

10.1 Curves defined by parametric equations

1. parametric curve 參數曲線
2. cycloid 擺線 and conchoid 蚌線

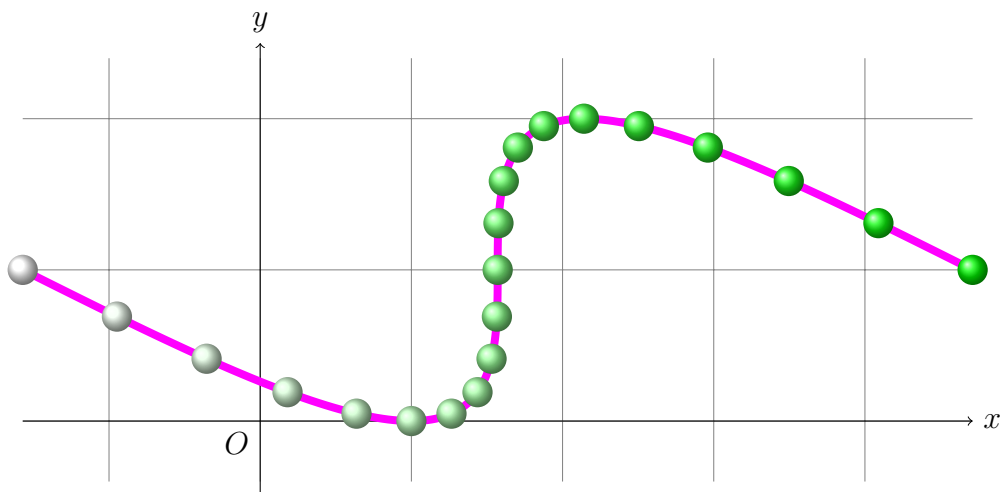
0.1 Parametric curve

愛心線 $(x^2 + y^2 - 1)^3 = x^2 y^3$ 是 rectangular (or Cartesian) coordinate system 直角 (或卡式) 坐標系方程式的曲線。

Define: *parametric curve* [ˌpærəˈmɛtrɪk] 參數曲線

1. *parameter* [pəˈræmətə] 參數: t .
2. *parametric equations* 參數方程式: $x = f(t)$, $y = g(t)$.
 x, y 看成是第三個變數 t 的函數。
3. *parametric curve* 參數曲線: $(x, y) = (f(t), g(t))$.
每個 t 決定一個點 (x, y) , 隨著 t 變化, $(x, y) = (f(t), g(t))$ 畫出的曲線。
4. *initial point* 起點: $(f(a), g(a))$, *terminal point* 終點: $(f(b), g(b))$,
當 t 有給範圍 $a \leq t \leq b$ 時。

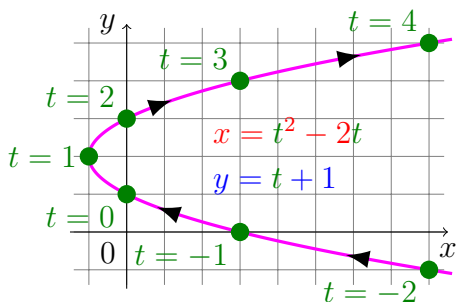
(把 t 當成時間 (time), 參數曲線就是平面上一個點的移動軌跡。)



Note: 相對於參數方程式, 只由 x, y 組成的叫做 *Cartesian equation*。

Example 0.1 Sketch and identify the curve defined by $x = t^2 - 2t$, $y = t + 1$.
(沒特別指定, t 的範圍就是 $(-\infty, \infty)$ 。)

$$t = y - 1, x = (y - 1)^2 - 2(y - 1) = y^2 - 4y + 3, \text{ a parabola.} \quad \blacksquare$$

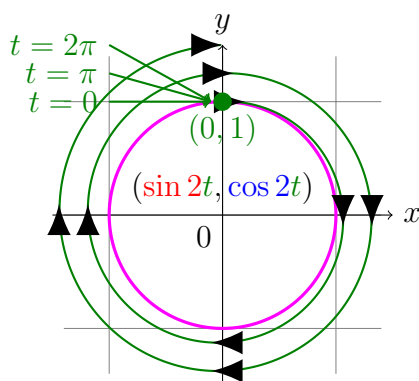
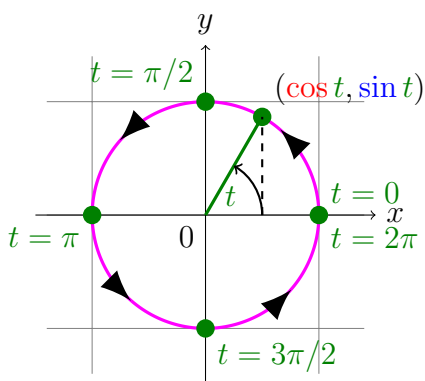


Note: 要標方向 (\rightarrow), 從小往大。

Example 0.2 What curve is represented by $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$?

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1, \text{ a unit circle.}$$

initial point = terminal point = $(1, 0)$, counterclockwise 逆時針繞一圈。 \blacksquare



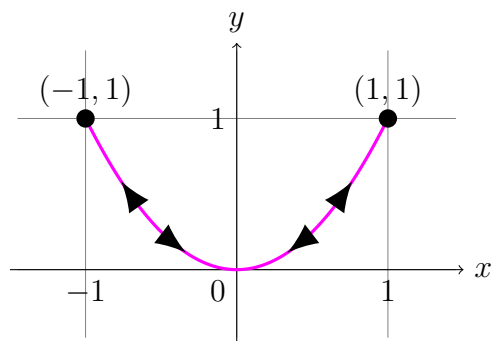
Example 0.3 What curve is represented by $x = \sin 2t$, $y = \cos 2t$, $0 \leq t \leq 2\pi$?

$$x^2 + y^2 = \sin^2 2t + \cos^2 2t = 1, \text{ a unit circle.}$$

initial point = terminal point = $(0, 1)$, clockwise 順時針繞兩圈。 \blacksquare

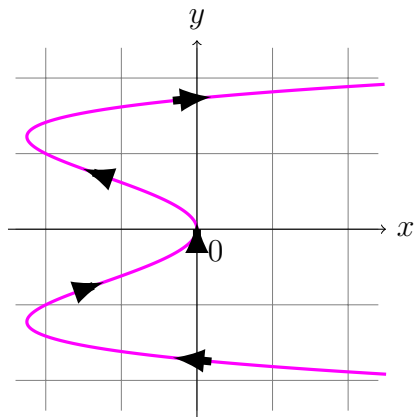
Example 0.4 Sketch curve with parametric equations $x = \sin t$, $y = \sin^2 t$.

$$x^2 = \sin^2 t = y, \text{ a parabola. } \because -1 \leq \sin t \leq 1, -1 \leq x \leq 1. \quad \blacksquare$$



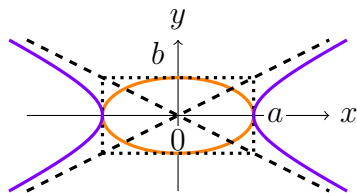
Example 0.5 Give parametric equations for $x = y^4 - 3y^2$.

$$x = t^4 - 3t^2, y = t. \quad \blacksquare$$

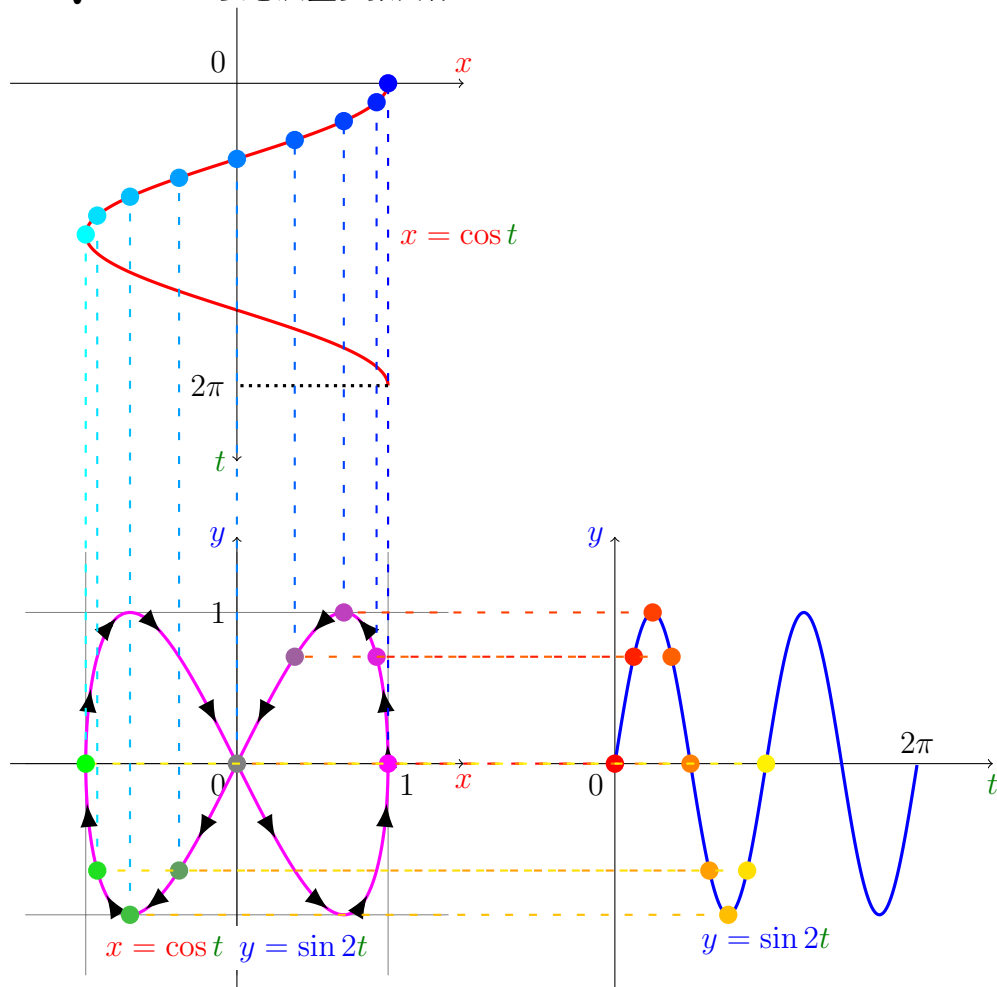


Additional: Hyperbola 雙曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff x = a \sec t, y = b \tan t$.

(Ex 10.1.34) Ellipse 橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff x = a \cos t, y = b \sin t$.



Question: 要怎麼畫參數曲線?



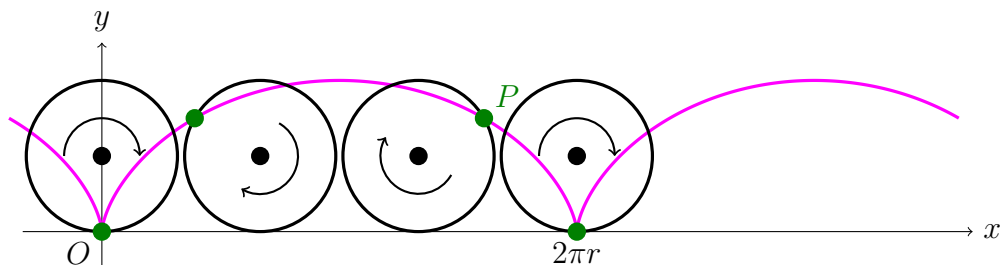
Remark:

1. 畫圖要標示 t 從小到大的方向。
2. 從 parametric equations 得到 Cartesian(rectangular) equation: 消去 t 。
3. 從 Cartesian equation 得到 parametric equations:
if $y = f(x)$, let $x = t$, $y = f(t)$, $t \in \text{domain of } f$;
if $x = g(y)$, let $y = t$, $x = g(t)$, $t \in \text{domain of } g$.
4. 不同 parametric equations 可得到方向速率不一樣的相同曲線。
5. parametric equations 可以表現比 rectilinear equations 更多的曲線。

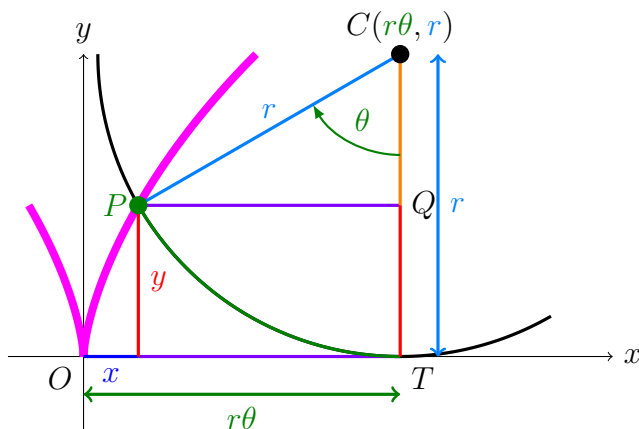
0.2 Cycloid & conchoid

Define: The curve traced out by a point on the circumference of a circle as the circle rolls along a straight line is called a **cycloid** [ˈsaɪ,kloɪd].

圓周上一點當圓沿一直線滾動所得的曲線稱為擺線。



Example 0.6 If circle has radius r and rolls along x -axis and if one position of P is the origin, find parametric equations.



Suppose center is C , and $CT \perp x$ -axis at T , $\theta = \angle TCP$.

Then $|OT| = r\theta$, $|CT| = r$, and $P(x, y)$ has
 $x = |OT| - |PQ| = r\theta - r \sin \theta = r(\theta - \sin \theta)$,
 $y = |CT| - |CQ| = r - r \cos \theta = r(1 - \cos \theta)$.

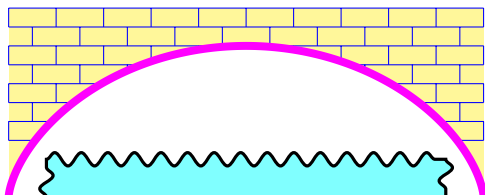
The parametric equations of cycloid are

$$x = r(\theta - \sin \theta), \quad y = r(1 - \cos \theta), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

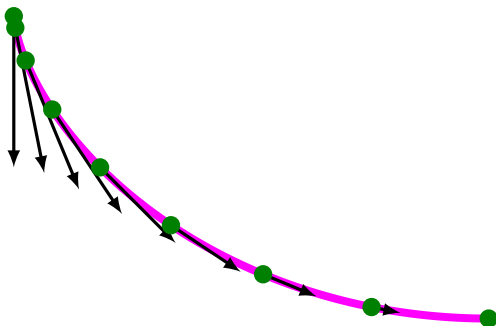
■

Story: Cycloid, the Helen of Geometers 幾何學的海倫 (眾人搶)

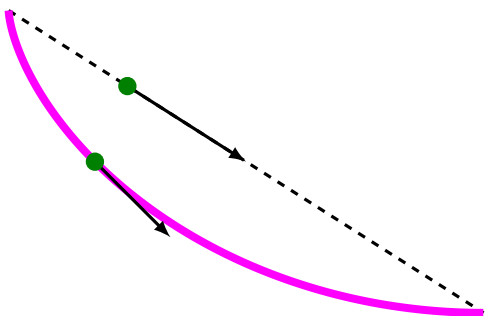
- 1599 Galileo 加利略, 橋要蓋成擺線。



- 1634 Roberval 羅伯歐, 橋下面面積 $3\pi r^2$ (10.2 會教到)。
- 1658 Wren 雷恩, 弧長 $8r$ (10.2 會教到)。
- 1673 Huygens 海更斯, **The Tautochrone Problem** [ˈtɒtəˈkron]
等時曲線問題: 從哪滑到底都一樣快的曲線? 倒過來的 (inverted) 擺線。



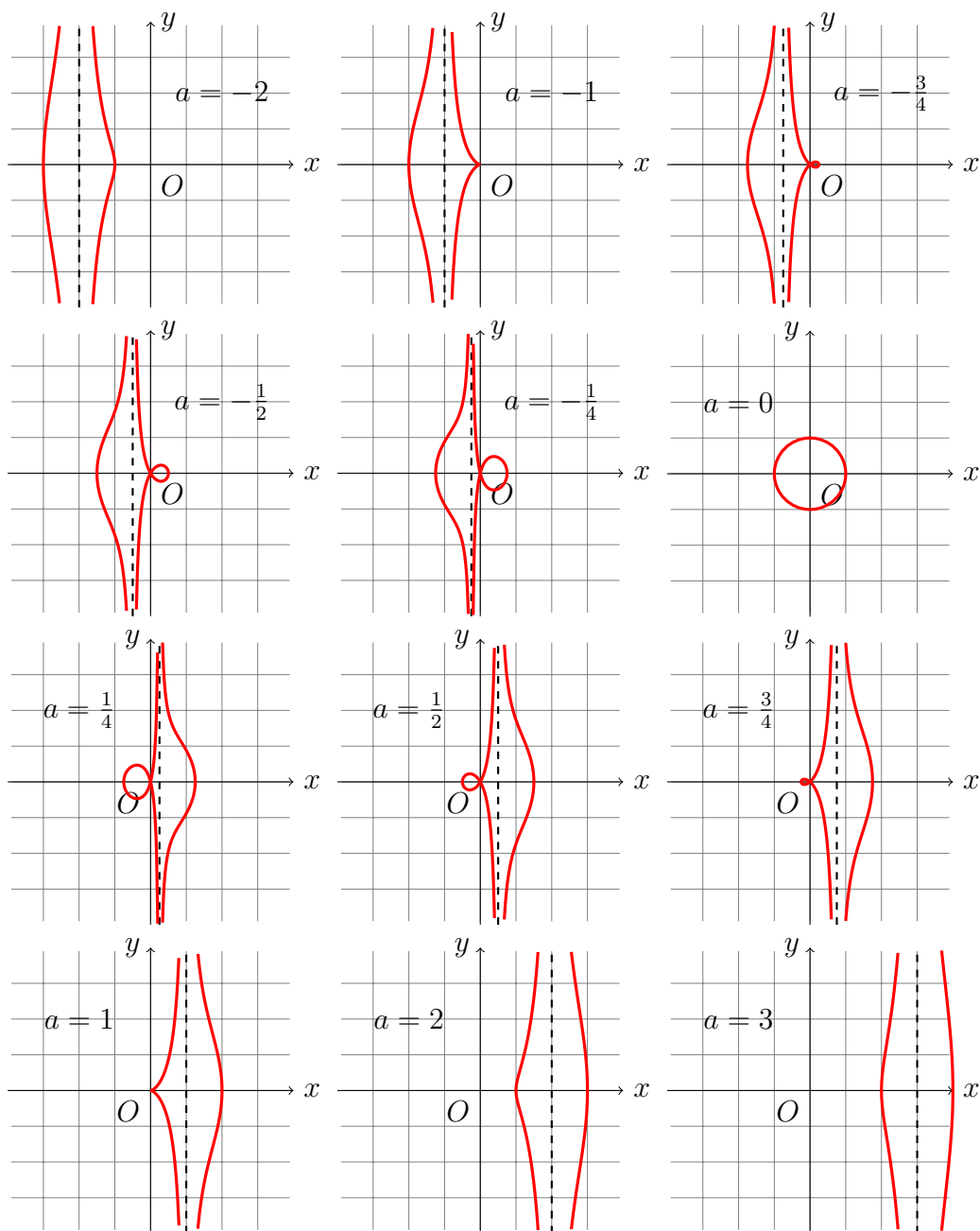
- 1696 Bernoulli 白努利, **The Brachistochrone Problem** [brəˈkɪstəˌkron]
最速降線問題: 滑 (斜下方) 下來最快的曲線? 倒過來的擺線。



Conchoids of Nicomedes: [ˈkənˌkɔɪd]

$$x = a + \cos t, \quad y = a \tan t + \sin t.$$

尼科梅德斯 (西元前希臘數學家) 的蚌線 (conch[康殼]: 蚌)。

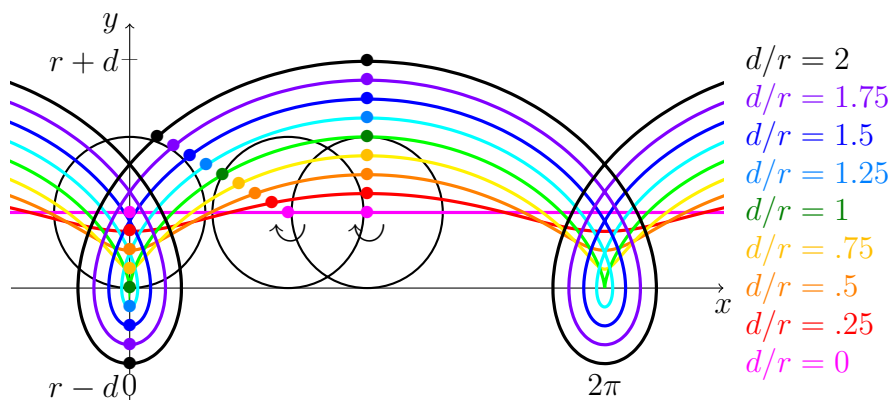


◆ **Additional: Stories in Exercises**

♠ **trochoid** 次擺線 (Exercise 10.1.40)

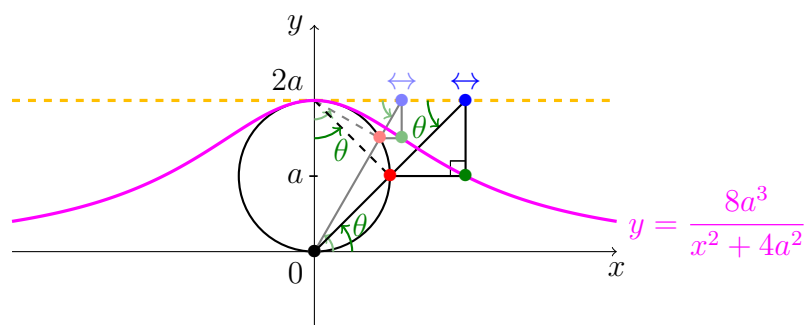
Roberval 創字源於 “trochos” 希臘文的 wheel 輪子。

$$x = r\theta - d \sin \theta \quad y = r - d \cos \theta$$



♡ **witch of Maria Agnesi** 箕舌線 (Exercise 10.1.43), see also §3.2.

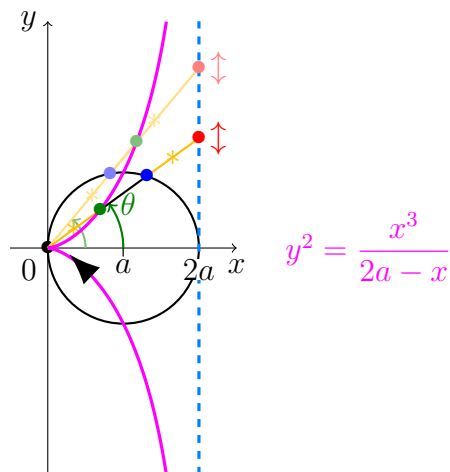
$$x = 2a \cot \theta \quad y = 2a \sin^2 \theta$$



◇ ***cisoid of Diocles*** 戴可利斯的蔓葉線 (Exercise 10.1.44)

“cisoid”字意為“像長春藤的”，B.C. 180 希臘幾何學家 Diocles 試圖解決倍立方問題 (Delian problem) 時發現。

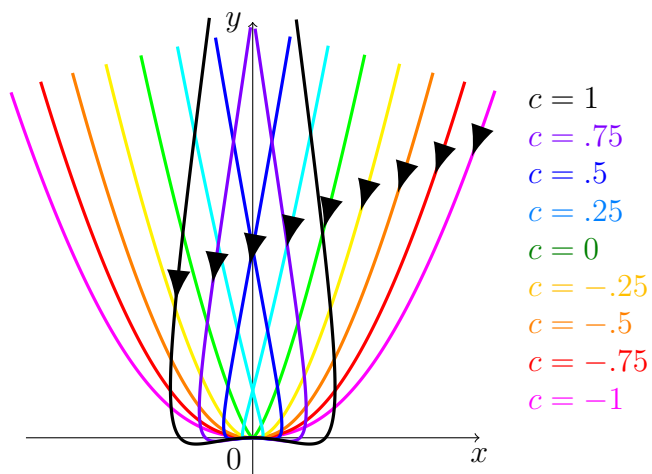
$$x = 2a \sin^2 \theta \quad y = 2a \tan \theta \sin^2 \theta$$



♣ ***swallowtail catastrophe curves*** 燕尾型突變曲線 (Exercise 10.1.48)

為混沌理論 (Chaos Theory) 中突變理論 (Catastrophe Theory) 裡的七種基本型突變 (catastrophe): 摺疊 (fold), 尖點 (cusp), 燕尾 (swallowtail), 蝴蝶 (butterfly), 雙曲臍 (hyperbolic umbilic), 橢圓臍 (elliptic umbilic), 拋物臍 (parabolic umbilic) 之一。

$$x = 2ct - t^3 \quad y = -ct^2 + 3t^4$$



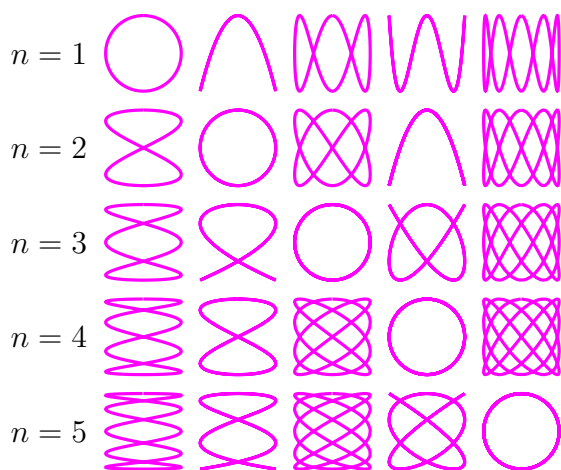
Lissajous figures/curves 利薩茹圖形/曲線 (Exercise 10.1.51)

1815 美國數學家 Bowditch 首先研究, 故又稱鮑迪奇曲線 (Bowditch's curves)。
1857 法國數學家 Lissajous 做更詳細的研究。其應用在示波器 (oscilloscopes) 上。

$$x = a \sin nt \quad y = b \cos mt$$

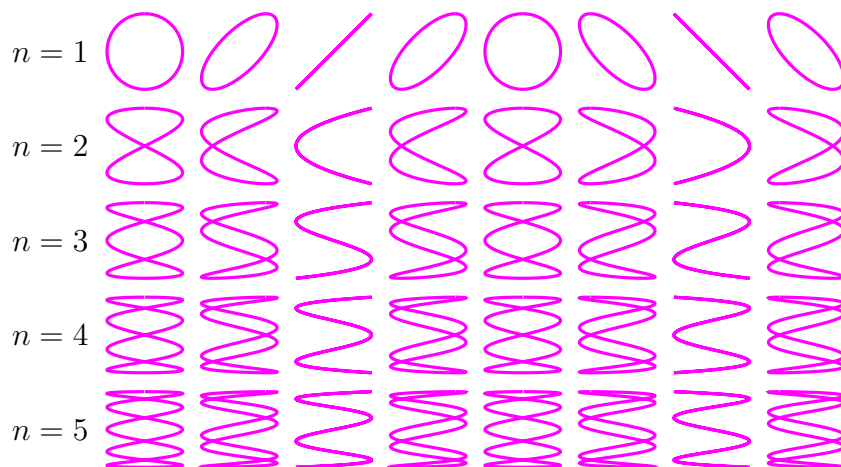
(長 $2a$ 寬 $2b$ 的矩形 $[-a, a] \times [-b, b]$ 內。)

$$a = b \quad m = 1 \quad m = 2 \quad m = 3 \quad m = 4 \quad m = 5$$



更一般的是 $x = a \sin(nt + c)$, $y = b \cos(mt)$ 版本.

$$m = 1 \quad c = \frac{0\pi}{4} \quad c = \frac{1\pi}{4} \quad c = \frac{2\pi}{4} \quad c = \frac{3\pi}{4} \quad c = \frac{4\pi}{4} \quad c = \frac{5\pi}{4} \quad c = \frac{6\pi}{4} \quad c = \frac{7\pi}{4}$$



Quiz 10.1

Matching parametric equations with figures:

(A) $x = t(\sin t + \cos t)$, $y = t(\sin t - \cos t)$, $0 \leq t \leq 4\pi$.

(B) $x = t(\sin t - \cos t)$, $y = t(\sin t + \cos t)$, $0 \leq t \leq 4\pi$.

(C) $x = t(\cos t + \sin t)$, $y = t(\cos t - \sin t)$, $0 \leq t \leq 4\pi$.

(D) $x = t(\cos t - \sin t)$, $y = t(\cos t + \sin t)$, $0 \leq t \leq 4\pi$.