2.3 Calculating limits using the limit laws

1. limit laws 極限律
2. left/right-hand limit 左右極限
3. Squeeze Theorem 夾擠定理

不是每個極限都能明顯的看出來或是算出來猜對, 但是可以利用已知的極限來算一些的極限。

0.1 Limit laws

Limit laws 極限律: $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = L,\ \lim_{x\to a} g(x) = M,}$ (極限要存在), constant c.

1. 加: $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L + M$.
2. 減: $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = L - M$.
3. 乘: $\lim_{x\to a}[f(x)\times g(x)] = L \times M$.
4. 除: $\lim_{x\to a}[f(x)\div g(x)] = L \div M$, if $\boxed{M \neq 0}$ (分母極限不爲零).
5. 常數倍: $\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x) = cL$.

Extended: (§2.5 會證)

6. 冪次: $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = L^n$.
7. 開根: $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$, $L > 0$ when n is even. (開偶次根要正。)

Obvious results:

8. $\lim_{x\to a} c = c$. (毫無反應, 只是個常數 c。)
9. $\lim_{x\to a} x = a$.

Note: One-side limit ($x \to a^-/a^+$) 也適用 limit laws. (要同一邊。)

Attention: Infinite limit 不適用 limit laws. ($\because$ 極限不存在。)

Example 0.1 (使用極限律)

a) $\lim\limits_{x\to 5}(2x^2-3x+4)=?$ *(多項相加要加括號。)*

$=2(\lim\limits_{x\to 5}x)^2-3\lim\limits_{x\to 5}x+\lim\limits_{x\to 5}4=2(5)^2-3(5)+4=39.$

b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+2x^2-1}{5-3x}=?$ *(一個分式可以不用括號。)*

$$=\frac{(\lim\limits_{x\to -2}x)^3+2(\lim\limits_{x\to -2}x)^2-\lim\limits_{x\to -2}1}{\lim\limits_{x\to -2}5-3\lim\limits_{x\to -2}x}=\frac{(-2)^3+2(-2)^2-1}{5-3(-2)}=-\frac{1}{11}.$$

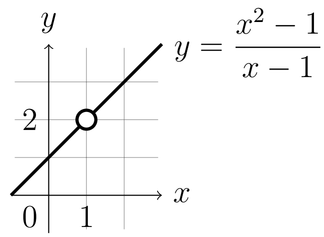
用了: 加, 減, 乘 (冪次), 常數倍, c, x, 除($\lim\limits_{x\to -2}(5-3x)=11\neq 0$)。 ■

★ ***polynomial of degree n*** n-次多項式:

$$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0,\quad a_i\in\mathbb{R},\ a_n\neq 0,$$

$$\boxed{\lim_{x\to a}f(x)=f(a)}\text{(求極限等於直接代入。)}$$

Example 0.2 (同約) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=?$



1. 不能直接代 1, 因爲不是多項式。

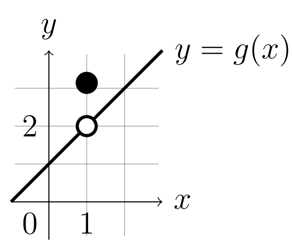
2. 不能用極限律, $\because \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x-1)}$,

分母 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$.

要用代數的方法: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2.$

(爲什麼可以約掉 $x-1$? x 靠近 1 但不是 1, $x-1$ 靠近 0 但不是 0。約!) ■

Example 0.3 (換人算) $g(x)=\begin{cases}x+1, & x\neq 1\\ \pi, & x=1\end{cases}$, $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=?$



極限只看附近, 不管 $g(1)=2$, π, *or undefined*,
都不會影響極限。可以用好算的函數代替不好算的。
$\therefore \lim\limits_{x\to 1}g(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2.$ ■

★ if $f(x)=g(x)$, $\forall\ x$ near a, and $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$, then $\lim\limits_{x\to a}g(x)=L$.

Example 0.4 (同乘) *(Recall)* $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}=?$

$$\because \lim_{t\to 0}(\sqrt{t^2+9}+3)=\sqrt{(\lim_{t\to 0}t)^2+9}+3=6\neq 0,\ \textit{(不是零才能同乘)}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{(\sqrt{t^2+9}-3)(\sqrt{t^2+9}+3)}{t^2(\sqrt{t^2+9}+3)}\quad \textit{(上下同乘 }\sqrt{t^2+9}+3\textit{)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\cancel{t^2}+\cancel{9}-\cancel{9}}{\cancel{t^2}(\sqrt{t^2+9}+3)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{t^2+9}+3}=\frac{\lim\limits_{t\to 0}1}{\lim\limits_{t\to 0}(\sqrt{t^2+9}+3)}=\frac{1}{6}.\qquad\blacksquare$$

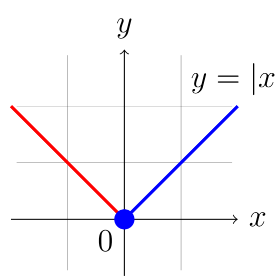
Note: 利用 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, $\sqrt{\cdots}-\cdots$ 同乘 $\sqrt{\cdots}+\cdots$.
(試試利用 $(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$, $\sqrt[3]{\cdots}\pm\cdots$ 同乘? $\sqrt[n]{\cdots}\pm\cdots$?)

0.2 Left/right-hand limit

$$\boxed{\lim_{x\to a}f(x)=L \iff \lim_{x\to a^-}f(x)=\lim_{x\to a^+}f(x)=L.}$$

Skill: 使用時機: 分段定義的函數 $f(x)=\begin{cases}\cdots, & \text{if } x\cdots;\\ \cdots, & \text{if } x\cdots.\end{cases}$

Example 0.5 $\lim\limits_{x\to 0}|x|=?$



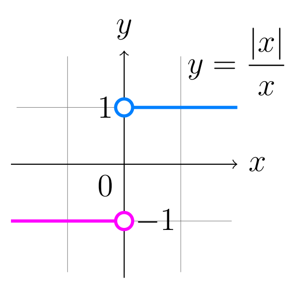
$$\because |x|=\begin{cases}x, & x\geq 0;\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

(左) $\lim\limits_{x\to 0^-}|x|=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0$,

(右) $\lim\limits_{x\to 0^+}|x|=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$.

$$\therefore \lim_{x\to 0}|x|=\lim_{x\to 0^-}|x|=\lim_{x\to 0^+}|x|=0.\qquad\blacksquare$$

Example 0.6 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}=?$



$$\because \frac{|x|}{x}=\begin{cases}1, & x>0;\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}1=1,\ \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}-1=-1.$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1\neq 1=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x},\ \textit{(左右不同)}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}\ \textit{does not exist.}\qquad\blacksquare$$

0.3 Squeeze Theorem

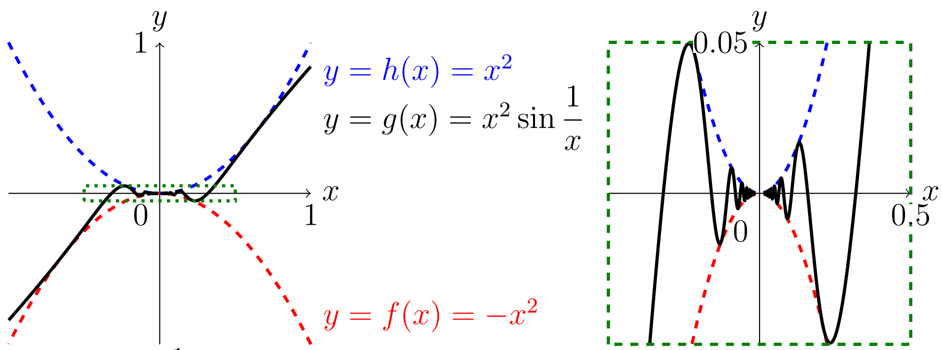
Lemma 1 *If* $f(x) \le g(x)$ *when* x *near* a, *and* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *and* $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ *both exist, then* $\lim\limits_{x\to a} f(x) \le \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

(想想看: 如果 $f(x) < g(x)$, 有可能 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$?)

Theorem 2 (Squeeze/Sandwich/Pinching Theorem 夾擠定理)
If $\boxed{\boldsymbol{f(x) \le g(x) \le h(x)}}$ *when* x *near* a, $\quad$ $(*)$*(三個函數排成一列)*
and $\boxed{\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L}}$, $\quad$ $(**)$ *(前後極限存在相等於* L*)*
then $\boxed{\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} g(x) = L}}$. $\quad$ *(極限存在並等於* L*)*

Example 0.7 $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\dfrac{1}{x} = ?$

1. 不能乘, $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ 不存在*; 2.* 不能約分*; 3.* 不能分左右。........用夾擠*!*



$\because -1 \le \sin\dfrac{1}{x} \le 1$ *(range of* $\sin x$ *is* $[-1,1]$*)*,
let $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ *and* $h(x) = x^2$.

Then $f(x) \le g(x) \le h(x)$ *when* x *near* 0, ... $(*)$
and $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$. .... $(**)$
By the Squeeze Theorem, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$. ■

Remark: Compute limit:
1. 極限律: 加減乘除常數倍, 冪次開根 $c\&x$;
2. 代數方法: 同乘同除非零項, 或換成好算的函數算;
3. 左右極限: 分段函數看左右;
4. 夾擠定理。(很強大, 但是難在找到極限好算又相同的兩個函數來夾。)