12 - Image Enhancement - trasformata di Fourier

Premettiamo che una funzione periodica può essere espressa come **somma di seni e di coseni di differenti ampiezze e frequenze**, questa forma prende il nome di **serie di Fourier**, anche una funzione non periodica può essere espressa in questa forma con determinati limiti, questa operazione prende il nome di trasformata di Fourier.
Con l'avvento della FFT (Fast Fourier Transform) si è raggiunti a una vera e propria rivoluzione nella elaborazione delle immagini attraverso i DSP
Un'immagine può essere vista come una funzione in due dimensioni i cui valori rappresentano i valori di grigio nel pixel, la sua immagine può essere vista come un segnale
La formula della trasformata è:

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-i2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

$$\text{per } u = 0, 1, \ldots, M-1 \quad v = 0, 1, \ldots, N-1$$

Ricordiamo come u e v sono relativi agli assi frequenze discretizzati mentre naturalmente M ed N rappresentano le dimensioni in pixel dell'immagine.

La doppia sommatoria scorre tutte le posizioni dell'immagine f, al netto di certi coefficienti posso scrivere la formula come somma di funzioni armoniche, presenti qui ma nascosti, in particolare definiamo come formula di Eulero $\forall x \in R$:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

Da cui naturalmente:

$$e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$$

formula di Eulero

Notiamo come il risultato della trasformata è dunque una matrice a valori complessi
Vediamo quanto fa $F(0,0)$:

$$F(u,v)=\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)e^0 \implies$$

$$F(u,v)=\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)1$$

Questo dimostra che nel punto $F(0,0)$ è posta la media dell'immagine e tutti gli altri valori andranno a scendere oscillando

Anti trasformata di Fourier

Come esiste la trasformata esiste anche la sua formula inversa che con grande creatività viene definita come anti trasformata di Fourier:

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)e^{i2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

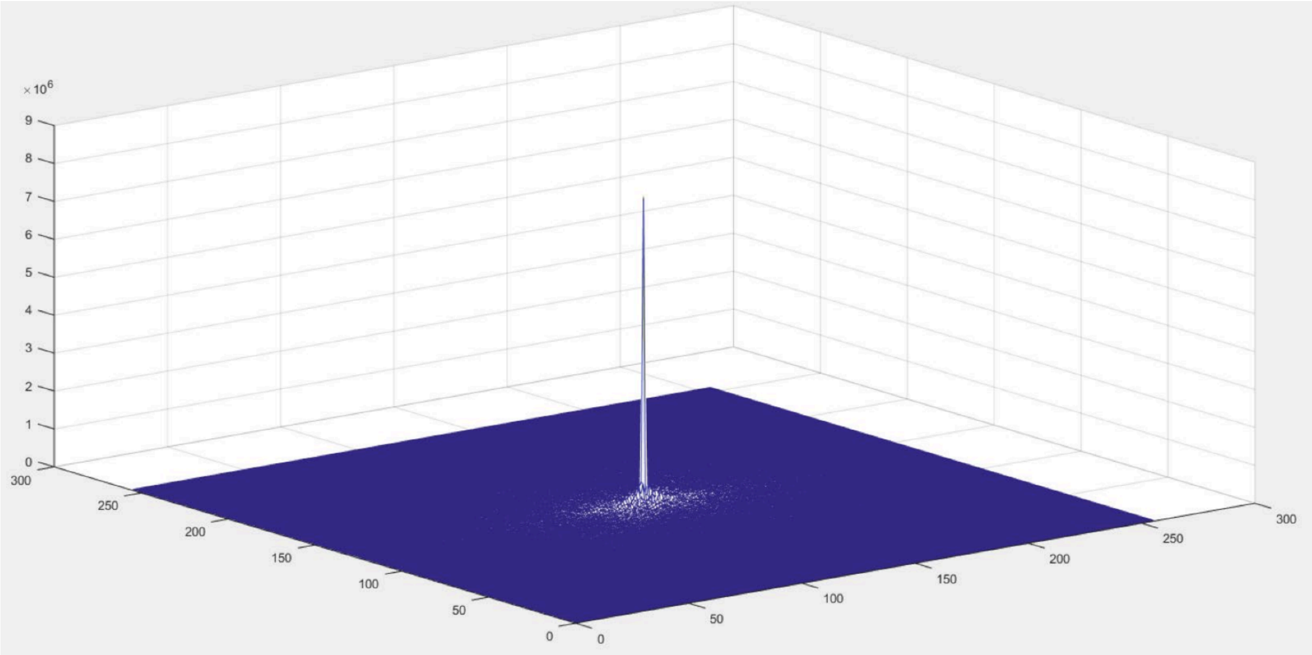
$$\text{per } x=0,1,\ldots,M-1 \quad y=0,1,\ldots,N-1$$

L'immagine risultante verrà definita come g, se non ho fatto nulla sull'immagine F allora, essendo la trasformata un'operazione reversibile, non sarà cambiato nulla e quindi in questo caso specifico $f=g$

Essendo che la trasformata è un numero complesso, possiamo esprimerla attraverso la sua parte reale e la sua parte immaginaria, dunque troviamo le seguenti formule:
Spettro della trasformata

$$|F(u,v)|=\sqrt{R^2(u,v)+I^2(u,v)}$$

Essendo un operazione *shift invariant* non andrò a danneggiare in alcun modo la trasformata originale.

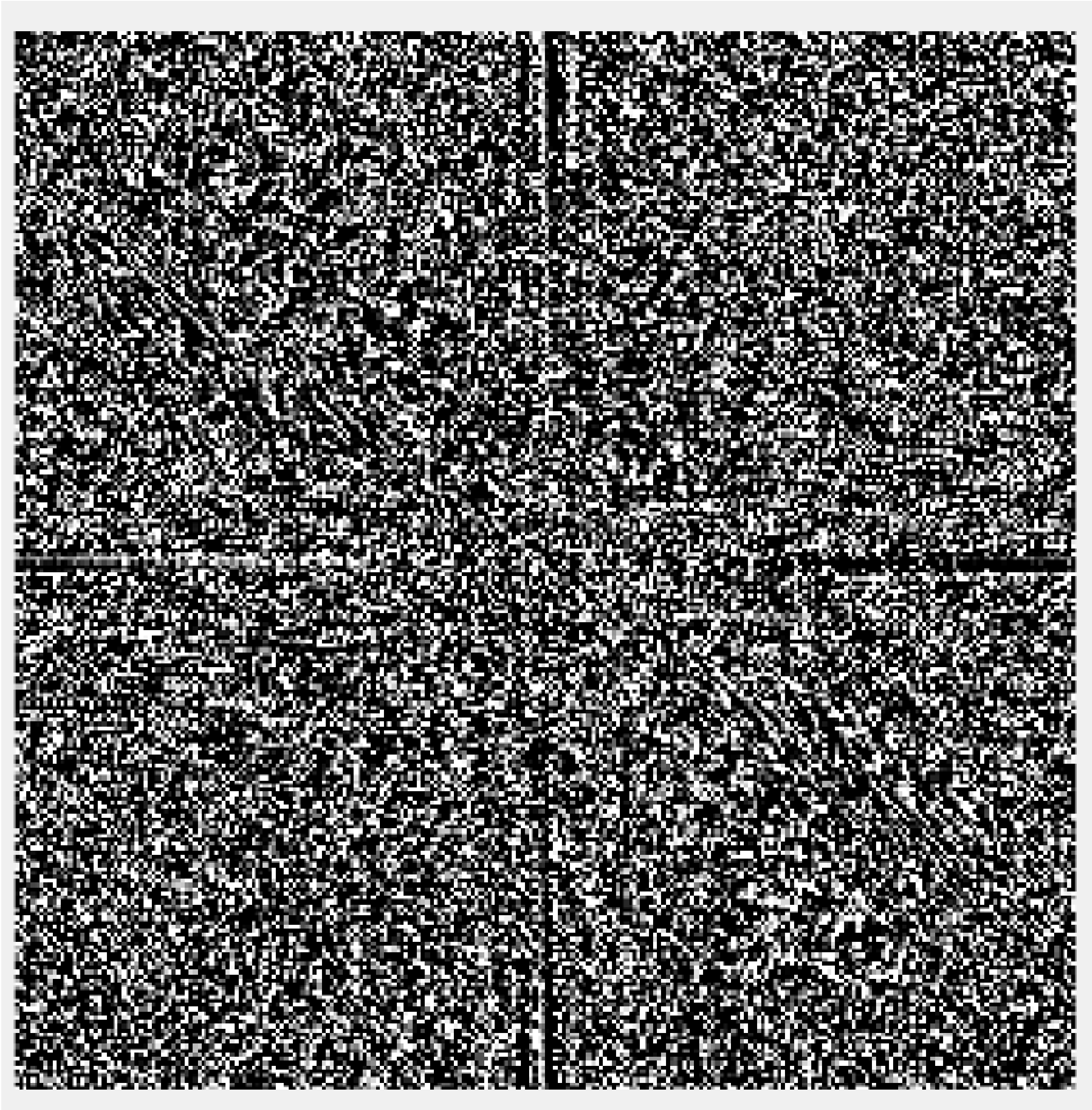


Seguono ulteriori esempi nelle slide

Angolo di fase

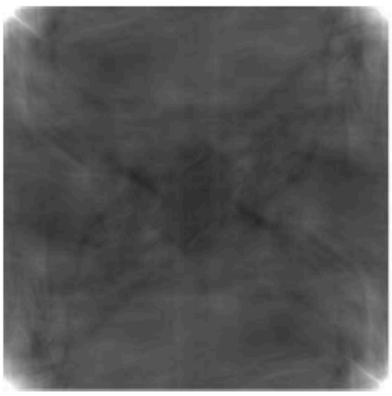
$$\phi(u,v) = \tan^{-1}\left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right]$$

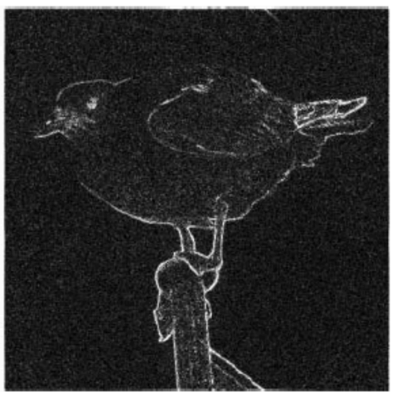
Nella fase in genere non si capisce niente, allora tutte le operazioni globali vengono fatte soltanto sul modulo e la fase sarà utile soltanto al fine di ritornare alla trasformata originale



fase di lena

Ricostruzione da solo modulo





Ricostruzione da sola fase

La fase in realtà è talmente importante che è cosa buona e giusta **non toccarla proprio**

Vantaggi della trasformata

I vantaggi della trasformata sono molteplici, difatti nello spazio delle frequenze è possibile fare:

- Soppressione delle frequenze indesiderate
- Riduzione spazio in memoria permettendo la non degradazione del segnale di origine (*vedasi formati JPEG, MPEG, DivX, MP3*)
- Rigenerazione di segnali degradati

Separabilità

Una trasformata può essere espressa in una form separabile, vale dunque la seguente espressione:

$$F(u,v) = \frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1} k(x,v)e^{\frac{-i2\pi ux}{M}}$$

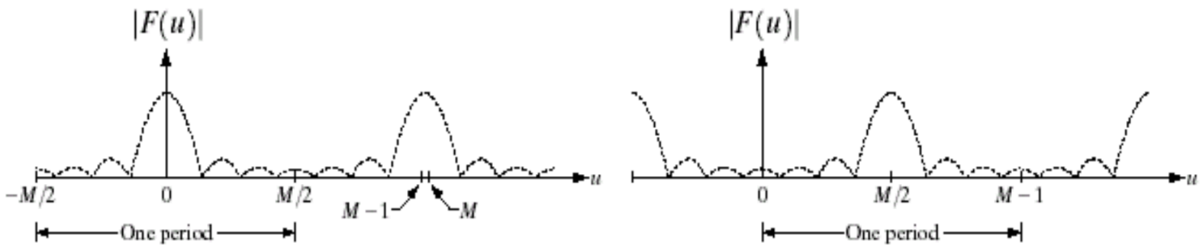
Dove:

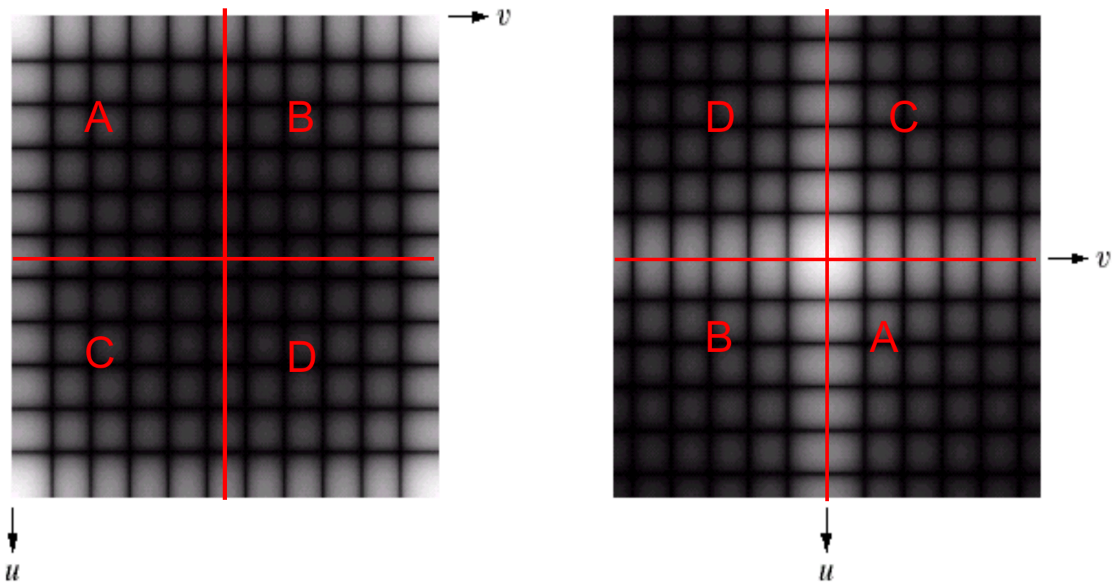
$$k(x,v) = \left[\frac{1}{N}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{\frac{-i2\pi vy}{N}}\right]$$

Un suo vantaggio è che può essere ottenuta applicando due passi successivi la trasformata in 1-D

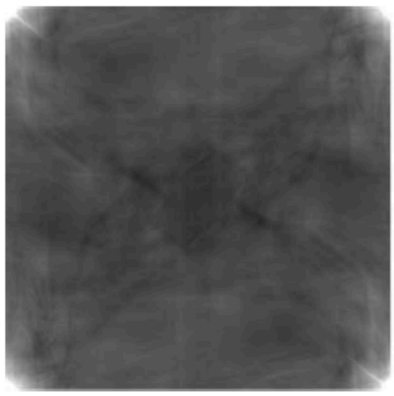
Traslazione

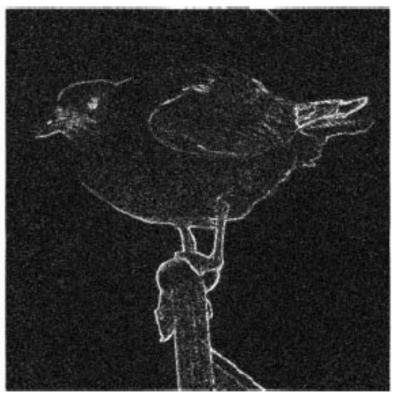
Nel caso bidimensionale è buona norma effettuare una traslazione del punto di origine a M/2 N/2 (Dove M ed N sono le dimensioni dell'immagine) in modo tale che $F(0,0)$ risulti il centro del rettangolo delle frequenze che è definito tra $[0, M-1]$ e $[0, N-1]$





Ricostruzione da solo modulo





Ricostruzione da sola fase

Valore medio

I dettagli sono posti nelle alte frequenze, mentre nelle basse frequenze troviamo la maggior parte dell'informazione (zone uniformi dell'immagine), la perdita di una di queste frequenze rappresenta un fattore cruciale poiché si potrebbero perdere notevoli informazioni. Il valore medio delle basse frequenze risulta fondamentale.

Filtraggio

Attraverso il *teorema della convoluzione* notiamo come la convoluzione tra due segnali nel dominio spaziale equivale a una moltiplicazione **punto a punto** nel dominio delle frequenze (Fourier), ciò implica dunque:

$$f(x,y) * h(x,y) \iff F(u,v)H(u,v)$$

Considerando una funzione $H(u,v)$, prende il nome di filtro poiché agisce su alcune specifiche frequenze della trasformata senza toccare le altre, inoltre la matrice H spesso incompleta viene rifinita aggiungendo degli 0. Anche dal punto di vista di complessità computazionale si hanno netti vantaggi:

- Per u'operazione 1D notiamo come:
  - Complessità nel dominio spaziale $O(n^2)$
  - Complessità nel dominio delle frequenze $O(n \log n)$
    Vediamo dunque i vari tipi di filtro possibili:

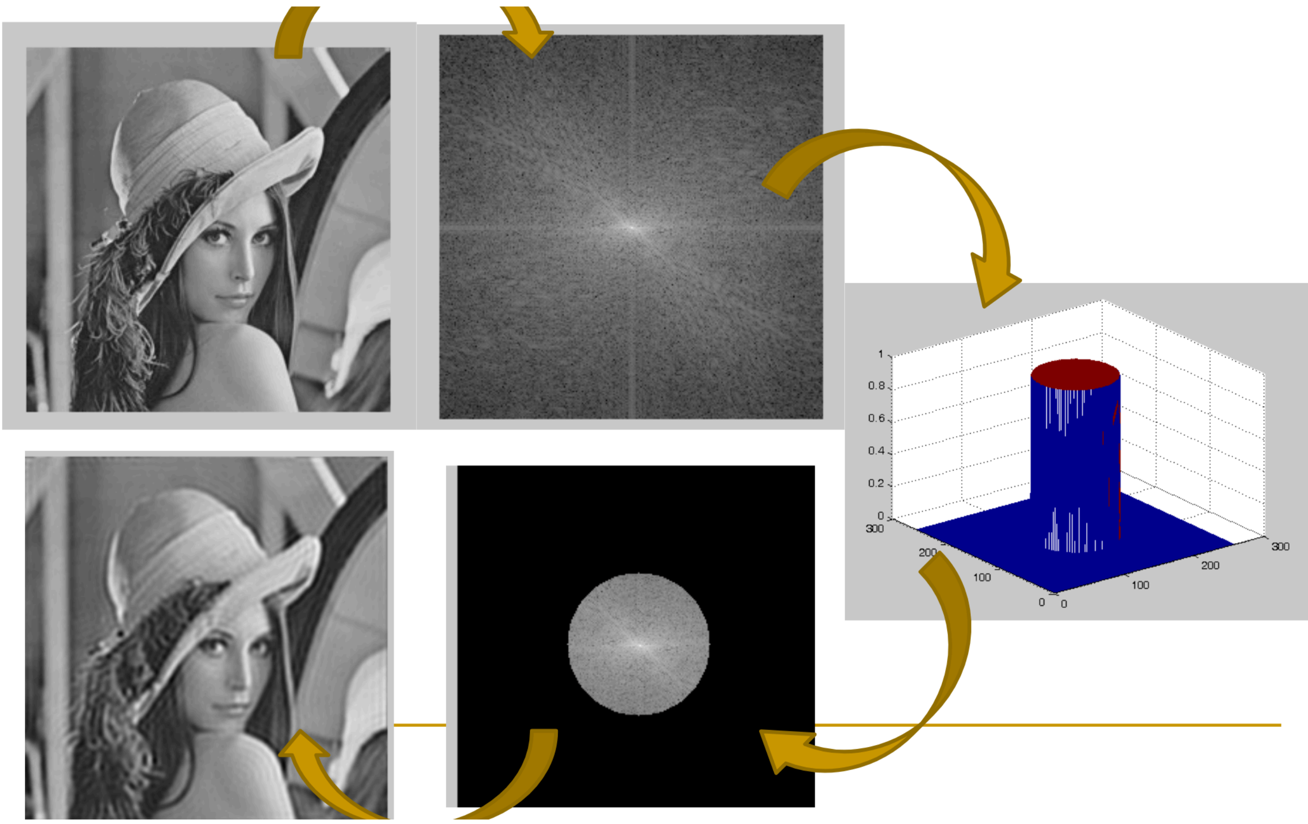
Filtro passa-basso

Con un filtro passa basso vedremo un'immagine povera di dettagli
Costruisco sostanzialmente un cerchio, all'interno del raggio del cerchio verranno fatte passare quelle frequenze, è definito **ideale** ma è anche molto netto come taglio, indicheremo con V_0 la frequenza di taglio
Dunque avremo:

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 \text{ se } D(u,v) \leq D_0 \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Dove:

$$D(u,v) = \left[(u - P/2)^2 + (v - Q/2)^2\right]^{1/2}$$

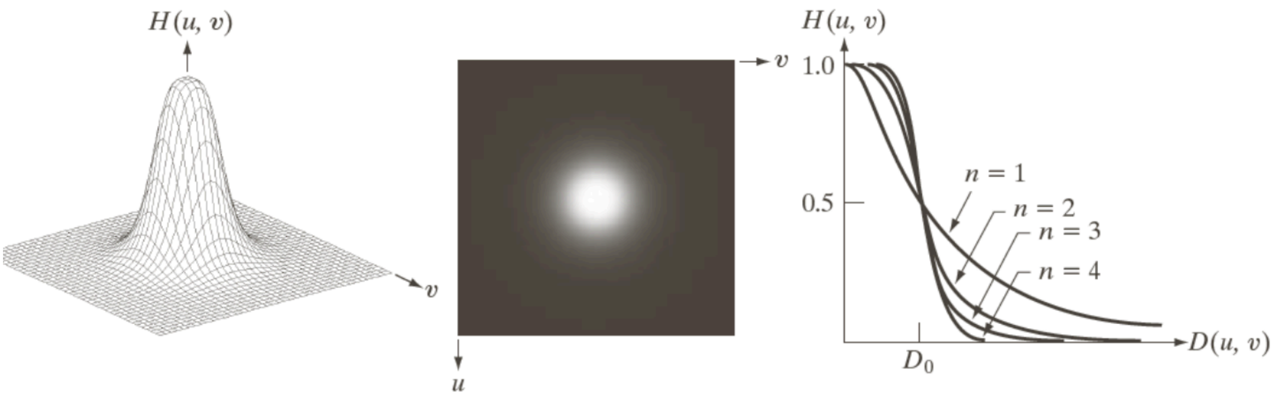


Filtro di Butterworth

È un filtro passa basso che permette di smussare il taglio, rendendolo meno netto, ha la eseguente formula:

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [\frac{D(u,v)}{D_0}]^{2n}}$$

Al variare di n avremo una differente pendenza della curva, ciò non lo rende più ideale ovviamente



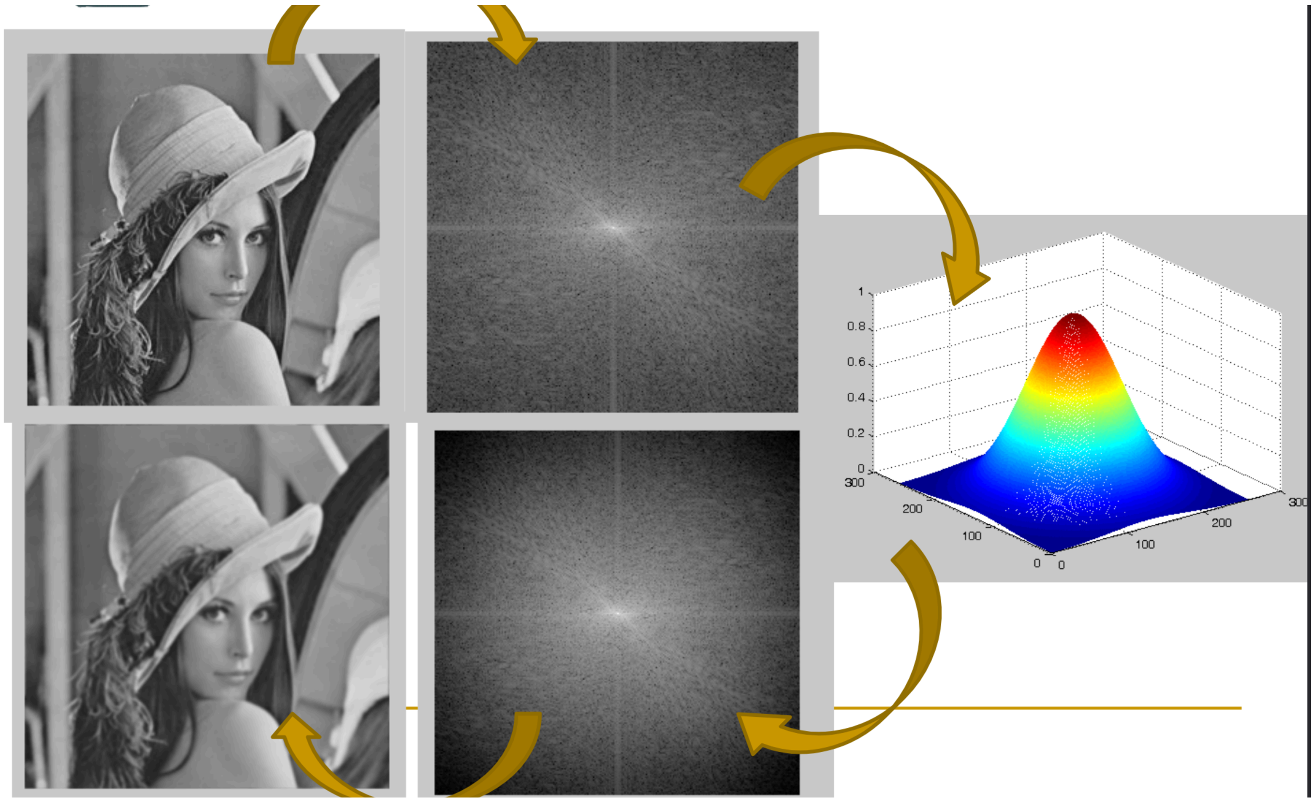
La differenza tra il classico filtro passa basso è che da un taglio netto, quì il risultato va a degradare, essendo che $0 \leq H \leq 1$

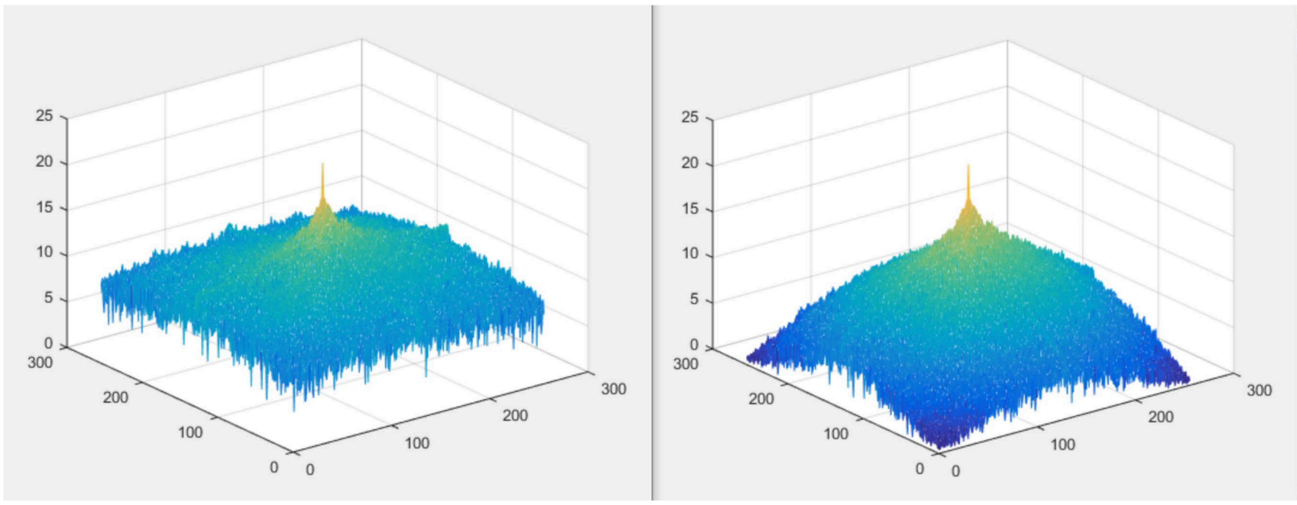
Filtro Gaussiano

Il filtro Gaussiano viene definito dalla seguente formula:

$$H(u,v) = e^{\frac{-D^2(u,v)}{2D_0^2}}$$

Notiamo subito come scompare la n, quindi torna ad essere *ideale*, vediamolo dunque:





Filtro passa-alto

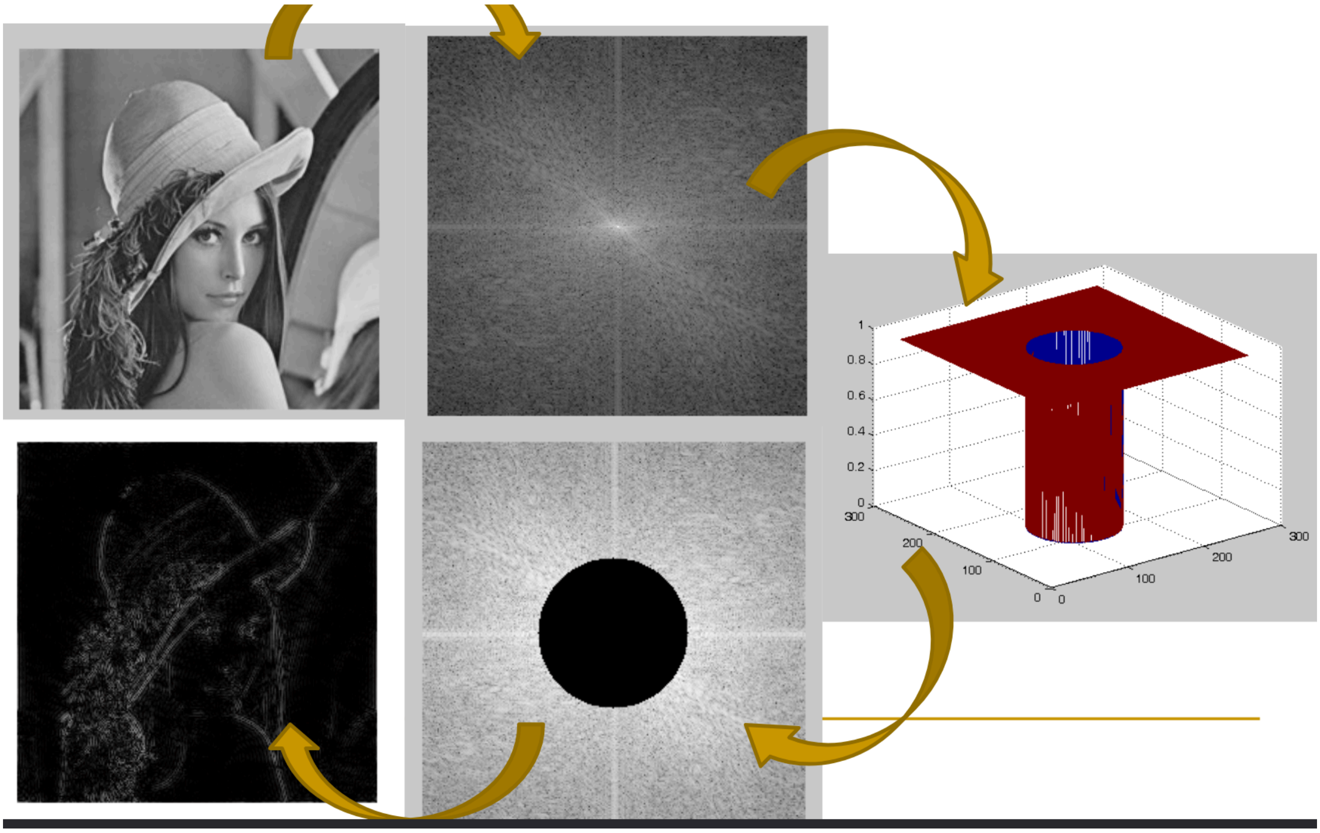
Come prevedibile il filtro passa alto funziona all'esatto opposto del filtro passa basso, quindi troveremo un "buco" nel grafico nella parte centrale, viene definito dalle seguenti formule:

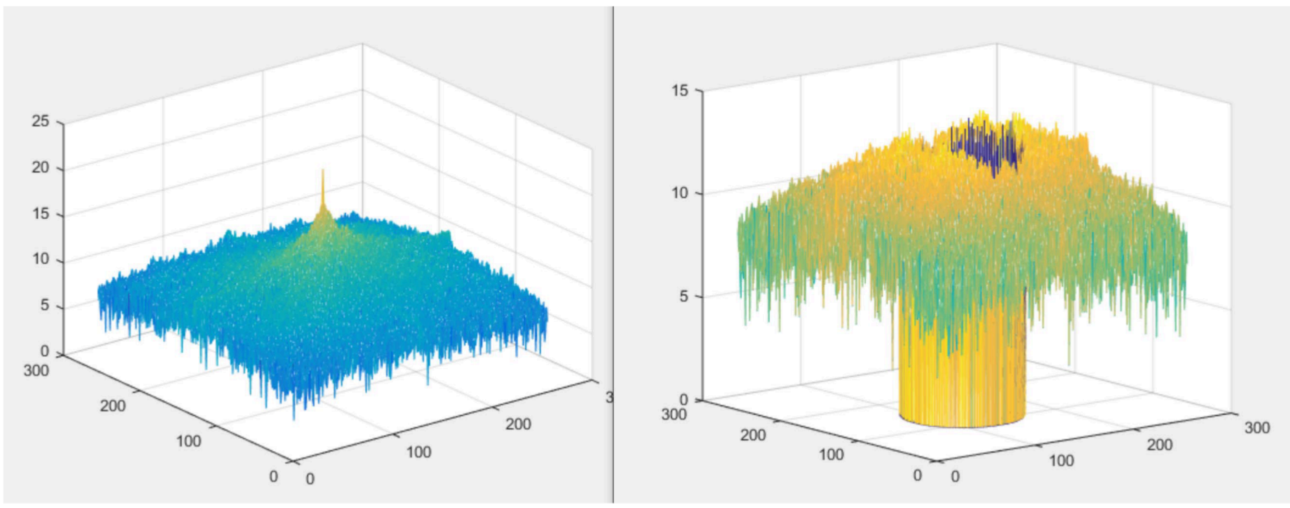
$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{se } D(u,v) \leq D_0 \\ 1 & \text{se } D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u,v)]^{2n}}$$

$$H(u,v) = 1 - e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$$

Graficamente:





seguono ulteriori esempi nelle slide

Filtro passa-banda

In questo filtro le frequenze di taglio V_0 e V_1 creano una fascia, cancellando una precisa banda all'interno di questa fascia, prende il nome di *band reject*, come per gli altri filtri ne esiste una versione ideale, di Butterworth e Gaussiana con le formule:

ideale

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{se } D_0 - \frac{W}{2} \leq D(u,v) \leq D_0 + \frac{W}{2} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Butterworth

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D(u,v)W}{D^2(u,v) - D_0^2}\right]^{2n}}$$

Gaussiano

$$H(u,v) = 1 - e^{-\left[\frac{D^2(u,v) - D_0^2}{D(u,v)W}\right]^2}$$