = r_y = r_z$



Geometria de Sólidos Construtiva

- Uma técnica para modelar sólidos é combinar os volumes ocupados pela sobreposição de objetos tridimensionais usando um conjunto de operações. Este método é chamado **Constructive Solid Geometry (CSG)**.

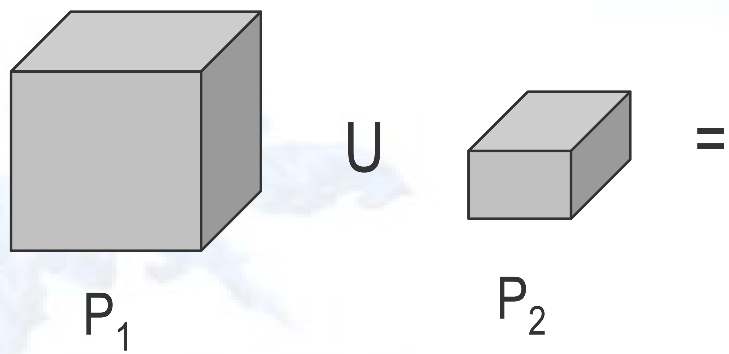
- Cria-se um novo volume aplicando união, interseção ou operações de diferença para volumes específicos.

CSG

- Começa com um conjunto inicial de objetos simples tridimensionais (primitivas) como bloco, pirâmides, cilindros, etc. e superfícies *splines* fechadas.
- Para criar nova forma 3D, primeiro selecionamos 2 primitivas e as arrastamos na posição desejada. Então selecionamos uma operação (união, interseção ou diferença) para combinar os volumes das duas primitivas.
- Este novo objeto pode se tornar uma primitiva e ser usado para formar outros objetos.

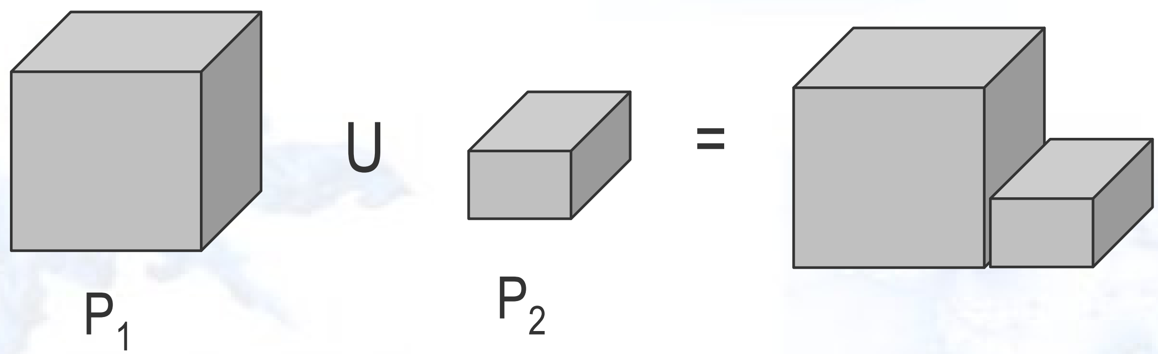
CSG

- Exemplos:



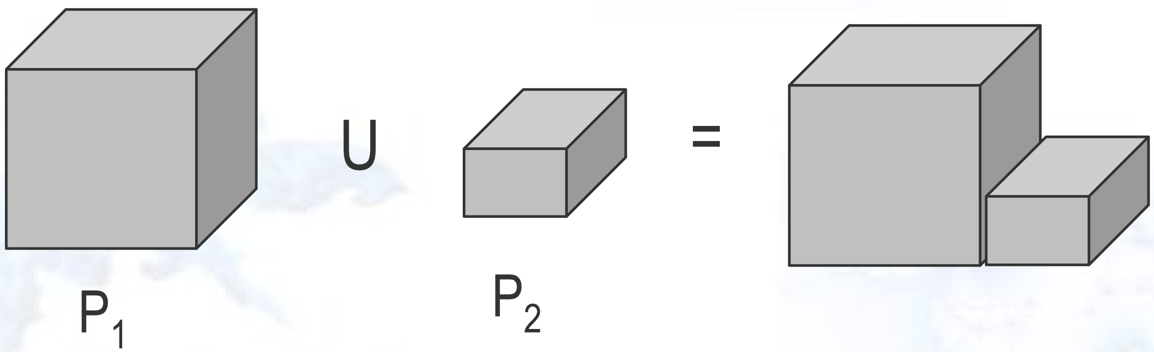
CSG

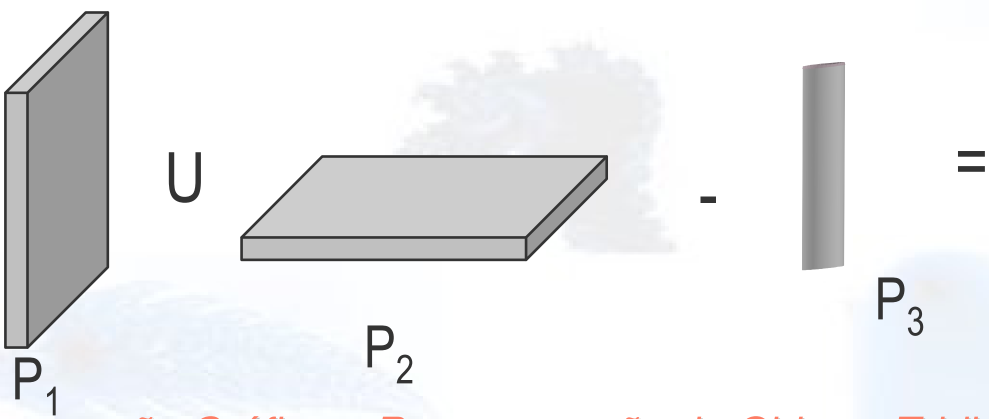
- Exemplos:



CSG

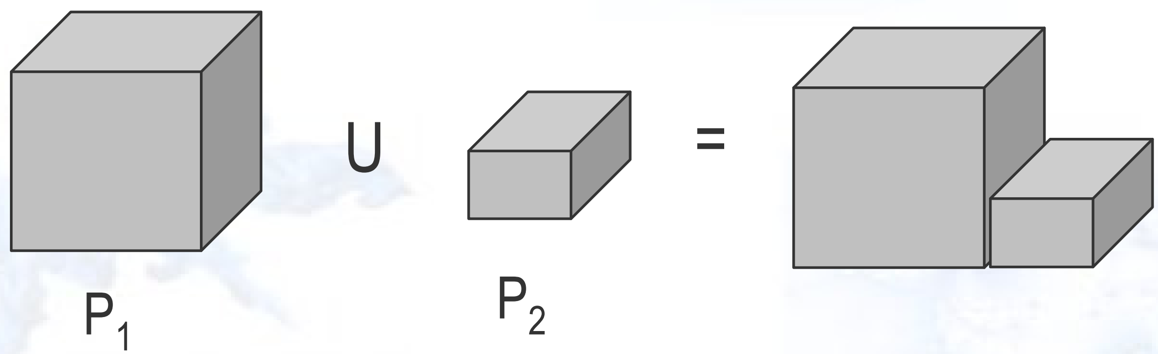
- Exemplos:

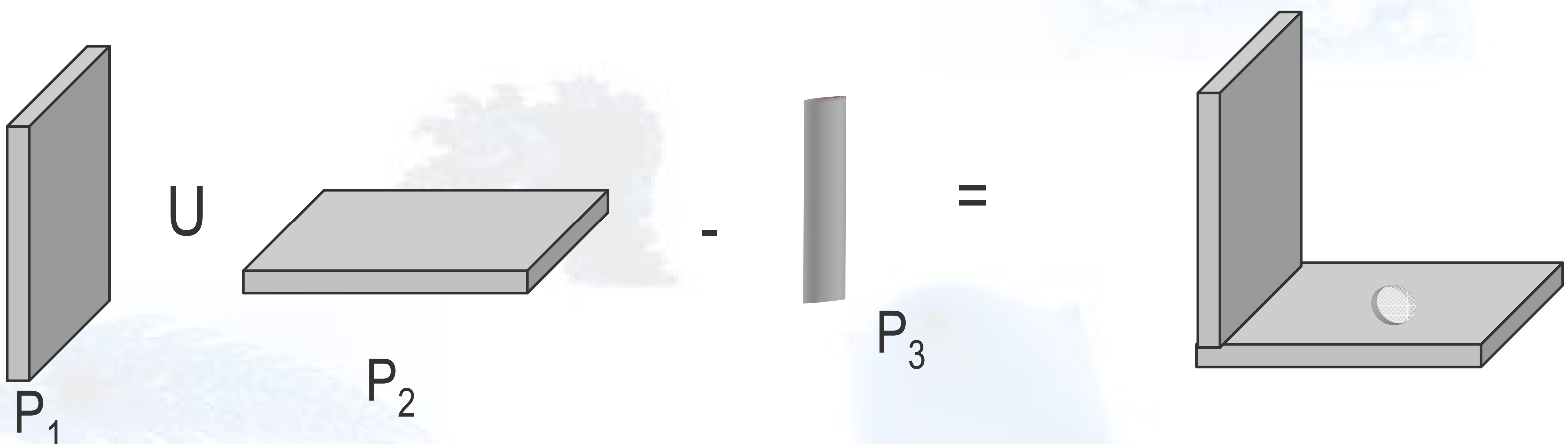




CSG

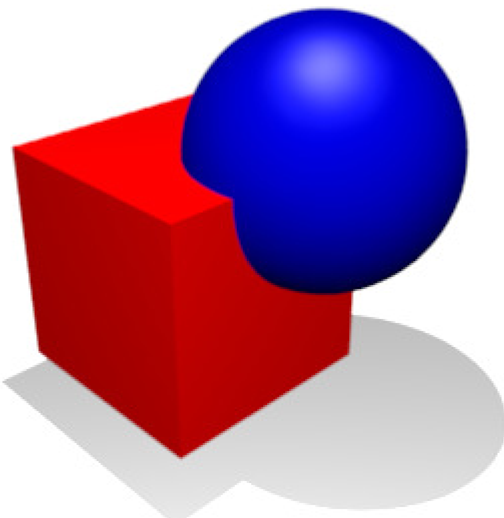
- Exemplos:



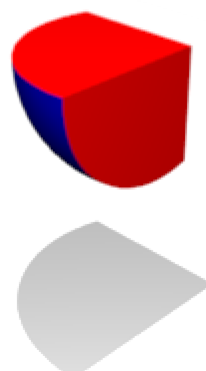


CSG

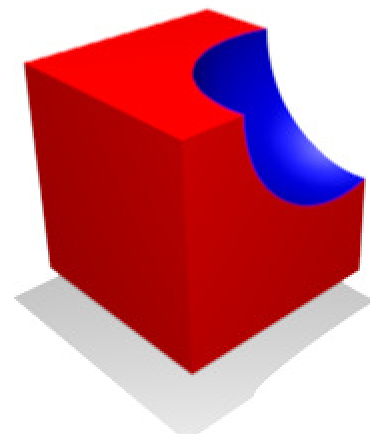
- Exemplos:



União



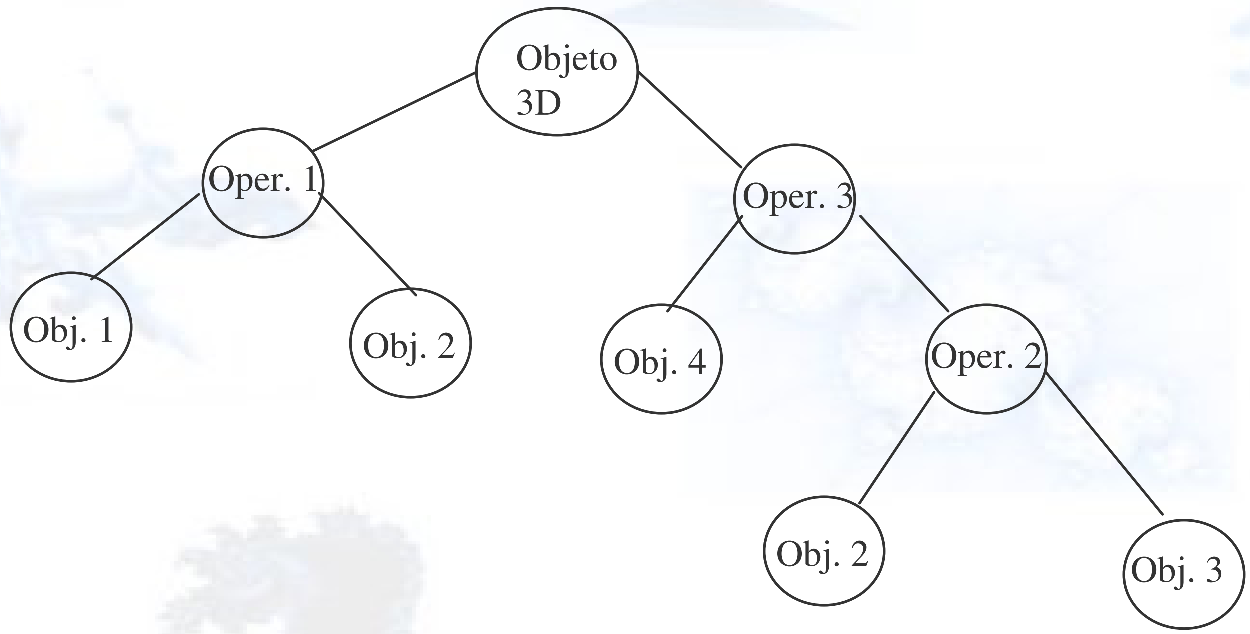
Interseção



Diferença

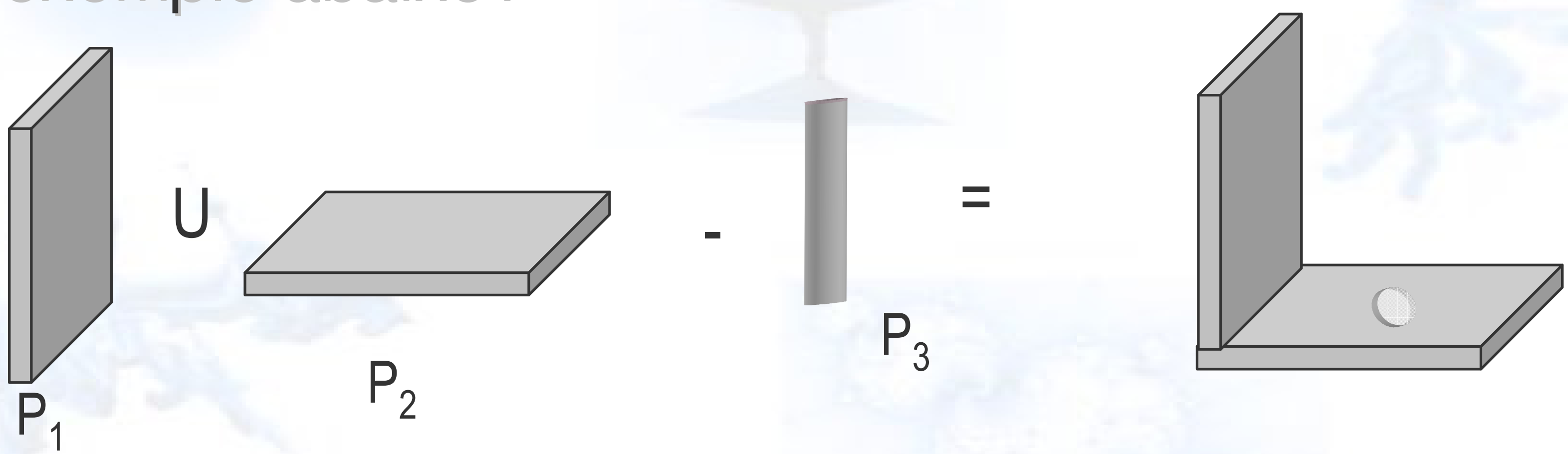
CSG

- O objeto formado usando CSG é representado com uma árvore binária:



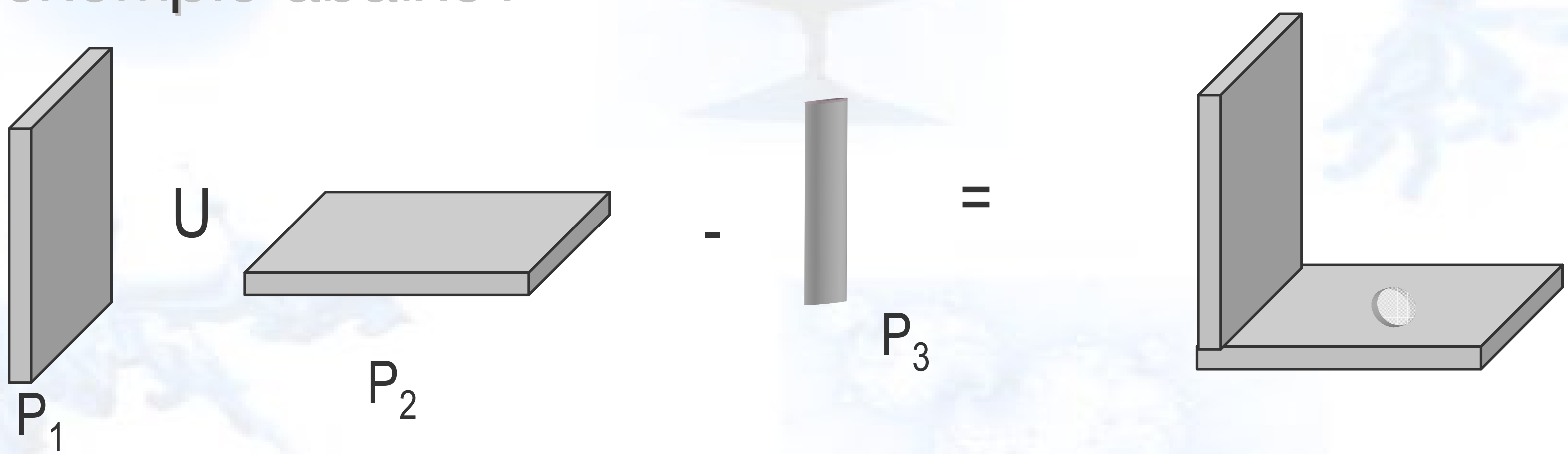
CSG

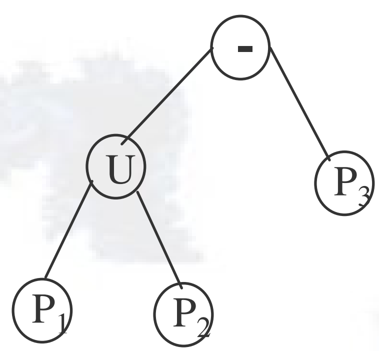
- Qual a árvore que representa a formação do objeto do no exemplo abaixo?



CSG

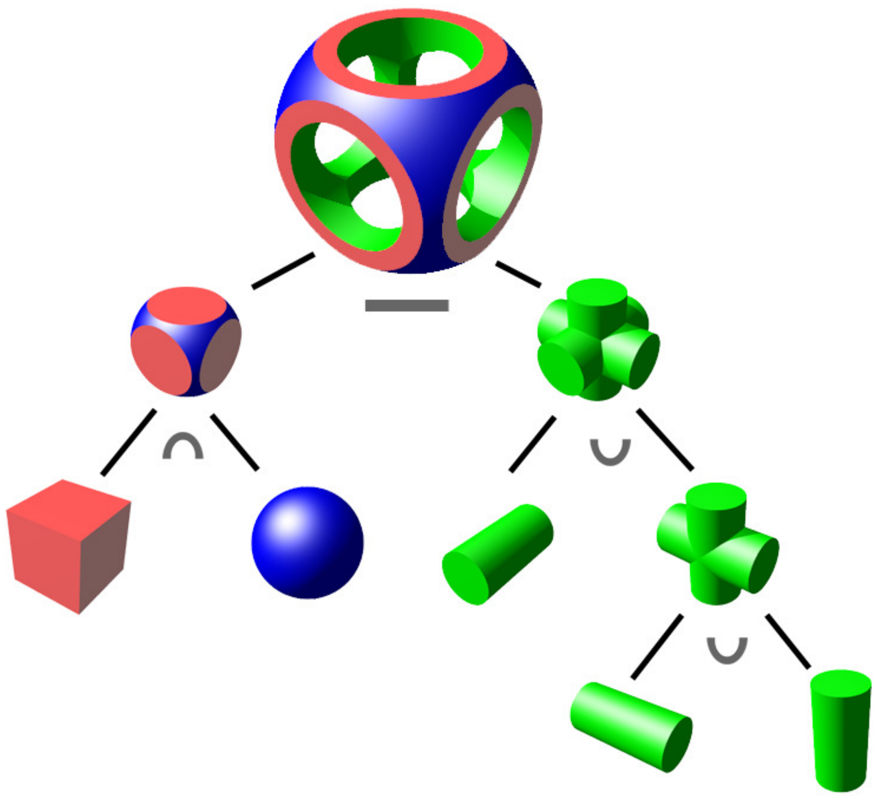
- Qual a árvore que representa a formação do objeto do no exemplo abaixo?





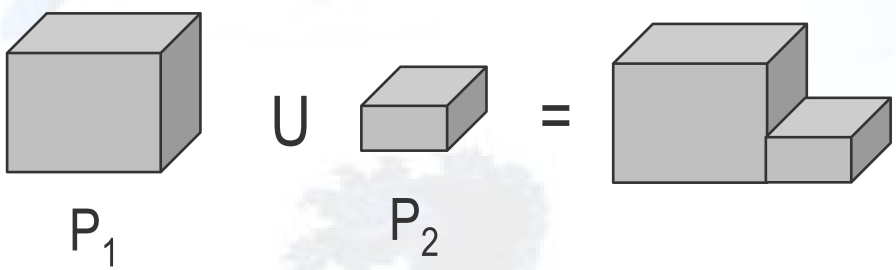
CSG

- Exemplo de árvore CSG



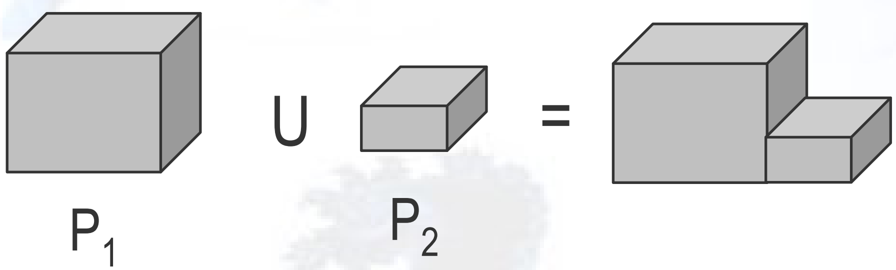
CSG

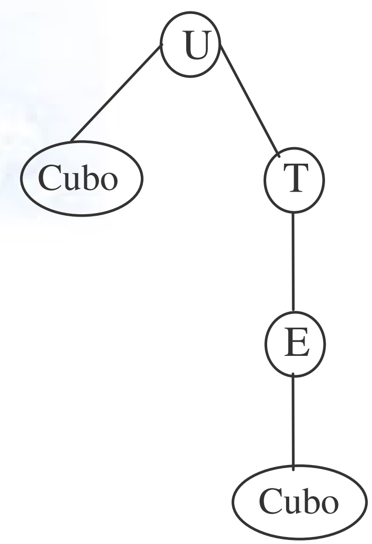
- Se incluirmos movimentos rígidos (transformações Geométricas) nas primitivas, no primeiro exemplo podemos obter a primitiva P_2 pelo escalonamento e translação de P_1 e a árvore seria:



CSG

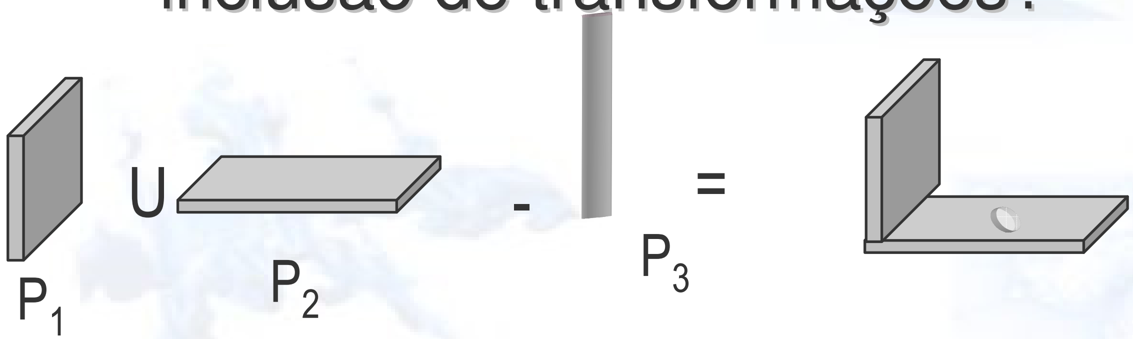
- Se incluirmos movimentos rígidos (transformações Geométricas) nas primitivas, no primeiro exemplo podemos obter a primitiva P_2 pelo escalonamento e translação de P_1 e a árvore seria:





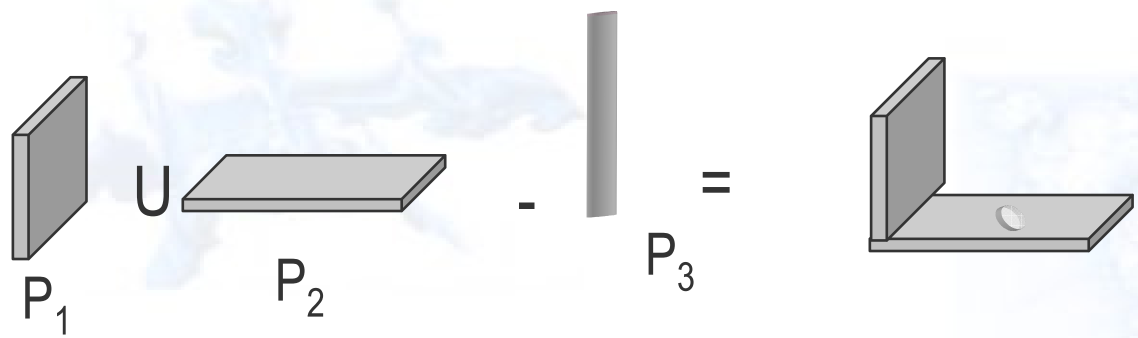
CSG

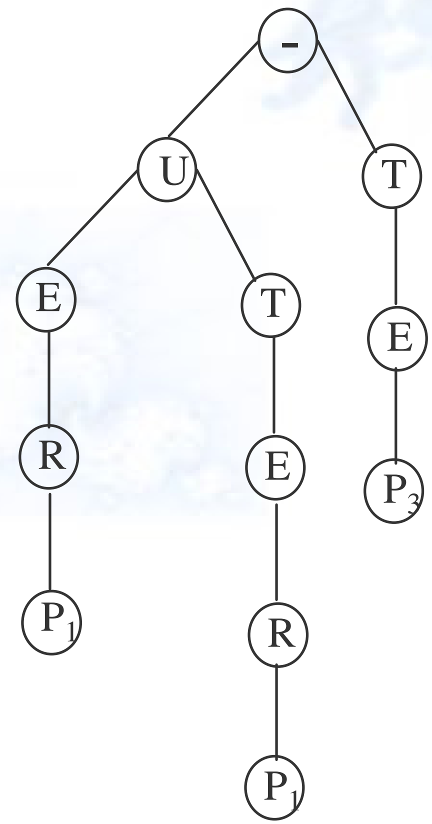
- E como ficaria árvore do segundo exemplo com a inclusão de transformações?



CSG

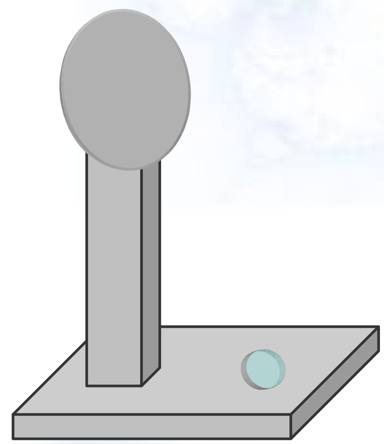
- E como ficaria árvore do segundo exemplo com a inclusão de transformações?



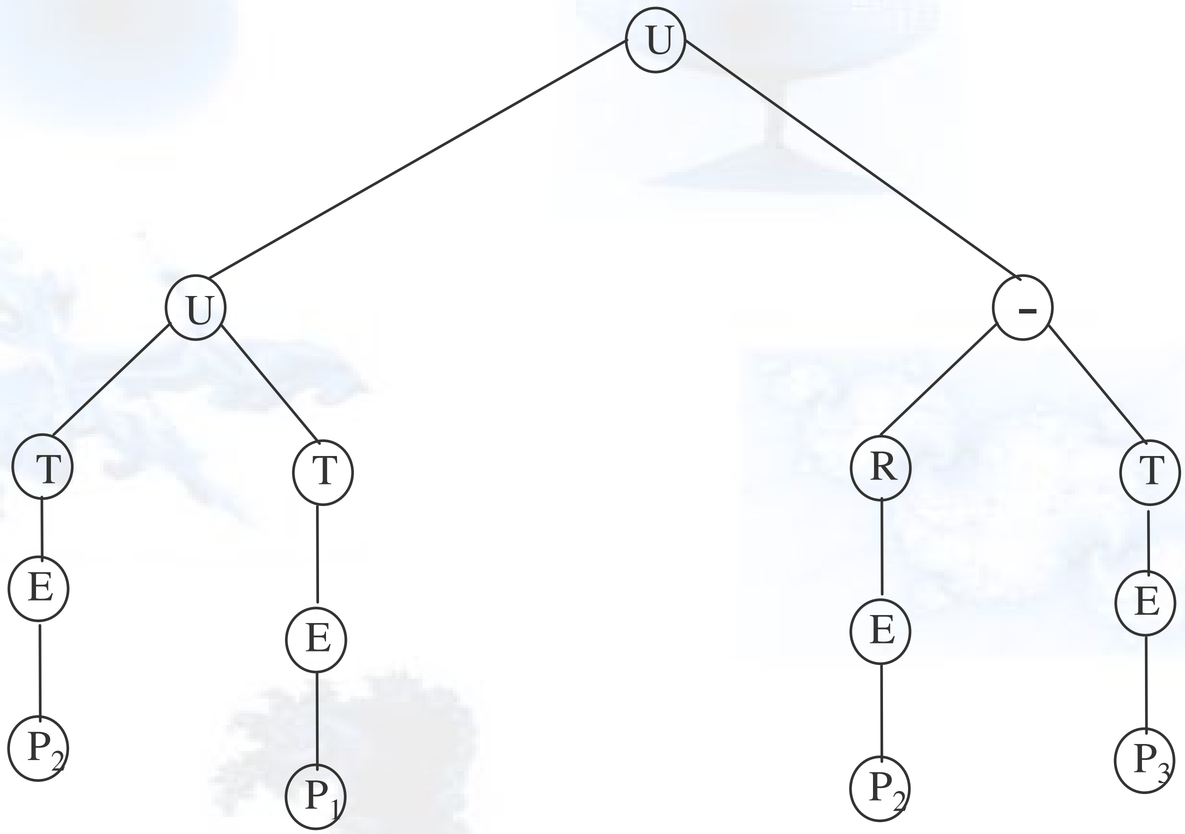


Exercício

- Monte uma possível árvore correspondente ao seguinte sólido considerando:
  - ✓ $P_1=\{(x,y,z);\ x^2+y^2+z^2=1\}$ (esfera)
  - ✓ $P_2=\{(x,y,z);\ 0\leq x \leq 1,\ 0\leq y \leq 1,\ 0\leq z \leq 1\}$ (paralelepípedo)
  - ✓ $P_3=\{(x,y,z);\ x^2+y^2 = 1,\ 0\leq z \leq 1\}$ (cilindro)

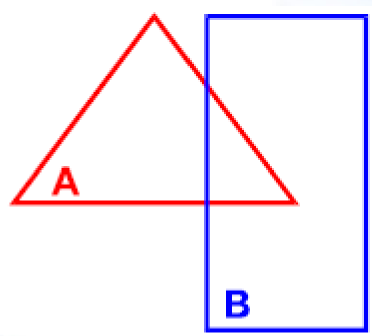


CSG



Exercício

- Considerando a figura abaixo, qual será o resultado se a operação aplicada for:
  - $A \cup B$?
  - $A \cap B$?
  - $A - B$?
  - $B - A$?



CSG

- Para verificar se um determinado ponto pertence ou não ao sólido formado pela árvore CSG, basta aplicarmos ao ponto todas as transformações aplicadas a cada primitiva e verificar se o ponto está dentro ou não de cada primitiva.

- Note que as primitivas sempre estão nas folhas; nós com um filho são transformações; e nós com 2 filhos são operações booleanas.

CSG – Exemplo Prático

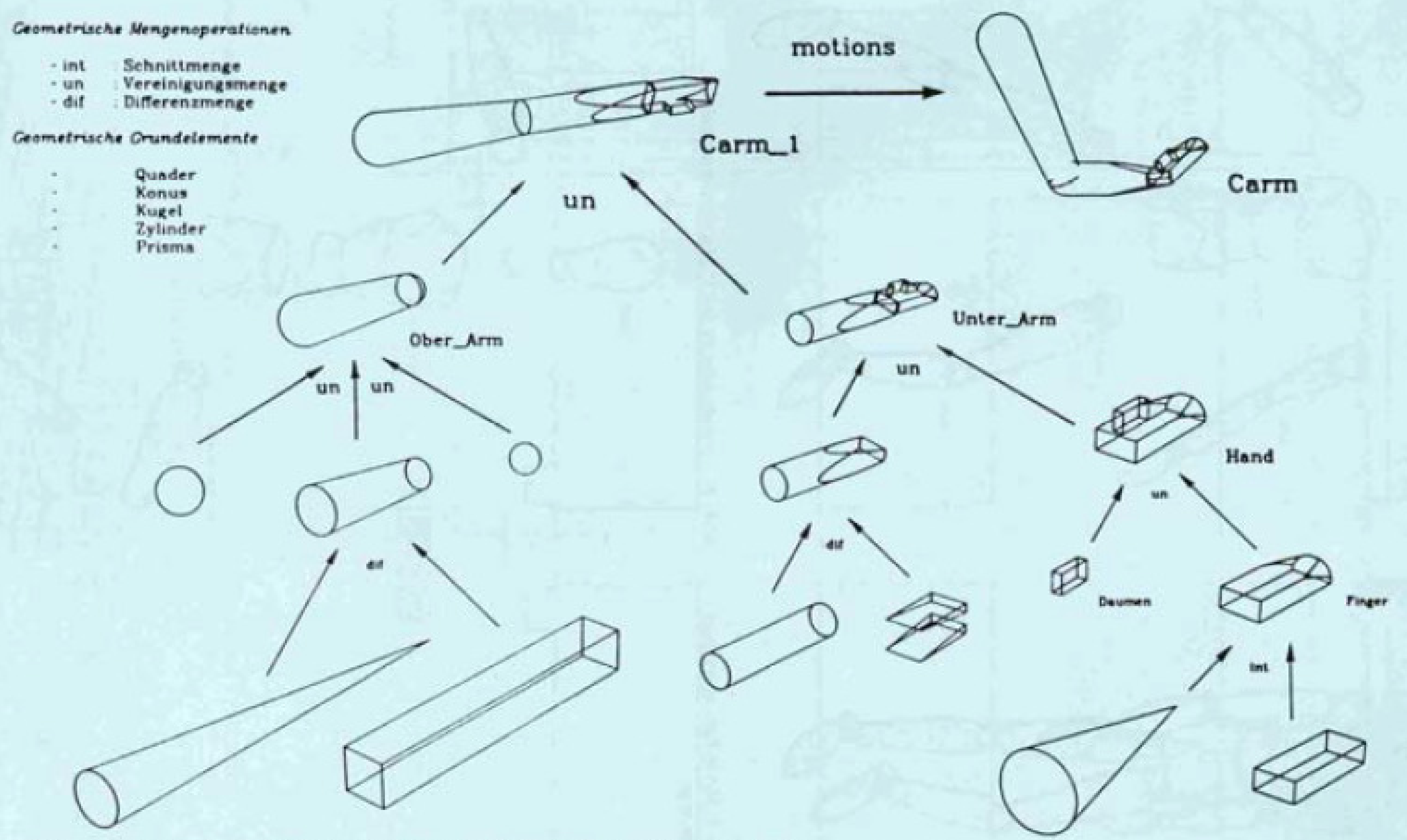
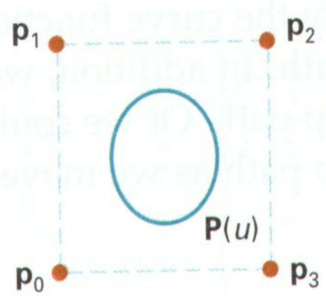
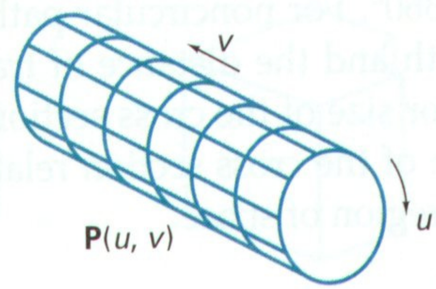


Abb. 6 Umsetzung des Modellierungsvorbildes in CSG-Primitiva am Beispiel des Arms

Sweep

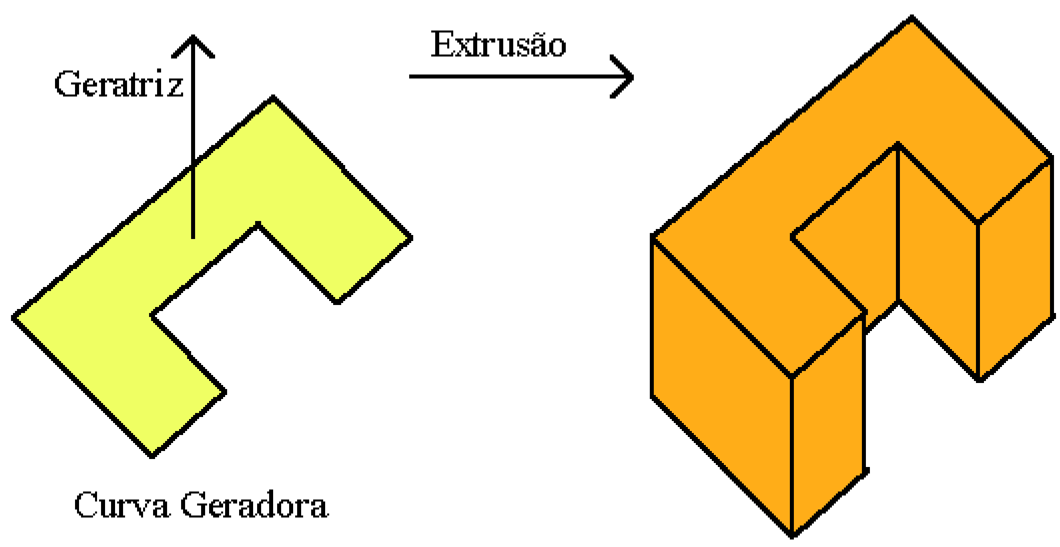
- São usuais para construção de objetos 3D que possuem simetrias translacionais, rotacionais ou outras simetrias.
- Podemos especificar tais objetos especificando uma forma 2D e uma varredura que move a forma por uma região.
- Ex. de *sweep* translacional: uma curva *spline* que define um objeto e um *sweep* translacional é obtida movendo os pontos de controle ao longo da reta perpendicular ao plano.





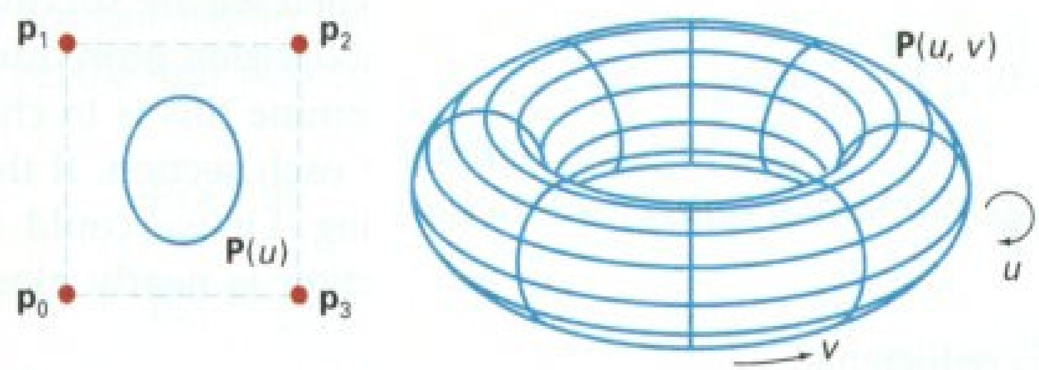
Sweep

- Outro exemplo de *sweep* translacional (extrusão)



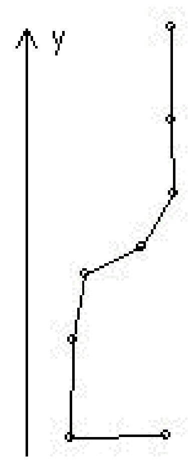
Sweep

- Exemplo de *sweep* rotacional: a *spline* é rotacionada sobre um eixo de rotação perpendicular ao plano da *spline* (qualquer eixo de rotação pode ser especificado).



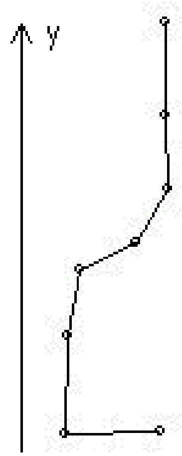
Sweep

- Outro exemplo de *sweep* rotacional.
- O que será obtido?



Sweep

- Outro exemplo de *sweep* rotacional



Sweep

- *Sweep* rotacional é usado em sistemas de modelagem de sólidos que tratam de peças que giram e *sweep* translacional é usado nos sistemas para descrever peças mecânicas fabricadas a partir de chapas.

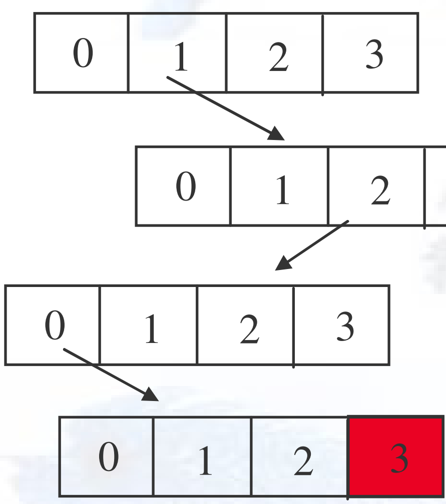
Octrees

- São usadas para representar objetos 3D de forma a reduzir os requisitos do sistema de armazenamento para estes objetos.
- É uma extensão do esquema de codificação p/ o espaço bidimensional chamado **quadtree**. Quadtrees são gerados dividindo sucessivamente uma região bidimensional (em geral um quadrado) em quadrantes:

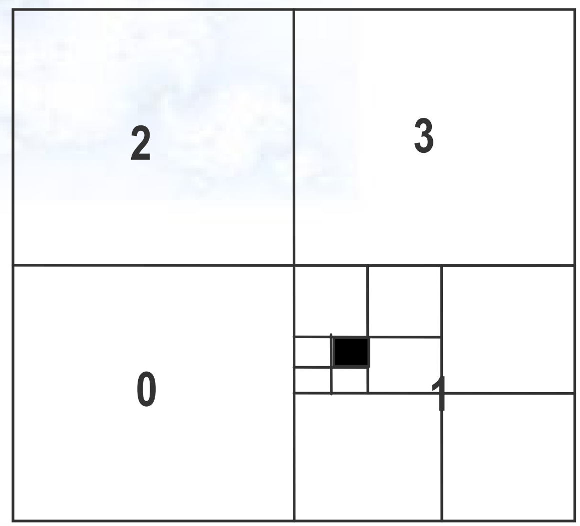
Quadrante 2	Quadrante 3
Quadrante 0	Quadrante 1

Octrees

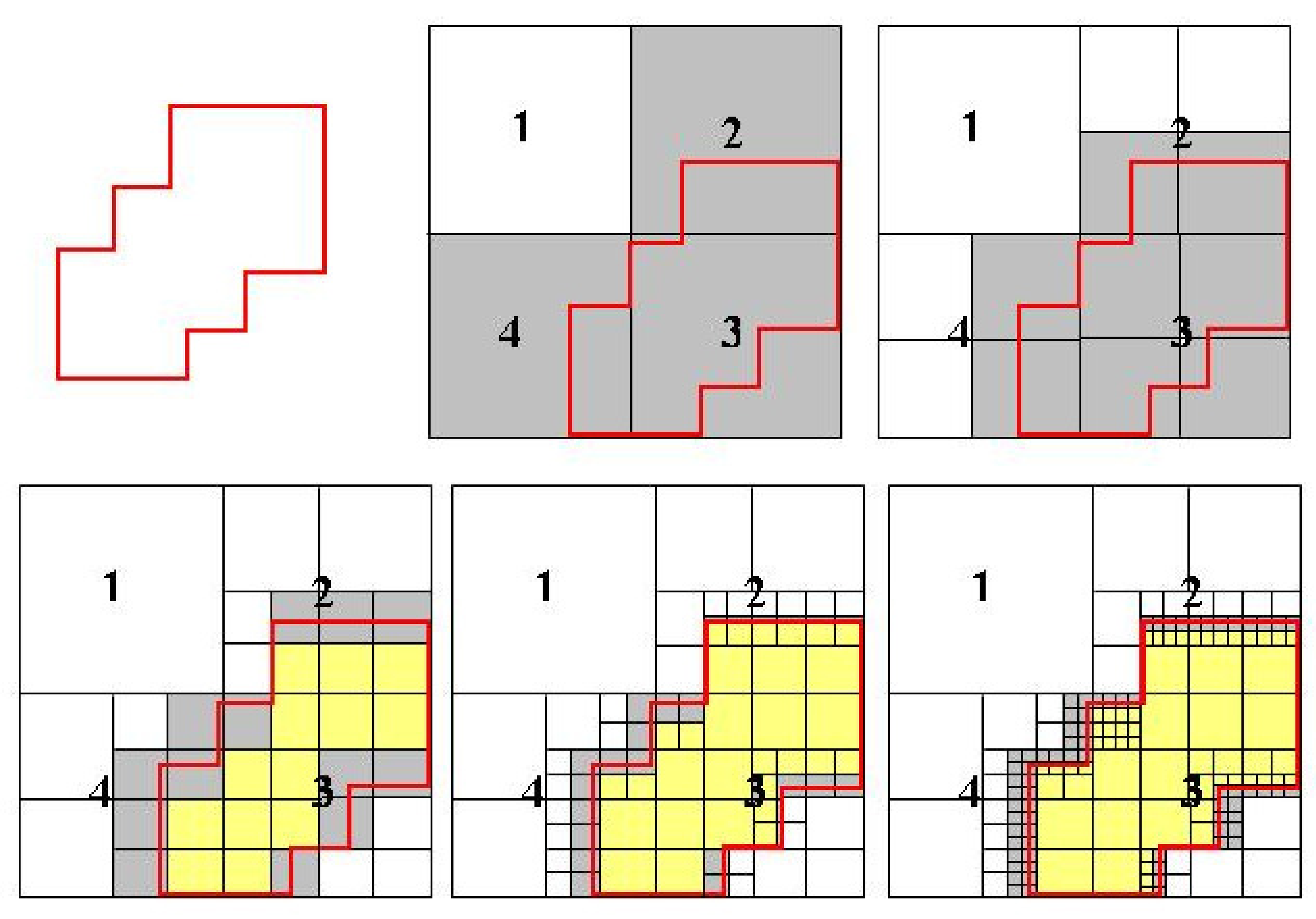
- Quando um quadtree é usado, cada quadrante pode estar cheio, parcialmente cheio ou vazio (também chamado de preto, cinza e branco), dependendo de quanto um quadrante intesecciona uma área.
- Um quadrante parcialmente cheio é recursivamente subdividido em subquadrantes até que todos os quadrantes estejam cheios ou vazios ou até uma profundidade pré-determinada.



Representação de uma região contendo um *pixel*



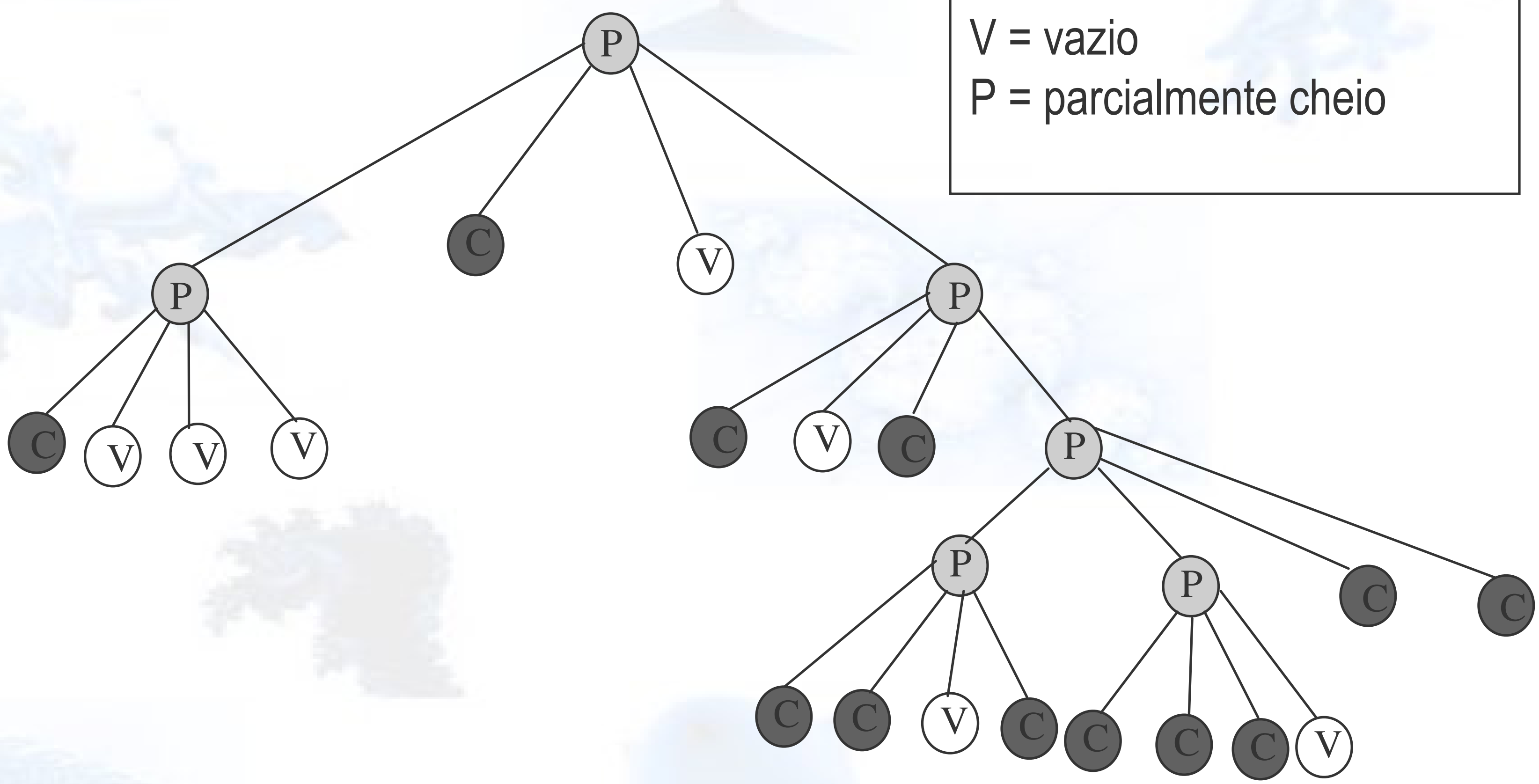
Octrees



Octrees

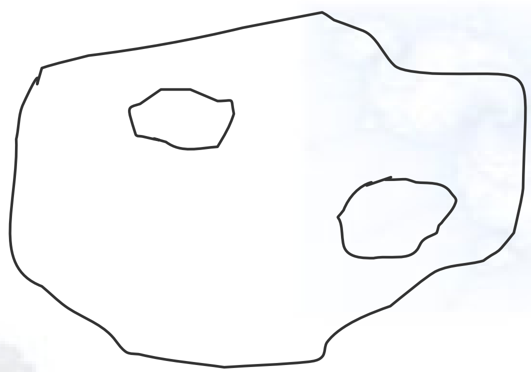
- Exemplo de representação de quadtree:

C = cheio
V = vazio
P = parcialmente cheio



Exercício

- Encontre o quadtree correspondente ao seguinte objeto (faça até 6 níveis):



- Lembre-se que o objeto possui 2 buracos.

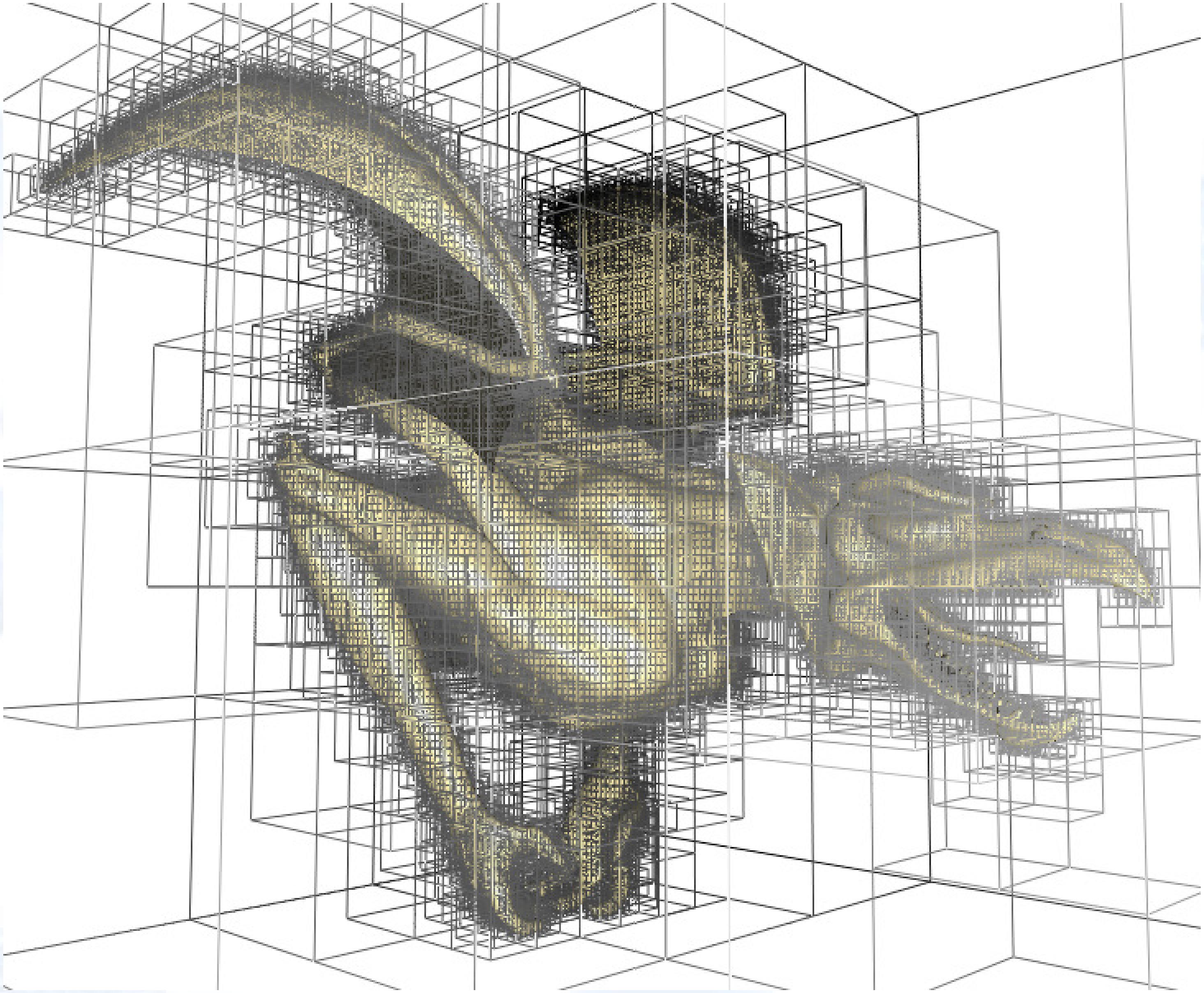
Octrees

- O octree é semelhante ao quadtree, exceto que suas 3 dimensões são recursivamente subdivididas em octantes:

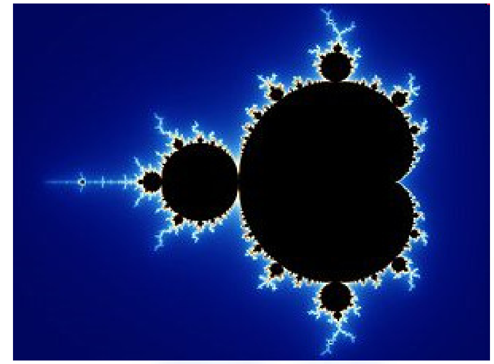
Octrees

- Em octrees cada nó “pai” que se ramifica terá 8 “filhos”, cada um correspondendo a uma cubo da subdivisão.

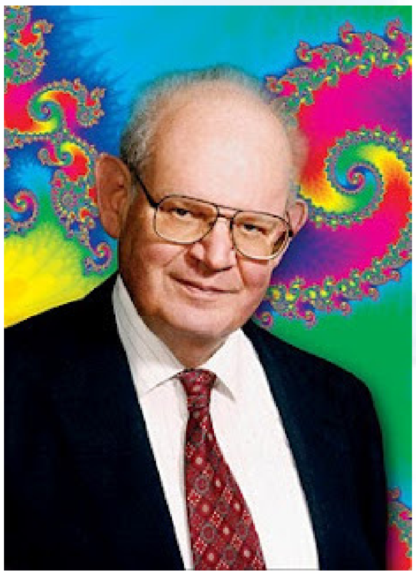
- Os números dos cubos podem ser usados na árvore para indicar qual o cubo que está sendo subdividido.



Fractais



A irregularidade das formas...



✝ 14/10/2010

"Montanhas não são cones;

Nuvens não são esferas;

Os cães não latem regularmente;

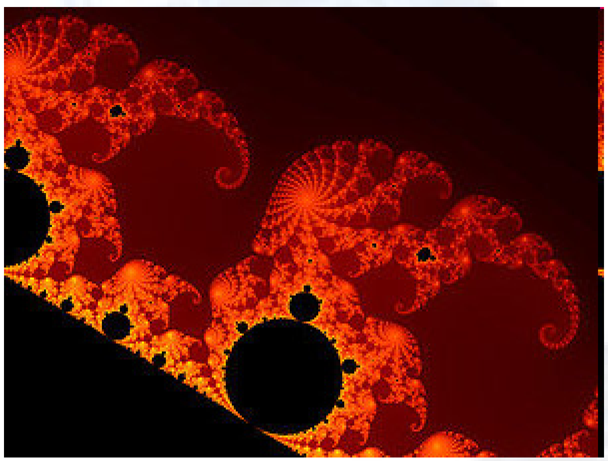
Os raios não caem em linha reta."

(Benoit Mandelbrot)

- Mandelbrot: pai dos fractais, descreveu matematicamente a idéia original de Euclides acrescentando a ela a questão da dimensão.

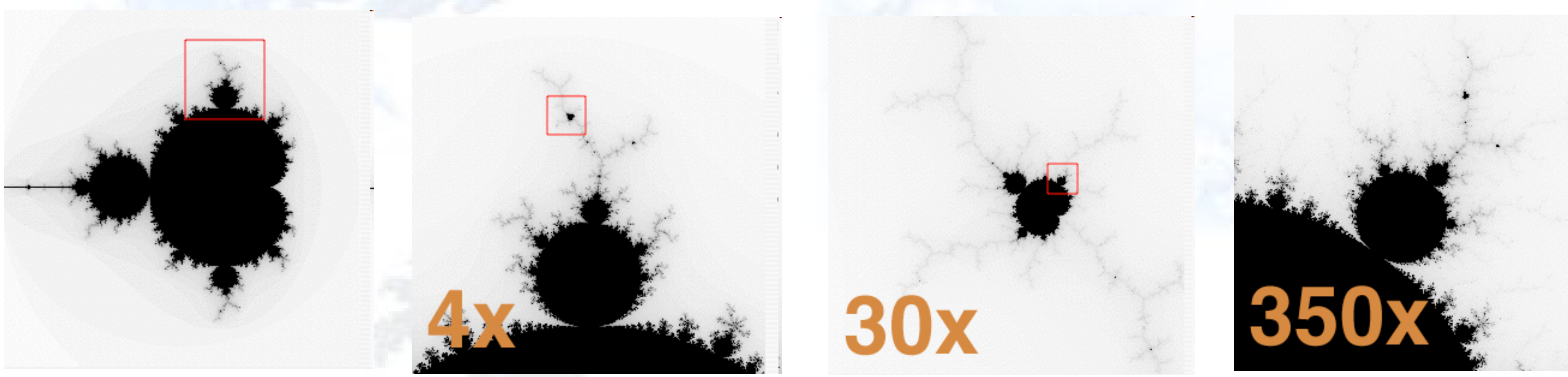
Fractais

- Desde a sua origem em 1975, os fractais são conhecidos pelas belas gravuras coloridas que se repetem indefinidamente seguindo um mesmo padrão de evolução.



Fractais

- Aumento de 350 vezes do conjunto de Mandelbrot mostra os pequenos detalhes repetindo o conjunto inteiro.



(http://pt.wikipedia.org/wiki/Fractal)

Fractais

Fractais

- Muitas vezes conceituado como sendo desenhos muito complexos gerados por computadores, onde podem ser visualizados formas geométricas ditas caóticas.
- Os fractais estão a nossa volta, em todos os lugares...no formato de uma cadeia de montanhas, ou em um sinuoso litoral, como formações de nuvens e no tremeluzir do fogo, alguns fractais passam por intermináveis mudanças enquanto outros, como as árvores ou nosso próprio sistema vascular, conservam a estrutura adquirida em seu desenvolvimento.

Fractais - Definição

- Classe especial de formas complexas que possuem propriedades geométricas particulares que produzem imagens reais e não reais possuindo dimensões fracionárias.

Fractais - Definição

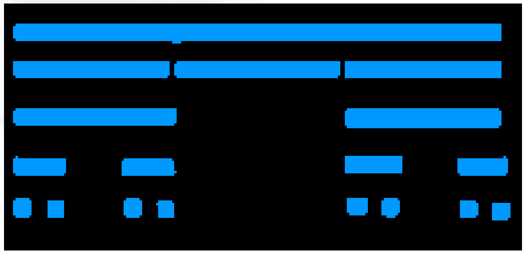
- "Eu cunhei a palavra fractal do adjetivo em Latim '*fractus*'. O verbo latino correspondente '*frangere*' significa 'quebrar' : criar fragmentos irregulares. É contudo sabido ... que, além de significar 'quebrado' ou 'partido', '*fractus*' também significa 'irregular'. Os dois significados estão preservados em fragmento." (Mandelbrot).

Fractais - Definição

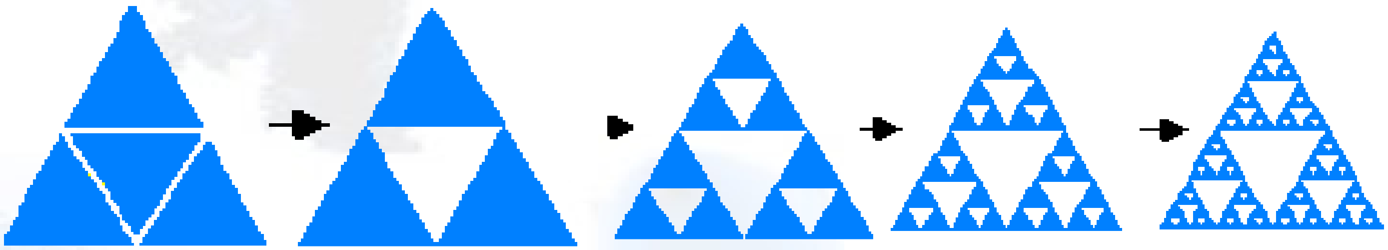
- Na realidade, fractais verdadeiros existem apenas como teoria. Nenhuma curva ou superfície no mundo real é um fractal verdadeiro pois, objetos reais são produzidos por processos que atuam apenas sobre uma faixa finita de escalas.

Fractais - Tipos de Fractais

- Fractais Determinísticos
  - ✓ Poeira de Cantor

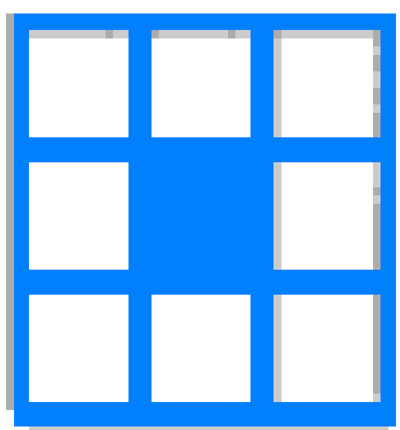


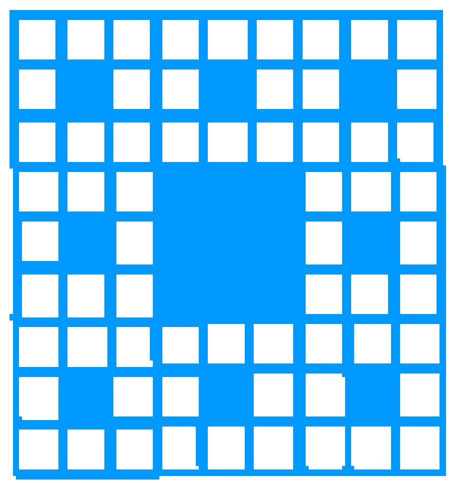
  - ✓ Triângulo de Sierpinsky:
    - ⇨ Inicia-se com um triângulo equilátero que é dividido em 4 partes auto-similares formadas à partir do ponto médio de cada lado. Em seguida o triângulo central é retirado. Repete-se essa operação com cada um dos triângulos.



Fractais - Tipos de Fractais

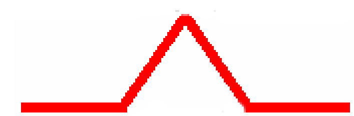
- ✓ Carperte de Sierpinsky: dividindo-se um quadrado em 9 partes auto-similares e fazendo a retirada do quadrado central. Repete a operação em cada um dos oito quadrados restantes tendendo ao infinito.

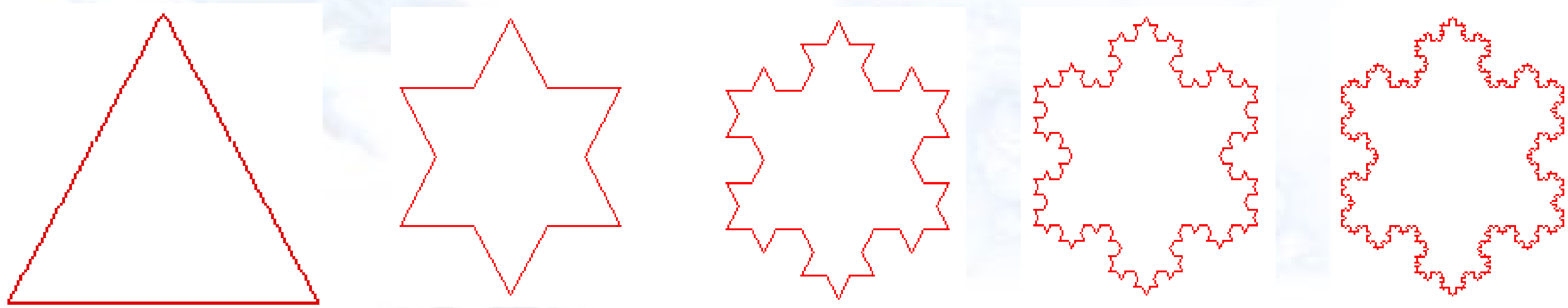




Fractais - Tipos de Fractais

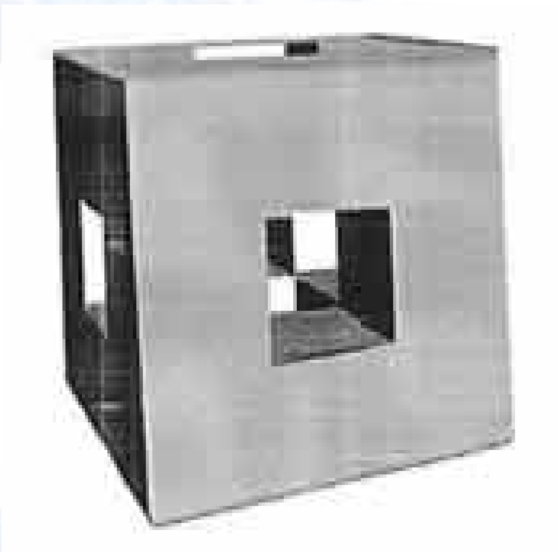
✓ Curva de Kock ou Floco de Neve

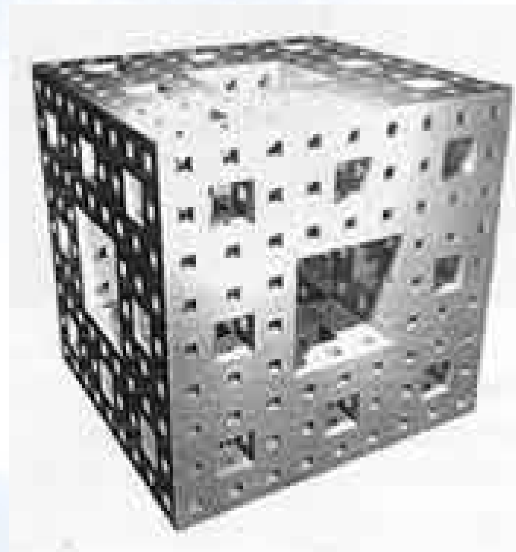




Fractais - Tipos de Fractais

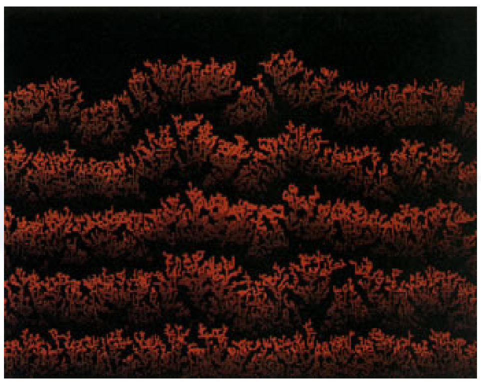
- ✓ Esponja de Menger: divide-se um cubo em 9 pequenos cubos auto-semelhantes de cada lado do cubo seguida de uma retirada de 7 destes (que ocupam a posição central de cada lado e o cubo central). É empregado como modelo para materiais porosos em geral.

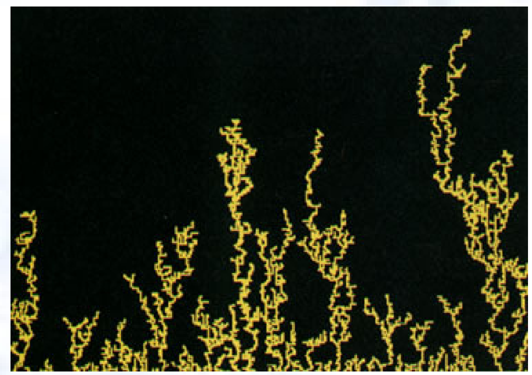


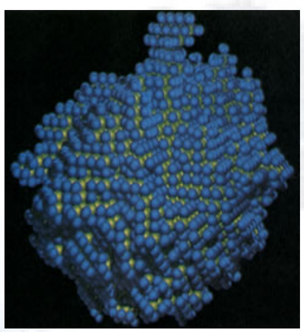


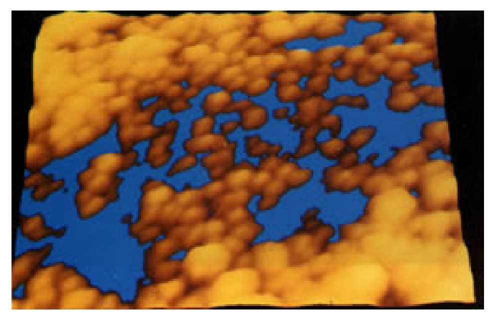
Fractais - Tipos de Fractais

- Fractais Não-Determinísticos:
  - ✓ Aleatórios



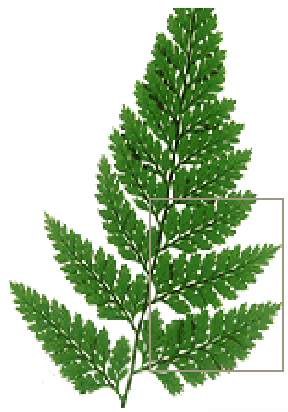


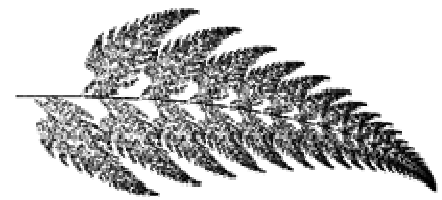




Fractais - Tipos de Fractais

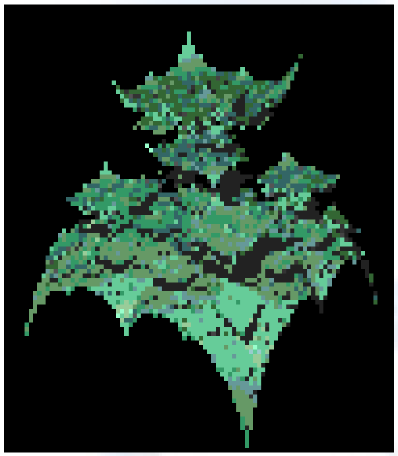
✓ Sistema Interativo de Funções (IFS)

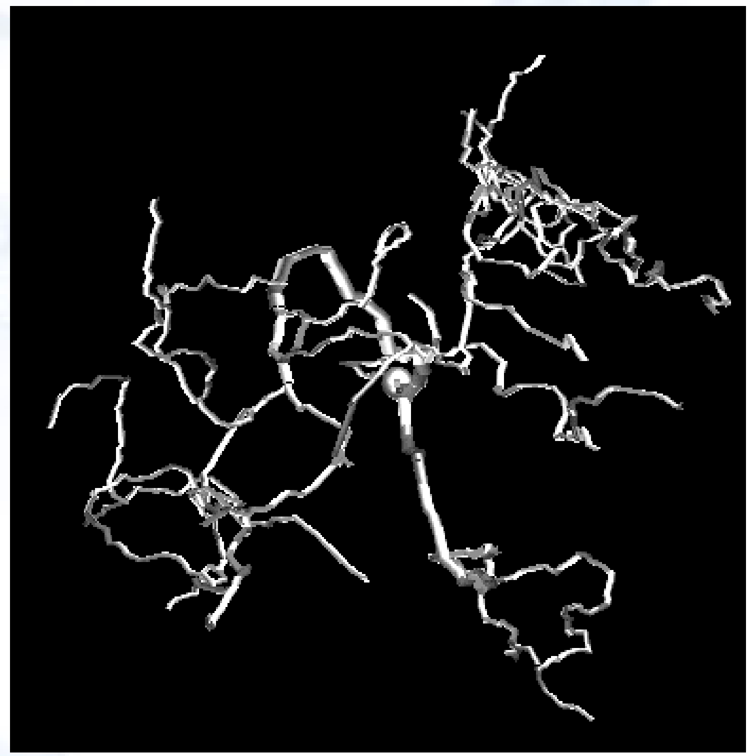




Fractais - Tipos de Fractais

- ✓ IFS não lineares





Neurônio (neurônio ganglionar)

Fractais e Caos

- O estudo dos fractais, ou o estudo da realidade, está ligado à Teoria do Caos, que busca padrões organizados de comportamento e formas dentro de um sistema aparentemente aleatório.

Fractais e Caos

- Caos:

  " Caos não significa desordem absoluta ou uma perda completa da forma. Ele significa que sistemas guiados por certos tipos de leis perfeitamente ordenadas são capazes de se comportar de uma maneira aleatória e, desta forma, completamente imprevisível a longo prazo, em um nível específico. Por outro lado, este comportamento aleatório também apresenta um padrão ou ordem 'escondida' em um nível mais geral (…)." (Stancey)

Fractais e Caos

- Fenômenos "caóticos": não há previsibilidade, ou seja não podem ser previstos por leis matemáticas, como por exemplo: o gotejar de uma torneira; nunca se sabe a frequência com que as gotas de água caem e não podemos determinar uma equação que possa descreve-la; as variações climática e as oscilações em bolsas de valores também são caóticos.