# Heap Sort

Algoritmos e Estuturas de Dados

Cátia Vaz



# Árvores

- As árvores são estruturas de dados usadas em diversas aplicações:
  - Bases de dados de grande dimensão.
  - Reconhecimento de frases geradas por linguagens (ex: programas, expressões aritméticas,...).
  - Modelação de sistemas organizacionais (ex: famílias, directórios de um computador, hierarquia de comando de uma empresa,...).
  - Determinação do caminho mais curto entre dois computadores de uma rede.

# Árvores

- Definição: Uma **árvore** é um par **(V,E)** de dois conjuntos não vazios em que **V** é um conjunto finito e **E** é uma relação binária em **V** (isto é, $E \subseteq V \times V$), que satisfazem duas condições:
  - entre dois nós existe um único caminho (um **caminho** – *path* - é uma sequência de arestas entre dois nós);
  - um único nó, denominado **raiz** (*root*), só existe como primeiro elemento nos pares de E; os restantes nós são um segundo elemento dos pares de E (podendo também ser primeiro elemento de alguns pares).

- **Nota:** o conjunto V é designado pelo conjuntos dos nós ou vértices (vertex) e E é o conjunto das arcos (edges).
- **Nota:** uma árvore é um caso especial de um grafo.

**Cátia Vaz**



# Árvores

- Definição: se (v1,v2) ∈ E, v1 é nó **ascendente** (*parent*) e v2 é nó **filho** (*child*).
  - A raiz é o único nó sem ascendente.
  - Nós sem filhos são designados por **folhas** (*leaves*).
  - Nós com filhos são designados **não-terminais**. Nós não-terminais, distintos da raiz, são designados **intermédios**.
- Definição: A árvore é de tipo K, sse todos os nós intermédios tiverem K filhos. Quando K=2, a árvore diz-se **binária**.
- Definição: O **nível** (*level*) de um nó é o número de arcos entre a raiz e o nó (**raiz tem nível 0**).

**Cátia Vaz**

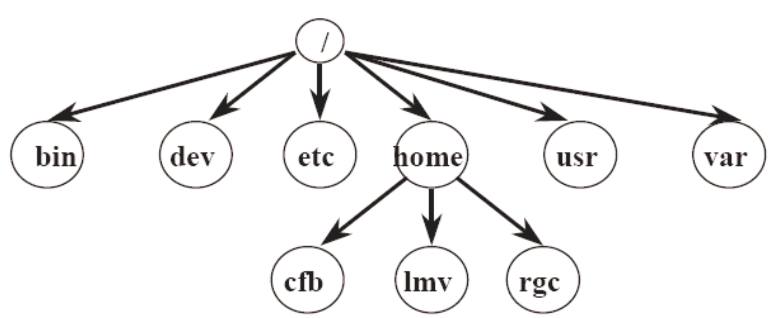
# Árvores

- Definição: A **altura** (*heigh*) de uma árvore é o máximo dos níveis das folhas (uma árvore só com a raiz tem altura 0).
- O **percurso** (*path*) é um caminho possível entre dois nós.
- **Representação gráfica das árvores:**
  - raiz no topo,
  - nós representados por círculos,
  - arestas representadas por linhas (ou setas no sentido da raiz para a folha).



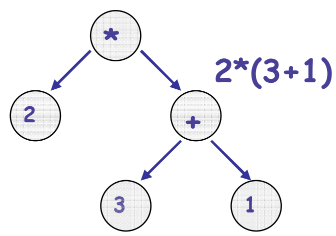
# Árvores-Exemplos

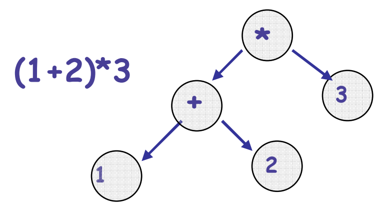
- directórios do sistema operativo Unix-like



# Árvores-Exemplos

expressões aritméticas




- árvore é avaliada de forma ascendente (*bottom-up*): 2*(3+1) = 8
- Parêntesis, usados nas expressões aritméticas para ultrapassar as prioridades dos operadores, são indicados na árvore através da posição dos nós



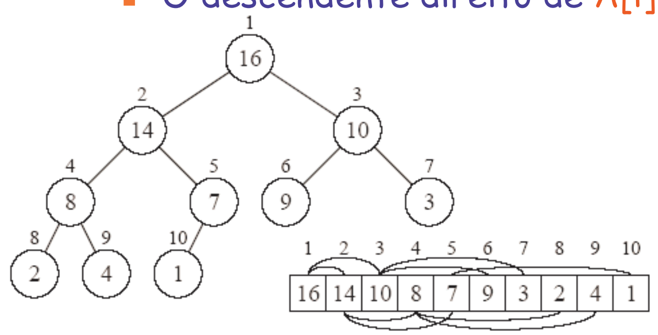
# Árvores

- Define-se árvore binária **balanceada**, quando a diferença de altura das duas sub-árvores de qualquer nó, é no máximo 1.
- Define-se árvore binária **perfeitamente balanceada**, se relativamente a qualquer nó, a diferença entre o número de nós das suas sub-árvores for no máximo 1.
- Define-se **árvore binária completa** se estiver totalmente preenchida, isto é se todos os nós folhas estão no mesmo nível.

# Heap (Amontoado)

- Um *heap (amontoado)* é uma estrutura de dados representada numa **árvore binária completa** ou quase **completa**.
- Um *heap* pode ter uma representação num *array* $A$ .
  - A raiz da árvore é A[1]
  - O ascendente de A[i] é A[⌊i/2⌋]
  - O descendente esquerdo de A[i] é A[ 2i ]
  - O descendente direito de A[i] é A[2i +1]

$$\Rightarrow A[0] \quad A[(i-1)/2] \quad A[2i+1] \quad A[2i+2]$$



```
static int parent(int i ) {
  return (i-1)>>1;}
static int left(int i ) {
  return (i<<1)+1;}
static int right(int i ) {
  return (i<<1)+2;}
```

Cátia Vaz



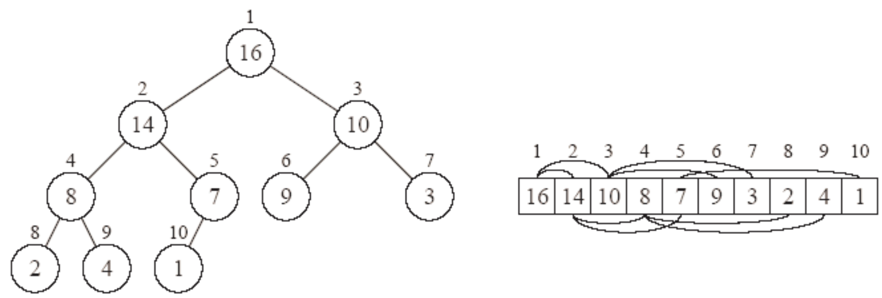
# Heap

- Existem dois tipos de *binary heaps*: ***max-heaps*** and ***min-heaps***.
- Em ambos os tipos, os valores nos nós satisfazem uma **propriedade do *heap***, a qual depende do tipo de *heap*:
  - ***num max-heap***, a propriedade *é que* ***para cada nó i*** **excepto a raiz A[parent(i)]>=A[i]**
  - ***num min-heap***, a propriedade *é que* ***para cada nó i*** **excepto a raiz A[parent(i)]<=A[i]**
- No algoritmo ***heap sort*** utiliza-se *max-heap*.

Cátia Vaz

# Heap Sort

- Tempo de execução: $O(n \lg n)$ - como o *merge sort*.
- Ordena no local - como o *insertion sort*
- Combina o melhor dos dois algoritmos





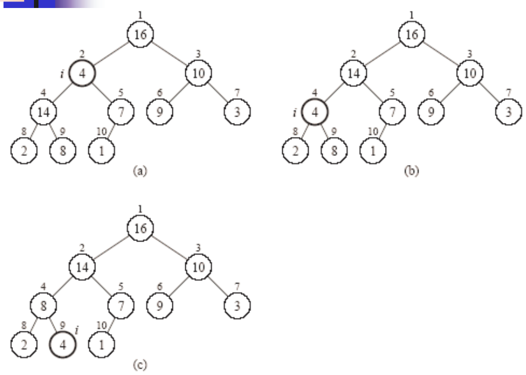

# Manter a propriedade do *heap*

- **MAX-HEAPIFY** é uma sub-rotina importante para manipular *max-heaps*.
- **inputs:** um array *A* e um index *i* no array.
- quando MAX-HEAPIFY é invocado:
  - assume-se que as arvores com raiz em LEFT(*i*) e RIGHT(*i*) são max-heaps
  - mas *A*[*i*] pode ser menor do que os seus filhos, violando a propriedade max-heap.

```
MAX-HEAPIFY(A, i, n)
l ← LEFT(i)
r ← RIGHT(i)
if l ≤ n and A[l] > A[i]
   then largest ← l
   else largest ← i
if r ≤ n and A[r] > A[largest]
   then largest ← r
if largest ≠ i
   then exchange A[i] ↔ A[largest]
        MAX-HEAPIFY(A, largest, n)
```

Cátia Vaz

# Manter a propriedade do *heap*



```
MAX-HEAPIFY(A, i, n)
l ← LEFT(i)
r ← RIGHT(i)
if l ≤ n and A[l] > A[i]
   then largest ← l
   else largest ← i
if r ≤ n and A[r] > A[largest]
   then largest ← r
if largest ≠ i
   then exchange A[i] ↔ A[largest]
        MAX-HEAPIFY(A, largest, n)
```

$T(n) \leq T(2n/3) + \Theta(1)$.

$T(n) = O(\lg n)$



# Manter a propriedade do *heap*

```java
public static void heapify(int[] v, int p, int hSize) {
  int l, r, largest;
  l = left(p);
  r = right(p);
  largest=p;
  if(l < hSize &&  v[l] > v[p]) largest=l;
  if ( r < hSize && v[r] > v[largest]) largest = r;
  if ( largest == p ) return;
  exchange(v, p, largest);
  heapify(v, largest, hSize);
}
public static void exchange(int[] v, int i, int j){
  int tmp = v[i];
  v[i] = v[j];
  v[j] = tmp;
}
```

# Construir um *heap*

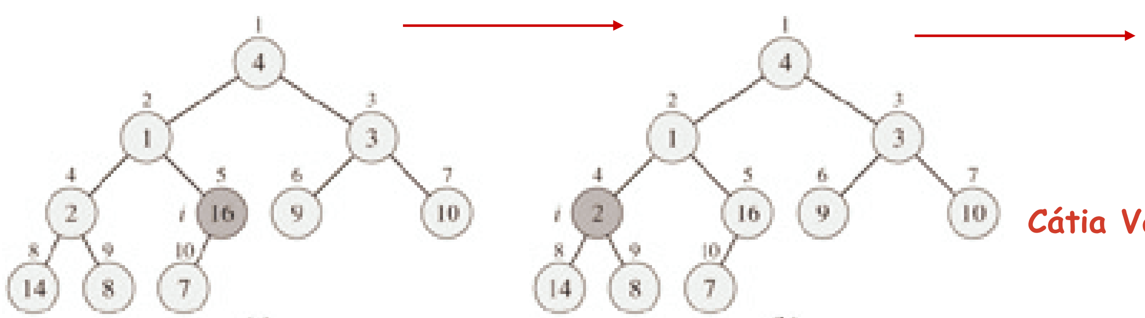
- MAX-HEAPIFY pode ser usado para converter um array A[1;n] num max-heap, onde n = length[A].
- Nota: os elementos no sub-array A[(⌊n/2⌋+1)  n] são todas as folhas da árvore

$$\begin{array}{l}\textsc{Build-Max-Heap}(A, n)\\ \textbf{for } i \leftarrow \lfloor n/2 \rfloor \textbf{ downto } 1\\ \quad \textbf{do } \textsc{Max-Heapify}(A, i, n)\end{array}$$

```
static void buildHeap(int[] v,int n){
  int p= (n >> 1)-1;
  for ( ; p >=0 ; --p)
     heapify(v, p, n);
}
```

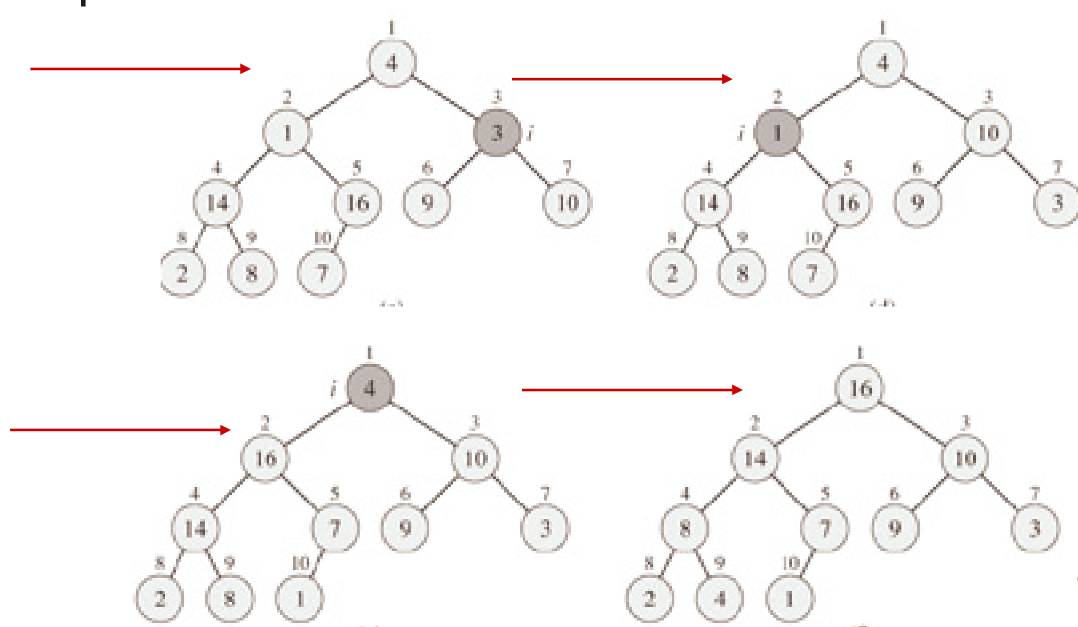
**Exemplo**

| A | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 3 | 2 | 16 | 9 | 10 | 14 | 8 | 7 |





# Construir um *heap*



# Build-MAX-Heap - análise

- O número de nós duma árvore binária que têm altura $h$ é $\leq \lceil n/2^{h+1} \rceil$
- O tempo requerido pelo max-Heapify quando chamado sobre um nó de altura $h$ é $O(h)$
- O custo total do build-max-heap é:

$$\sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \left\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \right\rceil O(h) = O\left( n \sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \frac{h}{2^h} \right) = O(n)$$

Sabendo que $\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$ para $x = 1/2$

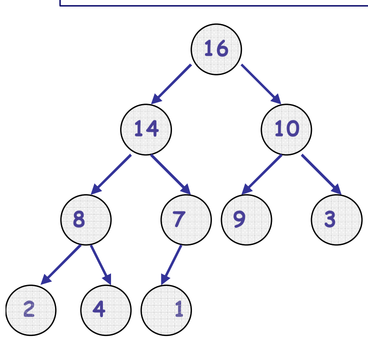
$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{h}{2^h} = \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = 2$$ logo $$\sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \frac{h}{2^h} < 2$$



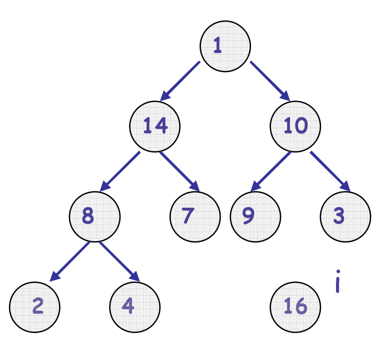
# Heap - Sort

```
HEAPSORT(A, n)
BUILD-MAX-HEAP(A, n)
for i ← n downto 2
    do exchange A[1] ↔ A[i]
        MAX-HEAPIFY(A, 1, i − 1)
```

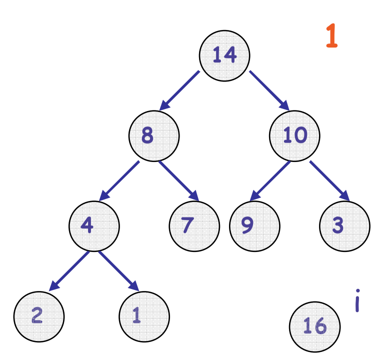
- Como o máximo elemento está armazenado na raiz, pode ser colocado na sua posição correcta.
- Agora, ao descartar o nó n o heap, sabes-se que as sub-árvores da raíz são heaps, mas a nova raiz pode violar a propriedade, logo tem que se invocar o MAX-HEAPIFY.




Após a execução de **Build-Max-Heap**




Após o **exchange**.
(deixou de ser heap)

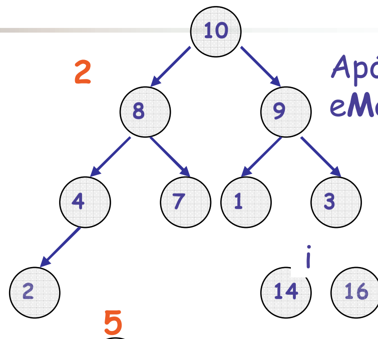



Após o **Max-Heapify**

# Heap - Sort

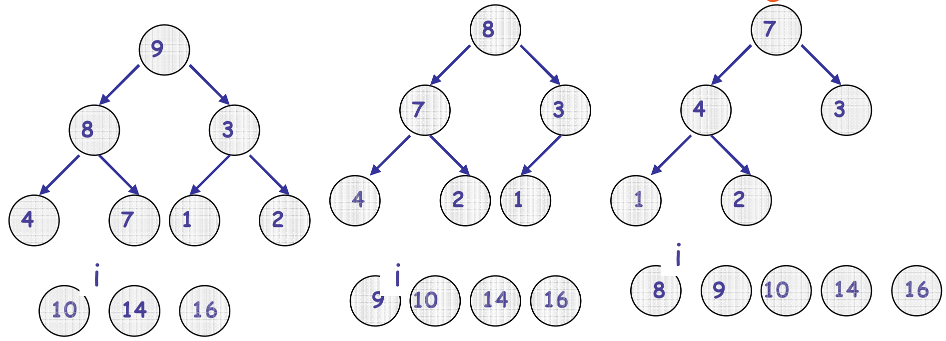
```
static void heapSort(int[] v, int n) {
  buildHeap(v,n);
  for ( int i= n-1; i> 0; --i) {
      exchange(v, 0, i);
      heapify(v, 0, i);
   }
}
```

2



Após o **exchange**. eMax-Heapify

3 4 5





# Heap - Sort

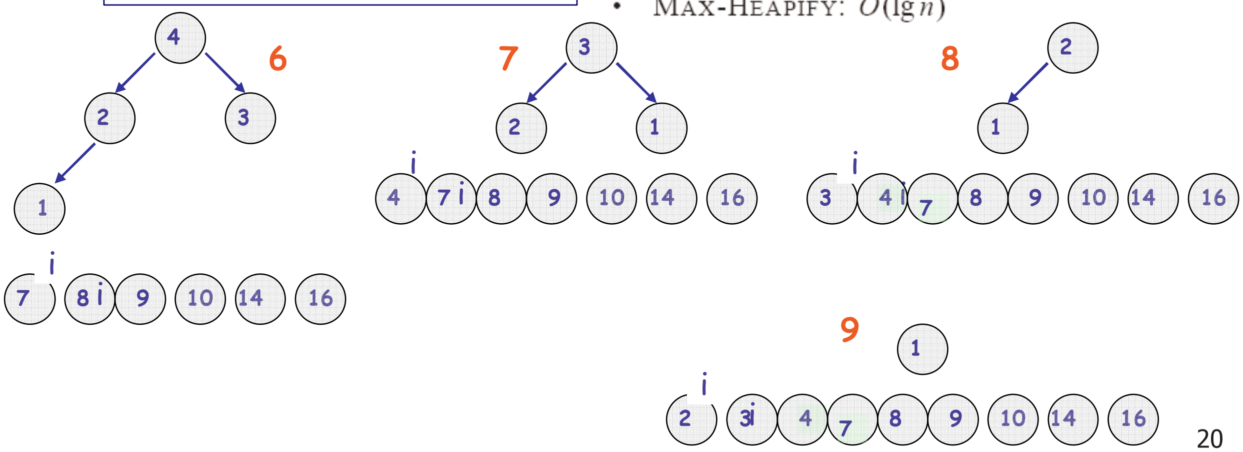
HEAPSORT$(A, n)$
BUILD-MAX-HEAP$(A, n)$
**for** $i \leftarrow n$ **downto** 2
  **do** exchange $A[1] \leftrightarrow A[i]$
    MAX-HEAPIFY$(A, 1, i-1)$

**Analysis**

- BUILD-MAX-HEAP: $O(n)$
- **for** loop: $n - 1$ times
- exchange elements: $O(1)$
- MAX-HEAPIFY: $O(\lg n)$

Total time: $O(n \lg n)$

6 7 8 9



# Priority Queue

- Uma ***Priority Queue*** **(fila prioritária)** é uma estrutura de dados para manter um conjunto S de elementos, cada um com uma **chave** associada. Uma ***max-priority queue*** suporta as seguintes operações:
  - **INSERT(S,x)**, insere o elemento **x** no conjunto **S**;
  - **MAXIMUM(S)**, retorna o elemento de **S** com a maior chave;
  - **EXTRACT-MAX (S)**, remove e retorna o elemento de **S** com a maior chave;
  - **INCREASE-KEY(S,x,k)**, aumenta o chave do elemento **x** para o novo valor **k**, que é assumido ser maior ou igual ao valor actual da chave de **x**.
- Uma *min-priority queue* suporta as operações INSERT, MINIMUM, EXTRACT-MIN e DECREASE-KEY.

**Cátia Vaz**



# Implementar uma max-priority queue sobre max-heaps

```
HEAP-MAXIMUM(A)
return A[1]
```

O maior elemento está na 1ª posição

*Time:* $\Theta(1)$.

```
HEAP-EXTRACT-MAX(A, n)
if n < 1
  then error "heap underflow"
max ← A[1]
A[1] ← A[n]
MAX-HEAPIFY(A, 1, n − 1)    ▷ remakes heap
return max
```

*Time:* $O(\lg n)$.

```
static int heapExtractMax(int[] v,
                          int hSize){
  int max = v[ 0 ];
  v[ 0 ] = v[hSize-1];
  heapify(v, 0, hSize-1);
  return max;
}
```

**Retira-se o maior elemento;**

Ao descartar o nó 1 o heap, sabe-se que as sub-árvores da raíz são heaps, mas a nova raiz pode violar a propriedade, logo tem que se invocar o MAX-HEAPIFY.

**v é um max-heap**

**Cátia Vaz**

# Implementar uma max-priority queue sobre max-heaps

HEAP-INCREASE-KEY$(A, i, key)$
**if** $key < A[i]$
  **then error** "new key is smaller than current key"
$A[i] \leftarrow key$
**while** $i > 1$ and $A[\text{PARENT}(i)] < A[i]$
  **do** exchange $A[i] \leftrightarrow A[\text{PARENT}(i)]$
    $i \leftarrow \text{PARENT}(i)$

***Time:*** $O(\lg n)$.

```
static void heapIncreaseKey(int[] v,
                            int i, int key ) {
  v[i] = key;
  while(i>0 && v[i]>v[parent(i)]){
    exchange(v, i, parent(i));
    i = parent(i);
  }
}
```

MAX-HEAP-INSERT$(A, key, n)$
$A[n+1] \leftarrow -\infty$
HEAP-INCREASE-KEY$(A, n+1, key)$

***Time:*** $O(\lg n)$.

```
static void maxHeapInsert(int[] v,
                          int hSize, int key ) {
    v[hSize] = key;
    heapIncreaseKey(v, hSize, key);
}
```

**v é um max-heap**

Expande o max-heap;
Altera a chave do novo elemento para o valor correcto e invoca o HEAP-INCREASE-KEY para manter a propriedade do heap.



# Heap Sort genérico

```
public static <T> void heapify(T[] v, int p, int hSize,Comparator<T> cmp){
  int l, r, largest;
  l = left(p);
  r = right(p);
  largest=p;
  if(l < hSize &&  cmp.compare(v[l],v[p])>0) largest=l;
  if ( r < hSize && cmp.compare(v[r],v[largest])>0) largest = r;
  if ( largest == p ) return;
  exchange(v, p, largest);
  heapify(v, largest,hSize,cmp);
}

public static <T> void exchange(T[] v, int i, int j){
  T tmp = v[i];
  v[i] = v[j];
  v[j] = tmp;
}
```