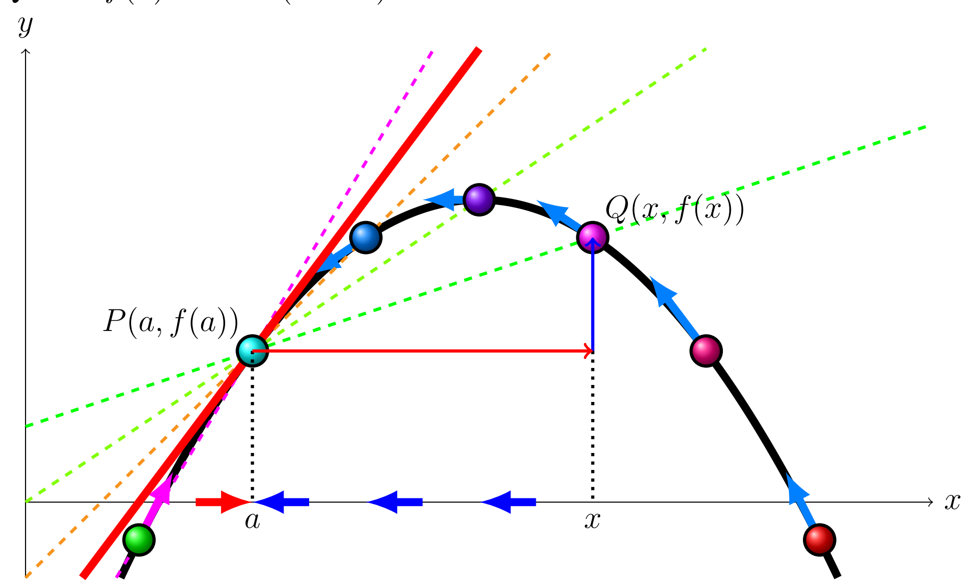
2.7 Derivative & rate of change

1. tangent line & its slope 切線及其斜率
2. velocity & speed 速率與速度
3. derivative & rate of change 導數與變化率

0.1 Tangent line & its slope

Problem: 在曲線 $y = f(x)$ 上找通過 $P(a, f(a))$ 的切線(tangent line)。
考慮通過 $Q(x, f(x)), x \neq a$ 與 P 的割線(secant line) 斜率: $m_{PQ} = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$,
讓 Q 沿著 $f(x)$ 靠近 P $(x \to a)$ 來得到切線。



Define: The ***tangent line*** 切線 to the curve $y = f(x)$ at $(a, f(a))$ is

$$\boxed{\boldsymbol{y - f(a) = m_a(x - a)} \quad \text{or} \quad \boldsymbol{y = m_a(x - a) + f(a)}}$$

with the slope

$$\boxed{m_a = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}}$$

if the limit exists. (Let $x = a + h$, then $x \to a \Longleftrightarrow h \to 0$.)

Note: 切線斜率是割線斜率的極限, 切線就是割線的極限!

Example 0.1 *Find (an equation of) the tangent line of $y = x^2$ at $P(1,1)$.*

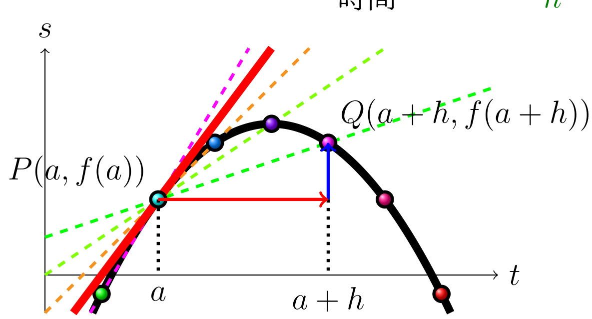
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$
$$\left(\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2+2h}{h} = \lim_{h\to 0}(h+2) = 2.\right)$$
$y-1 = 2(x-1)$ *or* $y = 2x-1$. ■

Recall: §1.5 定義 e^x 在 $x=0$ 切線斜率 $=1$。也就是

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1}$$

0.2 Velocity & speed

Problem: 已知位置函數 $s = f(t)$ 求速率&速度。
s: displacement 位置, t: time 時間, f: position function 位置函數。
時間 $t = a$ 到時間 $t = a+h$ 的位移是 $f(a+h) - f(a)$,
average velocity 平均速率是 $\dfrac{\text{位移}}{\text{時間}} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (=割線斜率)。



Define: The ***velocity*** [vəˈlɑsətɪ] 速率 $v(a)$ at time $t = a$ is the limit of these average velocities:

$$\boxed{v(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}.$$

Note: (瞬間) 速率是平均速率的極限!

Define: ***speed*** 速度是不計方向 (正負) 的速率, speed = | velocity |。
物理上會把 velocity 叫速度, 把 speed 叫速率, 只是翻譯的問題;
怎麼分辨? velocity 帶有方向 (±) (向量), speed 沒有 (純量)。

0.3 Derivative & rate of change

Define: The ***derivative*** [dəˈrɪvətɪv] 導數 of f at a, denoted by $\boxed{\boldsymbol{f'(a)}}$ ("f prime of a") is

$$\boxed{\boldsymbol{f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}}$$

if the limit exists.

Note: 函數 f 在 a 點的導數 $f'(a)$ 就是平均變化率的極限 — 瞬間變化率 (instantaneous rate of change)。當 $f(x)$ 是位置函數, 在 a 的速率就是 $f'(a)$。當 $f(x)$ 是曲線函數, 在 a 的切線就是

$$\boxed{\boldsymbol{y = f'(a)(x - a) + f(a)}}\text{(彩色是數字, 黑色是固定。)}$$

Note: 根據定義, 如果極限<u>不存在</u>, 就<u>不會有</u>切線/速率/導數。

♦ Additional: 想想看

要先有定義才有導數, 所以有導數就有定義,

$$\exists\, f'(a) \Longrightarrow \exists\, f(a).$$

如果沒定義 $f(a)$, 能不能定義導數呢?
定義:

$$\widetilde{f}(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

就不需要有 $f(a)$。
$\widetilde{f}(a)$ 與 $f'(a)$ 誰強誰弱?

$$\exists\, f'(a) \Longrightarrow \exists\, \widetilde{f}(a)? \quad \text{(Yes/No)}$$

$$\exists\, f'(a) \Longleftarrow \exists\, \widetilde{f}(a)? \quad \text{(Yes/No)}$$

Yes, 怎麼證明? No, 有沒有反例?