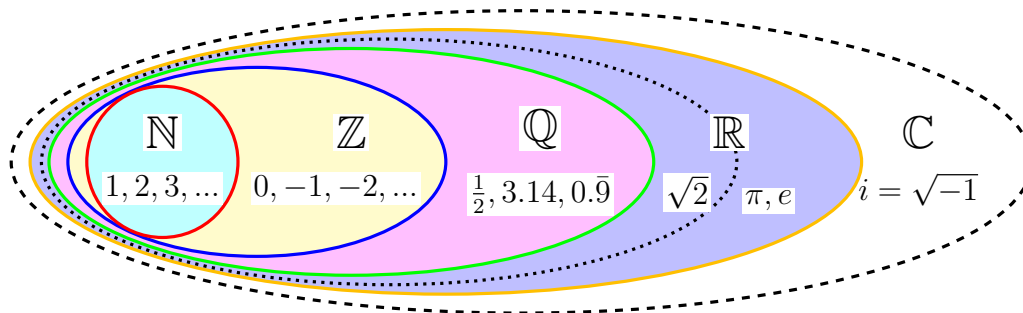


◆ 1.3 New functions from old functions

1. number system 數系
2. essential functions 基本函數
3. shifting, stretching and reflecting of functions 函數平移伸縮與反射
4. combination of functions 函數組合

0.1 Number system



\mathbb{N} : **Natural** number 自然數, positive integer 正整數: $1, 2, 3, \dots$

\mathbb{Z} : **Integer** 整數, Zahlen[德] “number”: $0, \pm 1, \pm 2, \dots$

◆: Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht,
alles andere ist Menschenwerk.
God made the integers, all else is the work of man.
整數神造, 其餘人爲。 — L. Kronecker

\mathbb{Q} : **Rational** number 有理數, Quoziente[義] “quotient”: $\frac{p}{q}$, $p, q (\neq 0) \in \mathbb{Z}$.
(含有限小數 $3.14 = \frac{314}{100}$ 與循環小數 $0.\bar{9} = 0.999\cdots = 1$.)

\mathbb{R} : **Real** number 實數, 分成有理數與無理數 (**irrational** numbers).
(無理數含 $\sqrt{2}, \pi, e, \dots$, 不循環小數.)

◆: 第一次衝擊 500 B.C.: 無理數爆誕 — ^{Hippasus} 希帕索斯 v.s. ^{Pythagoras} 畢達哥拉斯。
◆: 實數又可分成代數 (algebraic) 數/超越 (transcendental) 數:
是/否為整係數多項式的根。有理數 $\frac{p}{q}$, $\sqrt{2} \in$ 代數數; $\pi, e \in$ 超越數。

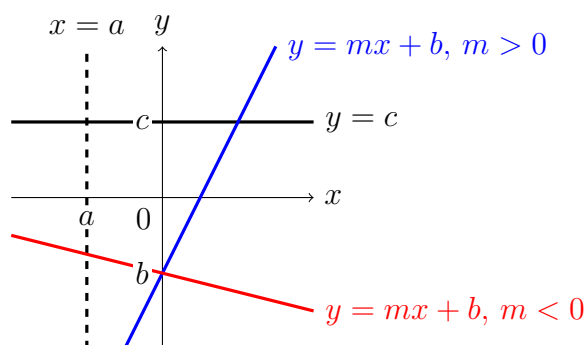
\mathbb{C} : **Complex** number 複數, 實數 \cup 虛數 ($b \neq 0$): $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$,
 $i := \sqrt{-1}$ imaginary unit 虛數單位。

◆: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| \ll |\mathbb{R}|$, 但是存在無窮多的有理數逼近到任何實數。
 3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, 3.141592, 3.1415926, ..., π .
 ◆: 無限大的等級 — 阿列夫 (Aleph) 數 $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots$
 \aleph_0 (aleph-naught/zero/null[德]): (最小的) 可數 (countable) 無限大, $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.
 \aleph_1 (aleph-one): 第二小的無限大。
 連續統假設 (Continuum hypothesis): $\aleph_1 = 2^{\aleph_0} \iff |\mathbb{R}| = \aleph_1$.

0.2 Essential functions

Function 函數 $f(x)$ and the graph 圖形 $\{(x, y) : y = f(x)\}$ of $y = f(x)$.

1. Constant function 常數函數 $f(x) = c$. (圖形是水平線 $y = c$.)
2. Linear function 線性函數 $f(x) = mx + b$.
 m : slope 斜率, b : y -intercept y -軸截距。(垂直線 $x = a$ 不是函數圖形。)

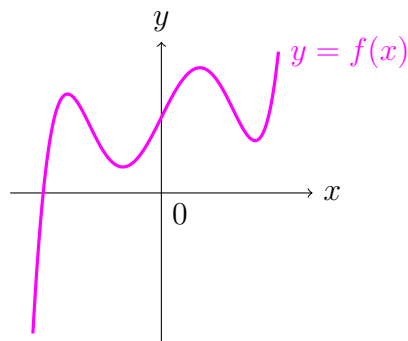


3. (n -th degree) Polynomial (n 次/階) 多項式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

a_i : coefficient 係數, n : degree 次數。

linear($n = 1$), quadratic($n = 2$), and cubic($n = 3$) function.

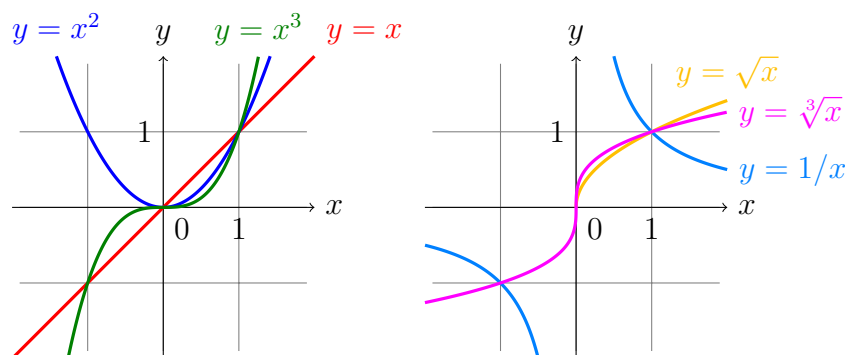


4. Power function 冪次函數 $f(x) = x^n$.

polynomial $n = 1, 2, 3, \dots$

root function 開根函數 $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$.

reciprocal function 倒數函數 $x^{-1} = \frac{1}{x}$.



5. Algebraic function 代數函數由 $+$, $-$, \times , \div , $\sqrt{\quad}$ 組成。

6. Exponential function 指數函數 (§1.4) a^x , $a > 0$.

7. Logarithmic function 對數函數 (§1.5) $\log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

8. Trigonometric function 三角函數 (§1.5)

$\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$.

9. Inverse trigonometric function 反三角函數 (§1.5)

$\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$, $\cot^{-1} x$, $\sec^{-1} x$, $\csc^{-1} x$.

10. Hyperbolic trigonometric function 雙曲三角函數 (◆§3.11)

$\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$, $\coth x$, $\operatorname{sech} x$, $\operatorname{csch} x$.

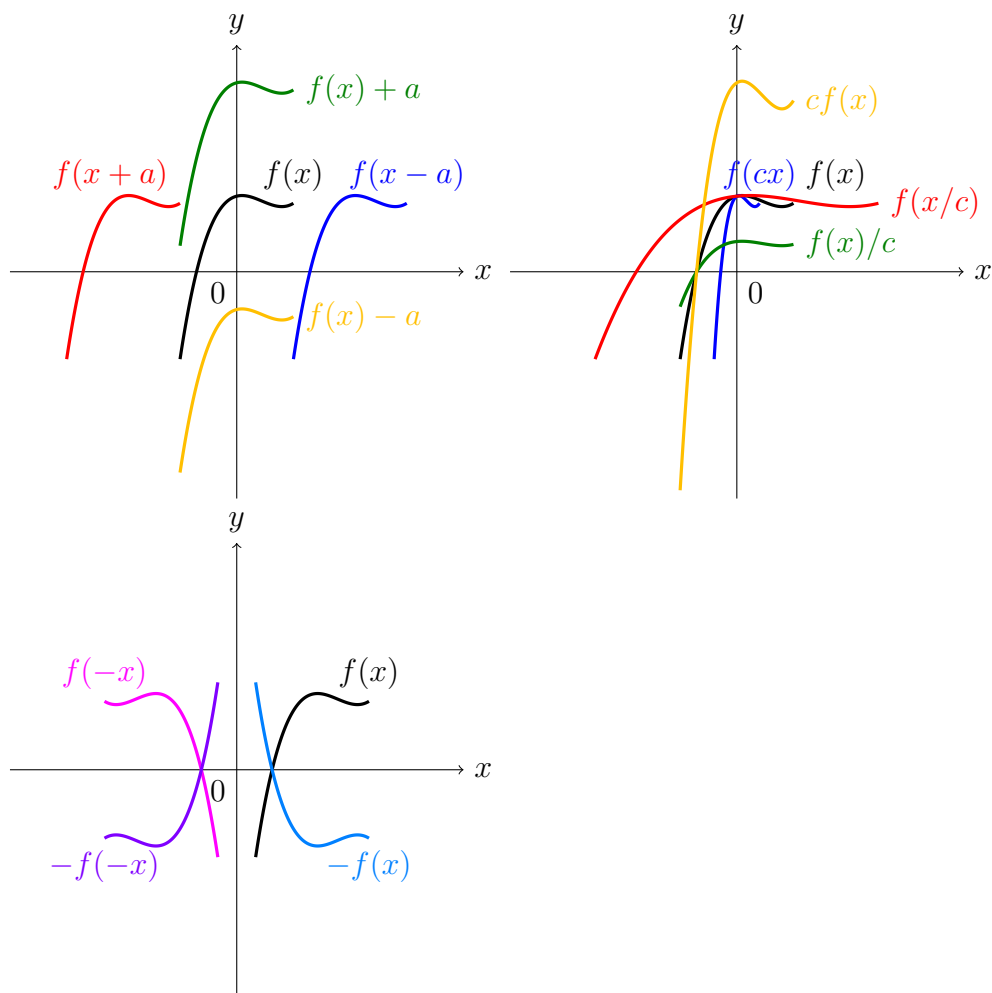
11. Inverse hyperbolic trigonometric function 反雙曲三角函數 (◆§3.11)

$\sinh^{-1} x$, $\cosh^{-1} x$, $\tanh^{-1} x$, $\coth^{-1} x$, $\operatorname{sech}^{-1} x$, $\operatorname{csch}^{-1} x$.

0.3 Shifting, stretching and reflecting of functions

Let $y = f(x)$ and $c > 1$.

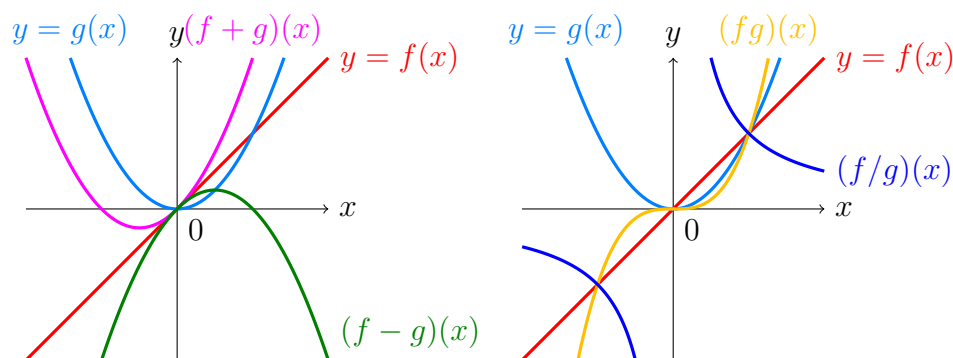
1. Shift $y = f(x - a)$, $y = f(x + a)$, $y = f(x) - a$, $y = f(x) + a$.
怎麼知道是往哪移? 代數字比較!
2. Stretch $y = f(cx)$, $y = f(x/c)$, $y = cf(x)$, $y = f(x)/c$.
3. Reflect (y -axis) $y = f(-x)$, (x -axis) $y = -f(x)$, (origin) $y = -f(-x)$.



0.4 Combination of functions

1. Add, subtract, multiply and divide. 加減乘除

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x), \\(f-g)(x) &= f(x) - g(x), \\(fg)(x) &= (f \cdot g)(x) = f(x) \times g(x) = f(x)g(x), \\(f/g)(x) &= \left(\frac{f}{g}\right)(x) = f(x) \div g(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.\end{aligned}$$



Rational function 有理函數 $\frac{P(x)}{Q(x)}$, $P(x), Q(x)$ are polynomials.

2. Composite function 合成函數 $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Note: In general, $f \circ g \neq g \circ f$.

Example 0.1 $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = x^2$;
 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sin 2(x^2) = \sin 2x^2$,
 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\sin 2x)^2 = \sin^2 2x$.

