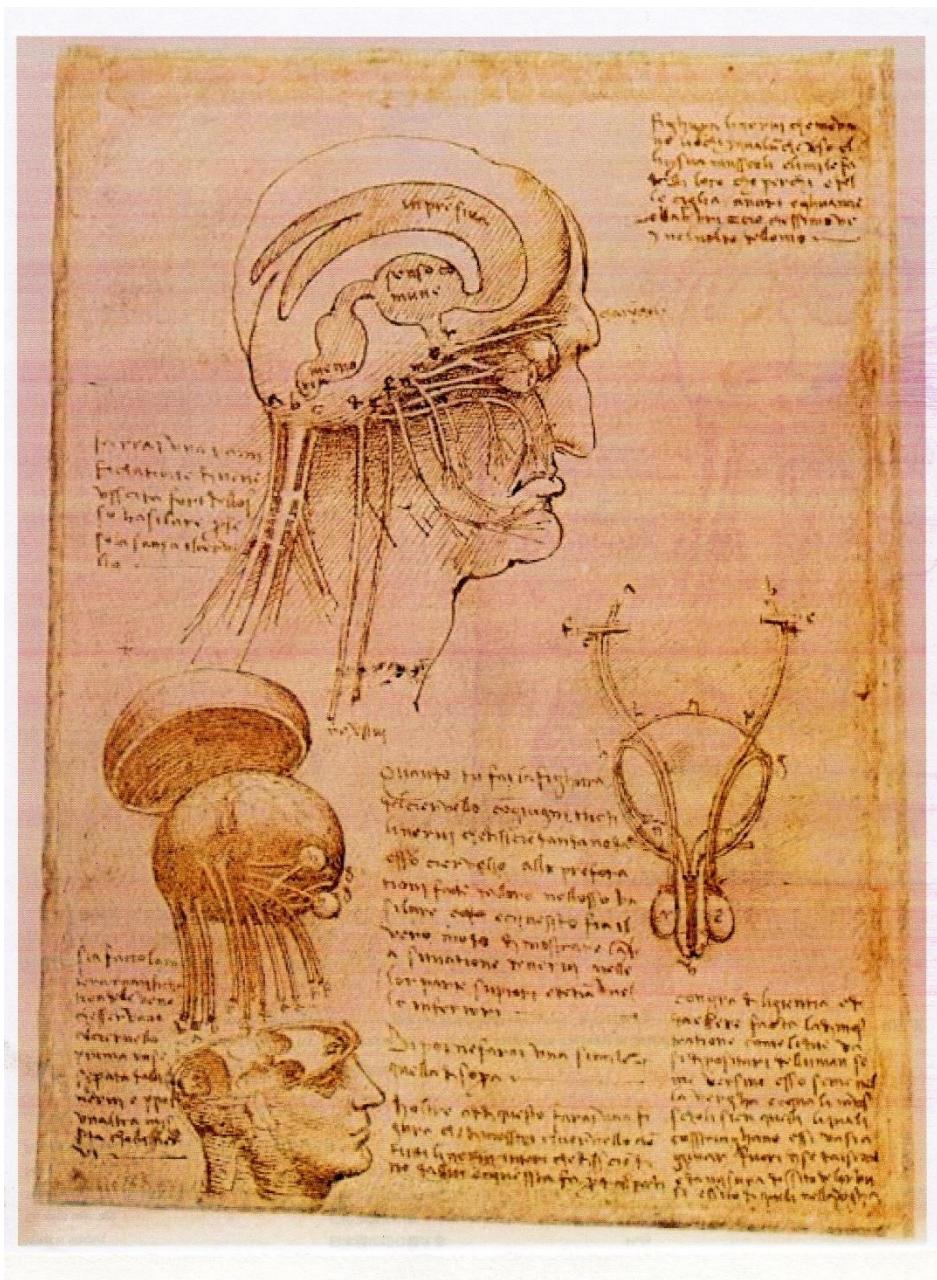


FISICA TECNICA



A.a 2021/2022

Docenti: Fabio Gori e Ivano Petracci

Rebecca Volpato

Sommario

Settimana 1.....	8
21-09.-21	8
22-09.-21	10
Grandezze fisiche e unità di misura.....	10
Misura della pressione	11
Frigoriferi ad effetto termoelettrico.....	12
23-09.-21	14
Settimana 2.....	15
28-09.-21	15
La scienza della termodinamica classica	15
Lavoro	17
Temperatura.....	19
Principio zero della termodinamica (o di Fowler)	20
Calore.....	22
29-09.-21	23
Primo principio della termodinamica	23
Termodinamica dal punto di vista analitico	25
Trasformazioni termodinamiche	27
Sistemi aperti.....	29
Entalpia.....	30
Secondo principio della termodinamica.....	31
30-09.-21	34
Generalizzazione del secondo principio della termodinamica.....	35
Formulazione di Plank	35
Formulazione di Clausius	35
Equazioni del 2° principio della termodinamica	36
Entropia	37
Teorema dell'aumento di Entropia	38
Traccia termodinamica	39
Definizione dei termini di produzione entropica.....	39
Settimana 3.....	42
05-10.-21	42
Trasformazioni irreversibili: lavoro meccanico in presenza di sorgenti entropiche	44
Ciclo motore (o ciclo diretto).....	45
Macchina di Carnot.....	46

Ciclo inverso.....	47
Sistemi aperti.....	49
Espansore	49
Compressore.....	51
Valvola di laminazione.....	51
Tubo di efflusso	52
6-10.-21	53
Generalizzazione dei sistemi aperti.....	53
Regime non stazionario	53
Rappresentazioni termodinamiche sui diagrammi termodinamici.....	54
Diagramma termodinamico <i>hs</i>	56
Gas perfetti.....	57
Proprietà delle sostanze	57
Calore specifico.....	58
Equazioni di Maxwell (termodinamiche).....	61
Diagramma termodinamico <i>Ts</i>	63
Relazioni tra <i>cp</i> e <i>c_v</i>	63
Relazione tra <i>cp</i> e <i>c_v</i> : <i>cpcv</i>	65
7-10.-21	66
Dipendenza di <i>c_v</i> da <i>v</i>	66
Dipendenza di <i>cp</i> da <i>p</i>	66
Gas perfetti.....	67
Conferma sperimentale di $du = cvTdT$ e $dh = cpTdT$	68
Esperienza di Joule-Thompson	68
Teorema di Guoj-Stodola.....	70
Sistemi chiusi	71
Settimana 4.....	72
12-10.-21	72
Sistema aperto.....	72
Exergia	72
Diagramma <i>pv</i>	73
Trasformazioni termodinamiche per i GAS PERFETTI.....	74
Esperienza di Andrew	75
Diagramma <i>pT</i> delle sostanze	78
Diagramma <i>pVT</i>	79
Diagramma <i>hs</i>	80

13-10.-21	82
Diagramma Ts	82
Gas reali: Equazioni del virale.....	83
Equazioni di Van der Waals (1873).....	84
14-10.-21	88
Settimana 5.....	89
19-10.-21	89
Ciclo frigorifero a compressione di vapore	89
Progettazione	91
Ciclo con camera di separazione (o camera Flash).....	93
Impianto frigorifero ad H_2O con elettore.....	94
Frigorifero ad aria	96
Impianto di aria condizionata per aerei	98
20-10.-21	99
Impianti a liquefazione dei gas	99
Linde (1895).....	100
Dewar (1898)	102
Kamarling-Omnes (1908).....	102
Claude	102
Impianto misto	103
Impianto inverso ad assorbimento.....	103
Ciclo frigorifero ad assorbimento Electrolux.....	107
Effetto Seebeck (1821)	109
Effetto Peltier (1834)	109
Effetto Thomson.....	110
Refrigerazione termoelettrica	110
Settimana 6.....	112
26-10.-21	112
Considerazioni energetiche	118
Schema di modulo per refrigerazione termoelettrica.....	119
Termofluidodinamica	120
Tre linee di flusso.....	120
27-10.-21	121
Principio di conservazione della massa di Leonardo da Vinci	125
Principio di conservazione dell'energia: equazione di Bernoulli generalizzata.....	126
Definizione operativa dell'attrito za	127

Equazione di Eulero	128
28-10.-21	130
Legge di Newton: equazione costitutiva del trasporto della quantità di moto	130
Analisi dimensionale per le perdite di pressione distribuite	131
Diagramma del fattore di attrito λ in funzione de Re : $\lambda = f Re$	133
Perdite di pressione concentrate: allargamento di sezione.....	134
Restringimento di sezione	136
Gomiti a 90°	137
Moto di un fluido Newtoniano tra due piani paralleli.....	138
Settimana 7.....	140
02-11.-21	140
1. Pareti ferme	140
2. Moto Couette	142
Applicazioni.....	143
Moto di fluidi in uscita da serbatoi.....	145
Scarico stazionario di un serbatoio (Torricelli)	145
Svuotamento di un serbatoio attraverso un foro.....	146
Misura di pressione di un fluido in moto.....	148
03-11.-21	152
Misura di velocità: Tubo di Pitot.....	152
Misura di portata: Tubo di Venturi.....	152
Misure di viscosità	154
Troposfera	156
Metanodotto	160
4-11.-21	163
Settimana 8.....	164
09-11.-21	164
Tiraggio del caminetto.....	168
Moto comprimibile e con elevate differenze di pressione (cap. 5).....	171
10-11.-21	172
Misura della temperatura di un fluido in moto.....	173
Moto in condotti a sezione variabile con continuità.....	175
11-11.-21	184
Settimana 9.....	185
16-11.-21	185
Moti comprimibili in condotti a sezione costante → domanda per il 30 e lode.....	185

Termocinetica (Trasmissione del calore).....	187
Conduzione monodimensionale in geometria piana	188
Conduzione monodimensionale in geometria cilindrica	190
Conduzione monodimensionale in geometria sferica.....	190
Considerazioni fisiche sull'andamento di T nella geometria piana	191
Legge di raffreddamento di Newton: considerazioni fisiche sull'andamento di T	192
Geometria piana composta con materiali in serie	192
Geometria cilindrica composta	194
17-11.-21	198
Conduzione di calore in parete piana in cui c'è generazione di calore	204
Conduzione di calore in cilindro pieno in cui c'è generazione di calore	207
Settimana 10.....	210
23-11.-21	210
Estensione della superficie per disperdere più calore	210
Equazione generale della conduzione del calore: coordinate cartesiane.....	212
Equazione generale della conduzione del calore: coordinate cilindriche	215
Problemi transitori nel tempo	217
Convezione forzata in una sfera	217
24-11.-21	221
Problema del radiatore.....	221
Estensione del problema del radiatore	222
Problema di conduzione transitoria di una parete.....	224
Corpo semiinfinito	225
Rilascio istantaneo di calore in una certa posizione dello spazio.....	228
Problema della temperatura interfacciale tra due corpi con proprietà fisiche diverse	230
Temperatura all'interfaccia tra due corpi con diverse proprietà fisiche.....	233
Settimana 11.....	234
30-11.-21	234
Materiali che non obbediscono alla legge di Fourier	234
Congelamento di un liquido	235
Problema di Newmann	236
Curva logistica.....	238
Irraggiamento termico.....	241
1: Legge di Plank	242
2: Legge di Wien o dello spostamento	242
3: Legge di Stefan- Boltzman	242

4: Legge di Lambert o del coseno	243
Realizzazione di un corpo nero in laboratorio.....	243
Radiazione emessa da un corpo	243
1-12.-21	245
Corpi reali	245
Legge di Kirckhoff	246
Corpo grigio	247
Calore scambiato tra due corpi per irraggiamento	248
Calcolo del fattore di vista	249
Calcolo della temperatura del sole visto dalla terra.....	250
Caratteristiche dei fattori di vista.....	250
2-12.-21	256
Radiazione solare che incide sull'atmosfera	257
Legge di Beer	258
Combinazione tra irraggiamento e convezione.....	258
Convezione	259
Numero di Nusselt.....	260
Determinazione di Nu in convezione forzata: 1° metodo	260
Convezione forzata: 2° metodo	261
Conservazione della massa o equazione di continuità.....	262
Conservazione della quantità di moto.....	262
Conservazione dell'energia	263

Settimana 1

21-09.-21

Giovedì 23-09 non c'è lezione

Fisica Tecnica (Ing. Medica)

(9 Crediti – docenti: Fabio Gori, 6 crediti; Ivano Petracci, 3 crediti.

Obiettivi del corso: L'obiettivo principale del corso è la conoscenza dei fenomeni di trasporto, e cioè della Termodinamica, della Termofluidodinamica, della Termocinetica e del trasporto di massa.

Termodinamica. Scienza della termodinamica. Primo principio della Termodinamica. Termometria. Sistema aperto. Sistema aperto con più correnti. Secondo principio della Termodinamica. Teorema dell'aumento di entropia e sorgenti entropiche. Lavoro meccanico per trasformazioni irreversibili. Sistemi tecnici. Pompe di calore. Sistema aperto con più correnti. Proprietà delle sostanze. Coefficienti calorimetrici. Energia ed entalpia libera. Equazioni di Maxwell. Passaggi di stato. Exergia. Gas reali. Stati corrispondenti. Benessere ambientale. Miscele di aria e vapore. Impianti tecnici inversi. Cicli termodinamici di impianti tecnici inversi. Impianti frigoriferi a compressione, con camera di separazione, ad acqua con elettore e ad aria. Impianto di aria condizionata per aerei. Liquefazione dei gas. Impianti frigoriferi termoelettrici. Impianti inversi ad assorbimento. Frigorifero Electrolux.

Termofluidodinamica

Linee di flusso. Equazione di conservazione della massa e dell'energia. Equazione di Bernoulli. Legge di Newton. Esperienza di Reynolds. Moto laminare e turbolento. Attrito. Perdite di carico. Moto con volume specifico costante. Scarico da serbatoi. Equazione di Euler e tempi di svuotamento di serbatoi. Moto con notevoli differenze di temperatura. Metanodotto. Camino. Ristagno. Misure di temperatura, velocità e portata. Velocità del suono. Equazione di Hugoniot. Condotti a sezione variabile con continuità. Tubi di efflusso, velocità e portata.

Termocinetica

Trasmissione del calore e Termodinamica. Modalità di trasmissione del calore. Leggi fondamentali. Unità di misura e dimensioni. Conduzione termica. Conduzione monodimensionale in regime permanente. Proprietà variabili. Conduzione transitoria a parametri concentrati. Alette di raffreddamento. Conduzione bi e tridimensionale in regime stazionario. Conduzione in regime transitorio. Corpo infinito e semi infinito. Solidificazione e fusione. Irraggiamento termico. Corpi neri. Corpi grigi, in presenza o meno di gas assorbenti e riflettenti. Irraggiamento con convezione. Convezione termica. Convezione forzata su lastra piana. Equazioni di conservazione della massa, energia e quantità di moto. Soluzione di Blasius. Equazione di conservazione dell'energia. Soluzione di Polhausen. Soluzione di Von Karman. Convezione naturale. Soluzione di Polhausen. Scambiatori di calore: termostati, condensatori e vaporizzatori. Scambiatori di calore, equicorrente e controcorrente. Differenza di temperatura media logaritmica ed efficienza.

Trasporto di massa

Equazione di Fick e analogie. Diffusione equimolecolare di gas e in film stagnante. Convezione forzata di massa. Torri di raffreddamento. Progettazione e criteri dimensionali.

Materiale di studio consigliato

- F. Gori. Lezioni di Termodinamica. TEXMAT, 2007.
- F. Gori, S. Corasaniti, I. Petracci. Lezioni di Termofluidodinamica. TEXMAT, 2012.
- F. Kreith. Principi di trasmissione del calore.
- F. Gori, S. Corasaniti, I. Petracci. FISICA TECNICA, Esercitazioni. TEXMAT, 2016.

Testi per consultazione:

- Vedi Bibliografia di F. Gori, Lezioni di Termodinamica, TEXMAT, 2007.
- A. Cavallini, L. Mattarolo. Termodinamica Applicata. Cleup Editore, 1990.
- Vedi Bibliografia di F. Gori, S. Corasaniti, I. Petracci. Lezioni di Termofluidodinamica. TEXMAT, 2012.
- E.R.G. Eckert and R.M. Drake Jr. Analysis of Heat and Mass Transfer. McGraw Hill, 1972.
- Appunti vari distribuiti a lezione.

Modalità d'esame

L'esame prevede una prova scritta e una prova orale.

Novità rispetto al programma;

Al posto degli esercizi sulla trasmissione del calore verranno raccontate alcune esperienze.

Orale: tre domande di teoria (termodinamica, termofluidodinamica, termocinetica o trasporto di massa)

Scritto: due esercitazioni, una sulle miscele aria-vapore (studio del benessere ambientale, saper regolare ambienti in ambienti clinici), cicli frigoriferi, terza domanda semi teorica (raccontare una delle esercitazioni citate sopra).

Esercitazioni sulla criochirurgia, sulla termoregolazione del corpo umano, sul trasporto di massa in aorta aneurismatica, sul trasporto di massa nel circolo di Willis e sull'acustica ovvero rumore provocato dalle valvole stenotiche. Non ci sono esercizi sulla trasmissione del calore e termofluidodinamica.

Testo: Problematiche di fisica tecnica in ingegneria medica (9 capitoli, da Texmat). Risultati di lavori fatti da colleghi o in tesi di dottorato o nella tesi magistrale ecc.

Lezione interrotta causa problemi di connessione.

Appello straordinario; chiedere alla segreteria

Scritto e orale nello stesso appello.

22-09.-21

Termocinetica trattata diversamente rispetto allo scorso anno.

Riassunto di una pagina sulle esercitazioni, saper comprendere il comportamento del corpo sano, dimostrare la comprensione tra l'ingegneria fisico-tecnica e il comportamento del corpo umano.

Il quarto libro è il libro delle esercitazioni.

Grandezze fisiche e unità di misura

Definizione: quando si definisce una grandezza fisica si definisce in maniera operativa, una grandezza fisica è definita dal modo con cui si misura, che generalmente è il confronto tra la grandezza fisica che vogliamo misurare e il campione scelto come riferimento.

Sistema Internazionale: si basa sulla definizione di:

- Grandezze fondamentali:

Lunghezza: x , [L]

Tempo: t , [T]

Massa: M , [M]

Temperatura: T , [ϑ] → grandezza termica

Per definire le grandezze fondamentali dobbiamo fare riferimento alla definizione di un **campione**, si confronta la grandezza che voglio determinare con il campione e si effettua una misurazione, quindi definisco operativamente la grandezza come n-volte il campione.

- Lunghezza → dopo la rivoluzione francese costruirono uno strumento di platino iridio a forma di X (per evitare le deformazioni estate-inverno), quello era il metro.

Nel 1960 fu definita come campione della lunghezza la lunghezza d'onda della radiazione rossa-arancio del krypton 86, nel vuoto.

Nel 1983 il campione era il percorso fatto dalla velocità della luce in un certo tempo.

Infine, nel 1997 è il percorso fatto dalla velocità della luce nei laser moderni (definizione imprecisa).

1 m = #n di campioni. 1 m è 1 650 763,73 campioni di lunghezza.

- Tempo → è il periodo della radiazione dell'atomo di Cesio 133. Questo periodo è il campione del tempo.

1 s = #n di campioni. 1 s corrisponde a 9 192 631 770 campioni di tempo.

- Massa → il campione è la massa di un cilindro di platino Iridio.

1 kg = 1 campione.

1 kg di massa non di peso.

Abbiamo definito le tre grandezze fondamentali del sistema meccanico. La temperatura non si può definire in base ad un campione ma c'è un procedimento di cui parleremo dopo aver introdotto il primo principio della termodinamica.

- Grandezze derivate (vengono definite in base ad una relazione con le grandezze fondamentali, la relazione può essere un'equazione, una definizione fisica, una convenzione ecc.):

Superficie unitaria S , m^2 , [L^2] è l'area di un quadrato di lato 1 m → 1 m^2

Volume V , m^3 , [L^3] il volume unitario è il volume di un cubo di lato unitario → 1 m^3

Densità ρ , $\rho = \frac{M}{V}$, kg / m^3 , [ML^{-3}]. $\rho = \frac{M}{V}$ questa equazione è la convenzione con cui si definisce la densità.

Volume specifico v , $\frac{V}{M}$, m^3 / kg , [$L^3 M^{-1}$]. È il volume per unità di massa.

Portata G , $G = \frac{M}{\Delta t}, \frac{kg}{s}$, [MT^{-1}] è la massa che attraversa una certa superficie in un certo intervallo di tempo.

Velocità w , $w = \frac{L}{\Delta t}$, m/s , [LT^{-1}] è uno spazio per unità di tempo.

Accelerazione, $a = \frac{w}{\Delta t}$, m/s^2 , $[LT^{-2}]$ è una velocità nell'unità di tempo.

Forza F , $F = M \cdot a$, $kg m/s^2$, $[MLT^{-2}] = N$ (Newton). È stata scelta la seconda legge della dinamica.

Lavoro L , $L = F \cdot \Delta x$, $kg m^2/s^2$, $[ML^2T^{-2}] = J$ (Joule)

Potenza P , lavoro nell'unità di tempo $P = \frac{L}{\Delta t}$, $kg m^2/s^3$, $[ML^2T^{-3}] = W$ (Watt)

Pressione p ; $p = \frac{F}{S}$, kg/ms^2 , $[ML^{-1}T^{-2}] = Pa$ (Pascal)

(Pressione atmosferica: $pa = 1,013 \times 10^5 Pa = 1,013$ Bar)

In generale indichiamo le grandezze estensive, che dipendono dall'estensione del corpo, quindi dalla massa M con la lettera maiuscola e la corrispondente lettera minuscola viene chiamata grandezza intensiva.

Ogni grandezza divisa per la massa si indica con una lettera minuscola e si chiama **grandezza intensiva**.

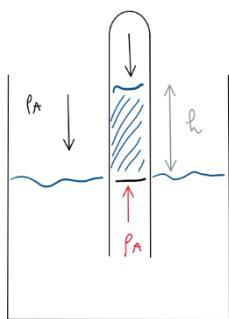
Se la grandezza non è riferita alla massa, si indica con la lettera maiuscola ed è una **grandezza estensiva**.

La temperatura fa eccezione perché è una grandezza intensiva ma si indica con la lettera maiuscola.

Misura della pressione

(grandezza meccanica di un sistema)

La prima misura che si può fare è quella della pressione totale o assoluta e si fa con un tubicino rovesciato che è stato riempito di un liquido con una densità molto superiore a quella dell'aria (solitamente mercurio). Si prende il tubo, lo si riempie di mercurio, si gira e nella parte superiore rimane il vuoto (in realtà è mercurio allo stato aeriforme) pressione zero.



La pressione atmosferica è maggiore della pressione che sta nel vuoto (nella parte superiore del tubicino), poiché la pressione si esercita secondo le leggi di Pascal in tutte le direzioni, la stessa pressione p_A è anche quella che agisce dal basso verso l'alto sulla piccola superficie. Il piccolo elemento di mercurio di altezza h è soggetto alla pressione dal basso pari a p_A che moltiplicata per la superficie è la forza $p_A S$ che spinge il mercurio verso l'alto e immette il mercurio al di fuori del livello. In più il mercurio avrà un peso che sarà la massa del mercurio per g .

L'uguaglianza delle forze che mi dà l'equilibrio di questo elementino sarà:
 $p_A S = p_e S + Mg$ dove $p_e S$ è trascurabile.

Quindi, sapendo che $M = V\rho = Sh\rho$ abbiamo:

$p_A S = p_e S + \rho_A Sgh \rightarrow p_A = p_e + \rho_A gh$ (pressione atmosferica misurata dal barometro, strumento che misura la pressione assoluta).

La pressione atmosferica solitamente è intorno 1,013 Bar ed è dovuta alla colonna d'aria che abbiamo nell'atmosfera sopra la nostra testa.

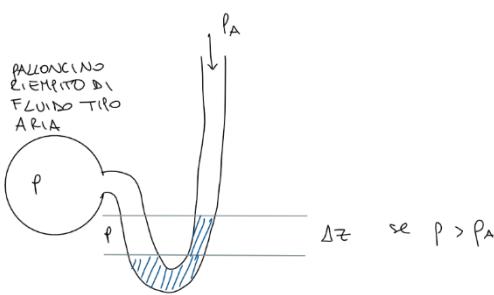
Esempio: $p_A = 1,013$ Bar = 0,76 mmHg è il valore che devo ottenere per la pressione atmosferica;

- Con $\rho_{mercurio} = 13\,500$ ca $\rightarrow h = 0,76 m \sim 1 m$;
- Con $\rho_{acqua} = 1000$ kg/m³ $\rightarrow h = 10 m$;
- Con $\rho_{aria} = 1$ kg/m³ $\rightarrow h = 10000 m$;
 10000 m è l'altezza dell'atmosfera terrestre.

Spesso quello che conta (quando si fanno le misure termofluidodinamiche) è la pressione relativa rispetto all'atmosfera e per misurarla si usa il **manometro differenziale**, si tratta di un tubo ad U fatto di qualsiasi materiale (di solito vetro) che si attacca al campione che contiene aria di cui voglio misurare la pressione. All'altra estremità il tubo è aperto e all'interno c'è un liquido, il liquido manometrico. La pressione p nel palloncino si riflette sulla faccia sx, mentre la faccia dx è a pressione atmosferica.

Solitamente si mette all'interno un liquido colorato.

Se i due livelli sono uguali la pressione atmosferica è uguale alla pressione del gas nel contenitore.



Se c'è un dislivello tra i due rami del tubo ad U allora c'è una differenza di pressione.

Per misurare la pressione faccio il bilancio delle forze:

$$pS + \rho S \Delta z g = p_A S + \rho_m S \Delta z g$$

Semplificando la superficie S si ottiene:

$$p - p_A = \Delta z (\rho_m - \rho) g$$

$$\rho S \Delta z g \rightarrow \text{peso del fluido}$$

$$\rho_m S \Delta z g \rightarrow \text{peso del fluido manometrico}$$

$$\rho_m \rightarrow \text{densità del liquido manometrico}$$

$$\rho \rightarrow \text{densità del fluido}$$

$$p - p_A = \rho_m \Delta z g \quad (\text{se nel palloncino c'è aria } \rho \approx 1 \text{ kg/m}^3)$$

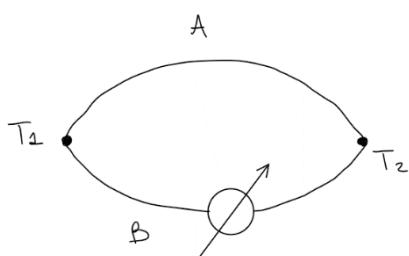
Possiamo caratterizzare il fluido che vogliamo studiare dentro al palloncino, in particolare la sua pressione relativa p conoscendo la densità del liquido manometrico e misurando la differenza Δz tra i due livelli del liquido manometrico. La pressione p è rispetto alla pressione atmosferica, misurata con un altro strumento come il barometro.

Frigoriferi ad effetto termoelettrico

Permettono di misurare la temperatura!

Per essere compresi vanno descritti i fenomeni termoelettrici.

Effetto Seebeck;



Si prendono due metalli A e B e si saldano. Il conduttore B è tagliato e ai due rami si inserisce un misuratore di forza elettromotrice che è un voltmetro con una resistenza infinita (non passa corrente). Ci sono due saldature T_1 e T_2 , se le due saldature sono alla stessa temperatura la forza elettromotrice è uguale a zero $\Delta E = 0$ (se $T_1 = T_2$), viceversa, se le due temperature sono diverse la f.e.m è diversa da zero ed è funzione della differenza di temperatura:

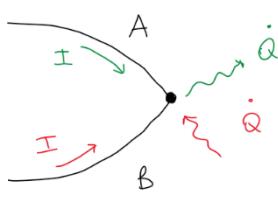
$$\Delta E = f(T_A - T_B) = \alpha_{AB}(T_A - T_B)$$

α_{AB} → coefficiente di Seebeck, dipende dai due materiali A e B.

$$\alpha_{AB} := \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta E}{\Delta T} = \frac{dE}{dT}$$

Sulla base di questo effetto si fanno le misure di temperatura, perché le misure di temperatura fatte con strumenti chiamati **termocoppi** si basano sull'effetto Seebeck. Si mantiene una delle due giunzioni ad un punto fisso e la temperatura T_2 con cui si va a misurare un altro corpo si può mettere in relazione e può dare la misura di temperatura.

Effetto Peltier;



Prendiamo sempre due materiali, c'è in aggiunta un generatore di corrente, se passa corrente, per esempio quella in verde, si osserva una cessione di calore per unità di tempo \dot{Q} .

L'effetto Peltier mi dice che se circola corrente tra un materiale A e B nella giunzione di saldatura tra i due materiali si ha uno scambio di calore in un verso o nell'altro rispetto all'ambiente.

Se la corrente circola dall'alto al basso il calore è ceduto all'ambiente, viceversa, se si inverte la polarità della pila e la corrente circola dal basso verso l'alto il calore invece di essere ceduto verso l'esterno viene assorbito dall'esterno alla saldatura.

Peltier trovò che \dot{Q} è proporzionale alla corrente che passa secondo il coefficiente di Peltier π_{AB} :

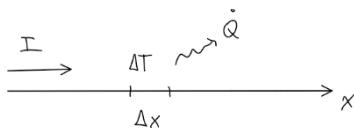
$$\dot{Q} = \pi_{AB} I$$

C'è un ramo della termodinamica che studia le irreversibilità che ha dimostrato che esiste un legame tra il coefficiente di Peltier e il coefficiente di Seebeck:

$$\pi_{AB} = \alpha_{AB} T, \text{ con } T \text{ temperatura media della giunzione.}$$

Permette di costruire impianti motore e impianti frigoriferi ad effetto termoelettrico.

Effetto Thomson;



Se faccio passare corrente in un conduttore metallico si osserva che in un elementino Δx di filo esiste una differenza di temperatura per cui si ha un passaggio di calore verso l'esterno.

È stato trovato in termini infinitesimi che la quantità di calore che viene scambiata con l'esterno è in valore assoluto proporzionale alla corrente, alla differenza di temperatura e ad un coefficiente che è chiamato coefficiente di Thomson. Si usa il valore assoluto perché in base al verso della corrente il calore esce o entra.

$$|d\dot{Q}_T| = |\tau I dT| = \left| \tau I \frac{dT}{dx} dx \right|$$

$$\frac{dT}{dx} \rightarrow \text{gradiente di temperatura lungo la coordinata } x$$

$$dx \rightarrow \text{elementino di filo}$$

$$|d\dot{Q}_T| \text{ questa è la quantità di calore infinitesima scambiata per effetto Thomson.}$$

$$\tau = \frac{\dot{Q}_T}{I \Delta T} \text{ coefficiente di Thomson}$$

$$\frac{\dot{Q}_T}{I \Delta T} = \frac{1}{I} \cdot \frac{d\dot{Q}_T}{dT}$$

In base alla termodinamica delle irreversibilità si dimostra che:

$$\tau = T \cdot \frac{d\alpha}{dT}$$

$$\text{Infatti } \tau = \frac{1}{I} \frac{d\dot{Q}_T}{dT} = \frac{1}{I} \frac{d(\pi I)}{dT} = \frac{1}{I} I \frac{d\pi}{dT} = T \frac{d\alpha}{dT}$$

Sfruttando:

- $Q = \pi I$ (Peltier)
- $I = \text{costante}$
- $\pi = \alpha T$ (Peltier)

Quindi si trova che τ è proporzionale alla temperatura per la derivata del coefficiente di Seebeck rispetto alla temperatura:

$$\tau = T \cdot \frac{d\alpha}{dT} \text{ dove } \alpha \text{ è il coefficiente di Seebeck.}$$

23-09.-21

No lezione.

Campo Base NeuroVascolare Centro Congressi Università La Sapienza.

“Approccio Ingegneristico allo studio del circolo di Willis ”

Settimana 2

28-09-21

La lezione di giovedì verrà considerata come una delle esercitazioni caricate su Teams, verrà poi ripresa alla fine del corso. Esercitazione sul circolo di Willis.

Il martedì pomeriggio alle 18 ricevimento studenti (provvisorio)

Nel libro si fa riferimento al capitolo 2

La scienza della termodinamica classica

Quando parliamo della scienza della termodinamica intendiamo la termodinamica classica, quella Ottocentesca; dopo la termodinamica classica si sono succedute altre termodinamiche agli inizi del 900 → scoperta della teoria quantistica → termodinamica statistica basata sul comportamento microscopico dei materiali. Poi termodinamica razionale (molto matematica) utilizzata dai meccanici e scienza delle costruzioni. Poi termodinamica delle irreversibilità dalla metà del 900. Quella più vicina a noi dal punto di vista ingegneristico è la termodinamica delle irreversibilità, prenderemo qualcosa nella formulazione del secondo principio della termodinamica che è stato formulato con la termodinamica delle irreversibilità.

La prima cosa che bisogna fare nella termodinamica classica è definire l'oggetto del nostro studio, cioè l'insieme dei corpi che vogliamo studiare e che chiameremo **sistema termodinamico** (insieme degli oggetti che vogliamo studiare), si decide quale sistema termodinamico si vuole studiare, ad esempio l'aria nella stanza.

Nel momento in cui decidiamo il sistema, decidiamo anche il contorno fisico del nostro sistema termodinamico S scelto arbitrariamente; quello che c'è all'interno del nostro sistema è l'oggetto del nostro studio, tutto il resto è l'esterno E, mentre S è all'interno del contorno fisico.

Sistema termodinamico → oggetto del nostro studio.

Vogliamo relazionare il sistema termodinamico, cioè quello che c'è all'interno, con l'esterno e in particolare ci interessa la relazione, ovvero le interazioni tra l'interno e l'esterno, cioè ci interessa quello che succede NEL sistema.

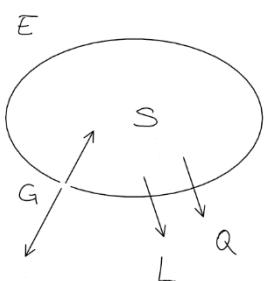
Definendo in questo modo interno (o sistema termodinamico), contorno e sistema esterno diamo una interpretazione macroscopica alla termodinamica classica.

Il nostro studio è MACROSCOPICO questo significa che non ci interessano i dettagli ma gli scambi $E \leftrightarrow S$.

Quali sono le interazioni che possono esserci tra sistema termodinamico ed esterno;

Scambi di tre tipi:

- Scambi di massa (G): sistema aperto tramite un foro; attraverso il contorno si ha uno scambio di massa, altrimenti il sistema è chiuso e NON ci sono scambi di massa con l'esterno. Il sistema aperto è più fedele a ciò che succede nella realtà.
- Attraverso il contorno studiamo gli scambi di lavoro (L) e di calore (Q)



Studiamo questi scambi attraverso la caratterizzazione del sistema, per poi metterlo in relazione con le quantità da calcolare. Come metto in relazione gli scambi con le proprietà del sistema, l'insieme delle proprietà del sistema si chiama stato termodinamico del sistema.

Dobbiamo definire lo stato del sistema → massa M e composizione chimica del sistema.

G che esce vuol dire che c'è aria che esce dal sistema e G che entra vuol dire che c'è aria che entra nel sistema. Gli scambi di calore e di lavoro li rappresentiamo con delle frecce che possono essere o uscenti o entranti, se la freccia del lavoro è uscente vuol dire che è il sistema che

fa il lavoro verso l'esterno altrimenti è l'esterno che fa il lavoro verso il sistema termodinamico. Stessa cosa per il calore, freccia uscente vuol dire che il calore va verso l'esterno e viceversa.

Essendo tre scambi che ci interessano dal punto di vista ingegneristico, il passaggio che dobbiamo fare è quello di dire come posso fare a mettere in relazione i tre tipi di scambio con le proprietà del sistema. L'insieme delle proprietà del sistema si chiama stato termodinamico del sistema.

Lo stato del sistema individua univocamente il sistema:

- M , composizione chimica
- p, v, T
- w, z

Se il sistema è aperto c'è quindi scambio di massa tra il sistema termodinamico e l'esterno quindi il sistema può cambiare la composizione chimica, e cambia anche la massa. Quando ci sono gli scambi di massa bisogna individuare la variazione della composizione chimica del sistema.

Consideriamo il sistema chiuso → stessa M e stessa composizione chimica

Per definire lo stato del sistema do delle variabili (sono poche) che si distinguono in:

- Variabili interne al sistema (p (pressione), v (volume specifico), T)
- Variabili esterne (cioè rispetto all'esterno), velocità w e quota z del sistema, cioè la velocità del baricentro del sistema, come anche la quota del baricentro del sistema, così da dare una sola grandezza piuttosto che infinite grandezze. Si dà la variabile del baricentro del sistema.

Poiché il sistema è CHIUSO non ci sono le variabili chimiche (cioè il grado di avanzamento delle reazioni chimiche del sistema)

p, v, T sono variabili termodinamiche!

Sono le variabili del sistema che è in equilibrio all'interno, dove quindi p, v, T sono le stesse dappertutto (altrimenti avemmo p, v, T per ogni particella), questo è vero quando siamo in condizioni di equilibrio rispetto al suo stato interno. Basta dare una terna per definire lo stato del sistema che è in condizioni di equilibrio.

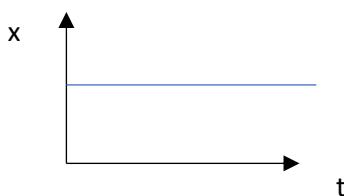
La termodinamica classica che intendiamo studiare è la termodinamica degli stati di equilibrio termodinamico, assume che il sistema sia in uno stato di EQUILIBRIO (INTERNO) TERMODINAMICO, e la termodinamica studia questi stati di equilibrio. L'oggetto dello studio è una relazione tra variabili interne del sistema in condizioni di equilibrio e scambi di massa, di calore e di lavoro.

Questa termodinamica che studiamo esiste solo come condizione al limite, considerando che lasciando il sistema per un tempo molto grande si raggiunge l'equilibrio.

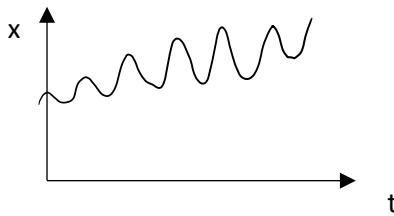
Inoltre, dobbiamo assumere che ci sia anche una condizione di EQUILIBRIO ESTERNO, in cui p, v, T all'esterno sono le stesse dappertutto.

Chiaramente queste ipotesi sono lontane dalla realtà, poiché la termodinamica ha la pretesa di studiare solo stati di equilibrio → la termodinamica classica non ha il tempo tra le sue variabili, poiché di volta in volta si deve attendere che venga raggiunto l'equilibrio, in un tempo teoricamente infinito.

Sebbene ipotizzo che le variabili esterne ed interne siano in equilibrio, possono variare nel tempo allora definisco lo **stato o regime STAZIONARIO** in cui tutte le variabili sono costanti nel tempo:



Altrimenti lo stato è non stazionario se una variabile x varia nel tempo.



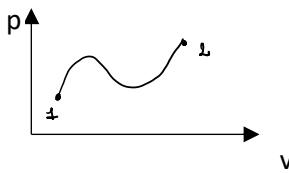
Una volta definito il sistema termodinamico e lo stato di questo sistema, che per ora è chiuso, vogliamo mettere in relazione gli scambi di lavoro e di calore con le variabili che determinano il sistema termodinamico → attraverso il calcolo delle variazioni delle variabili vogliamo calcolare il L e il Q scambiati.

La variazione delle variabili interne del sistema deve essere messa in relazione con gli scambi di L e di Q, perché ovviamente se c'è scambio di L e di Q cambia lo stato del sistema.

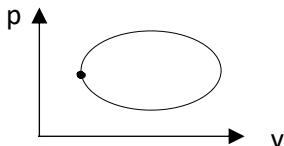
N.B. variazione dello stato del sistema (da 1 a 2), non variazione nel tempo.

Variazione dello stato del sistema → **Trasformazione termodinamica**

- Trasformazione aperta: stato iniziale (1) non coincide con lo stato finale (2)



- Trasformazione ciclica (o chiusa): stato finale coincide con lo stato iniziale.



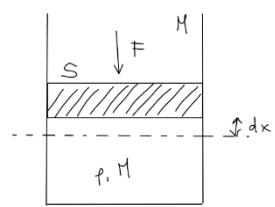
Torniamo sulle definizioni delle due quantità principali lavoro e calore.

Lavoro

(definizione fisica)

Il lavoro si immagina dato dal sistema cilindro-pistone.

Si pone una massa M a pressione p nel sistema, applichiamo una forza F al pistone. Il sistema termodinamico è quello che c'è nel cilindro, il contorno è definito dalla superficie interna del cilindro e dalla superficie interna del pistone, tutto quello che c'è fuori è l'esterno. S indica la sezione del pistone. Supponiamo uno spostamento dx , che quindi produce una variazione di volume.



Poiché il sistema è chiuso la massa è costante, e quindi la variazione di volume dV coincide con una variazione di volume specifico dV . Se metto un peso e si ha l'equilibrio del pistone allora possiamo dire che la forza che agisce sopra è uguale alla forza che dentro agisce verso l'alto:

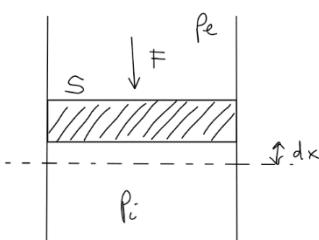
$$F = pS \\ dL = F \cdot dx = pS dx = p dV$$

Con le lettere maiuscole indichiamo le quantità estensive che dipendono dalla massa.

Dividiamo dL per la massa;

$$dL = \frac{pS dx}{M} = p \frac{dV}{M} = p dV \rightarrow \text{lavoro compiuto da un sistema chiuso}$$

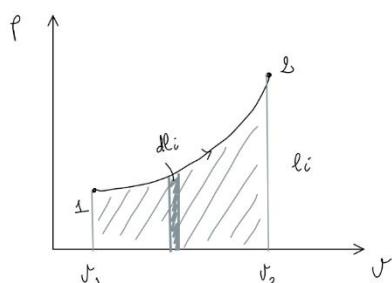
Consideriamo lo stesso sistema cilindro-pistone ma distinguiamo la pressione interna p_i (pressione del sistema) ed esterna p_e . Finora abbiamo considerato solo la pressione del sistema p . Così quando il pistone scende, si oppone la pressione p_i e compie lavoro dall'interno:



$$\frac{p_i S dx}{M} = p_i dv = dl_i \rightarrow \text{lavoro compiuto dalle forze interne al sistema. Lavoro interno.}$$

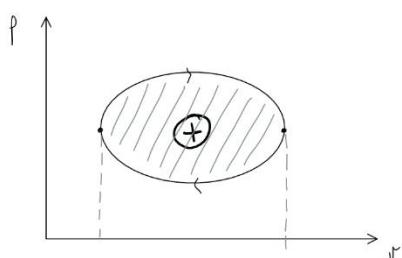
Metto in relazione il lavoro fatto dalle forze interne direttamente con la variabile p_i del sistema termodinamico.

$$l_i = \int_1^2 dl_i = \int_1^2 p_i dv \quad (\text{area sottesa alla trasformazione 1-2})$$



Oss: $l_i > 0$ se $dv > 0$ (perché la pressione è positiva), cioè se c'è un aumento di volume (quindi devo andare da 1 a 2, così $v_2 > v_1$).
Lavoro positivo se c'è aumento di volume.

Se compio una trasformazione ciclica invece, ho:



Se il ciclo è percorso in senso orario il lavoro è POSITIVO (ed è l'area racchiusa dalla trasformazione ciclica), altrimenti il lavoro è NEGATIVO, perché durante l'aumento di volume ho un lavoro positivo che però è inferiore al lavoro negativo compiuto durante il ritorno allo stato iniziale.

Il lavoro è positivo se il sistema termodinamico aumenta il suo volume (le forze interne sono tali da fare lavoro verso l'esterno) → questo è proprio quello che interessa in termodinamica:

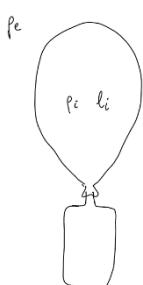
Convenzione termodinamica: lavoro positivo se fatto dal sistema termodinamico verso l'esterno!

l_i è il lavoro fatto dalle forze interne

l_e è il lavoro fatto dalle forze esterne

Torniamo al lavoro fatto dalla pressione p_e ; anche la pressione esterna, cioè le forze esterne al sistema fanno lavoro.

Che differenza c'è tra i due?



Consideriamo un palloncino, che quando viene gonfiato si dilata. Il palloncino quando è sgonfio è rosso, mentre quando è sgonfio è rosa pallido perché la parete del palloncino diventa più sottile e quindi più trasparente. Succede questo perché la pressione interna ha fatto dilatare il materiale di cui è costituito il palloncino. La pressione interna è quella che ha fatto dilatare il palloncino cioè ha provocato la dilatazione del materiale di cui è costituito il palloncino e quindi la variazione di volume moltiplicato per la pressione interna rappresenta il lavoro fatto dalle forze interne al sistema. C'è un lavoro interno fatto da p_i che dilata il palloncino. Ma di questo lavoro parte del lavoro è finito nello sforzo di taglio che è stato necessario per dilatare il materiale di cui è costituito il palloncino.

Quindi parte del lavoro interno è andato in lavoro di dilatazione del palloncino, non è andato all'esterno del sistema me è rimasto all'interno. Sappiamo che c'è il lavoro di dilatazione però facciamo in modo da non

concentrarci sul lavoro di dilatazione perché a noi interessa il lavoro che è stato trasmesso all'esterno e vogliamo poter esprimere una relazione tra lavoro esterno ed interno. Questo perché è più facile calcolare il lavoro interno perché ho una pressione unica, con la pressione interna calcolo il lavoro interno. Ma è il suo aumento di volume quello che ci interessa in termodinamica.

$$l_i = l_e + l_d$$

Dove l_d è il lavoro di dilatazione.

Quali sono le condizioni in cui il lavoro di dilatazione è trascurabile?

Condizioni per cui $l_i = l_e$:

- Chiaramente deve essere garantito l'equilibrio termodinamico interno.
- $p_i = p_e \rightarrow$ altrimenti la differenza di pressione va a finire nella dilatazione del materiale.
- Assenza di attriti (che sono quelli necessari per la dilatazione del palloncino che noi vogliamo trascurare).
- $T_i = T_e$ (poi vedremo perchè)

Allora $l_i = l_e$.

Queste condizioni non sono mai realizzabili, l'importanza della termodinamica però è che è una scienza che ragiona al limite; lo scopo dell'ingegneria è quello di dire vediamo di ridurre l'importanza di queste differenze di pressione tra interno ed esterno.

Ci interessa il lavoro interno perché è dato dalle variabili del sistema all'interno che sono solo tre p, v, T se dovessi contare le variabili esterne queste sarebbero infinite. Le ultime condizioni viste sono le condizioni secondo le quali il lavoro scambiato con l'esterno corrisponde al lavoro calcolato con le forze interne, siccome non sarà mai così, l'obiettivo dell'ingegnere è quello di diminuire quelle cause elencate.

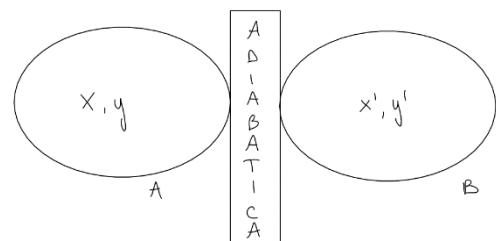
Temperatura

Consideriamo il sistema termodinamico generale: contorno che delimita una certa massa di materia con composizione chimica definita, caratterizzata da due variabili di stato x e y (per esempio p e v o variabili elettriche o altro).

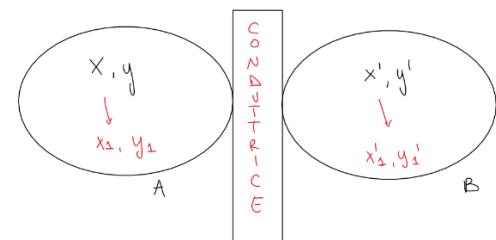
2 sistemi: A e B in equilibrio caratterizzati da variabili di stato x e y e x' e y' .

Metto a contatto i due sistemi con due pareti:

- Parete adiabatica: quando interposta tra i due sistemi termodinamici, lascia i due sistemi nello stesso stato di equilibrio che avevano prima di essere messi a contatto.



- Parete conduttrice: (fatta con materiale conduttore, rame, platino, ferro) quando interposta tra due sistemi, non lascia i due sistemi nello stesso stato di equilibrio iniziale, ma lo stato del sistema cambia poiché cambiano le variabili di stato di A e di B.

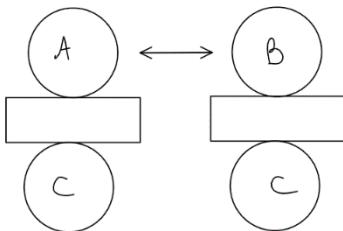


Per definizione gli stati x_1 e y_1 e x'_1 e y'_1 sono tutti stati in equilibrio termico (è lo stato finale dopo il contatto). Lo stato finale si chiama **stato di equilibrio termico**. All'inizio non era in equilibrio termico, lo sono alla fine.

Lo stato di equilibrio termico tra due sistemi si ottiene se sono messi a contatto attraverso una parete conduttrice.

Principio zero della termodinamica (o di Fowler)

Si basa sul concetto di equilibrio termico.



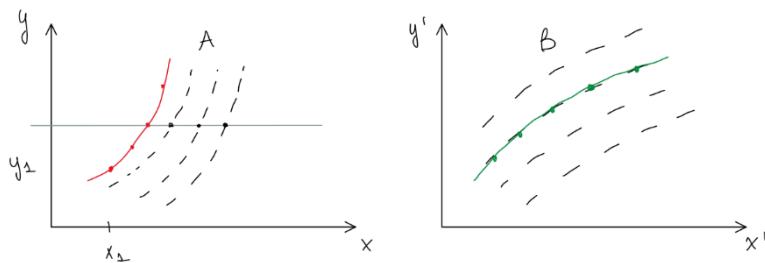
Corpo A in equilibrio termico con il corpo C (che noi eleggiamo a sistema di riferimento), cioè messo a contatto con una parete conduttrice. Corpo B in equilibrio termico con lo stesso corpo C. Poiché sia A che B sono in equilibrio con lo stesso stato del sistema C allora anche A e B sono in equilibrio.

Allora A è in equilibrio con B.

Allora posso usare il corpo C come strumento per verificare se A e B sono in equilibrio termico tra di loro, quindi il corpo C lo chiamiamo termoscopio (o termometro) uno strumento per verificare se due corpi sono in equilibrio termico.

Ora iniziano le considerazioni che ci permettono di definire la temperatura.

Considero il sistema A caratterizzato da x e y , e il sistema B con x' e y' .



Consideriamo lo stato 1 di A, caratterizzato da x_1 e y_1 empiricamente troviamo uno stato 1' di B che è in equilibrio termico con lo stato 1 di A.

Poi, se cambio x' del sistema B, sempre empiricamente posso trovare un altro stato di B in equilibrio termico con lo stato 1 di A \rightarrow ho una specie di serie infinita di punti tutti in equilibrio termico con lo stesso stato 1 di A e sono anche in equilibrio termico tra di loro.

Questa curva è una curva isoterma di B, cioè costituita da punti tutti in equilibrio con lo stato 1 di A, e che quindi per il principio zero sono tutti in equilibrio termico anche tra di loro (poiché sono tutti in equilibrio termico con il termoscopio rappresentato dal punto 1 in A).

Facendo il ragionamento opposto per A rispetto al punto 1' di B \rightarrow trovo un numero infinito di punti di A, tutti in equilibrio termico con lo stato 1' di B, e quindi sono in equilibrio termico tra di loro per il principio zero della termodinamica; allora costituiscono l'isoterma di A che corrisponde all'isoterma verde di B.

L'isoterma di A e l'isoterma di B sono corrispondenti.

Di queste isoterme corrispondenti ce ne sono una quantità infinita per il sistema A e per il sistema B.

Ora decido qual è il sistema di riferimento e posso scegliere il sistema A come termoscopio. Allora la curva rossa rappresenta l'isotermicità, che è una funzione sia di x che di y e che quindi dipende dalle caratteristiche fisiche del solido che ho scelto come termoscopio.

$\vartheta_A = f(x, y)$ questa isoterma è la temperatura empirica del sistema A.

x e y sono le variabili (della temperatura empirica) termometriche che individuano l'isotermicità, ovvero la temperatura empirica del sistema A.

Supponiamo che y sia costante (per ridurre le variabili) $\rightarrow \vartheta_A = f'(x)$ questo mi dà sempre una infinità di punti e una infinità di curve che si trovano però sulla y costante.

Per questa funzione f' il sistema internazionale sceglie una funzione lineare ax con a costante che ancora non conosco.

$$\vartheta_A = f'(x) = ax = T_A$$

Si può dimostrare che la **temperatura empirica** ϑ_A è anche uguale alla **temperatura termodinamica** T_A (non verrà chiesta all'esame).

Allora la scala di temperatura internazionale assume T termodinamica proporzionale alla variabile termometrica x (tramite la costante a) $\rightarrow T_A = ax$

Oss: nella pratica x può essere il volume se sono a pressione costante, o viceversa; oppure x è la lunghezza nella scala graduata del termometro a mercurio (dove a p costante misuro la variazione di volume come variazione di lunghezza).

Scelta la scala, poi il S.i. sceglie il punto fisso come punto triplo dell'acqua!

Quindi il sistema internazionale stabilisce che la temperatura del punto triplo dell'acqua è uguale ad un certo valore.

Punto triplo dell'acqua: è lo stato raggiunto dall'acqua che ha in equilibrio le tre fasi, solido, liquido e aeriforme, a pressione molto bassa.

Secondo il sistema internazionale la temperatura del punto fisso scelto, cioè del punto triplo dell'acqua, è 273,16 K, temperatura che misuriamo quando prendiamo il termometro e lo mettiamo a contatto con il punto triplo dell'acqua, che inoltre è uguale a ax_T :

$$T_T = 273,16 \text{ K} = ax_T$$

$x_T \rightarrow$ lunghezza del termoscopio quando lo metto a contatto con il punto triplo.

Con il termoscopio misuro un'altra temperatura di un altro corpo che mi da una diversa lettura x, cioè $T = ax$.

Poi ne faccio il rapporto $T = 273,16 \frac{x}{x_T}$ allora scompare a!

Così abbiamo definito la scala di temperatura internazionale del punto triplo.

Per decenni si sono usati molti altri punti fissi, quindi nella definizione di questa temperatura è necessario che la nuova scala coincida con la vecchia scala nei punti fissi.

Punto fisso del ghiaccio: alla pressione atmosferica abbiamo acqua e ghiaccio in un recipiente, finchè acqua e ghiaccio sono in equilibrio sono in presenza del punto fisso del ghiaccio. Equilibrio tra acqua e ghiaccio.

Punto fisso del vapore: quando l'acqua bolle esce il vapore; alla pressione atmosferica, la temperatura del vapore che esce la chiamo punto fisso del vapore.

$$T_g = ax_g \text{ e } T_v = ax_v$$

Con x_g e x_v variabili termometriche che leggo quando metto il termoscopio in una e nell'altra situazione.

Allora per eliminare a faccio la differenza:

$$T_v - T_g = a(x_v - x_g) \Rightarrow \frac{T}{T_v - T_g} = \frac{x}{x_v - x_g}$$

Quindi il valore della temperatura dipende dai gradi di differenza tra T_v e T_g .

Oss. Si usa la temperatura centigrada perché $T_v - T_g = 100$. Mentre, la Fahrenheit ha $T_v - T_g = 180$.

Allora per far tornare uguali il valore del ghiaccio e del vapore in scala centigrada, si assumeva che:

$$T_g = 0^\circ\text{C} \text{ e } T_v = 100^\circ\text{C}.$$

Il sistema internazionale dopo aver definito i gradi Kelvin, definisce la scala Celsius:

$$T(\text{°C}) = T(K) - 273,15$$

In questo modo torna lo 0 °C al punto del ghiaccio, i 100 °C al punto del vapore e 0,01 °C al punto triplo dell'acqua.

Dopo aver definito il lavoro e la temperatura definiamo il calore.

Calore

È l'interazione tra il sistema termodinamico e l'esterno, che avviene a causa di una differenza di temperatura, attraverso il contorno (tanto all'interno c'è equilibrio e non mi interessa).

Questa è una definizione generale, vedremo poi quella operativa.

Convenzione termodinamica: il calore è POSITIVO quando è assorbito dal sistema, cioè va dall'esterno all'interno del sistema. Convenzione opposta a quella del lavoro.

Sorgente di calore (o sorgente termica).

È un corpo con una massa infinitamente grande, ovvero un corpo con una capacità termica infinita, tale che possa scambiare calore senza cambiare temperatura.

29-09.-21

Primo principio della termodinamica

Capitolo 3 del libro.

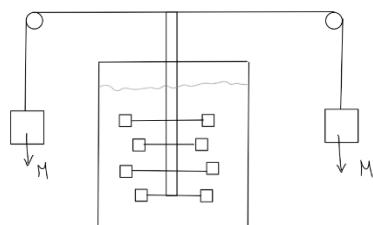
Il principio di conservazione dell'energia è stato formulato alla metà dell'Ottocento e la formulazione in termini di conservazione dell'energia è dovuta a Mayer. Raccontiamo l'evoluzione degli esperimenti da cui Mayer formulò il primo principio che è stato scoperto dopo il secondo principio.

Nella termodinamica classica si descrive in maniera empirica.

È stato stabilito in seguito agli esperimenti di Joule → a metà dell'800, Mayer formulò il principio di conservazione dell'energia.

Esperienza di Joule

Recipiente che contiene un miscuglio di acqua in equilibrio con ghiaccio, si immerge un albero rotante con delle palette. Siamo alla temperatura di 0 Celsius. L'albero è messo in movimento da fili attaccati ad un peso: MULINELLO DI ROWLANDS (i pesi abbassandosi fanno ruotare l'albero). Misurando la massa di ghiaccio abbiamo un'idea che c'è una certa massa di ghiaccio alla temperatura di 0 Celsius.



1° fase: all'inizio c'è acqua in equilibrio con una certa quantità di ghiaccio, con i pesi alzati.

Poi, si abbassano i pesi fino al tavolo, l'albero ruota all'interno della miscela di acqua e ghiaccio allora si verifica lo scioglimento di una certa quantità di ghiaccio.

Chiaramente del lavoro è entrato nel sistema poiché dall'esterno, attraverso la rotazione, si ha avuto l'effetto dello scioglimento del ghiaccio.

2° fase:

Poi con i pesi abbassati si sottrae calore dal recipiente e si scambia calore fino a che non si è riformata la massa di ghiaccio che c'era all'inizio della prima fase prima dell'abbassamento dei pesi.

Da questa esperienza si formula il 1° Principio della Termodinamica.

Attraverso l'albero che ruota si ha uno scambio di lavoro e questo è quello che avviene nella prima fase, nella seconda fase invece viene sottratto calore al sistema termodinamico.

Sistema termodinamico (sistema in esame) = acqua + ghiaccio → sistema CHIUSO (che non scambia massa)
Allora ha compiuto una trasformazione ciclica poiché il sistema torna nello stato iniziale.

Durante il ciclo è stato ceduto lavoro al sistema dall'esterno verso il sistema (1° fase), quindi negativo poiché entrante; poi è stato sottratto calore dal sistema (2° fase), quindi positivo poiché uscente.



Il primo principio della termodinamica stabilisce che il lavoro scambiato in una trasformazione termodinamica ciclica di un sistema chiuso è uguale al calore totale scambiato:

$$L = Q$$

Osservazione:

Più precisamente, tenendo conto delle convenzioni termodinamiche di L e di Q , dovremmo scrivere:

$$-|L| = -|Q|,$$

ma essendo un'uguaglianza possiamo scrivere $L = Q$, senza specificare se positivi o negativi poiché possono essere sia positivi che negativi.

N.B.

Questo fatto di cambiare il segno ha qualche controindicazione dal punto di vista del 2° principio della termodinamica.

Per il Secondo Principio del Termodinamica è possibile invertire il segno del calore e del lavoro?? Risponderemo più avanti.

Comunque per ora il primo principio è : $L = Q$

Generalizzando possiamo anche scrivere (integrale ciclico perché la trasformazione è ciclica):

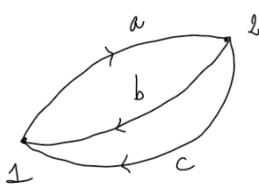
$$\oint dL = \oint dQ \Rightarrow \oint (dQ - dL) = 0 \Rightarrow \oint dE = 0$$

Nel caso in cui ci siano una serie infinitesima di scambi di calore dQ e di lavoro dL . Se l'integrale ciclico di una grandezza è pari a zero allora la grandezza è una **funzione di stato**.

Grandezza funzione di stato: $dQ - dL = dE$ **Energia Totale**

Ho definito l'energia totale a partire dal 1° principio della termodinamica e posso affermare che:

Se attribuisco al sistema una funzione energia totale, quando esso compie una trasformazione ciclica, ritorna nello stesso stato di energia totale iniziale.



Possiamo definire la grandezza energia totale anche in maniera **finita**.

Immaginiamo che il sistema vada dallo stato 1 allo stato 2 attraverso la trasformazione **a** e poi torna a 2 con **b**. Immaginiamo che il sistema possa tornare allo stato iniziale anche con un'altra trasformazione **c**.

In base alla formulazione finita del 1° principio, la sommatoria dei calori scambiati deve essere uguale alla sommatoria dei lavori totali:

- Per la trasformazione ciclica 1-a-2-b-1:

$$Q_a + Q_b = L_a + L_b \rightarrow Q_a - L_a = L_b - Q_b$$

- Per la trasformazione ciclica 1-a-2-c-1:

$$Q_a + Q_c = L_a + L_c \rightarrow Q_a - L_a = L_c - Q_c$$

Allora:

$$Q_b - L_b = Q_c - L_c$$

Le trasformazioni **b** e **c** sono entrambe trasformazioni che vanno dallo stato 2 allo stato 1 allora la differenza tra Q ed L non dipende dalla trasformazione **b** o **c** ma dipende solo dagli stati iniziali e finali. Allora in termini finiti posso scrivere:

$$Q - L = \Delta E$$

Le grandezze funzioni di stato sono definite a meno di una costante, cioè è definito il Δ (è definita come differenza) e non la costante in sé, che invece può essere definita a piacere.

Allora definiamo la costante attraverso la definizione dell'energia totale in uno stato di riferimento:

$\Delta E = E - E_0$, dove lo stato di riferimento deve essere definito dalla sua temperatura, pressione e volume specifico e stabilendo quanto vale **E_0 nello stato di riferimento zero** (di solito si assume $E_0 = 0$)

Definizione operativa del calore

Vogliamo misurare il calore. Come?

A seguito dell'esperienza di Joule abbiamo trovato che: $L = Q$

Allora il calore si misura come il lavoro scambiato da un sistema in un'esperienza alla Joule, cioè da un sistema che compie una trasformazione ciclica.

Di conseguenza, poiché L si misura in Joule, anche Q si misura in Joule.

Il primo principio è servito per definire la nuova grandezza Energia totale E.

Termodinamica dal punto di vista analitico

La cosa straordinaria della termodinamica è che le grandezze funzioni di stato si trattano analiticamente come se fossero delle funzioni analitiche, se ne fanno i differenziali esatti e le derivate parziali, e si trova che queste derivate parziali hanno un significato fisico e si possono misurare, allora possiamo parlare di interdipendenza tra analisi e termodinamica.

Esiste la funzione termodinamica E che suppongo sia funzione di n variabili x_i :

$$E = E(x_i)_n$$

Che suddividiamo in variabili esterne (che si riferiscono allo stato del sistema rispetto all'esterno e sono la velocità e la quota del baricentro) e in variabili interne (che si riferiscono allo stato del sistema all'interno quindi pressione, volume specifico e temperatura):

$$E = E[(\text{interne}), (\text{esterne})] = E_i + E_e$$

In realtà è meglio dire che $\Delta E = \Delta E_i + \Delta E_e$,

cioè la variazione di energia totale è pari alla variazione dell'energia rispetto alle variabili che determinano lo stato interno del sistema più la variazione dell'energia totale rispetto alle variabili esterne al sistema.

Poiché abbiamo supposto di essere all'equilibrio (cioè stesso volume, stessa pressione e stessa temperatura), vogliamo riferire tutto rispetto al baricentro. Allora le **variabili esterne** sono:

- Velocità del baricentro rispetto ad un sistema di riferimento fermo;
- Quota del baricentro rispetto ad un sistema di riferimento scelto;

Allora: $\Delta E_e = \Delta E_w + \Delta E_z = \Delta E_c + \Delta E_p$

dove ΔE_c è l'energia cinetica e ΔE_p è l'energia potenziale. ΔE_w variazione dell'energia totale legata alla velocità del baricentro e ΔE_z variazione dell'energia totale legata alla quota del baricentro.

Invece, le **variabili interne** le dividiamo in due categorie:

- Variabili termodinamiche: ΔE è in funzione della pressione p del volume specifico v e della temperatura T ; (non ci sono pedici)
- Componente elettrochimica dell'energia totale: ΔE è in funzione delle x_i reazioni chimiche e dei fenomeni elettrici o termoelettrici.

Allora $\Delta E_i = \Delta E(p, v, T) + \Delta E(x_i, el) = \Delta u + \Delta u_x$

Dove $\Delta E(p, v, T)$ è Δu l'energia interna termodinamica e Δu_x con x grado di avanzamento della reazione chimica è la variazione di energia interna di origine elettrochimica.

N.B.: per il momento supponiamo che non ci siano reazioni chimiche né fenomeni elettrochimici $\Delta u_x = 0$.

Per ora siamo giunti alla seguente espressione del 1° principio:

$$Q - L = \Delta E = \Delta u + \Delta E_c + \Delta E_p$$

N.B.: abbiamo considerato le lettere maiuscole poiché sono grandezze estensive, ma poiché abbiamo un sistema chiuso e la massa M è costante, possiamo dividere ed ottenere le grandezze intensive. Sistema chiuso che compie trasformazioni aperte, abbiamo generalizzato il primo principio ad un sistema chiuso che compie trasformazioni aperte e non più cicliche.

Calcoliamo ΔE_p :

Abbiamo una massa M sul tavolo e la solleviamo fino ad un'altezza z ; per sollevare un peso, secondo la definizione termodinamica, si deve compiere un lavoro di sollevamento.

Scriviamo il 1° principio della termodinamica:

- $Q = 0$ in questa trasformazione;
- $L \neq 0$ perché è stato sollevato un peso, è stato compiuto lavoro dall'esterno;
- $\Delta u = 0$ poiché la variazione di energia interna è legata a p, v, T e queste rimangono pressoché costanti;
- $\Delta u_x = 0$ perché non cambiano le variabili chimiche;
- $\Delta E_c = 0$ poiché era fermo ed è rimasto fermo;
- $\Delta E_p = Mg\Delta z$ poiché è cambiata la quota del baricentro;

allora $-L = Mg\Delta z \rightarrow L = -Mg\Delta z$

il lavoro è negativo poiché il lavoro è stato fatto dall'esterno sul sistema.

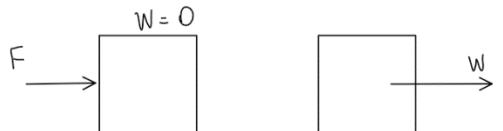
Se dividiamo per la massa otteniamo la grandezza intensiva: $l = -g\Delta z$

Se consideriamo le quantità infinitesime: $dl = -g dz$

Calcoliamo ΔE_c :

Mettiamo in movimento un corpo di massa M imprimendo una forza, allora da velocità nulla ($w = 0$) raggiunge la velocità w .

- $Q = 0$ in questa trasformazione, non c'è scambio di calore;
- $L \neq 0$ perché la forza F compie lavoro;
- $\Delta u = 0$ poiché immagino che p, v, T rimangano costanti;
- $\Delta u_x = 0$ perché non cambiano le variabili chimiche, non ci sono reazioni chimiche;
- $\Delta E_c \neq 0$ poiché cambia la velocità;
- $\Delta E_p = 0$ poiché rimane alla stessa quota;



allora $-L = \Delta E_c$

Per comodità passiamo alle quantità infinitesime e calcoliamo il lavoro necessario ad imprimere una velocità w :

$$dL = -F dx = -Ma dx = -M \frac{dw}{dt} dx = -M \frac{dw}{dx} \frac{dx}{dt} dx = -Mw dw = -M \frac{dw^2}{2}$$

$$\text{poiché: } d(w \cdot w) = w \cdot dw + dw \cdot w = 2w dw \Rightarrow w dw = \frac{d(w^2)}{2}$$

di nuovo il lavoro è negativo perché è fatto dall'esterno sul sistema.

$$L = -M \frac{\Delta w^2}{2}$$

Se dividiamo per la massa otteniamo la grandezza intensiva e se consideriamo le quantità infinitesime otteniamo anche:

$$l = -\frac{\Delta w^2}{2} \quad \text{e} \quad dl = -\frac{dw^2}{2}$$

Passando alle quantità intensive, dividendo per la massa scriviamo il primo principio in termini di unità di massa:

$$q - l = \Delta u + \Delta u_x + \Delta E_c + \Delta E_p$$

- $q - l = \Delta u + \Delta u_x + \frac{\Delta w^2}{2} + g \Delta z \quad (1)$

In termini differenziali (e noi la scriveremo sempre in termini differenziali), cioè con quantità infinitesime:

- $dq - dl = du + du_x + \frac{dw^2}{2} + g dz \quad (2) \text{ IMPORTANTE}$

Oss.

Passando dall'espressione $Q = L$ del 1° principio della termodinamica all'espressione $Q - L = \Delta E$, siamo passati dal considerare una trasformazione ciclica ad una trasformazione aperta in cui $\Delta E \neq 0$, mentre per la trasformazione ciclica $\Delta E = 0$.

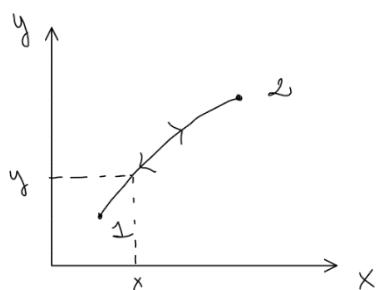
Di conseguenza, le espressioni (1) e (2) ottenute sono una generalizzazione del 1° principio della termodinamica per le trasformazioni cicliche ($Q = L$) estesa alle trasformazioni aperte.



Trasformazioni termodinamiche

Si rappresenta in un piano xy e si rappresenta come una curva che va da un punto ad un altro.

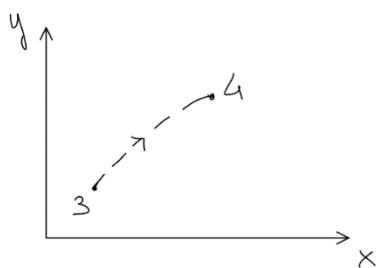
- Reversibili: quando la trasformazione può avvenire nei due versi



Si indica graficamente con una linea continua, così che in ogni punto il sistema termodinamico è in uno stato di equilibrio caratterizzato dalle variabili termodinamiche x e y ; la successione di questi stati di equilibrio fa passare da 1 a 2 e viceversa.

Successione di stati di equilibrio;

- Irreversibile: quando la trasformazione può avvenire solo in un verso

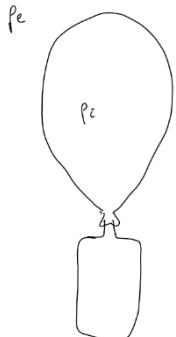


Si indica graficamente con una linea tratteggiata (meglio ancora con una linea retta tratteggiata) poiché non è una successione di stati di equilibrio ma lo sono solo lo stato iniziale (3) e lo stato finale (4). I punti della linea tratteggiata non sono stati di equilibrio del sistema termodinamico.

La termodinamica non rappresenta la realtà ma rappresenta lo stato limite della realtà. Nella realtà non esistono trasformazioni REVERSIBILI, sono tutte irreversibili. Per la termodinamica le trasformazioni reversibili sono il limite delle trasformazioni irreversibili. Quello che possiamo fare è diminuire le irreversibilità per avvicinarci alle trasformazioni reversibili.

Dal punto di vista della termodinamica si deve stabilire quali sono le **condizioni necessarie e sufficienti per avere trasformazioni reversibili**:

- Sistema in equilibrio termico o in equilibrio al suo interno;
- $p_i = p_e$;
- $T_i = T_e$;
- assenza di attriti



Osservazioni:

se $p_e > p_i$ il palloncino si contrarrebbe, mentre se $p_e < p_i$ il palloncino continuerebbe ad espandersi.

Però deve essere possibile indifferentemente sia l'espansione che la compressione allora deve essere $p_i = p_e$ altrimenti avviene una sola delle due condizioni. La condizione per avere la trasformazione reversibile è l'uguaglianza delle pressioni.

Nella realtà maggiore è la differenza di pressione e maggiore sarà l'irreversibilità. Questa condizione ricorda l'uguaglianza dei lavori interni ed esterni.

Quando il palloncino viene gonfiato la sua parete perde spessore perché dilata il materiale di cui è costituito il palloncino. L'attrito tenderebbe a far tornare lo spessore a quello iniziale, di conseguenza non sarebbe più indifferente l'espansione o la contrazione poiché prevarrebbe la contrazione → l'attrito è analogo alla differenza di pressione. Se voglio espandere faccio lavoro contro l'attrito, devo cercare di diminuirlo senza pensare di poterlo eliminare completamente.

L'unica condizione per cui è indifferente l'espansione o la contrazione è l'assenza di attriti.

Per dimostrare $T_i = T_e$ riprendiamo il 1° principio della termodinamica:

$$dq - dl = du + d\mu_x + de_c + de_p$$

Compire una trasformazione di espansione equivale ad andare da 1 a 2, mentre nella compressione si va da 2 a 1. A destra ci sono variazioni di funzioni di stato che dipendono solo dallo stato iniziale e finale.

Nell'espansione tutti i termini di destra aumentano, mentre nella compressione diminuiscono allora tutti i termini di destra devono potersi invertire di segno e questo è possibile.

Se si inverte il segno dei termini di destra deve invertirsi anche a sinistra.

Il termine di lavoro $dl = p dv$ ammette il fatto di poter essere negativo o positivo, che se fatto o ricevuto è semplicemente uguale e contrario.

Infine, per invertire il segno dello scambio di calore dq dobbiamo avere $T_i = T_e$, poiché il calore va sempre da dove la temperatura è maggiore a dove è minore; quindi, se avessi che $T_i > T_e$ sarebbe possibile solo uno scambio di calore dall'interno verso l'esterno. Ragionamento simile a quello della pressione. Affinché si possa invertire il segno di dq le temperature devono essere uguali.

Le condizioni della reversibilità sono quelle citate sopra, uguali a quelle dell'uguaglianza tra il lavoro interno ed esterno.

- Trasformazioni ADIABATICHE:
 $Q = 0$ (calore scambiato nullo)
- Trasformazioni ISOCORE
 $L = 0$ (le chiameremo per il momento a lavoro nullo)
- Trasformazioni ISOBARE
 $p = \text{cost.}$
- Trasformazioni ISOTERME
 $T = \text{cost.}$

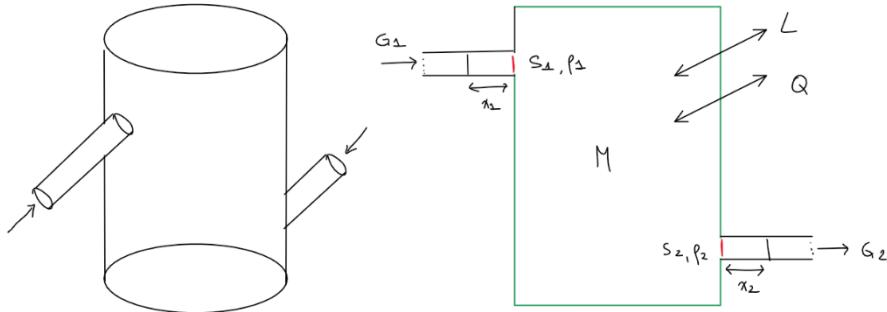
Osservazione:

La termodinamica non studia quello che avviene, ma dice quali sono le condizioni affinché le cose avvengano nel modo migliore, cioè in maniera reversibile.

Sapendo quanto si differenzia la trasformazione reale irreversibile rispetto alle condizioni ideali, posso valutare quanto si possono migliorare le prestazioni che otteniamo da un certo sistema termodinamico (lavoro, calore, ...)

Sistemi aperti

Un sistema aperto è un sistema termodinamico in cui nel contorno ci sono delle aperture. Consideriamo un recipiente cilindrico con un tubo in ingresso in cui entra una certa massa di liquido e un tubo di uscita.



M : massa di liquido interna al sistema.

In verde è rappresentato il contorno fisso (il contorno fisico del contenitore), in rosso il contorno mobile attraverso cui passa il fluido in ingresso e in uscita attraverso le sezioni S_1 e S_2 .

G_1 e G_2 sono la portata di ingresso attraverso il tubo di ingresso e di uscita attraverso il tubo di uscita.

Attraverso il contorno fisso si scambia calore Q positivo o negativo e lavoro L positivo o negativo. Attraverso il contorno mobile passa il fluido.

Hp: **Regime Stazionario**, tutte le variabili sono costanti nel tempo allora anche la massa M di fluido all'interno deve essere costante allora intuitivamente le due portate di ingresso e uscita devono essere uguali:

$G_1 = G_2$, bilancio di massa. Il primo bilancio che si fa è il bilancio di massa.

Verifichiamolo;

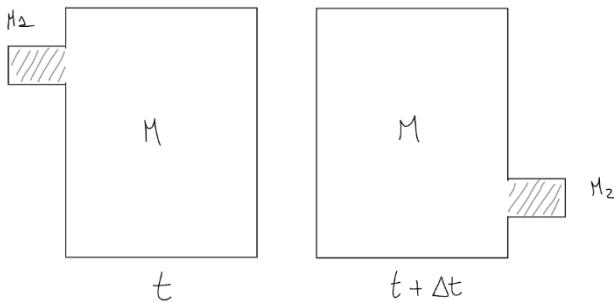
Al tempo t il fluido è M (all'interno del contorno rigido) + M_1 (a x_1 dal contorno mobile).

Al tempo $t + \Delta t$ il fluido è M (all'interno del contorno rigido) + M_2 (ad x_2 dal contorno mobile), poiché nell'intervallo di tempo Δt tutto il fluido M_1 è entrato ed è uscito il fluido M_2

In regime stazionario la massa rimane costante: $M_t = M_{t+\Delta t} \rightarrow M_1 + M = M_2 + M \Rightarrow M_1 = M_2$

Da cui:

$$G_1 \Delta t = G_2 \Delta t \Rightarrow G_1 = G_2$$



Dopo aver fatto il bilancio di massa si passa al bilancio di energia.

Bilancio di energia

1° principio della termodinamica:

$$q - l = \Delta u + \cancel{\Delta U_x} + \frac{\Delta w^2}{2} + g \Delta z \quad \text{e lo scriviamo per unità di massa.}$$

- q è il calore scambiato a causa di una differenza di temperatura tra sistema termodinamico e l'esterno. Trascuriamo il calore scambiato attraverso il contorno mobile rispetto al calore scambiato attraverso al contorno fisso, allora \exists solo q_f .

- l : esiste un lavoro scambiato attraverso il contorno fisso l_f ed esiste anche un lavoro scambiato attraverso il contorno mobile di ingresso l_1 e il lavoro scambiato attraverso l'uscita l_2 , lavoro per l'introduzione e per l'estrazione del fluido.

(facendo riferimento alla figura in alto di pag. 26) All'uscita, nell'intervallo di tempo Δt il contorno mobile S_2 si sposta di x_2 , quindi il sistema si espande verso l'esterno allora si produce lavoro positivo di espansione (o estrazione).

$$L_2 = p_2 S_2 x_2 = p_2 V_2 = \rho_2 v_2 M_2 \rightarrow l_2 = \frac{L_2}{M_2} = p_2 v_2 > 0 \quad \text{lavoro specifico per l'estrazione}$$

È positivo perché lo fa il fluido dall'interno verso l'esterno.

Analogamente, all'ingresso, si produce lavoro negativo poiché il sistema si contrae verso l'interno:

$$l_1 = -p_1 v_1 < 0$$

$$\text{Allora } q - l_f - p_2 v_2 + p_1 v_1 = \dots$$

Vedo ora i termini a destra;

- Δu : variazione di energia interna tra l'istante t e l'istante $t + \Delta t$.

$$\Delta u = u(M) + u(M_2) - u(M) - u(M_1) = u_2 - u_1$$

$$\text{Dove } u(M) + u(M_2) = u(M_{t+\Delta t}) \text{ e } u(M) + u(M_1) = u(M_t)$$

- $\Delta e_c = e_c(M) + e_c(M_2) - e_c(M) - e_c(M_1) = e_{c_2} - e_{c_1}$

- Idem per $\Delta e_p = e_{p_2} - e_{p_1}$

Allora:

$$q - l_f - p_2 v_2 + p_1 v_1 = u_2 - u_1 + e_{c_2} - e_{c_1} + e_{p_2} - e_{p_1}$$

$$q - l_f = (u_2 + p_2 v_2) - (u_1 + p_1 v_1) + e_{c_2} - e_{c_1} + e_{p_2} - e_{p_1}$$

Questa sopra è l'equazione del 1° principio della termodinamica applicato ad un sistema aperto con una corrente entrante ed una uscente. Questa si applica ai sistemi aperti, mentre l'altra importante formulazione si applica ai sistemi chiusi. Tra parentesi compare una nuova grandezza che viene chiamata ENTALPIA.

Entalpia

Definiamo una nuova grandezza termodinamica (dipendente):

$$h = u + pv \quad (\text{definizione analitica})$$

È la somma delle variabili termodinamiche di stato, dove p e v sono variabili indipendenti e u è l'energia interna allora è una grandezza **funzione di stato**.

1° principio della termodinamica per sistemi aperti:

$$q - l_f = \Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p$$

Osservazione;

Al posto di Δu è presente Δh rispetto all'espressione per i sistemi chiusi.

Inoltre, il lavoro l_f è solo quello attraverso il contorno fisso perché $p_2 v_2 - p_1 v_1$ è il lavoro perso per l'introduzione e l'estrazione di fluido.

In termini differenziali, cioè con quantità infinitesime:

$$dq - dl_f = dh + de_c + de_p$$

Definizione operativa di entalpia.

Vogliamo misurare l'entalpia.

Allora consideriamo un sistema aperto (ad esempio un tubo con un fluido che scorre) e si fa in modo che:

- La variazione di energia cinetica sia nulla (prendendo le sezioni uguali): $de_c = 0$
- La variazione di energia potenziale sia nulla (mettendo il tubo in orizzontale): $de_p = 0$
- Lo scambio di lavoro sia nullo (non mettendo degli scambiatori di lavoro): $dl_f = 0$

Allora $dq = dh$.

Quindi si definisce l'entalpia come calore scambiato in una trasformazione compiuta da un sistema aperto, dove non è presente lavoro e non ci sono variazioni di energia cinetica e di energia potenziale.

Infine, riprendendo la definizione analitica dell'entalpia, possiamo differenziare:

$$dh = du + p dv + v dp$$

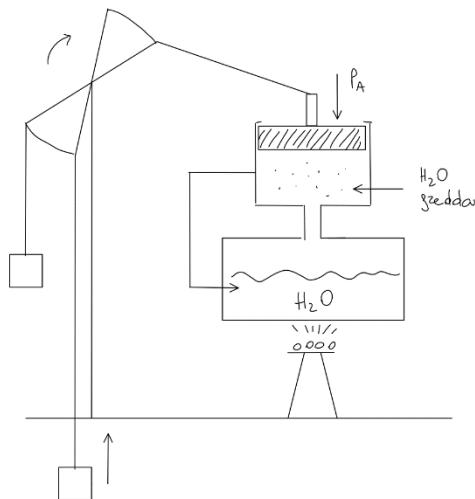
Secondo principio della termodinamica

Capitolo 5 del libro.

Abbiamo visto il primo principio partendo dall'esperienza di Joule e poi abbiamo generalizzato ai sistemi aperti.

Il secondo principio è stato originariamente formulato prima del primo principio all'inizio dell'Ottocento. Questo principio era stata una problematica nata dopo che nel 700 erano nate le macchine che sostituivano il lavoro animale.

Macchina di Newcomen (1712)



La prima macchina che è stata utilizzata per sollevare l'acqua dalle miniere è la macchina di Newcomen.

Abbiamo a sinistra un secchio pieno di acqua che va sollevato, quindi bisogna dargli lavoro. Una cisterna di acqua viene scaldata dal carbone bruciato sul braciere.

Questa vaporizza e il vapore entra in un sistema cilindro-pistone dove all'interno c'è acqua allo stato di vapore e all'esterno c'è la pressione atmosferica.

Si fa entrare acqua fredda dall'esterno, la quale provoca la condensazione improvvisa del vapore con abbassamento di pressione nel cilindro.

La fase utile alla macchina di Newcomen è quella in cui a seguito della diminuzione della pressione all'interno del cilindro, il pistone scende allora di conseguenza il bilanciere solleva il secchio di acqua.

Secondo la definizione termodinamica di lavoro si compie lavoro positivo.

Dal punto di vista ingegneristico interessa quanto carbone si consuma e quanta acqua si riesce a sollevare.

N.B.: Il sistema acqua vapore non è un sistema chiuso perché viene fatta entrare acqua.

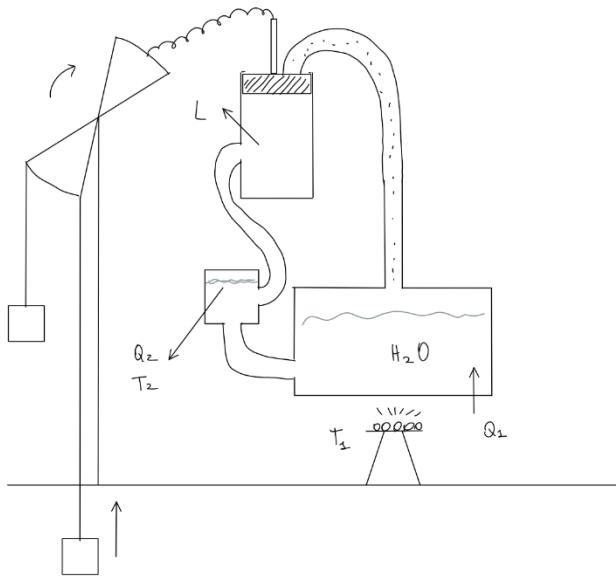
Definiamo il rendimento della macchina come il rapporto tra l'acqua sollevata e il carbone bruciato:

$$\eta = \frac{\text{H}_2\text{O sollevata}}{\text{carbone bruciato}} = \frac{\text{ciò che si ottiene}}{\text{ciò che si spende}}$$

Il rendimento della macchina di Newcomen in termini percentuali è circa 3 - 4 %

È stata utilizzata per diverso tempo, ora però la macchina utilizzata è la macchina di Watt

Macchina di Watt (1788)



76 anni dopo Watt mise a punto una nuova macchina per sostituire la macchina di Newcomen.

Una cisterna di acqua viene scaldata dal carbone bruciato sul braciere.

L'acqua vaporizza e il vapore entra in un sistema cilindro-pistone andando ad agire dall'alto sulla parte superiore del pistone.

Quindi, il pistone scende quando arriva il vapore ad alta pressione ed alta temperatura.

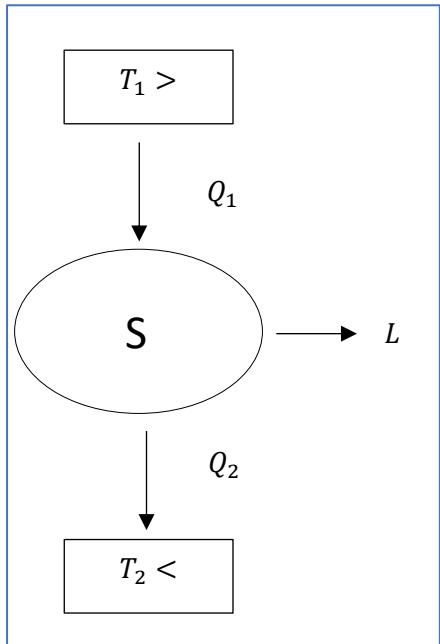
Allora di nuovo la fase utile alla macchina di Watt è quella in cui il pistone scende e tramite il bilanciere attaccato al pistone si solleva il secchio di acqua dalla miniera.

Allora si compie lavoro meccanico positivo.

Poi, dopo aver spinto il pistone in basso il vapore viene recuperato e mandato in un condensatore dove raffreddando il vapore riotteniamo acqua che viene rimandata all'interno della cisterna.

Sistema termodinamico acqua + vapore è un sistema chiuso perché non c'è scambio di massa con l'esterno! (c'è solo scambio di calore e di lavoro)

- Scambio di calore: la fiamma del carbone ha temperatura T_1 e quindi scalda l'acqua della cisterna che è a temperatura inferiore → scambio di calore Q_1 entrante nel sistema termodinamico (positivo).
- Scambio di lavoro: il pistone si abbassa e solleva il secchio tramite il bilanciere → scambio di lavoro L uscente dal sistema termodinamico.
- Scambio di calore: il vapore viene ricondensato raffreddando, cioè fornendo una temperatura T_2 inferiore alla temperatura del vapore → scambio di calore Q_2 uscente dal sistema termodinamico (negativo).



In conclusione, dal punto di vista termodinamico possiamo schematizzarlo come rappresentato sulla sinistra.

La sorgente di temperatura $T_1 (> T_2)$ cede una certa quantità di calore Q_1 all'acqua; poi è stato prodotto un lavoro L ; infine, lo scambio di calore Q_2 avviene con una sorgente a temperatura $T_2 (< T_1)$, assorbendo calore.

Allora questo è lo schema termodinamico della macchina di Watt.

La macchina di Watt porta ad un aumento del rendimento!

A parità di acqua sollevata si consuma meno carbone rispetto alla macchina di Newcomen.

Questo fu il punto di partenza del ragionamento di Carnot.

Questo schema rappresenta la produzione di lavoro grazie a due scambi di calore.

$$L = Q_1 - Q_2$$

Q_1 positivo perché assorbito al sistema e Q_2 negativo perché ceduto.

Abbiamo detto che il rendimento aumenta, ma esiste un limite superiore al rendimento?

$$\eta_{max} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Conclusioni;

con il 2° principio della termodinamica si definisce per le macchine motrici (cioè che producono lavoro positivo) termiche il limite superiore del rendimento, che è proprio il rendimento formulato da Carnot.

Queste macchine motrici termiche sono schematizzate come sopra.

Macchina di Watt sistema chiuso quindi si può fare uno schema.

La macchina di Watt portava ad un aumento di rendimento, si spendeva meno carbone, la problematica dell'aumento del rendimento fu presa in considerazione da Carnot.

Ragionamenti di Carnot;

Per queste macchine termiche che hanno due scambi di calore quale può essere il rendimento massimo che si può ottenere?

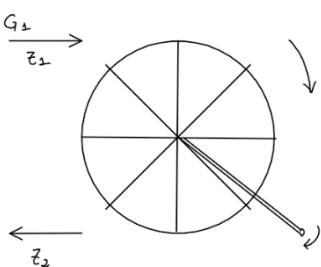
Arrivò a dire che il rendimento massimo dipende solo dalle temperature delle due sorgenti $\eta_{max} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$.

Vediamo il ragionamento che condusse Carnot a formulare questo principio.

Carnot sfruttò il principio di similitudine che permette di applicare gli stessi principi noti per un certo fenomeno che è il funzionamento del mulino ad acqua, simile al nuovo fenomeno da studiare (la macchina di Watt) e di applicarli proprio per studiare il fenomeno nuovo.

Carnot fece la similitudine tra un mulino ad acqua e la macchina di Watt.

Il mulino ad acqua è fatto da una ruota con delle pale che ricevono una certa portata di acqua G ad una certa quota z_1 ; la ruota gira poiché l'acqua sbatte contro le pale, producendo la rotazione dell'albero motore.



Poi l'acqua viene scaricata alla quota z_2 e va via.

Allora si produce lavoro meccanico attraverso il flusso di acqua che scorre passando da un livello superiore ad uno minore. Il passaggio dell'acqua dalla quota superiore dove arriva G_1 di acqua esce a livello inferiore e se siamo a regime stazionario la portata dell'acqua in uscita è uguale a quella d'entrata. Allo stesso tempo si produce lavoro che è dato dalla rotazione dell'albero.

Carnot fece il parallelo tra le quantità in gioco nel mulino ad acqua e le quantità in gioco nella macchina di Watt:

- Il lavoro L è lo stesso poiché produce in entrambi i casi una rotazione di un albero;
- Portata $G \Leftrightarrow$ calore Q (che entra ed esce nella macchina di Watt): come la macchina di Watt scambia calore, il mulino ad acqua muove una portata di acqua G ;
- Quota $z \Leftrightarrow$ temperatura T : come il calore viene da una sorgente a temperatura T_1 maggiore, anche l'acqua entra da una quota maggiore z_1 ; poi il calore esce verso una sorgente di temperatura T_2 minore, come l'acqua esce da una quota minore z_2 .

N.B.: in queste similitudini di Carnot c'era un **errore** legato ad un concetto filosofico dell'epoca secondo cui tutti i fenomeni erano dei fluidi e il vuoto non esisteva (ma esisteva il fluido etere). Non andava bene il parallelo tra la portata e il calore.

All'epoca il calore era considerato un fluido calorico che scorreva da corpi a temperatura maggiore a corpi a temperatura minore. La formulazione era sbagliata perché partiva dal concetto di fluido calorico.

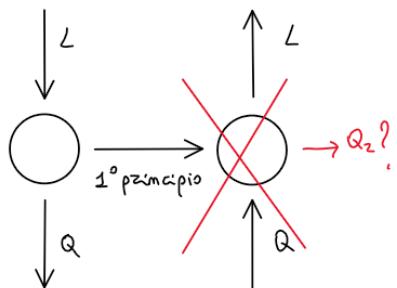
Se il calore fosse un fluido potremmo applicare il principio di conservazione della massa, cioè della portata, e otterremo che $Q_1 = Q_2$.

Ma questo va contro il 1° principio della termodinamica poiché otterremo che $L = Q_1 - Q_2 = 0 \rightarrow$ errore. Infatti, noi sappiamo che per produrre lavoro positivo la macchina di Watt deve avere $Q_1 > Q_2$ e di certo non possono essere uguali.

Allora anche se c'era qualcosa di sbagliato nella similitudine di Carnot dal punto di vista del 1° principio della termodinamica, il risultato formale di Carnot, cioè il 2° principio della termodinamica è stato comunque confermato allora questo vuol dire che i 2 principi sono completamente separati uno dall'altro altrimenti supponendo sbagliato uno avrebbe fallito anche l'altro.

Generalizzazione del secondo principio della termodinamica

RiconSIDERIAMO l'esperienza di Joule, in cui si cede lavoro al sistema ed esce calore. In base all'uguaglianza $Q = L$ data dal 1° principio della termodinamica possiamo invertire i segni del calore e del lavoro.



Se confrontiamo questo nuovo schema termodinamico con quello della macchina di Watt, osserviamo che manca il calore Q_2 che esce dal sistema allora questa situazione non è reale.
(se do calore ad un sistema non ottengo solo lavoro)
L è negativo entrante ed è uguale a Q negativo uscente.

Allora nei sistemi chiusi non si può invertire il segno del calore e del lavoro allora **non si può invertire il verso di certi fenomeni fisici**.

È come se nell'esperienza di Joule al contrario, scaldassimo l'acqua con il ghiaccio, che sbattendo contro le pale del mulinello di Rowlands, fa sollevare i pesi → impossibile fisicamente.

- Il verso dei fenomeni elettromeccanici si può invertire poiché questi fenomeni possono avvenire in entrambi i versi.
- Il verso dei fenomeni termomeccanici NON si può invertire poiché c'è un solo verso fisico in cui il fenomeno può avvenire.

Quindi alcuni fenomeni fisici sono trasformazioni IRREVERSIBILI!

Invertendo i segni non si avrebbe la cessione di calore Q_2

Esistono due formulazioni duali del 2° principio della termodinamica.

(questo principio è l'unico principio che dice qualcosa che non è possibile avere)

Formulazione di Plank

È impossibile che l'unico risultato di una cessione di calore ad un sistema chiuso che compie trasformazioni cicliche sia la produzione di lavoro.

Infatti il risultato sperimentale della macchina di Watt dice che si può produrre lavoro da un sistema chiuso che compie trasformazioni cicliche solo se, oltre ad assorbire calore lo cede anche.

Allora è possibile la macchina di Watt.

Formulazione di Clausius

È impossibile per un sistema chiuso (che compie trasformazioni cicliche) che l'unico risultato sia la sottrazione di calore da una sorgente inferiore e la cessione di calore ad una sorgente superiore, senza la presenza di un altro effetto compensatore (cioè cessione di lavoro al sistema).

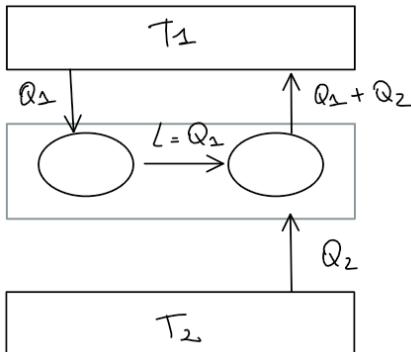
Questo è possibile solo in presenza di un effetto compensatore, come ad esempio la cessione di lavoro al sistema → allora otteniamo il ciclo frigorifero.

I due principi sono equivalenti

Lo dimostriamo per assurdo cioè negandone uno e verificando che di conseguenza è negato anche l'altro.

Nego la formulazione di Plank;

Immaginiamo di avere una sorgente a temperatura T_1 maggiore che cede calore Q_1 al sistema, che produce lavoro $L = Q_1$.



Con questo lavoro $L = Q_1$ facciamo funzionare una macchina frigorifera che usa lavoro per portare calore Q_2 dalla sorgente inferiore T_2 alla sorgente superiore T_1 .

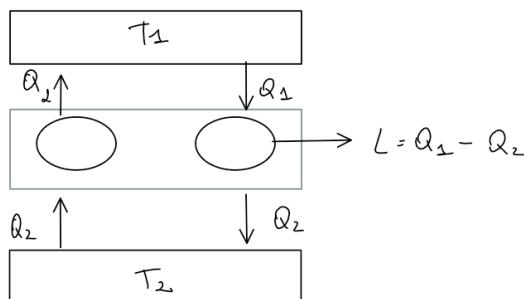
Complessivamente entra $L = Q_1$ e Q_2 e quindi esce $Q_1 + Q_2$ secondo il primo principio.

Considerando come sistema termodinamico l'insieme delle due macchine (il sistema è quello nel rettangolo grigio), questo sistema vede il calore Q_1 che entra ed esce quindi ai fini del sistema Q_1 è inutile; quindi, l'unico risultato è quello di sottrarre calore Q_2 alla sorgente inferiore e si cede alla sorgente superiore.

Allora abbiamo negato la formulazione di Clausius.

Nego la formulazione di Clausius;

Immaginiamo di prendere calore Q_2 dalla sorgente inferiore T_2 e di portarlo alla sorgente superiore T_1 .



Poi immaginiamo di prendere del calore Q_1 dalla sorgente superiore T_1 e di costruire la macchina di Watt che cede calore Q_2 alla sorgente inferiore e produce lavoro $L = Q_1 - Q_2$ per il 1° principio.

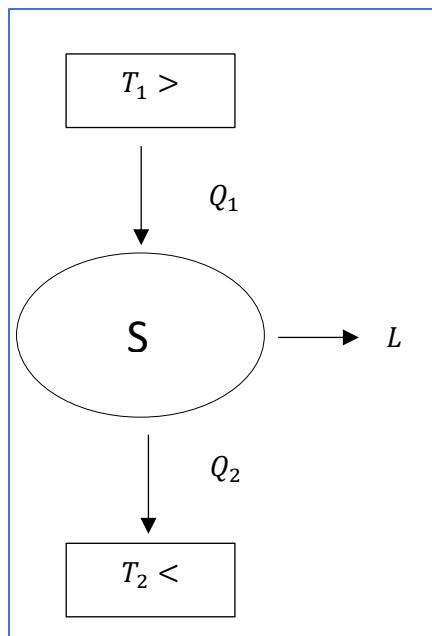
Considerando come sistema termodinamico l'insieme delle due macchine, il calore Q_2 entra ed esce dal sistema e quindi è inutile, mentre il sistema ha sottratto dalla sorgente superiore $Q_1 - Q_2$ e produce lavoro $L = Q_1 - Q_2$. Produce lavoro senza interagire con la sorgente inferiore.

Allora abbiamo negato la formulazione di Plank.

Equazioni del 2° principio della termodinamica

Riprendiamo la macchina di Watt;

La formulazione del secondo principio della termodinamica è dovuta a Clausius e non prende in considerazione il lavoro, ma considera solo gli scambi di calore.



$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0 \quad \begin{cases} = 0 \text{ per trasformazioni REVERSIBILI} \\ < 0 \text{ per trasformazioni IRREVERSIBILI} \end{cases}$$

Questa viene chiamata **diseguaglianza di Clausius**
T è la temperatura alla quale si scambia il calore dQ

Cioè si fa una trasformazione ciclica, si calcola tutto il calore che viene scambiato e si divide per la temperatura a cui viene scambiato.

Osservazione:

per il 2° principio della termodinamica vale il concetto filosofico del metodo deduttivo.

Nonostante non si sappia la provenienza di questo principio, poiché però è stato enunciato, non rimane altro che verificarne la veridicità.

Secondo il metodo deduttivo un principio è vero solo nel momento in cui viene falsificato.

Per ora verifichiamo che la diseguaglianza di Clausius come espressione del 2° principio della termodinamica sia vera.

(la falsificazione si è avuta solo negli anni 50 con l'introduzione della teoria dell'informazione, che noi non vediamo).

Applichiamo la diseguaglianza alla macchina di Watt; si assorbe calore Q_1 alla sorgente T_1 mentre Q_2 è il calore ceduto e T_2 la temperatura a cui viene ceduto.

CICLO DIRETTO (o ciclo MOTORE):

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \leq 0 \rightarrow \frac{Q_1}{T_1} \leq \frac{Q_2}{T_2} \text{ cioè } \frac{Q_{Ass}}{T_{Ass}} \leq \frac{Q_{Ced}}{T_{Ced}},$$

questo è vero in tutti i cicli motori possibili e immaginabili.

Applichiamo la diseguaglianza di Clausius al ciclo frigorifero (o ciclo inverso):

$$-\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0 \rightarrow \frac{Q_2}{T_2} \leq \frac{Q_1}{T_1} \text{ cioè } \frac{Q_{Ass}}{T_{Ass}} \leq \frac{Q_{Ced}}{T_{Ced}},$$

questo è vero in tutti i cicli motori possibili e immaginabili.

Allora la diseguaglianza di Clausius è sempre valida. Otteniamo la stessa relazione nei due casi. 1.

Vedi pag. 36

Entropia

Prendiamo la diseguaglianza di Clausius, dividendo per la massa passiamo alle grandezze intensive.

Se consideriamo una trasformazione reversibile l'integrale è pari a zero: $\oint \frac{dQ}{T} = 0$;

allora, la grandezza $\frac{dQ}{T}$ è una grandezza **funzione di stato**.

$$\frac{dQ}{T} = ds : \text{Entropia}$$

Se la trasformazione è irreversibile, $\oint \frac{dQ}{T} \leq 0$ l'integrale è minore di zero e quindi possiamo scrivere che:

$$\frac{dQ}{T} = ds - ds_s$$

Con $ds_s \geq 0$ sempre $\left\{ \begin{array}{l} = 0 \text{ per trasformazioni REVERSIBILI} \\ > 0 \text{ per trasformazioni IRREVERSIBILI} \end{array} \right.$

$ds_s \rightarrow$ termine di produzione entropica (o sorgente di entropia) dovuta alle cause di irreversibilità presenti nel sistema.

Le cause di irreversibilità producono entropia come ds_s . 2.

Definizione operativa di entropia;

Considerando una trasformazione reversibile che va da 1 a 2, l'entropia Δs è il differenziale esatto di una grandezza funzione di stato. Allora, per una qualsiasi trasformazione reversibile da 1 a 2, possiamo calcolare;

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \int_2^1 \frac{dq}{T}$$

Essendo una grandezza funzione di stato è definita come differenza; quindi, si deve stabilire uno stato di riferimento O con tutte le sue caratteristiche e si deve fissare il valore di entropia in questo stato di riferimento.

Δs ha lo stesso valore sia se la trasformazione è reversibile che irreversibile perché l'entropia è una funzione di stato.

Siamo partiti dalle variabili interne del sistema termodinamico, poi con il primo principio abbiamo definito l'energia interna di tipo termodinamica; poi abbiamo definito e misurato l'entalpia o ora siamo arrivati all'entropia.

Energia interna in funzione dell'entropia;

Riprendiamo l'espressione del 1° principio della termodinamica per i sistemi chiusi:

$$dq - dl = du + de_c + de_p \quad \text{possiamo scrivere}$$

$$du = dq - dl - de_c - de_p$$

Poiché du è il differenziale di una grandezza funzione di stato cioè dell'energia interna, lo possiamo calcolare a piacere, possiamo seguire qualsiasi trasformazione e ci conviene la trasformazione reversibile che è la più semplice. Allora tra tutte le possibili trasformazioni sceglio una trasformazione tale che $de_p = 0$ e $de_c = 0$ e che inoltre sia reversibile;

allora se la trasformazione è reversibile abbiamo $dq = Tds$ e $dl = pdv$ dove p era sia la pressione esterna che la pressione interna da cui:

$$du = Tds - pdv \quad \text{IMPORTANTE}$$

Abbiamo ottenuto una nuova espressione termodinamica per il differenziale dell'energia interna, calcolabile tramite le variazioni di entropia e le variazioni di volume specifico.

Ora ds è la variabile indipendente.

Entalpia in funzione dell'entropia;

Abbiamo definito $h = u + pv$, quindi il suo differenziale sarà:

$$dh = d(u + pv) = du + pdv + vdp \quad \text{da cui:}$$

$$dh = Tds + vdp$$

Abbiamo ottenuto una nuova espressione termodinamica per il differenziale dell'entalpia, calcolabile tramite le variazioni di entropia e le variazioni di pressione.

Teorema dell'aumento di Entropia

Supponiamo di avere un sistema termodinamico S isolato termicamente con l'esterno cioè che non scambia calore con l'esterno ($dq = 0$).

L'entropia la calcolo attraverso l'equazione scritta prima:

$$ds = \frac{dq}{T} + ds_s \rightarrow ds = ds_s \geq 0$$

Osservazione: scritto in questo modo si vede che quando le trasformazioni sono irreversibili il ds_s va ad aumentare la variazione di entropia (poiché $ds_s \geq 0$). Siccome le trasformazioni reversibili non esistono l'entropia cresce sempre.

Allora, se il sistema termodinamico è un sistema reale, cioè che compie trasformazioni irreversibili, per le quali $ds_s \geq 0$,

l'entropia del sistema reale isolato cresce!

Traccia termodinamica

È la diseguaglianza di Clausius cambiata di segno. Poiché secondo la diseguaglianza di Clausius l'integrale ciclico di $\frac{dq}{T}$ è minore o uguale a zero, introduciamo una grandezza nuova:

$$\tau = - \oint \frac{dq}{T} \geq 0$$

Chiamata **traccia termodinamica**.

Definizione dei termini di produzione entropica

Analogamente a quanto fatto per l'energia totale, dividiamo il termine produzione entropica in due contributi:

- Sorgenti entropiche di prima specie: sono legate alle cause di irreversibilità di prima specie, cioè sono le differenze di pressione, le differenze di temperatura e gli attriti.
- Sorgenti entropiche di seconda specie: sono legate alle cause di irreversibilità di seconda specie dovute ai fenomeni elettrochimici, cioè sono il grado di avanzamento x_i della generica reazione chimica i e il lavoro elettrico.

Allora;

$$ds_s = ds_{sI}(\Delta p, \Delta T, \text{attriti}) + ds_{sII}(x_i, l_{el})$$

1.

Dimostriamo che la diseguaglianza di Clausius viene negata se applicata ai cicli che non seguono il 2° principio della termodinamica.

- Consideriamo la macchina negata dalla formulazione di Plank (macchina che assorbe calore e produce lavoro) e verifichiamo che la diseguaglianza di Clausius sia negata:

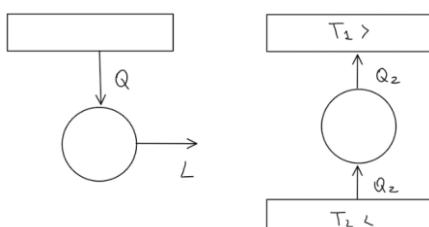
$$\oint \frac{dQ}{T} = \frac{Q}{T} > 0$$

Poiché $Q > 0$, Q è l'unico calore assorbito alla temperatura T . La diseguaglianza di Clausius ci dice che è ≤ 0 .

- Consideriamo la macchina negata dalla formulazione di Clausius e verifichiamo che la diseguaglianza di Clausius sia negata:

$$\oint \frac{dQ}{T} = \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_2}{T_1} = Q_2 \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) > 0$$

Poiché $Q_2 > 0$ e $T_2 < T_1$



2.

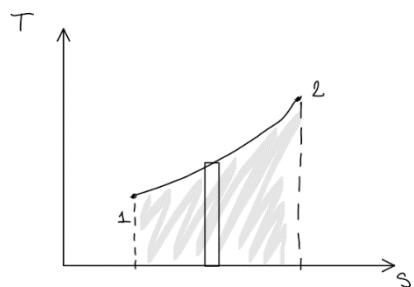
Rappresentazione del calore nel diagramma T_s

$$dq = Tds - Tds_s$$

Se la trasformazione è reversibile, cioè se $ds_s = 0$:

$$dq = Tds \rightarrow q = \int_2^1 Tds$$

Allora, nel diagramma T_s il calore scambiato è l'area sottesa alla trasformazione.

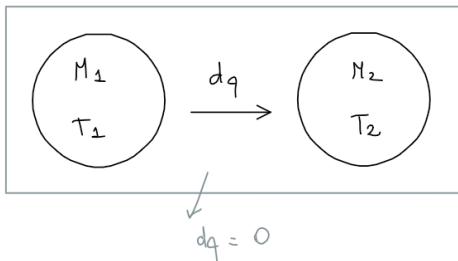


Vediamo una per una le cause di irreversibilità di prima e di seconda specie.

Causa di irreversibilità di prima specie: differenza finita di temperatura ΔT .

Consideriamo un corpo 1 di massa M_1 e temperatura T_1 , messo a contatto con un corpo 2 di massa M_2 e temperatura T_2 , dove $\Delta T = T_1 - T_2 > 0$ finita.

Si ha un passaggio di calore dQ dal corpo 1 al corpo 2 poiché $T_1 > T_2$



se lo scambio di calore avviene solo tra 1 e 2, cioè se mettiamo i due corpi all'interno di un sistema isolato che non scambia calore con l'esterno, il sistema termodinamico è l'insieme dei due sistemi. N.B.: nonostante il sistema sia isolato rispetto all'esterno, all'interno c'è uno scambio di calore dq e quindi esiste una causa di irreversibilità i prima specie (ΔT).

Applichiamo la seguente espressione all'interno del sistema:

$$ds = \frac{dq}{T} + ds_{sl} \rightarrow ds = ds_{sl}(\Delta T).$$

Non so calcolare il termine di produzione entropica ma lo calcolo attraverso ds lungo la trasformazione reversibile.

Così possiamo calcolare il termine di produzione entropica $ds_{sl}(\Delta T)$ come se fosse una vera variazione di entropia, grazie all'isolamento termico.

Poiché l'entropia è una grandezza di stato, la variazione di entropia ds può essere calcolata per una qualsiasi trasformazione.

Calcoliamo la quantità estensiva differenziale dS :

$$dS = M_1 ds_1 + M_2 ds_2 = M_1 \frac{dq_1}{T_1} + M_2 \frac{dq_2}{T_2}$$

Avendo scelto nell'ultimo passaggio una trasformazione reversibile per la quale $ds = \frac{dq}{T}$

Il calore è scambiato solo dal corpo 1 al corpo 2:

$$\Delta q = -M_1 dq_1 = M_2 dq_2$$

Perso il calore dal corpo 1 e acquistato il calore dal corpo 2.

Ottengo:

$$dS = dQ \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) = dS_{sl}(\Delta T) > 0 \text{ poiché } T_1 > T_2$$

Calcolo la sorgente entropica legata alla differenza finita di temperatura. Per diminuire l'entropia bisogna diminuire la differenza di temperatura.

Osservazione:

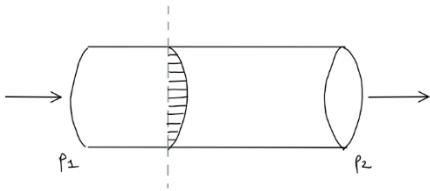
Da questo risultato ritroviamo la condizione di irreversibilità secondo cui deve essere $T_1 = T_2$;

infatti, $dS = dS_{SI}(\Delta T) = 0 \Leftrightarrow T_1 = T_2$

se $T_1 \neq T_2$ esiste una sorgente entropica $dS_{SI}(\Delta T)$ che causa l'irreversibilità e si calcola come abbiamo appena trovato.

Cause di irreversibilità di prima specie: differenza finita di pressione Δp e attrito

Consideriamo un fluido che scorre in un condotto da sx verso dx, in cui lo scorrimento è assicurato da una differenza di pressione Δp per cui $p_1 > p_2$, in regime stazionario.



Scriviamo il primo principio della termodinamica per sistemi aperti:

$$dq - dl_f = dh + de_c + de_p$$

Poiché il condotto è orizzontale $de_p = 0$

Se le velocità sono le stesse $de_c = 0$

Se non ci sono organi meccanici $dl_f = 0$

Allora $dq = dh$.

Il fluido è un fluido newtoniano in cui c'è uno sforzo di taglio τ che fa sì che ci sia attrito tra il fluido e le pareti e tra i vari strati di fluido.

Allora l'attrito dovuto allo sforzo di taglio τ fa sì che il fluido sia mantenuto in moto, ma lo scorrimento in regime stazionario è registrabile con la differenza finita di pressione.

Δp mantiene il fluido in moto, in cui c'è l'attrito, e l'attrito a sua volta è responsabile del fatto che $p_1 > p_2$ cioè che c'è una diminuzione di pressione nell'andare da sx a dx.

L'attrito e la differenza finita di pressione sono molto legati tra di loro.

Sfruttiamo l'espressione dell'entalpia in funzione dell'entropia:

$$dq = dh = Tds + vdp = dq + Tds_s + vdp$$

Sapendo che $Tds = dq + Tds_s$ poiché $ds = \frac{dq}{T} + ds_s$

$$\text{Allora: } ds_{SI}(\Delta p) = -\frac{vdp}{T}$$

Abbiamo trovato il modo di esprimere il termine di produzione entropica.

Osservazione:

da questo risultato ritroviamo la condizione di irreversibilità secondo cui deve essere $p_1 = p_2$; infatti

$$ds_{SI}(\Delta p) = 0 \Leftrightarrow dp = 0 \Leftrightarrow p_1 = p_2$$

Se $p_1 \neq p_2$ (o se c'è attrito), esiste una sorgente entropica $ds_{SI}(\Delta p)$ che causa l'irreversibilità e che si calcola come abbiamo appena visto.

La definizione operativa di attrito la daremo solo quando diremo come si misura, per ora sappiamo che è legato a una differenza finita di pressione.

Settimana 3

05-10-21

Cause di irreversibilità di seconda specie; fenomeni elettrochimici.

Ricordiamo che l'energia interna del sistema termodinamico è dato da due contributi, poiché è una funzione di tutte le variabili che entrano in gioco nei fenomeni termodinamici ed elettrochimici:

$$e_i = e_i(p, v, T, x_i, l_{el}) \rightarrow de_i = du(p, v, T) + du_x(x_i, l_{el})$$

Con **du energia interna termodinamica**, che dipende dalle variabili termodinamiche p, v, T e **du_x variazione di energia interna elettrochimica**, che dipende da x_i e da l_{el} grado di avanzamento lavoro elettrico.

In maniera molto semplice, l'energia interna elettrochimica du_x si può scrivere nel seguente modo:

$$du_x = \left(\frac{\partial e_i}{\partial x} \right) dx = Xdx$$

Con dx variazione del grado di avanzamento della reazione chimica. queste derivate parziali hanno un significato fisico e sono quantità che possono essere misurate.

Immaginiamo che questa variazione di energia interna elettrochimica viene dissipata o sottoforma di lavoro elettrico o sottoforma di irreversibilità (sorgente entropica di seconda specie):

$$du_x = -dl_{el} - Tds_{SII}$$

N.B.: il segno meno davanti al lavoro dl_{el} è dovuto all'analogia con il primo principio della termodinamica $dq - dl = du$.

Inoltre, per analogia, il termine Tds_{SII} gioca il ruolo del calore dq . Il suo segno meno è dovuto al fatto che nell'espressione $dq = Tds - Tds_s$, il termine di produzione entropica (come il calore) ha il segno meno.

Infatti, spesso il termine Tds_s è chiamato **calore dissipato non utilizzato a causa delle irreversibilità**.

Esempio

Consideriamo una fiamma che brucia combustibile \rightarrow cambia l'energia interna totale de_i del sistema.

Poiché si passa dai reagenti ai prodotti della combustione, c'è una variazione dell'energia interna elettrochimica du_x , oltre alla variazione di energia interna termodinamica du (poiché variano T, v, p).

In questo caso non si raccoglie lavoro elettrico ($dl_{el} = 0$) allora tutta la variazione di energia interna elettrochimica finisce nelle irreversibilità (Tds_{SII}).

Invece, in altri casi, parte dell'energia interna elettrochimica si può raccogliere anche nel lavoro elettrico.

In conclusione, la sorgente entropica di seconda specie è data da:

$$ds_{SII} = \frac{1}{T}(-du_x - dl_{el}) = -\frac{dl_{el}}{T} - \frac{Xdx}{T} \quad (\text{sistemi chiusi})$$

Osservazione:

Questo servirà quando dovremo calcolare il lavoro meccanico totale che viene scambiato da un sistema termodinamico che ha la possibilità di produrre lavoro elettrico e lavoro meccanico.

Ora possiamo fare lo stesso ragionamento per la variazione di entalpia totale dh_t , dovuto analogamente ad una variazione di entalpia termodinamica dh e ad una variazione di entalpia elettrochimica dh_x :

$$dh_t = dh + dh_x$$

Scriviamo l'entalpia elettrochimica dh_x nel seguente modo:

$$dh_x = \left(\frac{\partial h_t}{\partial x} \right) dx = X' dx$$

E di nuovo immaginiamo che questa variazione di entalpia elettrochimica può dar luogo a lavoro elettrico o ad una sorgente entropica di seconda specie:

$$dh_x = -dl_{el} - Tds_{SII}$$

In conclusione, la sorgente entropica di seconda specie è data da:

$$ds_{SII} = -\frac{dl_{el}}{T} - \frac{X' dx}{T} \quad (\text{sistemi aperti})$$

N.B.

- I ragionamenti fatti per l'energia interna du_t si usano nel caso di sistemi chiusi che non scambiano massa, in presenza di fenomeni elettrochimici.
- I ragionamenti fatti per l'entalpia dh_t si usano nel caso di fluido che scorre in un condotto in presenza di fenomeni elettrochimici.

Fine lezione 4.

Trasformazioni irreversibili: lavoro meccanico in presenza di sorgenti entropiche

Finora sappiamo che il lavoro meccanico per trasformazioni reversibili $dl = pdv$ vediamo come si modifica il lavoro meccanico scambiato tra sistema termodinamico ed esterno quando le trasformazioni non sono reversibili.

Sistemi chiusi

Per un sistema chiuso che compie trasformazioni cicliche, il lavoro meccanico scambiato è pari a:

$$dl_m = pdv$$

Ora vogliamo inserire anche le sorgenti entropiche.

Scriviamo il primo principio della termodinamica per sistemi chiusi:

$$dq - dl_t = du_t + de_c + de_p, \text{ con } dl_t = dl_m + dl_{el}$$

Dalla definizione operativa dell'energia interna totale, tramite il primo principio della termodinamica, scegliendo una trasformazione con $de_c = 0$ e $de_p = 0$ possiamo scrivere:

$$du_t = dq - dl_t;$$

Con $du_t = du + du_x$ (termine termodinamico e termine elettrochimico) e $dq = Tds - Tds_s$ dove nel ds_s ci sono le sorgenti entropiche di prima e di seconda specie, allora:

$$du + du_x = Tds - Tds_{sI} - Tds_{sII} - dl_m - dl_{el}$$

Con $du_x = -dl_{el} - Tds_{sII}$ e $du = Tds - pdv$ allora:

$$\cancel{Tds} - pdv - \cancel{dl_{el}} - \cancel{Tds_{sII}} = \cancel{Tds} - Tds_{sI} - \cancel{Tds_{sII}} - dl_m - \cancel{dl_{el}}$$

Da cui:

$$dl_m = pdv - Tds_{sI} \quad (\text{se REVERSIBILE } dl_m = pdv)$$

Ho generalizzato quanto sapevamo finora; il lavoro meccanico reale è diminuito della quantità Tds_{sI} che è il lavoro non utilizzato a causa delle irreversibilità di prima specie, cioè delle sorgenti entropiche di prima specie.

$dl_m = pdv$ è falsa quando ci sono le irreversibilità.

N.B.: le sorgenti entropiche di seconda specie non entrano in gioco nel lavoro meccanico.

Sistemi aperti

Scriviamo il primo principio della termodinamica per sistemi aperti; sistemi aperti con il differenziale dell'entalpia. Sto considerando la presenza di fenomeni elettrochimici.

$$dq - dl'_t = dh_t + de_c + de_p, \text{ con } dl'_t = dl'_m + dl_{el} \text{ ed è soltanto attraverso il contorno fisso;}$$

dalla definizione operativa di entalpia, tramite il primo principio scegliendo una trasformazione con $de_c = 0$ e $de_p = 0$ possiamo scrivere:

$$dh_t = dq - dl'_t, \text{ con } dh_t = dh + dh_x \text{ e } dq = Tds - Tds_s$$

$$dh + dh_x = Tds - Tds_{sI} - Tds_{sII} - dl'_m - dl_{el}$$

Con $dh = Tds + vdp$ e $dh_x = -dl_{el} - Tds_{sII}$ allora:

$$\cancel{Tds} + vdp - \cancel{dl_{el}} - \cancel{Tds_{sII}} = \cancel{Tds} - Tds_{sI} - \cancel{Tds_{sII}} - dl'_m - \cancel{dl_{el}}$$

Da cui:

$$dl'_m = -vdp - Tds_{sI} \quad (\text{se REVERSIBILE } dl'_m = -vdp)$$

Il lavoro meccanico reale è diminuito della quantità Tds_{SI} che è il lavoro non utilizzato a causa delle irreversibilità di prima specie, cioè delle sorgenti entropiche di prima specie.

Osservazione:

nel caso del sistema **aperto**, se le trasformazioni sono reversibili, il lavoro meccanico è:

$$dl'_m = -vdp$$

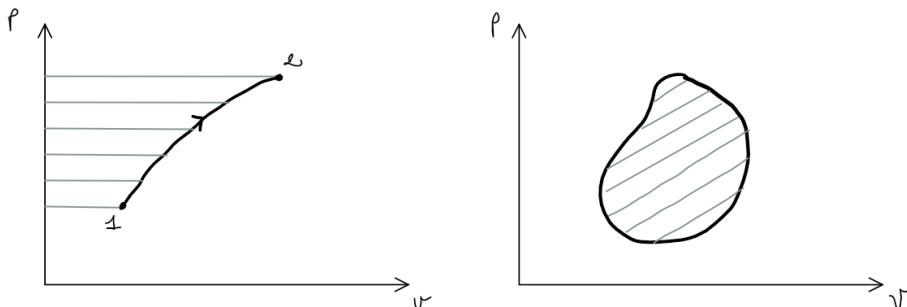
Affinché $dl'_m > 0$ sia positivo bisogna avere $dp < 0$ cioè $p_1 > p_2$ (per ottenere lavoro positivo il fluido si deve espandere), cioè la pressione deve diminuire, infatti scriviamo:

$$l'_m = - \int_1^2 vdp = -v_{medio}(p_2 - p_1) = v_{medio}(p_1 - p_2)$$

Con p_1 pressione di ingresso e p_2 pressione di uscita. Se si ha una compressione invece, il lavoro meccanico deve essere negativo.

N.B.: in un grafico pv poiché $dl'_m = -vdp$, il lavoro è l'area sottesa alla curva rispetto all'asse delle p !

Ovviamente se invece la trasformazione è ciclica, il lavoro è sempre l'area racchiusa dalla curva.

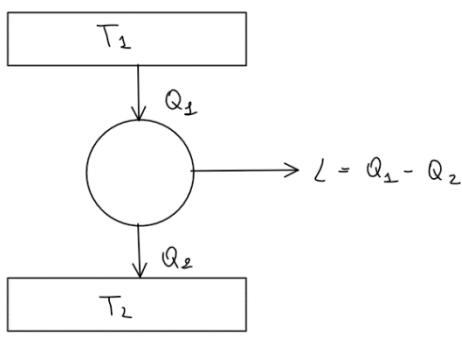


Ciclo motore (o ciclo diretto)

(sistema chiuso)

Consideriamo un ciclo motore intendendo per motore un sistema che produce lavoro positivo verso l'esterno, la rappresentazione più schematica di un ciclo motore è quella del ciclo di Watt, c'è una sorgente superiore che è rappresentata dalla temperatura della fiamma che scalda l'acqua, che cede calore Q_1 all'acqua. Poi il sistema termodinamico acqua cede il calore Q_2 alla temperatura T_2 . La macchina di Watt produceva un lavoro L che era il sollevamento dell'acqua pari alla somma dei calori scambiati.

Lo schema termodinamico del ciclo motore è esattamente lo stesso della macchina di Watt.



Se abbiamo un sistema chiuso, questo è l'unico ciclo possibile ed è l'unico che può produrre lavoro positivo.

T_1 temperatura della fiamma, quindi centinaia di gradi e T_2 temperatura dell'acqua di raffreddamento, quindi qualche grado.

Calcoliamo la **traccia termodinamica**, cioè l'inverso della disegualanza di Clausius:

$$\tau = - \oint \frac{dq}{T} = -\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2}$$

Poi calcoliamo il **rendimento termodinamico**:

$$\eta = \frac{\text{ciò che si vuole ottenere}}{\text{ciò che si spende}} \Rightarrow \eta = \frac{L}{Q_1}$$

Allora cerchiamo un'espressione che mette in relazione il rendimento con la traccia termodinamica:

$$\eta = \frac{L}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

$\frac{\tau}{Q_1} = -\frac{1}{T_1} + \frac{Q_2}{Q_1} \cdot \frac{1}{T_2} \Rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} + \frac{\tau}{Q_1} \cdot T_2$ da cui sostituendo $\frac{Q_2}{Q_1}$ nel rendimento otteniamo:

$$\eta = \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) - \frac{\tau T_2}{Q_1}$$

Questo viene definito **Rendimento del ciclomotore** (irreversibile).

Il primo termine è solo in funzione delle temperature, mentre il secondo termine contiene anche la traccia termodinamica, che nel caso di trasformazioni reversibili è nulla, mentre è positiva per le trasformazioni irreversibili. Il rendimento dei cicli reali irreversibili è minore del rendimento massimo.

Se la trasformazione è reversibile $\rightarrow \tau = 0$;

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Che è il rendimento massimo, cioè il **Rendimento di una macchina di Carnot**.

Le macchine termodinamiche non hanno come limite superiore 1 ma hanno un valore inferiore a 1.

Macchina di Carnot

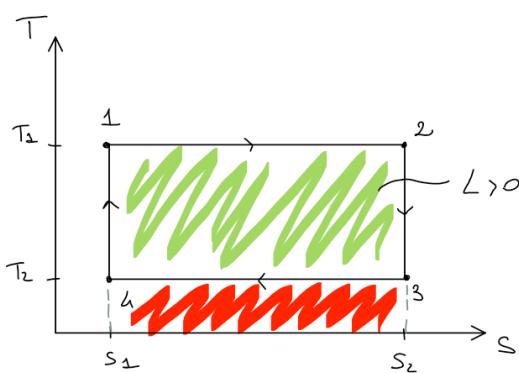
(sistema chiuso)

Ci sono due sole sorgenti termiche ($T_1 > T_2$), cioè la fiamma e l'acqua per condensare.

Inoltre, le trasformazioni devono essere reversibili, quindi gli scambi di calore devono avvenire senza differenza di temperatura, una per una singolarmente, e le condizioni per la reversibilità sono $p_1 = p_2$, $T_1 = T_2$ e assenza di attriti; inoltre, lo scambio di calore è reversibile quando $T_1 = T_2$.

Allora, durante gli scambi di calore, la sorgente ed il sistema devono avere la stessa temperatura (altrimenti compare la sorgente entropica $ds_{SI}(\Delta T)$)

Allora ISOTERME tra 1 e 2 e tra 3 e 4;



Durante la trasformazione isoterma 1-2, il calore scambiato Q_1 è l'area sottesa all'isoterma (in verde). Il sistema assorbe calore.

Durante la trasformazione isoterma 3-4 il calore scambiato Q_2 è l'area sottesa all'isoterma (in rosso). Il sistema cede calore.

Poi per passare da 2 a 3, poiché la trasformazione deve essere reversibile le sorgenti sono solo due, in questo passaggio non ci deve essere scambio di calore $dq = 0$, cioè la trasformazione deve essere adiabatica.

Allora:

$$ds = \frac{dq}{T} + ds_s \Rightarrow ds = 0 \text{ (reversibile allora } ds_s = 0 \text{)} \Rightarrow \text{ISOENTROPICHE tra 2 e 3 e tra 4 e 1.}$$

Adiabatica reversibile = isoentropica.

Allora il diagramma del ciclo reversibile di Carnot nel piano Ts è un rettangolo con due isoterme e due isoentropiche.

Osservazione:

allora il ciclo di Carnot è solo un caso particolare dei cicli motori:

$$\eta = \eta_c - f(\tau)$$

Il ciclo di Carnot è un ciclo motore che lavora tra 2 sorgenti in modo reversibile.

È il ciclo a cui dovremmo tendere per ottenere il massimo rendimento!

(cioè dobbiamo cercare di diminuire le irreversibilità presenti)

Nota bene;

il rendimento di un ciclo termomeccanico massimo NON è 1!

Infatti, $\eta = \frac{L}{Q_1}$ e il lavoro e il calore non sono quantità equivalenti poiché per il secondo principio della termodinamica non sono invertibili.

Allora:

$$\eta_{max} = \eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{L}{Q_1}$$

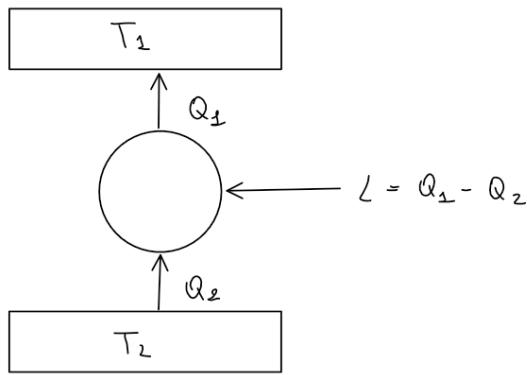
Allora per aumentare il lavoro ottenuto, cioè il rendimento, possiamo giocare con le temperature:

- $\eta_c \uparrow$ se $T_2 \downarrow \rightarrow$ poiché la macchina di Watt aveva come temperatura T_2 la temperatura tirata fuori dalle miniere ($4^\circ C$), allora la massima diminuzione di T_2 è la temperatura ambiente:
 $T_{2,min} = T_a$.
La diminuzione della sorgente inferiore ha un limite che è la temperatura ambiente.
- $\eta_c \uparrow$ se $T_1 \uparrow \rightarrow$ poiché T_1 era la temperatura della fiamma, allora il massimo aumento di T_1 è rappresentato dal limite metallurgico dei metalli del braciere e della cisterna.
 $T_{1,max} \approx 2000^\circ C$

Ciclo inverso

(sistema chiuso)

Il ciclo inverso può essere utilizzato in due modi:



- Ciclo frigorifero: se lo scopo è sottrarre il calore Q_2 alla sorgente inferiore;
- Pompa di calore; se lo scopo è cedere il calore Q_1 alla sorgente superiore.

Calcoliamo la **traccia termodinamica**:

$$\tau = - \oint \frac{dq}{T} = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2}$$

A seconda dell'utilizzo, il rendimento termodinamico sarà diverso;

Ciclo frigorifero

Rendimento:

$$\eta_F = \frac{Q_2}{L}$$

Cerchiamo una relazione tra il rendimento e la traccia termodinamica;

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{L} &= \frac{Q_1}{T_1 L} - \frac{Q_2}{T_2 L} = \frac{L + Q_2}{T_1 L} - \frac{Q_2}{T_2 L} = \frac{Q_2}{L} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) + \frac{1}{T_1} = \frac{Q_2}{L} \cdot \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} + \frac{1}{T_1} \\ \eta_F &= \frac{T_2}{T_1 - T_2} - \frac{\tau}{L} \cdot \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \end{aligned}$$

Questo viene definito **Rendimento del ciclo frigorifero**

Di nuovo abbiamo trovato che il primo termine è solo in funzione delle temperature mentre il secondo termine contiene anche la traccia termodinamica.

Se la trasformazione è reversibile $\rightarrow \tau = 0$, allora $\eta_F = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$ che è il rendimento massimo.

Anche il diagramma del ciclo frigorifero nel piano Ts è un rettangolo, le trasformazioni devono essere reversibili e quindi sono due isoterme e due isoentropiche che devono essere adiabatiche e reversibili, però è percorso in verso opposto.

Osservazioni:

scriviamo il rendimento come segue e vediamo come aumentarlo.

$$\eta_F = \frac{1}{\frac{T_1}{T_2} - 1}$$

- $\eta_F \uparrow$ se $T_1 \downarrow$
- $\eta_F \uparrow$ se $T_2 \uparrow$

Si deve restringere il rettangolo poiché $L < 0$.

Pompa di calore

Rendimento:

$$\eta_{pc} = \frac{Q_1}{L}$$

Cerchiamo una relazione tra il rendimento e la traccia termodinamica;

$$\frac{\tau}{L} = \frac{Q_1}{T_1 L} - \frac{Q_2}{T_2 L} = \frac{Q_1}{T_1 L} - \frac{Q_1 - L}{T_2 L} = \frac{Q_1}{L} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) + \frac{1}{T_2} = \frac{Q_1}{L} \cdot \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} + \frac{1}{T_2}$$

$$\eta_{pc} = \frac{Q_1}{L} = -\frac{1}{T_2} \cdot \frac{T_1 \bar{\gamma}_2'}{T_2 - T_1} + \frac{1}{L} \cdot \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1}$$

Allora:

$$\eta_{pc} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} - \frac{\tau}{L} \cdot \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2}$$

Questo viene definito **Rendimento della pompa di calore**

Di nuovo abbiamo trovato che il primo termine è solo in funzione della temperatura mentre il secondo termine contiene anche la traccia termodinamica.

Se la trasformazione è reversibile $\rightarrow \tau = 0$, allora $\eta_{pc} = \frac{T_1}{T_2 - T_1}$ che è il rendimento massimo.

Il diagramma della pompa di calore nel piano Ts è lo stesso rettangolo del ciclo frigorifero.

Di conseguenza, anche il modo di massimizzare il rendimento è lo stesso.

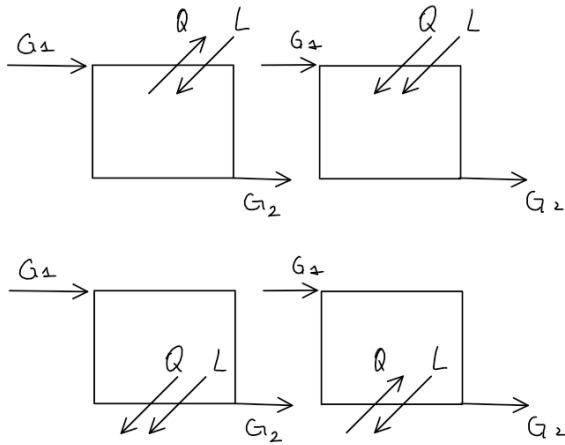
Conclusione;

I sistemi chiusi possono esistere solo in due forme:

- Macchina di Watt per produrre lavoro;
- Ciclo inverso per produrre o assorbire calore.

Sistemi aperti

Consideriamo un generico contenitore aperto con portata di ingresso G_1 e portata di uscita G_2 in cui gli scambi di lavoro e calore possono essere in un verso o nell'altro.



Il primo schema cede calore all'esterno e l'esterno fa lavoro sul sistema. Immaginiamo che ci siano scambi di calore e di lavoro entranti e uscenti, concordi o discordi.

Il secondo presenta sia l'assorbimento di calore che di lavoro.

Questo può avvenire sia in presenza che in assenza di reazioni chimiche.

Invece nel sistema chiuso non potevano esserci reazioni chimiche, altrimenti il sistema avrebbe potuto fare un solo ciclo e alla fine al posto dei reagenti conterrà solo i prodotti della combustione, poiché non ci sono scambi di massa con l'esterno.

Esempi:

- Motore a combustione termica: è il 3° caso in presenza di reazioni chimiche, dove la portata di ingresso è la corrente di aria e miscela entrante, la portata di uscita è la corrente dei prodotti della combustione; la reazione chimica è esotermica, quindi cede calore all'esterno oltre a produrre lavoro.
- Mulino: è il 3° caso senza reazioni chimiche.

Se c'è anche lavoro elettrico, possiamo avere la rappresentazione di tutti i motori reali, che sono tutti sistemi aperti (invece i sistemi chiusi sono una idealizzazione).

Espansore

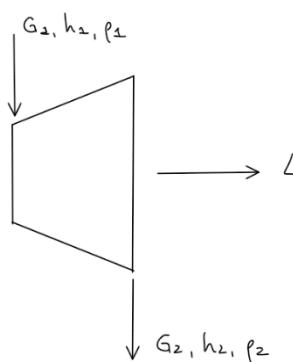
Sistema aperto per produrre lavoro verso l'esterno; è il primo sistema aperto che studiamo, il fluido si espande, si diminuisce la pressione e quindi si produce lavoro positivo.

ad esempio, motore aereo: a sx entra l'aria che viene compressa da una serie di pale, poi dall'ala arriva il combustibile che fa avvenire una reazione chimica; poi c'è un'altra serie di pale che espande l'aria e butta fuori i prodotti di reazione; poi per il terzo principio della dinamica di azione e reazione quest'area spinge l'aereo in avanti.

Nel **compressore** il lavoro viene dall'esterno e fa girare le pale per comprimere il fluido.

L'**espansore** produce lavoro positivo verso l'esterno.

Lo schema termodinamico è il seguente: **Espansore** (turbina)



Si rappresenta con un trapezio ed entra G_1 nella sezione più piccola e si fa uscire corrente G_2 nella sezione più grande;

Applichiamo:

- Principio di conservazione della massa in regime stazionario: $G_1 = G_2$
- Principio di conservazione dell'energia (primo principio della termodinamica):

$$q - l_f = \Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p$$

Studiamo il caso limite in cui riusciamo ad annullare il calore perso verso l'esterno dalla reazione esotermica quindi $q = 0$.

Inoltre, scegliamo il sistema in modo tale da non avere consistenti variazioni di energia cinetica $\Delta e_c = 0$ e la variazione di energia potenziale è nulla se l'espansione è orizzontale $\Delta e_p = 0$.

Allora:

$$l_f = h_1 - h_2 > 0$$

Un espansore che produce lavoro positivo ha un fluido che entra con un'entalpia maggiore ed esce con un'entalpia minore, e la differenza di entalpia corrisponde al lavoro che viene prodotto.

Facciamo qualche considerazione fisica;

Potenza meccanica:

$$P = l_f \cdot G_1 = G(h_1 - h_2) > 0 \quad (G_1 = G_2 = G)$$

Il comportamento reale dell'espansore è tale da diminuire il lavoro l_f positivo che si ottiene in condizioni ideali, nel caso ideale l_f è il massimo possibile, mentre nella realtà è inferiore. Le trasformazioni sono irreversibili, essendo l'espansore reale;

Allora si definisce il **Rendimento dell'espansore**:

$$\rho_e = \frac{l_{reale}}{l_{ideale}} = \frac{h_1 - h_2}{(h_1 - h_2)_s}$$

Al denominatore abbiamo la trasformazione isoentropica.

N.B.: poiché il rendimento è il rapporto tra due quantità uguali, ha come limite superiore 1! E questo si ha quando il lavoro reale è proprio pari al lavoro ideale, in condizioni di reversibilità.

Nel caso ideale, poiché abbiamo supposto $q = 0$ per una trasformazione adiabatica l'idealità è che non ci siano cause di irreversibilità, allora la trasformazione adiabatica è reversibile, la trasformazione isoentropica.

Quindi $l_{ideale} = \Delta h_{isoentropica}$

Invece, nella realtà ci sono le cause di irreversibilità e quindi $(h_2)_r > (h_1)_s$

Allora $(h_1 - h_2) < (h_1 - h_2)_s$

Allora:

$$\rho_e \leq 1 \quad \begin{cases} = 1 \text{ per le trasformazioni reversibili} \\ < 1 \text{ per le trasformazioni irreversibili reali} \end{cases}$$

Osservazione:

ovviamente $p_1 > p_2$ poiché per produrre lavoro positivo il gas si deve espandere, cioè $(p_2 - p_1) < 0$.

Il rendimento dell'espansore si può scrivere sfruttando la potenza meccanica:

$$\rho_e = \frac{P_{reale}}{G_{reale}} \cdot \frac{G_{ideale}}{P_{ideale}} \leq 1$$

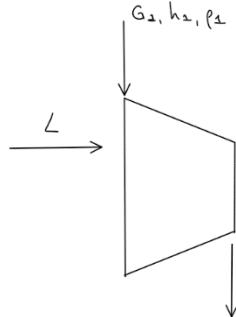
(reale irreversibile, ideale reversibile)

Poiché ρ_e deve essere sempre ≤ 1 se consideriamo due macchine di cui una funziona in maniera reale e una in maniera ideale, possiamo fare il confronto tra le due macchine o prendendo la stessa portata o prendendo la stessa potenza:

- Se hanno la stessa potenza $\rightarrow G_i \leq G_r$: cioè se vogliamo produrre la stessa potenza meccanica, la portata di fluido reale da immettere nella macchina reale deve essere maggiore della portata ideale da immettere nella macchina ideale. Le irreversibilità giocano sempre a sfavore.
- Se hanno la stessa portata $\rightarrow P_r \leq P_i$: cioè se immettiamo la stessa portata, la potenza reale meccanica che si ottiene dalla macchina reale è minore della potenza ideale che si ottiene dalla macchina ideale.

Compressore

Lo schema termico è il seguente:



Valgono le stesse relazioni dell'espansore, ma in questo caso il lavoro è negativo:

$$l_f = h_1 - h_2 < 0,$$

poiché il fluido entra con un'entalpia minore ed esce un'entalpia maggiore, cioè deve essere fornito lavoro al fluido per aumentare la sua entalpia, che deriva dall'aumento di pressione ($p_2 > p_1$).

Analogamente, per la potenza meccanica scriviamo:

$$P = l_f \cdot G_1 = G(h_1 - h_2) < 0$$

Definiamo il rendimento di compressione, che però è il reciproco del rendimento dell'espansore, poiché ora il comportamento reale mi farebbe spendere più lavoro poiché le irreversibilità giocano sempre a sfavore:

$$\rho_c = \frac{l_{ideale}}{l_{reale}} = \frac{(h_1 - h_2)_s}{h_1 - h_2} \leq 1$$

N.B.: il limite superiore è ancora 1.

Analogamente possiamo riscrivere il rendimento del compressore sfruttando la potenza meccanica:

$$\rho_c = \frac{P_{id}}{G_{id}} \cdot \frac{G_{re}}{P_{re}} \leq 1$$

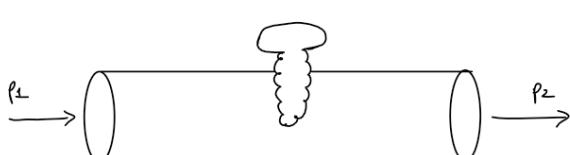
Allora concludiamo che:

- Se le potenze sono uguali $\rightarrow G_{re} \leq G_{id}$: cioè se forniamo la stessa potenza, riusciamo a comprimere una portata inferiore di fluido con la macchina reale rispetto alla macchina ideale;
- Se le portate sono uguali $\rightarrow P_{id} \leq P_{re}$: cioè per ottenere la compressione della stessa quantità di fluido, dobbiamo fornire maggiore potenza nel caso reale rispetto al caso ideale.

Valvola di laminazione (rubinetto)

Immaginiamo un tubo con un rubinetto che lo chiude.

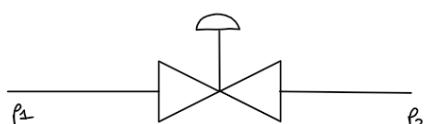
Se il rubinetto è chiuso non passa fluido da sx verso dx; invece, man mano che si apre il rubinetto ci saranno delle cause di irreversibilità legate alla differenza di pressione tra p_1 e p_2 che aumentano e aumenta anche la quantità di fluido che passa nel tubo. Quelle a farfalla sono le più famose.



La rappresentazione della valvola di laminazione è quella in figura.

Applichiamo il primo principio della termodinamica in termini finiti:

$$q - l_f = \Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p$$



Nella valvola non abbiamo scambi di calore ($q = 0$ cioè $T_1 = T_2$), non si ricava lavoro $l_f = 0$ perché non c'è un organo meccanico che scambia né in un verso né nell'altro; inoltre la variazione di energia potenziale è nulla

perché la valvola o è orizzontale o è molto corta; infine, la sezione del condotto è la stessa in ingresso e in uscita, la variazione di energia cinetica è nulla.

Allora $\rightarrow \Delta h = 0 \rightarrow h_1 = h_2$

Cioè l'entalpia in ingresso è uguale a quella in uscita.

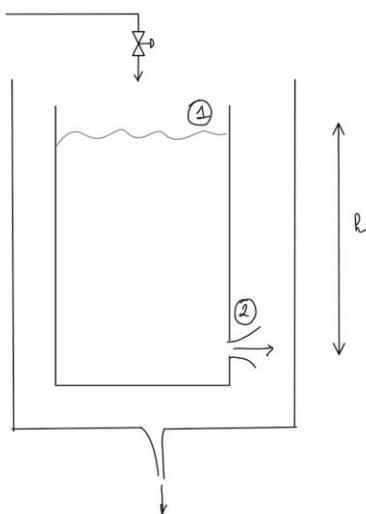
Però, questa trasformazione è una tipica trasformazione irreversibile poiché c'è un salto finito di pressione Δp .

Di conseguenza, NON si può parlare di una trasformazione isoentalpica poiché questa è reversibile.

Allora la trasformazione della valvola di laminazione è semplicemente una trasformazione irreversibile in cui però l'entalpia finale è pari all'entalpia iniziale.

Tubo di efflusso

Riguarda la conversione dell'entalpia di un fluido in energia cinetica, cioè è l'esperienza di Torricelli, secondo cui la velocità che un fluido acquisisce quando esce da un tubo alto h è pari alla velocità che il fluido acquisisce se casasse da un'altezza uguale ad h .



Consideriamo un tubo con una valvola di laminazione che è lasciata sempre aperta, quindi il fluido entra nel contenitore, dove dentro c'è un troppo-pieno di una certa altezza;

così in continuazione è garantita la fuoriuscita di liquido dalla sezione inferiore e inoltre il fluido nel contenitore è sempre a quota h .

Per l'esperienza di Torricelli:

$$\frac{w^2}{2g} = h \rightarrow w = \sqrt{2gh}$$

1 → sezione di ingresso

2 → sezione di uscita

Applichiamo il primo principio della termodinamica:

$$q - l_f = \Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p$$

Dove il sistema termodinamico a cui facciamo riferimento è quello interno al troppo-pieno con le due sezioni di ingresso (1) e di uscita (2).

Il calore scambiato dal sistema è trascurabile ($q = 0$) come anche il lavoro:

$$\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p = 0$$

$$h_2 - h_1 + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) = 0$$

Se supponiamo che lo stato termodinamico del liquido nelle sezioni 1 e 2 è lo stesso, allora $h_1 = h_2$;

inoltre, la velocità nella sezione 1 è nulla poiché è ferma: $w_1 = 0$

$$\text{allora } w_2^2 = 2g(z_1 - z_2) = 2gh$$

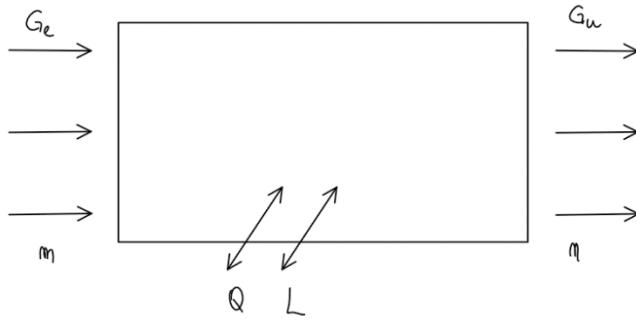
$$w_2 = \sqrt{(2gh)}$$

Abbiamo ritrovato il teorema di Torricelli.

Generalizzazione dei sistemi aperti

Chiaramente i sistemi aperti non hanno una sola corrente entrante e una sola corrente uscente.

Allora consideriamo un recipiente con m correnti entranti G_e ed n correnti uscenti G_u che può scambiare calore e lavoro in tutti i versi. In primo luogo, studiamo questo sistema aperto in regime stazionario.



Regime stazionario;

- Principio di conservazione della portata in massa. La sommatoria delle portate delle correnti entranti è pari alla sommatoria delle portate delle correnti uscenti perché la massa di fluido nel rettangolo deve rimanere lo stesso:

$$\sum_{e=1}^m G_e = \sum_{u=1}^n G_u$$

- Primo principio della termodinamica per sistemi aperti.

Nel caso di una sola corrente di ingresso e una sola corrente di uscita avevamo:

$$q - l_f = h_2 - h_1 + e_{c2} - e_{c1} + e_{p2} - e_{p1}$$

Moltiplichiamo per $G = G_1 = G_2$ e otteniamo:

$$\dot{Q} - P_f = G_2 h_2 - G_1 h_1 + G_2(e_{c2} + e_{p2}) - G_1(e_{c1} + e_{p1}) = G_2(h_2 + e_{c2} + e_{p2}) - G_1(h_1 + e_{c1} + e_{p1})$$

I bilanci si fanno sulle grandezze estensive.

\dot{Q} → potenza termica scambiata con l'esterno. L'equazione del primo principio la scrivo in termini di potenza termica.

Generalizziamo a più correnti entranti e più correnti uscenti e vediamo che il calore e il lavoro non cambiano perché sono la somma di tutti i calori e i lavori scambiati attraverso il contorno fisso; mentre il termine che riguarda la corrente entrante [uscente] diventa la somma di tutte le correnti entranti [uscenti].

Stiamo ragionando induttivamente, dal particolare al generale.

$$\dot{Q} - P_f = \sum_{u=1}^n G_u(h_u + e_{cu} + e_{pu}) - \sum_{e=1}^m G_e(h_e + e_{ce} + e_{pe})$$

Estendiamolo anche al regime non stazionario;

Regime non stazionario

Per generalizzare dal caso stazionario al caso non stazionario, usiamo il metodo induttivo, anche se vedremo che per la generalizzazione del primo principio non sarà sufficiente.

- Principio di non conservazione della portata in massa:

nel caso del regime transitorio la portata non si conserva, ma c'è una variazione della massa del sistema:

$$\sum_e G_e - \sum_u G_u = \frac{dM}{dt} = \frac{M_f - M_i}{\Delta t}$$

Se il sistema è a regime stazionario quel rapporto è uguale a zero;

Se $\sum_e G_e > \sum_u G_u$, $\frac{dM}{dt} > 0$ e la massa cresce con il tempo;

se $\sum_e G_e < \sum_u G_u$, $\frac{dM}{dt} < 0$ e la massa diminuisce con il tempo;

- Primo principio della termodinamica per sistemi aperti

Studiamo ciò che avviene tra un istante e il successivo, quindi moltiplichiamo tutta l'equazione per Δt , cioè per l'intervallo di tempo che vogliamo studiare.

Moltiplico per Δt perché considero quello che avviene tra l'istante t e $t + \Delta t$

$$Q - L_f = \sum_u G_u \Delta t (h_u + e_{cu} + e_{pu}) - \sum_e G_e \Delta t (h_e + e_{ce} + e_{pe}) +$$

Non è sufficiente!!

La quantità di massa del sistema cambia, quindi cambia l'energia potenziale poiché cambia la quota del baricentro; inoltre cambia anche l'energia cinetica perché cambia la velocità del fluido nei due livelli differenti; infine, cambia anche l'entalpia poiché la temperatura e la pressione possono essere diverse.

Allora dobbiamo aggiungere un termine con l'energia totale (l'energia interna termodinamica perché è variata l'energia potenziale e l'energia cinetica) moltiplicata per la massa tra istante finale e iniziale:

$$+ M_f e_{tf} - M_i e_{ti}$$

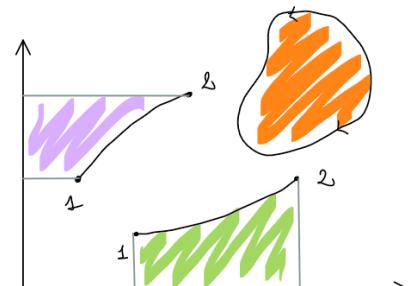
Così abbiamo caratterizzato a pieno lo stato non stazionario.

Vediamo come si rappresentano le trasformazioni termodinamiche sui vari diagrammi termodinamici.

Rappresentazioni termodinamiche sui diagrammi termodinamici

- Diagramma termodinamico pV ;

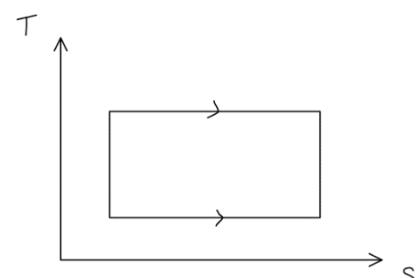
in questo diagramma abbiamo rappresentato il lavoro termodinamico di un sistema chiuso (verde), lavoro di un sistema aperto (viola) e il lavoro di una trasformazione ciclica per i sistemi aperti e chiusi (non c'è differenza tra sistema chiuso e aperto perché è sempre lavoro all'interno della trasformazione) (arancione).



- Diagramma termodinamico Ts ;

in esso abbiamo rappresentato il ciclo di Carnot (ciclo motore) in senso orario e il ciclo inverso reversibile in senso antiorario.

Quindi abbiamo capito che le isoterme sono orizzontali e le isoentropiche sono verticali.



Trasformazioni ISOBARE nel diagramma Ts :

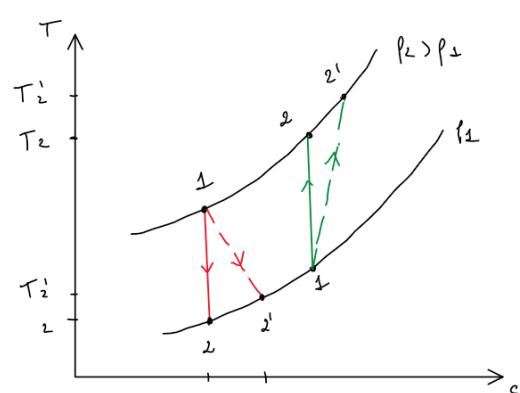
una volta trovate queste funzioni possono essere trattate tutte come funzioni matematiche ma hanno un significato fisico;

facciamo il differenziale esatto (equazione matematica) di dh :

$$dh(p, T) = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T dp$$

Inoltre, abbiamo trovato che $dh = Tds + vdp$ (equazione fisica)

Per le isobare $dp = 0$, quindi:



$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT = c_p dT = T ds$$

Dove $\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p = c_p$ **calore specifico isobaro** (misurabile con sufficiente approssimazione), calore specifico a pressione costante.

Le derivate parziali sono quantità fisiche che si misurano.

$$\text{Allora } \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p = \frac{T}{c_p} > 0 \text{ poiché } T > 0 \text{ e } c_p > 0$$

Allora abbiamo trovato la pendenza di una curva isobara nel piano Ts (pendenza positiva).

Osservazione:

se $c_p \approx \text{cost}$ → la pendenza cresce con la temperatura T allora la curva isobara ha la **concavità verso l'alto**, cioè è una **curva crescente**. A temperatura più elevata la pendenza è più elevata. La curva è un'esponenziale. In seguito, vedremo che aumentando la pressione del fluido, anche la temperatura aumenta: $\uparrow p \Rightarrow \uparrow T$; allora l'isobara a pressione $p_2 > p_1$ sta sopra. Questa dimostrazione la vedremo più avanti.

Ora possiamo rappresentare nel diagramma l'espansore in rosso che se compie una trasformazione reversibile si sposta in verticale perché $ds = 0$, reversibile isoentropica. L'espansore partiva da una pressione $p_2 > p_1$, espande. Se invece la trasformazione è irreversibile allora sarà la linea tratteggiata, e quindi il punto finale sarà 2' che ha un Δs_s e ha anche una temperatura superiore rispetto a 2.

Se ho il compressore parto dal punto 1 inferiore, se comprimo in maniera reversibile vado lungo l'isoentropica in 2, se ho un'irreversibile il punto finale è 2'.

Espansore (in rosso nel grafico sopra)

Con le due isobare nel piano Ts con $p_2 > p_1$ possiamo rappresentare la trasformazione in un espansore: parte da una temperatura generica a pressione maggiore e si espande, riducendo la sua pressione, producendo lavoro positivo e diminuendo la sua entalpia, la trasformazione può essere senza irreversibilità, cioè isoentropica, oppure con irreversibilità che producono una maggiore entropia.

(notiamo che $T'_2 > T_2$ poiché nel caso irreversibile si ottiene meno lavoro, che quindi viene dissipato sottoforma di calore).

Compressore (in verde nel grafico sopra)

Trasformazione di un compressore:

parte da una temperatura generica a pressione minore e si comprime, aumentando la sua pressione, acquistando lavoro e aumentando la sua entalpia;

la trasformazione senza reversibilità, cioè isoentropica, è possibile, ma è possibile anche la trasformazione irreversibile reale che produce una maggiore entropia.

(di nuovo notiamo che $T'_2 > T_2$ poiché nel caso irreversibile per comprimere una stessa quantità di fluido si deve dare maggiore lavoro, che si dissipà come calore perso per le irreversibilità).

Diagramma termodinamico *hs*

- Trasformazioni ISOBARE nel diagramma *hs*

Facciamo il differenziale esatto di dh :

$$dh(s, p) = \left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)_p ds + \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_s dp;$$

Inoltre, abbiamo trovato che $dh = Tds + vdp$

per le isobare $dp = 0$, quindi:

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)_p ds = Tds \Rightarrow \left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)_p = T > 0 \text{ poiché } T > 0$$

Allora abbiamo trovato la pendenza di un'isobara nel piano *hs* (la pendenza dell'isobara è la temperatura del sistema)

Osservazione:

se $c_p \approx \text{cost}$ la pendenza cresce con la temperatura $T \rightarrow$ allora la curva isobara ha una **concavità verso l'alto**, cioè è una **curva crescente**.

In seguito, vedremo che, aumentando la pressione del fluido, anche la temperatura aumenta: $\uparrow p \Rightarrow \uparrow T$; allora, l'isobara a pressione $p_2 > p_1$ sta sopra.

Espansore

Trasformazione di un espansore:

parte da un'entalpia maggiore e si espande riducendo l'entalpia producendo lavoro positivo;
può seguire una trasformazione reversibile isoentropica, oppure una trasformazione irreversibile che produce un'entropia maggiore.

(notiamo che $h'_2 > h_2$ poiché nel caso irreversibile si ottiene una maggiore entalpia).

Compressore

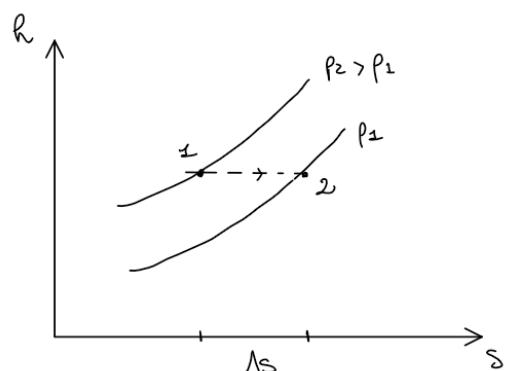
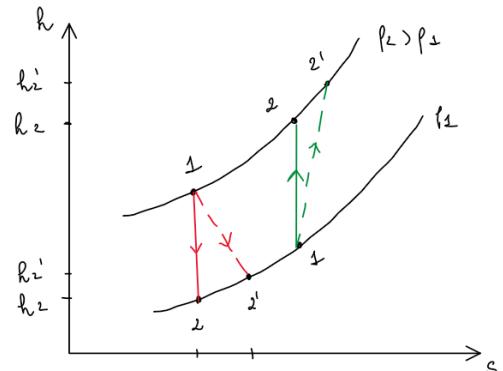
Trasformazione di un compressore:

parte da un'entalpia minore e si comprime aumentando l'entalpia, acquisendo lavoro;
può seguire una trasformazione reversibile isoentropica, oppure una trasformazione irreversibile che produce entropia maggiore.
(notiamo che $h'_2 > h_2$ poiché nel caso irreversibile si ottiene una maggiore entalpia).

Valvola di laminazione

Nella valvola di laminazione l'entalpia in ingresso è uguale a quella di uscita.

Nel diagramma *hs* si può rappresentare anche la trasformazione della valvola di laminazione;
si entra con una pressione maggiore e si segue una trasformazione irreversibile in cui l'entalpia finale è pari all'entalpia iniziale.



Fine capitolo 6.

Gas perfetti

(Capitolo 7 del libro, proprietà delle sostanze)

Obbediscono all'equazione di stato dei gas perfetti, rappresentata dalla seguente legge:

$$pV = nR_u T;$$

compensa tutte le altre leggi che erano state studiate con il sistema cilindro-pistone (+ la legge di Avogadro).

Si può anche scrivere usando il volume molare, cioè il volume specifico molare, semplicemente dividendo per n , numero di moli:

$$p\tilde{v} = R_u T$$

Oppure sostituendo l'espressione del numero di moli come il rapporto tra la massa e il peso molecolare, si ottiene:

$$pV = \frac{m}{p.n.} \cdot R_u T \Rightarrow p\tilde{v} = \frac{R_u}{p.n.} T \Rightarrow p\tilde{v} = RT$$

con $R = \frac{R_u}{p.n.}$; non è più costante universale ma è specifica del gas.

Con \tilde{v} volume specifico per unità di massa. $p. n.$ → peso molecolare

Proprietà delle sostanze

Studiamo dei parametri fisici delle sostanze fisiche che utilizziamo nelle trasformazioni termodinamiche.

La cosa straordinaria della termodinamica è che, note le funzioni termodinamiche generiche, possiamo procedere come se fossero espressioni matematiche (differenziali esatti, derivate parziali, ...); inoltre, tutto quello che otteniamo ha un significato fisico ed è rappresentato da grandezze misurabili.

Immaginiamo di conoscere una funzione di stato di una sostanza, ad esempio il volume specifico in funzione della temperatura e della pressione:

$$\tilde{v} = \tilde{v}(T, p)$$

Vogliamo valutare le variazioni del volume specifico di questa sostanza al variare della temperatura e della pressione → valutiamo $d\tilde{v}$ in funzione di dT e dp .

Scriviamo il differenziale esatto della funzione \tilde{v} , perché questa è una funzione di stato;

$$d\tilde{v} = \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial p}\right)_T dp$$

In termini finiti $\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial T}\right)_p$ rappresenta una quantità misurabile, facendo compiere ad una sostanza una trasformazione a pressione costante, fornendo una certa quantità di calore, quindi ottenendo una certa variazione di temperatura e poi misurando la variazione del volume specifico della sostanza.

$$\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial T}\right)_p \frac{1}{\tilde{v}} = \beta$$

Dove definiamo β **coefficiente di dilatazione isobara**, in funzione della pressione e della temperatura per ogni sostanza.

Analogamente, in termini finiti $\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T$ rappresenta una quantità misurabile. Facendo compiere ad una sostanza una trasformazione a temperatura costante, fornendo una variazione di pressione e misurando le corrispondenti variazioni di volume specifico della sostanza.

$$\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T \left(-\frac{1}{v}\right) = \gamma$$

Dove γ è il **coefficiente di compressione isoterma**.

C'è il meno nella relazione perché se aumentiamo la pressione il volume diminuisce.

In definitiva, otteniamo l'equazione differenziale del volume specifico di una sostanza in funzione della temperatura e della pressione:

$$dv = \beta v dT - \gamma v dp;$$

quindi conoscendo dT e dp forniti alla sostanza, possiamo calcolare il dv .

Se le variazioni del volume specifico avvengono a sezione costante, dividiamo per la sezione ed otteniamo:

$$\frac{1}{x} \left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_p = \alpha$$

Dove α è il **coefficiente di dilatazione lineare**.

Calore specifico

Definiamo calore specifico generico c :

$$c = \frac{dq}{dT};$$

poiché dq non è un differenziale esatto (poiché il calore non è una grandezza funzione di stato) mentre dT è un differenziale esatto (poiché la temperatura è una grandezza funzione di stato), allora il calore specifico NON è una grandezza funzione di stato e quindi dipende dalla trasformazione.

Siccome q non è una grandezza funzione di stato, questo non è un differenziale esatto, variazione piccola di calore e variazione piccola di temperatura.

Il calore specifico cambia a seconda della trasformazione. Se la trasformazione è un'isoterma e c'è uno scambio di calore, $dT = 0$, $dQ \neq 0$ allora c può avere tutti i valori da + infinito a meno infinito.

Infatti, se consideriamo diverse trasformazioni otteniamo diversi risultati:

- Se la trasformazione è adiabatica, $dq = 0 \rightarrow c = 0$
- Se la trasformazione è isoterma $dq \neq 0$ ma $dT = 0 \rightarrow c = \pm\infty$

Vogliamo esprimere il calore specifico considerando sia i sistemi chiusi che i sistemi aperti.

Sistemi chiusi

Primo principio della termodinamica per sistemi chiusi:

$$dq - dl = du + de_c + de_p$$

Poiché du è una grandezza funzione di stato, du è indipendente dalla trasformazione, quindi ne scegliamo una per cui $de_c = 0$ e $de_p = 0$;

inoltre, se supponiamo che la trasformazione sia reversibile, $dl = pdv$ per sistemi chiusi.

Allora otteniamo:

$$du = dq - pdv \rightarrow dq = du + pdv$$

Sostituiamo nell'espressione del calore specifico:

$$c = \frac{dq}{dT} = \frac{du}{dT} + p \frac{dv}{dT}$$

Supponiamo che u sia in funzione di T e di v e ne facciamo il differenziale esatto:

$$u = u(T, v) \Rightarrow du = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T dv;$$

dividiamo per dT :

$$\frac{du}{dT} = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T \frac{dv}{dT}$$

Sostituiamo nell'espressione del calore specifico:

$$c = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v + \left[p + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T\right] \frac{dv}{dT}$$

Moltiplichiamo per dT :

$$dq = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT + \left[p + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T\right] dv$$

Se la trasformazione è ISOCORA, cioè se il volume è costante, $\rightarrow dv = 0$, allora:

$$c = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v \rightarrow c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v : \text{calore specifico}$$

Definizione operativa di c_v :

se $dv = 0 \rightarrow dq = c_v dT$

allora:

$$c_v = \frac{dq}{dT}|_v = \frac{q}{\Delta T}|_v$$

Passiamo da quantità infinitesime a quantità finite (anche se piccole) per poter misurare.

Basta mettere un gas in un contenitore, fornire calore q che produce ΔT , nel contenitore a pareti rigide e si calcola c_v .

Se la trasformazione è ISOTERMA, cioè a temperatura costante, $\rightarrow dT = 0$, allora:

$$dq = \left[p + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T\right] dv = c_d dv,$$

$$\text{con } c_d = p + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T : \text{calore specifico di dilatazione isoterma}$$

definizione operativa di c_d :

se $dT = 0 \rightarrow dq = c_d dv$

$$\text{allora; } c_d = \frac{dq}{dv}|_T$$

cioè mettiamo un gas in un recipiente, forniamo calore q e misuriamo una variazione di volume Δv , purché la temperatura rimanga costante (difficile).

Allora non è facilmente calcolabile (è facile solo nei passaggi di stato)

In definitiva, abbiamo trovato le seguenti espressioni per il **calore** e il **calore specifico** per i **sistemi chiusi**:

$$dq = c_v dT + c_d dv \quad \text{e} \quad c = c_v + c_d \frac{dv}{dT}$$

Sistemi aperti

Partiamo dal primo principio della termodinamica per i sistemi aperti;

$$dq - dl_f = dh + de_c + de_p \rightarrow dh = dq - dl_f - de_c - de_p$$

Poiché dh è una grandezza funzione di stato, dh è indipendente dalla trasformazione, quindi ne sceglieremo una per cui $de_c = 0$ e $de_p = 0$; inoltre se supponiamo che la trasformazione sia reversibile, $dl_f = -vdp$ per i sistemi aperti.

Allora otteniamo:

$$dh = dq + vdp \rightarrow dq = dh - vdp$$

Sostituiamo nell'espressione del calore specifico:

$$c = \frac{dq}{dT} = \frac{dh}{dT} - v \frac{dp}{dT}$$

Da non confondersi con l'entropia $ds = \frac{dq}{T}$ che è una grandezza funzione di stato.

Supponiamo che h sia una funzione di T e p e ne facciamo il differenziale esatto:

$$h = h(T, p) \rightarrow dh = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T dp;$$

dividiamo per dT

$$\frac{dh}{dT} = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T \left(\frac{dp}{dT}\right)$$

Sostituiamo nell'espressione del calore specifico:

$$c = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p + \left[\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T - v\right] \frac{dp}{dT};$$

moltiplichiamo per dT

$$dq = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT + \left[\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T - v\right] dp$$

Se la trasformazione è ISOBARA, cioè a pressione costante $\rightarrow dp = 0$

$$c = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p \Rightarrow c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p : \text{calore specifico a pressione costante}$$

Definizione operativa di c_p :

se $dp = 0 \rightarrow dq = c_p dT$

$$\text{allora } c_p = \left.\frac{dq}{dT}\right|_p = \left.\frac{q}{\Delta T}\right|_p$$

il sistema aperto deve scorrere a pressione costante, forniamo del calore q e misuriamo una variazione di temperatura $\Delta T \rightarrow$ un po' più difficile da misurare rispetto a c_v . Sarà difficile mantenere la pressione costante.

se la trasformazione è ISOTERMA, cioè a temperatura costante, $dT = 0$

$$\text{allora } dq = \left[\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T - v\right] dp = c_c dp;$$

$$\text{con } c_c = \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T - v : \text{calore specifico di comprimibilità isoterma}$$

Definizione operativa di c_c :

se $dT = 0 \rightarrow dq = c_c dp$

$$\text{allora } c_c = \left(\frac{dq}{dp}\right)_{\bar{T}} = \left(\frac{q}{\Delta p}\right)_{\bar{T}}$$

allora non è facilmente calcolabile (è facile solo nei passaggi di stato)

In definitiva abbiamo trovato le seguenti espressioni per il **calore** e il **calore specifico** per i **sistemi aperti**:

$$dq = c_p dT + c_c dp \quad \text{e} \quad c = c_p + c_c \frac{dp}{dT}$$

Conclusione;

abbiamo trovato quattro calori specifici:

- c_v e c_p misurabili;
- c_c e c_d difficilmente misurabili sperimentalmente (tranne nei casi di cambiamenti di stato)

Allora si cerca di mettere in relazione analitica i calori specifici c_c e c_d con altri parametri termodinamici in gioco, senza doverli misurare. Questo si riesce a fare grazie alle Equazioni di Maxwell.

Equazioni di Maxwell (termodinamiche)

Per ricavare le equazioni di Maxwell introduciamo due nuove grandezze termodinamiche funzioni di stato (poiché sono combinazioni lineari di grandezze funzioni di stato):

- $e_u = u - Ts$: energia libera (funzione di Gibbs)
- $e_h = h - Ts$: entalpia libera (funzione di Helmotz)

Poiché sono grandezze funzioni di stato possiamo fare i differenziali:

- $\frac{de_u}{du} = du - Tds - sdT$ $\rightarrow de_u = -pdv - sdT$
Con $du = Tds - pdv$
- $\frac{de_h}{dh} = dh - Tds - sdT$ $\rightarrow de_h = vdp - sdT$
Con $dh = Tds + vdp$

Queste due nuove grandezze sono combinazioni lineari di grandezze di stato quindi anche loro sono grandezze funzione di stato.

Nel caso dei passaggi di stato cioè per trasformazioni a $T = \text{cost}$ e $p = \text{cost}$ (isotermobariche), $dT = 0$ e $dp = 0$; quindi:

$$de_h = 0$$

L'entalpia libera rimane costante in un cambiamento di stato.

Nel caso di una trasformazione ISOTERMA, $dT = 0$, quindi:

$de_u = -pdv$ (lavoro scambiato da un sistema chiuso)

$$\rightarrow pdv = -de_u \rightarrow \int_1^2 pdv = l_{21} = e_{u1} - e_{u2}$$

Così possiamo ricondurre il calcolo del lavoro in un sistema chiuso, che non è una grandezza funzione di stato, alla variazione della grandezza funzione di stato energia libera.

Allora la diminuzione dell'energia libera dà luogo ad un lavoro in un sistema chiuso. Il lavoro compiuto da un sistema chiuso è la differenza di energia libera tra due stati.

Teorema del differenziale esatto (o di Swartz)

Se $dz = xdx + ydy$ e se dz è un differenziale esatto, si può scrivere:

$$\left. \frac{\partial x}{\partial y} \right|_x = \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_y$$

Applichiamo il teorema di Swartz all'energia libera de_u , all'entalpia de_h , all'energia interna du e all'entalpia dh , ed otteniamo le quattro equazioni di Maxwell:

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v &= -\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T \\ \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p &= -\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \\ \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s &= -\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_v \\ \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s &= \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p \end{aligned}$$

Cerchiamo delle espressioni di c_d e c_c calcolabili analiticamente

- Utilizziamo la definizione di entropia e sostituiamo l'espressione di dq per i **sistemi chiusi**:

$$ds = \frac{dq}{T} = \frac{c_v dT}{T} + \frac{c_d dv}{T};$$

Inoltre, possiamo fare il differenziale esatto di s rispetto a T e v :

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T dv$$

Per trasformazioni ISOCORE, $dv = 0$

$$ds = \frac{c_v}{T} dT = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v dT \Rightarrow c_v = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v T$$

Per le trasformazioni ISOTERME, $dT = 0$

$$ds = \frac{c_d}{T} dv = \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T dv \Rightarrow c_d = \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T T$$

Per la prima equazione di Maxwell:

$$c_d = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$$

N.B.: questa espressione contiene solo le tre variabili termomeccaniche p, v, T

Nota l'equazione di stato che lega le tre variabili termomeccaniche per un certo sistema (ad esempio gas perfetti), c_p si può calcolare analiticamente senza il bisogno di misurarlo.

Abbiamo ricavato il ds in funzione di dT e di dv partendo dai calori specifici.

c_d si può esprimere come funzione delle sole variabili di stato, senza bisogno di misurarlo.

- Utilizziamo la definizione di entropia e sostituiamo l'espressione di dq per **sistemi aperti**:

$$ds = \frac{dq}{T} = \frac{c_p dT}{T} + \frac{c_c dp}{T}$$

Inoltre, possiamo fare il differenziale esatto di s rispetto a T e p

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T dp$$

Per trasformazioni ISOBARE, $dp = 0$

$$ds = \frac{c_p}{T} dp = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p dT \Rightarrow c_p = T \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p$$

Per trasformazioni ISOTERME, $dT = 0$

$$ds = \frac{c_c}{T} dp = \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T dp \Rightarrow c_c = T \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T$$

Per la seconda equazione di Maxwell:

$$c_c = -T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$$

N.B.: nota l'equazione di stato che lega p, v, T per un certo sistema (ad esempio i gas perfetti), c_c si può calcolare analiticamente senza il bisogno di misurarlo.

Conclusioni;

- Sistemi chiusi;

$$dq = c_v dT + T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dv ;$$

$$du = c_v dT + \left[T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - p \right] dv ;$$

$$ds = \frac{c_v}{T} dT + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dv ; *$$

- Sistemi aperti;

$$dq = c_p dT - T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dp ;$$

$$dh = c_p dT + \left[v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right] dp ;$$

$$ds = \frac{c_p}{T} dT - \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dp ; *$$

Diagramma termodinamico Ts

- Dimostriamo che nel diagramma Ts l'isobara a $p_2 > p_1$ sta sopra p_1

Consideriamo l'espressione * ($ds = \frac{c_p}{T} dT - \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dp$), se la trasformazione è ISOENTROPICA, $ds = 0$

$$\frac{c_p}{T} dT = \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dp \Rightarrow \frac{dT}{dp} = \frac{v\beta T}{c_p} > 0, \text{ poiché } v, \beta, T, c_p > 0$$

$$\text{Sapendo che } \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = v\beta$$

Allora, muovendosi lungo un'isoentropica, ad un aumento di temperatura corrisponde un aumento di pressione.

- Dimostriamo che la pendenza dell'isocora è maggiore della pendenza dell'isobara

Consideriamo l'espressione * ($ds = \frac{c_v}{T} dT + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dv$), se la trasformazione è ISOCORA, $dv = 0$

$$ds = \frac{c_v}{T} dT \Rightarrow \frac{dT}{ds} \Big|_v = \frac{T}{c_v} \Big|_v$$

Abbiamo trovato la pendenza di un'isocora sul piano Ts .

Consideriamo l'espressione * ($ds = \frac{c_p}{T} dT - \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dp$), se la trasformazione è ISOBARA, $dp = 0$

$$ds = \frac{c_p}{T} dT \Rightarrow \frac{dT}{ds} \Big|_p = \frac{T}{c_p} \Big|_p$$

Abbiamo trovato la pendenza di un'isobara sul piano Ts

Poiché $c_p > c_v$ (come dimostreremo), la pendenza dell'isobara è minore dell'isocora.

Relazioni tra c_p e c_v

Dalla * esplicitiamo $c_p \rightarrow c_p = T \frac{ds}{dT} + \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p T \frac{dp}{dT}$

Dalla * esplicitiamo $c_v \rightarrow c_v = T \frac{ds}{dT} - \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v T \frac{dv}{dT}$

$$c_p - c_v = \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p T \frac{dp}{dT} + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v T \frac{dv}{dT}$$

Consideriamo una generica funzione p , funzione di T e v , e facciamo il differenziale esatto:

$$p = p(T, v) \rightarrow dp = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dT + \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T dv;$$

dividiamo per dT ;

$$\frac{dp}{dT} = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v + \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T \frac{dv}{dT}$$

Allora otteniamo:

$$\begin{aligned} c_p - c_v &= \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v + \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p T \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T \frac{dv}{dT} + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v T \frac{dv}{dT} = \\ &= \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v + T \frac{dv}{dT} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \right] \end{aligned}$$

Dove il contributo tra parentesi quadre: $\left[\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \right] = 0$ per il teorema dei differenziali esatti

Allora:

$$c_p - c_v = \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v$$

Teorema dei differenziali esatti:

Se $p = p(T, v)$ il prodotto delle tre derivate parziali di ciascuna coppia con il terzo lasciato costante è pari a -1;

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_v = -1$$

Inoltre, sempre dal teorema dei differenziali esatti possiamo scrivere:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = - \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T$$

$$\Rightarrow c_p - c_v = -T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v^2 \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T$$

Osservazione: GAS PERFETTI

L'equazione di stato dei gas perfetti è:

$$pv = RT \rightarrow \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v = \frac{R}{v} \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T = -\frac{RT}{p^2}$$

$$\text{Allora } c_p - c_v = T \frac{R^2}{v^2} \cdot \frac{RT}{p^2} = R \Rightarrow c_p - c_v = R$$

Relazione tra c_p e c_v : $\frac{c_p}{c_v}$

se la trasformazione è ISOENTROPICA, $ds = 0$

dalle espressioni:

$$\begin{aligned} - \quad c_p &= T \frac{ds}{dT} + \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p T \frac{dp}{dT} \\ - \quad c_v &= T \frac{ds}{dT} - \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v T \frac{dv}{dT} \end{aligned}$$

Abbiamo:

$$\frac{c_p}{c_v} = - \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p}{\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v} \cdot \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_s}{\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_s} = \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_s$$

Per le due trasformazioni a $s = \text{cost}$ posso semplificare ∂T e ottengo $\left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_s$

Inoltre, $\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p}{\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v} = - \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T$ per Swartz

Osservazione: GAS PERFETTI

$$pv = RT \rightarrow \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T = - \frac{RT}{p^2}$$

Per le trasformazioni isoentropiche per i gas perfetti:

$$pv^k = \text{cost} \rightarrow dpv^k + pkv^{k-1} dv = 0$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_s = -kp \frac{v^{k-1}}{v^k} = -k \frac{p}{v}$$

Allora:

$$\frac{c_p}{c_v} = + \frac{RT}{p^2} \cdot k \frac{p}{v} = \frac{RT}{pv} k = k \Rightarrow \frac{c_p}{c_v} = k$$

Oppure:

$$pv^k = \text{cost} \rightarrow p = \frac{\text{cost}}{v^k} \rightarrow \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_s = -k \frac{\text{cost}}{v^{k+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{c_p}{c_v} = + \frac{RT}{p^2} k \frac{pv^k}{v^{k+1}} = \frac{RT}{pv} \cdot k = k \Rightarrow \frac{c_p}{c_v} = k$$

Dipendenza di c_v da v

Abbiamo definito $c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v$

Facciamone la derivata rispetto a v , a T costante;

$$\left(\frac{\partial c_v}{\partial v}\right)_T = \frac{\partial}{\partial v} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v \right]_T = \frac{\partial}{\partial T} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T \right]_v$$

(nel secondo uguale è stato invertito l'ordine delle derivate parziali)

Ora ricordiamo l'espressione che abbiamo trovato per du per i sistemi chiusi:

$$du = c_v dT + \left[T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p \right] dv$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = \left[T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p \right]$$

Allora sostituiamo e otteniamo:

$$\left(\frac{\partial c_v}{\partial v}\right)_T = \frac{\partial}{\partial T} \left[T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p \right]_v = \cancel{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)}_v + T \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_v - \cancel{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)}_v$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial c_v}{\partial v}\right)_T = T \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_v$$

Questa è la dipendenza di c_v da v .

Dipendenza di c_p da p

Abbiamo definito $c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p$

Facciamone la derivata rispetto a p , a T costante;

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_T = \frac{\partial}{\partial p} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p \right]_T = \frac{\partial}{\partial T} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T \right]_p$$

(nel secondo uguale è stato invertito l'ordine delle derivate parziali)

Ora ricordiamo l'espressione che abbiamo trovato per dh per i sistemi aperti:

$$dh = c_p dT + \left[v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \right] dp$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T = \left[v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \right]$$

Allora sostituiamo ed otteniamo:

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_T = \frac{\partial}{\partial T} \left[v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \right]_p = \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - T \left(\frac{\partial^2 v}{\partial T^2}\right)_p - \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_T = -T \left(\frac{\partial^2 v}{\partial T^2}\right)_p$$

Questa è la dipendenza di c_p da p .

Gas perfetti

(Capitolo 7 del libro, proprietà delle sostanze)

Obbediscono all'equazione di stato dei gas perfetti, rappresentata dalla seguente legge:

$$pV = nR_u T;$$

Ricordiamo le relazioni che abbiamo trovato tra c_v e c_p :

$$c_p - c_v = -T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v^2 \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \quad \text{e} \quad \frac{c_p}{c_v} = \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_s$$

Abbiamo già dimostrato che per i gas perfetti:

$$c_p - c_v = R \quad \text{e} \quad \frac{c_p}{c_v} = k$$

Inoltre, per i gas perfetti otteniamo che:

- $\left(\frac{\partial c_v}{\partial v} \right)_T = T \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2} \right)_v = 0 \rightarrow c_v$ non dipende da v ma dipende solo da T : $c_v(T)$
- $\left(\frac{\partial c_p}{\partial p} \right)_T = -T \left(\frac{\partial^2 v}{\partial T^2} \right)_p = 0 \rightarrow c_p$ non dipende da p ma dipende solo da T : $c_p(T)$

I termini tra parentesi quadra per un gas perfetto vengono uguale a zero (i termini della pagina sopra).

Inoltre, per i gas perfetti scriviamo le espressioni di du e di dh :

$$du = c_v(T) dT \quad \text{e} \quad dh = c_p(T) dT$$

Sono in funzione solo della temperatura.

Infine, troviamo il **coefficiente di dilatazione isobara β** per i gas perfetti:

$$\beta = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{v} \cdot \frac{R}{P} = \frac{R}{RT} = \frac{1}{T} \Rightarrow \beta = \frac{1}{T}$$

Per un gas perfetto il coefficiente di dilatazione isobara è $\beta = \frac{1}{T}$

Osservazione:

perché si è scelto $T = 273$ per la temperatura dei gas?

I primi esperimenti sui gas si facevano con un gas contenuto in un recipiente e si misurava il coefficiente di dilatazione isobara β , fornendo una certa quantità di calore, cioè una certa variazione di temperatura. Si misurava la conseguente variazione di volume e dividendo per il volume si otteneva il coefficiente.

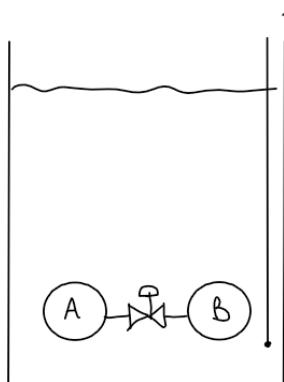
Trovavano che il coefficiente β dei gas era circa $\frac{1}{273}$ allora si scelse come temperatura il reciproco:

$$\beta \simeq \frac{1}{273} = \frac{1}{T} \rightarrow T \cong 273$$

Conferma sperimentale di $du = c_v(T)dT$ e $dh = c_p(T)dT$

Esperienza di Joule

In un contenitore contenente del liquido si inserisce un recipiente A contenente del gas; questo recipiente è in contatto con un altro recipiente B tramite una valvola, che quando è aperta permette il passaggio del gas da A a B, andando a raddoppiare il volume (anche il volume specifico poiché il sistema è chiuso quindi la massa resta costante). All'inizio dell'esperienza il gas è in A e misuriamo la temperatura T e in B c'è il vuoto.



Poi si apre la valvola e il gas si espande e alla fine della trasformazione il gas sarà in A+B, cioè ha raddoppiato il proprio volume.

Di nuovo misurò la temperatura e trovò che la temperatura era circa uguale.

Si misura la temperatura del liquido sia prima che dopo l'espansione.

Se il gas era molto rarefatto, cioè se il suo comportamento di avvicinava a quello del gas perfetto, la temperatura si manteneva costante:

$$T = \text{cost} \quad (dT = 0)$$

C'è un gas che ha compiuto una trasformazione che ha variato il suo volume ma la temperatura è rimasta costante.

Primo principio della termodinamica per sistemi chiusi, applicandola nella trasformazione dell'esperienza di Joule:

$$q - l = \Delta u + \Delta e_c + \Delta e_p$$

Dove:

- Non si scambia lavoro $l = 0$;
- Poiché la temperatura è costante $q = 0$;
- Supponiamo che il gas abbia velocità nulla sia all'inizio che alla fine, quindi $\Delta e_c = 0$;
- L'energia potenziale non varia perché non cambia la quota del baricentro;

Allora $\Delta u = 0$, cioè $du = 0$

Poiché u in generale è funzione di v e di T , il suo differenziale esatto è:

$$u(v, T) \rightarrow du = \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T dv + \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT$$

Poiché $dv \neq 0$ (espansione),

$$\text{affinché } \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T dv = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = 0$$

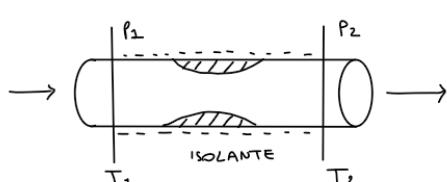
allora abbiamo confermato che u è funzione solo della temperatura e non del volume specifico:

$$du = c_v(T)dT$$

Esperienza di Joule-Thompson

In un condotto con una stenosi scorre un fluido da sx verso dx se $p_1 > p_2$.

Si misurano le temperature T_1 e T_2 in ingresso e in uscita.



Il condotto è isolato termicamente per l'intera lunghezza quindi non ci sono scambi di calore.

Primo principio della termodinamica per sistemi aperti:

$$q - l_f = \Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p$$

Dove:

- Non ci sono scambi di calore perché lo isolavano termicamente;
- Non si scambia lavoro;
- Se il conduttore è orizzontale la variazione di energia potenziale è nulla;

- Se le sezioni sono uguali la variazione di energia cinetica è nulla;

Allora $\Delta h = 0$, cioè $dh = 0$

Poiché h in generale è funzione di p e di T , il duo differenziale esatto è:

$$h(p, T) \rightarrow dh = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T dp$$

Nell'esperienza si misurava la differenza di temperatura $T_1 - T_2$;

Se l'esperienza misurasse un $dT = 0$, ed essendo $dp \neq 0$:

$$\text{affinché } \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T dp = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T = 0$$

allora abbiamo confermato che h non dipende dalla pressione, ma l'entalpia h è funzione solo della temperatura:

$$dh = c_p(T) dT$$

Per un gas perfetto $T_1 - T_2 = 0$. Nelle condizioni reali si trova che $dT \neq 0$;

Infatti, se un gas espande come nell'esperienza di Joule-Thomson, si ottiene una variazione della temperatura (generalmente una diminuzione).

Allora per un gas reale h dipende da p :

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T \neq 0 \rightarrow h(p, T)$$

Il risultato dell'esperienza era $dT \neq 0$ perché il gas era un gas reale;

L'esperienza di Joule-Thomson si rappresenta in un diagramma Tp ;

immaginiamo di condurre varie esperienze successive a partire da p_1 , con pressioni p_2 sempre più basse; se diminuiamo le pressioni troviamo che il gas continua a risaldarsi fino ad un punto e poi decresce.

Otteniamo un andamento particolare, sempre simile anche alle diverse temperature.

Unendo i massimi si ottiene un'altra curva.

Considerando il caso di gas reale abbiamo:

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T dp = 0$$

$$\Rightarrow c_{JT} = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_h = -\frac{\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T}{c_p}, \text{ e questo è il coefficiente di Joule-Thomson}$$

(è la variazione di temperatura sulla variazione di pressione)

Nel tratto di curve a dx del massimo abbiamo $p_1 - p_2 > 0$ ma $T_1 - T_2 < 0$, cioè $p_1 > p_2$ ma $T_1 < T_2$

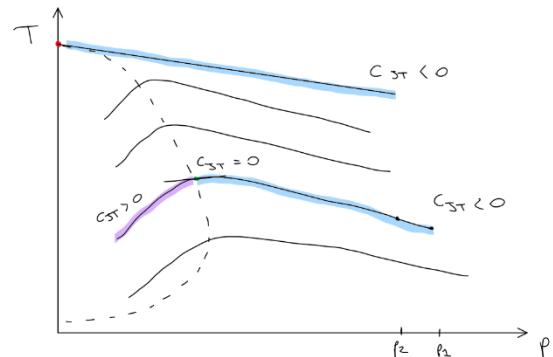
Allora $dT > 0$ per un $dp < 0 \rightarrow c_{JT} < 0$

Nel massimo della curva $dT = 0 \rightarrow c_{JT} = 0$

Nel tratto di curva a sx del massimo abbiamo $dT < 0$ per un $dp < 0 \rightarrow c_{JT} > 0$

Osservazione:

di solito, un gas che si espande si raffredda, ma questo vale nel tratto a dx del massimo.



Esiste una temperatura che corrisponde al massimo del valore della temperatura in cui $c_{JT} = 0$: **temperatura limite (o di inversione)**. La presenza di un massimo avviene fino ad una certa temperatura, al di sopra di questa temperatura la curva è tale che la temperatura cresce sempre.

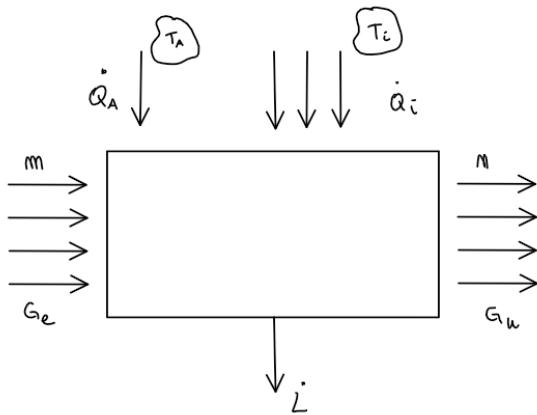
Allora per questa temperatura e per le superiori, $c_{JT} < 0$ sempre e non c'è il tratto in cui $c_{JT} > 0$ allora il gas che si espande si riscalda (non si raffredda).

Sperimentalmente, se si misura $\frac{\Delta T}{\Delta p}$ nell'equazione di Joule-Thomson, si ottiene che è proporzionale a $\frac{\Delta p}{T^2}$ tramite una costante k :

$$c_{JT} = \frac{\Delta T}{\Delta p} = \frac{\Delta p}{T^2} \cdot k \rightarrow \begin{cases} \text{se } k > 0, \Delta T > 0 \\ \text{se } k < 0, \Delta T < 0 \end{cases}$$

Teorema di Guoj-Stodola

Consideriamo un sistema aperto con più correnti entranti con portata G_e e più correnti uscenti con portata G_u , e supponiamo il regime stazionario.



Supponiamo che ci sia un unico scambio di lavoro \dot{L} per unità di tempo, e diversi scambi di calore, di cui uno con l'ambiente \dot{Q}_A e tanti \dot{Q}_i con le varie sorgenti T_i .
($\dot{L} = P$)

Scambi di calore con l'ambiente e scambi di calore con le altre n -sorgenti T_i .

Primo principio della termodinamica per sistemi aperti:

$$\dot{Q} - \dot{L} = \sum_{u=1}^n G_u (h_u + e_{cu} + e_{pu}) - \sum_{e=1}^m G_e (h_e + e_{ce} + e_{pe}),$$

dove in questo caso: $\dot{Q} = \dot{Q}_A + \sum_{i=1}^m \dot{Q}_i$ (ha una componente di scambio di calore con l'ambiente e gli altri scambi con le sorgenti)

Secondo principio della termodinamica per sistemi aperti:

$\frac{\dot{Q}}{T} = \Delta S - \Delta s_s$ teniamo conto anche di eventuali irreversibilità. $\Delta S \rightarrow$ relativo a tutta la massa.

$$\Rightarrow \frac{\dot{Q}_A}{T_A} + \sum_{i=1}^m \frac{\dot{Q}_i}{T_i} = \sum_{u=1}^n G_u s_u - \sum_{e=1}^m G_e s_e - \Delta s_s$$

$$\Rightarrow \dot{Q}_A = -T_A \sum_{i=1}^m \frac{\dot{Q}_i}{T_i} + \sum_{u=1}^n G_u T_A s_u - \sum_{e=1}^m G_e T_A s_e - \Delta s_s T_A$$

Sostituiamo \dot{Q}_A nell'espressione del primo principio:

$$\sum_i \dot{Q}_i - \sum_i \frac{\dot{Q}_i T_A}{T_i} - \dot{L} + \sum_u G_u T_A s_u - \sum_e G_e T_A s_e - T_A \Delta s_s = \sum_u G_u (h_u + e_{cu} + e_{pu}) - \sum_e G_e (h_e + e_{ce} + e_{pe})$$

Risolviamo per \dot{L} :

$$\dot{L} = \sum_i \dot{Q}_i \left(1 - \frac{T_A}{T_i}\right) + \sum_e G_e (h_e - T_A s_e + e_{ce} + e_{pe}) - \sum_u G_u (h_u - T_A s_u + e_{cu} + e_{pu}) - T_A \Delta s_s;$$

se le trasformazioni sono reversibili, $\Delta S_s = 0$

allora \dot{L}_{max} = lavoro che otterrei se la trasformazione fosse reversibile.

In definitiva, il lavoro ottenuto da questo sistema è:

$$\dot{L} = \dot{L}_{max} - T_A \Delta S_s$$

Il lavoro ottenibile da un sistema aperto è massimo quando non ci sono irreversibilità, e questo \dot{L}_{max} è in funzione dei calori \dot{Q}_i scambiati con le sorgenti a temperatura T_i , dell'entalpia e anche del termine $T_A S$.

Applichiamo questa espressione prima ai sistemi chiusi e poi ai sistemi aperti.

Sistemi chiusi

Spariscono i termini legati alle correnti uscenti ed entranti G_u e G_e , quindi, si torna alla macchina motrice di Watt e in caso di trasformazione reversibile alla macchina di Carnot:

$$\dot{L}_{max} = \sum_i \dot{Q}_i \left(1 - \frac{T_A}{T_i} \right)$$

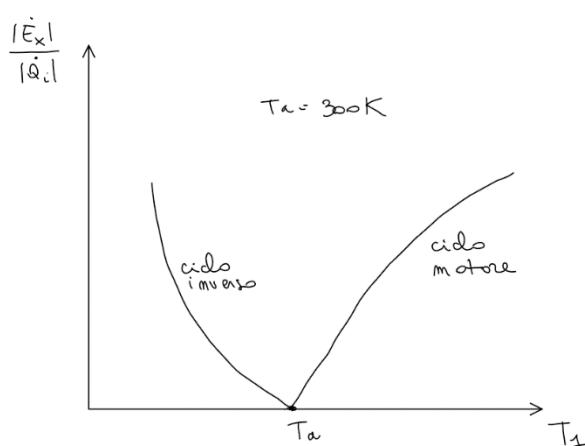
Se c'è una sola sorgente, cioè se $i=1$,

$$\dot{L}_{max} = \dot{Q}_1 \left(1 - \frac{T_A}{T_1} \right) = \dot{E}_x : \text{exergia del sistema chiuso};$$

l'exergia del sistema chiuso è il lavoro massimo ottenuto dal sistema chiuso che scambia calore con una sola sorgente (un solo scambio di calore). (riceve calore da una sola sorgente e cede calore all'ambiente)

Osserviamo che $\frac{\dot{E}_x}{\dot{Q}_1} = 1 - \frac{T_a}{T_1}$

Facciamo il diagramma dell'exergia per unità di calore scambiato in modulo, in funzione della temperatura T_1 della sorgente, fissata la temperatura ambiente T_a .



- se $T_1 = T_a \rightarrow \frac{|\dot{E}_x|}{|\dot{Q}_1|} = 0$
- Se $T_1 > T_a \rightarrow \frac{|\dot{E}_x|}{|\dot{Q}_1|}$ aumenta verso la saturazione, allora **ciclo motore** ($L > 0$). Il rendimento aumenta.
- Se $T_1 < T_a \rightarrow \frac{|\dot{E}_x|}{|\dot{Q}_1|}$ aumenta in maniera diversa, allora **ciclo inverso**.

Settimana 4

12-10-21

Giovedì iniziano le esercitazioni di Petracci.

Vediamo la definizione di exergia per i sistemi aperti.

Sistema aperto

Se il sistema aperto scambia calore solo con l'ambiente, il primo termine di \dot{L}_{max} è nullo:

$$\sum_i \dot{Q}_i \left(1 - \frac{T_A}{T_i} \right) = 0$$

Inoltre, se consideriamo una sola corrente entrante G_e e una sola corrente uscente G_u , ricordiamo che in regime stazionario $G = G_e = G_u$ ed otteniamo:

$$\dot{L}_{max} = G_e(h_e - T_A s_e + e_{ce} + e_{pe}) - G_u(h_u - T_A s_u + e_{cu} + e_{pu})$$

Se la differenza tra le energie cinetiche in ingresso e in uscita e tra le energie potenziali sono nulle, otteniamo:

$$\dot{L}_{max} = G_e(h_e - T_A s_e) - G_u(h_u - T_A s_u)$$

Dividiamo per G otteniamo il lavoro intensivo massimo;

$$l_{max} = (h_e - T_a s_e) - (h_u - T_a s_u)$$

Definiamo $e_x = h - T_a s$ come **Exergia del sistema aperto**, allora:

$$l_{max} = e_{xe} - e_{xu};$$

Questo è il massimo lavoro che si può ottenere da un sistema aperto con portata di ingresso e di uscita e che scambia lavoro solo con l'ambiente. Exergia della corrente entrante meno l'exergia della corrente uscente. Questo è molto importante per la valutazione dell'impatto energetico.

Exergia

L'exergia è definita come: $e_x = h - T_a s$

Osserviamo che è un caso particolare dell'entalpia libera $e_h = h - Ts$

L'exergia è un caso particolare dell'entalpia libera dove la temperatura è solo la temperatura ambiente T_a .

L'exergia è funzione di variabili di stato termodinamico, quindi anche l'exergia è una funzione di stato, allora è definita a meno di una costante e si deve definire uno stato di riferimento.

Scegliamo che nello stato di riferimento $e_{xa} = h_a - T_a s_a = 0$ cioè l'exergia dell'ambiente è pari a zero. Come stato di riferimento prendiamo l'ambiente. Significa che l'ambiente lo possiamo considerare uno stato in cui scambiando calore con l'ambiente non si può ottenere lavoro.

Poiché l'energia è il lavoro massimo che si può ottenere sia in un sistema chiuso che in un sistema aperto, è chiaro che non si può ottenere lavoro da un sistema che scambia calore con l'ambiente → la sorgente ambiente ha exergia nulla: **stato morto**.

Di conseguenza otteniamo il valore assoluto dell'exergia facilmente dal valore relativo. $e_x - e_{xa} = (h - h_a) - T_a(s - s_a)$ dove e_{xa} è l'exergia dell'ambiente che è pari a zero.

Costruiamo il diagramma exergia e_x – entalpia h e studiamo le varie trasformazioni:

- Trasformazioni ISOENTROPICHE; $s = \text{cost}$:

$$de_x = dh - T_a ds \rightarrow \left(\frac{\partial e_x}{\partial h}\right)_s = 1;$$

quindi le isoentropiche sono delle rette a 45° (quelle in grigio).

- Trasformazioni ISOBARE, $p = \text{cost}$

$$\left(\frac{\partial e_x}{\partial h}\right)_p = 1 - T_a \left(\frac{\partial s}{\partial h}\right)_p = 1 - \frac{T_a}{T};$$

$$\text{dove } \left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)_p = T$$

se $T > T_a \rightarrow$ pendenza positiva, se $T = T_a$ pendenza 0 (cioè minima);

se $T < T_a \rightarrow$ pendenza negativa

- Trasformazioni ISOTERME; $T = \text{cost}$

Per i gas perfetti sono anche ISOENTALPICHE, sono rette verticali;

- Trasformazioni ISOCORE, $v = \text{cost}$

$$\left(\frac{\partial e_x}{\partial h}\right)_v = 1 - T_a \left(\frac{\partial s}{\partial h}\right)_v$$

Riprendendo l'espressione di ds e di dq :

$$ds = \frac{dq}{T} = \frac{du + pdv}{T} = c_c \frac{dT}{T} = \frac{c_v}{T} \frac{dh}{c_p} = \frac{dh}{Tk} \rightarrow \frac{ds}{dh} = \frac{1}{Tk} \text{ se il gas è un gas perfetto allora } du = c_c \frac{dT}{T}$$

E sapendo che $dh = c_p dT$

Allora;

$$\left(\frac{\partial e_x}{\partial h}\right)_v = 1 \frac{T_a}{kT}$$

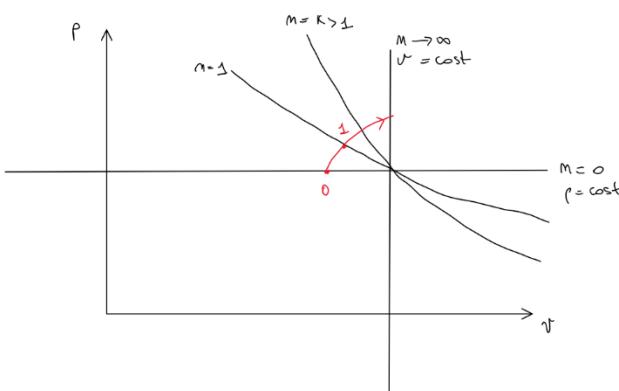
Con $k > 1 \rightarrow kT > T$

Se $kT > T_a$ allora pendenza positiva, se $kT = T_a$ allora pendenza zero, se $kT < T_a$ allora pendenza negativa.

Diagramma pv

Vogliamo rappresentare tutte le trasformazioni termodinamiche su un piano pv , partiamo da un'equazione generale del tipo:

$pv^n = \text{cost}$, con n parametro empirico (legge politropica, con n parametro che va da 0 a ∞).



- Se $n = 0 \rightarrow$ trasformazione ISOBARA: $p = \text{cost}$. Retta orizzontale.
- Se $n \rightarrow \infty$ allora $p^{1/n}v = \text{cost} \Rightarrow v = \text{cost}$ Trasformazione ISOCORA. L'isocora è la retta verticale.

Tra il minimo e il massimo valore di n possiamo considerare tutte le trasformazioni termodinamiche.

- Se $n = 1 \rightarrow pv = \text{cost} = RT$ allora $T = \text{cost}$ trasformazione isoterma di un gas perfetto. Iperbole equilatera.
- Se $n = k \rightarrow pv^k = \text{cost}$ allora trasformazione isoentropica di un gas perfetto ($k > 1$). Ha una pendenza maggiore della isoterma.

Fine lezione 7.

Trasformazioni termodinamiche per i GAS PERFETTI

Dimostriamo che le trasformazioni termodinamiche compiute dai gas perfetti sono:

1. $pv^k = \text{cost}$
2. $\frac{T}{p^{\frac{k-1}{k}}} = \text{cost}$
3. $Tv^{k-1} = \text{cost}$

1) partiamo dall'espressione più generale che abbiamo trovato per ds per i sistemi chiusi:

$$ds = c_v \frac{dT}{T} + \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_v dv = c_v \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v}$$

dove abbiamo sfruttato l'equazione dei gas perfetti $pv = nRT$

Se la trasformazione è isoentropica: $ds = 0$

Facciamo un'ipotesi semplificativa, cioè supponiamo $c_v = \text{cost}$ → ipotesi di **Politropica**

Integriamo:

$$c_v \ln(T) + R \ln(v) = \text{cost}$$

$$\ln(T^{c_v}) + \ln(v^R) = \text{cost}$$

$$\ln(T^{c_v} v^R) = \text{cost}$$

$$T^{c_v} \cdot v^R = \text{cost} \rightarrow T v^{\frac{R}{c_v}} = \text{cost} \rightarrow T v^{\frac{c_p - c_v}{c_v}} = \text{cost} \quad (\text{ho fatto prima la radice di } c_v \text{ e poi ho sostituito R})$$

$$\Rightarrow T v^{k-1} = \text{cost} \quad (\text{sfruttando che } k = \frac{c_p}{c_v})$$

2) partiamo dall'espressione più generale di ds per i sistemi aperti:

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_p dp = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p}$$

Se la trasformazione è isoentropica: $ds = 0$, inoltre per l'ipotesi di politropica $c_p = \text{cost}$

Integriamo:

$$c_p \ln(T) - R \ln(p) = \text{cost}$$

$$\ln(T^{c_p}) - \ln(p^R) = \text{cost}$$

$$\ln\left(\frac{T^{c_p}}{p^R}\right) = \text{cost}$$

$$\frac{T^{c_p}}{p^R} = \text{cost} \rightarrow \frac{T}{p^{\frac{R}{c_p}}} = \text{cost} \rightarrow \frac{T}{p^{\frac{c_p - c_v}{c_p}}} = \text{cost} \Rightarrow \frac{T}{p^{\frac{k-1}{k}}} = \text{cost}$$

Dove nel secondo passaggio è stata fatta la radice c_p -esima

3) $pv = nRT$

$$p dv + v dp = R dT \rightarrow dT = \frac{p}{R} dv + \frac{v}{R} dp$$

Sostituiamo dT in ds

$$ds = \frac{c_v p}{T R} dv + \frac{c_v v}{T R} dp + \frac{R dv}{v}$$

Se la trasformazione ISOENTROPICA, $ds = 0$

$$c_v \frac{dv}{v} + R \frac{dv}{v} + c_v \frac{dp}{p} = 0$$

(sapendo che $R + c_v = c_p$)

$$c_p \frac{dv}{v} + c_v \frac{dp}{p} = 0$$

Integriamo:

$$c_p \ln v + c_v \ln p = \text{cost}$$

$$\ln v^{c_p} + \ln p^{c_v} = \text{cost}$$

$$\ln(v^{c_p} \cdot p^{c_v}) = \text{cost}$$

$$v^{c_p} \cdot p^{c_v} = \text{cost} \rightarrow v^{\frac{c_p}{c_v}} \cdot p = \text{cost} \Rightarrow p v^k = \text{cost}$$

Esperienza di Andrew

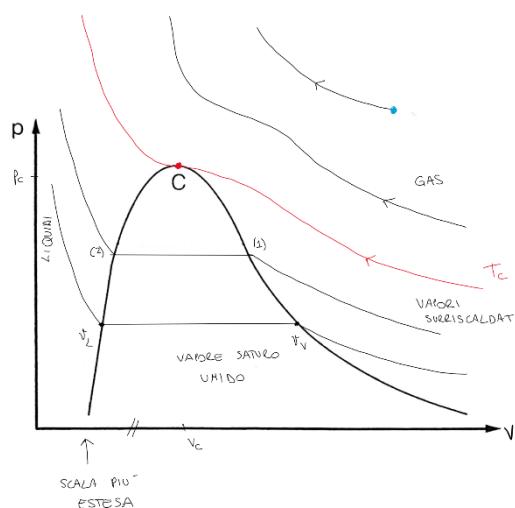
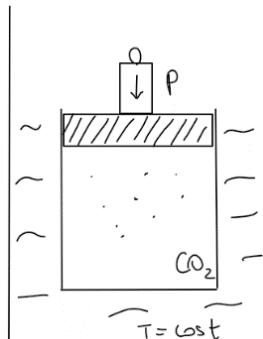
Introduce il cambiamento di stato vapore-liquido, partiamo dall'esperimento.

Abbiamo un sistema cilindro-pistone schiacciato da un peso (sistema chiuso), → compie una trasformazione ISOTERMA, che rappresentiamo nel piano pV .

All'interno del cilindro c'è un gas CO_2 , poiché cambia di stato a temperature vicine a quelle ambientali.

Il tutto è all'interno di un termostato che mantiene la temperatura costante. Esegui delle compressioni, compressioni molto lente, quindi trasformazioni reversibili.

In generale immaginiamo di avere a che fare con un gas con un volume specifico v molto grande e una piccola massa m → gas molto rarefatto \approx gas perfetto.



Facciamo partire la compressione dal punto in blu che rappresenta uno stato di gas. Si comincia ad aumentare la pressione e il pistone scendeva riducendosi il volume specifico. Si riportavano i valori delle pressioni e dei volumi aumentando di poco la pressione e misurando il volume. Il volume lo misuro dall'altezza del pistone rispetto alla base.

Per la legge di Gay-Lussac dei gas perfetti questa curva è:

$$pv = RT, \text{ con } T = \text{cost} \rightarrow pv = \text{cost}$$

L'esperienza di Andrews mostra che a pressioni così alte, la curva che rappresenta l'isoterma è un'iperbole equilatera $pv = \text{cost}$.

Poi facciamo queste compressioni isoterme a temperature sempre decrescenti. Fino ad un certo punto diminuendo la pressione iniziale si manteneva una curva che era una iperbole equilatera poi non è più un'iperbole equilatera ma era una curva con due flessi. Pendenza obliqua verso sinistra.

Ad un certo punto nella curva si trovano due flessi con una pendenza negativa.

Poi a temperatura ancora minore la pendenza dei due flessi diventa esattamente orizzontale.

Il punto critico C: punto nell'intorno del quale l'isoterma ha pendenza orizzontale, allora è un punto fisso della sostanza. Temperatura critica dell'anidride carbonica è 31°C. il flesso diventa uno solo.

Allora l'isoterma passante per il punto critico è l'**isoterma critica**, inoltre possiamo individuare il volume specifico v_c e la pressione critica p_c .

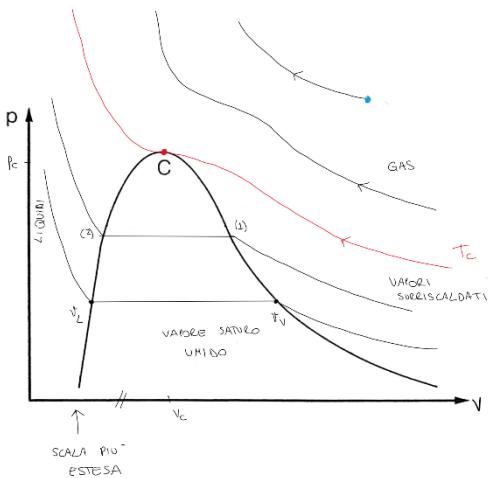
In tutte queste compressioni isoterme l'anidride carbonica rimaneva allo stato aeriforme. Per tutte le temperature superiori alla temperatura critica diciamo che non si può liquefare il gas per compressione isoterma e di conseguenza la zona del diagramma al di sopra dell'isoterma critica si chiama zona dei gas, intendendo per gas aeriformi che non possono essere trasformati in liquido per compressione isoterma.

Per $T > T_c$ tutti gli stati sono stati in cui la sostanza si trova nello stato aeriforme e questa zona si chiama zona dei gas.

(più si va lontani dal punto critico e più i gas si comportano come gas perfetti)

→ Gas = sostanza che rimane nello stato aeriforme in una compressione isoterma

Per $T < T_c$:



- Nel punto 1) inizia il passaggio di stato da aeriforme a liquido (inizio della condensazione), la pressione aumenta e il volume specifico diminuisce fino a questo punto.
- Poi continuando a comprimere, la curva isoterma rimane a pressione costante tra 1 e 2, poiché in questo intervallo si forma sempre più liquido → trasformazione di condensazione isoterma (da aeriforme a liquido). La pressione non aumenta più al diminuire del volume specifico. Una maggior quantità di aeriforme si trasforma in liquido e rimane sempre questo liquido in equilibrio con il proprio vapore. **È una trasformazione di stato è una isotermobarica**. La trasformazione è a pressione e a temperatura costante.
- Infine nel punto 2 tutto l'aeriforme è diventato liquido, a questo punto ho solo liquido; (i liquidi sono considerati incomprimibili)
- Continuando a comprimere, la pressione cresce, e poiché abbiamo un liquido il volume si mantiene praticamente costante → la curva è circa verticale.

N.B.: nel diagramma abbiamo due scale diverse sull'asse v indicate da // → nel primo tratto la scala è più estesa e la curva risulta più orizzontale rispetto a quella a destra. A sinistra del punto critico cambia la scala.

Abbassando ulteriormente la temperatura, la curva è qualitativamente simile a quella sopra però la condensazione inizia a volumi specifici sempre maggiori, cioè il punto limite superiore (v_v) è più a dx, invece il punto finale in cui si ottiene il liquido si ottiene per volumi ancora minori, cioè il punto limite inferiore è più a sx (ma meno), v_2 e v_L dovrebbero essere quasi su una curva verticale.

Unendo tutti i punti limite superiore (inizio della condensazione) si ottiene la curva limite superiore (unendo tutti i punti del tipo 1 e v_v), nella curva iniziano ad esserci delle particelle di liquido, liquido in equilibrio con il proprio vapore; invece, unendo tutti i punti limite inferiore (fine della condensazione → tutto liquido) otteniamo la curva limite inferiore, che è quasi verticale, punti di vapore che sono in equilibrio con il proprio liquido. **Campana dei vapori**, nella parte sinistra nel $p\nu$ è una retta verticale, non è una campana.

L'aeriforme compresso tra una curva limite superiore e l'isoterma critica è vapore surriscaldato = aeriforme che può essere condensato per compressione isoterma.

Alla sinistra della curva limite inferiore abbiamo liquido.

Tra la curva limite superiore e inferiore abbiamo vapore saturo umido (c'è stato aeriforme, c'è liquido ed è saturo poiché c'è equilibrio tra pressione e temperatura).

Sopra l'isoterma critica abbiamo il gas.

Osservazione: chiaramente anche un gas può essere liquefatto (come il vapore), ma tramite una trasformazione isobara, non con un'isobara isoterma o con un'isoterma.

Per distinguere qualsiasi punto nel piano $p\nu$ basta conoscere la temperatura T e la pressione p per individuare lo stato, tranne nella campana dei vapori in cui se conosco T e p non so a quale ν mi trovo, perché nella retta abbiamo la pressione costante → serve un altro parametro per indicare lo stato del vapore saturo umido:

$$x = \frac{M_V}{M_V + M_L} : \textbf{titolo del vapore}$$

è definito come la massa di vapore diviso la massa di vapore di quella di liquido.

- Se $M_L = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow$ sono tutti punti sulla curva limite superiore, dove ho vapore e non ho liquido;
- Se $M_V = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ sono tutti punti sulla curva limite inferiore;

All'interno della campana dei vapori possiamo disegnare tutte le curve con titolo costante. (tagliano i segmenti orizzontali in ragione proporzionale alla massa e al volume specifico).

Definiamo il volume specifico ν all'interno delle curve limite:

$$\nu = \frac{V_L + V_V}{M_L + M_V} = \frac{M_L \nu_L + M_V \nu_V}{M_L + M_V} = (1 - x) \nu_L + x \nu_V$$

$$\Rightarrow \nu = \nu_L + x(\nu_V - \nu_L)$$

I volumi specifici dei punti che si trovano tra ν_L e ν_V sono proporzionali alla massa, a metà del segmento il titolo è 0.5.

⇒ in definitiva, il diagramma $p\nu$ delle sostanze va disegnato in questa scala:

- La curva limite inferiore nella pratica è verticale (poiché il liquido è incomprimibile → $\nu = \text{cost}$)
- La curva limite superiore è molto più allungata poiché il volume specifico nello stato di vapore può essere anche molto grande.
- A sinistra le isoterme sono quasi verticali.

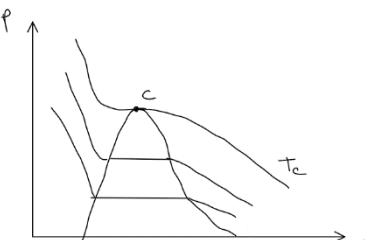


Diagramma pT delle sostanze

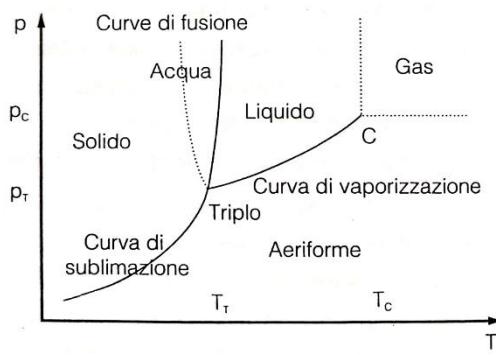
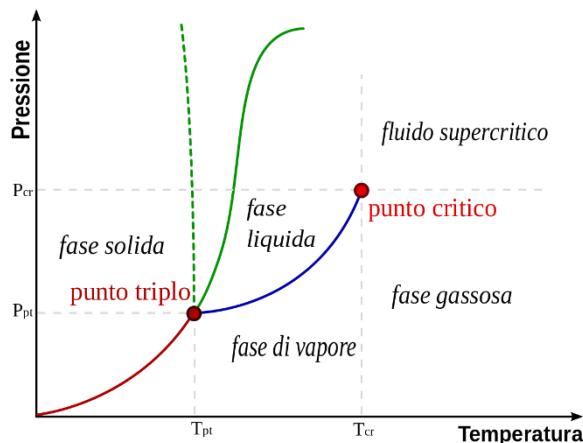


Diagramma che lega la pressione alla temperatura, riprendiamo la definizione di punto triplo. Quando abbiamo stabilito la scala internazionale abbiamo detto che la temperatura del punto triplo dell'acqua è 273,16 ad una pressione 6106×10^{-3} , molto inferiore alla pressione atmosferica. Il punto fisso del diagramma pT è il punto triplo T , in cui coesistono le tre fasi solido, liquido e aeriforme: a sinistra c'è il solido, a destra il vapore e in mezzo il liquido. Per $p < p_T$ non si passa attraverso il liquido ma si va direttamente dal solido all'aeriforme (la naftalina).

- individuiamo la curva di equilibrio tra pressione e temperatura del passaggio di stato: $p_e = f(T_e)$
- Curva di sublimazione;
- (nel passaggio da solido a vapore, se non si fornisce tutti il calore latente di sublimazione, rimane sulla curva)

Per $p > p_T$ scaldando il solido, passa dallo stato solido allo stato liquido per $T > T_T$, se si cede tutto il calore latente di liquefazione.

- curva di liquefazione (alla destra dell'isoterma del punto triplo); scaldando ulteriormente il liquido passa allo stato di vapore → curva di vaporizzazione.



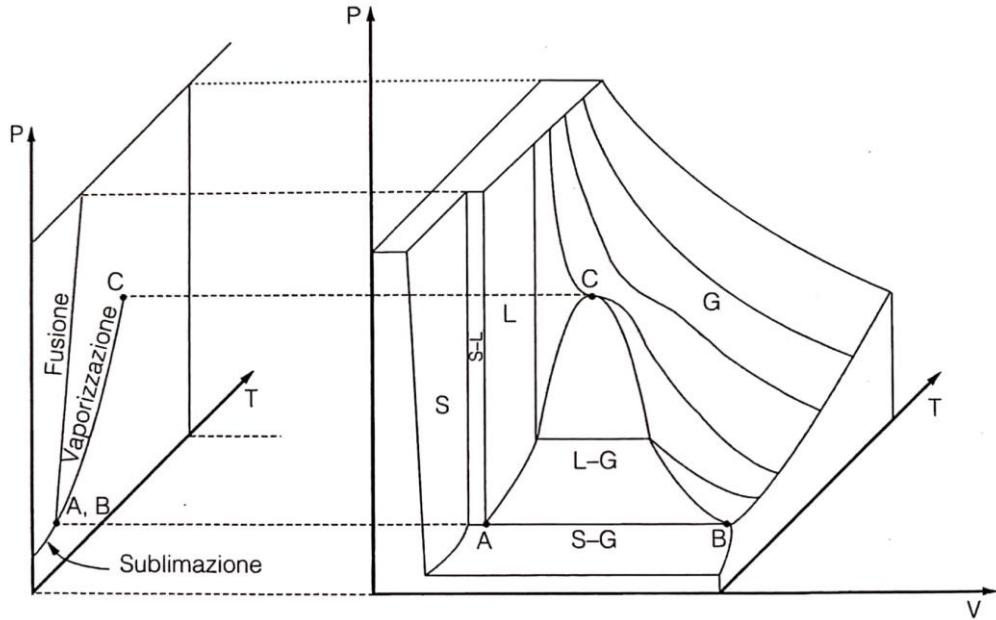
tutte e tre queste curve sono analiticamente espresse da $p_e = f(T_e)$ e sono tutte e tre curve a pendenza positiva e concavità verso l'alto: $\frac{dp_e}{dT_e} > 0$; la e al pedice sta per "equilibrio", fa eccezione solo l'acqua, dove la curva di liquefazione è a sinistra dell'isoterma del punto triplo e ha pendenza negativa: $\frac{dp_e}{dT_e} < 0$

Questo ci dice che l'acqua è l'unica sostanza che per compressione si liquefa, perché la curva di liquefazione sta a sinistra dell'isoterma.

Un altro punto fisso del diagramma è il punto critico C ha $p_c = 221$ Bar e $T_c = 274$;

a destra dell'isoterma critica (verticale per il punto critico) abbiamo i gas e a sinistra i vapori surriscaldati, i vapori in equilibrio con il liquido e il liquido.

Diagramma pVT



(stiamo facendo il diagramma per tutte le sostanze esclusa l'acqua).

Vediamo le curve tridimensionali; T è perpendicolare al piano del foglio e pV sul piano. La campana è come se fosse un "lenzuolo".

Riprendiamo l'espressione di c_d che definisce il calore specifico di dilatazione isotermo:

$$c_d = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \frac{q}{\Delta v} \Big|_T : \text{equazione di Clapeyron}; \frac{q}{\Delta v} \Big|_T \text{ equazione operativa.}$$

\Rightarrow in un cambiamento di stato, in cui $T = \text{cost}$, otteniamo:

$$q = \Delta v \cdot T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$$

Inoltre, nel caso dei cambiamenti di stato (in cui T è costante) abbiamo visto che c'è una relazione biunivoca tra pressione e temperatura di equilibrio, quindi la derivata parziale diventa una derivata totale della p_e sulla T_e :

$$p_e = f(T_e) \rightarrow q = \Delta v T_e \frac{dp_e}{dT_e}$$

$\frac{dp_e}{dT_e}$ è la pendenza di ciascuna curva $p_e = f(T_e)$.

Così, l'equazione di Clapeyron mette in relazione il calore latente del passaggio di stato con l'equazione di equilibrio di p_e e T_e .

Inoltre, se separiamo le variabili otteniamo:

$$\frac{dT_e}{T_e} = \frac{\Delta v}{q} \cdot dp_e \rightarrow \ln(T_e) = \frac{\Delta v}{q} p_e + \text{cost};$$

cioè noto il Δv e il calore latente q , possiamo sfruttare l'equazione di Clapeyron per mettere in relazione T_e con p_e per trovare la relazione $p_e = f(T_e)$.

Inoltre se separiamo le variabili, otteniamo:

$$\frac{dT_e}{T_e} = \frac{\Delta v}{q} dp_e \Rightarrow \ln(T_e) = \frac{\Delta v}{q} p_e + \text{cost};$$

cioè noto il Δv e il calore latente q , possiamo sfruttare l'equazione di Clapeyron per mettere in relazione T_e con p_e .

Osservazione:

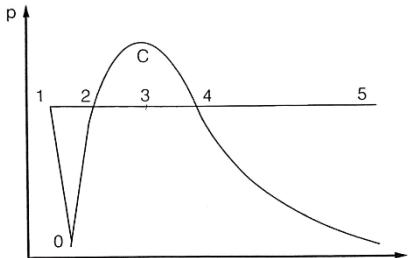
abbiamo detto che per tutte le sostanze per la vaporizzazione e per la sublimazione abbiamo:

$$\frac{dp_e}{dt_e} > 0;$$

poiché deve essere calore latente $q > 0$ per passare da stato inferiore allo stato superiore allora deve essere:

$\Delta v > 0 \rightarrow$ il volume specifico aumenta nel passaggio di stati da solido ad aeriforme e da liquido ad aeriforme (sublimazione e vaporizzazione).

Nel passaggio da solido a liquido, cioè nella liquefazione, per tutte le sostanze si ha ancora $\Delta v > 0$.



Invece, per l'acqua nel caso della liquefazione, abbiamo:

$\frac{dp_e}{dt_e} < 0; \Rightarrow \Delta v < 0 \rightarrow$ nel caso dell'acqua il volume specifico diminuisce (tra 0° e 4°) rispetto al solido.

Diagramma hs

Costruiamo il diagramma *hs* corrispondente al diagramma *pV*.

Riprendiamo l'espressione generale di dh e vogliamo calcolarla in tutti i punti:

$$dh = c_p dT + \left[v - \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right] dp$$

L'entalpia è una grandezza funzione di stato definita a meno di una costante quindi dobbiamo definire lo stato di riferimento; lo prendiamo come lo stato $p_0 T_0$ di liquido saturo alla temperatura di 0 Celsius, cioè preso sulla curva limite inferiore, alla temperatura di 0° e quindi ad una pressione molto bassa, non la pressione atmosferica. Disegno l'isoterma a T_0 , allora assumiamo che in questo stato di riferimento $h_0 = 0$.

Allora, poiché dh è un differenziale esatto, possiamo trovare l'entalpia di tutti i punti seguendo una qualsiasi trasformazione \rightarrow sceglio l'isoterma T_0 da 0 a 1 e poi l'isobara da 1 a 5.

- Isoterma T_0 da 0 a 1;

$$dh = \left[v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right] dp \rightarrow h_1 - h_0 = \int_0^1 \left[v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right] dp \sim v(p_1 - p_0)$$

per i calcoli ingegneristici approssimiamo v cost. Abbiamo trovato h_1 perché $h_0 = 0$

- Isobara da 1 a 2;

$$dh = c_p dT \rightarrow h_2 - h_1 = \int_1^2 c_p dT = c_{p_m} (T_2 - T_1)$$

come approssimazione ingegneristica sceglio c_{p_m} medio

- Isobara da 2 a 4: (la variazione di entalpia è uguale al calore scambiato)

$$h_4 - h_2 = q_v : \text{calore latente di vaporizzazione}$$

In un'isobara la differenza di entalpia è pari al calore scambiato

$$\Rightarrow h_3 - h_4 = q_v \cdot x \begin{cases} \text{se } x = 0, 3 \equiv 2 \\ \text{se } x = 1, 3 \equiv 4 \end{cases}$$

- Isobara da 4 a 5;

$$h_5 - h_4 = \int_4^5 c_p dT = c_{p_m} (T_5 - T_4)$$

Ora riprendiamo l'espressione generale dell'entropia ds :

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dp$$

anche l'entropia è una grandezza funzione di stato → scegliamo lo stesso stato di riferimento zero in cui assumiamo $s_0 = 0$.

Inoltre, di nuovo scegliamo le stesse trasformazioni: isotermia T_0 da 0 a 1 e isobara da 1 a 5.

Isotermia da 0 a 1; è anche una isocora e isoentropica

$$ds = - \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dp \rightarrow s_1 - s_0 = - \int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dp \approx 0 \quad (\text{volume costante})$$

Isobara da 1 a 2;

$$ds = c_p \frac{dT}{T} \rightarrow s_2 - s_1 = \int_1^2 c_p \frac{dT}{T} = c_{p_m} \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)$$

Isobara da 2 a 4;

$$s_4 - s_2 = \frac{q_v}{T} \rightarrow s_3 - s_2 = \frac{q_v}{T} x$$

Isobara da 4 a 5; (punti di vapore surriscaldato)

$$s_5 - s_4 = c_{p_m} \ln \left(\frac{T_5}{T_4} \right)$$

Osservazione;

abbiamo calcolato l'entalpia h in tutti i punti, fissando $h_0 = 0$ nello stato di riferimento. Allora abbiamo calcolato anche l'energia interna u in tutti i punti poiché $u = h - pv$; ma lo stato di riferimento di u dipende da quello di h , quindi non posso definire un nuovo stato di riferimento ma dipende da quello dell'entalpia:

$$u_0 = h_0 - p_0 v_0 \Rightarrow u_0 = -p_0 v_0$$

13-10.-21

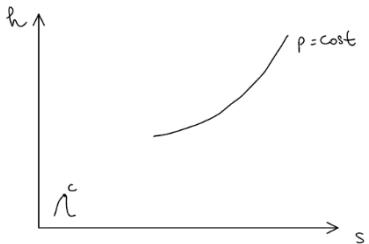
Vediamo come è fatto il diagramma hs corrispondente al diagramma $p\nu$ in cui procediamo con un'isoterma da 0 a 1 e con un'isobara sa 1 a 5.

Per ora abbiamo visto che nel diagramma hs la **pendenza dell'isobara è pari alla temperatura** e ha una concavità verso l'alto:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)_p = T \quad (\text{se } \uparrow T \Rightarrow \uparrow \text{pendenza})$$

Il diagramma dell'isobara era una curva esponenziale che cresceva di pendenza con la temperatura. Quando parlavamo in generale di gas eravamo in alto a destra rispetto al punto critico e alle curve limite.

Però avevamo considerato solo i gas, quindi la campana dei vapori era molto piccola vicino all'origine, così come il punto critico.

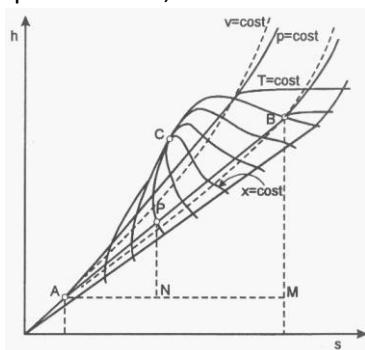


Infatti, più ci si allontana dalla campana, più il comportamento del gas si avvicina a quello del gas perfetto; allora per i gas perfetti abbiamo visto che:

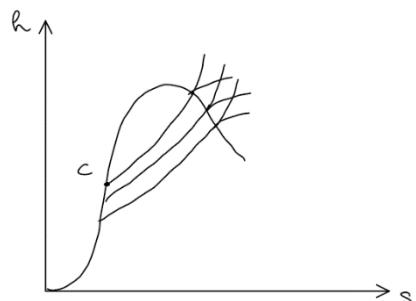
$$dh = c_p(T) dT;$$

poiché studiamo isoterme, $T = \text{cost}$, cioè $dT = 0$ e quindi $dh = 0$

in definitiva, il **diagramma hs delle sostanze** lo disegniamo in questo modo, indicando sia le isobare che le isoterme:



Le curve limite nel diagramma hs hanno un flesso e il punto di flesso è il punto critico C.



La pendenza immediatamente a destra dell'isoterma (intorno destro del punto critico) è la curva che deve avere la pendenza più vicina al punto C. La pendenza nel flesso non può essere negativa come nel diagramma cancellato sopra. Ci dobbiamo riferire a questo diagramma piuttosto che a quello della pagina sopra (cancellato).

La curva che è presente all'interno delle curve limite è una curva in cui la pendenza è costante, curva con pendenza costante. Pendenza dell'isobara all'interno delle curve limite. Salendo di pressione la temperatura corrispondente è maggiore e quindi la pendenza è maggiore e quindi le curve sono divergenti andando verso destra.

La curva isobara nell'intorno del punto C deve avere la massima pendenza quindi è sbagliato anche questo disegno. Le due curve limite nel diagramma hs sono:

- Curva limite inferiore: la curva è sempre un esponenziale crescente fino al punto critico che è il punto di flesso;
- Curva limite superiore: ha la concavità verso il basso, esponenziale crescente;

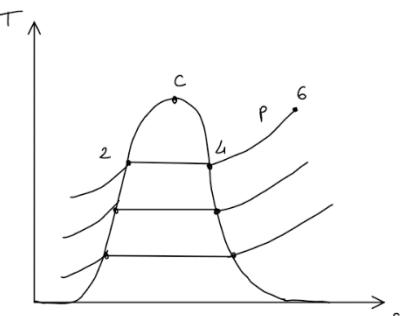
le isoterme all'interno sono delle rette, al di fuori tendono ad essere orizzontali perché allontanandosi dalla curva limite superiore il gas tende ad essere un gas perfetto. La tangente destra deve essere uguale a quella sinistra, c'è continuità della tangente sia per la curva limite superiore che inferiore.

Diagramma Ts

Abbiamo visto che nel diagramma Ts la pendenza dell'isobara è pari a:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p = \frac{T}{c_p}, \quad \text{con concavità verso l'alto} \quad (\text{se } \uparrow T \text{ e } c_p \approx \text{cost} \Rightarrow \uparrow \text{pendenza})$$

Anche in questo caso la campana dei vapori era molto piccola vicino all'origine, poiché avevamo considerato solo gas.



Quando siamo lontani dalle curve limite l'isobara ha l'andamento che già conosciamo.

Le isobare all'esterno delle curve limite hanno sempre concavità verso l'alto.

Nel punto 4 siamo sulla curva limite superiore (comincia la liquefazione).

Tra 4 e 2 l'isobara deve essere anche isotermica; poiché la pendenza dell'isobara nel piano Ts è $\frac{T}{c_p}$, e visto che la temperatura è costante e $c_p \rightarrow \infty$ per le isoterme (poiché $c_p = \left.\frac{dq}{dT}\right|_p$ con $dT = 0$ in un cambiamento di stato dq è finito), la pendenza è nulla, quindi l'isobara è orizzontale tra 4 e 2.

Quando arriviamo in 2 siamo sulla curva limite inferiore.

Andando oltre il punto 2 la pendenza torna ad essere quella di prima, anche se ora abbiamo un liquido.

Considerando isobare a pressione minore l'andamento sarà simile, quindi le curve hanno l'andamento di una campana gaussiana, dove il punto critico è nella sommità.

Nel punto 4 discontinuità della tangente.

Gas reali: Equazioni del viriale

Descriviamo i gas reali come una serie di elementi e di potenze per esprimere il prodotto pv :

$$1^a \quad pv = A + Bp + Cp^2 + \dots$$

$$2^a \quad pv = A \left(1 + \frac{B'}{v} + \frac{C'}{v^2} + \dots \right)$$

(B e C numeri caratteristici del gas)

Osserviamo subito che il GAS PERFETTO è il caso limite del gas reale quando $p \rightarrow 0$ e/o $v \rightarrow \infty$

Vogliamo trovare una relazione tra B, B', C, C' in modo tale da poter esprimere il comportamento del gas reale come la serie di potenze della pressione e del volume specifico.

Esplicitiamo p dalla seconda e sostituiamo nella prima:

$$p = \frac{RT}{v} \left(1 + \frac{B'}{v} + \frac{C'}{v^2} + \dots \right)$$

$$RT \left(1 + \frac{B'}{v} + \frac{C'}{v^2} \right) = RT + B \frac{RT}{v} \left(1 + \frac{B'}{v} + \frac{C'}{v^2} \right) + C \frac{R^2 T^2}{v^2} \left(1 + \frac{B'}{v} + \frac{C'}{v^2} \right)^2$$

Facciamo i prodotti e trascuriamo tutte le potenze superiori di v^2 ;

$$RT \frac{B'}{v} + RT \frac{C'}{v^2} = \frac{BRT}{v} + \frac{BB'RT}{v^2} + \frac{CR^2T^2}{v^2}$$

Uguagliamo i termini con v e quelli con v^2 ;

- $RT \frac{B'}{v} = \beta \frac{RT}{v} \Rightarrow B' = B$
- $RT \frac{C'}{v^2} = BB' \frac{RT}{v^2} + C \frac{R^2 T^2}{v^2} \Rightarrow C' = BB' + CRT$

Mettendo insieme i risultati otteniamo il legame tra C e C' tramite B:

$$C' = B^2 + CRT$$

Sostituendo nelle serie di potenze:

$$pv = RT + p(B + Cp) = RT + pf(p)$$

$$pv = RT + \frac{RT}{v} \left(B + \frac{C'}{v} \right) = RT + \frac{RT}{v} \cdot f'(v)$$

Dove $f(p)$ e $f'(p)$ sono funzione anche di B e C, in particolare per il gas perfetto $f(p) = 0$;

il parametro B ha un significato importante (è in relazione con le forze di attrazione e repulsione tra le molecole):

- Se T è bassa $\rightarrow B < 0$;
- Se T è alta $\rightarrow B > 0$

$\Rightarrow \exists$ una temperatura T_B t.c. $B = 0$: temperatura di Boyle.

La temperatura di Boyle ha un certo valore per ogni sostanza, ad esempio $T_B(\text{aria}) = 81, T_B(N_2) = 50 \dots$

Osservazione;

il senso di cercare un comportamento dei gas reali che, a meno di qualche costante, abbia un modo comune di rappresentazione è molto importante se si devono inventare nuovi gas.

(per esempio il buco dell'ozono era provocato dai fluoroclorocarburi)

È comodo ragionare in base al comportamento dei gas che si vuole "imitare" e supporre che il nuovo gas si comporti in maniera simile a patto di cambiare le costanti B,C,..

Questa motivazione porta alla ricerca degli stati corrispondenti che noi non tratteremo.
(PROBABILE DOMANDA PER LA LODE?)

Equazioni di Van der Waals (1873)

Si modifica l'equazione dei gas perfetti introducendo il comportamento molecolare delle particelle.
Riscriviamo l'equazione di stato dei gas perfetti per unità di mole:

$$pv = RT \rightarrow p\tilde{v} = R_u T$$

Nell'equazione di Van der Waals il volume specifico molare viene diminuito del valore del volume proprio delle molecole stesse (**b: covolume**) per tener conto della dimensione finita; invece la pressione è aumentata in relazione al volume specifico molare tramite **a** (se \tilde{v} è molto grande, p non ne risente, ma se \tilde{v} è piccolo le molecole sono soggette a forze di repulsione e contribuiscono alla pressione del sistema):

Scriviamo l'equazione che modifica l'equazione dei gas perfetti:

$$(\tilde{v} - b) \left(p + \frac{a}{\tilde{v}^2} \right) = R_u T$$

Con a, b parametri caratteristici delle varie sostanze.

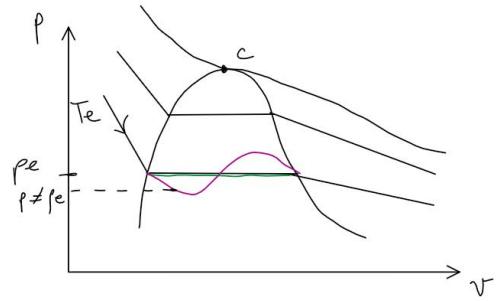
Chiaramente, se \tilde{v} è molto grande, allora $b \ll \tilde{v}$ e $\frac{a}{\tilde{v}^2} \ll p$ e riotteniamo $p\tilde{v} = R_u T$.

Possiamo esplicitare la pressione p e rappresentiamo l'equazione di Van der Waals nel diagramma $p\tilde{v}$ dove abbiamo già rappresentato i risultati dell'esperienza di Andrews:

$$p = \frac{R_u T}{\tilde{v} - b} - \frac{a}{\tilde{v}^2}$$

L'equazione di Van der Waals spiega il comportamento non stazionario o transitorio del fenomeno di sottoraffreddamento e sovrariscaldamento delle molecole, che però tendono a tornare all'equilibrio.

Rispetto alla situazione di equilibrio nell'esperienza di Andrews, l'andamento dell'equazione di Van der Waals tra le curve limite spiega il comportamento degli stati metastabili (non di equilibrio) che danno comportamenti transitori se si procede in maniera troppo rapida.



Da T_e diminuisco la pressione, arrivo sulla curva limite inferiore, se la diminuzione di pressione è rapida la curva nella campana non è una costante ma c'è una curva al di sotto dell'orizzontale (stato metastabile) poi la pressione va al di sopra di quella di equilibrio.

Le costanti a, b vanno determinate e noi cerchiamo di relazionarle con il punto critico che è fisso. Quindi studiamo il comportamento dell'equazione di Van der Waals in corrispondenza del punto critico, lì dove c'è l'isoterma critica.

Poiché il punto critico è un flesso orizzontale, la derivata prima e la derivata seconda devono essere nulle:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial v} \right|_c = -\frac{R_u T_c}{(\tilde{v}_c - b)^2} + \frac{a}{(\tilde{v}_c)^2} = 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right|_c = \frac{2R_u T_c}{(\tilde{v}_c - b)^3} - \frac{3a}{(\tilde{v}_c)^4} = 0 \quad (\text{flesso})$$

Abbiamo ottenuto 2 equazioni che mettono in relazione T_c e \tilde{v}_c nelle due incognite a, b .

Otteniamo:

$$b = \frac{\tilde{v}_c}{3}$$

$$a = 3\tilde{v}_c^2 p_c$$

$$E R = \frac{b}{3} \frac{p_c \tilde{v}_c}{T_c}$$

Dove \tilde{v}_c è il volume critico molare.

Sostituendo il valore del volume critico si ottiene:

$$\tilde{v}_c = \frac{3}{8} R_u \frac{T_c}{p_c} \rightarrow b = \frac{1}{8} R_u \frac{T_c}{p_c} \text{ e } a = \frac{27}{64} R_u^2 \frac{T_c^2}{p_c}$$

L'equazione dei gas perfetti si può scrivere come **equazione del virale** con una serie di potenze di \tilde{v} :

$$p\tilde{v} = R_u T + \frac{R_u T}{\tilde{v}} \left(b' - \frac{a}{R_u T} \right) + \frac{R_u T}{\tilde{v}^2} \cdot b'^2$$

L'equazione di Dieterici, dobbiamo solo sapere che esiste, dopo l'equazione di Van der Waals sono state proposte altre versioni di equazioni per i gas reali avendo compreso il modo di ragionare andando a modificare lo stato dei gas tenendo conto del volume e della pressione delle molecole.

$$p = \frac{RT}{v - b} e^{-\frac{a}{RTv}}$$

Stessa cosa per l'equazione di Berthelot :

$$p = \frac{RT}{v - b} - \frac{a}{Tv^2}$$

\tilde{v} è il volume specifico rispetto alla massa molare;

$$pv = nR_u T \rightarrow p \frac{v}{n} = R_u T \text{ e } \tilde{v} = \frac{v}{n}$$

Applichiamo l'equazione di Van der Waals alle espressioni più generali che abbiamo trovato per i gas:

Esperienza di Joule

- $du = c_v dT + \left[T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - p \right] dv$ (se il gas è perfetto il contributo nelle quadre è zero)

dall'equazione di Van der Waals calcoliamo la derivata parziale:

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2} \rightarrow \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v = \frac{R}{v-b}$$

(se il gas è non perfetto)

$$\Rightarrow du = c_v dT + \left[\frac{RT}{v-b} - p \right] dv = c_v dT + \frac{a}{v^2} dv$$

Ricordiamo che nel caso di gas perfetti, $du = c_v dT$; quindi, nell'esperienza di Joule dove $du = 0$, si otteneva un $dT = 0$.

Ora, invece nel caso del gas reale, imponendo $du = 0$ si ottengono delle variazioni di temperatura $dT \neq 0$, in dipendenza dalle variazioni di volume specifico dv .

- $dq = du + p dv = c_v dT + \left[p + \frac{a}{v^2} \right] = c_v dT + \frac{RT}{v-b} dv$ (calore scambiato in funzione di dT e dv)
in una trasformazione a $T = \text{cost}$, $dT = 0$;

$$dq = \frac{RT}{v-b} dv \Rightarrow q = RT \ln \left(\frac{v_2-b}{v_1-b} \right) \neq 0$$

per un gas reale anche se la trasformazione è isoterma il calore scambiato è diverso da zero, seppur piccolo.

- $dl = p dv$ (sistema chiuso)

$$l = \int_1^2 p dv = \int_1^2 \left(\frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2} \right) dv = RT \ln \left(\frac{v_2-b}{v_1-b} \right) - \left(\frac{a}{v_1} - \frac{a}{v_2} \right)$$

Con $T = \text{cost}$

- $dl = -vdp$ (sistema aperto)

$$l = - \int_1^2 v dp = \int_1^2 d(pv) - \int_1^2 pdv = (p_2 v_2 - p_1 v_1) - RT \ln \left(\frac{v_2-b}{v_1-b} \right) + \left(\frac{a}{v_1} - \frac{a}{v_2} \right)$$

Dove $- \int_1^2 pdv$ è il lavoro scambiato

Esperienza di Joule-Thompson

Ricordiamo il tubo con stenosi;

- $dh = c_p dT + \left[v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right] dp$

nell'esperienza di Joule-Thompson avevamo trovato il coefficiente di J-T così definito:

$$c_{JT} = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_h$$

Allora l'espressione del coefficiente di J-T lo otteniamo imponendo $dh = 0$:

$$dh = 0 \rightarrow c_{JT} = \frac{dT}{dp} = \frac{1}{c_p} \left[T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p - v \right]$$

per calcolare $\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$ dobbiamo trovare l'espressione di v in funzione di T dall'equazione di Van der Waals che è possibile solo in maniera approssimata.

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2} \rightarrow \left(p + \frac{a}{v^2} \right) = \frac{RT}{v-b}$$

$$v - b = \frac{RT}{p+\frac{a}{v^2}} + b = \frac{RT}{p} \left(\frac{1}{1+\frac{a}{pv^2}} \right) + b \quad (\text{ho portato a destra } b)$$

$$v = \frac{RT}{p} \left(\frac{1-\frac{a}{pv^2}}{1-\frac{a^2}{p^2v^4}} \right)$$

Dove ho moltiplicato e diviso per $1 - \frac{a}{pv^2}$

Facciamo a questo punto delle ipotesi semplificative; immaginiamo che p^2v^2 è molto molto grande e quindi $(\frac{a^2}{p^2v^4})$ si trascura rispetto a 1:

$$v = b + \frac{RT}{p} - \frac{aRT}{p^2v^2}$$

Inoltre, nel terzo termine supponiamo di poter considerare $pv = RT$ come nel caso dei gas perfetti, ma limitatamente a quest'ultimo termine:

$$v = b + \frac{RT}{p} - \frac{a}{RT}$$

Così abbiamo ottenuto un'espressione di v .

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p &= \frac{R}{p} + \frac{a}{RT^2} \\ \Rightarrow c_{JT} &= \frac{1}{c_p} \left[\frac{RT}{p} + \frac{Ta}{RT^2} - v \right] = \frac{1}{c_p} \left[\frac{RT}{p} + \frac{a}{RT} - b - \frac{RT}{p} + \frac{a}{RT} \right] = \frac{1}{c_p} \left(\frac{2a}{RT} - b \right) \\ c_{JT} &= \frac{1}{c_p} \left(\frac{2a}{RT} - b \right) \end{aligned}$$

Nell'esperienza di J-T c'è una differenza di temperatura e qui viene interpretata analiticamente.

Rimangono le miscele di aria umida, fatta da Petracchi anche per quanto riguarda gli esercizi.

Finito il capitolo 7.

Capitolo 8 no.

Impianti frigoriferi SI.

14-10.-21

Esercitazione con Petracci.

Settimana 5

19-10-21

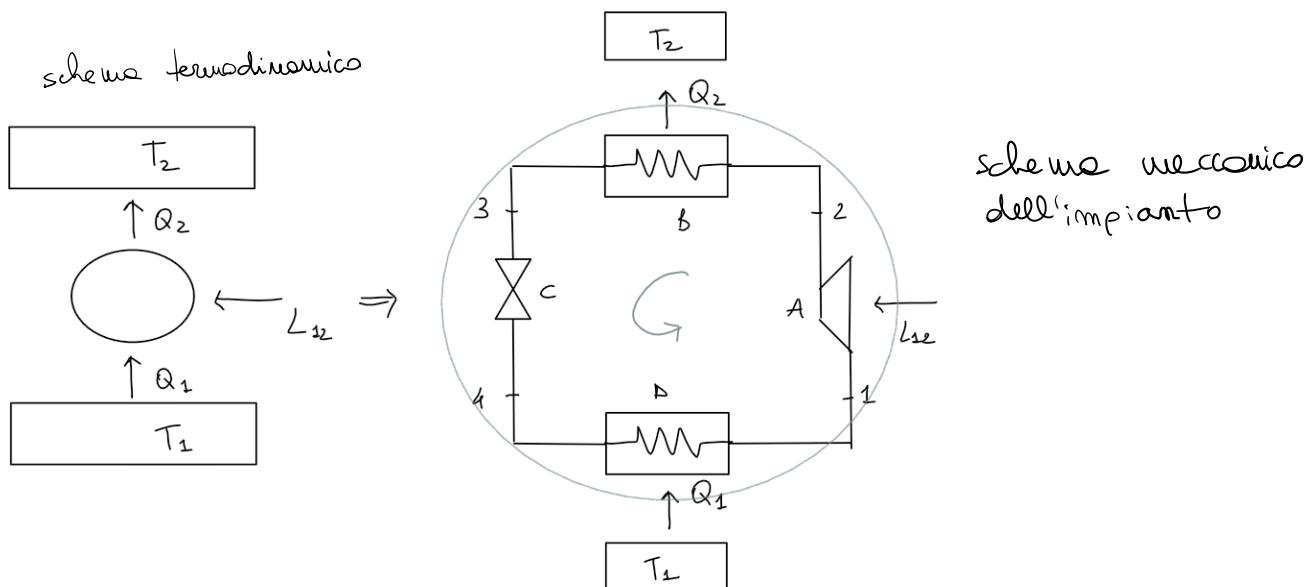
Ciclo frigorifero a compressione di vapore

Supponiamo che il fluido frigorifero che circola nel sistema sia ammoniaca NH_3 .

Ricordiamo lo schema termodinamico del ciclo inverso che può essere usato o come impianto frigorifero (se vogliamo sottrarre calore alla sorgente inferiore) o come pompa di calore (se vogliamo cedere calore alla sorgente superiore);

L_{12} lavoro generico.

Ora siamo in grado di capire che all'interno del sistema del ciclo inverso c'è il seguente schema:



Q_1 calore da sottrarre a T_1 per mantenerlo a temperatura costante. Q_2 è il calore che va a finire nell'aria ambiente che è a temperatura T_2 .

Cosa c'è nel sistema? Che cosa fa sì che possa sottrarre calore Q_1 e cedere calore Q_2 attraverso lavoro. Vaporizzatore tubo di rame (B e D) avvolto ad elica che si chiama serpentina, è uno scambiatore di calore dove si ha il passaggio da liquido a vapore. Lo stato 4 è con del liquido e lo stato 1 con vapore.

Supponendo di partire da 1, il fluido entra nel compressore e se si suppone che la trasformazione sia isoentropica e arrivando alla pressione superiore il punto sarà il punto 2. A questo punto il fluido nello stato 2 entra nello scambiatore di calore che nella prima parte non è un vaporizzatore ma è un semplice raffreddamento, dal punto 2 fino alla curva limite superiore. Solo a quel punto il fluido condensa e quindi diminuisce sulla isoterma isobara. Supponendo che il punto 3 sia sulla curva limite inferiore, il punto 3 uscita dal condensatore lo supponiamo essere l'ingresso nella valvola di laminazione. La valvola di laminazione è una trasformazione irreversibile che si rappresenta con una linea tratteggiata in cui l'entalpia iniziale è uguale a quella finale (trasformazione 3-4).

Valvola di laminazione → tubo capillare (nella posteriore del frigorifero)

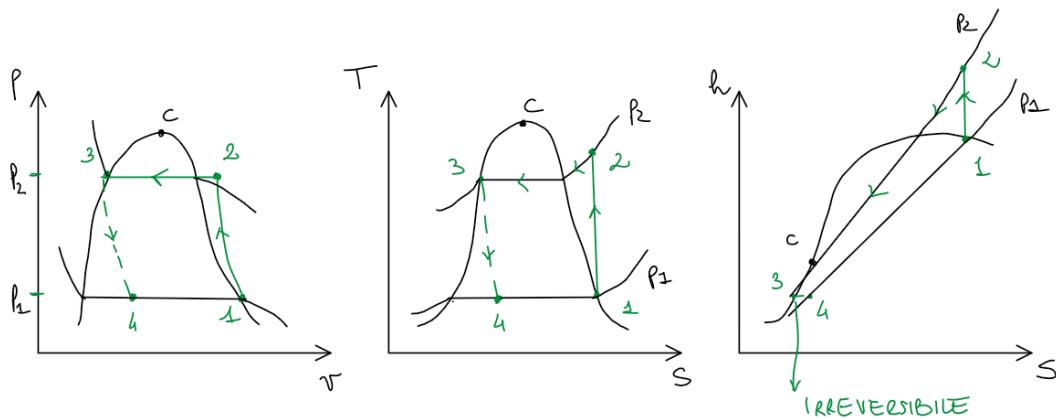
4-1 vaporizzatore.

Il vapore nello stato 1 viene compresso, quando arriva in 2 il fluido deve cedere il calore Q_2 e lo fa con un condensatore a temperatura superiore a quella dell'ambiente e che cede calore all'ambiente e riporta il fluido dallo stato di vapore a quello di liquido.

Nello stato 3 esce ad una pressione più elevata e si riporta ad una pressione più bassa nello stato 4 con una valvola di laminazione (tubicino capillare).

L'elemento A è un compressore di vapore; questo vapore compresso entra nello scambiatore di calore ad alta temperatura, cioè l'elemento B, dove cede calore alla sorgente superiore (solitamente l'ambiente); poi il vapore si espande in una valvola di laminazione, cioè nell'elemento C, e torna alla pressione inferiore. Infine, nello scambiatore di calore a bassa pressione cioè nell'elemento D, sottrae calore alla sorgente inferiore (= 4°C nel frigorifero o 0-1°C nel freezer).

Riportiamo il ciclo frigorifero nei tre diagrammi noti pV , Ts e hs



Abbiamo scelto il fluido frigorifero e in questo caso abbiamo supposto che sia ammoniaca;

Per prima cosa indichiamo il punto critico C e le curve limite della campana dei vapori (curva limite inferiore quasi verticale). In hs la curva limite inferiore è un'esponenziale, nel punto C un flesso e poi la curva limite superiore aumenta.

Ora stiamo parlando di fluidi che non sono acqua ma deve essere un liquido frigorigeno e il più vecchio tra questi fluidi è l'ammoniaca. Si sono espansi dagli anni 50 i clorofluorocarburi (Freon o Genetron), negli anni 90 sono stati sostituiti da altre sostanze. Questi diagrammi li disegno per il fluido termodinamico che deve circolare nei tubi del ciclo frigorifero, è una scelta progettuale.

Poi indichiamo l'andamento delle isoterme nel piano pV , delle isobare nel piano Ts ed hs → indichiamo le pressioni p_1 e p_2 tra le quali avviene il ciclo.

Supponiamo che l' NH_3 lavori sotto la campana.

Indichiamo lo stato 1 (uscita del vaporizzatore sulla curva limite superiore) a pressione inferiore p_1 , supponendo che in uscita l'elemento D di NH_3 sia totalmente sottoforma di vapore, cioè supponiamo che l'elemento D sia un vaporizzatore.

Allora lo stato 1 si trova alla pressione p_1 e si trova sulla curva limite superiore.

Poi, all'interno dell'elemento A avviene la compressione del vapore lungo un'adiabatica reversibile, che quindi è anche isoentropica (retta verticale nel Ts e nell' hs ed è pV^k nel diagramma pV).

Allora abbiamo raggiunto lo stato 2 a pressione superiore p_2 , che nel pV è nella zona dei vapori surriscaldati.

Poi l'elemento B è un condensatore che cede calore all'ambiente tramite un'isobara, allora lo stato 3 è sulla curva limite inferiore alla pressione superiore p_2 .

Il punto 3 è anche l'ingresso della valvola di laminazione. Infine, nell'elemento C abbiamo la valvola di laminazione in cui la pressione diminuisce in una trasformazione irreversibile ad $h = \text{cost}$, mentre l'entropia s aumenta perché ci sono cause di irreversibilità di prima specie (Δp e attrito)(orizzontale nell' hs e con gli andamenti indicati in pV e Ts)(3-4 trasformazione della valvola di laminazione).

Nel pV la curva limite inferiore è quasi una verticale, mentre la curva di limite superiore è come metà di una gaussiana. Mentre il Ts è una gaussiana dove il punto 1 è sempre sulla curva limite superiore, l'isoentropica è una verticale, poi da 2 il fluido si raffredda fino alla curva limite superiore, poi condensa fino alla curva limite inferiore e poi da 3 nella valvola di laminazione esce con la stessa entalpia 4.

Nel diagramma hs la tangente destra e la tangente sinistra della curva per C devono essere le stesse.

Per i cicli frigoriferi si introduce un quarto diagramma molto utile nella progettazione dei sistemi frigoriferi:

diagramma ph

Innanzitutto indichiamo il punto critico C e le curve limite. Le isoterme a sinistra della curva limite inferiore sono quasi verticali (esponenziali crescenti), a destra sono esponenziali decrescenti. Le isoentropiche non sono rette ma sono curve da sinistra verso destra.

Vediamo la curva verde; le isocore hanno una pendenza superiore a quella delle isoentropiche.

Le isobare sono orizzontali

Le isoterme tendono ad essere verticali nella zona dei liquidi sottoraffreddati, sono isobare tra le curve limite e tendono ad essere verticali nella zona dei vapori surriscaldati.

Le curve isoentropiche hanno andamento rettilineo (in realtà sono curve).

Le curva isocore hanno andamento rettilineo più verticale. Il punto 1 è in uscita dalla curva limite superiore, l'isoentropica del compressore è la 1-2. Il punto 2 è l'uscita dal compressore, poi la 2-3 è l'isobara di raffreddamento e poi di condensazione e supponiamo che sia fino ad una curva limite inferiore e poi la 3-4 è l'irreversibile isoentalpica $h = \text{cost}$ della valvola di laminazione, poi la 4-1 è la vaporizzazione nel vaporizzatore.

Il ciclo dell'impianto frigorifero a compressione di vapore parte dalla curva limite superiore nel punto 1, segue l'isoentropica arriva fino alla pressione superiore p_2 poi il raffreddamento nello scambiatore di calore (condensatore) è un'isobara, poi in 3 entra in una valvola di laminazione e con una irreversibile verticale si arriva in 4.

Progettazione

Vediamo come si procede ad una progettazione di massima di un impianto frigorifero. Immaginiamo di dover progettare una cella frigorifera che mantiene la temperatura $T_1 = -20^\circ\text{C}$; sul diagramma ph possiamo leggere la pressione p_1 corrispondente a questo valore T_1 , dopo aver scelto il fluido frigorifero.

Poi, poiché la sorgente a temperatura superiore è la temperatura ambiente, $T_2 = T_a = 20^\circ\text{C}$, sempre dal diagramma ph individuiamo la pressione p_2 corrispondente.

Il Q_1 che dobbiamo sottrarre da T_1 viene dalla stanza. C'è del calore che proviene dall'ambiente che entra nella cella frigorifera. Q_1 è il calore che bisogna sottrarre alla cella frigorifera affinché questa rimanga a -20°C . Questo Q_1 è un elemento importante della progettazione. Va calcolato e si potrà calcolare quando affronteremo la parte sulla trasmissione del calore.

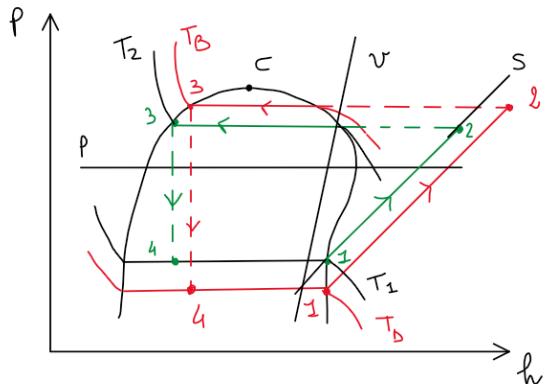
Il calore Q_2 che deve essere ceduto alla temperatura T_2 , è il calore che va dall'interno della cella frigorifera all'ambiente T_2 (aria della cucina, nei confronti della cucina il frigorifero è una stufa).

Q_1 è uno dei dati che va messo in ingresso all'impianto per fare la progettazione e Q_2 è quello che va all'ambiente.

Il fluido scorre nel vaporizzatore, invece la cella frigorifera deve avere una temperatura T_1 tale che il calore vada da T_1 alla temperatura di vaporizzazione. Significa che T_1 deve essere superiore alla temperatura di vaporizzazione del fluido, affinché il calore vada da T_1 a Q_1 , se $T_1 = -20^\circ\text{C}$ la temperatura di vaporizzazione è per esempio -30°C , a quel punto il calore va dalla cella frigorifera al vaporizzatore. Poi questo fluido, vaporizza, viene compresso. Poi quando viene raffreddato e poi condensa deve avere una temperatura superiore rispetto a T_2 perché il calore deve andare all'ambiente, quindi la temperatura di condensazione del fluido deve essere per esempio $+30^\circ\text{C}$.

Assegnato T_1 , T_2 , dovendo essere Q_1 il calore sottratto a T_1 , la temperatura di vaporizzazione deve essere -30°C e quella di condensazione $+30^\circ\text{C}$.

Così, note le due temperature delle sorgenti, otteniamo le due pressioni tra le quali lavora il ciclo; poi, se si suppone il vaporizzatore riesca a vaporizzare tutto il fluido, lo stato 1 è sulla curva limite superiore, e se il



condensatore riesce a condensare tutto il fluido lo stato 3 è sulla curva limite inferiore; a questo punto da 3 otteniamo 4 e da 1 otteniamo 2 → abbiamo delineato il ciclo 1-2-3-4.

Osserviamo che il calore q_1 sottratto ad ogni ciclo è:

$q_1 = h_1 - h_4$ calore che si sottrae durante la vaporizzazione alla temperatura inferiore.

Inoltre, conoscendo quanto si inserisce nel freezer, si conosce il calore \dot{Q}_1 (che dobbiamo calcolare noi) da sottrarre alla cella frigorifera.

Allora possiamo calcolare la portata di fluido frigorifero che deve circolare:

$$\dot{Q}_1 = Gq_1 \rightarrow G = \frac{\dot{Q}_1}{q_1} \quad (\text{calcolato in base ai dati di progetto})$$

Poi il lavoro che si spende ad ogni ciclo è (si ricava dal diagramma ph):

$$l_{12} = h_2 - h_1$$

Moltiplicando il lavoro per la portata, si ottiene la potenza meccanica da fornire al compressore per soddisfare le nostre richieste:

$$P = Gl_{12} = G(h_2 - h_1)$$

Infine, la potenza termica che deve scambiare lo scambiatore di calore B (condensatore) con l'ambiente, per ogni ciclo il condensatore scambia il calore $q_2 = h_2 - h_3$ (si ricava dal diagramma ph)

Quindi, la potenza termica è data da:

$$\dot{Q}_2 = Gq_2 = G(h_2 - h_3)$$

Invece, la potenza termica del vaporizzatore (D) è nota: \dot{Q}_1

* I calori \dot{Q}_1 e \dot{Q}_2 saranno calcolati dopo aver visto la terza parte del corso (quando vedremo condensatore e vaporizzatore).

Definiamo il **rendimento del ciclo frigorifero**:

$$\eta_f = \frac{h_1 - h_4}{h_2 - h_1} = \frac{q_1}{l_{12}}$$

Inoltre ricordiamo che il limite del rendimento di Carnot inverso è:

$$\eta_c = \frac{T_1}{T_2 - T_1}$$

Osservazione:

se la temperatura T_1 deve essere $T_1 = -20^\circ C$ e deve cedere calore al vaporizzatore (D), allora all'interno di D ci deve essere una temperatura inferiore a T_1 affinché Q_1 vada dalla sorgente al condensatore:

$$T_D = -30^\circ C.$$

Inoltre, se la temperatura T_2 deve essere $T_2 = T_a$ e deve sottrarre calore dal condensatore (B), allora all'interno di B ci deve essere una temperatura superiore a T_2 affinché Q_2 vada dal condensatore alla sorgente:

$$T_B = -30^\circ C.$$

Quindi, le temperature alle quali deve lavorare il ciclo sono $T_D < T_1$ e $T_B > T_2$ e di conseguenza, il ciclo lavora tra le due pressioni $p_D < p_1$ e $p_B > p_2$

⇒ il ciclo effettivo è quello rosso.

Conclusioni;

Abbiamo fatto un progetto di massima di un impianto frigorifero.

Date le due temperature delle sorgenti T_1 e T_2 e la potenza termica del vaporizzatore \dot{Q}_1 si sceglie il fluido frigorifero e così si determina il ciclo da compiere, inoltre si determinano tutte le superfici del progetto: portata G del fluido frigorifero, potenza P del compressore e potenza termica \dot{Q}_2 del condensatore.

Il costo fisso dell'impianto è legato alla portata G del fluido frigorifero, poiché più grande è l'impianto e maggiore è la quantità di materiale da usare (maggiori sono le dimensioni dei tubi, del termostato ecc.). una portata minore realizza un costo di investimento minore.

Invece, i costi operativi e di mantenimento sono legati al rendimento η_f (ciò che si ottiene rispetto a ciò che si spende); infatti, maggiore è il rendimento dell'impianto e minore è il lavoro che si spende.

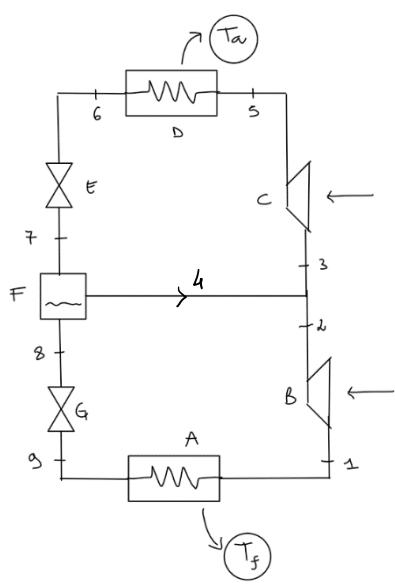
Di conseguenza, dal punto di vista ingegneristico, la scelta finale si fa scegliendo un ottimo economico tra costi fissi e costi variabili.

Costi fissi (legati alle dimensioni dell'impianto) e costi variabili (legati al rendimento) che sono i costi di investimento e di manutenzione.

Ciclo con camera di separazione (o camera Flash)

Facciamo la modifica sul ciclo frigorifero a compressione di vapore. Supponiamo di spezzare la compressione del vapore in due fasi una prima fase 1-2 e una seconda fase 3-5.

Abbiamo tre livelli di pressione, la pressione inferiore che è quella a cui funziona il vaporizzatore, la pressione superiore che è quella a cui lavora il condensatore e una pressione intermedia a cui si fa arrivare la pressione dopo la prima compressione.



Se metto due compressori e tre livelli di pressione avremo bisogno di due valvole. Infatti la valvola di laminazione E lavora tra la pressione superiore e la pressione intermedia e la valvola G lavora tra la pressione intermedia e quella inferiore. Tra le due valvole si mette la **camera di separazione o camera flash**, è una specie di recipiente da cui prendo dalla testa il vapore saturo umido e dal fondo il liquido saturo, la camera si trova alla pressione intermedia.

Il ciclo sarà il seguente:

Il liquido saturo della camera di separazione lo espando nella camera di laminazione, dopo l'espansione lo vaporizzo nel vaporizzatore fino ad 1, poi lo comprimo. A questo punto il vapore che prendevo dalla camera di separazione lo mescolo con il vapore compresso in 2 in modo di ottenere il punto 3 dalla miscelazione dei due. A questo punto il compressore superiore comprime da 3 fino a 5. Poi c'è il condensatore e valvola di laminazione.

L'elemento A è un vaporizzatore che sottrae calore alla sorgente alla temperatura inferiore T_f .

L'elemento B è un compressore che comprime il vapore fino ad una pressione intermedia.

Tra 2 e 3 c'è un mescolamento con il vapore proveniente dall'elemento F.

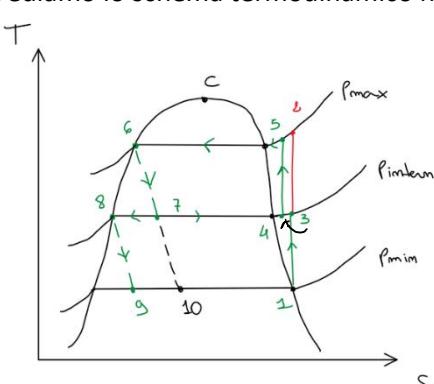
L'elemento C è un altro compressore che comprime il vapore fino alla pressione maggiore.

L'elemento D è un condensatore che cede calore all'ambiente esterno.

L'elemento E è una valvola di laminazione che espande il fluido.

L'elemento F è una camera di separazione dalla quale estraiamo il vapore saturo che si manda in 4 e il liquido saturo che torna al vaporizzatore A tramite la valvola di laminazione G.

Vediamo lo schema termodinamico nel diagramma T_s ;



Immaginiamo sempre di partire dal vaporizzatore in basso, che vaporizza fino ad una curva limite superiore nel punto 1. Nel diagramma T_s le isobare a destra della curva limite superiore sono divergenti verso destra, significa che il segmento verticale 1-3-2 è maggiore del segmento 1-3-(punto intermedio)-5. Compressione in maniera isoentropica fino alla pressione intermedia p_{int} poi lo mescolo con il punto 4 che era il vapore saturo sulla curva limite superiore in modo da ottenere per esempio il punto intermedio 3. A questo punto da 3 entriamo nel compressore e viene compresso fino alla pressione superiore nel punto 5.

Poi si entra nello scambiatore di calore e poi condensatore ed esce per esempio nel punto 6. Il condensatore raffredda il fluido fino a portare lo stato 6 sulla curva limite inferiore, immaginando che riesca a comprimere tutto il fluido.

La prima valvola di laminazione è la 6-7 irreversibile. 7 è lo stato del miscuglio liquido e vapore nella camera di separazione che poi mi dà luogo alla presa sulla testa della camera di separazione del vapor saturo (4), mentre sul fondo prendo il liquido in equilibrio con 4 ma è sulla curva limite inferiore che è 8, poi da 8 entro nella seconda valvola di laminazione ed esco in 9. Poi da 9 vaporizzo fino a 1.

Nella valvola di laminazione E l'espansione è irreversibile ad $h = \text{cost}$; otteniamo lo stato 7 di vapore saturo umido, da quale il vapore 4 va a miscelarsi con lo stato 2 mentre il liquido 8 esce dal basso della camera di separazione.

Nella valvola di laminazione G lo stato 8 si fa espandere irreversibilmente ad $h = \text{cost}$ fino allo stato 9. Poi da 9 vaporizzo fino ad 1 e ricomincio il ciclo.

Osservazione:

Se la differenza tra la pressione inferiore e superiore l'avessi impiegata con un salto di una sola compressione il ciclo sarebbe stato 1 verticale fino a 2, raffreddamento e condensazione fino a 6 poi da 6 sarei entrato nell'unica valvola e avrei fatto 7 fino all'ipotetico punto 10 se non ci fosse stata la valvola di separazione.

Se non avessi messo la camera di separazione e la pressione intermedia e la pressione iniziale e finale fossero state le stesse, il diagramma con due sole pressioni sarebbe stato 1-2-6, poi da 6 scendeva da 7 fino a 10.

Quale sarebbe stata la differenza con uno o due compressori? Con due compressori avrei avuto 9 come punto di uscita dalla seconda valvola di laminazione e non 10.

La differenza tra i due sarebbe stato che $h_1 - h_9 > h_1 - h_{10}$ quindi il q_1 sottratto dal vaporizzatore è più piccolo se c'è un solo compressore. Siccome è più grande con due compressori, significa che siccome il \dot{Q}_1 era assegnato cos'è più piccolo nel caso della presenza della camera di separazione? Se $\dot{Q}_1 = q_1 \cdot G$ la portata deve essere più piccola, se è più piccola a parità di velocità del tubo se lasciassi la stessa velocità la sezione dovrebbe essere minore. Con i due compressori aumentano i costi fissi perché aumenta il numero di apparecchiature. Migliora il rendimento nel caso della camera di separazione e quindi anche le spese di manutenzione sono inferiori.

Poiché nel diagramma Ts le curve isobare sono divergenti a destra della campana, se avessimo compresso il fluido fino a p_{max} con un unico compressore avremmo dovuto spendere maggior lavoro:

→ la somma dei lavori dei due compressori è minore del lavoro del singolo compressore, tra le stesse p_{min} e p_{max} .

Di conseguenza il rendimento η di questo ciclo aumenta rispetto al ciclo a compressione di vapore:

$$\eta = \frac{q}{l} \text{ aumenta perché } l \text{ diminuisce.}$$

Allora i costi operativi sono inferiori poiché η aumenta, però si deve spendere di più come costo fisso nell'acquisto di due compressori.

I due frigoriferi visti finora funzionano con i fluidi frigoriferi che vanno sotto zero.

Impianto frigorifero ad H_2O con elettore

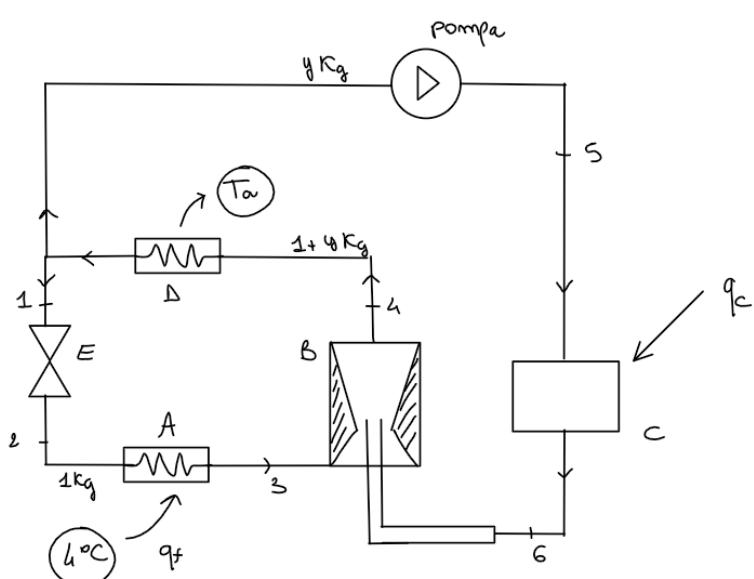
È un impianto che usa come fluido frigorifero l' H_2O e il vapore d'acqua. (ciclo di raffreddamento)

A sinistra nel punto 1 il vapore d'acqua entra nella valvola di laminazione E esce a pressione più bassa alla p_2 poi entra nel vaporizzatore A, poi invece di comprimerlo con un compressore si comprime, ma con differenze di pressioni molto più piccole con un **elettore**. L'elettore è un tubo dove la sezione diminuisce dall'ingresso fino ad un certo minimo e poi aumenta (**argomento da riprendere nella seconda parte del corso, termofluidodinamica, quando parleremo di ugelli di efflusso**) (tubo con stenosi).

Questo elettore funziona con un leggero aumento di pressione a patto di mandarci vapore ad alta pressione tramite il tubicino dove il vapore viene da destra ad alta pressione. Il vapore con pressione più elevata posizionato ad una distanza opportuna richiama il vapore saturo 3 e lo comprime leggermente fino a 4.

Poi da 4 questo miscuglio di vapore che veniva da destra e quello che veniva da sinistra va nel condensatore e poi dal condensatore si divide. Se nel vaporizzatore circolava 1 kg e da destra venivano y kg di vapore d'acqua, nel punto 4 abbiamo $1 + y$ kg che poi per essere regime stazionario gli devo levare gli y kg. Prendendo questi y kg li comprimo con una pompa, li scaldo con il bollitore C in modo da ottenere il vapore ad alta temperatura e ad alta pressione che poi immetto nell'elettore.

Chiaramente l'acqua non ha un punto di congelamento molto basso come l'ammoniaca, quindi non si può utilizzare per andare a temperature molto basse allora è utile per il raffrescamento e non per il congelamento.

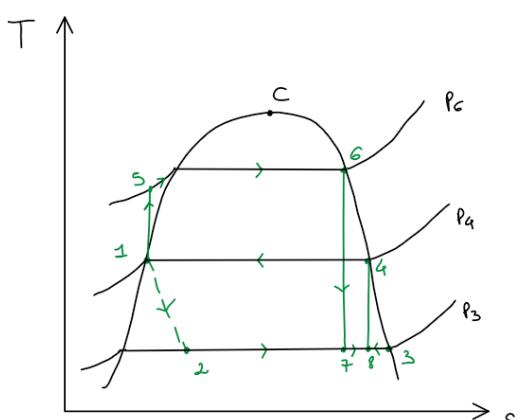


cede calore alla sorgente superiore T_a .

In uscita dal condensatore una parte del fluido torna nella caldaia C attraverso una pompa e una parte va nella valvola di laminazione E dove si espande.

Immaginando una portata di 1 Kg che attraversa il vaporizzatore, il fluido che torna alla caldaia ha portata y Kg, di conseguenza il fluido che attraversa il condensatore D ha portata $(1 + y)$ Kg.

Vediamo la rappresentazione di questo schema meccanico nel $T-s$:



Partiamo dall'ingresso nella valvola, supponiamo essere sulla curva limite inferiore, il vapore entra nella valvola quindi irreversibile isoentalpica, poi vaporizza fino al punto 3. A questo punto è necessario ripartire dal punto 1. Quindi prendo y kg li comprimo nella pompa, poi li vaporizzo fino a 6, fino alla curva limite superiore. Poi questo vapore surriscaldato ad alta pressione da 6 entra dentro e richiama 3. Questo significa che si deve mescolare il vapore in uscita da 6 si deve mescolare con il vapore 3 e per mescolarli si devono trovare alla stessa pressione. Il fluido 6 vapore si espande fino alla pressione inferiore 7, a quel punto si mescola con il 3 alla stessa pressione in modo da ottenere un miscuglio 8 che poi per effetto fluidodinamico esce con una pressione superiore

4. Poi da 4 torno a 1; da 1 a 5 e così via.

Se il condensatore D riesce a condensare tutto il fluido, lo stato 1 si trova sulla curva limite inferiore, alla pressione intermedia. La concavità delle curve limite è superiore (disegno impreciso).

La trasformazione 1-2 è irreversibile ad $h = \text{cost}$.

Poi se il vaporizzatore A riesce a vaporizzare tutto il fluido, lo stato 3 si trova sulla curva limite superiore, alla pressione inferiore (da 1 a 2 1kg di vapor d'acqua e da 1 a 5 y kg di vapor d'acqua). La trasformazione 1-5 è isoentropica fino alla pressione superiore, poiché la pompa fa una compressione.

Il vapore da 6 entra dentro e richiama il 3. Significa che si deve mescolare il vapore in uscita da 6 con il vapore 3, per mescolarli devono essere alla stessa pressione. Il fluido 6 si espande fino alla pressione inferiore 7, si mescola con 3 alla stessa pressione così da ottenere 8 che per effetto fluidodinamico esce con una pressione superiore 4.

Nella trasformazione 5-6 il fluido viene scaldato nella caldaia tramite il calore q_c e in 6 si ottiene vapore satura secco alla pressione superiore. Dallo stato 6, nell'elettore B il fluido si espanderà fino alla pressione inferiore (stato 7) e poi si mescolerà con il fluido 3 e si ottiene lo stato 8 che poi c'è un recupero di pressione fino allo stato 4 in uscita da B.

Impianto di raffrescamento perché la temperatura non può essere inferiore a 4 °C.

L'elettore non è un compressore, è un tubo in cui ci faccio entrare due fluidi a pressione diversa e per meccanismi termofluidodinamici fanno aumentare la pressione, consuma meno potenza meccanica quindi il rendimento è elevato.

Il rendimento è dato da:

$$\eta = \frac{\dot{Q}_f}{\dot{Q}_c} = \frac{(h_3 - h_2)}{(h_6 - h_5)} \frac{1\text{kg}}{y\text{kg}}$$

Da 5 a 6 riscaldamento del vapore;

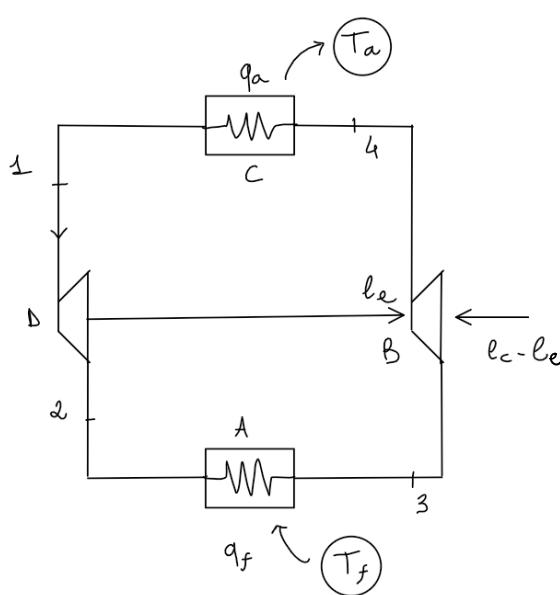
Quello che spendo è il riscaldamento del vapore. Dove y (più piccolo di 1) è la portata di vapore necessaria per avere l'innalzamento di pressione nell'elettore e quindi dipende da come funziona l'elettore.

Frigorifero ad aria

Vediamo come si può utilizzare l'aria per fare un ciclo frigorifero o ciclo inverso. Ci troviamo a destra e in alto nel pV .

Poiché l'aria ha un punto di congelamento molto basso, questo frigorifero può essere usato per temperature molto inferiori allo zero; l'aria si comporta come un gas perfetto.

Immaginiamo di prendere aria e di riscalarla, non si parla più né di vaporizzatore né di condensatore; parliamo di scambiatori di calore, sistemi che riscaldano e raffrescano i fluidi senza farli cambiare di stato.



Da 2 a 3 mettiamo uno scambiatore di calore che assorbe calore q_f dalla sorgente inferiore T_f . Poi l'aria nello stato 3 viene compressa con un compressore che gli dà il lavoro l_c . Poi lo porta alla pressione superiore in 4, poi lo facciamo andare in uno scambiatore di calore che cede il calore alla sorgente a temperatura superiore T_a . Poi siccome abbiamo aria alla pressione superiore non usiamo una valvola di laminazione ma usiamo un espansore perché così raccogliamo un piccolo lavoro l_e che mi fa diminuire il lavoro speso esternamente l_c . Recuperando l_e il lavoro speso dall'esterno è minore perché è $l_c - l_e$.

L'elemento A **NON** è un vaporizzatore, ma uno scambiatore di calore che sottrae calore dalla sorgente a temperatura inferiore T_f .

L'elemento B è un compressore.

L'elemento C è uno scambiatore di calore che cede calore alla sorgente ambiente T_a .

L'elemento D è un espansore che fornisce del lavoro l_e , che viene sfruttato per far lavorare il compressore, al quale quindi basta fornire semplicemente un lavoro pari a $(l_c - l_e)$.

L'aria nello stato 3 viene compressa.

Gli scambiatori di calore sono un tubo in cui il fluido scorre, trascurando le perdite di pressione distribuite si può considerare a pressione costante in prima approssimazione.

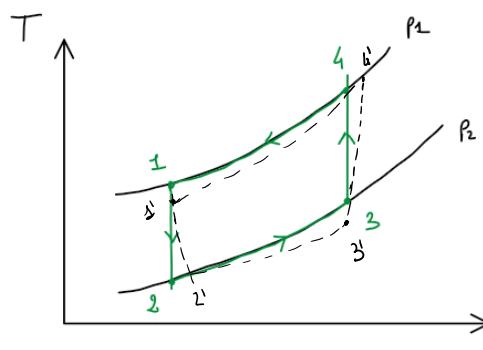
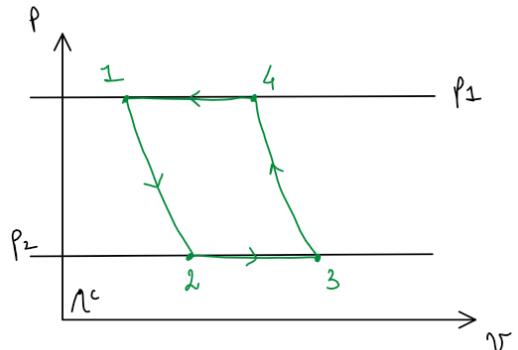
Rappresentiamo il ciclo nel diagramma pV .

Poiché il gas non cambia stato, nel diagramma pV siamo nella zona dei gas (\approx perfetti), molto lontana dalle curve limite.

Il riscaldamento 2-3 si rappresenta con un'isobara 2-3; così come il raffreddamento da 4 a 1 si rappresenta con un'isobara. La compressione da 3 a 4 nel diagramma è un'adiabatica reversibile (isoentropica).

Lo stato 1 è a pressione maggiore.

La trasformazione 1-2 è un'espansione adiabatica reversibile $pV^k = \text{cost}$ (isoentropica), fino allo stato 2 a pressione inferiore.



Nel diagramma Ts la trasformazione 1-2 è adiabatica reversibile, cioè isoentropica, come anche la trasformazione 3-4. La trasformazione 2-3 è isobara (riscaldamento, con aumento di temperatura), come anche la trasformazione 4-1 (isobara con una diminuzione di temperatura).

Diagramma più vicino alla realtà tratteggiato.

Osservazione;

Questo ciclo è anche chiamato ciclo Joule Inverso (in termini meccanici) perché è percorso in senso antiorario, è un ciclo motore ad aria.

Infatti, se fosse percorso in senso orario sarebbe il ciclo di potenza degli impianti termoelettrici per la generazione dell'energia elettrica.

Calcoliamo analiticamente il rendimento del ciclo inverso ad aria, ciò che si spende è il lavoro fatto dall'esterno;

calore q_f sottratto alla sorgente inferiore, ciò che si spende è il lavoro dato dall'esterno:

$$\eta = \frac{q_f}{l_c - l_e} = \frac{h_3 - h_2}{(h_4 - h_3) - (h_1 - h_2)} = \frac{c_p(T_3 - T_2)}{c_p(T_4 - T_3) - c_p(T_1 - T_2)} =$$

Siccome cerchiamo il rendimento limite, supponiamo che l'aria si comporti come un gas perfetto, per un gas perfetto sappiamo che il $\Delta h = c_p \Delta T$; i c_p dipendono dalla temperatura ma qui supponiamo che non dipendono dalla temperatura per semplificare i calcoli, c_p cost.;

$$= \frac{T_2 \left(\frac{T_3}{T_2} - 1 \right)}{T_4 - T_1 - (T_3 - T_2)} = \frac{T_2 \left(\frac{T_3}{T_2} - 1 \right)}{T_1 \left(\frac{T_4}{T_1} - 1 \right) - T_2 \left(\frac{T_3}{T_2} - 1 \right)}$$

In base alle trasformazioni cerchiamo le relazioni tra $\frac{T_3}{T_2}$ e $\frac{T_4}{T_1}$

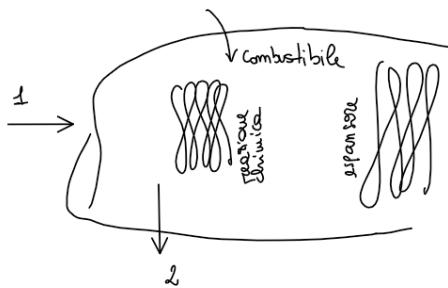
$$\alpha = \frac{k-1}{k} \rightarrow \frac{T_1}{p_1^\alpha} = \frac{T_2}{p_2^\alpha} \text{ e } \frac{T_3}{p_2^\alpha} = \frac{T_4}{p_1^\alpha}$$

$$\rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^\alpha \text{ e } \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^\alpha = \frac{T_4}{T_3}$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{T_4}{T_3} \Rightarrow \frac{T_3}{T_2} = \frac{T_4}{T_1} \Rightarrow \text{tutti i termini tra parentesi vanno via}$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{1}{\frac{T_1}{T_2} - 1} = \frac{1}{r_p^{\alpha} - 1}, \text{ con } r_p = \frac{p_1}{p_2}, \text{ con } p_1 > p_2$$

Impianto di aria condizionata per aerei



il motore di un aereo funziona secondo un ciclo Joule che è l'inverso del ciclo inverso ad aria.

In figura motore;

Il motore aspira l'aria all'esterno, nello stato 1 viene aspirata l'aria esterna, viene compressa tramite una serie di palette che ruotano e che comprimono l'aria, poi si fa entrare combustibile dall'ala che c'è sopra, il combustibile con elevata pressione forma una reazione chimica che poi va nell'espansore e si ottiene maggior lavoro dall'espansore di quanto non se ne sia speso del compressore.

L'espansore spinge indietro l'aria con i prodotti della combustione. Per il terzo principio della dinamica, se viene spinta l'aria indietro l'aereo va in avanti.

L'impianto meccanico è un motore a reazione in cui l'aria di ingresso incontra prima un compressore, poi grazie all'ingresso del combustibile avviene la reazione, ed infine entra nell'espansore.

Allora entra come aria ed esce come prodotto di combustione.

Questo motore si rappresenta come un **ciclo Joule diretto**.

L'aria viene aspirata all'ingresso del motore, 1, poi c'era il compressore che comprimeva e portava l'aria nel combustore, per cui i prodotti della combustione avevano una pressione più elevata.

Invece, l'impianto di aria condizionata preleva l'aria ad una pressione intermedia nel mezzo del compressore (2).

Quest'aria si fa entrare nel compressore A per farne una compressione più fine, con un sistema di regolazione più fine. Poi l'elemento B è un condensatore che cede calore all'esterno. L'elemento C è un espansore.

Rappresentiamo il ciclo nel diagramma Ts .

Partiamo da 1 poi si comprime fino a 2 all'incirca, poi da 2 si comprime ancora in maniera più esatta per avere la pressione richiesta, poi si raffredda fino a 4 e poi da 4 si fa un'altra espansione per arrivare alla temperatura desiderata.

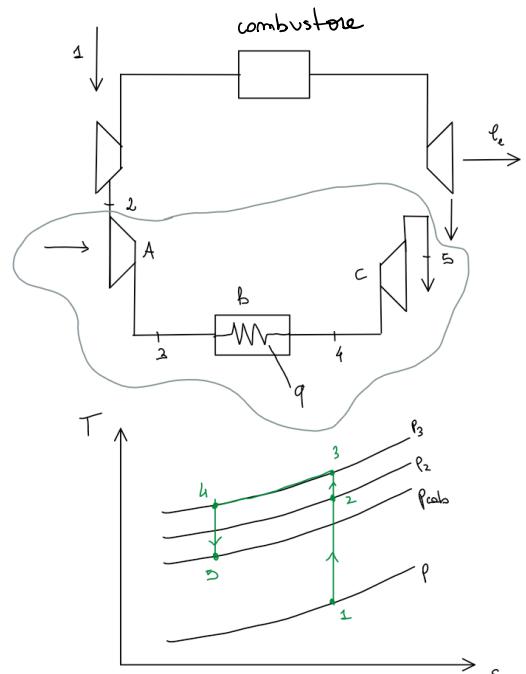
Nello stato 1 si preleva aria in volo dall'esterno ad una pressione p molto bassa. Poi si comprime il gas ad una pressione $p_2 > p_{cab} = p_{atm}$, con una compressione isoentropica.

Poi si fa un'altra compressione piccola fino a $p_3 > p_2$.

Il condensatore B raffredda il gas con una trasformazione isobara fino allo stato 4.

L'espansione 4-5 è isoentropica fino alla pressione della cabina p_{cab} .

Si parte da 1 si comprime fino a 2, poi da 2 si comprime in maniera più esatta, poi si raffredda fino a 4 e poi si fa una espansione.



Impianti a liquefazione dei gas

La possibilità di utilizzo degli impianti frigoriferi è legata alla capacità di poter liquefare i gas che hanno punti di liquefazione molto bassi, allora otteniamo sorgenti che possono essere utilizzate nei cicli frigoriferi.

Pictet (1887)

Si attribuisce a lui la paternità dell'impianto frigorifero in successione di lavoro. Se voglio liquefare i gas, l'idea è quella di mettere in cascata vari impianti frigoriferi a compressione di vapore.

Nella parte superiore c'è un impianto frigorifero a compressione di vapore dove ci sono i soliti quattro organi; la valvola a sinistra, sotto il vaporizzatore poi il compressore e il condensatore.

Il condensatore al solito cede calore all'ambiente. Se qui si fa circolare l'ammoniaca, il vaporizzatore non riceve il calore dalla sorgente a bassa temperatura ma riceve il calore dal condensatore del ciclo frigorifero a compressione di vapore che sta sotto in cui circola un fluido che ha delle temperature inferiori a quelle dell' NH_3 che è Etilene. L'Etilene circola nei soliti quattro organi dell'impianto frigorifero a compressione di vapore, quindi la valvola, il vaporizzatore, il compressore e il condensatore. Il condensatore superiore a temperatura superiore è quello che cede il calore al vaporizzatore del circuito con l' NH_3 , mentre il circuito con l'etilene ha un vaporizzatore che sottrae calore al condensatore del circuito a temperatura inferiore che è quello in cui circola l'ossigeno; il quale a sua volta ha il compressore, il condensatore che cede calore al vaporizzatore del circuito con l'Etilene, la valvola di laminazione e il vaporizzatore del circuito a ossigeno che riceve il calore dal condensatore del circuito ad aria inferiore. Il circuito ad aria inferiore ha il condensatore che cede calore al vaporizzatore del circuito ad ossigeno, poi ha la valvola di laminazione, e dopo l'espansione nella valvola si raccoglie del liquido. Pictet applicò i concetti dell'impianto frigorifero a compressione di vapore in successione:

- Nel 1° ciclo frigorifero circola NH_3 e il condensatore in alto cede calore all'ambiente; invece, lo scambiatore di calore in basso sottrae calore al condensatore del ciclo frigorifero;
- Nel 2° ciclo circola un liquido con temperatura critica inferiore rispetto ad NH_3 , e di nuovo lo scambiatore inferiore è collegato al ciclo inferiore;
- Nel 3° ciclo circola O_2 che ha temperatura critica ancora inferiore;
- Nel 4° ciclo si riesce a liquefare l'aria che fuoriesce in basso da una camera di separazione;

A regime si deve reimettere una massa d'aria pari alla massa di liquido che si preleva.

⇒ i 4 cicli frigoriferi a compressione di vapore sono in serie!

Osservazione: $T_c(NH_3) = 132^\circ C$ (temperatura del punto critico)

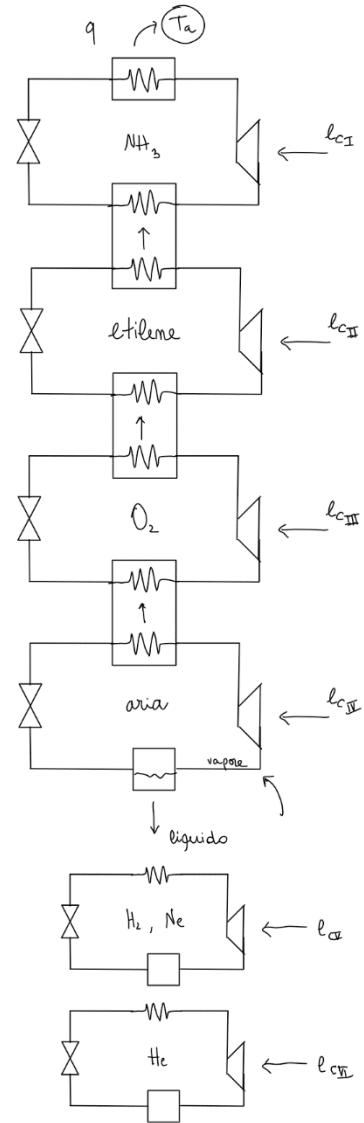
$$T_c(\text{etilene}) = 9,9^\circ C$$

$$T_c(O_2) = -119^\circ C$$

$$T_c(H_2) = -240^\circ C$$

$$T_c(He) = -267,8^\circ C$$

Con questi 4 impianti in serie si riuscì ad ottenere l'aria liquida.



Se si aggiunge un 5° ciclo si riesce a liquefare il Neon Ne o H_2 .

Se invece se ne mettono 6 in serie si riesce a liquefare l' He , che è quello che si avvicina più di tutti allo zero assoluto.

L'idea era di applicare qualcosa di noto, ciclo frigorifero a compressione di vapore e applicarlo in maniera sequenziale. Questo è un circuito estremamente complicato, richiedono 4/5/6 fluidi frigoriferi diversi, quindi diversi lavori del compressore.

L'idea venne a Linde;

Linde (1895)

L'impianto di liquefazione Linde serve principalmente per la liquefazione dell'aria.

C'è un ingresso di aria esterna in 1 che è quella che si vuole liquefare. L'aria atmosferica viene compressa con il compressore spendendo il lavoro l_c , poi esce compressa nel punto 2 dove c'è uno scambiatore di calore che raffredda l'aria fino a 3 (c'è q che esce), poi da 3 a 4 c'è un ulteriore raffreddamento nello scambiatore di calore C (lo rappresentiamo con una resistenza ma in realtà è un serpentino) il fluido si raffredda da 3 a 4. Poi in 4 si ha l'espansione nella valvola di laminazione, poi dopo l'espansione in 5 se siamo tra le curve limiti nella scatola E che è un **separatore**, come la camera flash, si separa in basso il liquido se siamo entrati tra le curve limiti e quindi se abbiamo del condensato, altrimenti il vapore si riprende nella parte superiore della camera di separazione e si fa fare il percorso inverso andando ad essere il fluido a cui l'aria cedeva calore durante la 3-4. Se non c'è liquido il 5 = 5v e poi si riscalda fino a 6. Quando poi rientra in 1, si rimescola con l'aria che viene da fuori e ricomincia il ciclo.

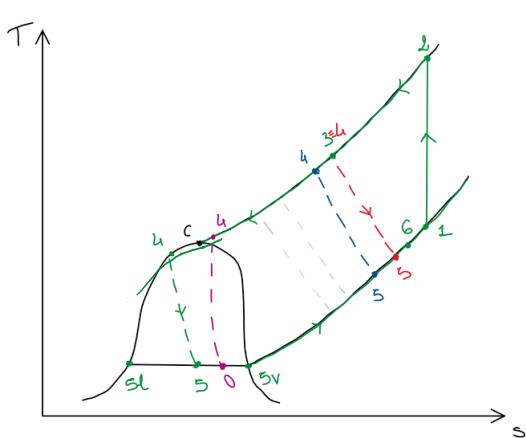
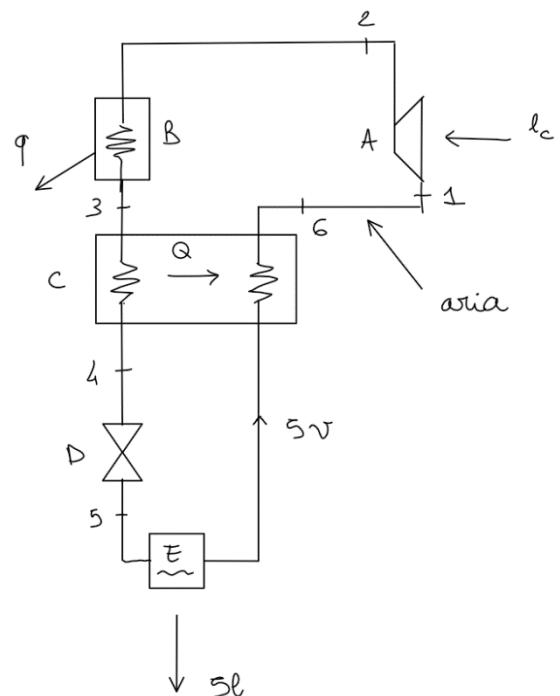
In 1 si preleva dell'aria dall'esterno e si comprime nel compressore A.

L'elemento B è un condensatore che cede calore all'esterno, raffreddando l'aria.

L'elemento C è uno scambiatore di calore accoppiato, che tra 3 e 4 cede calore all'aria che passa tra 5 e 6 (raffreddamento 3-4 all'interno del circuito).

L'elemento D è una valvola di laminazione.

L'elemento E è una camera di separazione e se siamo a regime dal basso preleviamo il liquido, mentre dall'alto il vapore viene rimandato nel ciclo all'ingresso, dopo aver attraversato lo scambiatore di calore accoppiato C. (si aggiunge tanta aria quanto liquido si preleva)



Rappresentiamo il ciclo nel diagramma Ts ;

Questo schema meccanico si rappresenta nel Ts . Abbiamo la campana gaussiana con il punto critico.

Il punto 1 non è alla stessa temperatura di C, perché C per l'aria è -140°C , quando prendiamo l'aria dall'ambiente chiaramente la prendiamo a 20°C . Il punto 1 è molto più in alto. Prendiamo l'aria nello stato 1 che entra, la comprimiamo nel compressore fino a 2.

Vediamo che cosa succede a regime stazionario; a **regime stazionario** riusciamo a portare il punto 2 in punto 4 che è sempre sull'isobara ma tale che con l'espansione in valvola entro tra le curve limiti. L'isobara con il raffreddamento da 2

a 3 e poi da 3 a 4 si riesca ad arrivare 4. Poi con la valvola di laminazione si arriva a 5 e quindi con la valvola di separazione in basso si prende il $5l$ che è l'acqua liquida (quello che volevamo ottenere), nella parte alta della camera di separazione si prende vapore $5v$ che poi dopo rientra fino a 1. Il ciclo a regime stazionario è quello disegnato in verde ($1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 5v - 1$).

Per comprendere il funzionamento vediamo il **transitorio**; immaginiamo il primo giro, vuol dire che non c'è niente ancora nella parte inferiore. Al primo giro prendo l'aria in 1 la comprimo e poi la raffreddo fino a 3. Quando arrivo in 3 al 3-4 non c'è raffreddamento perché a destra non c'è ancora niente (perché sto facendo il primo giro), quindi è come se espandessi da 3 fino a 5, poi da 5 non sono entrato tra le curve limiti, quindi non ho liquido ma è tutto vapore. Quando il fluido torna nella parte destra dello scambiatore di vapore allora riesce a raffreddare il vapore che sta continuando a venire da 3 a 4.

Quindi nel primo ciclo faccio:

- 1-2 compressione
- Da 2 raffreddo a 3
- $3 \equiv 4$ perché a destra non ho fluido
- Da 3 espando fino a 5
- Da 5 ritorno a 1

Non appena il fluido circola nella parte destra dello scambiatore di calore, da 3 riesco a raffreddare a 4, perché ho un ulteriore raffreddamento da 3 a 4; quindi la trasformazione diventa:

- Da 3 a 4
- 4-5 espansione
- 5-1

Ad ogni giro, siccome la temperatura del fluido che ritorna nello scambiatore di calore è sempre un pochino più bassa, io riesco ad abbassare via via il punto 4.

Quando è che comincia a liquefarsi? Quando riesco ad arrivare ad un punto 4 tale che l'espansione in valvola mi faccia arrivare il punto 5 entro le curve limiti.

A quel punto prendo un po' del $5l$ e così via. Ovviamente c'è un limite che è dovuto al fatto che io l'impianto lo faccio in un ambiente a $20^\circ C$ e quindi siccome tutto il resto è a $-140^\circ C$. C'è un limite a quanto posso scendere con il punto 4 che è determinato dallo scambio di calore che va dall'aria ambiente a $20^\circ C$ per irraggiamento, conduzione, convezione alla scatola.

Spiegazione appunti del prof;

è molto più in alto rispetto al punto C.

A regime stazionario portiamo 2 in un punto 4 che è sempre sull'isobara ma che con l'espansione in valvola entro nelle curve limite*.

Sebbene partiamo dall'avere aria, che si trova nella zona dei gas ben lontana dalla campana gaussiana, affinché ci sia la liquefazione si deve entrare tra le curve limite.

Lavoriamo tra le due pressioni p_1 e p_2

Lo stato 1 è l'aria a pressione ambiente che ha una temperatura molto maggiore di T_c ed ha pressione p_1 .

La compressione 1-2 è isoentropica fino alla pressione p_2 .

*Il raffreddamento 2-3 avviene lungo l'isobara, come anche il raffreddamento 3-4, che quando siamo a regime porta lo stato 4 sulla campana.

L'espansione 4-5 è irreversibile ad $h = \text{cost}$, e alla temperatura T_5 individuiamo il liquido saturo $5l$ e il vapore saturo $5v$ (nella parte alta della camera di separazione).

Il ciclo a regime stazionario è quello in verde.

Il riscaldamento 5-6 avviene lungo l'isobara.

Immaginiamo che nella camera di separazione non c'è niente e nel compressore A comprimiamo la prima aria.

Quando passa nello scambiatore C, poiché non c'è vapore dall'altra parte, non c'è scambio di calore e lo stato $3 \equiv 4$ (in rosso).

Nella valvola di laminazione l'espansione $4-5$ è irreversibile ad $h = \text{cost}$.

Nella camera di separazione non c'è liquido quindi il vapore passa tutto dall'altra parte e nello scambiatore C comincia a scambiare calore.

Il riscaldamento $5-6$ seppur piccolo avviene. (lungo l'isobara)

Questo riscaldamento tra 5 e 6 in C produce un raffreddamento tra 3 e 4 dall'altra parte.

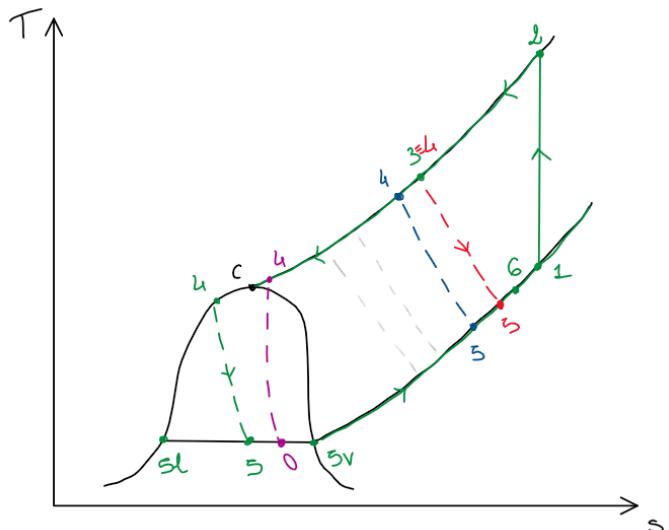
Quindi al 2° giro in C c'è uno scambio di calore e quindi $4 \neq 3$.

Poi in D avviene la stessa espansione $4-5$ che però produce uno stato 5 inferiore poiché lo stato 4 di partenza era inferiore.

Di conseguenza, diminuisce di nuovo 4 e poi di nuovo 5. Allora gli stati 4 e 5 continuano a diminuire finché lo stato 4 non sia tale che 5 entra all'interno delle curve limiti.

Da qui in poi si comincia a prelevare liquido da E.

Espansioni in valvola di laminazione che scende in basso; si liquefa quando riesco ad arrivare a 4 tale che l'espansione in valvola mi faccia arrivare il punto 5 nelle curve limite.



Dewar (1898)

Si usa il ciclo di Linde per liquefare l'idrogeno H_2 . (Vaso Dewar)

Kamarling-Omnes (1908)

Liquefare l'olio He.

Liquefando l'Elio scoprì la supercondutività. Liquefare l'Elio significa avvicinarsi allo 0 Kevin, in realtà stiamo su 4 Kelvin.

Così scoprì la superconduttività, cioè che facendo passare corrente in una resistenza non si dissipava calore per effetto Joule.

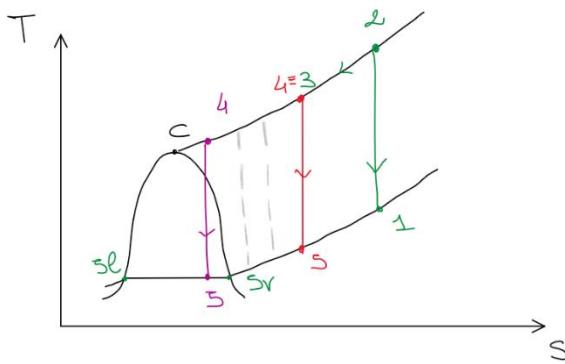
Claude

Modifica del ciclo Linde;

Nel ciclo Claude, visto come il ciclo Linde in cui invece della valvola di laminazione è stato messo un espansore e invece di considerare lo scambio di calore da 2 a 3 che avvenga sempre a regime stazionario, questo avviene solo nelle prime fasi (in questo impianto non era indispensabile lo scambiatore preliminare per raffreddare il gas a pressione elevata. Si utilizza tale scambiatore solo per rendere più veloce la liquefazione nel periodo transitorio dell'impianto); questa era la miglioria dell'impianto Claude rispetto all'impianto Linde. Lo svantaggio di mettere un espansore è a livello di costi rispetto alla valvola di laminazione. Il vantaggio dell'espansore è che (percorrendo il regime stazionario) si parte da 1, si comprime fino a 2 poi si arriva a 4 e siccome entra in un espansore l'isoentropica è molto più verticale dell'espansione in valvola ed entra nelle curve limiti, questo è il vantaggio. Modificò il ciclo di Linde in questo modo:

- Lo scambiatore di calore B veniva usato solo nei primi giri;
- La valvola di laminazione D è stata sostituita da un espansore.

Riportato nel libro insieme al ciclo misto.
Rappresentiamo il ciclo nel diagramma Ts



Dopo la compressione 1-2, nel primo giro tra 2 e 3 c'è un raffreddamento in B. poi nello scambiatore C non c'è vapore dall'altra parte e quindi lo stato 4 \equiv 3.

Poi la trasformazione 4-5 nell'espansore è isoentropica (verticale).

Allora così dopo i primi giri non è più necessario il condensatore B poiché come prima andando avanti con i giri gli stati 4-5 vanno sempre più in basso, ma poiché l'espansione 4-5 è più verticale il raffreddamento è più efficiente rispetto a Linde (poiché c'era produzione entropica).

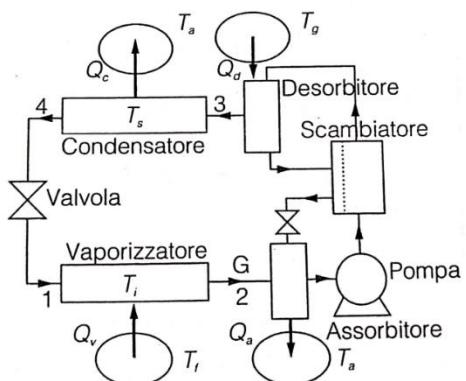
Osservazione:

la maggior efficienza si vede anche all'ingresso dello stato 5 all'interno della campana.

Impianto misto

È come se venisse messo in parallelo tra 4 e 5 un espansore, per cui il fluido può funzionare con la valvola di laminazione nelle prime fasi (quando è a regime).

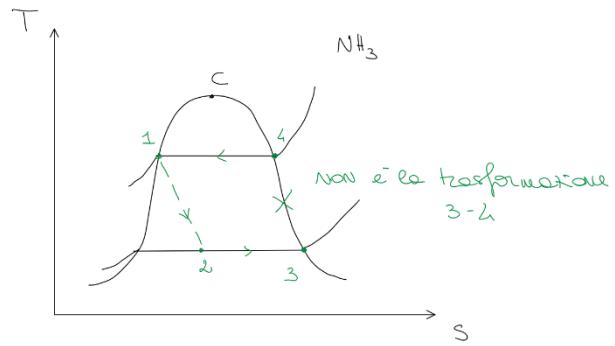
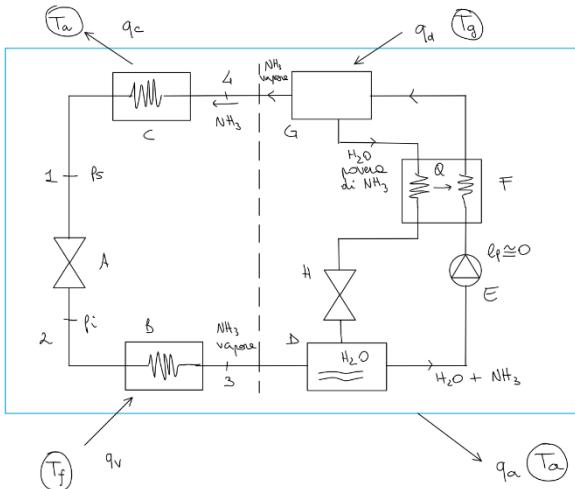
Con questo completiamo gli impianti di liquefazione dei gas.



Impianto inverso ad assorbimento

Invece di usare il compressore si utilizza quanto riportato nella parte di destra dello schema sotto. La parte di sinistra è qualitativamente identica al ciclo frigorifero a compressione di vapore. Nel punto 4 circola l' NH_3 vapore che viene condensato da 4 ad 1, cedendo il calore q_c all'ambiente che sta a temperatura T_a . Poi da 1 a 2 si espande nella valvola di laminazione A con diminuzione di pressione da p_s (superiore) a p_i (inferiore). Poi da 2 a 3 si vaporizza, vaporizzatore nel quale si sottrae calore q_v alla sorgente inferiore T_f . Gli impianti inversi possono essere utilizzati come impianti frigoriferi e pompe di calore. Si può usare sia come ciclo frigorifero che come pompa di calore, cioè con obiettivi diversi soprattutto a temperature in gioco diverse.

La parte sinistra dell'impianto è uguale all'impianto frigorifero a compressione di vapore: l'elemento A è una valvola di laminazione, l'elemento B è uno scambiatore di calore che sottrae calore q_v alla sorgente inferiore T_f quindi è un vaporizzatore, e l'elemento C è un condensatore che cede calore q_c alla sorgente ambiente T_a . In questo lato dell'impianto circola ammoniaca NH_3 .



Vediamo come è stato sostituito il compressore. L'ammoniaca vapore ha una grande capacità di essere assorbita dall'acqua. Viene assorbita più facilmente se si raffredda l'acqua (con la fiamma si separa il gas dal liquido, questo non succede se si mette l'acqua frizzante in frigorifero).

L'elemento D lo chiamiamo assorbitore perché assorbe l' NH_3 nell'acqua e gli sottraiamo calore q_a cedendolo all'ambiente a temperatura T_a .

All'uscita dell'assorbitore abbiamo un liquido, in cui però c'è assorbito anche l' NH_3 , il liquido viene compresso dalla una pompa con una spesa energetica che è 10^3 volte inferiore (in un sistema aperto il lavoro è $-vdp$, quindi v è il volume specifico che è 1000 volte più grande del gas rispetto al liquido), quindi il lavoro speso nella pompa è trascurabile rispetto a quello speso nel compressore. Ai fini energetici consideriamo il lavoro della pompa trascurabile. Poi comprimiamo il liquido con dentro l' NH_3 , lo facciamo passare nello scambiatore di calore, dove questo liquido riceve calore in modo tale che quando arriva nel **generatore o desorbitore** facciamo l'inverso dell'assorbitore, ovvero eliminiamo l' NH_3 vapore e lo separiamo dall'acqua, in modo che all'uscita preleviamo l' NH_3 vapore che poi va nella parte sinistra (solo l' NH_3 vapore e non acqua) e in basso si prende l'acqua che ha poco contenuto in NH_3 . Il desorbitore funziona mettendo il liquido contenente il gas a scaldarsi con una fiamma, ecco l'uso del gas. L'acqua con poca ammoniaca viene mandata nello scambiatore di calore F dove viene raffreddata e cede calore al fluido che viene a destra, così quello a destra si scalda ma tanto poi deve essere scaldato e quello a sinistra si raffredda ma tanto poi deve essere raffreddato.

E' necessaria anche una valvola di laminazione H, senza la valvola di laminazione il circuito non funziona, perché sopra c'è la pressione più alta e sotto la pressione più bassa (attraverso la valvola di laminazione si fa espandere l'acqua povera in ammoniaca fino alla pressione inferiore e si reimmette nell'assorbitore dove ricomincia).

Nella parte destra dell'impianto, il compressore è sostituito da una trasformazione più complicata.

Nel punto 3 abbiamo NH_3 vapore e lo facciamo gorgogliare in acqua (perché l'acqua ha eccezionali capacità di assorbimento).

Allora nell'elemento D avviene l'assorbimento dell' NH_3 da parte dell'acqua, fenomeno che è favorito dalle basse temperature, quindi si cede calore q_a sempre verso la sorgente ambiente T_a ; in uscitaabbiamo H_2O addizionata con NH_3 .

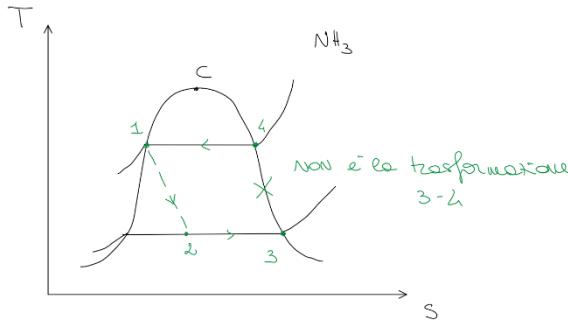
L'elemento E è una pompa, che consuma 3 ordini di grandezza inferiore rispetto al compressore.

L'elemento F è uno scambiatore di calore accoppiato.

Nell'elemento G avviene il desorbimento dell' NH_3 dall' H_2O che è favorito dalle alte temperature, quindi si assorbe il calore q_d da un generatore a temperatura T_g .

In uscita dall'elemento G l'ammoniaca vapore entra nella parte sinistra dell'impianto; invece, l'acqua povera di ammoniaca viene mandata nello scambiatore di calore accoppiato a F (che serve proprio per preriscaldare la corrente che sale e preraffreddare la corrente che scende); poi, tramite la valvola di laminazione H, torna nell'assorbitore D.

In definitiva, la parte di destra coinvolge una miscela di due componenti (gas+liquido) (diagramma acqua-ammoniaca a mandorla).



Allora, nel diagramma Ts riportiamo solo la parte di sinistra in cui circola solo l'ammoniaca.

Invece, la trasformazione 3-4 NON si può disegnare nel diagramma dell' NH_3 perché bisognerebbe usare il diagramma bifase!

La trasformazione 3-4 non è rappresentabile sul diagramma Ts dell'ammoniaca, perché c'è anche l'acqua.

Possiamo rappresentare soltanto 4-1 che è la condensazione, 1-2 che è l'espansione irreversibile in valvola e 2-3

la vaporizzazione.

Se supponiamo che all'uscita del condensatore C il fluido alla pressione superiore sia liquido saturo, lo stato 1 si trova sulla curva limite superiore.

La trasformazione 1-2 nella valvola di laminazione A è irreversibile (espansione irreversibile in valvola).

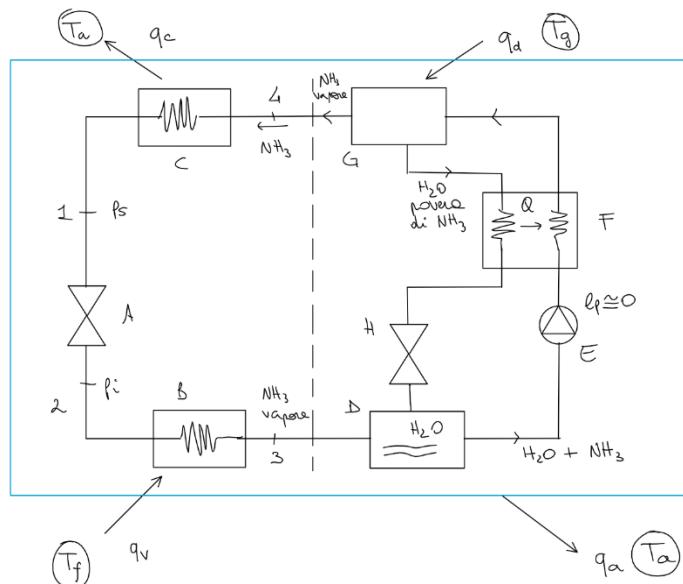
La trasformazione 2-3 è la vaporizzazione isobara nell'elemento B.

La trasformazione 4-1 è al condensazione isobara nell'elemento C.

Ora passiamo all'interpretazione termodinamica.

Il quadro di riferimento generale è il seguente:

Considerando il rettangolo azzurro dove non c'è calore scambiato e anche se ci fosse sarebbe una piccola freccia che entra che considero zero. Le frecce che attraversano il contorno del sistema termodinamico che ora sono:



- q_d che entra perché dato dalla fiamma che ha una temperatura T_g .
- q_c è il calore che il condensatore che condensa l'ammoniaca cede all'ambiente che è a temperatura T_a .
- q_v è il calore sottratto alla sorgente inferiore che è alla temperatura T_f .
- q_a è il calore che si sottrae all'assorbitore per facilitare l'assorbimento e che va a finire alla sorgente ambiente a temperatura T_a .

Questi quattro calori li riportiamo nello schema sotto:

la parte superiore dove si sottrae q_d a T_g e che si cede q_a a T_a è la parte destra del ciclo.

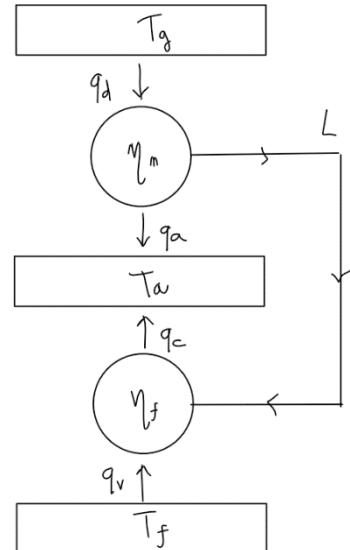
Viceversa, la parte sotto è la parte sinistra, dove c'era il calore q_v sottratto alla sorgente fredda e il calore q_c ceduto dal condensatore all'ambiente.

Ora calcoliamo il rendimento limite, sia per l'impianto frigorifero che per l'impianto a pompa di calore.

Schematizziamo il ciclo come in figura; individuiamo la temperatura superiore T_g , inferiore T_f e intermedia T_a ;

poi indichiamo i calori scambiati q_v e q_c per la parte sinistra dell'impianto e q_d e q_a per la parte destra.

Allora la macchina in alto la possiamo immaginare come una ipotetica macchina motrice che produce un lavoro L , che usiamo per comandare l'ipotetico ciclo inverso inferiore.



La parte superiore è una macchina termodinamica dove quello che c'è dentro riceve calore alla temperatura superiore e lo cede alla temperatura inferiore (si avvicina ad una macchina di tipo Watt, prendeva il calore dalla fiamma alla temperatura superiore e poi la cedeva all'acqua di raffreddamento), la parte superiore è come se fosse un motore termico, che quindi attraverso l'assorbimento di q_d e la cessione di q_a si può pensare che produca un lavoro ipotetico L .

La parte inferiore è la parte del ciclo inverso. Si sottrae calore q_v alla sorgente superiore T_f e si cede calore q_c alla sorgente superiore T_a . Ma questo ciclo inverso per funzionare ha bisogno di un lavoro, allora da un punto di vista termodinamico posso pensare che il lavoro prodotto dal motore vada a comandare la parte inferiore che è la parte del ciclo inverso. Non esiste lavoro scambiato ma posso immaginare a livello termodinamico che ci sia.

Rendimento limite del ciclo frigorifero ad assorbimento

L'obiettivo del ciclo frigorifero ad assorbimento è la sottrazione del calore q_v alla sorgente inferiore T_f .

$$\eta_{fa} = \frac{q_v}{q_d}$$

Moltiplichiamo e dividiamo per L (che esiste solo internamente a tutto il sistema):

$$\eta_{fa} = \frac{q_v}{q_d} \cdot \frac{L}{L} = \frac{L}{q_d} \cdot \frac{q_v}{L} = \eta_m \cdot \eta_f$$

$\frac{L}{q_d} \rightarrow$ rendimento del ciclo motore della parte superiore (lavoro ottenuto diviso il calore speso).

Così abbiamo scritto il rendimento del ciclo frigorifero ad assorbimento η_{fa} come prodotto del rendimento η_m del ciclo motore superiore e del rendimento η_f del ciclo frigorifero inferiore, dei quali conosciamo le espressioni dei rendimenti limite; il rendimento superiore di η_m è il ciclo di Carnot reversibile, il limite superiore del rendimento di un ciclo reversibile frigorifero inverso è $\frac{T_f}{T_a - T_f}$:

$$\eta_{fa} = \frac{T_g - T_a}{T_g} \cdot \frac{T_f}{T_a - T_f}$$

Ora, per capire l'ordine di grandezza del rendimento limite η_{fa} prendiamo delle temperature ragionevoli:

$$T_a = 300K, T_f = 250K \text{ e } T_g = 700K$$

$$\rightarrow \eta_{fa} = \frac{400}{700} \cdot \frac{250}{50} = \frac{20}{7} \approx 3$$

Rendimento limite della pompa di calore ad assorbimento

$$\eta_{pca} = \frac{q_a + q_c}{q_d}$$

Lo scopo della pompa di calore è quello di cedere calore alla sorgente superiore, che è la sorgente intermedia cioè l'ambiente. Consideriamo il contorno celeste e supponiamo nullo il lavoro della pompa $l_p \approx 0$, ho solo quattro scambi di calori due entranti e due uscenti; il risultato di bilancio tra ciò che entra e ciò che esce è:

$$q_d + q_v = q_a + q_c;$$

allora sostituiamo:

$$\eta_{pca} = \frac{q_d + q_v}{q_d} = 1 + \frac{q_v}{q_d} = 1 + \frac{T_g - T_a}{T_g} \cdot \frac{T_f}{T_a - T_f}$$

Dove $\frac{q_v}{q_d}$ è lo stesso di prima, cioè il rendimento del ciclo frigorifero, ma con temperature diverse perché la pompa di calore ha come obiettivo il raffreddamento dell'aria esterna, quindi T_f è la temperatura ambiente e T_a è la temperatura dell'acqua del radiatore:

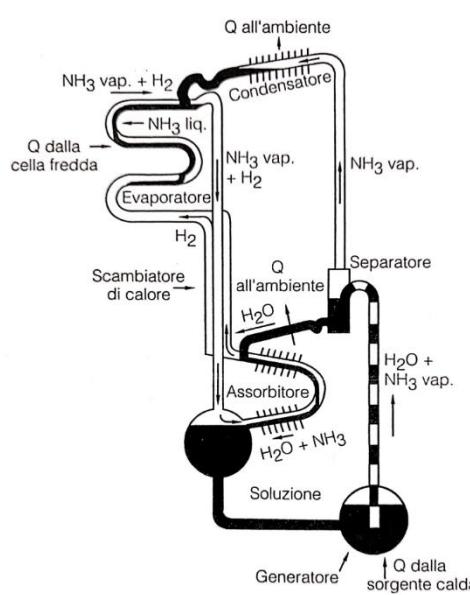
$$T_f = T_{amb} = 300K, T_a = 400K \text{ e } T_g = 700K;$$

T_a temperatura della sorgente a cui do calore. T_{amb} temperatura da cui sottraggo calore.

$$\rightarrow \eta_{pca} = 1 + \frac{300}{700} \cdot \frac{300}{100} = 2, \dots$$

Ciclo frigorifero ad assorbimento Electrolux

Ultimo impianto dei cicli frigoriferi ad assorbimento.



Dove prima c'era il desorbitore ora c'è il recipiente A dove una fiamma scambia e cede calore q_d per separare l'ammoniaca dall'acqua. Moto bifase. Si muovono verso l'alto H_2O e NH_3 , poi c'è una camera di separazione, dove in basso si raccoglie l'acqua liquida e in alto si prende l' NH_3 .

L'acqua liquida fa quello che prima si era descritto che succedeva nella parte destra del ciclo. Dopo essersi separata l'acqua ritornava nell'assorbitore in basso. L' NH_3 circola in controcorrente, l'acqua scende, l' NH_3 sale.

L'assorbitore cede calore q_a perché si facilita l'assorbimento sottraendogli calore. Poi l'acqua nell'assorbitore riassorbe l' NH_3 , scende nell'altro contenitore e fa il ciclo.

L' NH_3 deve essere condensato, l' NH_3 si raffredda, condensa, cede calore all'ambiente. All'uscita dal condensatore abbiamo NH_3 , l' NH_3 liquido va nella parte sinistra e la parte sinistra (che non viene indicato) è il vaporizzatore, l' NH_3 liquido viene di nuovo vaporizzato. Scende l' NH_3 liquido e poi si fa salire un gas che è l'idrogeno in modo da far vaporizzare di nuovo l' NH_3 . È come se all'inizio fosse NH_3 tutto liquido man mano che scende si riscalda, un po' vaporizza e alla fine del vaporizzatore l' NH_3 liquido dovrebbe essere tutto vaporizzato.

Il cerchio G è lo scambiatore di calore che c'era nell'impianto meccanico dove il liquido di destra uscito dalla pompa si riscaldava e il liquido di sinistra che veniva dal desorbitore si raffreddava.

L'elemento A è il desorbitore, che contiene l'acqua e ammoniaca più o meno mescolati tra loro; il riscaldamento da parte della fiamma deve provocare il moto del fluido verso l'alto (moto a bolle con alteranza di H_2O e NH_3).

Nell'elemento B si separa l'acqua e l'ammoniaca desorbe.

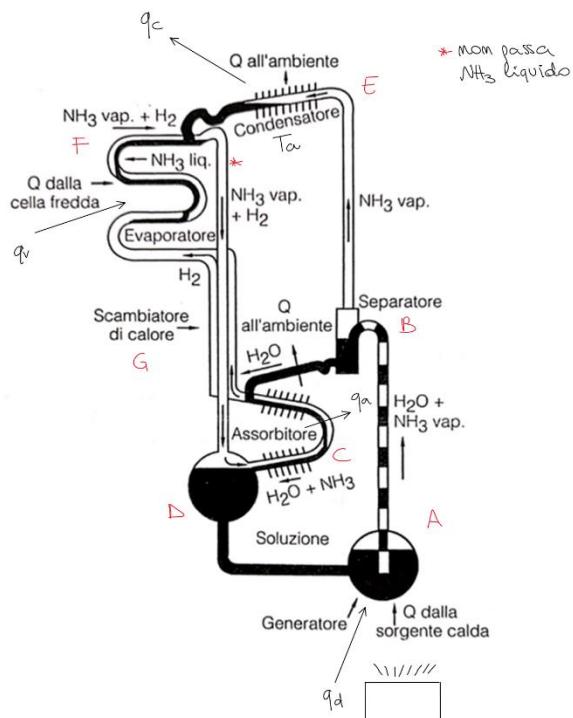
L'acqua scende verso il basso tramite un assorbitore C, cioè uno scambiatore di calore C con delle alette di raffreddamento che indicano che qui il fluido cede calore q_a verso l'esterno.

L'acqua raggiunge il separatore D che poi riporta l'acqua nel desorbitore A.

L'ammoniaca NH_3 vapore, all'uscita del separatore B va verso l'alto nel condensatore E e scambia il calore q_c verso l'esterno.

Poi l'ammoniaca vapore entra nel vaporizzatore F con le alette di raffreddamento che sottrae il calore q_v (da T_f).

Allora, all'interno del condensatore E l'ammoniaca condensa e diventa liquida, poi invece nel vaporizzatore F deve tornare vapore allora in F si determina una corrente di liquido verso il basso (che però non va oltre) e una corrente di vapore verso l'alto che rientra nel tubo in mezzo fino al separatore D.



Poi, l'ammoniaca risale all'interno dell'assorbitore C e viene assorbita dall'acqua che scende, poi torna in su verso il vaporizzatore F.

Per facilitare l' NH_3 , si inserisce l'idrogeno H_2 che a quelle temperature è sempre allo stato di vapore.

L'elemento G è uno scambiatore di calore accoppiato.

Sottolineiamo il parallelismo con l'impianto precedente:

- La fiamma era T_g ;
- Il desorbitore A e il separatore B erano l'elemento G;
- Il condensatore E era l'elemento C;
- Il vaporizzatore F era l'elemento B;
- L'assorbitore C era l'elemento D.

La miscela acqua ammoniaca viene scaldata e sale nel separatore, dove una trappola a liquido separa l'acqua liquida dall'ammoniaca vapore.

L'acqua liquida scende nell'assorbitore mentre l'ammoniaca vapore sale nel condensatore. L'ammoniaca liquida ottenuta dal condensatore scende nell'evaporatore, dove una corrente di idrogeno spinge il vapore di ammoniaca verso l'alto in controcorrente all'ammoniaca liquida.

Il vapore di ammoniaca e l'idrogeno vanno poi verso l'assorbitore in basso. Il vapore di ammoniaca risale poi in controcorrente con l'acqua liquida che scende nell'assorbitore e viene da essa assorbito. L'acqua liquida che scende nell'assorbitore è quindi ricca in ammoniaca e il vapore di ammoniaca non assorbito risale con l'idrogeno. Sono presenti tre fluidi che danno origine a tre circuiti.

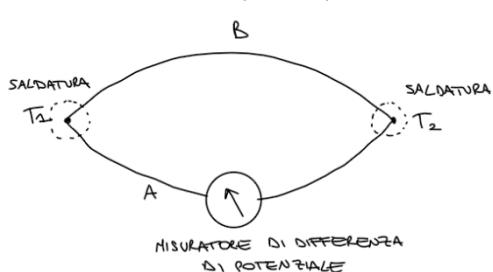
Il circuito dell'acqua circola in basso tra generatore, separatore e assorbitore.

Il circuito dell'idrogeno circola tra assorbitore ed evaporatore.

L'ammoniaca invece è presente dappertutto e si muove a causa della differenza della sua tensione di vapore.

Ricordiamo gli effetti termoelettrici che sfruttiamo nel ciclo frigorifero ad effetto termoelettrico.

Effetto Seebeck (1821)



A,B → due fili conduttori di materiale diverso

Il filo A è interrotto in modo tale da costituire un circuito aperto alle cui estremità è collegato un potenziometro.

In assenza di corrente circolante, il potenziometro misura la forza elettromotrice f.e.m. del circuito.

Se i due giunti saldati sono alla stessa temperatura non sussiste una differenza di potenziale, e la f.e.m. è nulla.

Se le saldature sono alle temperature T_1 e T_2 si induce una $\Delta E = f(T_2 - T_1)$

La relazione tra E e ΔT è lineare, introducendo un coefficiente α_{AB} tale che:

$$\text{definizione analitica: } \alpha_{AB} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta E}{\Delta T} = \frac{dE}{dT}$$

sono generalmente tabulati i valori del coefficiente per le coppie termoelettriche di maggior utilizzo. Per ciascun materiale, inoltre, è valutabile in potere termoelettrico assoluto α_A e α_B .

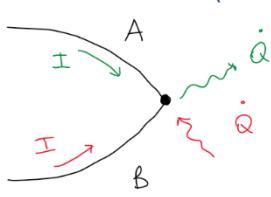
Tra potere termoelettrico relativo ed assoluto intercorre una relazione $\alpha_{AB} = \alpha_A - \alpha_B$

Numerose sono le applicazioni dell'effetto Seebeck.

Se, ad esempio portiamo uno dei due giunti ad una temperatura nota, ad esempio ponendolo in un bagno d'acqua e ghiaccio, possiamo la temperatura dell'altro giunto semplicemente misurando la f.e.m.

L'effetto Seebeck inoltre sta alla base della termocoppia. Conoscendo la temperatura di una giunzione, dalla relazione di ΔE possiamo ricavare la temperatura dell'altra giunzione in funzione di ΔE . Ci dà una temperatura essendo la coppia di due materiali.

Effetto Peltier (1834)



Collegando un generatore di corrente elettrica ad un circuito costituito da due conduttori A e B saldati ad un'estremità, si nota un flusso di calore \dot{Q} tra le giunzioni A-B e l'ambiente esterno. Supponiamo che il calore esca, perché si scalda la giunzione rispetto all'ambiente.

Invertendo il verso della corrente elettrica si può invertire il segno dello scambio termico.

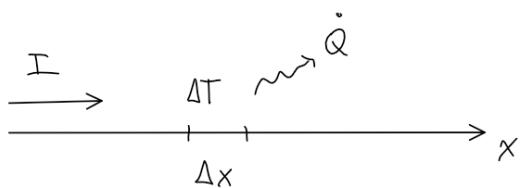
$$\dot{Q} \propto I \rightarrow \dot{Q} = \pi_{AB} \cdot I$$

Con π_{AB} coefficiente di Peltier.

π_{AB} è funzione della temperatura, secondo la relazione $\alpha_{AB} \cdot T = \pi_{AB}$

Effetto Thomson

Non entra nella spiegazione del frigorifero ad effetto termoelettrico.



Il passaggio di corrente elettrica in un conduttore di corrente, laddove esiste un gradiente di temperatura spalmato su una distanza Δx provoca uno scambio di calore tra conduttore ed ambiente esterno il cui verso dipende dal verso della corrente e del gradiente termico.

Il fenomeno si distingue da quello Joule, perché REVERSIBILE.

$$|d\dot{Q}_T| = \left| \tau I \frac{\partial T}{\partial x} dx \right|$$

Con τ coefficiente di Thomson

$$\tau = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\dot{Q}_T}{I \Delta T} = \frac{1}{I} \frac{\delta \dot{Q}_T}{\delta T}$$

$dT > 0$ se la temperatura cresce nel verso della corrente;

$\delta \dot{Q}_T > 0$ allora il conduttore assorbe calore dall'esterno:

Esiste una correlazione tra τ e α_{AB}

$$\tau = T \cdot \frac{d\alpha_{AB}}{dT}$$

I legami tra i coefficienti α , π , τ sono stati ricavati da una branca della termodinamica che è la termodinamica degli stati IRREVERSIBILI.

Refrigerazione termoelettrica

Sfrutta l'effetto Peltier.

Nel circuito viene fatta passare, spendendo un certo lavoro, una corrente elettrica I continua, ottenendo un asporto di calore q_0 definito freddo a temperatura T_0 , da un mezzo a $T < T_{amb}$.

Al giunto caldo a temperatura $T_1 (> T_0)$ viene rigettata a regime una potenza termica pari alla somma di q_0 e della potenza elettrica per alimentare il circuito ($L = q_0 + q_1$)

Schema di funzionamento ideale;

supponiamo di avere i due materiali p ed n , poi mettiamo una pila che genera corrente e circola in modo tale che nella giunzione T_1 ci sia cessione di calore. Nella parte inferiore il calore q_0 è assorbito e la giunzione è a temperatura T_0 . È un ciclo frigorifero. La spesa che ho è nel dare corrente. Do del lavoro elettrico tramite la batteria e ottengo il passaggio di calore dalla sorgente inferiore T_0 alla sorgente superiore T_1 .

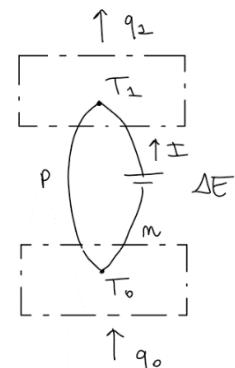
Stiamo trascurando gli effetti legati alle irreversibilità da conduzione e dissipazioni per effetto Joule.

Stiamo implicitamente trascurando le sezioni trasversali dei termoelettrodi e la resistenza elettrica interna del circuito.

In queste condizioni gli unici scambi termici coinvolgono potenze termiche di Peltier.

$$q_1 = q_{1p} = \pi_1 I = \alpha_{pn} T_1 I$$

$$q_0 = q_{0p} = \pi_0 I = \alpha_{pn} T_0 I$$



Il lavoro elettrico (spesa energetica) si calcola come:

$$L_{el} = \Delta E \cdot I$$

Dove, ΔE è la d.d.p. ai morsetti del generatore.

La ΔE è dovuta all'effetto Seebeck e vale: $\Delta E = \alpha_{pn}(T_1 - T_0) \rightarrow L_{el} = \alpha_{pn}(T_1 - T_0)I$

Il rendimento del ciclo frigorifero o meglio il coefficiente di effetto utile è pari a :

$$\eta_f = \frac{q_0}{L_{el}} = \frac{\alpha_{pn} T_0 I}{\alpha_{pn} (T_1 - T_0) I} = \frac{T_0}{T_1 - T_0}$$

Che corrisponde al rendimento limite di un ciclo inverso frigorifero che funziona in modo reversibile tra le due sorgenti T_0 e T_1 .

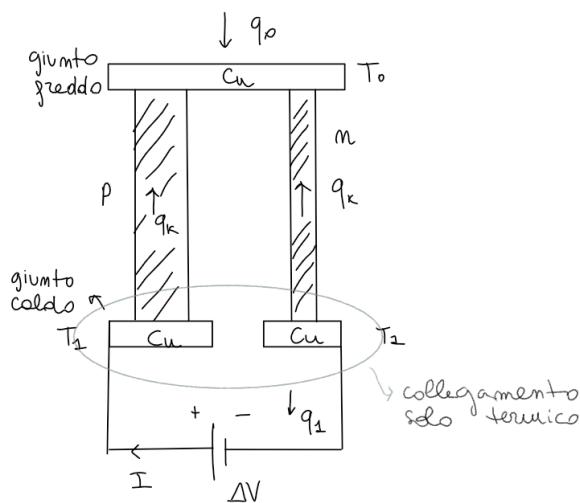
Settimana 6

26-10-21

La scorsa volta abbiamo rivisto gli effetti termoelettrici e abbiamo visto il caso ideale del frigorifero dove i cavi sono dei semplici fili, p ed n , c'è una pila che da corrente I che quando la corrente passa attraverso la giunzione T_1 cede calore q_1 .

È un circuito ideale perché i cavi sono dei fili e non è possibile utilizzarli in partica per il raffreddamento. Sostituiamo al posto dei fili delle barre di rame, di vari cm di spessore e di larghezza. Una barra p e una barra n . Sezione diversa ma stessa lunghezza.

Schema di funzionamento reale:



Del calore si trasmette tra le due sorgenti per conduzione Fourierana, se la barra ha due temperature diverse il calore va dalla barra a temperatura superiore a quella inferiore (conduzione di calore).

R: resistenza interna del circuito $\neq 0$ allora del calore viene dissipato per effetto Joule. Supponiamo ancora che questo calore si ripartisca a metà tra giunto caldo e freddo.

La giunzione fredda T_0 viene messa in alto, Cu → rame (materiale proveniente da Cipro); il giunto freddo è una barra di rame che collega elettricamente e termicamente le due giunzioni $p - Cu$ ed $n - Cu$.

Questo materiale Cu viene mantenuto a temperatura T_0 e attraverso l'effetto di Peltier sottrae calore q_0 ad una sorgente.

Giunto caldo; due barrette di rame che non sono collegate elettricamente all'interno di un ambiente che li mantiene alla stessa temperatura T_1 . C'è un equilibrio termico tra Cu_p e Cu_n ma non in equilibrio elettrico.

La corrente I generata circola in senso orario e il giunto caldo cede calore q_1 .

Non possiamo trascurare la resistenza elettrica della corrente quando passa nei due conduttori, ovvero il riscaldamento dovuto all'effetto Joule. Siccome ora le sezioni delle sbarre sono notevoli, esiste una resistenza elettrica non trascurabile.

Bilancio giunto freddo:

La sorgente a T_0 riceve dall'ambiente esterno una potenza termica per effetto Peltier P_0 , dal giunto caldo una potenza termica di conduzione q_k e metà della potenza dissipata per effetto Joule.

$$q_0 = q_{OP} - q_k - \frac{1}{2}q_J$$

il pedice P è per Peltier, q_k calore dal giunto caldo, diminuisce l'effetto frigorifero perché gli arriva questo calore, il calore dissipato per effetto Joule per metà viene dissipato nel giunto freddo e metà viene dissipato nel giunto caldo.

La potenza netta sul giunto freddo è dovuta a:

$$q_{OP} = \alpha_{pu}T_0I \text{ calore sottratto alla sorgente fredda.}$$

$$q_k = k(T_1 - T_0) \text{ con } k \text{ coefficiente globale}$$

$$q_J = RI^2$$

$$\Rightarrow \alpha_{pu}T_0I - k(T_1 - T_0) - \frac{1}{2}RI^2$$

Dobbiamo spendere lavoro elettrico che è uguale a: $L_{el} = \Delta V \cdot I$

La potenza spesa nel circuito è $L_{el} = \Delta V \cdot I$

La differenza di potenziale ai capi del generatore elettrico può essere espressa come somma del ΔE per effetto Seebeck e della caduta ohmica dovuta alla circolazione di corrente.

$$\Delta V = \Delta E + RI = \alpha_{pn}(T_1 - T_0) + RI$$

Allora $L_{el} = \alpha_{pn}(T_1 - T_0)I + RI^2$

Non è dovuto soltanto all'effetto Seebeck ma aumenta anche dell'effetto Joule.

Studiamo l'andamento della potenza frigorifera q_0 al variare dell'intensità della corrente I ;

il q_0 scritto sopra è l'effetto termico ovvero quanto calore viene sottratto alla sorgente fredda. Studiamolo, vediamo che è funzione della corrente;

$$q_0 = \alpha_{pn}T_0I - k(T_1 - T_0) - \frac{RI^2}{2}$$

$$\frac{dq_0}{dI} = 0$$

Allora:

$$\alpha_{pn} \cdot T_0 - RI = 0$$

$$\Rightarrow I_{ott}|_{q_0^{MAX}} = \frac{\alpha_{pn}T_0}{R} \quad (\text{la } I \text{ che massimizza o minimizza } q_0)$$

$$\frac{d^2q_0}{dI^2} = -R < 0 \quad (\text{in } q_0 \text{ ha un massimo})$$

A parità di q_0 questo stesso valore di I massimizza anche la differenza di temperatura tra i due giunti.

Se l'espressione di q_0 la scrivo in funzione di $(T_1 - T_0)$ ottengo:

$$(T_1 - T_0) = \frac{\alpha_{pn}T_0I - \frac{RI^2}{2} - q_0}{k}, \quad \frac{d}{dI}(T_1 - T_0) = \frac{\alpha_{pn}T_0}{k} - \frac{RI}{k} = 0 \Rightarrow I = \frac{\alpha_{pn}T_0}{R}$$

È il valore della corrente che massimizza la differenza di temperatura.

N.B.: la differenza di T massima si ha in realtà ad effetto frigorifero nullo ($q_0 = 0$)

$$\left[(T_1 - T_0) = \frac{\alpha_{pn}T_0I - \frac{RI^2}{2} - q_0}{k} = (T_1 - T_0) = \frac{\alpha_{pn}T_0I - \frac{RI^2}{2}}{k} = (T_1 - T_0) = \frac{\alpha_{pn}T_0 \frac{\alpha_{pn}T_0}{R} - \frac{R(\alpha_{pn}T_0)^2}{2R^2}}{k} \right]$$

$$q^{MAX} = \frac{\alpha_{pn}^2 T_0^2}{2R} - k(T_1 - T_0) \rightarrow q_0^{MAX} = k \left[z \frac{T_0^2}{2} - (T_1 - T_0) \right]$$

$$\text{Definiamo FIGURA di MERITO: } z = \frac{\alpha_{pn}^2}{kR}$$

È un fattore che ha lo stesso significato del fattore di merito degli impianti motore termoelettrici;

$$(T_1 - T_0)^{max} = (T_1 - T_0)|_{I_{ott}} = \frac{1}{k} \left[\frac{\alpha_{pn}^2 T_0^2}{R} - \frac{\alpha_{pn}^2 T_0^2}{2R} - q_0 \right] = Z \cdot \frac{T_0^2}{2} - \frac{q_0}{R}$$

Dove $q_0 = q_0^{MAX}$

Studio del rendimento;

$$\eta_F = \frac{q_0}{L_e} = \frac{\alpha_{pn}T_0I - k(T_1 - T_0) - \frac{RI^2}{2}}{\alpha_{pn}(T_1 - T_0)I + RI^2}, \quad \frac{d\eta_F}{dI} = 0 \rightarrow I_{ott}|_{\eta_F^{MAX}} \quad (\text{ottima corrente che massimizza il rendimento})$$

$$\frac{d\eta_F}{dI} = \frac{\sigma_{pn}T_0 - RI}{\alpha_{pn}(T_1 - T_0)I + RI^2} - \left(\alpha_{pn}T_0I - k(T_1 \cdot T_0) - \frac{RI^2}{2} \right) \frac{\alpha_{pn}(T_1 - T_0) + 2RI}{(\alpha_{pn}(T_1 - T_0)I + RI^2)^2} = 0$$

$$(\alpha_{pn}T_0 - RI)[\alpha_{pn}(T_1 - T_0)I + RI^2] - \left[\alpha_{pn}T_0I - k(T_1 - T_0) - \frac{RI^2}{2} \right] [\alpha_{pn}(T_1 - T_0) + 2RI] = 0$$

$$\begin{aligned} & \alpha_{pn}^2 T_0 (T_1 - T_0) I + \alpha_{pn} T_0 R I^2 - \alpha_{pn} R (T_1 - T_0) I^2 - R^2 I^3 - \alpha_{pn}^2 T_0 (T_1 - T_0) I - 2 \alpha_{pn} R T_0 I^2 \\ & + k(T_1 - T_0)^2 \alpha_{pn} + 2kR(T_2 - T_0)I + \frac{R\alpha_{pn}}{2}(T_1 - T_0)I^2 + R^2 I^3 = 0 \end{aligned}$$

Raggruppiamo i termini in I^2

$$\begin{aligned} & \left[\alpha_{pn} T_0 R - \alpha_{pn} (T_1 - T_0) R - 2 \alpha_{pn} R T_0 + \frac{R\alpha_{pn}}{2}(T_1 - T_0) \right] I^2 = \\ & \left[\alpha_{pn} T_0 R - \alpha_{pn} T_1 R + \alpha_{pn} T_0 R - 2 \alpha_{pn} R T_0 + \frac{R\alpha_{pn}}{2} T_1 - \frac{R\alpha_{pn}}{2} T_0 \right] I^2 = \\ & \left[-\frac{\alpha_{pn} R T_1}{2} - \frac{\alpha_{pn} R T_0}{2} \right] I^2 = -\alpha_{pn} R \left(\frac{T_1 + T_0}{2} \right) I^2 = -R\alpha_{pn} T_m I^2 \end{aligned}$$

$$T_m = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

Raggruppando i termini in I :

$$[\alpha_{pn} T_0 (T_1 - T_0) - \alpha_{pn}^2 T_0 (T_1 - T_0) + 2kR(T_1 - T_0)]I = 2kR(T_1 - T_0)I$$

$$\frac{\eta_F}{dI} = 0 \rightarrow (R\alpha_{pn} T_m)I^2 - [2kR(T_1 - T_0)]I - k\alpha(T_1 - T_0)^2 = 0$$

$$I = \frac{+2kR(T_1 - T_0) \pm \sqrt{(4K^2 R^2 (T_1 - T_0)^2 + 4kR\alpha_{pn} T_m (T_1 - T_0)^2)}}{2\alpha_{pn} T_m R} =$$

$$= \frac{K}{\alpha_{pn}} \cdot \frac{(T_1 - T_0)}{T_m} \pm \frac{\sqrt{\left(4K^2 R^2 (T_1 - T_0)^2 \left(1 + \frac{\alpha_{pn}^2 T_m}{Rk} \right) \right)}}{2\alpha_{pn} T_m}$$

$$I = \frac{k}{\alpha_{pn}} \frac{(T_1 - T_0)}{T_m} \pm \frac{2kR(T_1 - T_0)}{R^2 \alpha_{pn} T_m} \sqrt{1 + \frac{\alpha_{pn}^2 T_m}{kR}} = \frac{k}{\alpha_{pn}} \frac{(T_1 - T_0)}{T_m} (1 + \sqrt{1 + zT_m})$$

$$\text{Dove } z = \frac{\alpha_{pn}^2}{kR}$$

(nella relazione si prende quella con il +)

E abbiamo considerato la soluzione positiva.

$$\frac{k}{\alpha_{pn}} = \frac{\alpha_{pn}}{zR} \text{ indichiamo con } m^* = \sqrt{(1 + zT_m)} \rightarrow \text{funzione di irreversibilità}$$

$$I_{ott} = \frac{\alpha_{pn}}{zR} \frac{(T_1 - T_0)}{T_m} (1 + m^*) = \frac{\alpha_{pn}}{zR} \frac{(T_1 - T_0)}{\frac{m^{*2} - 1}{z}} (1 + m^*) = \frac{\alpha_{pn}(T_1 - T_0)}{R} \frac{(m^* + 1)}{(m^* + 1)(m^* - 1)}$$

$$I_{ott}|_{\eta_{MAX}} = \frac{\alpha_{pn}}{R} \frac{(T_1 - T_0)}{m^* - 1}$$

(tutti i passaggi non verranno chiesti ma bisogna sapere da dove si parte e qualitativamente il risultato)

Allora:

$$\eta_{MAX} = \frac{T_0}{T_1 - T_0} \frac{m^* - \frac{T_1}{T_0}}{m^* + 1}$$

Indicando con $\psi = f(m^*, s_s) = \frac{m^* - \frac{T_1}{T_0}}{m^* + 1}$ il FATTORE DI IRREVERSIBILITÀ, dipende dalle irreversibilità e questo sono in z , perché ha al denominatore k (è il coefficiente che tiene conto del calore scambiato, una delle cause di irreversibilità di prima specie è quando si ha un passaggio di calore con una differenza finita di temperatura, R è la resistenza elettrica, se è diversa da zero dà luogo ad una dissipazione di calore per effetto Joule, anche m^* tiene conto delle irreversibilità). Il primo termine è η_c il rendimento di un ciclo di Carnot inverso.

possiamo più convenientemente scrivere:

$$\eta_{MAX} = \eta_c \cdot \psi$$

Ridurre le irreversibilità vuol dire diminuire i valori della resistenza elettrica R e della conduttanza termica globale k (se è zero non c'è l'irreversibilità).

Bisogna cioè, realizzare valori più elevati possibili della figura di merito z in rapporto alla capacità termoelettrica della coppia α_{pn} .

All'aumentare di z , migliorano tutte le prestazioni del ciclo. In particolare, al tendere ad ∞ di z , $m^* \rightarrow \infty$ e $\psi \rightarrow 1$, $\eta_f \rightarrow \eta_c$

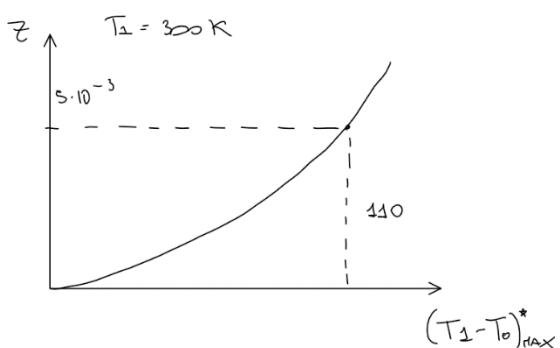
La differenza ΔT tra giunto caldo e giunto freddo era:

$$(T_1 - T_0) = \frac{\alpha_{pn} T_0 I - \frac{RI^2}{2} - q_0}{k}$$

E a parità di altre condizioni, assume valore massimo per $q_0 = 0$ ossia in assenza di effetto frigorifero (ci serve solo per costruire il grafico).

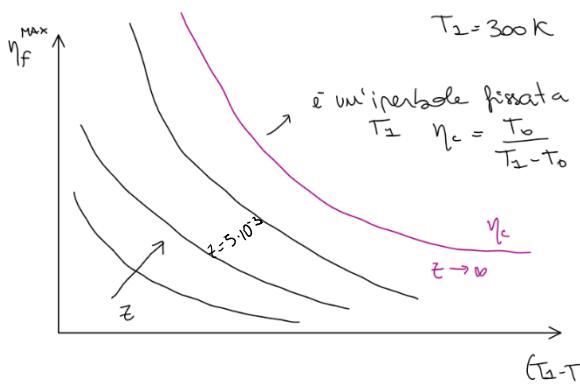
$$(T_1 - T_0)^* = \frac{\alpha_{pn} T_0 I - \frac{RI^2}{2}}{k} \rightarrow (T_1 - T_0)^*_{MAX} = (T_1 - T_0)^*|_{I_{ott}} = \frac{zT_0^2}{2}$$

Si può diagrammare questo ΔT realizzabile con un termoelemento in funzione della figura di merito z , in base alla relazione su riportata:



Il frigo cede calore all'ambiente.
Valori numerici di z in funzione di valori numerici di $T_1 - T_0$;

Il diagramma del rendimento frigorifero massimo η_{MAX}^* in funzione di $T_1 - T_0$ invece è:



$$\eta_{MAX} = \frac{T_0}{T_1 - T_0} \frac{m^* - \frac{T_1}{T_0}}{m^* + 1}$$

Curve ottenute mettendo per z un valore fissato.

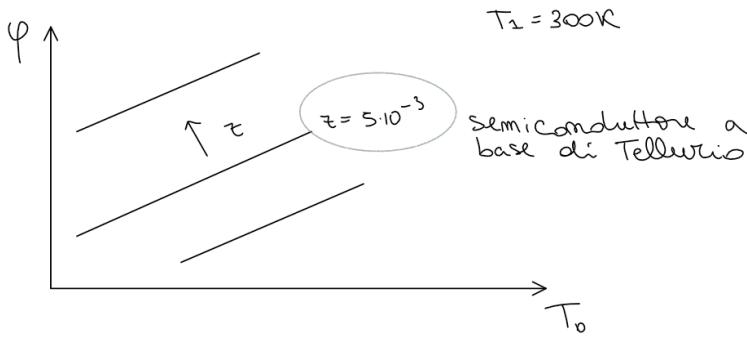
All'aumentare di z tende a Carnot.

z è dovuto a parametri fisici, dipende dai materiali p ed n che si usano.

Iperbole equilatera;

curve ottenute mettendo per z un valore preciso.

Infine si riporta il diagramma del fattore delle irreversibilità ψ in funzione della figura di merito, al variare della T_0 di giunto freddo.



Le curve sono delle rette che vanno verso l'alto all'aumentare di z . quel valore di z è ottenuto con semiconduttori a base di Tellurio.

Appare chiaro che realizzare valori elevati della figura di merito z della coppia termoelettrica dipende non solo dall'utilizzare materiali con valori favorevoli alle proprietà intrinseche di condutività e resistività (p, k), ma anche ottimizzare la

geometria del sistema. Leggera curvatura delle curve (come se andasse come $\frac{1}{x}$)

Supponiamo che i due termoelettrodi siano cilindri di sezione A_p e A_n e stessa altezza L (condizioni che facilitano l'assemblaggio). Vediamo R e k a che cosa sono dovuti;

$$R = \rho_p \frac{L}{A_p} + \rho_n \frac{L}{A_n}$$

Resistenza complessiva di tutti il circuito, usiamo la stessa lunghezza L , i due materiali hanno diverse sezioni ma stessa lunghezza. Sono resistenze in serie quindi la resistenza complessiva è la somma delle resistenze.

$$k = k_p \frac{A_p}{L} + k_n \frac{A_n}{L}$$

k fattore globale di scambio termico che riguarda sia il materiale p che il materiale n ;

N.B.: stiamo implicitamente ammettendo le seguenti ipotesi:

- scambio termico con l'esterno localizzato ai giunti
- resistenza termica ed elettrica di contatto tra elementi e piastre del giunto trascurabili
- resistenza elettrica trascurabile delle piastre di giunto in Cu

$$kR = \left(k_p \frac{A_p}{L} + k_n \frac{A_n}{L} \right) \left(\rho_p \frac{L}{A_p} + \rho_n \frac{L}{A_n} \right) = \frac{L}{A_n} \left(k_p \frac{A_p}{L} + k_n \frac{A_n}{L} \right) \cdot \frac{A_n}{L} \left(\rho_p \frac{L}{A_p} + \rho_n \frac{L}{A_n} \right)$$

$$kR = \left(k_p \frac{A_p}{A_n} + k_n \right) \left(\rho_p \frac{A_n}{A_p} + \rho_n \right)$$

Indichiamo $y = \frac{A_p}{A_n}$

$$kR = (k_p y + R_n) \left(\frac{\rho_p}{y} + \rho_n \right) = k_p \rho_p + k_p \rho_n y + \frac{k_n \rho_p}{y} + k_n \rho_n$$

Rispetto alla geometria della coppia termoelettrica, il valore massimo di z si ottiene al minimo di (kR) che si ha per $\frac{d(kR)}{dy} = 0$ qualora $\frac{d^2(kR)}{dy^2} > 0$ (concavità verso l'alto)

$$\frac{d(kR)}{dy} = k_p \rho_n - \frac{k_n \rho_p}{y^2} = 0 \rightarrow y = \sqrt{\frac{k_n \rho_p}{k_p \rho_n}}$$

$$\frac{d^2(kR)}{dy^2} = \frac{2k_n \rho_p}{y^3} > 0 \text{ essendo } y > 0;$$

$$y = y_{ott} = \sqrt{\frac{k_n \rho_p}{k_p \rho_n}}$$

È effettivamente un minimo per il prodotto delle sorgenti di irreversibilità e quindi un massimo per la figura di merito z :

$$(kR)^{min} = k_p \rho_p + k_p \rho_n \sqrt{\frac{k_n \rho_p}{k_p \rho_n}} + k_n \rho_p \sqrt{\frac{k_p \rho_n}{k_n \rho_p}} + \rho_n k_n = k_p \rho_p + 2\sqrt{k_n \rho_n} \sqrt{k_p \rho_p} + k_n \rho_n$$

$$(kR)^{min} = \left(\sqrt{k_n \rho_n} + \sqrt{k_p \rho_p} \right)^2$$

Allora

$$z^{max} = \frac{\alpha_{pn}^2}{(kR)^{min}} = \left[\frac{\alpha_{pn}}{(\sqrt{k_n \rho_n} + \sqrt{k_p \rho_p})} \right]^2$$

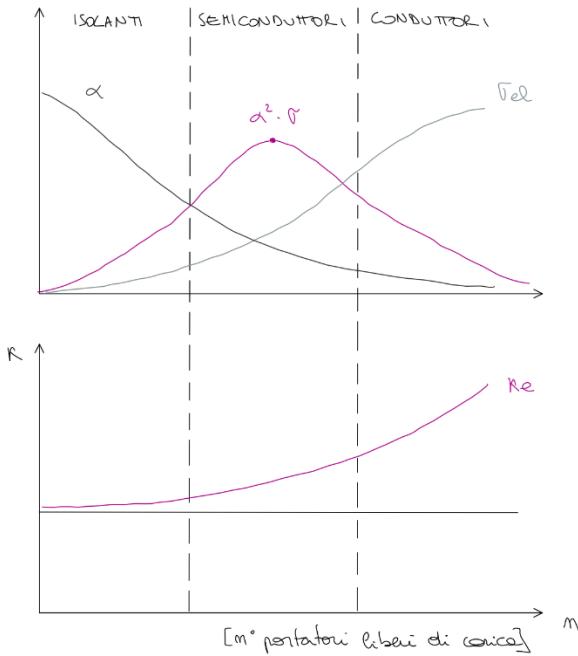
Per i metalli la quantità $k\rho = \frac{k}{\sigma}$ è vincolata strettamente alla temperatura dalla legge di Wiedmann-Franz, il prodotto è una costante per la temperatura e ovviamente dipende dai materiali:

$$k \cdot \rho = 2,4 \cdot 10^{-8} T [K]$$

Seppure nella migliore delle ipotesi il potere della coppia termoelettrica fosse alto a temperatura di scarico in ambiente, otteniamo $z^{max} = 2,22 \cdot 10^{-4}$ a cui corrisponde una differenza di temperatura di appena $10^\circ C$, per altro ad effetto frigorifero nullo.

È impensabile utilizzare metalli come termoelettrodi.

Si usano semiconduttori che presentano elevato potere termoelettrico di accoppiamento, correlato ad elevata condutività elettrica e bassa conduttività termica.



α decresce al crescere di n

σ_{el} (conducibilità) cresce al crescere di z .

$z \propto \alpha^2 \sigma$ il max di $\alpha^2 \sigma$ cade negli n intermedi ossia nel campo dei semiconduttori.

La conducibilità termica si compone di una parte di vibrazione reticolare indipendente da n e da una parte elettronica crescente con n .

$$z \propto \frac{1}{k} \propto \frac{1}{k_e}$$

Il max di $z = \frac{\alpha^2 \sigma}{k}$ si trova nel campo dei semiconduttori.

Attualmente i semiconduttori più utilizzati sono leghe (Bi-Te-Au) per p e leghe (Bi-Te-Se) per n

Con queste leghe si raggiunge $z \approx 0,003$

Considerazioni energetiche

Il rendimento ottenibile con un refrigeratore termoelettrico è molto inferiore a quello che si può realizzare con le medesime condizioni operative (con i sistemi frigoriferi visti finora) in un sistema tradizionale a compressione di vapore.

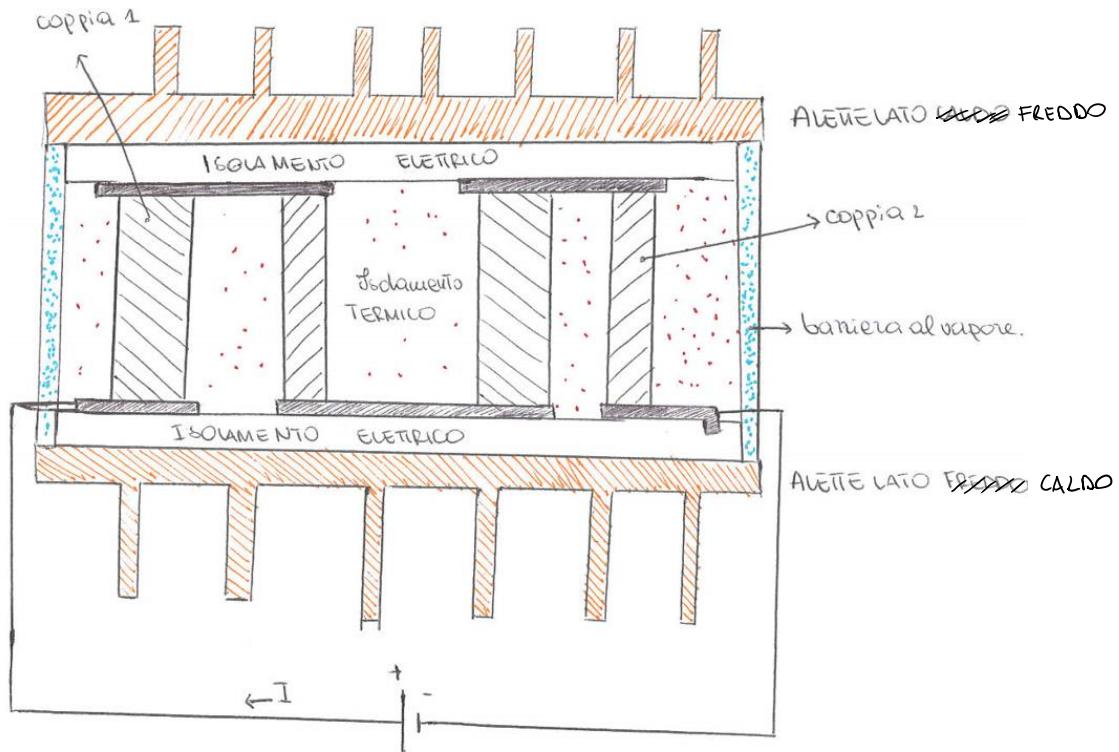
Il vantaggio dell'impianto frigorifero ad effetto termoelettrico è che non ci sono parti mobili, c'è soltanto da comandare con una batteria per far passare corrente.

Si utilizza un refrigeratore termoelettrico quando sono primari i seguenti requisiti:

- semplicità di regolazione della potenza frigorifera e possibilità di passare alla funzione di riscaldamento, invertendo la polarità della tensione esterna da applicare.
- Mancanza di parti in movimento → no usura, silenziosità
- Possibilità di operare a gravità nulla o in condizioni di accelerazione intensa (veicoli spaziali)

Schema di modulo per refrigerazione termoelettrica

È pensabile realizzarlo con più coppie pn in serie;



Le singole coppie termoelettriche vengono solidamente disposte in serie. Avendo la stessa lunghezza L abbiamo due piani.

Le giunzioni calde e fredde sono saldate alle rispettive superfici di scambio termico con un materiale che sia un buon conduttore termico ma idealmente elettrico.

Alette di raffreddamento, barre di materiale metallico che fuoriesce e aumenta lo scambio di calore sia dal lato freddo che dal lato caldo.

Le superfici di scambio termico sono spesso adottate per favorire lo scambio, in modo che il ΔT tra i giunti termoelettrici sia quanto più vicino possibile al ΔT tra gli ambienti esterni.

Termofluidodinamica

Consideriamo un fluido che scorre in un condotto.

Indichiamo con PARTICELLA ELEMENTARE DI FLUIDO (o filetto fluido) un insieme di particelle, grande rispetto alle dimensioni molecolari del fluido, ma piccola rispetto alle dimensioni del condotto in cui circola. Quindi per noi il sistema è continuo, non discreto.

(ad esempio se il fluido è H_2O , la particella di fluido è grande rispetto alla dimensione della molecola ma piccola rispetto al tubo).

Questa è una definizione utile per le misurazioni.



Tre linee di flusso

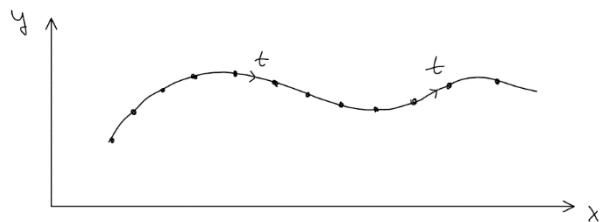
Le tre linee di flusso nel moto stazionario sono la stessa cosa, nel moto non stazionario no.

- Traiettoria della particella di fluido, o linea di percorso (path-line)

È l'insieme dei punti dello spazio occupati dal baricentro della particella nel tempo (analogo alla dinamica del punto materiale).

Possiamo definire le velocità della particella nelle tre dimensioni, se immagino un moto tridimensionale:

$$u = \frac{dx}{dt}, v = \frac{dy}{dt}, w = \frac{dz}{dt}$$



t è la variabile, nel tempo la particella occupa posizioni diverse nello spazio.

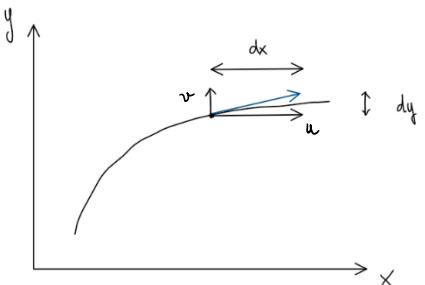
- Linea di corrente (stream line)

È la curva che ha come tangente in ogni suo punto il vettore velocità, così ci soffermiamo sulla direzione della particella.

Per definire le linee di corrente, scomponiamo la velocità di un punto nelle sue componenti e scriviamo:

$$\frac{v}{u} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{v}{u} = \frac{u}{dx} = \frac{w}{dz}$$

In quel punto la curva è la linea di corrente. Nel piano xy , $\frac{v}{u} = \frac{dy}{dx}$ cioè la tangente.



- Linea di fumo o di colore (streak-line)

È la linea che collega i punti che sono passati per un punto fisso nello spazio nei tempi precedenti.

Rappresenta la traiettoria dei punti che sono passati per un punto fisso dello spazio in tempi precedenti. Le linee di fumo si calcolano a partire dalle traiettorie invertendo il senso del tempo (dall'istante t all'istante t_0), perché all'istante iniziale t_0 le traiettorie devono essere passate per un punto fisso x_0, y_0 .

Vengono ancora utilizzate scientificamente; visualizzazione del moto con questo metodo.

N.B.: A regime stazionario le tre linee coincidono!

Quando mettiamo la dipendenza dal tempo le cose cambiano.

Invece se il moto è funzione del tempo, sono 3 linee distinte.

27-10.-21

Esempio:

Supponiamo che il moto sia bidimensionale, $w = 0$; si svolge tutto sul piano xy .

Supponiamo che $v = y$ e che $u = \frac{x}{1+t}$ dove t è il tempo.

- Linee di corrente;

$$\frac{v}{dy} = \frac{u}{dx} \rightarrow \frac{y}{dy} = \frac{x}{1+t} \cdot \frac{1}{dx}$$

$$\frac{dx}{x} (1+t) = \frac{dy}{y}$$

Integriamo in un certo istante di tempo $t = \text{cost}$:

$$(1+t) \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = \ln\left(\frac{y}{y_0}\right) \rightarrow \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)^{(1+t)} = \ln\left(\frac{y}{y_0}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{x_0}\right)^{1+t} = \left(\frac{y}{y_0}\right) \text{ abbiamo correlato } x \text{ ed } y \text{ ad un certo istante di tempo}$$

Abbiamo trovato una funzione solo dello spazio (perché $t = \text{cost}$) allora la relazione tra x ed y ad ogni istante di tempo t è fissata.

Le linee di corrente all'istante $t = 0$ sono date da:

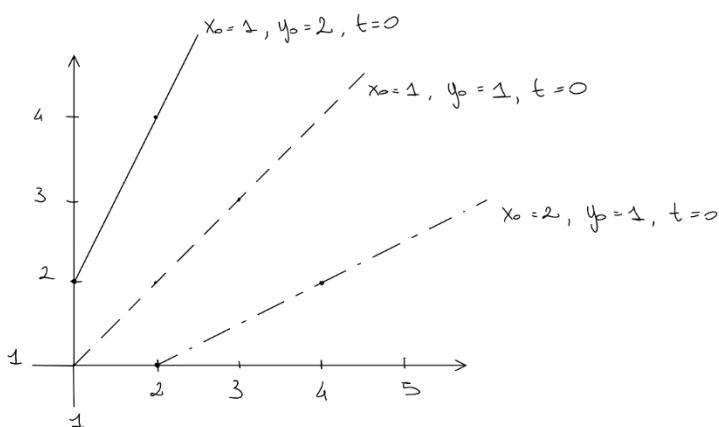
$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} \rightarrow \text{rette (le rette sono a } 45^\circ \text{ se } x_0 = y_0, \text{ che partono dal punto } x_0 y_0)$$

Se $t = 1$ le linee di corrente sono date da:

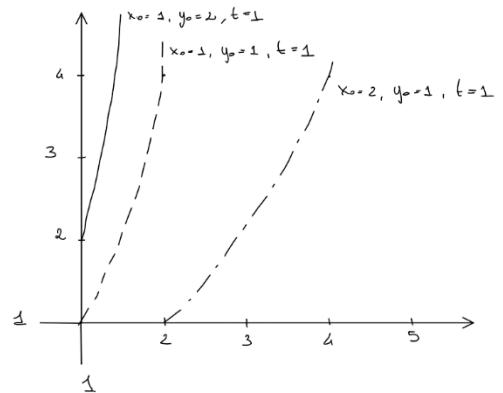
$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 = \frac{y}{y_0}$$

→ andamento quadratico del tipo $y = x^2$;

il punto di partenza è il punto $x_0 y_0$ studio la linea di corrente che parte dal punto $x_0 y_0$.



Linee di corrente per $t = 0$



Linee di corrente per $t = 1$

le curve nel caso $t = 1$ sono divergenti verso destra.

Se $t = 2$ chiaramente l'andamento sarà cubico.

⇒ **Le linee di corrente cambiano ad ogni istante di tempo, quindi non coincidono con la traiettoria, perché il moto è funzione del tempo.**

- Traiettorie

$$u = \frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{x}{1+t} = \frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dt}{1+t} \rightarrow \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = \ln\left(\frac{1+t}{1+\vartheta_0}\right) \text{ manteniamo la funzione tra } x \text{ e } t;$$

$$v = \frac{dy}{dt} \rightarrow y = \frac{dy}{dt} \rightarrow dt = \frac{dy}{y} \rightarrow t - \vartheta_0 = \ln\left(\frac{y}{y_0}\right) ;$$

(ϑ_0 tempo iniziale)

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{y_0} = e^{(t-\vartheta_0)} \\ \frac{x}{x_0} = \frac{1+t}{1+\vartheta_0} \end{cases} : \text{leggi che legano } x \text{ ed } y \text{ al tempo } t \text{ che è variabile.}$$

Eliminiamo il tempo tra le due relazioni per ottenere la relazione tra x ed y :

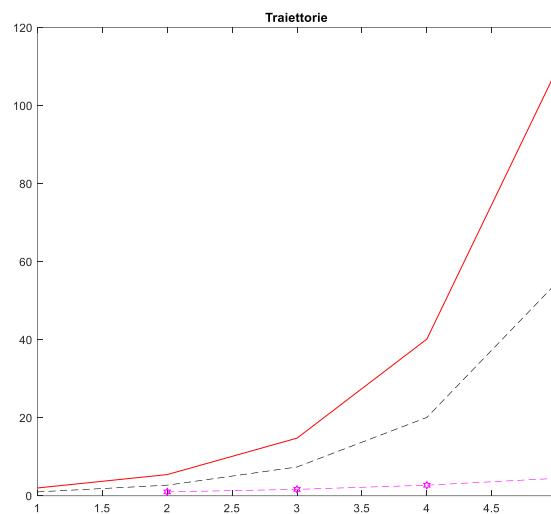
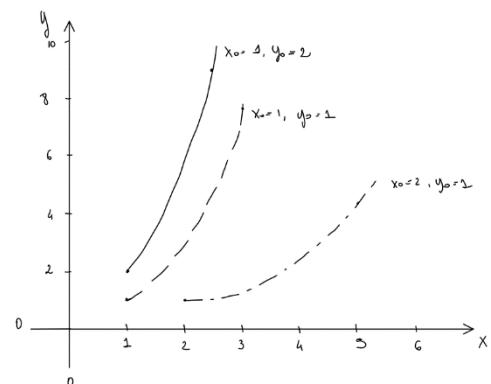
$$\frac{x}{x_0}(1 + \vartheta_0) = 1 + t \rightarrow t = \frac{x}{x_0}(1 + \vartheta_0) - 1 \text{ (lo sostituisco in } y)$$

$$\frac{y}{y_0} = \exp\left[\frac{x}{x_0} + \frac{x}{x_0}\vartheta_0 - 1 - \vartheta_0\right] = \exp\left[\frac{x}{x_0}(1 + \vartheta_0) - (1 + \vartheta_0)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{y}{y_0} = \exp\left[\left(\frac{x}{x_0} - 1\right)(1 + \vartheta_0)\right]$$

Per semplicità ipotizziamo $\vartheta_0 = 0$ e $x_0 = y_0 = 1$

$$\Rightarrow y = \exp(x - 1) = e^{x-1}$$

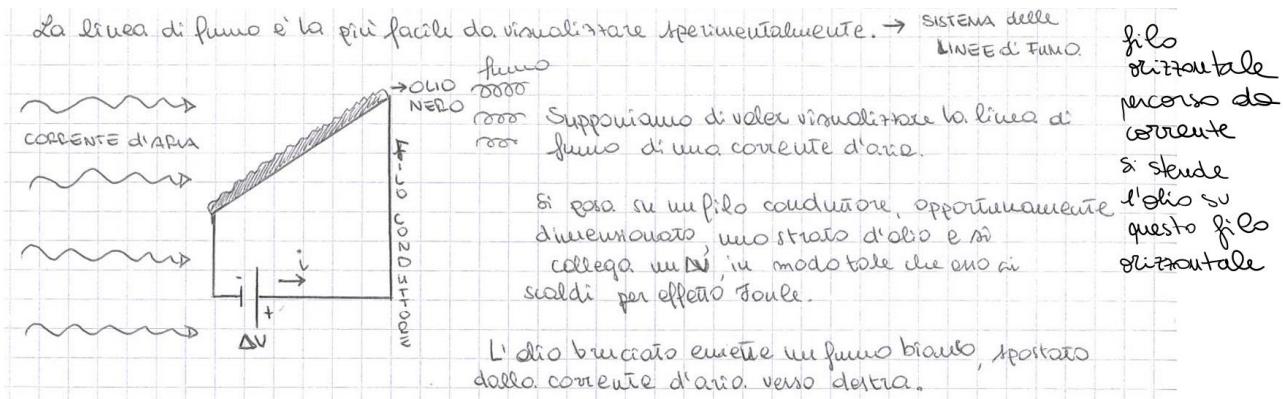


- Linee di fumo

È il luogo dei punti occupati dalle particelle di fluido che sono passate attraverso uno stesso punto dello spazio.

La linea di fumo è la più facile da visualizzare sperimentalmente → sistema delle linee di fumo

Supponiamo di voler visualizzare la linea di fumo di una corrente d'aria. Prendiamo un filo conduttore, opportunamente dimensionato, percorso da corrente e immaginiamo di stendere uno strato di olio e si collega un ΔV in modo tale che esso si scaldi per effetto Joule. L'olio bruciato emette un fumo bianco, spostato dalla corrente d'aria verso destra.



La stream line è una linea “inversa” alla traiettoria. Nella traiettoria si vedono le posizioni dello spazio in funzione del tempo; nelle linee di fumo si va indietro nel tempo fino all’istante iniziale, da cui è stata generata questa linea.

In realtà le linee di fumo sono di due tipi:

Linea temporale, se le particelle sono passate per lo stesso punto allo stesso istante.

Linea di colorazione, se le particelle sono passate per lo stesso punto ma in istanti di tempo precedenti distinti.

Facendo passare corrente, il filo si scalda, scalda l’olio e l’olio brucia e fa fumo. Se non c’è corrente che viene da sinistra il fumo sale. Se invece mettiamo la corrente di sinistra il fumo non sale ma va verso destra avrà un andamento di tipo parabolico. Quel filo di fumo che va verso destra è proprio la linea di fumo, perché è quella particella che ha toccato il filo, quella che non ha toccato il filo non si è intrisa di olio e quindi non si vede.

Per le linee di fumo si ragiona al contrario. Partiamo dall’equazione della traiettoria in x in funzione di t :

$\frac{x}{x_0} = \frac{1+t}{1+\theta_0}$ immaginiamo che x_0 sia il punto dello spazio da cui è stato emesso il fumo all’istante θ_0 . Mettiamo l’olio sul filo e quindi l’aria che passava in quel punto quando passava corrente bruciava ed era il punto x_0 . È il punto dove c’era l’olio sul filo che scaldava, si bruciava ed emetteva fumo.

Per generalità di esposizione:

$$x_0 = \xi_x$$

$$\theta_0 = \tau$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\xi_x} = \frac{1+t}{1+\tau} \quad (2) \text{ dove } \tau \text{ è precedente a } t$$

$$\Rightarrow \frac{y}{\xi_y} = e^{t-\tau} \quad (3)$$

(ξ_x, ξ_y) → è il punto di passaggio che definisce la linea di fumo.

Da (2) ricavo τ :

$$\tau = \frac{1+t}{x} \cdot \xi_x - 1$$

Sostituisco a $\theta_0 \rightarrow \tau$ e a $x_0 \rightarrow \xi_x$ in $(t - \theta_0) = (1 + \theta_0) \left(\frac{x}{x_0} - 1 \right)$ e ottengo:

$$t - \tau = (1 + \tau) \left(\frac{x - \xi_x}{\xi_x} \right)$$

Sostituisco $(t - \tau)$ in (3):

$$\frac{y}{\xi_y} = \exp \left[\left(\frac{x - \xi_x}{\xi_x} \right) (1 + \tau) \right]$$

Questa è la linea di fumo;

Ho y per ogni istante τ che è il tempo precedente al tempo t perché è in θ_0 ;

Per trovare le linee di fumo ripartiamo dalle equazioni delle traiettorie appena ricavate ed immaginiamo che il punto fisso di partenza della linea di fumo è stato il punto $x_0 y_0$ ad istanti di tempo τ precedenti:

$$x_0 = \xi_x, y_0 = \xi_y, \vartheta_0 = \tau \leq t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \xi_y e^{t-\tau} \\ x = \xi_x \left(\frac{1+t}{1+\tau} \right) \end{cases}$$

Per ottenere la relazione tra x ed y eliminiamo τ o t :

$$y = \xi_y \exp\left[\frac{x-\xi_x}{x}(t+1)\right] \text{ o } y = \xi_y \cdot \exp\left[\frac{x-\xi_x}{x}(1+\tau)\right]$$

È stata ricavata la relazione sia con t che con τ ;

Facciamo un diagramma di y in funzione di x al variare di τ .

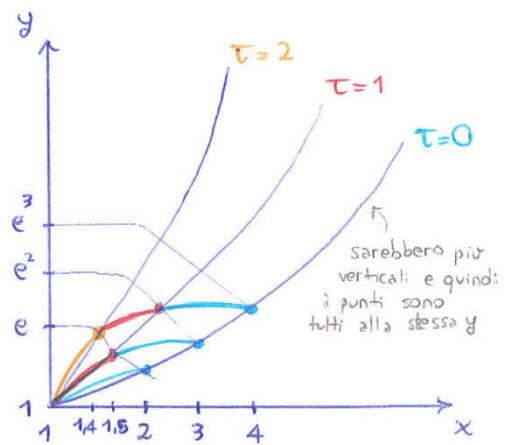
Supponendo $\tau = 0$ ritrovo l'equazione di prima della traiettoria. Lo stesso per $\tau = 1$ e per $\tau = 2$;

Allora queste sono le traiettorie del fluido così come le abbiamo studiate prima. Invece, le linee di fumo si ottengono con t istanti precedenti.

Supponiamo che abbiamo il luogo da cui parte il fumo, che sia fatto nel seguente modo:

Dall'istante 0 all'istante 1 il fumo che esce è bianco, poi tra l'istante 1 e l'istante 2 esce fumo rosso, poi dall'istante 2 all'istante 3 esce fumo giallo.

Se voglio vedere il colore della traiettoria quando $\tau = 0$, siccome la traiettoria è il luogo dei punti occupati da quella particella nel tempo, la curva che io vedrò è sempre la curva relativa alla prima particella che è partita all'istante zero. Quindi compie una traiettoria bianca. Quando considero quello che è successo dall'istante $\tau = 1$, da questo istante il fumo era rosso; quindi, la particella che ha iniziato ad uscire dal luogo dove generava il fumo è rossa, se seguo quella particella mi dà una curva rossa. Dall'istante 2 a 3 ho una curva gialla, perché la testa della particella che partiva a 0 era bianca, quella che partiva da 1 era rossa e quella che partiva da 2 era gialla.



Vediamo come sono le linee di fumo;

Le curve colorate sono le linee di fumo e hanno colori diversi perché tra l'istante 0 e 1 usciva bianco; dall'istante 1 in poi la linea di fumo è rossa perché usciva fumo rosso e poi dall'istante 2 in poi la linea di fumo è gialla perché usciva fumo giallo. Le traiettorie invece hanno lo stesso colore perché sono il colore della particella di testa che usciva dall'istante iniziale.

È come se inviluppassi la traiettoria con le curve che sono le linee di fumo. Il tempo scorre da sinistra verso destra.

Supponiamo che il fumo dia bianco tra l'istante 0 e 1 poi rosso tra l'istante 1 e 2, e poi giallo tra 2 e 3.

Però la testa della particella partita al tempo 0 è sempre bianca.

Allora la traiettoria $\tau = 0$ è bianca perché sopra ci scorre una linea di fumo che ha in testa una particella bianca.

Analogamente la traiettoria $\tau = 1$ è rossa perché all'istante 1 in testa alla linea di fumo c'è una particella rossa.

Idem per la traiettoria $\tau = 2$ che sarà gialla.

Allora tra il tempo 0 e 1 le linee di fumo sono tutte bianche;

poi tra il tempo 1 e 2 l'inizio delle linee di fumo sarà un po' più rosso e poi ancora bianco;

tra il tempo 2 e 3 l'inizio delle linee di fumo sarà un po' più giallo, poi rosso e poi bianco.

Per comodità abbiamo posto $\xi_x = 1$, $\xi_y = 1$ ed otteniamo:

$$y = \exp\left[\left(\frac{x-1}{x}\right)(t+1)\right] \text{ e } y = \exp[(x-1)(\tau+1)]$$

Studiamo le traiettorie:

- $\tau = 0 \rightarrow y = e^{x-1}$
- $\tau = 1 \rightarrow y = e^{2(x-1)}$
- $\tau = 2 \rightarrow y = e^{3(x-1)}$

Studiamo le linee di fumo:

- $t = 1 \rightarrow$ se $x = 1 \rightarrow y = 1$
se $x = 2 \rightarrow y = e$
- $t = 2 \rightarrow$ se $x = 1 \rightarrow y = 1$
se $x = 1,5 \rightarrow y \approx e$
se $x = 2 \rightarrow y \approx e^2$
- $t = 3 \rightarrow$ se $x = 1 \rightarrow y = 1$
se $x = 1,4 \rightarrow y \approx e$
se $x = 2 \rightarrow y \approx e^2$
se $x = 4 \rightarrow y = e^3$

Principio di conservazione della massa di Leonardo da Vinci

Il principio di conservazione della massa fu scoperto da Lavoisier ma prima ancora Leonardo scoprì il principio di conservazione della massa applicato ai fluidi che scorrono in un condotto.

Il principio o legge di conservazione della massa afferma che la massa rimane costante se le velocità in gioco sono molto inferiori alla velocità della luce.

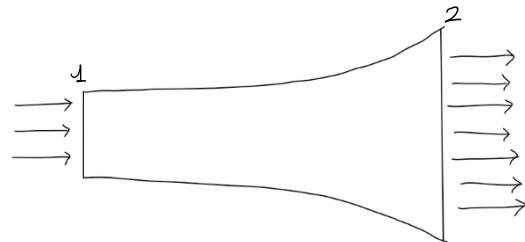
Consideriamo un fluido che scorre in un condotto in cui la sezione aumenta.

La portata è data dalla velocità media w del fluido nel condotto per la sezione S diviso il volume specifico v (= l'inverso della densità ρ):

$$G = \frac{ws}{v} = wS\rho$$

Se il regime è stazionario cioè se non ci sono aggiunte o perdite di fluido, $G = \text{cost}$. Allora possiamo scrivere:

$$w_1 S_1 \rho_1 = w_2 S_2 \rho_2$$



Osservazione;

con w indichiamo la **velocità media** del fluido nel condotto; quindi, la velocità del fluido è la stessa in tutti i punti di passaggio della sezione. Profilo di velocità costante sulla sezione.

Si possono distinguere due tipi di moto per velocità medie inferiori a quella del suono:

Moto incomprimibile;

si può avere sia se il fluido è incomprimibile ($\rho_1 = \rho_2$) che se il fluido è comprimibile ma con variazioni di pressioni piccole;

$$\rho_1 = \rho_2 \rightarrow w_1 S_1 = w_2 S_2 \Rightarrow \begin{cases} \text{se } S \uparrow, w \downarrow \\ \text{se } S \downarrow, w \uparrow \end{cases}$$

N.B.: Questo è vero finché la velocità è minore della velocità del suono.

Oltre la velocità del suono viene falsificata questa legge, allora conferma che è vera entro un certo limite (concetto filosofico di Carl Popper).

Moto comprimibile;

$$\rho_1 \neq \rho_2$$

$$\text{Se } S_1 = S_2 \text{ (condotto a sezione costante)} \rightarrow w_1 \rho_1 = w_2 \rho_2 \Rightarrow \frac{w_1}{w_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

Se il fluido si dilata, $v_2 > v_1$ (aumenta il volume specifico) \rightarrow la velocità aumenta: $w_2 > w_1$

Se il fluido si comprime, $v_2 < v_1 \rightarrow$ la velocità diminuisce: $w_2 < w_1 \rightarrow$ **compressione dinamica**

Compressione dinamica: se la velocità in uscita è minore della velocità in ingresso, il fluido si comprime $v_2 < v_1$ semplicemente per differenza di velocità.

$$\text{Se } w_1 = w_2 \rightarrow S_1 w_1 = S_2 w_2 \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

La compressione dinamica si può avere anche a causa di una variazione di sezione e a parità di velocità: se $S_2 < S_1$ cioè se diminuisce la sezione, il fluido si comprime $v_2 < v_1$.

Facciamo il differenziale dell'espressione della portata G e dividiamo per G :

$$G = wSp \rightarrow \frac{dG}{G} = 0 = \frac{dwSp + w dSp + wS dp}{G} = \frac{dwSp + w dSp + wS dp}{wSp}$$

$0 = \frac{dw}{w} + \frac{ds}{s} + \frac{dp}{p}$: Equazione differenziale della conservazione della portata (della massa per unità di tempo) (ogni termine è relativo ad una variabile).

Principio di conservazione dell'energia: equazione di Bernoulli generalizzata

Ricaviamo l'equazione di Bernoulli partendo dall'equazione di conservazione dell'energia per sistemi aperti per ottenere la versione generalizzata che coinvolge anche l'attrito, che non si ottiene partendo dalla conservazione della quantità di moto.

Equazione di conservazione dell'energia per sistemi aperti:

$$dq - dl_f = dh + \frac{dw^2}{2} + g dz$$

Ricordiamo le equazioni costitutive di dh e di dq in base alla termodinamica:

$$dh = T ds + v dp$$

$$\frac{dq}{T} = ds - ds_s \rightarrow dq = T ds - T ds_s$$

Dove ricordiamo che ds_s rappresenta la sorgente o produzione di entropia dovuta alle irreversibilità di tipo termomeccanico (prima specie) ed elettrochimico (seconda specie).

Sostituiamo dq nell'equazione di conservazione dell'energia:

$$T \cancel{ds} - T ds_s - dl_f = \cancel{T ds} + v dp + \frac{dw^2}{2} + g dz$$

$$T ds_s + dl_f + v dp + \frac{dw^2}{2} + g dz = 0 \quad (\text{equazione di Bernoulli generalizzata che scriviamo in modo diverso})$$

La chiamiamo equazione di Bernoulli generalizzata per distinguerla dalla equazione di Bernoulli classica in cui non sono presenti né scambi di lavoro né sorgenti di entropia. Ogni termine dell'equazione di Bernoulli generalizzata ha le dimensioni di una lunghezza che storicamente è stato chiamato **carico**.

N.B.: tutti i termini dell'equazione ottenuta hanno un significato fisico:

- $de_p = gdz$: carico potenziale o effettivo; (un'altezza si chiama carico)
 - $de_c = \frac{dw^2}{2}$: carico cinetico;
 - vdp : carico piezometrico e si scrive anche come $\frac{dp}{\rho}$: è dovuto alla variazione di pressione;
Definiamo dz_f l'altezza tale che moltiplicato per g dia dz_f :
 - $dl_f = g dz_f$: carico del lavoro scambiato;
 - Tds_s : lavoro non utilizzato a causa delle irreversibilità, sono le sorgenti entropiche dovute alle irreversibilità che prevalentemente sono rappresentate dall'attrito; allora si definisce dz_a tale che moltiplicata per g dia Tds_s :
- $$Tds_s = g dz_a$$

Sostituisco nell'equazione:

$$\Rightarrow g dz_a + g dz_f + \frac{dp}{\rho} + \frac{dw^2}{2} + g dz = 0$$

Dividiamo per g ed otteniamo l'equazione di Bernoulli generalizzata:

$$dz_a + dz_f + \frac{dp}{\gamma} + \frac{dw^2}{2g} + dz = 0, \text{ con } \gamma = \rho g \text{ peso specifico (equazione differenziale di Bernoulli generalizzata)}$$

Se voglio calcolarla in termini finiti tra una sezione 1 e una sezione 2;

$$z_a + z_f + \int_1^2 \frac{dp}{\gamma} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + (z_2 - z_1) = 0 \text{ (equazione di Bernoulli integrale)}$$

Se il moto è incompressibile, $\gamma = \text{cost}$:

$$\int_1^2 \frac{dp}{\gamma} = \frac{p_2 - p_1}{\gamma}$$

Porto i termini con il pedice 1 a destra e quelli con il pedice 2 a sinistra;

$$z_a + z_f + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{w_2^2}{2g} + z_2 = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{w_1^2}{2g} + z_1$$

È sottointeso che il moto va da 1 a 2; In definitiva, la somma dei tre carichi: effettivo (altezza del baricentro rispetto al sistema di riferimento), cinetico e piezometrico è costante, però se c'è un organo motore (organo meccanico che scambia lavoro che mi dà il carico di lavoro z_f) e se ci sono attriti (produzione entropica Tds_s che diviso g è lo z_a ; il carico dissipato a causa degli attriti), si devono aggiungere i termini z_a e z_f ai termini in uscita.

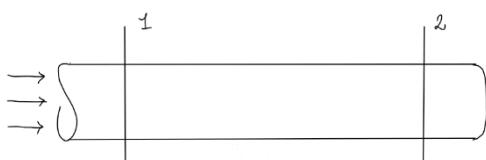
Se tra la sezione 1 e 2 non ci sono organi meccanici $z_f = 0$ e se si considera il moto a meno delle irreversibilità allora la somma dei tre carichi è uguale ad una costante.

- Equazione di Bernoulli generalizzata; $z_a \neq 0$ e $z_f \neq 0$
- Equazione di Bernoulli semplificata; $z_a = 0$ e $z_f = 0$

Definizione operativa dell'attrito z_a

Consideriamo un flusso che scorre in un condotto tra la sezione iniziale 1 e 2.

- Se il condotto è orizzontale $\rightarrow z_1 = z_2$ non c'è variazione di carico effettivo
- Se tra 1 e 2 non ci sono organi motori $\rightarrow z_f = 0$
- Facciamo in modo che $w_1 = w_2 \rightarrow$ se il moto è incompressibile basta impostare che $S_1 = S_2$; invece se il moto è compressibile prendiamo S_1 ed S_2 in modo tale che $w_1 = w_2$.



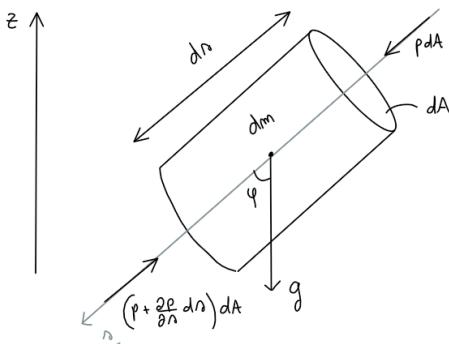
Allora sotto queste condizioni dall'equazione di Bernoulli generalizzata otteniamo:

$$z_a = \frac{p_1 - p_2}{\gamma};$$

cioè il carico perso per attrito si misura tramite una differenza di pressione.

Equazione di Eulero

Passiamo dal moto stazionario a quello non stazionario;



È il caso più generale dell'equazione di Bernoulli, che vale se il moto NON è stazionario (compare la variabile tempo).

Consideriamo un cilindro di fluido in direzione s , di lunghezza ds , di sezione dA e massa $dm = pdV = pds dA$

Indichiamo l'accelerazione di gravità che agisce nel baricentro verticalmente in verso opposto rispetto a z e che forma un angolo φ con l'asse s .

La forza che agisce sulla faccia superiore è pdA dove p è la pressione e dA è la sezione su cui agisce; la forza che agisce sulla faccia inferiore è $(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds) dA$ che è una forza che agisce contro l'arrivo del fluido. E poi c'è la forza di gravità.

Applichiamo il secondo principio della dinamica secondo cui la somma delle forze in direzione s è pari alla derivata nel tempo della quantità di moto:

$$\Sigma F|_s = \frac{d}{dt}(mw) \text{ (derivata rispetto al tempo dell'impulso)}$$

$$dm \frac{dw}{dt} + w \cancel{\frac{dm}{dt}} = p dA - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds \right) dA + gdm \cos \varphi \quad (\text{sto in ipotesi di regime stazionario ma funzione del tempo, la massa non varia})$$

$$\rho ds dA \cdot \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial s} ds dA + g \rho ds dA \cos \varphi$$

semplifico il ds ;

$$\rho \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial s} + \rho g \cos \varphi$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g \cos \varphi \quad (1)$$

Supponiamo che la velocità dipenda dalla "quota s " e dal tempo e facciamone il differenziale:

$$w(s, t) \rightarrow dw(s, t) = \frac{\partial w}{\partial s} ds + \frac{\partial w}{\partial t} dt$$

Deriviamo rispetto al tempo:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial s} \cdot w + \frac{\partial w}{\partial t} \quad (2)$$

Imponiamo l'uguaglianza tra (1) e (2);

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial s} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g \cos \varphi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \frac{\partial z}{\partial s}$$

Dove $dz = -ds \cos \varphi$ (dz verso l'alto, s verso il basso)

$$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g \frac{\partial z}{\partial s} = 0$$

Moltiplichiamo per ds e otteniamo l'Equazione di Eulero:

$$\frac{\partial w}{\partial t} ds + w dw + \frac{dp}{\rho} + g dz = 0 \quad (\text{forma differenziale})$$

$$\int_1^2 \frac{\partial w}{\partial t} ds + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) = 0$$

$$\int_1^2 \frac{\partial w}{\partial t} ds + \frac{w_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 = \frac{w_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 \text{ (forma integrale)}$$

A destra sono i soliti tre carichi, e a sinistra sono i tre carichi più l'integrale. Manca z_a , non ne tengo conto.

Quando nella fluidodinamica si fa l'integrale tra la sezione 1 e la sezione 2, c'è qualche corrispondenza con la termodinamica?

In termodinamica definisco il sistema termodinamico che studio con le leggi fisiche e ci faccio un contorno, quello che c'è dentro è il sistema termodinamico. Quando faccio l'integrale tra 1 e 2 nella fluidodinamica non faccio altro che definire il contorno del sistema termodinamico a cui applico il principio di conservazione della massa e dell'energia. Significa considerare termodinamicamente il sistema termodinamico come quello che c'è tra la sezione 1, la sezione 2 e il contorno fisso.

Osservazione:

è l'analogo dell'equazione di Bernoulli (ma semplificata) in cui però compare il tempo, non compare l'attrito perché è ricavata dal secondo principio della termodinamica.

A regime stazionario è l'equazione di Bernoulli classica in forma finita.

28-10.-21

Con la lezione di ieri abbiamo finito il Capitolo 1 del libro di fluidodinamica.

Iniziamo ora il Capitolo 2 "moto incomprimibile dei fluidi"

Quando parliamo di moto incomprimibile di fluidi non ci rivolgiamo necessariamente ai liquidi, anche gli aeriformi come l'aria si possono muovere di moto incomprimibile, noi vedremo quali sono le condizioni per cui il moto di un aeriforme si può considerare incomprimibile. Si può avere moto incomprimibile di un fluido comprimibile.

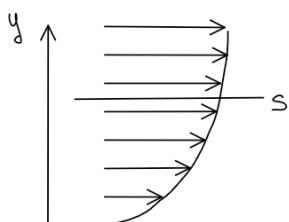
Nell'800 sono state formulate le tre equazioni costitutive dei tre fenomeni di trasporto, cioè di trasporto della quantità di moto, della massa e del calore.

Newton, Fick, Fourier

Legge di Newton: equazione costitutiva del trasporto della quantità di moto

La legge di Newton è chiamata equazione costitutiva, esistono equazioni costitutive che legano la causa all'effetto e poi esistono le equazioni che derivano dai principi fisici (che per noi sono massa, conservazione dell'energia e il secondo principio dell'energia che abbiamo utilizzato quando abbiamo introdotto l'exergia). È una legge che lega la causa (esistenza di un gradiente di velocità) con l'effetto (sforzo di taglio).

Considerato un profilo di velocità che varia con y :



il vettore velocità varia lungo y , la velocità cresce con y .

Si immagina che se il fluido viene mandato su un piano orizzontale, il piano orizzontale è fermo, quindi si fa l'ipotesi di aderenza alla parete. Il fluido che in quel momento è a contatto con la parete ha una velocità nulla.

La velocità va da zero fino al profilo di velocità indisturbato.

In una sezione S generica, il legame tra il gradiente di velocità (causa) e lo sforzo di taglio presente sulla superficie S (effetto) è proporzionale tramite una costante μ (proprietà fisica del fluido) che è funzione della pressione e della temperatura:

$$\tau = \mu \frac{dw}{dy}$$

Con $\mu = \mu(p, T)$: **Viscosità cinematica** ($\nu = \frac{\mu}{\rho}$ Viscosità dinamica)

La velocità al di sotto della generica sezione S ha una velocità leggermente più piccola rispetto alla velocità al di sopra di S . questa differenza di velocità provoca lo sforzo di taglio. Il fluido di sopra che ha una velocità più alta tende a trascinare il fluido nella direzione di x ; viceversa il fluido di sotto che ha velocità più bassa tende a frenare il fluido che si trova di sopra.

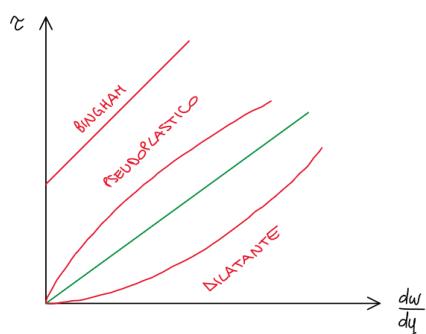
La legge stabilisce che tra la causa e l'effetto c'è una proporzionalità e il termine di proporzionalità è μ che è una proprietà fisica del fluido.

La caratteristica di questa legge di Newton sta nel fatto che μ è solo una proprietà fisica del fluido.

→ la legge di Newton oltre ad essere una legge costitutiva è anche una legge fisica!

Facciamo un diagramma.

- Se il **fluido è Newtoniano** (curva verde, la pendenza è μ quindi non è necessariamente 1) (tutte le sostanze pure): all'aumentare della causa, l'effetto aumenta in proporzione con μ ; e poiché μ è una proprietà fisica del fluido, μ è la tangente alla retta per ogni valore fissato di temperatura e pressione.



- Se il **fluido è NON Newtoniano** (in rosso) (fluidi puri con l'aggiunta di piccole particelle, per esempio i globuli rossi nel plasma);

il fluido non Newtoniano può essere di due tipi; può essere un tipo di fluido che ha uno sforzo di taglio residue quando la causa $\frac{dw}{dy} = 0$ quindi il legame tra τ e $\frac{dw}{dy}$ non è una retta nell'origine:

$$\rightarrow \tau = \tau_0 + k \frac{dw}{dy} \text{ fluido di Bingham}$$

$$\text{Con } k = k(\mu, \left| \left(\frac{dw}{dy} \right) \right|)$$

I fluidi NON Newtoniani hanno bisogno di uno sforzo aggiuntivo τ_0 per scorrere, cioè se si fornisce uno sforzo inferiore a τ_0 il fluido non si muove, poi dopo si comportano come fluidi Newtoniani (fluidi di Bingham).

$\tau_0 \rightarrow$ è lo sforzo che impedisce al fluido di scorrere, se lo sforzo di taglio è inferiore a τ_0 il fluido non si muove, se è superiore si può muovere.

Oppure fluidi pseudoplastici e fluidi dilatanti, con pendenza non costante. Un fluido di Bingham può comportarsi come fluido pseudoplastico e come fluido dilatante, dal punto di vista fisico k che corrisponde a $\frac{dw}{dy}$ non è il μ della legge di Newton ma dipende oltre dal μ anche dal valore assoluto di $\frac{dw}{dy}$.

$k \rightarrow$ Viscosità apparente;

Esempio tipico di fluido non Newtoniano è la vernice per dipingere le pareti di casa. Anche lo shampoo, il ketchup.

Nel libro è presente anche un capitolo sul moto laminare;

Analisi dimensionale per le perdite di pressione distribuite

Consideriamo un fluido che scorre in un condotto di lunghezza L e che ha ai due estremi una differenza di pressione Δp . Il fluido scorre perché c'è una differenza di pressione, supponiamo che il tubo abbia una rugosità superficiale dove le asperità superficiali sono individuate dal parametro ϵ che è piccolo rispetto al parametro D e vogliamo trovare una relazione mediante il teorema dell'analisi dimensionale tra le cadute di pressione $\frac{\Delta p}{L}$ che chiamiamo distribuite. L'attrito lo misuriamo con il Δp , quindi vogliamo trovare una relazione tra attrito, ovvero Δp e le variabili in gioco nel fenomeno;

Il rapporto $\frac{\Delta p}{L}$ (perdita di pressione distribuita, che per noi sono irreversibilità di prima specie legata alla differenza finita di pressione) è una funzione delle proprietà fisiche e fluidodinamiche del fluido e delle caratteristiche del condotto:

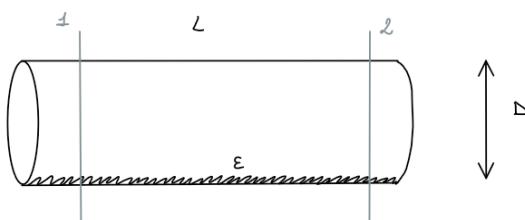
$$\frac{\Delta p}{L} = f(w, \rho, \mu, D, \epsilon)$$

$w \rightarrow$ velocità media del fluido nel condotto, sappiamo che nel moto laminare il fluido ha una velocità zero nel perimetro e una velocità massima sull'asse, noi questa velocità parabolica la consideriamo in una velocità media.

$D \rightarrow$ diametro del cilindro

$\mu \rightarrow$ viscosità

$\epsilon \rightarrow$ rugosità superficiale



Se il tubo è liscio $\epsilon = 0$ (trattamento meccanico: lappatura, eliminazione della rugosità)

I parametri in gioco da 5 diventano 4;

$$\frac{\Delta p}{L} = f(w, \rho, \mu, D) = \sum_i c_i w^{a_i} \rho^{b_i} \mu^{c_i} D^{d_i}$$

Dove nella seconda uguaglianza abbiamo espresso la funzione f come sommatoria di tanti termini che sono il prodotto di una costante per le potenze di w, ρ, μ, D .

Il teorema dell'analisi dimensionale dice che le dimensioni di $\frac{\Delta p}{L}$ devono essere uguali alle dimensioni della funzione f .

Scriviamo le dimensioni fisiche di tutti i termini:

$$\left[\frac{\Delta p}{L} \right] = \frac{ML}{T^2 L^2} \cdot \frac{1}{L} = MT^{-2} L^{-2}$$

$$[cost \cdot w^a \rho^b \mu^c D^d] = \left(\frac{L}{T} \right)^a \left(\frac{M}{L^3} \right)^b \left(\frac{M}{LT} \right)^c (L)^d = M^{b+c} \cdot L^{a-3b-c+d} \cdot T^{-a-c}$$

Uguagliamo le dimensioni fisiche:

$$\begin{cases} +1 = b + c \\ -2 = -a - c \\ -2 = a - 3b - c + d \end{cases}$$

Il numero di equazioni corrisponde al numero di grandezze dimensionali. Sono tre equazioni in quattro incognite. Sono tre equazioni perché ho scritto l'uguaglianza dimensionale di tre grandezze fisiche: massa, tempo, lunghezza.

Il numero di equazioni corrisponde al numero di grandezze dimensionali per le quali si fa l'uguaglianza dimensionale, invece le variabili sono 4 perché sono 4 le variabili in funzione del quale ho scelto di rappresentare $\frac{\Delta p}{L}$.

∞^1 soluzioni quindi non possiamo far altro che esprimere tre variabili in funzione della quarta.

Esprimiamo tutto in funzione di c , tanto questa scelta non influenza il risultato finale:

$$\begin{cases} b = 1 - c \\ a = 2 - c \\ d = -2 - a + 3b + c = -2 - 2 + c + 3 - 3c + c = -1 - c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta p}{L} = cost \cdot w^{2-c} \cdot \rho^{1-c} \cdot \mu^c \cdot D^{-1-c} = cost \cdot \frac{w^2 \rho}{D} \left(\frac{\mu}{w \rho D} \right)^c ;$$

Scegliamo $cost = \frac{1}{2}$ e riconosciamo il numero di Reynolds tra parentesi, quindi otteniamo:

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{w^2 \rho}{2 D} \cdot Re^x$$

Con x da trovare sperimentalmente. Con l'analisi teorica arriviamo solo a dire che le perdite di pressione distribuite (diviso L) sono proporzionali all'energia cinetica, alla densità e inversamente proporzionale a D e direttamente proporzionale a Reynolds.

Se il tubo è rugoso, $\epsilon \neq 0$

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{w^2}{2} \cdot \frac{\rho}{D} \left[Re^x \cdot \left(\frac{\epsilon}{D} \right)^y \right] = \frac{w^2 \rho}{sD} \cdot \lambda$$

Dove:

$$\lambda = f \left(Re, \frac{\epsilon}{D} \right)$$

Fattore di attrito (che impieghiamo soprattutto per il moto turbolento)

è una funzione generica;

Per disegnare il diagramma del fattore di attrito λ in funzione del numero di Reynolds, procediamo così:

Vogliamo calcolare il fattore di attrito per il moto laminare; l'equazione di Hagen-Poiseuille che rappresenta le perdite di pressione distribuita in moto laminare in un tubo che ha raggio R e con una velocità media w e in cui il fluido ha viscosità μ è uguale a:

$$\frac{\Delta p}{L} = 8\mu \frac{w}{R^2}$$

Imponiamo il risultato dell'analisi dimensionale:

$$8\mu \frac{w}{R^2} = \frac{w^2 \rho \lambda}{2D}$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{8\mu w}{R^2} \cdot \frac{2D}{w^2 \rho} = \frac{32\mu}{R w \rho} = \frac{64\mu}{D w \rho} = \frac{64}{Re} \quad (\text{nel moto laminare})$$

$$\text{Dove } D = 2R \text{ e } Re = \frac{w D \rho}{\mu}$$

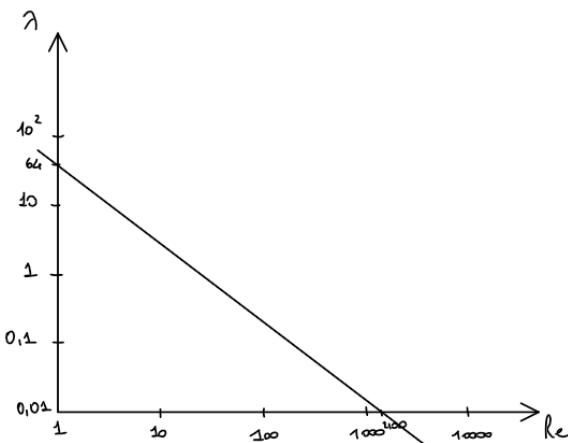
Sul diagramma logaritmico $\lambda - Re$ otteniamo:

$$\lambda = \frac{64}{Re} \rightarrow \ln(\lambda) = \ln(64) - \ln(Re)$$

$y = cost - x \rightarrow$ retta con coefficiente angolare -1 ;

\Rightarrow fino a $Re = 2100$ (moto laminare) la curva $\lambda = \lambda(Re)$ è una retta con pendenza -1 ;

(in realtà la retta del moto laminare si estende anche oltre quel valore di Reynolds, poiché per $2100 < Re < 3600$ siamo nel regime di transizione).



Se la scala fosse lineare avremmo un'iperbole;

Diagramma del fattore di attrito λ in funzione di Re : $\lambda = f(Re)$
(o di Moody o di Fanning)

$Re < 2100 \rightarrow$ moto laminare; $\lambda = \frac{64}{Re}$ (dall'equazione di H-P)

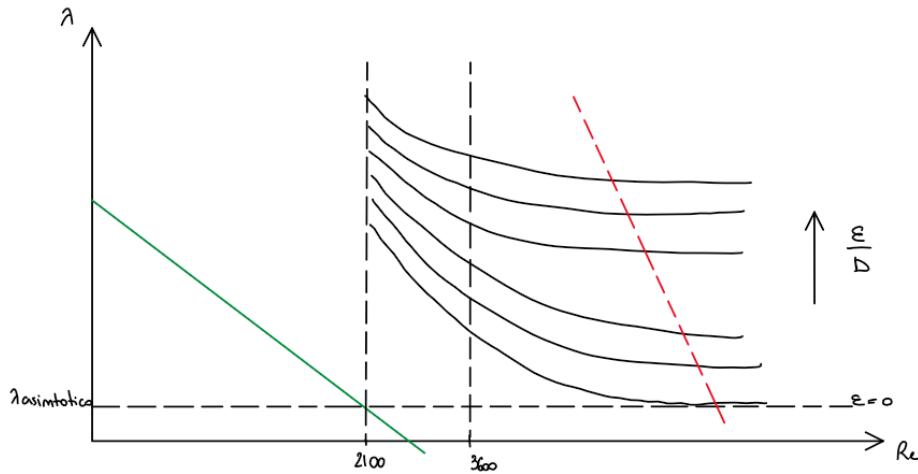
$2100 < Re < 3600 \rightarrow$ Regime di transizione in cui sono possibili entrambi i moti laminare e turbolento.

$Re > 3600 \rightarrow$ Moto turbolento: $\lambda = Re^x \left(\frac{\epsilon}{D}\right)^y$ (dall'analisi dimensionale)

Gli esponenti x ed y non si trovano con l'analisi dimensionale e quindi si devono ottenerne sperimentalmente imponendo la rugosità ϵ e le dimensioni D dei tubi sperimentali.

Una volta determinati x ed y possiamo trovare diverse espressioni del fattore di attrito λ che dipendono da Reynolds e da $\frac{\epsilon}{D}$;

Completiamo il diagramma di Moody; (diagramma del fattore di attrito)



Per il moto turbolento si riporta la curva limite inferiore ottenuta per $\epsilon = 0$ (fattore di attrito per tubi lisci) e poi in base all'esperienza si vede che se aumenta la rugosità superficiale individuata dal parametro adimensionale $\frac{\epsilon}{D}$ il λ cresce. Se le asperità superficiali sono più elevate crescono i vortici e i vortici sono delle sorgenti entropiche di prima specie, quindi aumentano le perdite dovute alle irreversibilità quindi aumenta z_a e aumenta la pressione distribuita nel condotto che è maggiormente rugoso.

Al limite del moto laminare hanno la maggior pendenza, poi le curve diminuiscono di pendenza e da un certo punto in poi diventano in pratica orizzontali, in questa zona il moto si chiama completamente turbolento.

La curva tratteggiata rossa (non corretta) ha come significato che a destra di questa curva i λ si possono considerare costanti con Reynolds, a sinistra no.

Osservazione:

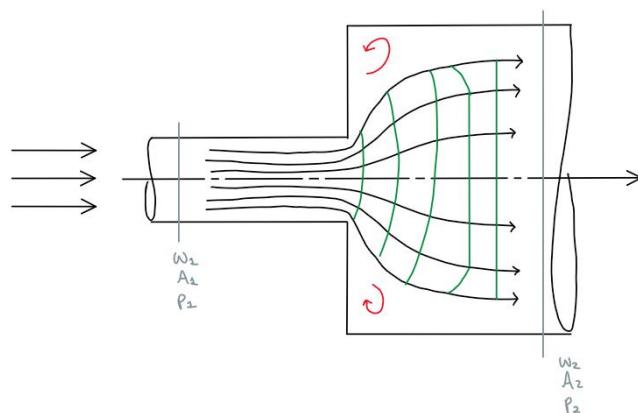
è utile sapere che per ogni curva con diverso $\frac{\epsilon}{D}$ esiste un valore di Re oltre il quale $\lambda = \text{cost}$ perché λ introduce altre non linearità nel problema.

→ se il nostro Re è oltre la curva di completa turbolenza, ad ogni ϵ corrisponde un λ indipendentemente da Re .

Perdite di pressione concentrate: allargamento di sezione

Riguarda l'allargamento di sezione (aneurisma) e il restringimento di sezione che vedremo dopo (stenosi e placche aterosclerotiche).

Vediamo le linee di flusso; siamo a regime stazionario, quindi le curve che disegniamo sono nello stesso tempo traiettorie, linee di corrente e linee di fumo, in regime stazionario le linee di flusso coincidono con le traiettorie e con le linee di fumo;



Come sono fatte le linee di corrente in un brusco allargamento di sezione?

In un punto la sezione aumenta bruscamente.

In condizioni di perfetta simmetria, l'asse del cilindro sarà la stessa linea di corrente, il fluido che si trova sull'asse del condotto continua indisturbato perché siamo in condizioni di simmetria.

Man mano che ci si discosta dall'asse del condotto, il fluido comincia ad allargarsi, fino a che il fluido che è quello che sfiora l'angolo dove la sezione del condotto aumenta è la linea di corrente che si allarga di più. Dopo questo allargamento questa linea di corrente si riattacca alla parete. Però, il fluido in rosso è come se rimanesse intrappolato e siccome il fluido scorre da sinistra verso destra il vortice che rimane circola in senso antiorario. Mentre, nella zona inferiore il vortice circola in verso orario.

Abbiamo un vortice che gira su se stesso, vortice che dissipava energia cinetica e dopo un certo tempo si può pensare che aumenti la sua temperatura a causa di questo vortice (si dissipava energia cinetica).

Vediamo come possiamo trattarla dal punto di vista matematico;

ricordiamo che le perdite di pressione distribuite erano definite:

$$\Delta p = \rho \frac{w^2}{2} L$$

Siccome siamo in un caso di perdita di pressione concentrata, L non ha più senso, perché era la lunghezza del tubo ai capi del quale si calcolava la caduta di pressione. Quindi ora non c'è più questo termine, per le perdite di pressione concentrate si parla di:

$$\Delta p = \rho \frac{w^2}{2} \lambda'$$

λ' → fattore di attrito per le perdite concentrate.

Moltiplicando numeratore e denominatore per g abbiamo:

$$\Delta p = \gamma \frac{w^2}{2g} \lambda'$$

Così possiamo definire il carico perso per attrito z_a :

$$z_a = \frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{w^2}{2g} \lambda'$$

Andiamo a vedere come si calcola λ' ;

la differenza di pressione Δp è:

$$\Delta p = p_1 - p_2 > 0 \text{ poiché } p_1 > p_2$$

Se riferiamo la nostra sezione del tubo ad un sistema di riferimento che ha velocità w_2 , il fluido nella sezione 2 ha velocità nulla e nella sezione 1 ha velocità $w_1 - w_2$.

Così notiamo bene, che a causa dell'allargamento di sezione e quindi a causa delle perdite di carico (delle perdite di pressione concentrate), il fluido si ferma nella sezione 2.

Allora definiamo la caduta di pressione nel seguente modo:

$$\Delta p = \gamma \frac{(w_1 - w_2)^2}{2g}$$

Questa relazione l'abbiamo ricavata con un ragionamento fisico, cioè dall'equazione di Bernoulli.

Inoltre, nella definizione di Δp in funzione di λ' riferiamoci solo alla velocità w_1 (ad esempio) ed otteniamo:

$$\Delta p = \gamma \frac{w_1^2}{2g} \lambda'$$

Possiamo uguagliare queste due espressioni;

$$\gamma \frac{(w_1 - w_2)^2}{2g} = \gamma \frac{w_1^2}{2g} \lambda'$$

Trovo che:

se il moto è incomprimibile, cioè se $\rho_1 = \rho_2$:

$$w_1 A_1 = w_2 A_2 \rightarrow w_2 = w_1 \frac{A_1}{A_2}$$

Sostituiamo nell'uguaglianza;

$$\Delta p = \frac{\gamma}{2g} \left(w_1 - w_2 \frac{A_1}{A_2} \right)^2 = \frac{\gamma}{2g} w_1^2 \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2 = \gamma \frac{w_1^2}{2g} \lambda'$$

$$\Rightarrow \lambda' = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

Abbiamo trovato una relazione geometrica tra il fattore di attrito per le perdite di pressione concentrate dovute ad un allargamento di sezione con le due sezioni, di ingresso e di uscita.

In questa approssimazione dipende soltanto dalla geometria.

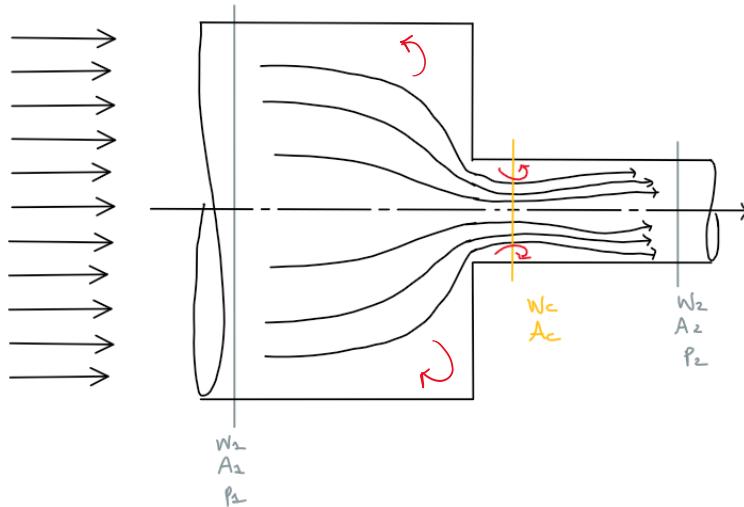
Se $A_2 \gg A_1 \rightarrow \lambda' \cong 1$

Allora:

$$\Delta p = \gamma \frac{w_1^2}{2g}$$

Tutta l'energia cinetica è persa perché il fluido si è fermato. La perdita di carico è tutta l'energia cinetica del fluido (il fluido si ferma).

Restringimento di sezione



Consideriamo un tubo molto grande che si restringe in un tubo molto piccolo.

La linea di corrente in corrispondenza dell'asse rimane sull'asse (per simmetria), il fluido che si trova sull'asse di simmetria del cilindro rimane sull'asse. Il fluido più distante si restringe.

Allo spigolo di diminuzione del diametro, il fluido che sfiora lo spigolo continua per inerzia e poi raggiunge un minimo e poi si riallarga. La sezione in quel punto si chiama di **vena contracta**. La vena fluida diminuisce anche rispetto ad A_2 . In questa zona ci sarà di nuovo del fluido che rimane intrappolato che forma un vortice.

Dopo la sezione contracta il fluido si riallarga.

Vediamo come si calcola il fattore di attrito λ

Di nuovo se siamo in ipotesi di moto incomprimibile e $\rho_1 = \rho_2$:

$$w_c A_c = w_2 A_2 \rightarrow \frac{w_2}{w_c} = \frac{A_c}{A_2} = \Psi$$

Di nuovo facciamo riferimento ad un sistema che si muove con velocità w_2 ; le analisi che facciamo ora sono tra la sezione A_c e la sezione A_2 in modo che riconduco il problema del restringimento di sezione ad un allargamento di sezione. Posso farlo perché il restringimento di sezione in A_c è causato proprio dal restringimento di sezione, quindi più brusco è il restringimento di sezione e minore sarà A_c .

Riconduco il restringimento di sezione ad un allargamento di sezione.

Considero le velocità rispetto ad un sistema di riferimento mobile che si muove con velocità w_2 ; quindi nella sezione 2 il fluido è fermo e nella sezione c si muove di velocità $w_c - w_2$:

la perdita di pressione sarà:

$$\Delta p = \gamma \frac{(w_c - w_2)^2}{2g}$$

Inoltre, calcoliamo il carico perso per attrito z'_a :

$$z'_a = \frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{(w_c - w_2)^2}{2g} = \frac{w_2^2}{2g} \left(\frac{w_c}{w_2} - f \right)^2 = \frac{w_2^2}{2g} \left(\frac{A_2}{A_c} - 1 \right)^2 = \frac{w_2^2}{2g} \left(\frac{1}{\Psi} - 1 \right)^2$$

Confrontando z'_a con Δp otteniamo il fattore di attrito λ' per le perdite concentrate per restringimento di sezione:

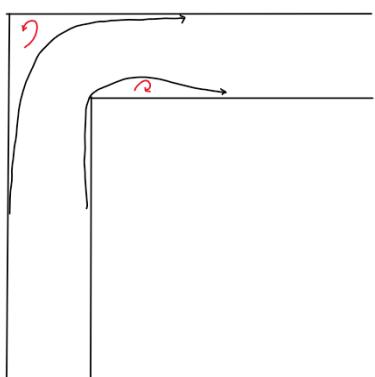
$$\lambda' = \left(\frac{1}{\Psi} - 1 \right)^2$$

Però Ψ non si può determinare in base alla geometria perché dipende da A_c che non è nota a priori e cambia molto se gli spigoli sono più o meno arrotondati.

→ ogni restringimento di sezione deve essere tarato in laboratorio e si deve fornire λ' come specifica del pezzo.

Gomiti a 90°

Cambi di direzione del flusso;



Il fluido che passa più vicino allo spigolo, quando esce non si riattacca subito, perché per inerzia, si distacca dalle pareti per poi tornarvi ad adeirare ad una certa distanza dal gomito.
Lì dove il fluido rimane intrappolato si formano i vortici.
Questa differenza di pressione concentrata ha il suo λ' .
I vortici sono le cause di irreversibilità di prima specie.

Ricordiamo l'equazione di Bernoulli generalizzata integrata era:

$$z_a + z_f + \int_1^2 \frac{dp}{\gamma} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + (z_2 - z_1) = 0$$

Avendo definito le perdite distribuite e quelle concentrate di pressione, siamo in grado di conoscere il carico perso per attrito z_a :

$$z_a = \left(\frac{\Delta p}{\gamma} \right)_{tot} = \frac{(\Delta p)_d}{\gamma} + \frac{(\Delta p)_c}{\gamma} = \sum_i \frac{w_i^2}{2g} \cdot \frac{l_i}{D_i} \lambda_i + \sum_j \frac{w_j^2}{2g} \lambda'_j$$

Ci sarà una perdita di pressione concentrata (c) e distribuita (d);

Così l'equazione di Bernoulli generalizzata può essere utilizzata nella progettazione cioè per calcolare z_f con il quale abbiamo scritto il lavoro per unità di massa da fornire ad un eventuale pompa:

$$l_f = g z_f$$

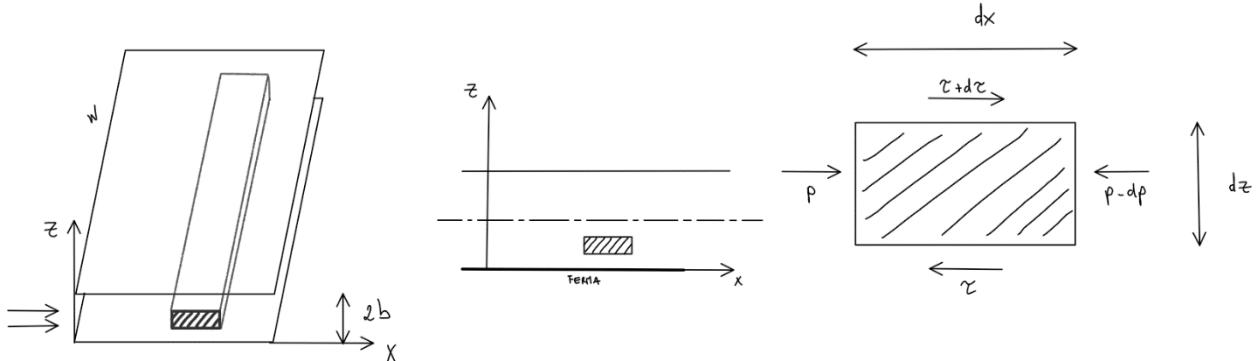
Poi, nota la portata G che deve smaltire la pompa, si può calcolare la potenza della pompa;

$$G l_f = P_f$$

Il professore assume che abbiamo fatto il moto di un fluido in un condotto a sezione circolare.

Moto di un fluido Newtoniano tra due piani paralleli

Prendiamo due pareti piane parallele tra loro a distanza $2b$ e di profondità w , tra le quali scorre un fluido in direzione x .



Consideriamo l'elementino e lo riportiamo nel piano zx .

Se suppongo che la parete inferiore sia ferma, il fluido parte da una velocità nulla sulla parete e poi cresce. Il profilo di velocità qualitativamente sarà di tipo parabolico.

Concentriamoci sull'elementino alto dz , lungo dx . Studiamo le forze applicate;

il fluido si muove da sinistra verso destra.

Sulla faccia si sinistra suppongo ci sia una pressione p , siccome il fluido va verso destra, nella faccia opposta la pressione sarà inferiore e sarà $p - dp$ e quindi sarà rivolta contro il verso del moto.

Il fluido che è sotto ha una velocità inferiore rispetto al fluido che è dentro l'elementino, mentre il fluido che sta sopra ha una velocità superiore. Il fluido che sta sopra quindi esercita uno sforzo di taglio nella direzione del moto che chiamo $\tau + d\tau$, mentre il fluido che sta in basso esercita un freno e quindi uno sforzo di taglio τ contrario al moto.

Facendo il bilancio delle forze che agiscono a questo volumetto infinitesimo:

$$pdzw + (\tau + d\tau)dxw = \tau dxw + (p - dp)dzw$$

(dzw è la superficie su cui è applicata la pressione)

Da cui:

$$d\tau dx = -dzdp$$

$$\Rightarrow \frac{d\tau}{dz} = -\frac{dp}{dz}$$

Il gradiente di velocità della pressione nella direzione x è uguale al gradiente dello sforzo di taglio nella direzione z .

Ora consideriamo l'equazione costitutiva del fluido Newtoniano:

$$\tau = \mu \frac{dw}{dz}$$

Deriviamo τ rispetto a z :

$$\mu \frac{d^2w}{dz^2} = -\frac{dp}{dx} = \text{cost}$$

Supponendo μ una proprietà fisica cioè non dipendente da z ma dipendente soltanto dalla pressione e dalla temperatura, quindi la consideriamo costante.

$\frac{dp}{dx} \rightarrow$ lo considero costante perché siccome il fluido va da sinistra verso destra ed è lo stesso indipendentemente da x , perché il fluido si muove nella direzione x non c'è differenza tra un punto x e un altro punto x allora lo prendo come una costante.

Integriamo due volte:

$$\mu \frac{dw}{dz} = -\frac{dp}{dx} z + c_1$$

Allora:

$$w = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot \frac{z^2}{2} + c_1 z + c_2$$

Vedremo l'integrazione di questa equazione in due casi; nel caso delle pareti ferme e nel caso in cui la parete inferiore è ferma e quella superiore si muove e vedremo qual è l'applicazione medica di questo secondo caso.

Settimana 7

02-11-21

Osservazione;

è utile studiare queste equazioni in due casi:

- Le due pareti sono ferme e c'è un propulsore che spinge il fluido
- La parete inferiore è ferma e quella superiore si muove.

Infatti, i due piani paralleli sono il caso limite di due cilindri concentrici con raggi molto grandi e spessore tra loro molto piccolo rispetto ai raggi. Nel misuratore di viscosità a cilindri concentrici il cilindro esterno ruota mentre quello interno è fermo (in realtà all'inizio ruota di poco per effetto dello sforzo di taglio del cilindro esterno che si muove, ma poi si ferma e continua a muoversi solo quello esterno → moto alla Couette). Riprendiamo l'espressione del profilo di velocità che abbiamo ricavato nel caso di moto di fluido Newtoniano tra due piani paralleli.

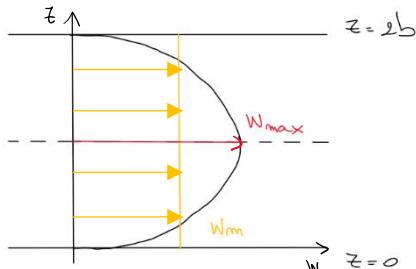
$$w = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot \frac{z^2}{2} + c_1 z + c_2$$

Le costanti le possiamo trovare solo imponendo le condizioni al contorno. Questa espressione l'abbiamo ottenuta applicando la conservazione della massa e della quantità di moto all'elementino di fluido.

Applichiamo questa espressione generale in due casi:

1. Pareti ferme

Il profilo di velocità avrà certamente velocità nulla in $z = 0$ e $z = 2b$ (distanza tra i due piani).



Allora imponiamo queste due condizioni al contorno per determinare le due costanti c_1 e c_2 ;

$$z = 0 \rightarrow w = 0 = c_2$$

$$z = 2b \rightarrow w = 0 = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{4b^2}{2} + 2bc_1 + c_2$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} b \quad \text{e} \quad c_2 = 0$$

Quindi l'espressione del profilo di velocità è:

$$w = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{z^2}{2} + \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} bz = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \left(bz - \frac{z^2}{2} \right)$$

Questa espressione certamente è verificata in $z = 0$ e $z = 2b$ in cui $w = 0$ mentre per i valori z intermedi l'andamento delle velocità è quadratico.

Chiaramente il massimo è in corrispondenza del piano di simmetria, cioè in corrispondenza di $z = b$.

$$w_{max} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \cdot \frac{b^2}{2}$$

In $z = b$.

Invece, il valore medio è quel valore della velocità che integrata su tutta la sezione mi dà la stessa portata della portata reale, si determina come segue:

$$Sw_m = 2bw_m = \int_0^{2b} wdz \cdot W = \int_0^{2b} \left[\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \left(bz - \frac{z^2}{2} \right) \right] dz = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \left[\frac{bz^2}{2} - \frac{1}{2} \frac{z^3}{3} \right] \Big|_0^{2b} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{2}{3} b^3$$

$$\text{Poiché } 2bw_m = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{2}{3} b^3 \rightarrow w_m = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{b^2}{3}$$

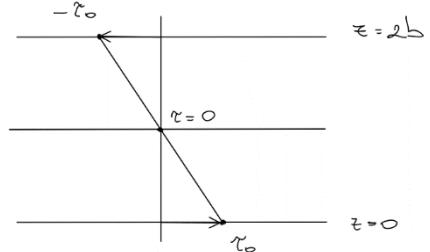
$$\Rightarrow w_m = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{b^2}{3}$$

$$\Rightarrow w_m = \frac{2}{3} w_{max}$$

Calcoliamo lo sforzo di taglio tramite l'equazione costitutiva del fluido newtoniano:

$$\tau = \mu \frac{dw}{dz} = \mu \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} (b - z) = \frac{dp}{dx} (b - z)$$

- $\ln z = 0 \rightarrow \tau_0 = \frac{dp}{dx} b$
- $\ln z = 2b \rightarrow \tau_{2b} = -\frac{dp}{dx} b = -\tau_0$; negativo perché cresce la velocità scendendo verso il basso.
- $\ln z = b \rightarrow \tau_b = 0$, perché τ è tangente al profilo di velocità e quindi sull'asse si deve annullare per simmetria mentre è massimo agli estremi.



Calcoliamo il **fattore di attrito λ** a partire dalla definizione che abbiamo trovato per le perdite di pressione distribuite $\frac{\Delta p}{L}$:

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{\lambda \rho w_m^2}{2D} \rightarrow \lambda = \frac{\Delta p}{L} \frac{2D}{\rho w_m^2}$$

Nel caso del condotto cilindrico, D è semplicemente il diametro, mentre per i condotti di forma qualsiasi si definisce come **diametro idraulico D_h** :

$$D = D_h = \frac{4S}{P}$$

I due piani infiniti sono infinitamente estesi nella direzione di w , quindi a $\pm\infty$ il fluido non bagna le superfici.

Con:

- S : sezione di passaggio: $S = 2bW$
- P : perimetro bagnato: $P = 2W$, dove si considera che i due piani siano infinitamente estesi e quindi all'infinito i lati $2b$ non sono bagnati.

$$D_h = \frac{42bW}{2W} = 4b = 2(2b)$$

Cioè 2 volte la distanza tra i 2 piani.

Allora calcoliamo λ :

$$\lambda = \frac{\Delta p}{L} \frac{2D_h}{\rho w_m^2} = \frac{dp}{dx} \frac{2 \cdot 4b}{\rho w_m^2}$$

Dove abbiamo supposto la caduta di pressione impressa dall'organo motore costante in $x \rightarrow \frac{\Delta p}{L} = \frac{dp}{dx}$

Esprimiamo l'espressione di $\frac{dp}{dx}$ dall'espressione della velocità media:

$$w_m = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{b^2}{3} \rightarrow \frac{dp}{dx} = w_m \frac{3\mu}{b^2}$$

$$\Rightarrow \lambda = w_m \frac{3\mu}{b^2} \cdot \frac{b \cdot b}{\rho w_m^2} = v \cdot \frac{24}{bw_m}$$

$$\text{Con } v = \frac{\mu}{\rho}$$

Ora ricordiamo l'espressione del numero di Reynolds:

$$\begin{aligned} \text{Re} &= \frac{w_m D_h}{v} = \frac{w_m 4b}{v} \rightarrow w_m = \frac{\text{Re} v}{4b} \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{v}{b} \frac{4b}{\text{Re} v} = \frac{96}{\text{Re}} \end{aligned}$$

N.B.: in questo vaso in cui le pareti sono ferme affinché il fluido si muova da sinistra verso destra ci deve essere necessariamente un ventilatore o una pompa di ingresso che imprime una differenza di pressione $\frac{dp}{dx} < 0$ t.c. la pressione diminuisca con x (e quindi $w < 0$ verso destra).

2. Moto Couette

La parete inferiore è ferma e quella superiore si muove con velocità w_d . La distanza tra i due piani è sempre $2b$.

Inoltre ora **non** è presente l'organo motore cioè il moto del fluido non deriva da un compressore o una pompa quindi l'espressione della velocità è già semplificata; il moto del fluido è provocato dalla parete superiore che si sposta con velocità w_d :

$$\frac{dp}{dx} = 0 \rightarrow w = c_1 z + c_2$$

Il profilo di velocità non è più quadratico ma è lineare.

Imponiamo le due condizioni al contorno per determinare le due costanti:

- $\ln z = 0 \rightarrow w = 0 = c_2$
- $\ln z = 2b \rightarrow w = w_d = c_1 b + c_2$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{w_d}{2b} \text{ e } c_2 = 0$$

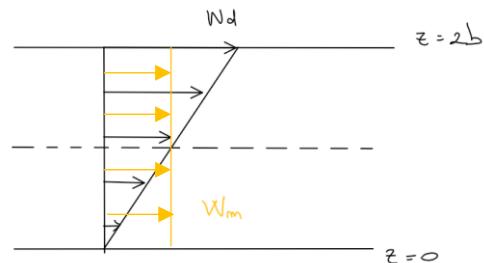
Quindi l'espressione del profilo di velocità è:

$$w = \frac{w_d}{2b} z;$$

allora l'andamento della velocità è lineare;

la velocità media è:

$$\begin{aligned} w_m &= \frac{1}{2b} \int_0^{2b} \frac{w_d}{2b} z dz = \frac{w_d}{4b^2} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{2b} = \frac{w_d}{4b^2} \frac{4b^2}{2} = \frac{w_d}{2} \\ \Rightarrow w_m &= \frac{w_d}{2} \end{aligned}$$

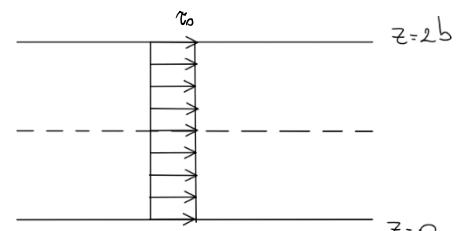


Calcoliamo lo sforzo di taglio tramite l'equazione costitutiva del fluido newtoniano:

$$\tau = \mu \frac{dw}{dx} = \mu \frac{w_d}{2b}$$

Non dipende da z .

Misura della viscosità del sangue; in certi viscosimetri con lo sforzo di taglio si rompono i globuli rossi, si misura la viscosità del sangue ma si altera la composizione.



Applicazioni

- **Viscosimetro a cilindri concentrici;**

Immaginiamo che il fluido scorra tra due cilindri di cui quello interno è pieno (di materiale metallico per esempio e che abbia raggio R) e quello esterno (di raggio $R + 2b$) ruoti con una velocità w_d .

Relazione tra il funzionamento del viscosimetro a cilindri concentrici e il caso dei due piani paralleli.

L'approssimazione dei due piani paralleli è tanto più valida quanto più $2b$ è piccola quando il rapporto $\frac{2b}{R}$ è molto piccolo.

Se il raggio del cilindro interno è tendente ad ∞ e se la distanza $2b$ tra i due cilindri è molto piccola i due cilindri concentrici si possono considerare al limite come due piani paralleli.

Nel mezzo alto $2b$ metto il fluido di cui si vuole calcolare la viscosità.

Quando il cilindro esterno ruota con velocità w_d , sul cilindro interno viene applicata uno sforzo di taglio τ_0 che produce una forza sulla sua superficie che tramite il braccio R produce un momento che fa ruotare il cilindro interno di un certo angolo φ ; a regime stazionario questo sforzo di taglio lo fa ruotare di φ però poi rimane fermo, da adesso il cilindro interno rimarrà fermo sotto l'azione dello sforzo di taglio costante τ_0 ;

(ovviamente $\uparrow w_d \rightarrow \uparrow \tau_0 \rightarrow \uparrow \varphi$).

Misurando l'angolo φ si può risalire al momento e quindi allo sforzo di taglio.

Mettendo in relazione il momento ($\tau_0 \cdot dxWR$) con l'angolo φ si può calcolare τ_0 e di conseguenza μ :

$$\mu = \frac{\tau_0 \cdot 2b}{w_d}$$

(altri appunti)

È basato sulla determinazione del momento torcente trasmesso da un corpo posto in rotazione all'interno di un fluido.

Il cilindro di raggio minore è trascinato in rotazione per mezzo di una coppia motore M_1 .

Si misura la velocità angolare assunta dal cilindro esterno il cui valore dipende dal momento resistente offerto dalle tensioni tangenziali d'attrito trasmesse dal fluido, contenuto nell'intercapedine tra i due cilindri.

Aggiungiamo liquido fino ad un certo livello e misuriamo la coppia M_2 che occorre applicare per avere lo stesso valore della velocità angolare.

$$M = M_2 - M_1$$

Con $M = \tau \cdot 2\pi \cdot Rh$

Dove $2\pi \cdot Rh \rightarrow$ superficie laterale del cilindro in rotazione

$\tau \rightarrow$ sforzo tangenziale

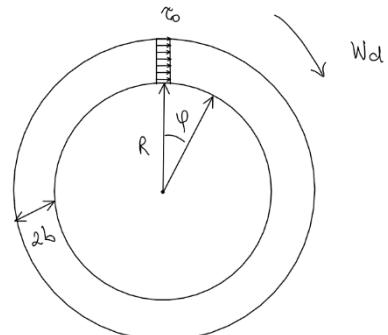
La velocità angolare è: $\omega = \frac{2\pi}{60} RPM$

$RPM \rightarrow$ n° di giri dell'albero motore

Velocità tangenziale: $w_d = \omega \times R$

$$\tau = \mu \frac{\partial w}{\partial z} = \mu \frac{w_d}{2b} = \frac{\mu \omega R}{2b}$$

Da cui $\mu = \frac{\tau 2b}{\omega R}$.



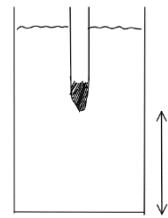
$$R \rightarrow \infty \text{ e } 2b \rightarrow 0$$

• Viscosimetro ad ago cadente

È un cilindro contenente sangue nel quale si fa cadere un piccolo cilindro di materiale solido per metà e vuoto sopra.

La viscosità si ricava dal tempo che impiega il cilindro a raggiungere il fondo.

Ago con un peso nella parte inferiore, maggiore è il tempo che ci vuole all'ago per arrivare infondo e maggiore è la viscosità.



• Viscosimetro a tubo capillare

La viscosità si misura misurando il tempo che impiega il fluido a scaricarsi attraverso un tubicino capillare e sfruttando l'equazione di Hagen-Poiseuille.

Capillare → diametro molto piccolo, allora il numero di Reynolds è molto piccolo → fluido che scorre in moto laminare.

Mediante la legge di H-P (se il moto è laminare possiamo usare questa legge) si ha una relazione tra portata di fluido evolente e differenza finita di pressione all'estremità del tubicino:

$$\Delta p = 8 \cdot \mu \frac{1}{r^2} w$$

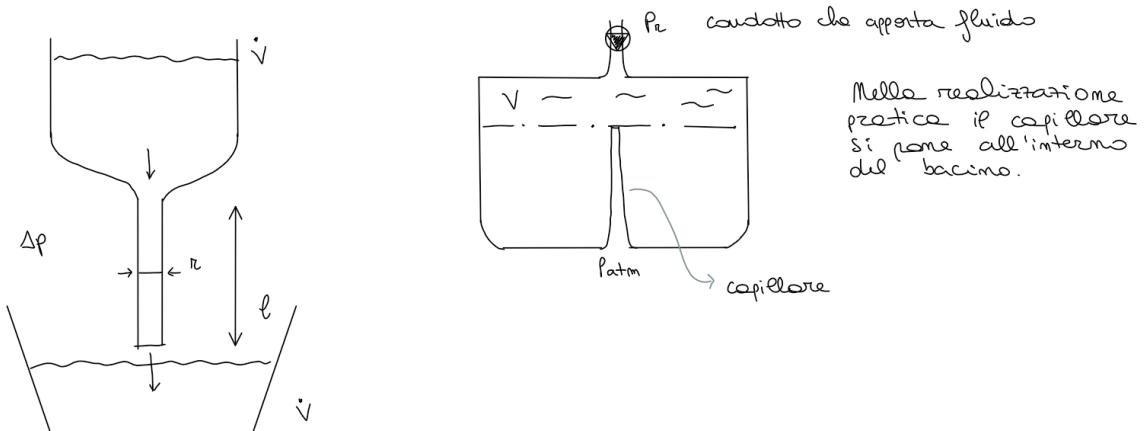
$$\text{Sostituendo } w \times A = \dot{V} \rightarrow w = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{\dot{V}}{\pi r^2}$$



Ribaltando la relazione si ottiene:

$$\mu = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8 \dot{V} l}$$

si calcola la viscosità per un tubo capillare di raggio r e lunghezza l e se ci mettiamo una caduta di pressione dobbiamo misurare una portata di volume. Nella pratica della misurazione si immerge un tubicino capillare in un serbatoio di volume noto e si calcola l'intervallo di tempo necessario al completo svuotamento del recipiente (pari al tempo di riempimento del tubo).



La p_1 è costante ed è quella della pompa.

Il Δp è noto.

Il volume \dot{V} del contenitore è noto. Per misurare la portata in volume basta avere un contenitore graduato un cronometro è il volumen nell'unità di tempo. Cronometrando si ottiene il tempo di svuotamento. Nella figura a destra ha un tubo di ingresso con una piccola pompa che regola la pressione all'interno della pompa e ha un tubo capillare all'interno del bacino. Conoscendo il volume V , conoscendo le pressioni e le altre dimensioni; fino a che il liquido riempie tutto abbiamo in uscita dal capillare il liquido, nel momento in cui si svuota la parte sopra, quando il liquido è sotto alla linea tratteggiata allora non abbiamo più nulla in uscita.

Svuotamento del serbatoio che ha alla fine il tubo capillare.

Moto di fluidi in uscita da serbatoi

Scarico stazionario di un serbatoio (Torricelli)

Consideriamo un serbatoio con un foro a distanza h dal pelo libero, il cui livello rimane costantemente alla stessa quota (tramite un troppo pieno ed un rubinetto che mantiene l'alimentazione).

Sezione 1 di troppo pieno; riesco a mantenere il livello h costante con il troppo pieno.

Scriviamo l'equazione di Bernoulli (si applica ad un sistema termodinamico) tra le sezioni 1 e 2, la porzione di spazio di nostro interesse è il sistema aperto con le sezioni 1 e 2 e con le pareti fisse:

$$z_a + z_f + \frac{p_2 - p_1}{\gamma} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + z_2 - z_1 = 0$$

$z_a \rightarrow$ carico perso a causa delle irreversibilità

$z_f \rightarrow$ carico dovuto al lavoro scambiato

Abbiamo supposto $\gamma = \text{cost}$;

inoltre supponiamo che non ci siano organi meccanici quindi $z_f = 0$, che $p_1 =$

$p_2 = p_{atm}$ entrambe le sezioni sono aperte all'atmosfera e che z_a sia trascurabile.

Infine osserviamo che $w_1 = 0$ poiché nella sezione 1 c'è il troppo pieno e quindi il fluido rimane costante.

$$\rightarrow \frac{w_2^2}{2g} = z_1 - z_2 = h \Rightarrow w_2 = \sqrt{2gh}.$$

Questa velocità la chiamiamo velocità ideale (pedice i) ed è la velocità media nella sezione 2 (sezione di uscita A_2):

$$w_i = \sqrt{2gh}$$

Allora, la portata ideale in volume è: $\dot{V} = w_i A_2 = A_2 \sqrt{2gh}$

Invece, se z_a non fosse trascurabile (per esempio nello scorrimento del fluido lungo le pareti), otteniamo che la velocità reale del fluido in presenza di attrito (irreversibilità) è inferiore a quella ideale:

$$\frac{w_2^2}{2g} = z_1 - z_2 - z_a = h - z_a \rightarrow w_r < w_i;$$

$w_r \rightarrow$ reale

questo si indica nel seguente modo tramite un coefficiente φ che indica che le irreversibilità incidono al massimo per un 5%:

$$w_r = w_i \cdot \varphi$$

Con $0.95 \leq \varphi \leq 1$

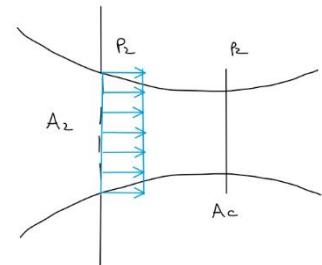
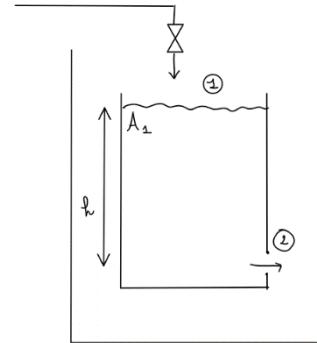
Ora, osserviamo meglio ciò che accade in uscita dal serbatoio e riconosciamo che accade quello che si ha nel caso di un restrinzione di sezione e quindi individuiamo la sezione di vena contratta A_c . Il fluido quando passa nel restrinzione di sezione va a vanti per inerzia. Sezione di area minima; nel restrinzione di sezione tutto avveniva all'interno di un tubo qui no perché il tubo esce in atmosfera. In A_2 ho un'velocity che è w_r , poi il fluido continua a stringersi di sezione e quindi la sezione vera di passaggio non è la sezione A_2 ma è la sezione A_c di vena contratta. Allora, la portata reale in volume del fluido è $\dot{V}_r = w_r \cdot A_c$ a causa della restrizione della sezione.

Ricordiamo che avevamo definito il parametro delle perdite di pressione concentrate Ψ e quindi otteniamo:

$$\Psi = \frac{A_c}{A} \rightarrow \dot{V}_r = w_r \Psi A = w_i \varphi \Psi A = \Phi w_i A$$

A sezione di passaggio che sopra corrisponde con A_2 .

$w_i A \rightarrow$ portata ideale.



Con $\Phi = 0,63$.

Dove il parametro Φ indica quanto la vena contratta riduce la portata (di più rispetto alla riduzione di velocità).

Svuotamento di un serbatoio attraverso un foro

Io vediamo per vedere come si collega al viscosimetro a tubo capillare.

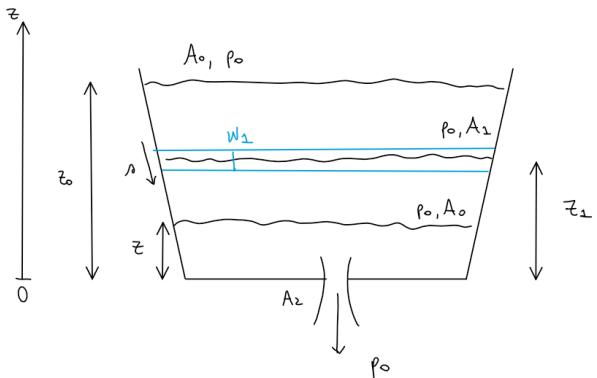
Consideriamo un contenitore buco sul fondo.

La sezione A_0 è a quota z_0 alla pressione p_0 ; la sezione di uscita A_2 è alla quota $z = 0$, anch'essa alla pressione p_0 ;

la generica sezione A e A_1 sono alla quota z e z_1 rispettivamente e la pressione è sempre p_0 .

s è la coordinata sul bordo del serbatoio.

Scriviamo l'equazione di Eulero nella forma finita tra la sezione generica A_1 e la sezione di uscita A_2 :



$$\frac{w_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{w_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \int_1^2 \frac{1}{g} \frac{\partial w}{\partial t} ds$$

Somma dei tre carichi nella sezione 1 uguale alla somma dei tre carichi nella sezione 2 più l'integrale. Inoltre ricordiamo che $p_1 = p_2 = p_{atm}$

$$\frac{w_1^2}{2g} + z_1 = \frac{w_2^2}{2g} + \int_1^2 \frac{1}{g} \frac{\partial w}{\partial t} ds$$

Le equazioni che si scrivono sono equazioni che esplicitano dei principi.

Applichiamo l'equazione di conservazione della massa :

$$w_1 A_1 \rho_1 = \Phi w_2 A_2 \rho_2 = w A \rho$$

$\rho = \text{cost}$ poiché ipotizziamo che il fluido sia incompressibile; allora possiamo ricavare la velocità generica:

$$\begin{aligned} \rightarrow w &= w_1 \frac{A_1}{A} \rightarrow \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{w_1 A_1}{A} \right) \\ &\Rightarrow \frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial w}{\partial t} ds = \frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{w_1 A_1}{A} \right) ds = \frac{1}{g} A_1 \frac{dw_1}{dt} \int_1^2 \frac{ds}{A} \end{aligned}$$

Sostituiamo nell'equazione di Eulero:

$$\frac{w_1^2}{2g} + z_1 = \frac{w_2^2}{2g} + \frac{A_1}{g} \frac{dw_1}{dt} \int_1^2 \frac{ds}{A} = \frac{w_2^2}{2g} + \frac{dw_1}{dt} \cdot g(z_1)$$

Con $g(z_1) = \frac{A_1}{g} \int_1^2 \frac{ds}{A}$; funzione geometrica che dipende dalla pendenza di s rispetto a z .

dall'equazione di conservazione della massa esplicitiamo w_2 :

$$w_2 = \frac{w_1 A_1}{\Phi A_2}$$

$$\rightarrow \frac{w_1^2}{2g} - \frac{1}{2g} \left(\frac{w_1^2 A_1^2}{\Phi^2 A_2^2} \right) + z_1 = \frac{dw_1}{dt} \cdot g(z_1)$$

$$\frac{w_1^2}{2g} \left(1 - \frac{A_1^2}{\Phi^2 A_2^2} \right) + z_1 = \frac{dw_1}{dt} \cdot g(z_1)$$

$$-w_1^2 \cdot f(z_1) + z_1 = \frac{dw_1}{dt} \cdot g(z_1);$$

$$\text{Con } -f(z_1) = \left(1 - \frac{A_1^2}{\Phi^2 A_2^2}\right) \frac{1}{2g}$$

Considerando uno spessore infinitesimo dz_1 la velocità w_1 è:

$$w_1 = -\frac{dz_1}{dt} (< 0 \text{ perché andando verso il basso } z \text{ si riduce}) \text{ (la velocità va in basso e } z \text{ va verso l'alto)}$$

$$\rightarrow -f(z_1) \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2 + z_1 + g(z_1) \cdot \frac{d^2z_1}{dt^2} = 0.$$

Dividiamo per $g(z_1)$:

$$\frac{d^2z_1}{dt^2} - \frac{f(z_1)}{g(z_1)} \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2 + \frac{z_1}{g(z_1)} = 0$$

$$\frac{d^2z_1}{dt^2} - \varphi(z_1) \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2 + \psi(z_1) = 0$$

Equazione differenziale di secondo ordine (la soluzione non verrà chiesta all'esame).

$$\text{Con, } \begin{cases} \varphi(z_1) = \frac{f(z_1)}{g(z_1)} \\ \psi(z_1) = \frac{z_1}{g(z_1)} \end{cases}$$

Abbiamo ottenuto un'equazione differenziale di difficile risoluzione.

Noi calcoliamo solo la **soluzione con le piccole aperture di scarico**. Supponiamo che la sezione A_2 sia molto piccola rispetto ad A_1 .

Supponiamo che la sezione di uscita A_2 sia molto piccola rispetto alla sezione di ingresso A_1 cioè che $A_2 \ll A_1$, quindi il fluido esce molto lentamente e si può supporre:

$$\frac{dw_1}{dt} = 0$$

Quindi possiamo supporre che w_1 sia costante nel tempo.

$$\text{Da cui } \frac{d^2z_1}{dt^2} = 0.$$

Allora otteniamo:

$$\left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2 = \frac{\psi(z_1)}{\varphi(z_1)} = \frac{z_1}{g(z_1)} \cdot \frac{g(z_1)}{f(z_1)} = \frac{z_1}{f(z_1)}$$

$$\text{Cioè } w_1^2 = \frac{z_1}{f(z_1)}$$

$$\frac{dz_1}{dt} = \sqrt{\frac{z_1}{f(z_1)}} \rightarrow \sqrt{f(z_1)} \cdot \frac{dz_1}{\sqrt{z_1}} = dt$$

Dove nel passaggio centrale abbiamo separato le variabili.

Integriamo tra l'istante iniziale e l'istante finale:

$$t_2 - t_0 = \int_1^2 \sqrt{f(z_1)} \cdot \frac{dz_1}{\sqrt{z_1}} = \sqrt{f(z_1)} \cdot \left(-\frac{1}{2} + 1\right) \left[z^{-\frac{1}{2}+1}\right]_0^2$$

Così abbiamo legato il tempo con la quota z_1 che diminuisce da z_0 a 0.

Negli altri appunti condivisi dal docente sono presenti i passaggi, quella riportata sopra è la relazione finale.

Con questa lezione è terminato il Capitolo 2 "moto incomprimibile dei fluidi "

Il Capitolo 3 "Misure di pressione, temperatura, portata, viscosità e velocità"

Misura di pressione di un fluido in moto

Immaginiamo di avere un condotto con un fluido in moto.

Vogliamo individuare quali tipi di pressione si possono definire per un fluido in moto.

Abbiamo già studiato le misure di pressione di un fluido fermo, tramite il BAROMETRO e il MANOMETRO DIFFERENZIALE col tubo ad U.

Invece, ora consideriamo un fluido che scorre in un condotto da sinistra verso destra. Si usano 3 diversi strumenti per misurare tre diverse pressioni.

Tre diversi strumenti per misurare tre diverse pressioni. La pressione assoluta la posso misurare solo se utilizzassi un manometro che si muove con la velocità del fluido. Non possiamo misurare la pressione assoluta. Quella che possiamo misurare è la pressione relativa (statica), facendo un foro nel condotto, il foro è collegato tramite un tubo di gomma ad un tubo ad U che è il misuratore della differenza di pressione.

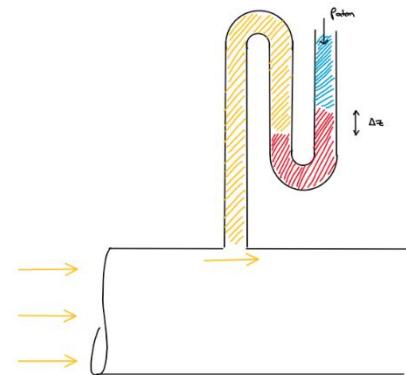
Nel percorso del fluido all'interno del condotto si fa un foro statico (o foro di pressione statica) che, tramite un tubo viene collegato ad un tubo ad U contenente un liquido manometrico (quello in rosso) e aperto all'altra estremità verso l'atmosfera (in azzurro)

⇒ così misuriamo la differenza di pressione tra il foro statico e la pressione ambiente.

Se non c'è il dislivello tra i 2 lati del liquido manometrico, allora la pressione statica interna è pari alla pressione atmosferica esterna.
Invece, se c'è il dislivello Δz (ad esempio il livello a destra è maggiore), la pressione relativa o statica è data dal prodotto del dislivello Δz per il peso specifico manometrico γ :

Il fluido va a riempire la parte sinistra del tubo ad U e spinge il liquido manometrico in rosso e fuori in azzurro c'è l'aria atmosferica che ha la pressione atmosferica. La pressione relativa o statica p_s perché il foro è fermo e il fluido scorre parallelamente alla sezione del foro:

$$p_s = p_{fluido} - p_{atm} = \Delta z \cdot \gamma$$



Osservazione;

il foro è chiamato statico perché il fluido viaggia parallelamente alla faccia del foro, cioè il fluido non esercita l'impulso in ingresso.

Vediamo il secondo tipo di pressione;

Nel condotto si inserisce una presa statica collegata ad un tubo ad U, che all'altra estremità è collegato di nuovo con l'interno del condotto, in direzione del fluido.

Quindi il fluido entra nel tubo ad U sia di destra che da sinistra e su entrambi i lati preme sul fluido manometrico.

Nel ramo di sinistra abbiamo la stessa situazione di prima con la presa stativa verticale rispetto al fluido che scorre in orizzontale.

Invece, nel ramo di destra il fluido entra ortogonalmente alla faccia del foro ed esercita un impulso di ingresso. Quindi la parte sinistra è come sopra, quella destra non è aperta all'atmosfera ma è collegata ad una sezione che ha una superficie perpendicolare alla direzione della velocità del fluido, quindi abbiamo due sezioni. La **sezione o presa statica** è parallela alla direzione del moto e la **presa dinamica** che è perpendicolare

alla direzione del moto, correlata alla forza che viene impressa sulla superficie dal fluido che sbatte contro la sezione che quindi dà l'impulso o la forza al fluido che ci sbatte sopra.

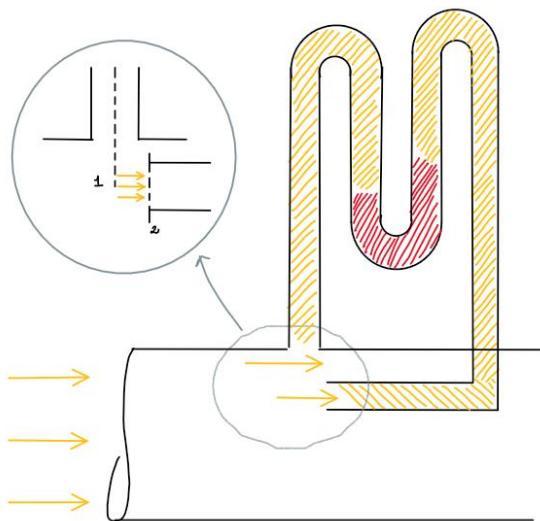
Allora consideriamo la presa statica come sezione 1 e l'altro foro come sezione 2, leggermente a destra verso l'interno dove il fluido è fermo.

Applichiamo l'equazione di Bernoulli:

- Trascuriamo z_a ;
- $z_f = 0$ perché non ci sono organi motori;
- $z_1 = z_2$ se il condotto è orizzontale;

$$\frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_1^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma} = 0$$

$w_2 = 0$ poiché è subito dentro il ramo di destra.



La mezzeria della presa statica costituisce la sezione 1 andando ad applicare l'equazione di Bernoulli. Il sistema termodinamico a cui abbiamo applicato Bernoulli è fatto dalla sezione 1 che ha la stessa dimensione di 2, la sezione 2 di fatto il sistema termodinamico è il rettangolino tra la sezione 1 e 2. È un sistema aperto che ha una sezione 1 di ingresso e una sezione 2 di uscita.

La sezione 1 è corrispondente alla presa statica, vuol dire che la pressione nella sezione 1 corrisponde alla pressione misurata dal ramo sinistro del tubo ad U (manometro differenziale); invece la sezione 2 è quella che va nel ramo destro del tubo ad U.

w_2 è la velocità che il fluido ha nella sezione 2, il fluido che ha riempito la sezione destra poi dopo non scorre, il fluido che sta nel ramo destro come anche nel ramo sinistro è fermo quindi la velocità w_2 della sezione 2 è zero.

L'energia cinetica si è trasformata in impulso e forza che agisce sul fluido che sta dentro.

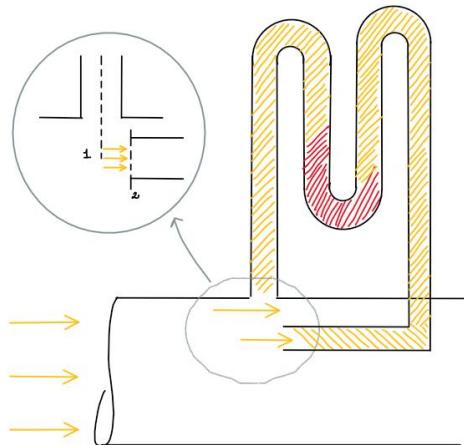
$$\frac{w_1^2}{2g} = \frac{p_2 - p_1}{\rho \cdot g} \Rightarrow p_2 - p_1 = \rho \frac{w_1^2}{2}$$

Questa differenza di pressione costituisce per p_2 la **Pressione dinamica**.

Osservazione;

Se il fluido è fermo la pressione di sinistra è uguale alla pressione di destra, quindi i due rami del liquido manometrico, non hanno differenza di quota quindi $\Delta z = 0$;

quando metto il fluido in movimento con la pompa, il disegno è al contrario, la pressione $p_2 > p_1$, quindi il ramo di destra è più in basso del ramo di sinistra;



La pressione è più elevata nel ramo destro rispetto al ramo sinistro.

La misura della pressione sarà:

$$p_2 - p_1 = \Delta z \cdot \gamma \rightarrow \frac{\Delta z \cdot \gamma w_1^2}{\rho} \frac{w_1^2}{2}$$

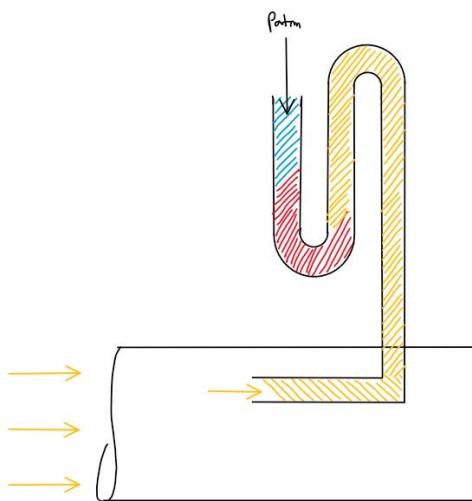
Dalla misura del dislivello otteniamo la misura di pressione e da questi possiamo calcolare l'energia cinetica del fluido

⇒ così misuriamo la velocità del fluido nella sezione immediatamente fuori il ramo di destra cioè nella sezione 2.

(velocità media sulla bocca del foro → minore è la bocca della presa dinamica e più puntuale è la misura di velocità)

Nell'ultima misura se combiniamo il misuratore di pressione statica con il misuratore di pressione dinamica che ha la pressione dinamica che va sul lato destro e il lato sinistro del tubo ad U è aperto all'atmosfera. La pressione è la **pressione totale** che è la differenza tra la pressione dinamica e la pressione atmosferica.

$$p_{tot} = (p_2 - p_1) - p_{atm} = \Delta z \cdot \gamma$$



Esami scritti:

27/01 (h:14 aula A1/A2/A3/A4)

10/02 (h:14 aula A1/A2/A3/A4)

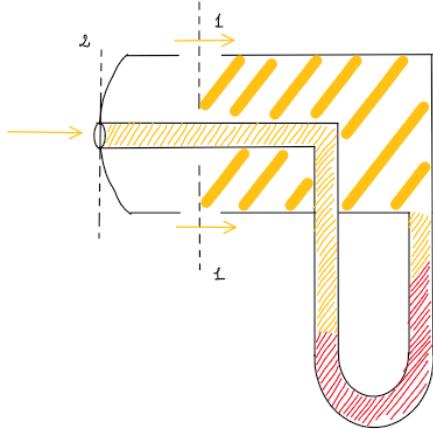
L'orale si può fare fino alla fine del mese o anche oltre per esigenze;

03-11.-21

Misura di velocità: Tubo di Pitot

Il tubo di Pitot ha un tubicino molto piccolo interno che viene posizionato parallelamente alla direzione del fluido e che quindi rappresenta la presa dinamica.

Nell'aereo misura la velocità dell'aereo attraverso la misura di pressione.



Esternamente vi è saldato un cilindro più grande concentrico che presenta due fori ortogonali alla direzione del fluido che rappresentano le prese statiche. Sono fori sulla superficie laterale del cilindro.

I due tubicini sono collegati ad un tubo ad U che ha sempre il liquido manometrico e che mette in comunicazione i fluidi che entrano attraverso entrambe le prese (il dislivello è a destra correggere immagine). In arancio il fluido che scorre.

La sezione 1 è molto più vicina alla 2 ma c'è una differenza sostanziale perché la sezione 1 è parallela alla direzione del flusso; quindi, è la presa statica della misura di pressione, il fluido scorre ma non esercita la forza dinamica sul fluido dentro. Viceversa, la sezione 2 è la presa di pressione dinamica perché il fluido sbatte, ha una certa velocità e impone un certo impulso al fluido che sta dentro. Il misuratore di pressione dinamica vista ieri è la base fisica del tubo di Pitot.

La presa statica 1 è fatta sulla superficie circonferenziale del tubo esterno e la presa 2 è la sezione del tubo interno.

Se la velocità è diversa da zero il fluido spinge di più nel ramo sinistro rispetto al destro.

Dalla misura del dislivello Δz del liquido manometrico nei due rami, otteniamo la misura di pressione $p_2 - p_1$ che tramite l'equazione di Bernoulli è in relazione con la velocità del fluido:

La differenza di pressione dinamica è $p_2 - p_1 = \Delta z \cdot \gamma$

$$\Rightarrow \frac{p_2 - p_1}{\rho} = \frac{w_1^2}{2}$$

Nella sezione 2 la velocità è nulla.

La dimensione di quello che c'è ai capi del tubo di Pitot è la dimensione del filetto fluido o particella elementare di fluido.

Cercheremo di ridurre al minimo la sezione 2, ma saranno sempre quantità fisiche finite, più grandi delle dimensioni molecolari.

Misura di portata: Tubo di Venturi

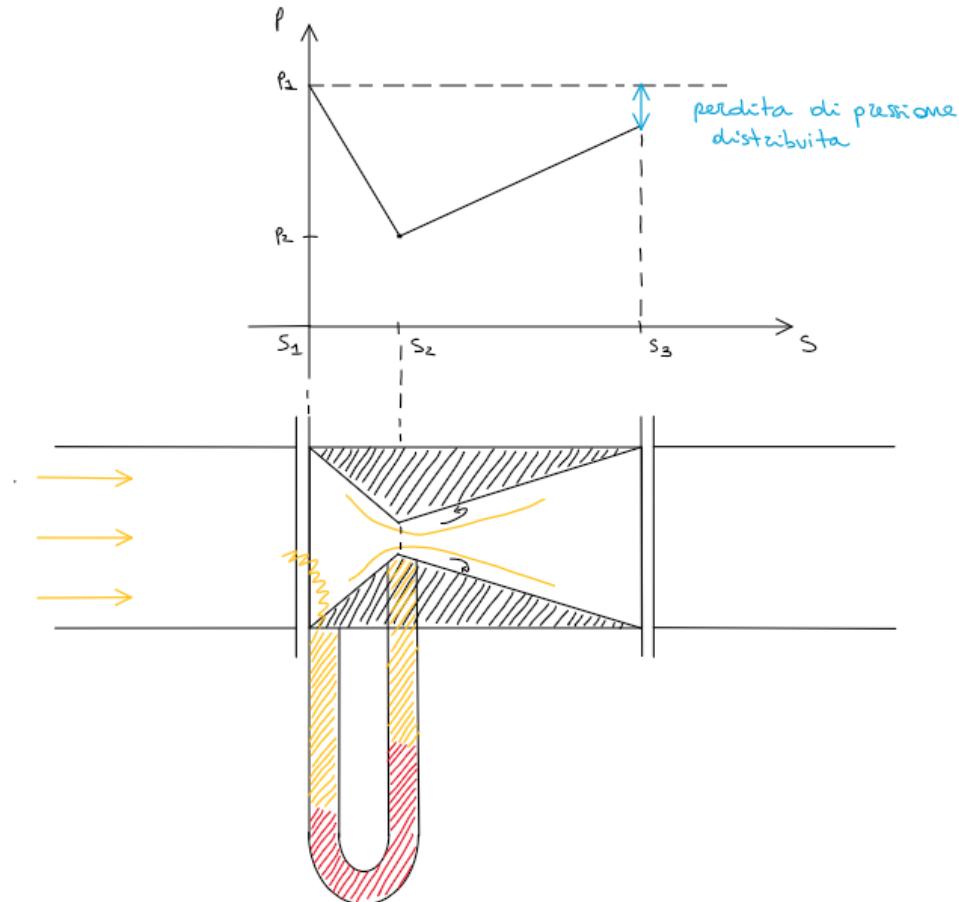
Si taglia un condotto in cui scorre un fluido e si inserisce un tubo che ha un restringimento di sezione molto breve nella prima parte (come una stenosi) e poi un allungamento di sezione molto lungo; da S_1 a S_2 .

Poi da S_2 a S_3 distanza più lunga.

Il carico effettivo non varia perché il tubo è orizzontale, la somma dei due carichi è il carico cinetico e il carico piezometrico; che succede nel restringimento di sezione? Siccome ho un restringimento di sezione, dal bilancio di massa quando la sezione diminuisce la velocità aumenta; se aumenta il carico cinetico, diminuirà la

pressione. Nella seconda parte del tubo di Venturi, il divergente, avviene il contrario; la sezione aumenta, la velocità diminuisce e la pressione aumenta.

Come si misura la variazione di pressione? Facendo due fori, un foro subito dopo S_1 e un foro nella sezione di area minima, poi i due fori si collegano con due tubi di gomma dove c'è il liquido manometrico che registra la differenza di altezza tra i due rami.



Se il fluido è fermo $\Delta z = 0$, se si mette in moto la pompa che aumenta la velocità nel fluido la pressione nella sezione S_1 è maggiore, diminuisce nella sezione S_2 perché la sezione è minore, poi la pressione riaumenta, però siccome il fluido scorre sempre a contatto con la parete ci saranno le perdite di pressione distribuite e anche un poco concentrate. Quindi nella sezione S_3 non tornerà come quella all'inizio ma ci sarà una differenza di pressione.

Supponiamo che il fluido sia incomprimibile o meglio supponiamo che il **moto sia incomprimibile**. Se dico fluido incomprimibile intendo un fluido con densità costante, moto incomprimibile è il moto fatto da un fluido incomprimibile ma può anche essere fatto di fluido compressibile che si muove di moto incomprimibile.

Applichiamo la conservazione della massa:

$$\rho_1 = \rho_2 \rightarrow w_1 S_1 = w_2 S_2 = \dot{V}$$

È una portata in volume wS

$$\rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{w_2}{w_1}$$

Poiché se $S_2 < S_1$, allora $w_2 > w_1$ cioè nella sezione minore il fluido scorre a velocità maggiore.

Scriviamo il bilancio della quantità di moto, scriviamo l'equazione di Bernoulli tra le due sezioni, supponendo z_a trascurabile e $z_f = 0$:

$$\frac{w_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} z_1 = \frac{w_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2$$

Condotto orizzontale allora $z_1 = z_2$

Allora la somma del carico cinetico e del carico piezometrico deve essere costante; poiché $w_2 > w_1$ allora $p_2 < p_1$ cioè la pressione diminuisce all'aumentare della velocità.

Questo è evidente nel diagramma dell'andamento della pressione in funzione della distanza, dove si vede che tra le sezioni S_1 e S_2 la pressione diminuisce, mentre nel divergente al contrario la pressione aumenta poiché diminuisce la velocità.

Però, poiché nel restringimento ci sono delle perdite di pressione distribuite, il recupero di pressione tra S_2 e S_1 termina ad un livello inferiore a quella di partenza p_1 .

Se il fluido è in moto poiché $p_1 > p_2$ il fluido manometrico ha un livello maggiore a destra, con questo dislivello possiamo calcolare la differenza di pressione:

$$p_2 - p_1 = \Delta z \cdot \gamma_m$$

Riprendiamo l'equazione di Bernoulli:

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{\Delta z \cdot \gamma_m}{\gamma}$$

$\gamma_m \rightarrow$ peso specifico del fluido manometrico

$$\left(\frac{G^2}{S_2^2} - \frac{G^2}{S_1^2} \right) \frac{1}{2g} = G^2 \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right) \frac{1}{2g} = \frac{\Delta z \cdot \gamma_m}{\gamma}$$

Con $w_1 = \frac{G}{S_1}$

$$\Rightarrow G^2 = \frac{\gamma_m}{\gamma} \Delta z \cdot 2g \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right)^{-1}$$

Poiché prima avevamo \dot{V} , dove c'è la G dobbiamo sostituire.

Osservazione;

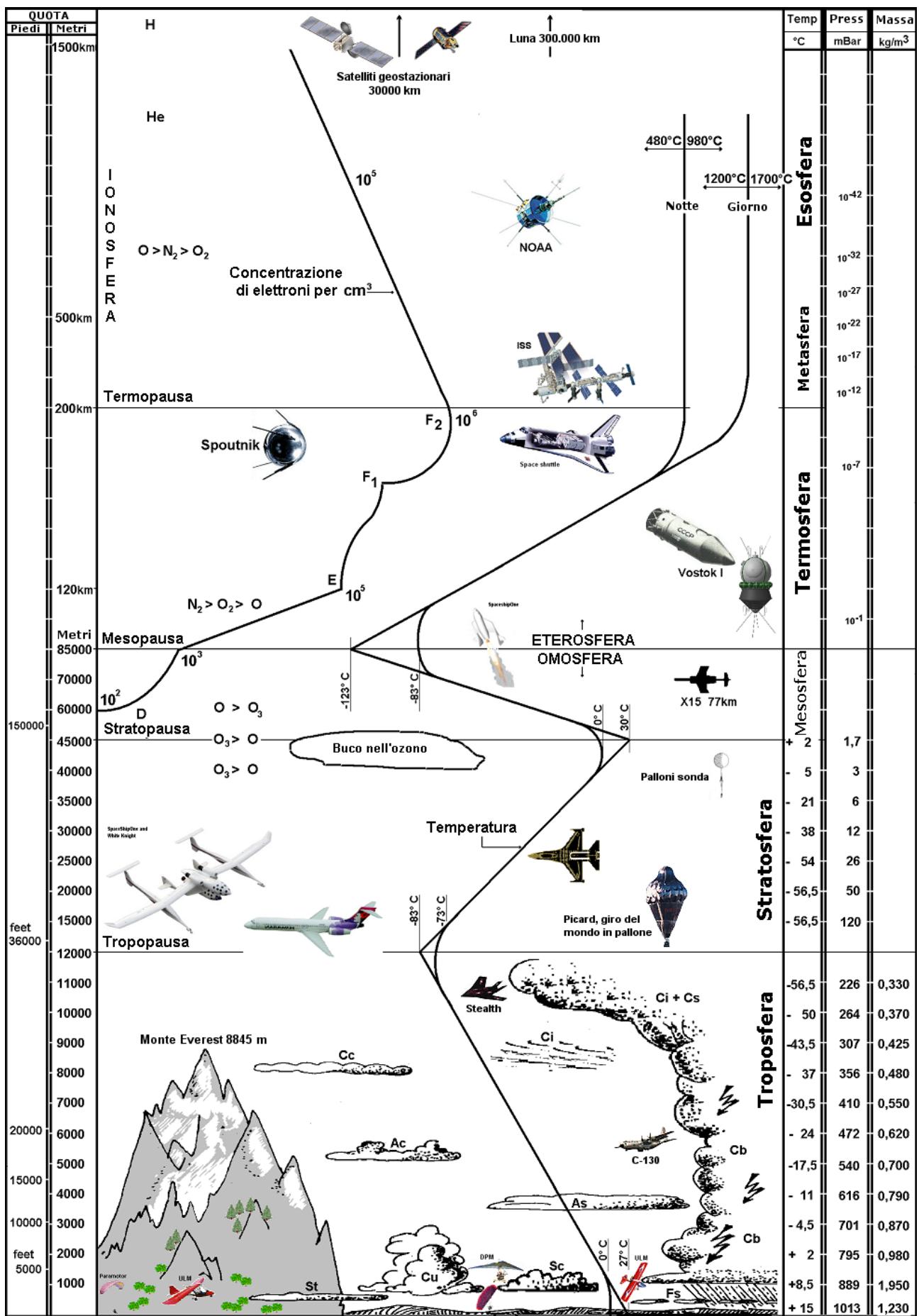
un qualsiasi strumento con restringimento di sezione monitorato, collegato con un manometro differenziale ad U , può essere usato come strumento per misurare la portata.

Misure di viscosità

- Tubo capillare
- Cilindri concentrici
- Viscosimetro ad ago capillare

Con le misure di viscosità è stato completato il Capitolo 3;

Iniziamo il Capitolo 4;



La prima regione è la troposfera è 12 Km, in cui le temperature diminuiscono, a livello del terreno si parla di una media di 15°, si arriva ad 11000 m dove è riportato -56.5°, poi vedremo perché.

Se la densità a livello del terreno è 1,230 a 3800 m è 0.79, l'aria è meno densa, abbiamo ancora un ritmo respiratorio che era quello a livello del terreno ma immettiamo meno ossigeno allora scatta il meccanismo di autoregolazione.

La temperatura passa da 15° a -56° con andamento lineare;

intorno ai 12 Km, c'è la Tropopausa dove la temperatura è costante;

si passa alla Stratosfera, qui la temperatura aumenta di nuovo, va da 12Km a 45Km; la temperatura ritorna intorno allo 0°C. ammettendo un andamento lineare avremmo addirittura +30°C.

inversione termica → legato al fatto che nella stratosfera la temperatura aumenta di nuovo.

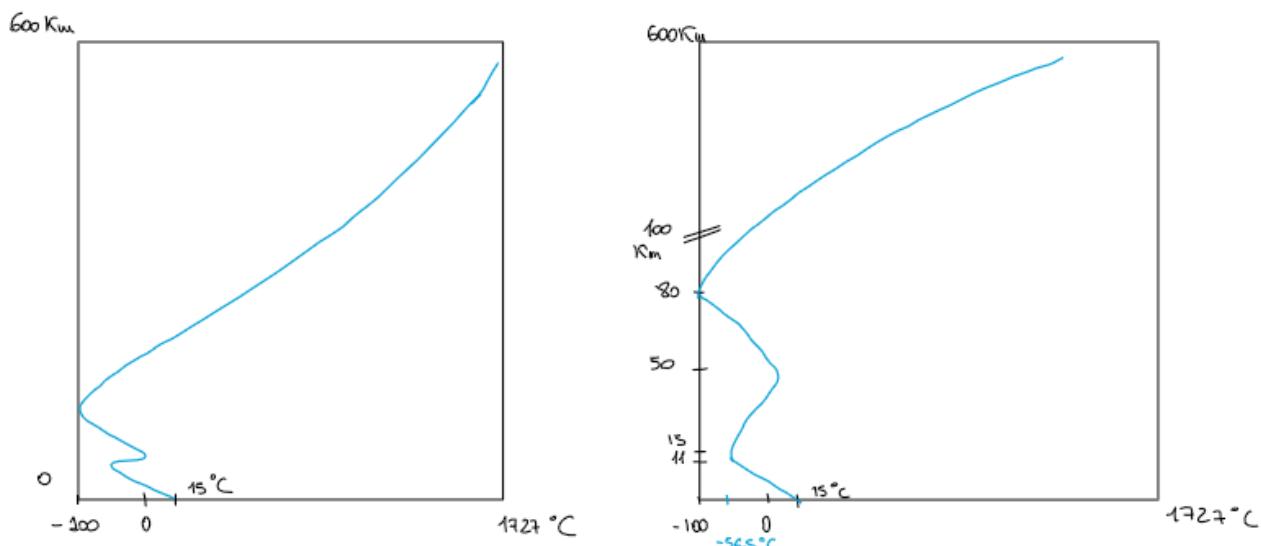
A 45Km c'è il buco dell'Ozono.

Comincia la Mesosfera, c'è uno strato di fluido che ha una temperatura pressoché costante, la temperatura comincia a diminuire, fino a -83°C (all'incirca stesso limite della Tropopausa).

Sopra la mesosfera c'è la Termosfera, la temperatura riaumenta e nella Ionosfera le temperature tornano a 1700°C.

La temperatura aumenta perché ci sono fenomeni elettronici.

A 30000 Km ci sono i satelliti geostazionari.



Andamento della temperatura oscillatorio;
affrontiamo in dettaglio cosa succede nella Troposfera;

Troposfera

L'andamento lineare è un andamento che viene fuori da una convenzione internazionale che chiama la Troposfera l'atmosfera standard:

$$T = T_0 - az$$

Consideriamo un volumetto cilindrico alto z , la cui base inferiore è a quota $z = 0$ di raggio qualsiasi;



questo è il nostro sistema termofluidodinamico che contiene aria nella Troposfera.

Andiamo per approssimazioni successive, per determinare almeno l'ordine di grandezza dei fenomeni che stiamo considerando.

- Facciamo una prima ipotesi chiaramente non verificata secondo cui supponiamo che tutta l'atmosfera sia isoterma; studiamo solo l'andamento della pressione.

Applichiamo l'equazione di Bernoulli:

$$dz_a + dz_f + \frac{dp}{\gamma} + \frac{dw^2}{2g} + dz = 0$$

Dove non ci sono variazioni di energia cinetica se il fluido è fermo, non ci sono organi motori ($dz_f = 0$) e supponiamo trascurabile dz_a (se l'aria è ferma non ci sono perdite per irreversibilità).

$$\frac{dp}{\rho g} = -dz \rightarrow \frac{dp}{\rho} = -gdz$$

Supponiamo di avere a che fare con un **gas perfetto**:

$$\frac{p}{\rho} = RT \rightarrow \rho = \frac{p}{RT}$$

Sostituiamo ed integriamo:

$$\frac{dp}{p} RT = -gdz \rightarrow RT \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -g(z - z_0)$$

$$\Rightarrow \frac{p}{p_0} = e^{-\frac{gz}{RT}} \text{ Esponenziale decrescente.}$$

N.B.: questo è il valore di primo tentativo della variazione della pressione nel caso di atmosfera isoterma, che, nonostante parta da un'ipotesi sbagliata, è utile per avere un ordine di grandezza.

Possiamo ricavare l'andamento della densità:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{RT\rho}{RT\rho_0} = e^{-\frac{gz}{RT}} \Rightarrow \frac{\rho}{\rho_0} = e^{-\frac{gz}{RT}}$$

Cioè la variazione di densità è uguale alla variazione della pressione. Varia esponenzialmente con l'altezza.

- Ora invece rimuoviamo l'ipotesi di temperatura isoterma e consideriamo la legge della temperatura in funzione di z nella Troposfera; supponiamo che la temperatura diminuisca linearmente secondo l'assunzione dell'atmosfera standard:

$$T = T_0 - az$$

Allora otteniamo:

Metto al posto di $dz \rightarrow d(T_0 - az)$ che è uguale a $-adz$ e la a si semplifica con quella al denominatore.

$$\frac{dp}{p} RT = -gdz \rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{g}{R} \frac{dz}{T_0 - az} = \frac{g}{aR} \frac{d(T_0 - az)}{T_0 - az}$$

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{g}{aR} \ln\left(\frac{T_0 - az}{T_0}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{p}{p_0} = \left(\frac{T_0 - az}{T_0}\right)^{\frac{g}{aR}}$$

In seconda approssimazione abbiamo l'andamento della pressione, considerando che la densità varia linearmente secondo l'atmosfera standard.

N.B.: così possiamo correggere l'andamento della pressione di prima;

la stessa cosa si può fare con la densità;

$$\frac{p}{p_0} = \frac{RT\rho}{RT_0\rho_0} = \left(\frac{T_0 - az}{T_0}\right)^{\frac{g}{aR}}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{T_0}{T} \left(\frac{T_0 - az}{T_0}\right)^{\frac{g}{aR}} = \frac{T_0}{T_0 - az} \left(\frac{T_0 - az}{T_0}\right)^{\frac{g}{aR}} = \left(\frac{T_0 - az}{T_0}\right)^{\frac{g}{aR}-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T_0 - az}{T_0}\right)^{\frac{g}{aR}-1}$$

Questi sono i valori di secondo tentativo, con $T = T_0 - az$ cioè con T che varia secondo la legge empirica dell'atmosfera standard.

In prima approssimazione a temperatura costante abbiamo trovato l'andamento di pressione e densità, in base all'andamento lineare della temperatura abbiamo trovato l'andamento di seconda approssimazione della pressione e della densità in funzione dell'altezza.

- Ora supponiamo il sistema adiabatico, cioè che non scambia calore lateralmente (è ragionevole perché la temperatura è funzione solo di z). L'andamento di temperatura è lo stesso sia dentro che fuori.

Allora otteniamo:

$$\frac{dp}{\rho} = -gdz \rightarrow vdp = -gdz$$

Se la trasformazione che compie il fluido da $z = 0$ a z generico è una adiabatica possiamo scrivere:

$$pv^k = p_0v_0^k \rightarrow \left(\frac{v}{v_0}\right)^k = \frac{p_0}{p} \rightarrow \frac{v}{v_0} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{k}}$$

Sostituiamo:

$$v_0 \frac{p_0^{\frac{1}{k}}}{p^{\frac{1}{k}}} dp = -gdz$$

Abbiamo quindi separato le variabili;

$$v_0 p_0^{\frac{1}{k}} \int_{p_0}^p p^{-\frac{1}{k}} dp = v_0 p_0^{\frac{1}{k}} \cdot \frac{p^{1-\frac{1}{k}} - p_0^{1-\frac{1}{k}}}{1 - \frac{1}{k}} = -g \int_0^z dz = -gz$$

$$p^{1-\frac{1}{k}} = -\frac{gz}{\frac{k}{k-1} \cdot v_0 p_0^{\frac{1}{k}}} + p_0^{1-\frac{1}{k}}$$

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} = 1 - \frac{k-1}{v_0 p_0 k} gz = 1 - \frac{k-1}{RT_0 k} gz$$

$$p_0 v_0 = RT_0$$

Inoltre, per le trasformazioni adiabatiche possiamo scrivere:

$$\frac{T_0}{\frac{k-1}{k}} = \frac{T}{\frac{k-1}{k}} \rightarrow T = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} T_0 \rightarrow \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{T}{T_0}$$

$$\rightarrow \frac{T}{T_0} = 1 - \frac{k-1}{RT_0 k} gz \Rightarrow T = T_0 - \frac{k-1}{Rk} gz$$

La temperatura ha effettivamente un andamento lineare decrescente, nell'ipotesi di atmosferica adiabatica, cioè che non scambia calore orizzontalmente.

Osservazione; confrontando questo risultato con l'equazione empirica dell'atmosfera standard vediamo che hanno formalmente la stessa espressione (dove la costante $a = \frac{k-1}{Rk} g$).

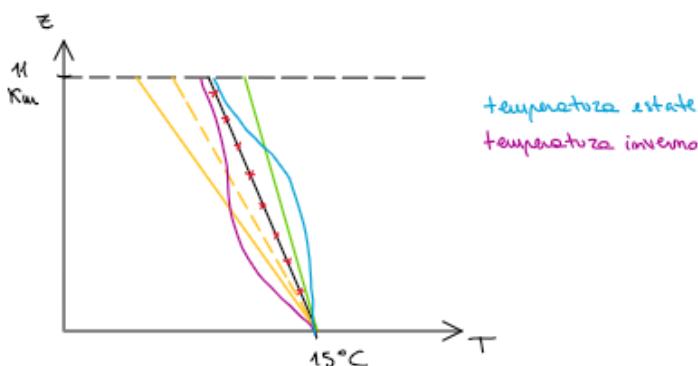
Quindi, l'equazione empirica dell'atmosfera standard è stata ricavata supponendo che l'atmosfera fosse adiabatica.

Nel caso dell'atmosfera adiabatica abbiamo trovato un risultato simile a quello dell'atmosfera standard:

$$T = T_0 - \frac{k-1}{Rk} gz = T_0 - \frac{g}{R} z + \frac{g}{kR} z$$

Facciamo un grafico delle temperature in funzione di z fino ad 11Km a partire dalla temperatura media del suolo di 15°C.

Riportiamo la curva dell'atmosfera standard;



vediamo come cambia al variare di k la curva dell'atmosfera adiabatica:

- $k = 1,4$ (beige)
- $k = 1,3$ (tratteggiata)
- $k = 1,2$ (verde)
- $k = 1,234 \Rightarrow$ i punti dell'atmosfera adiabatica stanno sulla curva empirica dell'atmosfera standard. Si sovrappone esattamente all'andamento dell'atmosfera standard.

$$k = \frac{c_p}{c_v} \text{ per la trasformazione adiabatica;}$$

Allora concludiamo che l'atmosfera adiabatica è una buona approssimazione dell'atmosfera standard, ma che il valore di k non è quello dell'aria perché cambia con l'altitudine.

Nel libro sono riportate delle misure di temperatura registrate durante voli dal 2008 al 2011.

Inoltre, l'andamento della temperatura in estate, è tale che negli strati più bassi la temperatura è maggiore rispetto all'atmosfera standard, mentre attorno agli 11 Km è simile alla curva dell'atmosfera standard, e viceversa l'andamento della temperatura in inverno è tale che negli strati più bassi la temperatura sia minore rispetto all'atmosfera standard.

- Da ultimo studiamo l'atmosfera con una corrente ascensionale di aria;

ad esempio, in estate l'aria a livello del terreno è più calda, quindi meno densa e allora sale verso l'alto. Durante il giorno il sole scalda di più la terra che non il mare perché la terra ha meno capacità termica del mare. Quindi la temperatura della terra è superiore a quella del mare; quindi, la temperatura sale lungo la terra e scende lungo il mare allora il vento viene dal mare. Di notte avviene il contrario, la terra

si raffredda prima, il mare rimane più caldo, l'aria calda sale dal mare, scende sulla terra e il vento viene dalla terra.

Allora l'ipotesi di atmosfera adiabatica con aria ferma in realtà non è vera, l'aria nel cilindro non sta ferma, sale sulla terra durante il giorno e scende sulla terra durante la notte. Salendo l'aria ha un movimento convettivo.

L'inversione termica si verifica quando non c'è questo movimento ascensionale dell'aria calda sulla terra perché sopra di noi c'è uno strato di aria calda, la corrente ascensionale si blocca.

Allora, riconsideriamo la colonna di aria adiabatica ($Q = 0$ lateralmente) in cui inoltre c'è una corrente di aria che sale.

Scriviamo l'equazione di Bernoulli:

$$wdw + gdz + gdz_a + \frac{dp}{\rho} + gdz_f = 0$$

Dove supponiamo $z_f = 0$ non ci sono organi; temperatura solo funzione di z :

$$wdw + gdz + gdz_a + vdp = 0$$

Supponiamo che il gas sia perfetto e facciamo il differenziale dell'equazione di stato:

$$pv = RT \rightarrow pdv + vdp = RdT \Rightarrow vdp = RdT - pdv$$

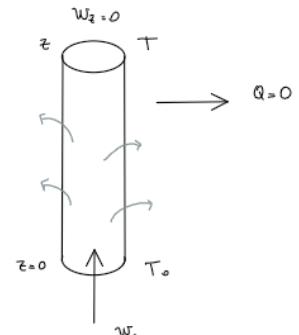
Sostituiamo e otteniamo:

$$RdT = pdv - wdw - gdz - gdz_a$$

$$R(T - T_0) = -g(z - z_0) - gz_a + \int_0^z pdv - \frac{w_z^2 - w_0^2}{2}$$

Dove $w_z^2 = 0$ all'altezza z il fluido si ferma e $z_0 = 0$.

$$\Rightarrow T = T_0 - \frac{g}{R}z + \frac{1}{R} \left(\int_0^z pdv - gz_a + \frac{w_0^2}{2} \right)$$



Confrontando questo risultato con quello dell'atmosfera adiabatica, osserviamo che abbiamo ottenuto gli stessi termini (i primi 3) ma quest'ultimo risultato si sottrae il termine delle perdite di pressione per attrito e si somma il termine cinetico relativo alla quota $z = 0$ che determina un aumento della temperatura (ad esempio in estate).

Approccio ingegneristico per approssimazione successive.

Metanodotto

Problema del Metanodotto;

Arriva il gas nella sezione 1, poi percorre una lunghezza L , quindi sarà diminuita la pressione e ho bisogno di un altro compressore che riporti la pressione per farlo continuare nel suo percorso.

(in Italia abbiamo il gas che viene dall'Algeria in Sicilia e poi sale al nord, nello stesso tempo abbiamo il gasdotto che viene dalla Russia)

Studiamo ciò che avviene all'interno del volume di controllo;
procediamo per approssimazioni successive;

Dobbiamo calcolare quanto vale la potenza del compressore che devo mettere dopo una lunghezza L ;

Prima IPOTESI semplificativa per avere l'ordine di grandezza; metodo delle approssimazioni successive.

Hp.1 Moto incomprimibile

Questa ipotesi è certamente sbagliata;

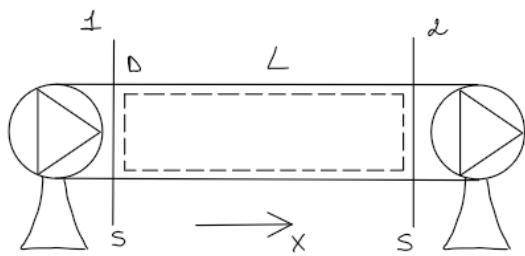
applico Bernoulli, il sistema termodinamico è quello racchiuso dalla linea tratteggiata:

$$dz_a + dz_f + \frac{dp}{\gamma} + \frac{dw^2}{2g} + dz = 0$$

Se suppongo che le due sezioni 1 e 2 sono alla stessa quota allora $dz = 0$;

se non ci sono organi meccanici $dz_f = 0$;

se il moto è incomprimibile e la sezione S sia la stessa in 1 e 2 allora $w_1 = w_2$ allora il carico cinetico non varia;



$$dz_a + \frac{dp}{\gamma} = 0 \rightarrow z_a + \frac{p_2 - p_1}{\gamma} = 0 \Rightarrow p_1 - p_2 = \gamma z_a$$

Così abbiamo ottenuto il valore di primo tentativo per l'incognita p_2 , che dipende dalle perdite di pressione distribuite o concentrate z_a calcolate lungo il condotto:

$$p_2 = p_1 - \gamma z_a$$

$p_1 \rightarrow$ pressione che veniva impressa al metano dal compressore che c'è prima della sezione 1.

$\gamma \rightarrow$ peso specifico del gas incomprimibile

Hp.2 Moto comprimibile

Poiché la densità non è più costante, anche se la sezione S è costante, la velocità nel condotto varia $\rightarrow dw \neq 0$ e $\gamma \neq \text{cost.}$

$$z_a + \int_1^2 \frac{dp}{\gamma} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = 0, \text{ cioè } dz_a + \int_1^2 \frac{dp}{\gamma} + \frac{dw^2}{2g} = 0$$

Supponiamo che nel condotto ci siano solo perdite distribuite:

$$dz_a = \lambda \frac{w^2}{2g} \frac{dx}{D}$$

(D diametro) metto dx al posto di L ;

Inoltre, riscriviamo il termine cinetico nel seguente modo:

$$\frac{dw^2}{2g} = w \frac{dw}{g}$$

Con $G = wS\rho \rightarrow w = \frac{G}{\rho S g} = \frac{G_p}{\gamma S} \rightarrow dw = -\frac{G_p}{S} \frac{d\gamma}{\gamma^2}$

\downarrow

$$G_p = G \cdot g \text{ portata in peso}$$

Riscriviamo l'espressione dell'equazione di Bernoulli, sostituendo tutti i termini;

$$\frac{\lambda}{2g} \frac{G_p^2}{\gamma^2 S^2} \frac{dx}{D} + \frac{dp}{\gamma} - \frac{G_p}{\gamma S g} \frac{1}{S} \frac{G_p}{\gamma^2} d\gamma$$

Moltiplichiamo per γ^2

$$\frac{\lambda}{2g} \frac{G_p^2}{S^2} \frac{dx}{D} + \gamma dp - \frac{G_p}{\gamma S} \frac{1}{g} \frac{G_p}{S} d\gamma = 0$$

Questa è una espressione in cui i tre termini contengono i tre differenziali di dx , dp e $d\gamma$.

Il primo termine ha come variabile differenziale la x che è la distanza dalla sezione 1, il secondo termine ha variabile di p e il terzo termine di γ ;

Supponiamo che il gas nel metanodotto sia come un gas perfetto:

$$pv = RT \rightarrow p = RT\rho \rightarrow gp = RT\gamma \Rightarrow \gamma = \frac{pg}{RT}$$

Sostituiamo:

$$\frac{\lambda}{2g} \frac{G_p^2}{S^2} \frac{dx}{D} + \frac{pg}{RT} dp - \frac{G_p^2}{gS^2} \frac{R}{g} \frac{d\gamma}{\gamma} = 0$$

Moltiplichiamo tutto per $\frac{RT}{g}$;

$$\underline{pdः} + \frac{\lambda R}{2g^2 S^2 D} \cdot T dx - \underline{\frac{G_p^2 R}{gS^2 g} \frac{d\gamma}{\gamma}} = 0$$

B

A

$$\Rightarrow pd\gamma + BTdx - AT \frac{d\gamma}{\gamma} = 0$$

Equazione generale del metanodotto nel caso di moto comprimibile;

A è un termine costante una volta noto R del gas, la portata in peso che voglio avere e la sezione del tubo.

Per B invece, A è una costante D è una costante, mentre λ no, è funzione di Reynolds e di $\frac{\epsilon}{D}$.

4-11.-21

Petracci

Settimana 8

09-11-21

Secondo appello 22/02 aula A1 h:9:30

Abbiamo ricavato l'equazione generale del metanodotto;

Abbiamo preso l'equazione di Bernoulli generalizzata, in prima approssimazione quando il moto è incomprensibile e abbiamo ricavato la prima espressione approssimata delle cadute di pressione distribuite e concentrate. Questa espressione si risolve facilmente e anche se è sbagliata ci dà un ordine di grandezza del fenomeno. [Quanto tempo ci vuole per calcolare il risultato con la precisione al decimo? Un anno].

Poi abbiamo scritto Bernoulli per il moto comprimibile, abbiamo supposto perdite di pressione solo distribuite, poi abbiamo supposto gas perfetto e siamo arrivati all'equazione generale del moto comprimibile di un gas perfetto in un condotto orizzontale in cui ci sono solo perdite distribuite.

$$pd\mu + BTdx - AT \frac{dy}{\gamma} = 0$$

L'ultimo termine esprime il legame tra temperatura e peso specifico percentuale. Il termine A è composto di tutti termini costanti, B oltre ad A e al diametro ha anche il fattore di attrito che dipende da Reynolds e da $\frac{\epsilon}{D}$.

Hp.2a Trasformazione 12 isoterna

Questa trasformazione mi permette di integrare.

Questa ipotesi chiaramente non è veritiera poiché i gasdotti sono soggetti a condizioni termiche in base alle stagioni, alle zone geografiche e alle posizioni sul suolo o sottosuolo.

Allora possiamo avere tutte le condizioni termiche al contorno.

Però questa prima ipotesi ci permette di integrare molto facilmente l'equazione:

$$\frac{p_2^2 - p_1^2}{2} + BTL - AT \ln \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right) = 0$$



$$= \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \text{ poiché } \gamma = \frac{gp}{RT}$$

Abbiamo supposto B costante. $T = \text{cost}$

$$\Rightarrow \frac{p_2^2 - p_1^2}{2} + BTL - AT \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) = 0$$

Risolvere questa equazione nell'incognita p_2 non è molto semplice perché non si riesce ad esplicitare p_2 .

Si può risolvere con il metodo grafico dove si sovrappongono i due grafici dell'ultimo termine e dei primi due e il risultato è il punto di intersezione.

Altrimenti, si può risolvere per tentativi o per iterazioni successive:

siccome il logaritmo è quello che rende non lineare il problema si impone un valore di p_2 nel logaritmo e si ottiene p_2 e si procede così finché non si ottiene un valore di p_2 pari a quello di p_2 di tentativo. Si dice che le iterazioni finiscono quando l'errore è minore di un certo e a piacere. Che valore ci metto come valore di primo tentativo? La soluzione del moto incomprensibile.

Il valore di p_2 di primo tentativo è il valore di p_2 che si trova come soluzione con l'ipotesi di moto incomprensibile che ha già l'ordine di grandezza corretto: $p_2 = p_1 - \gamma z_a$.

Il valore di p_2 che si ottiene sarà diverso e quindi si prende questo p_2 come valore di secondo tentativo e si va avanti così, finché la differenza tra p_2 trovato e p_2 di tentativo è più piccolo di una certa tolleranza di approssimazione.

Il problema fisico è che faccio scorrere del gas in un condotto, (-5/-10 m sotto terra la temperatura si mantiene costante) e devo preoccuparmi di non perdere troppo calore rispetto all'esterno. Sicuramente il gas perderà calore.

Quindi seconda ipotesi di approssimazione supponiamo che il tubo sia isolato in moto da annullare le perdite di calore con l'esterno. Questa ipotesi si può ritenere più accurata di quella a temperatura costante ma sicuramente non è completamente vera, non riesco ad annullare tutta la perdita di calore.

Hp.2b Trasformazione adiabatica

Immaginiamo che il metanodotto sia rivestito con un materiale isolante e quindi che non scambi calore con l'esterno: $q = 0$;

l'equazione è sempre:

$$pd\bar{p} + BTdx - AT \frac{d\gamma}{\gamma} = 0$$

riprendiamo l'equazione ottenuta e sostituiamo il termine $\frac{d\gamma}{\gamma}$ nel seguente modo:

$$\gamma = \rho g = \frac{g}{v} \rightarrow \frac{d\gamma}{\gamma} = -\frac{dv}{v}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{T} dp + Bdx + A \frac{dv}{v} = 0$$

(abbiamo diviso per T tutti i termini)

Gli ultimi due termini sono integrabili senza problemi; allora analizziamo il primo termine. Siccome sappiamo che T è legato a p dall'equazione dell'adiabatica, posso scrivere:

Per le trasformazioni adiabatiche abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{T}{p^{\frac{k-1}{k}}} &= \frac{T_1}{p_1^{\frac{k-1}{k}}} \rightarrow \frac{p}{T_1} \cdot p_1^{\frac{k-1}{k}} \cdot \frac{dp}{p^{\frac{k-1}{k}}} = \frac{p_1^{\frac{k-1}{k}}}{T_1} \cdot p^{1-\frac{1}{k}} \cdot dp = \frac{p_1^{\frac{k-1}{k}}}{T_1} p^{\frac{1}{k}} dp \\ &\downarrow \\ \boxed{\frac{p}{T} dp =} \quad & \\ \Rightarrow \int_1^2 p^{\frac{1}{k}} dp &= \frac{1}{\frac{1}{k}+1} \left[p^{\frac{1}{k}+1} \right]_1^2 = \frac{1}{\frac{1}{k}+1} \left[p_2^{\frac{1}{k}+1} - p_1^{\frac{1}{k}+1} \right] \end{aligned}$$

Poi integriamo l'ultimo termine.

Per le trasformazioni adiabatiche abbiamo:

$$\begin{aligned} p v^k &= p_1 v_1^k \rightarrow v^k = \frac{p_1}{p} v_1^k \rightarrow v = \left(\frac{p_1}{p} \right)^{\frac{1}{k}} v_1 \\ &\rightarrow dv = p^{\frac{1}{k}} v_1 \left(-\frac{1}{k} \right) p^{-\frac{1}{k}-1} dp \end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{1}{k} p_1^{\frac{1}{k}} v_1^{\frac{1}{k}} p^{\frac{-1}{k}-1} \cdot \frac{p_1^{\frac{1}{k}}}{p_1^{\frac{1}{k}} v_1^{\frac{1}{k}}} dp = -\frac{1}{k} \frac{dp}{p}$$

$$\Rightarrow A \int_1^2 \frac{dv}{v} = -\frac{A}{k} \int_1^2 \frac{dp}{p} = -\frac{A}{k} \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = 0$$

In definitiva dall'integrazione dell'equazione otteniamo:

$$\frac{p_1^{k-1}}{T_1} \frac{k}{k+1} \left[p_2^{\frac{1}{k}+1} - p_1^{\frac{1}{k}+1} \right] + BL - \frac{A}{k} \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = 0$$

Ora come valore di primo tentativo per la risoluzione del problema inseriamo un valore di p_2 soddisfacente trovato nel caso isotermo (all'interno del logaritmo) ed otteniamo un valore di v_2 e procediamo di nuovo per iterazioni successive.

Con p_2 imponiamo la pressione in uscita, in base alla pressione in uscita e in base all'equazione dei gas si ottiene anche v_2 . Quest'ultimo determina p_2 :

$p_2 \rightarrow v_2$; ma questo determina una p_2

$$Re = w_2 \frac{D}{v}$$

Nel w_2 c'è la velocità che imponiamo dalla portata, sono tutte grandezze legate tra loro per cui la pressione p_2 modifica la velocità w_2 ma influenza anche v_2 che è $v_2 = \frac{\mu_2}{\rho_2}$, quindi il p_2 modifica il Reynolds e modificando il Reynolds modifica il λ ; nel momento in cui si fa l'iterazione dovremmo ricalcolare ogni volta il B e questo nel grafico non si può fare.

B ha un λ_2 ; l'imposizione di p_2 determina un valore di tentativo λ_2 , a questo punto si può calcolare il p_2 .

Osservazione;

A è una costante del problema:

invece B contiene il fattore di attrito λ in funzione di Reynolds.

Allora la serie di tentativi da condurre in questo caso è la sorgente:

- Prendiamo il valore di primo tentativo p'_2 dal caso isotermo;
- Con p'_2 e T'_2 calcoliamo la velocità w'_2 .

$$T'_2 = \frac{T_1}{p_1^{\frac{1}{k-1}}} \cdot p_2'^{k-1} k \rightarrow G = w'_2 S p'_2 = w'_2 S \frac{p'_2}{R T'_2}$$

- Con w'_2 otteniamo il numero di Reynolds Re'_2 :

$$Re'_2 = \frac{w'_2 D}{v}$$

- Con Re'_2 dal diagramma di Moody leggiamo λ'_2
- Con questo λ'_2 troviamo B' .

→ con p'_2 e con B' calcoliamo il valore di secondo tentativo p''_2

Il caso reale è quello in cui c'è uno scambio di calore che possiamo minimizzare.

Caso reale 2c: Esiste scambio di calore $q \neq 0$

Ricaveremo l'andamento quando faremo la termocinetica. Supponiamo che all'esterno del metanodotto ci sia una temperatura T_e (problema del termostato, lo vedremo nella terza parte del corso, vedremo perché l'andamento di temperatura nel termostato è di questo tipo), costante dappertutto e che la temperatura nella sezione 1 sia maggiore:

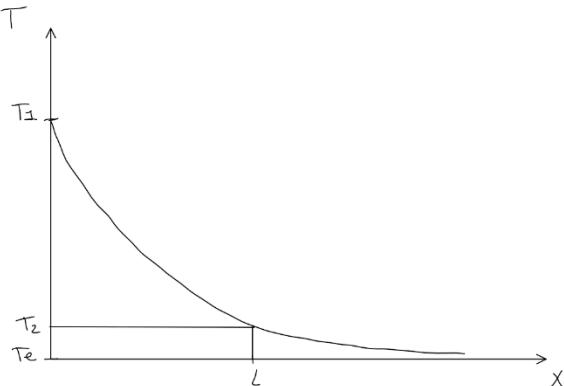
$$T_e = \text{cost} \text{ e } T_1 > T_e$$

Il gas si raffredda diminuendo la temperatura in maniera esponenziale con x tendendo al valore T_e .

Allora si trova la seguente espressione per l'andamento della temperatura:

$$T = T_e + (T_1 - T_e) \exp^{-\alpha x}$$

Vediamo che per $x \rightarrow \infty$ la temperatura tende a T_e .



→ andamento esponenziale decrescente.

Questo andamento della temperatura corrisponde alla soluzione del problema termostatico.

Riprendiamo l'equazione da integrare e osserviamo che i primi due termini si integrano facilmente; in particolar modo il secondo perché l'espressione di T dipende solo da x :

$$pdP + BTdx - AT \frac{d\gamma}{\gamma} = 0$$

$$\frac{p_2^2 - p_1^2}{2} + B \int_1^2 [T_e + (T_1 - T_e) \exp^{-\alpha x}] dx - \int_1^2 AT \frac{d\gamma}{\gamma} = 0$$

Supponiamo di nuovo $B = \text{cost}$; nel B c'è sempre la variabilità di λ

Per quanto riguarda l'ultimo termine riscriviamo l'espressione di $\frac{d\gamma}{\gamma}$:

$$pv = RT \rightarrow gp = RT\gamma \rightarrow \gamma = \frac{gp}{RT} \rightarrow d\gamma = \frac{g}{RT} dp - \frac{pg}{T} \frac{dT}{T^2}$$

$$\rightarrow \frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{dp}{p} - \frac{dT}{T}$$

$$\rightarrow -AT \frac{d\gamma}{\gamma} = -AT \frac{dp}{p} + AT \frac{dT}{T} = -AT \frac{dp}{p} + AdT$$

Il secondo termine si integra facilmente mentre il primo termine (ha T e dp) si può risolvere solo con delle ipotesi semplificative:

- Se nell'espressione di $\frac{d\gamma}{\gamma}$ le variazioni di pressione sono trascurabili rispetto alle variazioni della temperatura $\frac{dT}{T}$, il primo termine da integrare non c'è proprio:

$$\frac{p_2^2 - p_1^2}{2} + B \int_1^2 [T_e + (T_1 - T_e) \exp^{-\alpha x}] dx + A(T_2 - T_1) = 0$$
 (ipotesi drastica) $\frac{dp}{p}$ trascurabile rispetto a $\frac{dT}{T}$.
- Se nel risolvere l'integrale di $T \frac{dp}{p}$ consideriamo la temperatura media T_m tra T_1 e T_2 allora il termine è integrabile:

$$\frac{p_2^2 - p_1^2}{2} + B \int_1^2 [T_e + (T_1 - T_e) \exp^{-\alpha x}] dx - AT_m \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + A(T_2 - T_1) = 0$$

Dove abbiamo fatto la seguente semplificazione:

$$\int_1^2 T \frac{dp}{p} \cong T_m \int_1^2 \frac{dp}{p} = T_m \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

L'ultimo passaggio è applicare dei software commerciali che risolvono il problema;

Tiraggio del caminetto

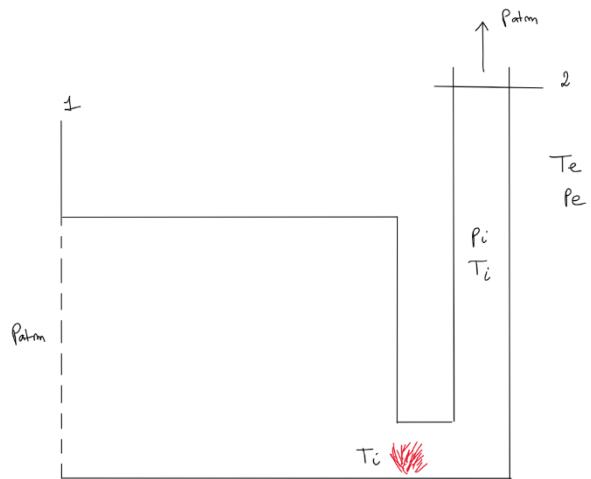
Il sistema termodinamico è la sezione della stanza, il contorno rigido che è la stanza e la canna fumaria e l'uscita che è la canna fumaria. La legna messa a fuoco reagisce in maniera esoterma aumentando la sua temperatura e il fuoco raggiunge la temperatura T_i , mentre all'esterno c'è una temperatura $T_e < T_i$. I prodotti della combustione hanno temperatura più elevata.

Mantenendo la pressione costante, se aumenta la temperatura, la densità diminuisce (in un campo gravitazionale terrestre l'aria calda pesa di meno, sale verso l'alto e per mantenere il fuoco ci deve essere aria che entra nella stanza), infatti:

$$p = RT\rho \rightarrow \rho = \frac{p}{RT}$$

Allora, se l'aria calda tende a salire poiché il suo peso $-\rho g$ verso il basso diminuisce.

Affinché il camino funzioni correttamente, la stanza deve avere un qualche contatto con l'esterno (il combustibile) e quindi anche la stanza è più o meno alla stessa pressione atmosferica esterna.



Nella canna fumaria il peso esterno è $\rho_e g$ e inoltre se $T_i \cong \text{cost}$ il peso dell'aria interna è $\rho_i g$;

allora poiché $\rho_e > \rho_i$ poiché l'aria esterna è più fredda, nasce la convenzione naturale dal basso verso l'alto (e il fluido rientra dai contatti con l'esterno).

Anche in questo caso andiamo per approssimazioni successive e facciamo la prima ipotesi semplificativa;

Hip isoterma $T_i = \text{cost}$

Supponiamo che la temperatura dentro la canna fumaria sia pari alla temperatura di combustione T_i anche se non è vero perché il fluido andando verso l'alto si raffredda cedendo calore lungo le pareti.

Scriviamo l'equazione di Bernoulli:

$$dz_a + dz_f + dz + \frac{dp}{\gamma_i} + \frac{dw^2}{2g} = 0$$

$dz_f = 0$ perché non ci sono organi meccanici. Ci sono le perdite di pressione distribuite e concentrate.

Osserviamo che γ è pressoché costante:

$$\gamma = \frac{pg}{RT} = \frac{p_{atm}g}{RT_i} = \text{cost}$$

Con $T_i = \text{cost}$ e $p_{atm} = \text{cost}$

Allora possiamo integrare tra le sezioni 1 e 2 che delimitano il volume di controllo:

$$z_a + z_2 - z_1 + \frac{p_2 - p_1}{\gamma_i} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = 0$$

Se l'ampiezza della stanza è molto maggiore della sezione del camino, la velocità w_1^2 è trascurabile rispetto al quadrato della velocità di uscita. Suppongo che la sezione 1 sia molto più grande della sezione della canna fumaria.

Inoltre supponiamo che le perdite per attrito siano perdite di pressione distribuite, ci possono essere anche le perdite concentrate (di seguito considereremo anche l'aggiunta delle perdite concentrate):

→ Solo perdite distribuite

$$z_a = \lambda \cdot \frac{w_2^2}{2g} \cdot \frac{L}{D}$$

Se considero $z_{atot} = \left(\lambda \frac{L}{D} + \lambda'\right) \frac{w_2^2}{2g}$

Otteniamo:

$$\lambda \frac{w_2^2}{2g} \cdot \frac{L}{D} + \frac{w_2^2}{2g} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma_i} + z_1 - z_2$$

$$\left(\left(\lambda \frac{L}{D} + \lambda' \right) \frac{w_2^2}{2g} + \frac{w_2^2}{2g} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma_i} + z_1 - z_2 \right) \text{ con le perdite totali;}$$

$p_1 - p_2 = \rho_e g L$ è la differenza di pressione che c'è alla base della canna fumaria dove c'è il fuoco e la fine della canna fumaria, questa differenza di pressione è la differenza di pressione che c'è all'esterno del camino. All'esterno del camino l'aria atmosferica fredda provoca una differenza di pressione, il carico idrostatico.

$$\frac{w_2^2}{2g} \left(\lambda \frac{L}{D} + 1 + \lambda' \right) = \frac{\gamma_e L}{\gamma_i} - L \quad \longrightarrow \quad \boxed{\text{Ovviamente la relazione successiva si modifica a causa di } z_{atot}}$$

$$\Rightarrow \frac{w_2^2}{2g} \beta = L \left(\frac{\gamma_e}{\gamma_i} - 1 \right) = L \left(\frac{T_i}{T_e} - 1 \right) = L \left(\frac{T_i - T_e}{T_e} \right)$$

Con $\beta = \lambda \frac{L}{D} + 1 + \lambda'$ ($1 \rightarrow$ energia cinetica che il fluido ha in uscita dalla canna fumaria)

Questa è l'espressione finale della soluzione del camino semplificata con temperatura costante T_1 ;

Questa espressione ottenuta dà il senso fisico del problema.

$L \left(\frac{T_i - T_e}{T_e} \right) \rightarrow$ è la causa del moto, c'è uno $z_1 - z_2$; differenza di densità che attraverso i gas perfetti abbiamo ricondotto ad una differenza di temperatura; due sono le cause connesse un'altezza h sufficiente e di accendere il fuoco. Differenza di potenziale ΔV .

A sinistra dell'equazione c'è l'effetto; è composto di due termini:

$\frac{w_2^2}{2g} \rightarrow$ velocità del fluido in uscita, corrente.

$\beta \rightarrow$ resistenza del fluido, resistenza.

Il significato fisico è paragonabile alla legge di Ohm.

- Infatti ciò che determina il movimento del fluido all'interno della canna fumaria è la differenza tra γ_i e γ_e cioè tra T_i e T_e . Queste devono essere moltiplicate per l'altezza L del camino perché il camino deve avere una certa altezza.
- L'effetto è legato al fatto che il fluido è in moto e che il fluido ha una certa velocità.
- La resistenza al moto è rappresentata dal termine β cioè dalle perdite distribuite λ e dalla stessa velocità del fluido.

È l'analogia della legge di Ohm: $IR = \Delta V$

Allora, se il camino non tira si aggiunge un ventilatore tramite il termine z_f , questo carico z_f si aggiunge alle cause del moto e fa funzionare il camino. Lo mettiamo a destra ed è la causa del moto. Non tira per convezione naturale ma tira per convezione mista.

Infatti, il cammino tira se la causa è maggiore dell'effetto:

$$\frac{w_2^2}{2g}\beta > L\left(\frac{T_i - T_e}{T_e}\right) \rightarrow \frac{w_2^2}{2g}\beta < L\left(\frac{T_i - T_e}{T_e}\right) + z_f$$

Abbiamo quindi concluso l'analisi semplificata del cammino.

Caso reale $q \neq 0$

Leviamo la stanza e il cammino è un tubo verticale dove l'aria scorre dalla sezione iniziale a quella finale.

Il fluido caldo che scorre all'interno del cammino scambia calore con l'esterno che è a temperatura T_e : $q \neq 0$ allora l'aria interna non rimane costante da diminuisce.

Studiamo questo caso del cammino in analogia con il problema del metanodotto in cui per ora è posto verticalmente.

Il condotto è posto verticalmente in direzione x ed ha lunghezza L ; il fluido in ingresso ha una temperatura T_0 e quello in uscita una temperatura T_u inferiore. È come se studiassimo il metanodotto posto verticalmente.

Dal caso del metanodotto con scambio di calore possiamo scrivere un'espressione analoga all'equazione di Bernoulli in cui però dove comparire anche il termine del carico potenziale a causa della differenza di quota presente in questo caso perché è posto verticalmente:

$$pd\bar{p} + BTdx - AT\frac{dy}{\gamma} + dx\frac{gp^2}{RT} = 0$$

Il quarto termine veniva dal dz trascurato nel metanodotto che ora è dx ;

Osserviamo che il termine di carico potenziale deve essere moltiplicato per le quantità che abbiamo eliminato negli altri termini nel procedere con i vari passaggi:

allora di nuovo supponiamo che la temperatura vari con il seguente andamento esponenziale:

$$T = [T_e + (T_0 - T_e)\exp^{-\alpha x}]$$

Vedremo nella parte di termocinetica a che cosa è uguale α ;

Possiamo integrare tutti i termini:

- $\int_0^u pd\bar{p} = \frac{p_u^2 - p_0^2}{2}$;
- $\int_0^H BTdx = B \int_0^H [T_e + (T_0 - T_e)\exp^{-\alpha x}]dx$

Dove abbiamo considerato $B = \text{cost}$ nonostante dipenda da λ e quindi deve essere verificato per approssimazioni successive;

- $\frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{dp}{p} - \frac{dT}{T} \rightarrow -AT\frac{d\gamma}{\gamma} = -AT\frac{dp}{p} + AdT$ (come nel metanodotto) il secondo termine posso integrarlo semplicemente:

Con $\int_0^u AdT = A(T_u - T_0)$

$\int_0^u AT\frac{dp}{p} = AT_m \ln\left(\frac{p_u}{p_0}\right)$, con T_m temperatura media;

ma ingegneristicamente è trascurabile perché la variazione di pressione nel dislivello L è certamente inferiore alla variazione di temperatura nell'espressione di $\frac{d\gamma}{\gamma}$;

- $\int_0^H \frac{gp^2}{RT} dx = \frac{g}{R} p_0^2 \int_0^H \frac{dx}{T} = \frac{gp_0^2}{R} \int_0^H \frac{dx}{T_{e-(T_0-T_e)\exp^{-\alpha x}}}$ (al posto di p_0 sarebbe più corretto p_m)

Dove questo termine è stato integrato grazie a delle ipotesi semplificative, cioè supponendo la pressione costante pari alla pressione atmosferica.

Moto comprimibile e con elevate differenze di pressione (cap. 5)

Calcolo della velocità del suono

L'aria rimane sostanzialmente ferma e trasmette le onde acustiche sbattendo le une sulle altre. Vediamo come si risale alla relazione di questa velocità e alle caratteristiche del fluido

Consideriamo un cilindro in cui un pistone si muove da sinistra verso destra con velocità dw .

Se il fluido all'interno del condotto fosse incomprimibile tutto il fluido che in un certo istante di tempo si trova a sinistra della sezione azzurra si sposterebbe verso destra;

invece, poiché il fluido è compressibile, il pistone imprime un disturbo al fluido che in un certo istante di tempo si trova a sinistra della sezione; questo disturbo fa variare la pressione p e la densità ρ iniziale delle quantità dp e $d\rho$, quindi il fluido distribuito ha pressione $p + dp$ e densità $\rho + d\rho$. Se il fluido è compressibile si genera l'onda sonora che si muove da sinistra verso destra con w_s .

Quello che succede è questo.

Immaginiamo che il fluido inizialmente sia fermo; il pistone che avanza produce delle vibrazioni nel fluido e quindi osserviamo un fronte di avanzamento della velocità del suono alla velocità w_s .

Ovviamente le vibrazioni del fluido non producono un movimento macroscopico, cioè l'aria rimane sostanzialmente ferma, ma a monte del fronte a velocità w_s il fluido è stato disturbato.

Invece, a valle del fronte il fluido è rimasto indisturbato quindi è ancora alla pressione p e alla densità ρ e ha la velocità nulla $w = 0$;

Allora il fenomeno è **NON stazionario**, perché l'onda si propaga a velocità w_s incognita.

Ora, per studiare questo fenomeno con la conservazione della massa e della quantità di moto, è più conveniente trasformare il moto del fronte a velocità w_s in un sistema di riferimento che si muove proprio con velocità w_s ;

così il fronte di avanzamento è fermo rispetto a questo s.d.r, mentre è come se il fluido di destra vada verso il fronte con velocità w_s e il fluido di sinistra si allontana dal fronte con velocità $w_s - dw$ tenendo conto della velocità dw impressa dal pistone. Entra dell'aria da destra con velocità w_s ed esce da sinistra $w_s - dw$ e il fronte è fermo nella velocità w_s . A destra abbiamo fluido con velocità w_s , densità ρ e sezione S ; a sinistra invece esce con velocità $w_s - dw$ e ha una $p + dp$.

Abbiamo trasformato un moto non stazionario in un moto stazionario;

il sistema termodinamico è quello delimitato dalle due linee tratteggiate;

Studiamo il volume di controllo che è fermo e in cui il fluido entra da destra con una portata G ed esce a sinistra G .

- Principio di conservazione della massa

$$Gdx = Gsx$$

$$\rho w_s S = (\rho + dp)(w_s - dw)S$$

$$\rho w_s = \rho w_s - dwp + w_s dp - dwdp \quad (\text{differenziale di ordine doppio trascurabile rispetto agli altri differenziali})$$

$$\Rightarrow \rho dw = w_s dp$$

- Conservazione della quantità di moto

$$\sum F = \frac{d}{dt}(mw) = \frac{dm}{dt}w + m\frac{dw}{dt} \quad (\text{dove } \frac{dw}{dt} = 0 \text{ in regime stazionario } (w = \text{cost}))$$

$$(d + dp)S - pS = \dot{m}w \quad (\text{la faccia sinistra è quella che si oppone al moto})$$

$$pS + dpS - pS = \dot{m}[w_s - (w_s - dw)]$$

$$dpS = \rho w_s S(w_s - w_s + dw)$$

$$\Rightarrow dp = \rho w_s dw$$

Mettiamo insieme i due risultati e otteniamo:

$$dp = d\rho w_s^2 \rightarrow w_s^2 = \frac{dp}{d\rho} \Rightarrow w_s = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

10-11.-21

Abbiamo trovato che $w_s = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$, però $\frac{dp}{d\rho}$ per un gas perfetto dipende dal tipo di trasformazione.

Per poter determinare $\frac{dp}{d\rho}$ dobbiamo ipotizzare un'equazione di stato per il fluido e poi una trasformazione.

Si definisce la velocità di un fluido diviso la velocità che ha il suono in quel fluido stesso come numero di Mach $Ma = \frac{w}{w_s}$

$Ma < 0.3$ moto incomprimibile

$0.3 < Ma < 0.6$ moto subsonico

$0.6 < Ma < 1.2$ moto transonico

$1.2 < Ma < 3$ moto supersonico

$Ma < 5$ moto ipersonico

Hip: GAS PERFETTI

$$\frac{p}{\rho} = RT \rightarrow p = RT\rho$$

Hip: Trasformazioni isotermi, $T = \text{cost}$;

È la prima trasformazione più semplice. La trasformazione del gas è il gas che entra ed esce attraverso l'onda sonora, è il volumetto che entra da destra ed esce da sinistra. Stiamo quindi parlando della trasformazione che questo gas compie tra l'ingresso a destra del fronte dell'onda sonora a sinistra.

$$\frac{dp}{d\rho} = RT \Rightarrow w_s = \sqrt{RT}$$

Però, confrontando la velocità del suono reale con questo valore, si osserva che \sqrt{RT} è troppo piccolo. È un valore più piccolo del valore reale che misuro come velocità del suono. Velocità del suono in un fluido che è considerato gas perfetto che però ha quel particolare R , cioè dal tipo di gas considerato.

Hip: Trasformazioni adiabatiche reversibili, $ds = 0$;

$$ds = c_p \frac{dv}{v} + c_v \frac{dp}{p}, \text{ con } v = \frac{1}{\rho} \rightarrow \frac{dv}{v} = - \frac{d\rho}{\rho}$$

$$c_v \frac{dp}{p} = c_p \frac{d\rho}{\rho} \rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{c_p}{c_v} \frac{d\rho}{\rho} \rightarrow \frac{dp}{\rho} = \frac{c_p}{c_v} \frac{p}{\rho}$$

$$\rightarrow \frac{dp}{d\rho} = kRT, \text{ con } k = \frac{c_p}{c_v} \text{ e } \frac{p}{\rho} = RT.$$

$$\Rightarrow w_s = \sqrt{kRT}$$

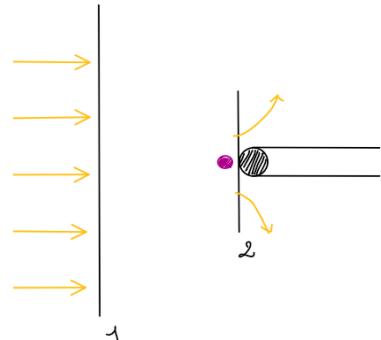
Questa espressione è maggiorata rispetto a quella precedente tramite $k = 1,14$; perché k è sempre maggiore di uno per tutti i gas.

Il gas che entrava e usciva a cavallo del fronte del suono in realtà non compie una isotermia ma compie un'adiabatica, non scambia calore con l'esterno.

Misura della temperatura di un fluido in moto

Il tubicino in figura è lo strumento di misura, è lo strumento che vuol misurare la temperatura. Nel caso delle termocoppie, la termocoppia era il giunto caldo che univa p ed n ; immaginiamo che in questo tubicino ci siano due fili molto sottili microscopici saldati e isolati elettricamente e messi in un altro tubo che costituisce lo strumento di misura, la punta piena è il giunto caldo della termocoppia per misurare la temperatura. Il giunto freddo sarà messo fuori mantenuto con acqua e ghiaccio.

Il fluido è nella sezione 1 e ha una certa velocità che si vuole misurare va a sbattere con la punta nella sezione 2; quando sbatte sul bordo dello strumento, si ferma e si ha il **ristagno**. La velocità diventa zero.



Questo problema si risolve con l'equazione di conservazione dell'energia per i sistemi aperti tra le sezioni 1 e 2:

$$q - l_f = h_2 - h_1 + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g(z_2 - z_1)$$

La sezione di ingresso è la 1 e la sezione finale è la 2, il sistema termodinamico è quello che c'è tra 1 e 2.

Dove l'ultimo termine è zero perché i baricentri delle due sezioni sono alla stessa quota inoltre $q = 0$ cioè supponiamo che la trasformazione sia adiabatica (in realtà non è zero perché c'è un meccanismo di trasmissione del calore che ancora non abbiamo visto che c'è anche in un fluido basta che non sia opaco che è l'irraggiamento termico). Anche $l_f = 0$ (non ci sono organi meccanici) e $w_2^2 = 0$ in corrispondenza del ristagno. L'entalpia del fluido nella sezione d ristagno è aumentata del carico cinetico.

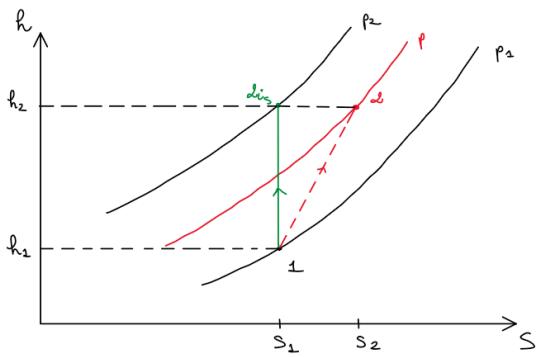
$$h_2 = h_1 + \frac{w_1^2}{2} \quad \text{Entalpia di ristagno} \quad (h_0 = h_s + \frac{w_1^2}{2})$$

L'entalpia del fluido nella sezione di ristagno 2 o 0 è aumentata del carico cinetico.

Con $\begin{cases} h_1: \text{Entalpia statica} \\ h_2: \text{Entalpia di ristagno} \end{cases}$

Rappresentiamo la trasformazione compiuta dal fluido nel diagramma hs :

vediamo le trasformazioni nel ristagno di un fluido; riportiamo le isobare p_1 e p_2 e lo stato iniziale all'entalpia h_1 .



ristagno.

La trasformazione in verde è l'arresto isoentropico; arresto adiabatico reale (irreversibile) curva tratteggiata in rosso.

Se vogliamo esprimere la pressione di ristagno dobbiamo utilizzare l'equazione di Bernoulli, dobbiamo fare delle ipotesi semplificative per ottenere delle equazioni semplici e l'ipotesi che facciamo è di fluido incompressibile, per cui possiamo integrare il $\frac{dp}{\gamma}$ che diventa $\frac{\Delta p}{\gamma}$

$$z_a + z_f + \frac{\Delta p}{\gamma} + \frac{\Delta w^2}{2g} + \Delta z = 0 \rightarrow \frac{p_0 - p_s}{\gamma} + \frac{w_0^2 - w_s^2}{2g} = 0$$

$$w_0 = 0; w_s = w$$

$$\Rightarrow \frac{p_0 - p_s}{\gamma} = \frac{w_s^2}{2g} \rightarrow p_0 = p_s + \gamma \frac{w^2}{2g} \rightarrow p_0 = p_s + \frac{\rho w^2}{2} = p_s + p_d$$

Definite come **pressione di ristagno**:

$p_s \rightarrow$ pressione statica

$p_d \rightarrow$ pressione dinamica

Nel caso reale c'è anche z_a :

$$z_a + \frac{\Delta p}{\gamma} + \frac{\Delta w^2}{2g} = 0 \rightarrow p_1 = p = p_s + \frac{\rho w^2}{2} - z_a \cdot \gamma = p_s + p_d - z_a \cdot \gamma$$

Diminuisce la pressione $p_1 = p$ come era possibile osservare dal diagramma. La pressione di ristagno reale è inferiore della pressione di ristagno della trasformazione reversibile.

Allora, l'effetto all'aumento di entropia fa sì che la pressione finale che raggiunge il fluido sia inferiore a p_2 poiché la compressione dinamica gioca sempre a sfavore.

Ora vogliamo determinare la **temperatura di ristagno T_2** ; (sempre misurata dallo strumento)

Se supponiamo $dh = c_p dT$, possiamo scrivere, supponiamo che il gas sia un gas perfetto:

$$h_2 - h_1 = c_p(T_2 - T_1)$$

$$\rightarrow T_2 = T_1 + \frac{h_2 - h_1}{c_p} \Rightarrow T_2 = T_1 + \frac{1}{c_p} \frac{w_1^2}{2} \quad (T_2 = T_0, T_1 = T_s)$$

Anche la temperatura aumenta, il fluido si ferma e quindi converte l'energia cinetica in entalpia e quindi in temperatura.

Se supponiamo la trasformazione 12 reversibile oltre che adiabatica, allora 12 sarebbe isoentropica e produrrebbe una compressione dinamica, dove la pressione aumenta a seguito dell'energia cinetica w_1 .

Però la trasformazione reale non è isoentropica, cioè non è reversibile a causa dell'attrito, quindi il punto 2 avrà una maggiore entropia s_2 ma stessa entalpia h_2 . È una trasformazione con una produzione entropica Δs_s , il punto finale avrà una entropia maggiore. Che cosa deve avere uguale? h_2 , perché non può crescere oltre il valore dell'entalpia di

Poi si può esprimere T_0 in funzione del numero di Mach;

scrivendo w in funzione della velocità del suono, $w = Ma \cdot w_s$ abbiamo che:

$$T_0 = T_s + \frac{Ma^2 w_s}{2c_p}$$

Vedi Lezione 18 P 05 MF

Calcolare $\frac{\rho_0}{\rho_s}$ serve a verificare l'ipotesi di comprimibilità o di incomprimibilità. Se quel rapporto si avvicina ad 1 significa che quel moto è incomprimibile.

Osservazione;

abbiamo supposto non ci siano scambi di calore, cioè condizioni adiabatiche, ma questo non è sempre vero. Infatti, esiste uno scambio di calore del solido con il fluido che gli scorre sopra e uno scambio di calore per irraggiamento con le pareti se il fluido è trasparente.

Allora, la temperatura reale T_{re} che si misura non è la temperatura di ristagno T_2 ma è corretta dal fattore di **recupero r** del termometro:

$$r = \frac{T_r - T_2}{T_2 - T_1} \rightarrow T_r = T_s + r(T_o - T_s) = T_s + r \frac{w_1^2}{2c_p}$$

Dove:

$T_s = T_1$ statica;

$T_o = T_2$ di ristagno;

T_r reale

Il fattore di recupero è un fattore sperimentale empirico pari alla radice del numero di Prandtl Pr :

$r = \sqrt{Pr}$, con $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ è il rapporto tra la viscosità e la diffusività termica (la vedremo nella trasmissione del calore). È un numero adimensionale. Per l'aria questo numero è molto vicino a 1 $\rightarrow 0,73$.

(ν è la diffusività di quantità di moto, mentre α è la diffusività di calore).

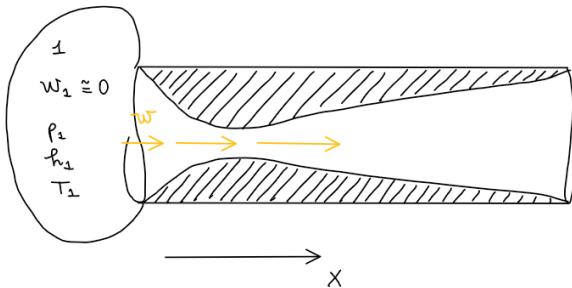
Il numero di Prandtl dipende dalle proprietà fisiche del fluido:

- Aria in condizione ambiente: $Pr = 0,7$ (vicino a 1)
- Olio: $Pr \gg 1$; nell'equazione va ad aumentare la temperatura reale
- Acqua: $Pr \cong 4 - 10$;
- Mercurio: $Pr \ll 1$; per i metalli liquidi, la temperatura reale è minore della temperatura di ristagno, avviene questo perché c'è uno scambio di calore, ed essendoci uno scambio di quantità di moto perché il fluido scorre ecco che l'espressione della temperatura di ristagno non è più corrispondente alla realtà.

Moto in condotti a sezione variabile con continuità

Sezione variabile con continuità, non è un brusco allargamento o diminuzione di sezione. Consideriamo un oggetto in cui la sezione non varia in maniera brusca che chiamiamo tubo di efflusso o ugello di efflusso che è ancora oggi progettato empiricamente facendolo similare all'efflusso libero che il fluido mostra quando esce da un foro:

Lo scopo di questo efflusso è quello di convertire l'energia interna ovvero l'entalpia del fluido nel contenitore a sinistra (fermo o quasi e con alta entalpia h_1) in energia cinetica \rightarrow il fluido esce con una velocità elevata.



Il fluido a sinistra ha velocità nulla, una elevata entalpia e possibilmente una elevata temperatura;

Se la velocità del fluido è bassa è simile al tubo di Venturi (che si usa per misurare la portata). Questo moto si usa per aumentare la velocità del fluido da zero a moti supersonici.

A destra del tubo c'è un contenitore con una pressione $p < p_1$. Si fa scorrere fluido da un punto a pressione maggiore a una a pressione minore. Moto sotto forti differenze di pressione.

Il tubo di efflusso non ha un restringimento brusco di sezione, anche se si restringe per un breve tratto e poi si allarga per un tratto più lungo, ma ha una forma che mima l'efflusso libero reale di un fluido all'uscita di un serbatoio (in cui per inerzia il flusso si restringe, raggiunge una sezione minima abbastanza vicino all'uscita e poi si riallarga); ovviamente l'efflusso libero reale è un moto naturale che quindi avviene con le minore irreversibilità possibili, minimizzando le perdite di pressione.

La sezione S varia con x : $S = S(x)$

- Bilancio di massa

$$G = wSp$$

$dG = 0 = wSdp + wpdS + \rho S dw$ supponiamo di essere a regime stazionario:

$$\begin{aligned} \frac{dG}{G} &= \frac{wSdp + wpdS + \rho S dw}{G} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dS}{S} + \frac{dw}{w} = 0 \end{aligned}$$

- Equazione di Bernoulli tra due sezioni distanti dx .

$$dz_a + dz_f + \frac{dy}{\gamma} + \frac{wdw}{g} + dz = 0$$

Dove $dz = 0$ se il condotto è orizzontale, altrimenti è trascurabile per un dx piccolo. $dz_a = 0$ suppongo che la progettazione sia stata simile all'efflusso libero, e se l'efflusso è libero un fluido scorre liberamente in modo da diminuire tutte le irreversibilità. $dz_f = 0$ e trascuriamo dz_a . Moltiplichiamo per g e otteniamo:

$$\frac{dp}{g\rho} + \frac{wdw}{g} = 0 \Rightarrow \frac{dp}{\rho} + wdw = 0$$

Consideriamo p funzione di ρ :

$$p = p(\rho) \rightarrow dp = \frac{dp}{d\rho} d\rho = w_s^2 d\rho$$

$$\left(w_s^2 = \frac{dp}{d\rho} \right)$$

$$\Rightarrow w_s^2 \frac{d\rho}{\rho} + wdw = 0$$

Mettiamo insieme i due risultati ed otteniamo:

$$\frac{dp}{\rho} = -\frac{ds}{s} - \frac{dw}{w} \rightarrow -w_s^2 \frac{ds}{s} - w_s^2 \frac{dw}{w} + wdw = 0$$

$$dw \left(w - \frac{w_s^2}{w} \right) = w_s^2 \frac{ds}{S}$$

$$dw \left(\frac{w}{w_s^2} - \frac{1}{w} \right) = \frac{ds}{S} \rightarrow \frac{dw}{w} \left(\frac{w^2}{w_s^2} - 1 \right) = \frac{ds}{S}$$

Introduciamo il **numero di Mach** come il rapporto tra la velocità del fluido w e la velocità' del suono nel fluido w_s :

$$Ma = \frac{w}{w_s}$$

Allora abbiamo ottenuto l'**equazione di Hugoniot**:

$$\frac{dw}{w} (Ma^2 - 1) = \frac{ds}{S}$$

Quali nuove informazioni ci da questa equazione?

Fino ad ora sapevamo che se la sezione S diminuisce, la velocità w aumenta e viceversa per un fluido con $\rho = \text{cost}$. Ora vediamo che succede quando nell'equazione di Hugoniot si verificano i seguenti casi:

- Se $w < w_s$, cioè se il MOTO è SUBSONICO,

$$Ma < 1 \rightarrow (Ma^2 - 1) < 0$$

$\rightarrow \frac{dw}{w}$ ha segno negativo mentre $\frac{ds}{S}$ è positivo e viceversa (hanno segno opposto)

\Rightarrow siamo di nuovo nelle condizioni del tubo di Venturi e se $S \uparrow w \downarrow$ e viceversa.

Cioè la velocità aumenta al diminuire della sezione e viceversa.

- Se $w > w_s$, cioè se il MOTO è SUPERSONICO,

$$Ma > 1 \rightarrow (Ma^2 - 1) > 0$$

$\rightarrow \frac{dw}{w}$ e $\frac{ds}{S}$ hanno lo stesso segno

\Rightarrow se $S \uparrow w \uparrow$ e se $S \downarrow w \downarrow$.

- Se $w = w_s$, $Ma = 1 \rightarrow (Ma^2 - 1) = 0$ (MOTO SONICO)

$$\rightarrow \frac{ds}{S} = 0, \text{ ma } S = S(x)$$

\Rightarrow la sezione può avere un massimo o un minimo.

Nel serbatoio la velocità è zero, ma questa non può passare da zero ad una velocità supersonica, quindi all'inizio sarà una velocità subsonica. Infatti deve essere subsonica, perché così al diminuire della sezione aumenta la velocità. Se fosse supersonica al diminuire della sezione diminuirebbe anche la velocità. Quindi il fluido nella parte del tubo di efflusso dove la sezione diminuisce si chiama **convergente dell'ugello di efflusso**, mentre la parte dove la sezione aumenta è il **divergente**. Il punto dove la sezione è minima si chiama **gola del tubo di efflusso**.

Poiché in ingresso dal serbatoio $w_1 \approx 0$ ed è necessario un convergente, è chiaro che il moto inizialmente è subsonico e il primo estremo è un minimo.

La sezione di area minima si chiama gola dell'ugello e lì si ha la velocità del suono: $w = w_s$.

In un ugello di efflusso se siamo in grado di ottenere la velocità del suono, cioè il moto sonico, questo moto sonico avviene in gola, cioè nella sezione di area minima. Poi se siamo in grado di avere una velocità supersonica, la velocità supersonica avviene nel divergente. Nel tubo di efflusso che è fatto da convergente, gola e divergente avremo che nel convergente ci sarà una velocità subsonica che arriverà ad una velocità massima, se siamo in grado di raggiungere la velocità del suono questa viene raggiunta nella gola e se siamo in grado di raggiungere una velocità supersonica questa viene raggiunta nel divergente.

Vediamo qual è la condizione in base alla quale posso avere o meno la velocità del suono?

N.B.: il fatto che $Ma = 1$ non è una condizione sufficiente per avere la velocità del suono nella gola dell'ugello.

Il moto sonico avviene in gola cioè nella sezione di aria minima. La velocità supersonica avviene nel divergente. Nel convergente avremo sicuramente una velocità subsonica.

Cerchiamo questa condizione **sufficiente** dall'equazione di conservazione dell'energia tra due sezioni generiche 1 e 2 affinché io abbiano una velocità maggiore del suono:

$$q - l_f = h_2 - h_1 + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g(z_2 - z_1)$$

w_1 trascurabile, la quota si mantiene costante; $q = 0$ ed $l_f = 0$.

$$\rightarrow \frac{w_2^2}{2} = h_1 - h_2 \Rightarrow w_2 = \sqrt{2(h_1 - h_2)}$$

Allora la condizione sufficiente per avere velocità w_2 molto elevata e pari a w_s o supersonica è che ci sia un salto di entalpia sufficiente (se $h_1 - h_2$ è piccolo, w_2 è piccolo).

La velocità w_2 è la **velocità massima** che si può ottenere nella generica sezione 2. *

Osservazione;

- Se $w_2 < w_s$, il moto è subsonico, non si applica Hugoniot e il fluido si comporta come nel tubo di Venturi.
- Se $w_2 = w_s$, poiché c'è un salto di entalpia sufficiente, allora secondo Hugoniot la velocità del suono si ha nella gola dell'ugello.
- Se $w_2 > w_s$, poiché $h_1 - h_2$ è molto elevato, allora secondo Hugoniot la velocità ultrasonica si ha nel divergente dove $S \uparrow$ e la velocità può superare la velocità del suono w_s , ma non può mai superare il valore di w_2 .

Le condizioni in base alle quali la velocità è uguale alla velocità del suono si chiamano **condizioni critiche**;

L'**Entalpia critica** h_{2c} è il valore di entalpia tale che $(h_1 - h_{2c})$ dia una velocità w_2 pari alla velocità del suono:

$$h_{2c} \text{ t.c. } w_2 = \sqrt{2(h_1 - h_{2c})} = w_s$$

Quando siamo in condizioni di entalpia critica $h_2 = h_c$ il salto di entalpia $(h_1 - h_{2c})$ è tale che la velocità w_2 sia pari alla velocità del suono w_s :

$$w_s = \sqrt{2(h_1 - h_{2c})} = \sqrt{2h_1 \left(1 - \frac{h_c}{h_1}\right)}$$

Invece, se $h_2 < h_c$ otteniamo una velocità maggiore di w_s , cioè supersonica: $w_2 > w_s$

Vogliamo ricavare le condizioni critiche che determinano la velocità del suono.

* Se il gas è perfetto, $\Delta h = c_p \Delta T$ quindi possiamo scrivere w_2 in funzione del salto di temperatura dove la temperatura T_1 di ingresso è supposta nota:

$$w_s = \sqrt{2c_p(T_1 - T_2)} = \sqrt{2c_p T_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)}$$

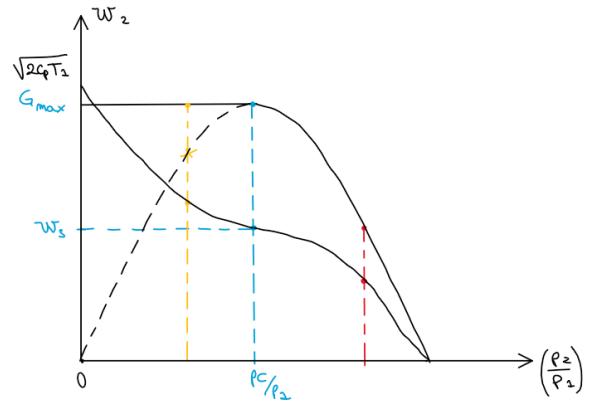
La velocità nella sezione di uscita dipende dal gas, dalla temperatura iniziale e dipende dal rapporto tra le temperature.

Inoltre, se consideriamo una trasformazione adiabatica ed anche reversibile, per la trasformazione isoentropica possiamo mettere in relazione il salto di temperatura con il salto di pressione:

$$\frac{T_1}{p_1^\alpha} = \frac{T_2}{p_2^\alpha}, \text{ con } \alpha = \frac{k-1}{k} \rightarrow w_s = \sqrt{2c_p(T_1)} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^\alpha\right]^{\frac{1}{2}}$$

Facciamo un grafico della velocità w_2 in funzione di $\frac{p_2}{p_1}$.

- Se $\frac{p_2}{p_1} = 1 \rightarrow w_2 = w_1 = 0$ se la pressione all'uscita del tubo di efflusso è uguale a quella che c'era nel contenitore non scorre nulla, il fluido rimane fermo. La velocità aumenta al diminuire della pressione p_2 , ovvero al diminuire di $\frac{p_2}{p_1}$, vedi curva iperbolica.
- Se $p_2 = 0$ il fluido si espande nel vuoto $\rightarrow w_2 = w_{max} = \sqrt{2c_p(T_1)}$ raggiungo il valore massimo.
- Per tutti gli altri valori intermedi l'andamento è quello in figura si ha un flesso all'incirca in corrispondenza di $\frac{p_2}{p_1} \cong \frac{1}{2}$.



Nel grafico non considerare la parabola che rappresenta G in funzione di $\frac{p_2}{p_1}$.

La pressione non può diminuire perché non ci sono dei buchi nelle pareti del tubo di efflusso.

Ora con la velocità w_2 vogliamo ricavare la portata del fluido che scorre nel tubo:

$$\begin{array}{c}
 G = w_2 S_2 \rho_2 = \frac{p_2}{RT_2} S_2 \sqrt{2c_p T_1} \cdot \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^\alpha\right]^{\frac{1}{2}} = \\
 \boxed{\frac{p_2}{\rho_2} = RT_2} \qquad \qquad \boxed{\text{Sostituisco } T_2 \text{ con l'isoentropica}}
 \end{array}$$

$$= \frac{S_2 \sqrt{2c_p T_1}}{R} p_1 \frac{\frac{p_2}{p_1}}{T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^\alpha} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^\alpha\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{S_2 \sqrt{2c_p T_1}}{RT_1} p_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\alpha} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^\alpha\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$\Rightarrow G = \text{cost} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{k}} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\alpha \right]^{\frac{1}{2}}$$

Questa è l'espressione analitica della portata in funzione di $\frac{p_2}{p_1}$ e dei valori noti in ingresso.

Osserviamo che $G = 0$ sia in $\frac{p_2}{p_1} = 0$ che in $\frac{p_2}{p_1} = 1$; allora, se questa funzione ha due zeri allora per il teorema di Rolle ha certamente un massimo e un minimo tra 0 e 1.

Al diminuire del rapporto la velocità aumenta e aumenta la portata, abbiamo un tubo di efflusso che ha due fori all'ingresso e all'uscita, quello che entra nella sezione 1 esce nella sezione 2. Se ho raggiunto il punto di portata in alto (il massimo), come è possibile fisicamente che diminuendo ancora la pressione io abbia una diminuzione della portata? Quando si avrebbe una riduzione della portata nella sezione finale? Se ci fosse un buco nel tubo, ma siccome non ci sono buchi non può diminuire la portata, ma rimane quella massima che avevo in corrispondenza del flesso.

L'andamento con la linea tratteggiata (parabola) è l'andamento teorico che verrebbe dall'espressione analitica, il ragionamento fisico invece mi porta a dire che questo non va bene, perché la portata non può diminuire ma deve rimanere costante. La pressione non può diminuire perché non ci sono dei buchi nelle pareti del tubo di efflusso.

Cerchiamo il massimo di G che riscriviamo in maniera più semplice:

$$G \propto x^{\frac{1}{k}} [1 - x^\alpha]^{\frac{1}{2}} \text{ con } x = \frac{p_2}{p_1}$$

$$\frac{dG}{dx} = 0 = \frac{1}{k} x^{\frac{1}{k}-1} [1 - x^\alpha]^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{k}} \cdot \frac{1}{2} [1 - x^\alpha]^{-\frac{1}{2}} (-\alpha) x^{\alpha-1}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{k} x^{\frac{1}{k}-1} [1 - x^\alpha] = \frac{x^{\frac{1}{k}-1}}{k} - \frac{1}{k} x^{\frac{1}{k}-1+1-\frac{1}{k}} = \frac{x^{\frac{1}{k}-1}}{k} - \frac{x}{k}$$

$$\frac{k-1}{2k} + \frac{1}{k} = \frac{x^{\frac{1}{k}-1}}{k} \rightarrow \frac{k-1+2}{2k} = \frac{k+1}{2k} = \frac{x^{\frac{1}{k}-1}}{k}$$

$$\Rightarrow x^{\frac{1}{k}-1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{k}-1} = \frac{k+1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{k+1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\alpha$$

$$\text{Con } \alpha = \frac{k-1}{k}$$

Questo è il valore di $\frac{p_2}{p_1}$ che rende massima la portata G .

N.B.: si può dimostrare che questo valore corrisponde al valore in corrispondenza del quale si ha la velocità del suono w_s , cioè nel punto di flesso dell'andamento della velocità w_2 .

$$\Rightarrow \left(\frac{p_c}{p_1} \right) = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Inoltre poiché $\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\alpha = \frac{T_2}{T_1}$ quindi conosciamo anche la temperatura critica:

$$\frac{T_c}{T_1} = \frac{2}{k+1}$$

In definitiva le condizioni critiche di pressione sono quelle che corrispondono al massimo della portata e alla velocità del suono w_s .

Osservazioni;

- Se $\frac{p_2}{p_1} = 1 \rightarrow w_2 = w_1 = 0$ e $G = 0$ (non c'è flusso)
- Se $\frac{p_2}{p_1}$ diminuisce cioè se p_2 diminuisce $\rightarrow w_2 < w_s$ e $G < G_{max}$, e al diminuire di p_2 aumentano sia la portata che la velocità.
- Però se $\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_c}{p_1}$ (cioè se $p_2 = p_c$) $\rightarrow w_2 = w_s$ e $G = G_{max}$
- Se $\frac{p_2}{p_1}$ diminuisce ancora $\rightarrow w_2 > w_s$ cioè velocità supersonica \rightarrow al diminuire di p_2 la velocità aumenta.

E G diminuisce? Non è possibile perché il contorno del tubo è chiuso!

Quindi, il ramo di sinistra della portata è sbagliato dal punto di vista fisico, nonostante sia stato ricavato correttamente in maniera analitica.

\Rightarrow la portata G non può diminuire e continua costantemente pari a G_{max} per $p_2 < p_c$.

Significato fisico

Immaginiamo di prendere solo il convergente di un tubo di efflusso, dopo la gola viene messa una pompa a vuoto che diminuisce via via la pressione in uscita.

Per studiare cosa accade nel convergente, in uscita da questo ci mettiamo un allargamento di sezione brusco pari alla sezione iniziale, con una pompa a vuoto che diminuisce la pressione in uscita p_u (p_b è la sezione della pompa).

Studiamo l'andamento della pressione $\frac{p}{p_i}$ (con p_i pressione di ingresso) al variare della coordinata assiale x del convergente.

- Se $p_b = p_u = p_i \rightarrow \frac{p}{p_i} = 1$ e il fluido non scorre, proprio perché la pressione rimane costante.
- Se la pressione della pompa diminuisce questo si riflette su p_u , per studiare l'andamento nel convergente riscriviamo l'equazione di Bernoulli dove banalmente $z = \text{cost}$ perché consideriamo il condotto orizzontale:

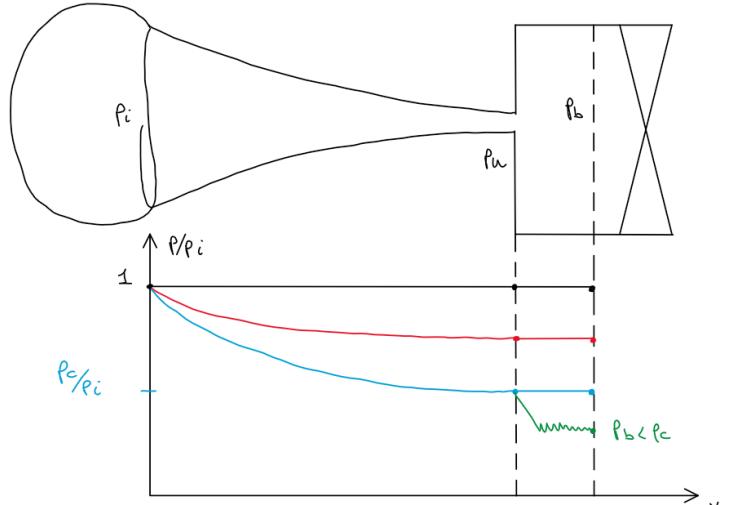
$$\frac{p}{\gamma} + \frac{w^2}{2g} + z = \text{cost};$$

allora vediamo che a doversi bilanciare tra loro sono l'energia cinetica del fluido e il carico piezometrico.

Quindi, poiché sappiamo che la velocità aumenta nel convergente (perché la sezione diminuisce), allora la pressione deve diminuire. Diminuisce sempre di più al diminuire della pressione di uscita.

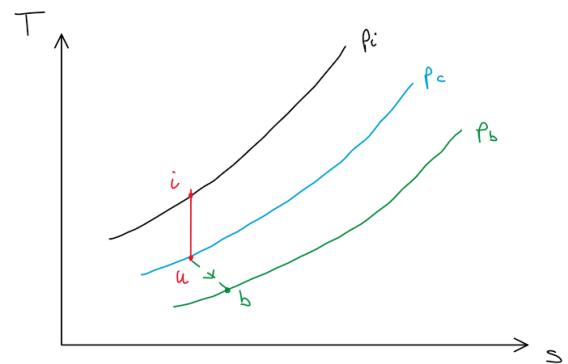
- Però se $p_u = p_c$ otteniamo $w_u = w_s$, cioè che la velocità aumenta nel convergente fino alla velocità del suono, e quindi la pressione ancora deve diminuire.

Nel diagramma $T-s$ possiamo vedere che cosa avviene.



La trasformazione adiabatica, supposta reversibile, è un'isoentropica tra la pressione p_i e la pressione $p_c < p_i$.

- Se diminuisce la pressione della pompa al di sotto della pressione critica, cioè se $p_b < p_c$ poiché nel brusco allargamento di sezione ci sono delle perdite di pressione concentrate molto elevate, la trasformazione non è più reversibile ma è irreversibile da $p_u = p_c$ e $p_b < p_c$ rappresentate con delle oscillazioni.



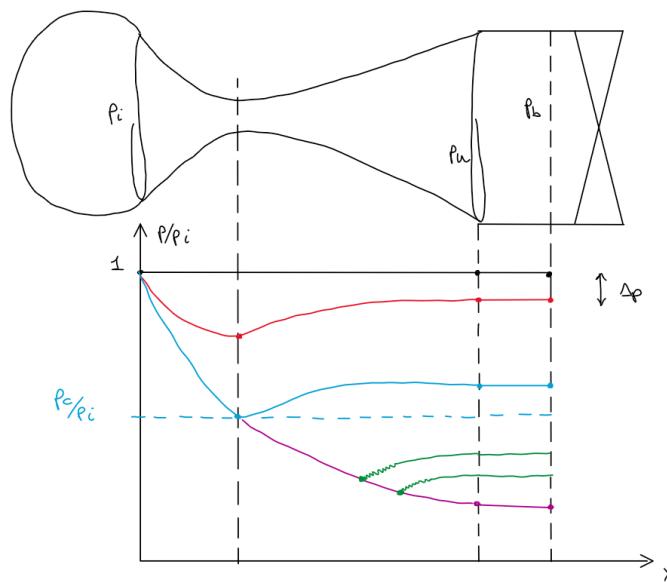
Vediamo come si riporta questo negli andamenti di pressione.

È chiaro che, poiché vale l'equazione di Hugoniot, nella sezione di area minima si ha sempre la velocità del suono qualsiasi sia la pressione $p_b < p_c$, e l'andamento è lo stesso di prima nel convergente.

Invece, nella pompa a vuoto l'andamento irreversibile è schematizzato con delle oscillazioni.

N.B.: fino ad ora abbiamo osservato solo ciò che succede nell'intervallo $\frac{p_c}{p_i} \leq \frac{p}{p_i} \leq 1$ cioè nel tratto del convergente.

Nel tubo di **DE LAVAL** possiamo studiare anche ciò che avviene sia nel convergente che nel divergente.



C'è un contenitore che ha un fluido con pressione p_i , poi c'è un convergente, poi c'è la gola e poi c'è il divergente e poi c'è una pompa a vuoto che diminuisce la pressione.

Vediamo che succede quando la pressione diminuisce al valore rosso; siccome c'è un salto di pressione tra ingresso e uscita c'è moto di fluido, che aumenta la sua velocità nel convergente, la pressione quindi per Bernoulli diminuisce. Non siamo ancora in condizione di raggiungere la velocità del suono; avremo quindi una velocità massima in corrispondenza della gola e poi dopo la gola la sezione aumenta, quindi siccome siamo rimasti in moto subsonico, quando la sezione aumenta la velocità diminuisce → la pressione riaumenta. Δp è la caduta di pressione dovuta alle perdite distribuite che il fluido incontra nel convergente e nel divergente.

Fino a che la pressione non raggiunge il valore critico sono sempre in moto subsonico, quindi tutte le curve fino a quella in azzurro saranno come la curva rossa, diminuzione di pressione e riaumento della pressione. Supponiamo di diminuire la pressione in modo che la pressione che il fluido raggiunge nella gola è esattamente la pressione critica, allora la velocità massima che il fluido raggiunge è la velocità del suono (Hugoniot).

ci dice che viene raggiunta nella gola). Siccome la pressione minima è la pressione critica, non posso raggiungere una velocità supersonica, ma al massimo la velocità sonica.

Appena il fluido passa la gola il moto da sonico ritorna ad essere subsonico e quindi nel divergente la velocità diminuisce perché la sezione aumenta e la pressione riaumenta.

Ora supponiamo di diminuire la pressione con la pompa a vuoto in modo che la velocità che il fluido può raggiungere sia supersonica e uguale ad un certo valore. Hugoniot ci dice che anche se a valle della gola la velocità è supersonica, nella gola c'è sempre la velocità sonica, quindi il salto di pressione tra la p_i e la p_c che mi dà la velocità sonica nella gola è sempre la stessa. Scendendo ancora di pressione sotto p_c nel convergente abbiamo sempre la stessa curva di diminuzione della pressione, è diverso il fatto che dopo la gola il fluido può continuare ad aumentare la sua velocità fino ad arrivare ad un certo valore di velocità supersonica. In moto supersonico, all'aumento di sezione, ovvero nel divergente aumenta anche la velocità e la pressione diminuisce; ad un certo punto si raggiunge la velocità massima supersonica possibile. A quel punto si ritorna bruscamente alle condizioni subsoniche, ma ci si torna attraverso un salto di compressione (rappresentato con delle instabilità). Poiché siamo in condizioni subsoniche e siamo nel divergente la velocità diminuisce e la pressione aumenta.

Più diminuisco la pressione in uscita più aumenta la velocità supersonica che posso raggiungere, aumenta lo spazio x nel divergente in cui il moto è supersonico.

Qual è la condizione ottimale?

L'obiettivo ingegneristico era quello di aumentare la velocità del fluido, quindi l'obiettivo è raggiungere la massima velocità possibile, cioè il completo adattamento del tubo di De Laval all'obiettivo di aumentare la velocità.

- Se $p_b = p_u = p_i \rightarrow \frac{p}{p_i} = 1$ e il fluido non scorre.
 - Se p_b diminuisce questo si riflette su p_u e, come prima, nel convergente aumenta la velocità e diminuisce la pressione, ma non tanto da raggiungere p_c , quindi siamo in moto subsonico; allora il massimo della velocità si raggiunge nella sezione di area minima, cioè nella gola, ($\neq w_s$) e poi la velocità ridiminuisce nel divergente e cioè riaumenta la pressione.
- N.B.: il recupero della pressione nel divergente non è completo, poiché c'è una caduta di pressione dovuta alle perdite di pressione distribuite.
- Però, se in corrispondenza della gola $p = p_c$ per l'equazione di Hugoniot sappiamo che lì si raggiunge la velocità del suono, ma non maggiore, e quindi subito dopo nel divergente la velocità torna a diminuire e la pressione aumenta di nuovo.
 - Se diminuiamo p_b in modo tale che la pressione p_u permetta di raggiungere la massima velocità supersonica possibile ($w_u = \sqrt{2c_p T_1}$) in uscita, nel convergente abbiamo la stessa situazione di prima per cui aumenta la velocità fino a w_s nella gola e diminuisce la pressione fino a p_c , invece nel divergente possiamo superare la velocità del suono (poiché la sezione aumenta) secondo Hugoniot e allora di conseguenza deve diminuire la pressione secondo Bernoulli → regime supersonico.

Se siamo in condizioni tali che w_u è la massima velocità supersonica nella sezione di uscita dal divergente, allora vuol dire che la velocità è sempre aumentata nel divergente e quindi la pressione è sempre diminuita.

- Se $p < p_{min}$ ma $p < p_c$ e $w > w_s$ ma $w < w_{max}$, la pressione nel divergente diminuisce fino ad un certo punto (corrispondente all'aumento della velocità però non fino alla massima), poi a causa delle perdite per attrito la velocità diminuisce fino a tornare ad essere subsonica e quindi la pressione aumenta.

Si verifica quello che viene definito **shock** poiché a monte c'è una velocità supersonica e a valle una velocità subsonica e tra le due sezioni avviene un urto, questo si rappresenta con delle oscillazioni.

Oscillazioni shock per compressione.

11-11.-21

Petracci

Settimana 9

16-11-21

Moti comprimibili in condotti a sezione costante → domanda per il 30 e lode

Moto di Rayleigh

Supponiamo che il moto si comprimibile, in un condotto a sezione costante orizzontale, in assenza di attrito, e in cui c'è uno scambio di calore:

$$dz = 0, dz_a = 0, dq \neq 0 > 0 \text{ (il fluido si riscalda)}$$

- Conservazione dell'energia:
 $dq - dl_f = dh_a + de_c + de_p \rightarrow dq = dh_a$ (ristagno)
- Equazione di Bernoulli:
 $\frac{dp}{\gamma} + \frac{dw^2}{2g} + d\zeta + dz_a + dl = 0 \rightarrow \frac{dp}{\gamma} + \frac{dw^2}{2g} = 0$

Risolvendo queste equazioni, si ottengono le seguenti osservazioni:

- Se $Ma < 1$ (moto subsonico) e il fluido si scalda, $Ma \uparrow$, cioè Ma deve aumentare
- Se $Ma > 1$ (moto supersonico) e il fluido si scalda, $Ma \downarrow$, cioè Ma deve diminuire

Nel diagramma Ts si ottiene la seguente curva:

- Se $Ma < 1$ nel riscaldamento del fluido la temperatura e l'entropia aumentano fino a $Ma = \sqrt{\frac{1}{k}}$.
Se si scalda ancora, la temperatura diminuisce e l'entropia aumenta fino a $Ma = 1$.
- Se $Ma > 1$ nel riscaldamento la temperatura e l'entropia aumentano fino a $Ma = 1$.

Tracciamo l'andamento di $\frac{\Delta s}{cp}$ in funzione di $\frac{h}{h_s}$ (h_s : entalpia del suono).

Moto di Fanno

Supponiamo che il moto sia ancora comprimibile, in un condotto a sezione costante orizzontale, dove non c'è scambio di calore e in presenza di attrito:

$$dz = 0, dq = 0 \text{ e } dz_a \neq 0$$

- Equazione di Bernoulli
$$\frac{dp}{\gamma} + \frac{dw^2}{2g} + \lambda \frac{w^2 dx}{2g D} + dz + dl = 0$$

dz_a dovute alle perdite di pressione distribuite
- Conservazione dell'energia
 $d\bar{q} - d\bar{l}_f = dh + de_c + d\bar{e}_p \rightarrow c_p dT + w dw = 0$

Nel diagramma Ts si ottiene la seguente curva:

- Se $Ma < 1$ (moto subsonico) a causa delle irreversibilità, $Ma \uparrow$.
- Se $Ma > 1$ (moto supersonico) a causa delle irreversibilità, $Ma \downarrow$.

Inoltre l'andamento di $\frac{\Delta s}{cp}$ in funzione di $\frac{h}{h_s}$ è quello riportato.

Moto isotermo

Supponiamo che il moto sia ancora comprimibile, in un condotto a sezione costante orizzontale, in presenza di attrito e con temperatura costante:

$$dz_a \neq 0, T = \text{cost}$$

Questo è un caso particolare, intermedio tra i due precedenti.

Possiamo considerare il moto con compressione dinamica per urto, in cui si studia quello che avviene quando si incontrano due sezioni, una con moto supersonico e una con moto subsonico → si ha un urto che chiamiamo **shock**.

Poiché il moto reale ha certamente l'attrito $dz_a \neq 0$, a causa delle irreversibilità, e anche scambi di calore $dq \neq 0$, allora il moto di compressione dinamica deve obbedire allo stesso tempo al moto di Rayleigh e al moto di Fanno.

Allora nel diagramma sovrapponiamo le due curve e il moto supersonico lo individuiamo nell'intersezione tra i due rami subsonici.

Il fluido compie la trasformazione irreversibile che tramite la compressione per urto lo porta dal moto supersonico al moto subsonico.

Si ha un aumento di entropia e un aumento di temperatura.

Termocinetica (Trasmissione del calore)

Termocinetica → vediamo il tempo; la trasmissione del calore la vediamo distinta in tre parti:

- Conduzione del calore
- Irraggiamento termico
- Convezione

È bene tenerli distinti.

Conduzione;

Avviene con un qualsiasi meccanismo microscopico che è presente nei corpi, siano essi solidi, liquidi o aeriformi. È un meccanismo microscopico che avviene nei corpi (solidi, liquidi o aeriformi) quando gli si applica una differenza di temperatura e che determina il passaggio di calore dalle zone a temperatura maggiore a quelle a temperatura minore e dopo un certo tempo la temperatura si uniforma → è avvenuta una trasmissione di calore nel corpo. Nel vuoto non ci può essere conduzione.

Il primo formulatore di questa legge fu Fourier, secondo cui il calore scambiato \dot{Q} [W] era proporzionale al gradiente di temperatura rispetto ad una normale tramite la sezione di passaggio e una costante k da definire:

$$\dot{Q} = -kS \frac{dT}{dx}$$

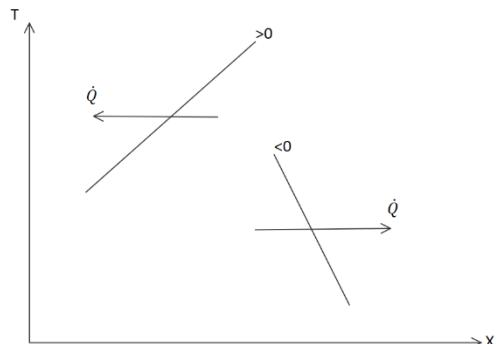
Così individuiamo il verso del calore tramite la normale ad una isoterma. n → normale all'isoterma.

S → quantità di superficie coinvolta; k → conduttività termica del materiale, è collegato con le caratteristiche microscopiche.

Il segno negativo ci dice che il calore va dal corpo a temperatura maggiore a quello a temperatura minore;

Consideriamo il caso monodimensionale $n = x$;

- Se $\frac{dT}{dx} > 0$ cioè se la pendenza è positiva, il calore va nel verso in figura (da dx verso sx) e per questo nella formula c'è il meno per indicare il verso negativo delle x . $\dot{Q} < 0$.
- Se $\frac{dT}{dx} < 0$ il calore va nel verso positivo delle x . Se la temperatura diminuisce con x . Il $\dot{Q} > 0$.

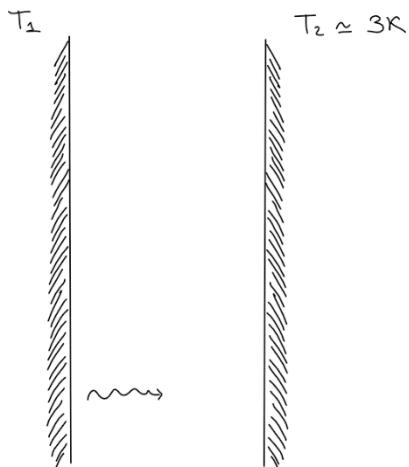


La legge di Fourier (legge fisica) è soprattutto una legge di definizione del coefficiente k che chiamiamo **conduttività termica o di calore**, le cui dimensioni sono:

$$[k] = \frac{W}{mk}$$

I metalli con k elevatissimo sono i solidi metallici (il più elevato è il platino), poi ci sono le leghe metalliche, poi i solidi non metallici, poi i liquidi metallici, poi i liquidi non metallici, poi l'acqua, poi gli aeriformi fino all'aria → l'aria è l'isolante con la conduttività termica più piccola. L'acciaio non è un buon conduttore di calore il rame sì.

Irraggiamento termico; è la trasmissione del calore che avviene nel vuoto. Ha una origine microscopica completamente diversa, mentre la conduzione è basata sull'urto tra molecole o atomi, l'irraggiamento è presente anche nel vuoto, quindi questo meccanismo si considera di tipo elettromagnetico.



ad esempio, una navicella spaziale a temperatura T_1 nel vuoto dove l'intero universo è a $T_2 = 3 K$ la navicella si raffredda. L'universo non si trova allo zero assoluto ma a $3 K$ (condensazione dell'elio liquido). Anche se c'è il vuoto tra due pareti, per irraggiamento il corpo più caldo diminuisce la sua temperatura e tende alla temperatura dell'altro corpo. L'effetto è come la trasmissione del calore.

Però non si raffredda per conduzione poiché non c'è un mezzo interposto, ma si raffredda a causa di un meccanismo onda-particella.

Il corpo a temperatura maggiore produce un'onda elettromagnetica di origine termica che tende a disperdere calore.

L'effetto è simile alla conduzione del calore perché le due temperature si uniformano.

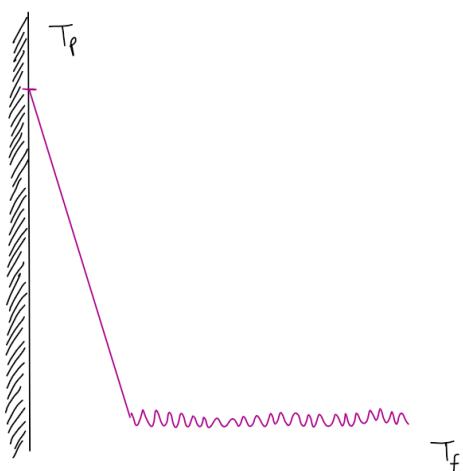
Convezione;

è un meccanismo combinato di trasmissione di calore tra un corpo solido e un fluido, il primo a temperatura T_p e il secondo a temperatura T_f . Per noi è un meccanismo distinto. Sfrutta le leggi della fluidodinamica per trasportare calore, in realtà oltre al moto del fluido c'è anche la conduzione del calore e se il fluido è trasparente si ha anche irraggiamento termico, se il fluido è opaco non c'è irraggiamento termico.

Newton propose la prima legge del raffreddamento per convezione secondo cui il calore scambiato tra un fluido e una parete è pari a:

$\dot{Q} = hS(T_p - T_f)$ legge empirica, perché h è un parametro empirico. Differenza di temperatura tra parete e fluido.

h → **coefficiente di convezione**, non è un parametro fisico. Si parla di due tipi di convezione, convezione forzata oppure di convezione libera o natura quando il fluido si muove solo grazie alla gravità.



Se $T_p > T_f$ l'andamento qualitativo è quello in figura dove la maggior parte della caduta di temperatura avviene nello strato di fluido accanto alla parete (**strato limite termico**) e poi la temperatura è quasi costante. In fluidodinamica parliamo di strato limite dinamico.

Osservazione;

la convezione è un meccanismo combinato poiché tra le pareti e il fluido avviene la conduzione del calore, poi se il fluido si muove entrano in gioco le leggi della fluidodinamica e se il fluido è trasparente avviene l'irraggiamento.

Conduzione monodimensionale in geometria piana

Distribuzione di temperatura in una parete o in uno strato di metallo, liquido o gas.

Consideriamo una parete piana infinitamente estesa verso l'alto e verso il basso, che ha due differenti temperature T_1 e T_2 sulle due facce a distanza L . Normale x .

Le isoterme sono dei piani paralleli ad S cioè perpendicolari ad x .

Supponiamo che il regime sia stazionario, cioè che le temperature siano costanti nel tempo, così che il flusso di calore \dot{Q} è lo stesso in ogni sezione x :

$$\dot{Q} = \text{cost in } x$$

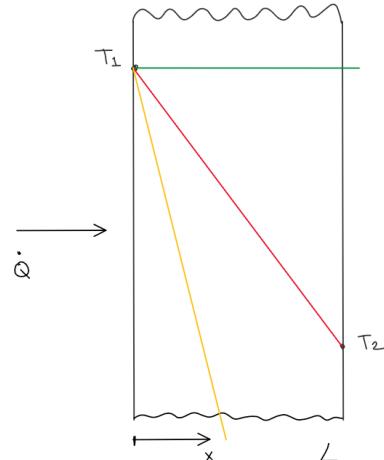
Allora, supponendo noto \dot{Q} separiamo le variabili nell'equazione di Fourier ed integriamo:

$$\dot{Q} = -kS \frac{dT}{dx} \rightarrow \dot{Q} dx = -kSdT$$

$$\int_0^L \dot{Q} dx = \int_{T_1}^{T_2} kSdT \text{ con } \dot{Q} = \text{cost e } k = \text{cost}$$

$$\dot{Q}L = -kS(T_2 - T_1) \Rightarrow \dot{Q} = \frac{kS}{L}(T_2 - T_1)$$

È una funzione lineare, come lo era nella convezione della differenza di temperatura.



In questo modo siamo patiti dall'equazione di Fourier in cui l'effetto cioè \dot{Q} non è proporzionale alla differenza di un potenziale come nel caso di Newton, ma è proporzionale ad un gradiente di un potenziale.

Invece con questo procedimento abbiamo ricondotto \dot{Q} proporzionale alla differenza di temperatura ($T_2 - T_1$) è la causa dello scambio di calore.

La proporzionalità tra causa ed effetto è una conduttività che se fosse il reciproco sarebbe una resistenza al passaggio di corrente.

Osservazione;

se lo stesso calore \dot{Q} avviene in materiali con conduttività k diverse, le temperature T_1 e T_2 saranno tali che $T_1 - T_2$ moltiplicato per il diverso k dia lo stesso calore:

$$\dot{Q} = \frac{k'S}{L}(T'_1 - T'_2) = \frac{k''S}{L}(T''_1 - T''_2)$$

Allora, a seconda del materiale imposto il calore si trovano dei ΔT diversi.

In particolare se k è piccolo il ΔT tra le due facce è maggiore, mentre se k è molto grande il ΔT tra le due facce è molto piccolo.

In definitiva, a parità di \dot{Q} ; $\Delta T \rightarrow 0$ se $k \rightarrow \infty$ (quando bolliamo l'acqua in una pentola di rame)

Infatti, riprendendo la legge di Fourier con le variabili separate ed integrando fino alla generica x si ottiene T in funzione di x :

$$\int_0^x \dot{Q} dx = - \int_{T_1}^T kSdT$$

$$\dot{Q}x = -ks(T - T_1) \Rightarrow T = T_1 - \frac{\dot{Q}}{kS}x$$

T dipende solo dalla coordinata $x \rightarrow$ monodimensionale. La temperatura diminuisce linearmente.

Se k è costante la temperatura diminuisce linearmente con x .

Dalla pendenza dell'andamento della temperatura si può subito capire se il materiale è altamente conduttivo o poco conduttivo:

- Se $k \rightarrow \infty$ (altamente conduttivo), $\Delta T \rightarrow 0$
- Se $k \rightarrow 0$, $\Delta T \rightarrow \infty$

Analogia elettrica.

Conduzione monodimensionale in geometria cilindrica

Consideriamo un cilindro cavo vuoto che sulla superficie cilindrica di raggio R_1 è alla temperatura T_1 e sulla superficie di raggio R_2 è alla temperatura T_2 .

La temperatura è uniforme su ogni superficie cilindrica.

Supponiamo che le isoterme siano delle superfici cilindriche anch'esse di raggio generico, e quindi il flusso di calore \dot{Q} è sempre normale alla superficie isoterma. La temperatura varia solo con il raggio, non con L .

Riprendiamo la legge di Fourier, separiamo le variabili ed integriamo:

$$\dot{Q} = -kS \frac{dT}{dr} \text{ supponiamo sempre } \dot{Q} \text{ fissato;}$$

$$\dot{Q} \frac{dr}{S} = -kdT \rightarrow \dot{Q} \frac{r}{2\pi r L} = -kdT \rightarrow \dot{Q} \frac{dr}{r} = -2\pi k L dT$$

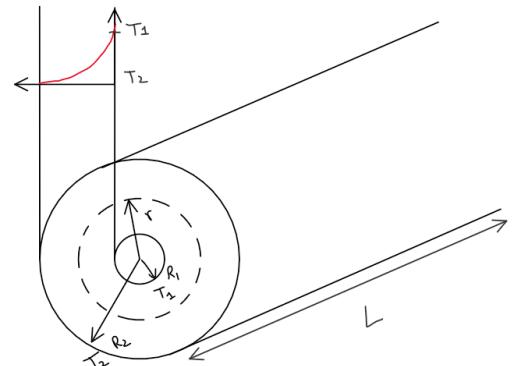
$$\int_{R_1}^{R_2} \dot{Q} \frac{dr}{r} = - \int_{T_1}^{T_2} 2\pi k L dT \rightarrow \dot{Q} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = -2\pi k L (T_2 - T_1) \text{ in cui } \dot{Q} = \text{cost quindi posso portarlo fuori;}$$

$$\Rightarrow \dot{Q} = \frac{2\pi k L}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \cdot (T_1 - T_2)$$

Di nuovo abbiamo trovato una relazione tra causa $T_1 - T_2$ ed effetto \dot{Q} ; dove la proporzionalità è data dalla conduttanza complessiva attraverso il cilindro, che se ne facciamo il reciproco diventa la resistenza complessiva al passaggio di calore. La causa è la differenza di calore, l'effetto è la trasmissione di calore.

Se facessimo l'integrazione fino alla generica superficie cilindrica di raggio r , otteniamo:

$$\dot{Q} \ln\left(\frac{r}{R_1}\right) = 2\pi k L (T_1 - T_2)$$



T dipende solo dalla coordinata $r \rightarrow$ monodimensionale. Questo per trovare il legame tra raggio e temperatura.

Conduzione monodimensionale in geometria sferica

Consideriamo una sfera in cui la superficie sferica di raggio R_1 è alla temperatura T_1 e quella di raggio R_2 è alla temperatura T_2 . Le superfici sono sfere concentriche; $S = 4\pi r^2$

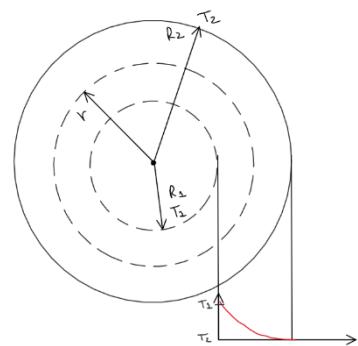
Supponiamo che le isoterme siano delle superfici sferiche di raggio r generico.

Riprendiamo la legge di Fourier, separiamo le variabili ed integriamo:

$$\dot{Q} = -kS \frac{dT}{dr} = -k \cdot 4\pi r^2 \frac{dT}{dr}$$

$$\dot{Q} \frac{dr}{r} = -2\pi k dT$$

$$\dot{Q} \left[-\frac{1}{r} \right] \Big|_{R_1}^{R_2} = 4\pi k (T_1 - T_2)$$



$$\dot{Q} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = 4\pi k(T_1 - T_2)$$

Se invece integriamo fino alla generica superficie sferica di raggio r otteniamo:

$$\dot{Q} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right) = 4\pi k(T_1 - T)$$

Allora in questo caso la variazione di T con r è di tipo $\frac{1}{r}$.

In questo modo abbiamo integrato l'equazione di Fourier nei tre casi monodimensionali, a regime stazionario e con $k = \text{cost}$.

Se $k \neq \text{cost}$

Immaginiamo che k sia in funzione della temperatura nel seguente modo:

$$k = a + bT, \text{ con } b \begin{cases} \text{se } b > 0 \text{ } k \text{ aumenta con } T \\ \text{se } b < 0 \text{ } k \text{ diminuisce con } T \end{cases}$$

Vediamo cosa cambia nei tre casi monodimensionali studiati.

- Geometria piana

$$\int_0^x \dot{Q} dx = - \int_{T_1}^T (a + bT) S dT$$

$$\dot{Q}x = -S \left[aT + \frac{bT^2}{2} \right] \Big|_{T_1}^T \rightarrow \text{legame del secondo ordine tra } T \text{ ed } x$$

Vediamo che succede nel caso dell'integrazione definita:

$$\int_0^L \dot{Q} dx = - \int_{T_1}^{T_2} (a + bT) S dT$$

$$\dot{Q}L = -S \left[aT + \frac{bT^2}{2} \right] \Big|_{T_1}^{T_2} = -S \left[a(T_2 - T_1) + \frac{b}{2}(T_2^2 - T_1^2) \right] = -S(T_2 - T_1) \left[a + \frac{b}{2}(T_2 + T_1) \right]$$

$$\text{Dove } a + \frac{b}{2}(T_2 + T_1) = k_m \text{ cioè } k \text{ valutato alla } T_m = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

$$\Rightarrow \dot{Q}L = k_m S(T_1 - T_2)$$

Allora abbiamo trovato che la soluzione analitica della conduzione monodimensionale con $k \neq \text{cost}$ che è identica a quella in cui si suppone $k = \text{cost}$, dove come valore costante di k si prende la sua media k_m . In questo caso è esattamente corretto prendere il valore medio.

Questo vale anche per gli altri due casi monodimensionali.

- Geometria cilindrica

A destra abbiamo sempre l'integrale di $kSdT$

$$\dot{Q} \ln \left(\frac{r}{R_1} \right) = 2\pi k_m L(T_1 - T)$$

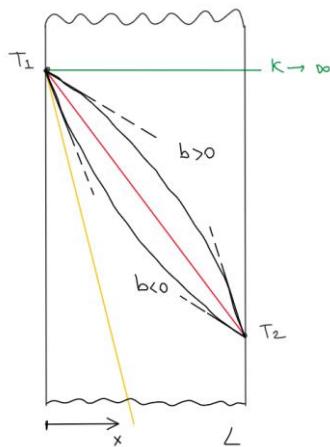
- Geometria sferica

$$\dot{Q} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right) = 4\pi k_m (T_1 - T)$$

Considerazioni fisiche sull'andamento di T nella geometria piana

Abbiamo appena visto che se $k \neq \text{cost}$ la relazione tra x e T è del secondo ordine, andamento di tipo quadratico.

Allora l'andamento di T può seguire le due curve in figura, in base al segno di b , o sopra l'andamento lineare o sotto l'andamento lineare.



Vediamo che la curva sopra l'andamento lineare, se la conduttività cresce con la temperatura in T_1 ha una pendenza più orizzontale della pendenza che ha in T_2 che è più vicina alla verticale. Allora, su questa curva k aumenta con $T \rightarrow b > 0$

Allora la curva sotto l'andamento lineare è per $b > 0$ dove k diminuisce con T . La pendenza in T_2 è più orizzontale della pendenza in T_1 .

Legge di raffreddamento di Newton: considerazioni fisiche sull'andamento di T

Abbiamo la parete a temperatura T_p e il fluido a temperatura T_f .

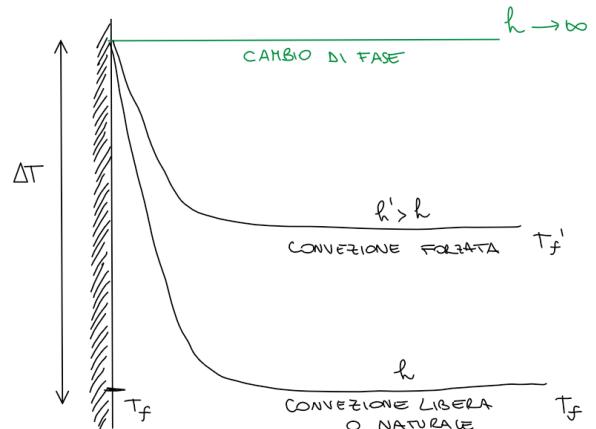
Nel caso della legge di Newton la proporzionalità tra la causa $(T_p - T_f)$ e l'effetto \dot{Q} è data da:

$$\dot{Q} = hS(T_p - T_f) \text{ parete e fluido}$$

Allora, se lo stesso calore viene scambiato con un fluido a temperatura T_f diverse, il $\Delta T = (T_p - T_f)$ cambia e h deve cambiare di conseguenza. In particolare se T_f è minore, ΔT diminuisce e quindi deve aumentare h : se $T'_f < T_f \rightarrow h' > h$

Di conseguenza se $\Delta T \rightarrow 0, h \rightarrow \infty$

Ricordiamo che la convezione è un meccanismo combinato in cui si ha conduzione di calore nei corpi, però poiché il fluido si muove obbedisce anche alle leggi del moto dei fluidi.



Inoltre ricordiamo che la legge di Newton è una legge empirica con la quale si definisce h empiricamente, a differenza della legge di Fourier che è una legge fisica in cui k è un parametro fisico.

Esempio

Nello studio termofluidodinamico del corpo umano si vede che se una persona è ferma in aria si osserva la semplice convezione naturale (o libera) del fluido, con uno scambio di calore piccolo.

Se invece c'è un ventilatore o c'è vento, si osserva la convezione forzata poiché l'aria che lambisce il corpo è sempre nuova e così aumenta h .

Invece, ci si avvicina al caso limite in cui $h \rightarrow \infty$ quando si ha un cambio di fase, cioè vaporizzazione o condensazione.

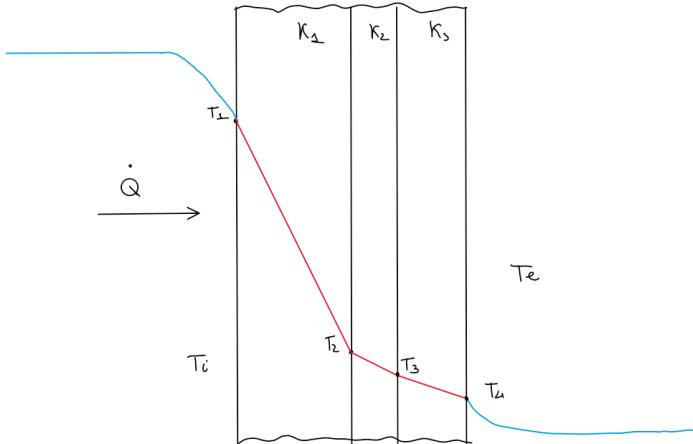
Geometria piana composta con materiali in serie

Struttura composta → parete con tre strati di materiale diverso.

Consideriamo il caso di una parete composta da vari strati di materiale diverso e con scambio di calore per convezione ai lati.

Se consideriamo la parete di un edificio, all'interno c'è una temperatura $T_i = 20^\circ\text{C}$ e all'esterno $T_e = 0^\circ\text{C}$; ci sono tre strati di conduttività termica diversa, allora si ha uno scambio di calore \dot{Q} che a regime stazionario va dall'interno verso l'esterno, costante.

L'andamento qualitativo della temperatura si può conoscere in base ai valori di h .



Se all'interno c'è convezione naturale, quindi h piccolo e ΔT grande.

Ad esempio, se fuori c'è molto vento, all'esterno h_e è per convezione forzata;

invece all'interno possiamo immaginare ad esempio un h_i di convezione naturale.

Allora, il salto di temperatura all'interno è più elevato che all'esterno $\rightarrow h_i < h_e$

Inoltre, all'interno della parete l'andamento qualitativo delle temperature si può conoscere dai valori di k .

Supponiamo che $k_1 < k_2 < k_3$ allora nella parete 3 la pendenza è la minore (quasi orizzontale), nella parete 2 la pendenza aumenta e nella parete 1 la pendenza è la maggiore (molto verticale).

Ora scriviamo le espressioni del calore $\dot{Q} = \text{cost}$ nei vari strati in funzione della temperatura, con le leggi di Newton e Fourier:

$$\dot{Q} = h_i S(T_i - T_1) \rightarrow T_i - T_1 = \frac{\dot{Q}}{h_i S}$$

$$\dot{Q} = \frac{h_1 S}{L_1} (T_1 - T_2) \rightarrow T_1 - T_2 = \frac{\dot{Q} L_1}{h_1 S}$$

$$\dot{Q} = \frac{h_2 S}{L_2} (T_2 - T_3) \rightarrow T_2 - T_3 = \frac{\dot{Q} L_2}{h_2 S}$$

$$\dot{Q} = \frac{h_3 S}{L_3} (T_3 - T_4) \rightarrow T_3 - T_4 = \frac{\dot{Q} L_3}{h_3 S}$$

$$\dot{Q} = h_e S(T_4 - T_e) \rightarrow T_4 - T_e = \frac{\dot{Q}}{h_e S}$$

L'effetto che è proporzionale alla conduttanza per la causa.

A destra abbiamo isolato le 5 temperature; S è la stessa perché stiamo in uno stato piano.

Se si sommano vanno via le temperature intermedie e rimangono solo T_i e T_e .

La temperatura interna del locale è imposta (T_i) mentre la temperatura esterna è quella effettiva (T_e) e quindi vogliamo trovare una relazione tra \dot{Q} e $(T_i - T_e)$ del seguente tipo:

$$\dot{Q} = uS(T_i - T_e)$$

Dove vediamo che u contiene le informazioni di condutività degli strati della parete e del tipo di convezione nei due ambienti.

Esplicitiamo le differenze di temperatura in tutte le espressioni scritte; sommando otteniamo:

$$T_i - T_e = \frac{\dot{Q}}{S} \left(\frac{1}{h_i} + \frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2} + \frac{L_3}{k_3} + \frac{1}{h_e} \right)$$

Allora la **resistenza complessiva** allo scambio di calore è:

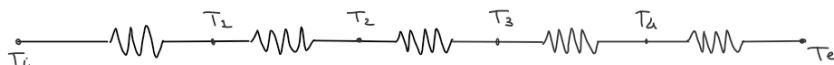
$$\frac{1}{u} = \frac{1}{h_i} + \frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2} + \frac{L_3}{k_3} + \frac{1}{h_e}$$

Con **u coefficiente globale di scambio termico**, che è la conduttanza complessiva. Somma delle resistenze allora resistenze in serie.

Osservazione

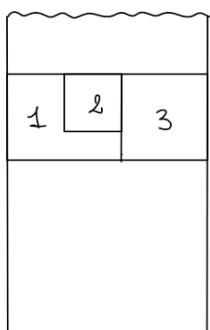
In base all'analogia elettrica, è come se avessimo scritto la legge di Ohm che impone che la causa ΔV è uguale al prodotto della corrente per la somma delle resistenze: $\Delta V = RI$

Allora, l'analogo elettrico di questo problema termico è dato da queste tre resistenze in serie:



Osservazione

Spesso i diversi materiali del muro non sono tutti in serie, ma sono parte in serie e parte in parallelo.



Lo studio di questo caso è utile per calcolare la condutività termica complessiva dei materiali biologici del corpo umano, che hanno tutti un k diverso tra loro ed ovviamente non sono sempre in serie ma sono anche in parallelo.

Geometria cilindrica composta

Esempi:

- Per le applicazioni meccaniche → tubo di rame che porta l'acqua al termosifone, ricoperto di isolante;
- Per le applicazioni elettriche → cavo di rame ricoperto da isolante (sia elettrico che termico)

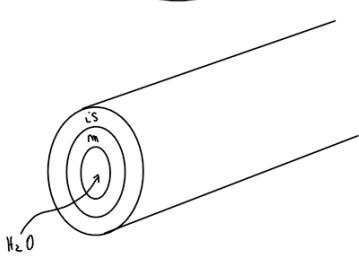
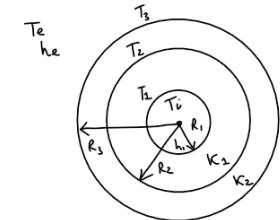
Per semplicità studiamo il caso meccanico, cioè consideriamo un tubo di rame di spessore $R_2 - R_1$ in cui scorre l'acqua calda nella cavità di raggio R_1 e che è ricoperto da materiale isolante di raggio $R_3 - R_2$.

La temperatura media T_i dell'acqua è fissata ed ha un certo coefficiente di convezione h_1 .

I due strati di materiale hanno k_1 e k_2 differenti. All'esterno la temperatura del fluido è T_e ed ha un coefficiente di convezione h_e .

T_1, T_2, T_3 sono le temperature dei tre strati cilindrici.

Scriviamo le diverse espressioni che assume il calore $\dot{Q} = \text{cost}$ nei vari strati, con le leggi di Newton e Fourier:



$$\dot{Q} = h_1 2\pi R_1 L (T_i - T_1) \rightarrow T_i - T_1 = \frac{\dot{Q}}{h_1 2\pi R_1 L}$$

$$\dot{Q} = \frac{k_1 2\pi L}{\ln(\frac{R_2}{R_1})} (T_1 - T_2) \rightarrow T_1 - T_2 = \frac{\dot{Q} \ln(\frac{R_2}{R_1})}{k_1 2\pi L}$$

$$\dot{Q} = \frac{k_2 2\pi L}{\ln(\frac{R_3}{R_2})} (T_2 - T_3) \rightarrow T_2 - T_3 = \frac{\dot{Q} \ln(\frac{R_3}{R_2})}{k_2 2\pi L}$$

$$\dot{Q} = h_e 2\pi R_3 L (T_3 - T_e) \rightarrow T_3 - T_e = \frac{\dot{Q}}{h_e 2\pi R_3 L}$$

Strati per scambio di calore per conduzione

La prima e la seconda scambi di calore per convezione.

Esplicitiamo le differenze di temperatura in tutte le espressioni scritte; sommando otteniamo:

$$T_i - T_e = \dot{Q} \left(\frac{1}{h_1 2\pi R_1 L} + \frac{\ln(\frac{R_2}{R_1})}{k_1 2\pi L} + \frac{\ln(\frac{R_3}{R_2})}{k_2 2\pi L} + \frac{1}{h_e 2\pi R_3 L} \right)$$

In questo caso vogliamo ottenere una relazione tra \dot{Q} e $T_i - T_e$ del seguente tipo definita rispetto alla superficie esterna S_3 dell'isolante:

$$\dot{Q} = u S_3 (T_i - T_e)$$

Allora otteniamo:

$$\frac{1}{u S_3} = \frac{T_i - T_e}{\dot{Q}} = \left(\frac{1}{h_1 2\pi R_1 L} + \frac{\ln(\frac{R_2}{R_1})}{k_1 2\pi L} + \frac{\ln(\frac{R_3}{R_2})}{k_2 2\pi L} + \frac{1}{h_e 2\pi R_3 L} \right)$$

$$\frac{1}{u \cdot R_3 \cdot 2\pi L} = \left(\frac{1}{h_1 \cdot 2\pi R_1 L} + \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{k_1 \cdot 2\pi L} + \frac{\ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right)}{k_2 \cdot 2\pi L} + \frac{1}{h_e \cdot 2\pi R_3 L} \right)$$

$$\frac{1}{u \cdot R_3} = 2\pi L \left(\frac{1}{h_1 \cdot 2\pi R_1 L} + \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{k_1 \cdot 2\pi L} + \frac{\ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right)}{k_2 \cdot 2\pi L} + \frac{1}{h_e \cdot 2\pi R_3 L} \right) = \left[\frac{1}{h_1 R_1} + \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{k_1} + \frac{\ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right)}{k_2} + \frac{1}{h_e R_3} \right] = f(R_3)$$

Studiamo come varia $\frac{1}{u \cdot R_3}$ cioè $\frac{\Delta T}{\dot{Q}}$ a meno di $2\pi L$ al variare di R_3 (è lo spessore del tubo esterno) per capire quanto deve essere spesso lo strato di isolante; come varia il calore scambiato in funzione dell'isolante che mettiamo fuori:

$$\frac{d}{dR_3} f(R_3) = \frac{1}{k_2} \frac{R_2}{R_3} \frac{1}{R_2} - \frac{1}{h_e} \frac{1}{R_3^2} = 0 \rightarrow \frac{1}{k_2} = \frac{1}{h_e R_3}$$

$$\Rightarrow R_{3c} = \frac{k_2}{h_e}$$

Abbiamo determinato il raggio critico dell'isolante che è pari al rapporto tra la conduttività termica del materiale isolante e il coefficiente di convezione esterno.

Vediamo se questo estremo di $f(R_3)$ è un max o un min:

$$\frac{d^2}{dR_3^2} f(R_3) = -\frac{1}{k_2 R_3^2} + \frac{2}{h_e R_3^3} = -\frac{1}{k_2} + \frac{2}{h_e R_3}$$

Con $R_3 = R_{3c} \rightarrow \frac{d^2}{dR_3^2} f(R_3) = \frac{1}{k_2} > 0 \Rightarrow R_{3c}$ è un min per $f(R_3)$

Poiché R_{3c} è un min per $\frac{1}{u \cdot R_3}$ allora è un massimo per il calore scambiato \dot{Q} . Il pedice c mi dice che quello è il **raggio critico dell'isolante**.

Rappresentiamo l'andamento di \dot{Q} in funzione di R_3 che in maniera qualitativa è quello in figura dove c'è il massimo in corrispondenza di $R_{3c} = \frac{k_2}{h_e}$, che è nota una volta nota la fisica del problema e che solitamente è piccolo. $h_e \rightarrow$ coefficiente di convezione.

Nel caso delle applicazioni meccaniche i tubi hanno un diametro e di conseguenza uno spessore R_2 certamente maggiore di R_{3c} che è molto piccolo.

Allora, qualsiasi sia lo spessore dell'isolante, cioè R_3 il calore \dot{Q} diminuisce.

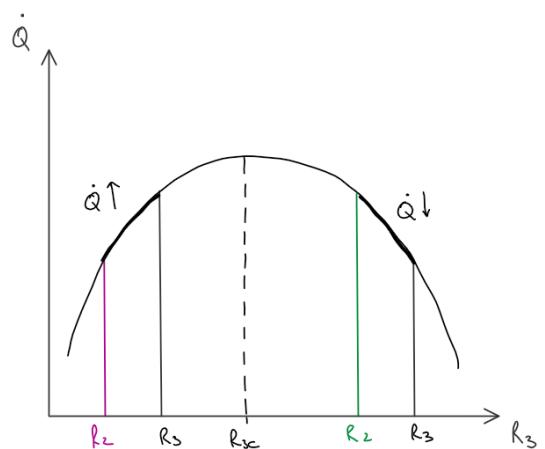
In definitiva, nelle applicazioni meccanico-idrauliche per il riscaldamento, l'isolante funziona da isolante, cioè effettivamente riduce il calore scambiato verso l'esterno nei tubi.

Nel caso delle applicazioni elettroniche, il cavo metallico ha un raggio esterno R_2 molto piccolo, minore di R_{3c} . Nel caso elettronico il calore è un disturbo.

Allora, mettendo l'isolante a copertura, con un certo spessore R_3 il calore \dot{Q} aumenta.

In definitiva, nelle applicazioni elettroniche l'isolante serve per aumentare il calore scambiato verso l'estero nei cavi in modo tale da dissiparlo per non danneggiare i cavi stessi.

Ovviamente se vogliamo ottenere il massimo calore scambiato, si deve mettere un isolante di spessore $R_{3c} - R_2$.



Più aumenta R_3 più aumenta la superficie di scambio per convezione all'esterno, invece l' R_3 nel termine isolante aumenta l'isolamento termico per conduzione. Aumentare la superficie esterna significa aumentare la dispersione per convezione che è l'obiettivo nel caso elettrico-elettronico.

Osservazione;

Il termine $\frac{1}{h_e R_3}$ è il calore scambiato per convezione tra la superficie R_3 e l'esterno, mentre il termine $\frac{\ln(\frac{R_3}{R_2})}{k_2}$ è il calore scambiato per conduzione nel materiale isolante:

$$\dot{Q} = 2\pi L(T_3 - T_e) \cdot R_3 h_e \quad \text{e} \quad \dot{Q} = 2\pi L(T_2 - T_3) \cdot \frac{k_2}{\ln(\frac{R_3}{R_2})}$$

Poiché R_3 compare in un caso al denominatore e in un caso al numeratore allora se aumenta R_3 aumenta l'effetto dell'isolante e diminuisce il calore scambiato, mentre nell'equazione di Newton aumenta il calore scambiato perché aumenta la superficie di scambio.

17-11.-21

Nella scorsa lezione abbiamo visto il caso di convezione, conduzione in una parete piana e in una parete cilindrica con il raggio critico dell'isolante. Non sempre però le resistenze sono in serie, in alcuni casi sono resistenze in serie e resistenze in parallelo;

Calcolo della conduttività termica di strutture complesse adattabili al corpo umano;

Immaginiamo di avere un insieme di sfere, tutte dello stesso diametro che vengono messe in un contenitore. Se prendiamo una cella che è costituita da un cubo che circoscrive la sfera e conosco il volume della sfera V_s , si definisce **porosità** ϵ (dipende dall'impacchettamento) il rapporto tra il volume dei vuoti diviso il volume totale (cioè il volume del cubo).

Il volume dei vuoti è il volume totale meno il volume della sfera; $\epsilon = \frac{V_v}{V_{tot}} \rightarrow 1 - \epsilon = \frac{V_s}{V_t}$ con V_s volume della fase solida.

Per un impacchettamento con CCC $\rightarrow \epsilon = 0.46$ è una situazione altamente instabile, ed è la massima porosità possibile.

Se le sfere sono in un contenitore e questo viene messo in vibrazione si trova che il massimo compattamento possibile di sfere dello stesso diametro è quando la sfera è in corrispondenza del poro. Immaginiamo che la sfera sia di materiale solido o vetro o acciaio e nei vuoti ci può essere aria oppure acqua. Quindi abbiamo un sistema a due fasi, non sono in serie tra di loro.

Se la sfera sta sopra come in figura, questo corrisponde al massimo compattamento ed è all'incirca 0.26;

Nella realtà la porosità di un materiale è compresa tra un valor massimo e un valor minimo:

$$\epsilon \in \begin{cases} \epsilon_{max} = 0.46 \\ \epsilon_{min} = 0.26 \end{cases} \text{ valido per corpi sferici dello stesso diametro.}$$

Non si compattano al massimo ma viene un valore medio. Generalmente valor medio 0.36.

Massimo compattamento per $\epsilon = 0.26$

Sotto questa schematizzazione è possibile determinare porosità di un materiale da semplici considerazioni geometriche.

Nella realtà, si pensi ad esempio ad un materiale poroso come il terreno la distribuzione di particelle solide non è omogenea e le singole particelle presentano dimensioni diverse.

Nella pratica per ogni caso, si misura genericamente la porosità che comunque si aggira intorno allo 0.3

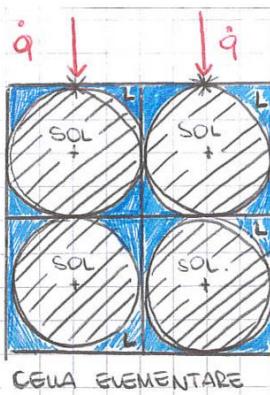
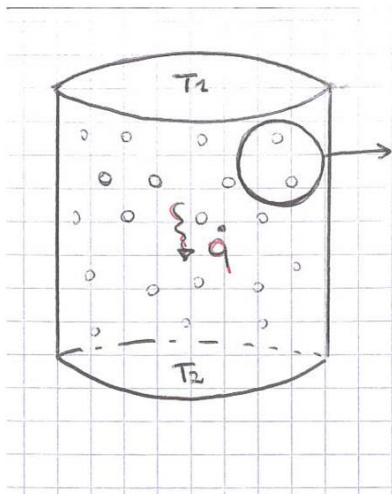
La porosità è una delle variabili del problema di conduzione termica in un materiale bifasico.

Supponiamo di avere queste sfere di acciaio in un contenitore di vetro e immaginiamo di mettere sopra un disco ad una certa temperatura calda T_1 ed il fondo del cilindro ad una temperatura T_2 fredda. Abbiamo un problema termico di conduzione del calore dall'alto che è caldo verso il basso.

In virtù di questo ΔT si instaura un flusso di calore \dot{q} che investe anche le particelle solide.

Questo esperimento si potrebbe fare su materiali biologici.

Andiamo a vedere



Isoliamo dal sistema una cella elementare, che nell'ipotesi di impacchettamento CCC, è fatta come nello schema.

La cella elementare è un'unità ripetitiva.

→ Possiamo ricordare lo studio del sistema allo studio della sua cella elementare.

Se immaginiamo che la cella elementare sia CCC; isoliamo dal sistema una cella elementare che nell'ipotesi di impacchettamento CCC è fatta come nello schema; la cella elementare è un'unità ripetitiva allora possiamo ricondurre lo studio del sistema allo studio della sua cella elementare.

Il flusso di calore è dall'alto verso il basso, la zona che interessa nella trasmissione di calore o meglio la porzione di solido investita dal flusso è un PUNTO corrispondente all'intersezione tra sfera e sfera → NON posso applicare l'equazione di Fourier che implica la presenza di superfici di scambio conduttivo.

Siccome la geometria è complicata, noi vedremo la soluzione più semplice, al posto di considerare la sfera, consideriamo un cubo che è all'interno di un cubo. In questo modo possiamo fare l'analisi analiticamente.

La legge della conduzione di Fourier è proporzionale alla sezione di passaggio del calore, due sfere si toccano in un punto, la superficie di contatto sarebbe un punto, la sostituzione del cubo al posto delle sfere è giustificato anche da questo.

Nota che sia la porosità possiamo stabilire le dimensioni:

Chiamiamo con l_s il lato del cubo solido e con l_t il lato del cubo della cella.

$$V_t = l_t^3$$

$$V_v = l_t^3 - l_s^3 \text{ volume dei vuoti}$$

$$\text{Definiamo il parametro } \beta = \frac{l_t}{l_s}$$

$$\epsilon = \frac{V_v}{V_t} = 1 - \frac{l_s^3}{l_t^3} = 1 - \frac{1}{\beta^3}$$

β è il parametro fondamentale. ϵ è nota sperimentalmente. Allora posso ricavare β e risolvo il problema in funzione di questo parametro.

Per rendere il problema trattabile analiticamente, assumiamo che le temperature abbiano una distribuzione uniforme orizzontalmente. Come prima ipotesi approssimativa, suppongo che le isoterme siano delle superfici orizzontali, non sarà vero ma è una delle semplificazioni.

Quindi esistono due casi estremi di trasmissione:

1. Linee isoterme orizzontali, flussi in serie
2. Linee isoterme verticali, flussi paralleli

Vediamo il caso 1.

Condizione trasversale al flusso infinita, $k \rightarrow \infty$; applichiamo Fourier a ciascuno strato.

Chiamiamo T_3 la linea orizzontale che coincide con l'inizio del cubo solido e T_4 la linea anche corrisponde alla fine del cubo solido. Applicando le leggi della conduzione possiamo dire:

$$\dot{Q}_{13} = k_F l_t^2 \frac{T_1 - T_3}{\frac{l_t - l_s}{2}}$$

Che è il calore scambiato tra T_1 e T_3 .

$$\frac{l_t - l_s}{2} \rightarrow \text{distanza tra } T_1 \text{ e } T_3.$$

L'espressione del \dot{Q} tra T_4 e T_2 sarà identica perché c'è solo fluido, la sezione è sempre la stessa e la distanza è sempre la stessa;

$$\dot{Q}_{23} = k_F l_t^2 \frac{T_4 - T_2}{\frac{l_t - l_s}{2}}$$

Se immagino che la superficie T_3 sia alla base del solido e la superficie T_4 nella parte superiore, posso immaginare che il calore scambiato attraverso il fluido tra T_3 e T_4 sia sempre della stessa forma

$$\dot{Q} = k_F \cdot (l_t^2 - l_s^2) \frac{T_3 - T_4}{l_s} + k_s l_s^2 \frac{T_3 - T_4}{l_s}$$

Abbiamo sommato anche il calore che passa attraverso lo strato solido;

$$\dot{Q}_{34} = (T_3 - T_4) \left[k_F \cdot \frac{l_t^2 - l_s^2}{l_s} + k_s \frac{l_s^2}{l_s} \right]$$

In condizioni di stazionarietà:

$$\dot{Q}_{13} = \dot{Q}_{23} = \dot{Q}_{34} = \dot{Q}$$

Isoliamo la causa cioè il ΔT ;

$$\text{Da } Q_{3 \rightarrow 4} \text{ abbiamo } (T_3 - T_4) = \frac{Q}{k_F \frac{l_t^2 - l_s^2}{l_s} + k_s \frac{l_s^2}{l_s}}$$

$$\text{Da } Q_{1 \rightarrow 3} \text{ abbiamo } (T_1 - T_3) = \frac{Q}{k_F l_t^2 \frac{l_t^2 - l_s^2}{l_t - l_s}}$$

$$\text{Da } Q_{4 \rightarrow 2} \text{ abbiamo } (T_4 - T_2) = \frac{Q}{k_F l_t^2 \frac{l_t^2 - l_s^2}{l_t - l_s}}$$

Sommiamo membro a membro:

$$(T_1 - T_2) = \dot{Q} \left[\frac{1}{2} \frac{l_t - l_s}{k_F l_t^2} + \frac{1}{2} \frac{l_t - l_s}{k_F l_t^2} + \frac{1}{k_F \frac{l_t^2 - l_s^2}{l_s} + k_s \frac{l_s^2}{l_s}} \right]$$

Quello tra parentesi corrisponde alla resistenza totale, la resistenza totale è dato dal tratto tra 1 e 3 che è in parallelo con il tratto intermedio e questo è in serie con lo strato di fluido in alto. Il terzo contributo è 1 fratto la somma delle conduttanze.

$$\Rightarrow (T_1 - T_2) = \dot{Q} \left[\frac{l_t - l_s}{k_F l_t^2} + \frac{1}{k_F \frac{l_t^2 - l_s^2}{l_s} + k_s l_s} \right]$$

Per semplicità posso introdurre un k_{eff} (coefficiente di conducibilità termica T costante), tale che:

$$\dot{Q} = k_{eff_T} \cdot l_t^2 \cdot \frac{T_1 - T_2}{l_t}$$

È come se avessi calcolato la $k_{equivalente}$ di un materiale omogeneo che è costituito dai due materiali fluido e solido.

Per confronto tra i \dot{Q} ottengo:

$$\begin{aligned} k_{eff_T} &= \frac{l_t}{l_t^2 \frac{l_t - l_s}{k_F l_t^2} + \frac{1}{k_F \frac{l_t^2 - l_s^2}{l_s} + k_F l_s}} \\ \frac{1}{k_{eff_T}} &= l_t \left[\frac{l_t - l_s}{k_F l_t^2} + \frac{1}{k_F \frac{l_t^2 - l_s^2}{l_s} + k_s l_s} \right] = \frac{l_t - l_s}{k_F l_t} + \frac{l_t}{k_F \frac{l_t^2 - l_s^2}{l_s} + k_s l_s} \\ \frac{1}{k_{eff_T}} &= \frac{\frac{l_t - l_s}{l_s}}{k_F \frac{l_t}{l_s}} + \frac{\frac{l_t}{l_s}}{k_F \frac{l_t^2 - l_s^2}{l_s^2} + k_s} = \frac{\beta - 1}{k_F \cdot \beta} + \frac{\beta}{k_F (\beta^2 - 1) + k_s} \end{aligned}$$

\downarrow

$$\boxed{\beta = \frac{l_t}{l_s}}$$

$$\frac{1}{k_{eff_T}} = \frac{\beta - 1}{k_F \cdot \beta} + \frac{\beta}{k_F (\beta^2 - 1) + k_s}$$

Uno sulla conduttanza sarebbe la resistenza complessiva, ed è uguale alla resistenza della zona occupata dal fluido più la resistenza che deriva dalla zona intermedia dove c'è il parallelo tra solido e fluido.

$$k_{eff_T} = f(k_F, k_s, \beta(\epsilon))$$

Il coefficiente k_{eff} ha un significato fisico ben preciso, rappresenta il coefficiente di conducibilità termica di un materiale omogeneo che produce lo stesso flusso termico del materiale bifasico di partenza, tra le temperature T_1 e T_2 .

Ragioniamo ora per analogia elettrica:

$$Q = \left(\frac{k_{eff} l_t^2}{l_t} \right) (T_1 - T_2)$$

Legge di Ohm: $I = G \Delta V = \Delta V \frac{1}{R}$

Il flusso di calore → intensità di corrente

Differenza di T → differenza di potenziale

$$\frac{k_{eff} \cdot l_t^2}{l_t} \rightarrow \text{conduttanza } (G = \frac{1}{R})$$

Circuito equivalente:

la conduttanza equivalente G_{eq} è analogo al k_{eff} , la G_{eq} è:

$$\frac{1}{G_{eq}} = \frac{1}{G_F} + \frac{1}{G_F} + \frac{1}{G_F + G_S}$$

Infatti k_{eff} :

$$\frac{1}{k_{eff}} \propto \frac{1}{k_F} + \frac{1}{k_F + k_S}$$

Cosa vuol dire che le isoterme sono tutte parallele? È come se io immaginassi che la conduttività del materiale in senso orizzontale è molto elevata, se la conduttanza è infinita la differenza di temperatura è nulla, l'ipotesi di isoterme parallele corrisponde all'ipotesi di immaginare il k in direzione orizzontale infinitamente grande. Le temperature sono le stesse sul piano orizzontale.

Caso 2;

Si azzerà la conduzione di calore in senso orizzontale, ma c'è la conduzione di calore dal basso verso l'alto, questo corrisponde a supporre che il calore scorre in maniera parallela nella zona dei fluidi Q_1 e nella zona in cui c'è fluido e solido Q_2 .

Flussi termici paralleli → la conduttività termica orizzontale è nulla; se i fluidi termici sono così, vuol dire che non c'è conduzione nella direzione orizzontale.

Allora la conduzione trasversale al flusso è nulla. Le isoterme non sono parallele.

Q_1 → calore che attraversa il fluido

$Q = Q_1 + Q_2$ calore totale che viene scambiato tra il piano T_1 e T_2 .

$$Q_1 = k_F (l_t^2 - l_s^2) \frac{T_1 - T_2}{l_t}$$

$(l_t^2 - l_s^2)$ → superficie di passaggio. La parte inferiore è a temperatura T_1 , la base del solido è a temperatura T_3 , la testa del solido è a temperatura T_4 e la parte finale a temperatura T_2 .

Q_2 attraversa prima il fluido, poi il solido, poi ancora il fluido.

$Q_2 = k_F l_s^2 \frac{T_1 - T_3}{\frac{l_t - l_s}{2}} = k_s l_s^2 \frac{T_3 - T_4}{l_s} = k_F l_s^2 \frac{T_4 - T_2}{\frac{l_t - l_s}{2}}$ il primo uguale è per la stazionarietà; questo calore deve passare attraverso il solido e poi di nuovo attraverso il fluido.

Da Q_1 : $T_1 - T_2 = \frac{Q_1}{k_F (l_t^2 - l_s^2) \frac{1}{l_t}}$ al denominatore abbiamo la conduttanza nello strato di fluido dove passa Q_1 .

Da $Q_{1 \rightarrow 3}$: $(T_1 - T_3) = \frac{Q_2}{k_F l_s^2} \frac{l_t - l_s}{2}$

Nel solido $T_3 - T_4 = \frac{Q_2}{k_s l_s^2} \cdot l_s$

Da 4 a 2 $T_4 - T_2 = \frac{Q_2}{k_F l_s^2} \frac{l_t - l_s}{2}$

Sommendo si ottiene:

$T_1 - T_2 = Q_2 \left[\frac{l_t - l_s}{k_F l_s^2} + \frac{l_s}{k_F l_s^2} \right]$ somma delle resistenze da cui:

$$Q_2 = \frac{T_1 - T_2}{\frac{l_t - l_s}{k_F l_s^2} + \frac{l_s}{k_F l_s^2}}$$

Da $Q_1, T_1 - T_2$

$$Q_1 = (T_1 - T_2) \cdot \frac{k_F(l_t^2 - l_s^2)}{l_t} = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{l_t}{k_F(l_t^2 - l_s^2)}}$$

Siccome abbiamo supposto di avere i calori che sono flussi termici paralleli il calore totale sarà la somma tra Q_1 e Q_2 :

$$Q = (T_1 - T_2) \left[\frac{1}{\frac{l_t}{k_F(l_t^2 - l_s^2)}} + \frac{1}{\frac{l_t - l_s}{k_F l_s^2} + \frac{l_s}{k_F l_s^2}} \right]$$

Siccome sono paralleli è la conduttanza dello strato fluido più la conduttanza dello strato dove c'è fluido-solido-fluido.

Introducendo un $(k_{eff})_Q$ tale da esprimere Q in Fourier nella maniera che segue:

$$Q = k_{eff} Q \times l t^2 \times \frac{(T_1 - T_2)}{l t}$$

Ottieniamo per confronto:

$$\begin{aligned} k_{eff} Q &= \frac{l t}{l t^2} \left[\frac{k_F(l_t^2 - l_s^2)}{l t} + \frac{1}{\frac{(l_t - l_s)}{k_F l_s^2} + \frac{l_s}{k_F l_s^2}} \right] = k_F \left[1 - \left(\frac{l_s}{l t} \right)^2 \right] + \frac{1/l t}{\frac{l t - l_s}{k_F l_s^2} + \frac{l_s}{k_F l_s^2}} \\ \Rightarrow k_{eff} Q &= k_F \left(1 - \frac{1}{\beta^2} \right) + \frac{l s / l t}{\frac{1}{k_F} \left(\frac{l t}{l s} - 1 \right) + \frac{1}{k_F}} \Rightarrow k_{eff} Q = k_F \left[1 - \left(\frac{1}{\beta} \right)^2 \right] + \frac{1/\beta}{\frac{1}{k_F} \left(\beta - 1 \right) + \frac{1}{k_F}} \end{aligned}$$

Oppure:

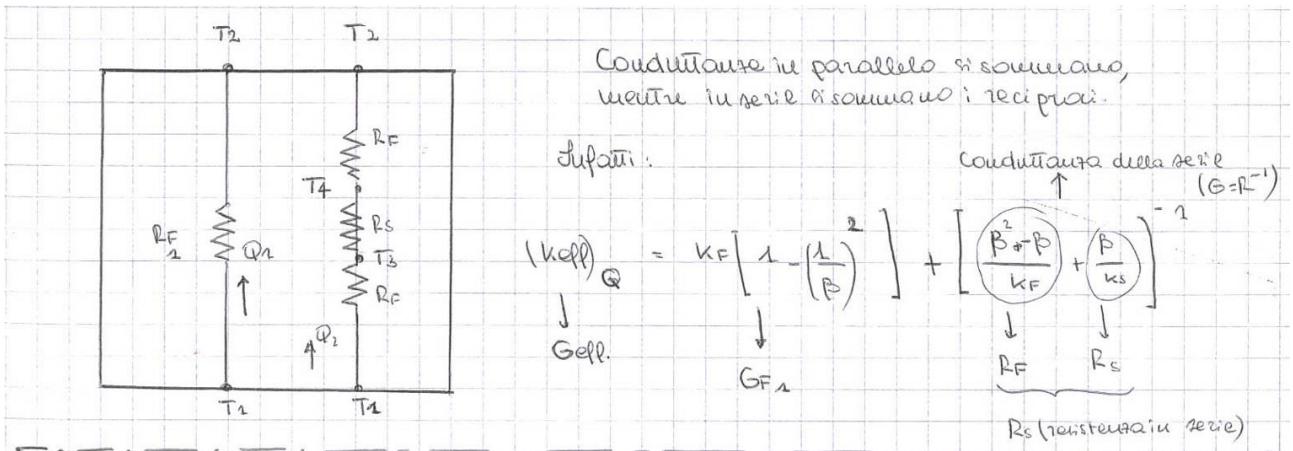
$$(k_{eff})_Q = k_F \left[1 - \left(\frac{1}{\beta} \right)^2 \right] + \left[\frac{\beta^2 - \beta}{k_F} + \frac{\beta}{k_F} \right]^{-1}$$

Viene completamente diverso il circuito elettrico, abbiamo in parallelo la resistenza costituita dal calore Q_1 che passa solo nel fluido, che è in parallelo con la somma delle resistenze calore Q_2 .

Il circuito equivalente vede due flussi in parallelo tra loro Q_1 e Q_2 .

Q_1 è il flusso che attraversa la resistenza del fluido.

Q_2 è la serie di tre resistenze, due del fluido e una del solido.



L'ipotesi reale non è né a isotermi parallele né a flussi termici paralleli, le isotermi sono delle curve qualitativamente come quelle in rosso, la variazione della temperatura nello strato solido che si ammette abbia un k più elevato è maggiore.

Isolamento termico;

c'è una schiuma che è un materiale particolare che ha una conduttività molto bassa, non c'è l'aria. Aerogel → hanno una porosità del 95%; se sono costituiti da liquido ed aria il 95% è aria che fa valere la sua bassa conduttività.

I materiali più utilizzati hanno un comportamento dove la k si rende funzione della densità. Densità del materiale solido rispetto a quello fluido. Se mettiamo la densità dell'aria siamo nella curva a sinistra. La k di Fourier, la conduttività termica, aumenta per la conduzione se aumenta la densità del materiale miscuglio tra solido e gas. immagino di avere un miscuglio tra un materiale solido o liquido e un gas; se aumenta la densità significa aumentare la densità del materiale solido e quindi il materiale solido ha una conduttività più elevata, quindi aumenta l'effetto della conduzione e quindi la conducibilità complessiva aumenta.

Se diminuisco la densità, c'è più spazio per l'aria e siccome se ho l'aria c'è l'irraggiamento termico, significa che quando ρ è molto basso, teoricamente vicino a zero, l'irraggiamento è molto più importante della conduzione soprattutto se ho il vuoto.

Se considero l'irraggiamento a ρ molto basso, aumentando la densità diminuisce l'effetto dell'irraggiamento. A densità bassa la conducibilità è più elevata, poi siccome diminuisce l'irraggiamento e aumenta la conduzione ad un certo punto ci sarà un punto di minimo.

Conduzione di calore in parete piana in cui c'è generazione di calore

Vediamo che succede quando ho una parete piana dove si genera calore, per esempio una sbarra di materiale di rame dove passa corrente.

In questa parete piana ho una generazione di calore \dot{q}_g''' è il calore generato, per unità di tempo e i tre apici significano per unità di volume. ogni apice indica una unità di lunghezza.

Supponiamo che le isotermi siano dei piani paralleli alle due facce della parete, le temperature sono delle superfici isotermi verticali.

Per ricavare le equazioni da integrare usiamo il metodo induttivo, cioè consideriamo un elementino dx al quale applichiamo i principi di conservazione dell'energia. Inoltre, supponiamo di essere in regime stazionario, allora il calore che entra nell'elementino deve essere pari al calore che esce globalmente:

$$\dot{q}_x = \dot{q}_g''' \cdot S dx = \dot{q}_{x+dx}$$

Esplicitiamo il rapporto incrementale tra i due calori scambiati dalle due pareti in x e in $x + dx$:

$$\frac{\dot{q}_x - \dot{q}_{x+dx}}{dx} = -\dot{q}_g''' \cdot S$$

Scriviamo i due calori immaginando che la conduzione sia di tipo Fourier:

$$\frac{-kS \frac{dT}{dx}\Big|_x + kS \frac{dT}{dx}\Big|_{x+dx}}{dx} = \frac{d}{dx} \left(kS \frac{dT}{dx} \right) = -\dot{q}_g''' \cdot S$$

Se supponiamo che k sia indipendente da x , possiamo portare kS fuori dal segno di derivata poiché anche S è costante:

$$kS \frac{d^2T}{dx^2} = -\dot{q}_g''' \cdot S \Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{\dot{q}_g'''}{k}$$

Questa è l'espressione che dobbiamo integrare per conoscere l'andamento di T in funzione di x .

Certamente però notiamo subito che T avrà un andamento quadratico in x .

Osservazione;

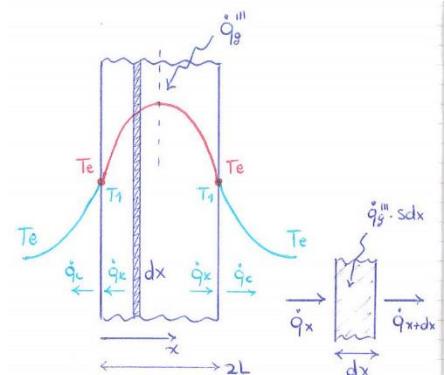
se supponiamo che $\dot{q}_g''' = 0$ torniamo al caso lineare, cioè $\frac{dT}{dx} = \text{cost}$ quindi T ha un andamento lineare.

Integriamo due volte ed otteniamo l'andamento di T :

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{q}_g'''}{k} z + c_1 \rightarrow T = -\frac{\dot{q}_g'''}{k} \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

Dove le costanti di integrazione c_1 e c_2 si possono determinare solo imponendo le condizioni al contorno. Per quanto riguarda le condizioni al contorno dal punto di vista fisico; immaginiamo che nella sbarra di materiale ci sia la generazione di \dot{q}_g''' e che all'esterno della sbarra ci sia aria o acqua che ha una temperatura T_e e che scambia calore per convezione è chiaro che l'andamento qualitativo sarà:

- All'esterno della sbarra un andamento di temperatura per strato limite; se supponiamo che all'esterno le due temperature siano le stesse e che le h (salto di temperatura tra T_e e T_1) siano le stesse allora i due andamenti sono uguali. La temperatura sul lato sinistro per $x = 0$ può essere un valore T_1 , ma siccome siamo in condizioni di simmetria a destra della parete per $x = 2L$ di nuovo siamo con temperatura T_1 . Più aumento l' h_e esterno più T_e si avvicina a T_1 ; se h_e tende ad infinito $T_1 \equiv T_e$.



Condizioni al contorno:

supponiamo che la temperatura su entrambe le facce sia pari a T_e :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \rightarrow T = T_e \\ x = 2L \rightarrow T = T_e \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_e = c_2 \Rightarrow c_2 = T_e \\ T_e = -\frac{\dot{q}_g''' \cdot L}{2k} 4L^2 + 2Lc_1 + c_2 \Rightarrow c_1 = \frac{\dot{q}_g''' \cdot L}{k} \end{cases}$$

$$\Rightarrow T - T_e = \frac{\dot{q}_g''' L}{k} \left(x - \frac{x^2}{2L} \right)$$

Abbiamo trovato l'andamento della temperatura del secondo ordine in x , con massimo in $x = L$:

$$x = L \rightarrow T_{T_e} = \frac{\dot{q}_g''' L^2}{k} \frac{L^2}{2};$$

quindi il massimo si ha in corrispondenza dell'asse di simmetria della parete e la parabola è appunto simmetrica.

Condizione al contorno 2.

Supponiamo che su entrambe le facce della parete la temperatura sia differente:

$$T_{e1} \neq T_{e2}, \text{ con } T_{e2} < T_{e1}.$$

Chiaramente l'andamento sarà ancora parabolico (T), ma imponendo diverse condizioni al contorno si ottengono diverse costanti di integrazione; allora l'andamento di T non è simmetrico ma il massimo è spostato più vicino alla temperatura maggiore

→ parabola non simmetrica.

Condizione al contorno 3.

Supponiamo di non imporre che $T_1 = T_e$ sulle pareti, ma di tener conto che c'è uno scambio per convezione tra la parete a T_1 e il fluido a T_e sia a sinistra che a destra;

quindi consideriamo che entrambe le facce della parete siano a temperatura T_1 e che ci sia un coefficiente di convezione esterna h_e uguale da entrambi i lati, dove il fluido esterno è a temperatura T_e .

È tutto simmetrico di nuovo;

$x = 2L \rightarrow$ il calore che arriva per conduzione, cioè la tangente alla linea rossa per $x = 2L$ deve essere uguale allo scambio di calore per convezione tra T_1 e T_e . Il calore che arriva sulla faccia di destra per conduzione deve essere uguale al calore sottratto per convezione all'esterno.

$$\dot{q}_k(2L) = \dot{q}_c$$

Il calore che arriva per conduzione sulla parete destra è uguale al calore che se ne va per convezione.

$$-kS \frac{dT}{dx} \Big|_{2L} = h_e S(T_{2L} - T_e)$$

> 0 perchè
 $\frac{dT}{dx} < 0$

< 0 perchè
 $T_{2L} > T_e$

$$-\frac{k}{h_e} \left(-\frac{\dot{q}_g'''}{k} 2L + c_1 \right) = \left(-\frac{\dot{q}_g'''}{k} \frac{4L^2}{2} + 2Lc_1 + c_2 - T_e \right)$$

$$\frac{\dot{q}_g''' 2L}{h_e} - \frac{kc_1}{h_e} = -\frac{\dot{q}_g''' \cdot 2L^2}{k} + 2Lc_1 + c_2 - T_e$$

$x = 0 \rightarrow$ il calore che arriva sulla faccia di sinistra per conduzione deve essere uguale al calore sottratto per convezione verso l'esterno:

$$\dot{q}_k(0) = \dot{q}_c ; \text{ è uguale al calore per conduzione}$$

$$-kS \frac{dT}{dx} \Big|_0 = h_e S(T_0 - T_e) \text{ a destra dell'uguale è il calore che va via.}$$

> 0 perchè
 $\frac{dT}{dx} > 0$ cresce
verso dx

< 0 perchè
 $T_0 > T_e$

$$\frac{k}{h_e} c_1 = (c_2 - T_e) \Rightarrow c_2 = T_e + \frac{k}{h_e} c_1$$

Avendo messo h_e al denominatore, se lo facciamo tendere ad ∞ torniamo al primo caso; $T_e \rightarrow T_1$.

Il calore che arriva sulla parete $x = 0$ deve essere uguale al calore che se ne va via per convezione.

Osservazione:

nel caso 1 in cui non era presente la convezione, abbiamo trovato $c_2 = T_e$; quel caso è l'analogo di questo dove però $h_e \rightarrow \infty$; infatti se $h_e \rightarrow \infty$, $c_2 \rightarrow T_e$.

Questo varrebbe anche per c_1 che sarebbe uguale a c_1 del caso precedente se $h_e \rightarrow \infty$.

N.B.:

considerando il caso nella sua totalità, tutto il calore generato nella parete, a regime stazionario, deve essere dissipato all'esterno:

$$\dot{q}_g''' \cdot S2L = 2h_e S(T_1 - T_e) \Rightarrow T_1 - T_e = \frac{\dot{q}_g''' L}{h_e}$$

Con questo bilancio globale possiamo determinare la temperatura estrema sulle facce, mentre con l'integrazione e le condizioni al contorno possiamo trovare l'andamento parabolico della temperatura all'interno.

Condizione al contorno 4.

Consideriamo che i coefficienti di convezione esterna e quindi anche le temperature siano diverse: $T_{e1} > T_{e2}$ e $h_{e1} > h_{e2}$; si osserva che h_{e2} ha una differenza di temperatura tra T_{e2} e T_2 minore che tra T_{e1} e T_1 quindi significa che $h_{e1} > h_{e2}$.

Anche questo caso si può risolvere analiticamente (è un po' lungo e non verrà chiesto dal professore);

l'andamento è parabolico all'interno e all'esterno sempre con lo strato limite.

allora le due facce della parete sono a temperature diverse $T_1 \neq T_2$.

Se all'interno della parete c'è generazione di calore, torniamo in un caso analogo al caso 2 dove l'andamento della temperatura nella parte è quadratico con il massimo non sull'asse di simmetria.

Conduzione di calore in cilindro pieno in cui c'è generazione di calore

Non è altro che il cavo di rame dove passa corrente, c'è corrente che passa siccome c'è una resistenza elettrica, per effetto Joule c'è RI^2 , quindi lo posso considerare come un caso corrispondente al passaggio di corrente in un cavo.

Volume finito → volume finito del fluido

Consideriamo un cilindro pieno di raggio R e lungo L all'interno del quale scorre calore corrente, che quindi genera un certo calore per unità di volume \dot{q}_g''' .

Supponiamo che le isoterme siano dei cilindri concentrici.

Consideriamo un elementino dr e i corrispondenti calori scambiati e generati.

$\dot{q}_r \rightarrow$ calore che arriva sulla superficie dalla parte interna; questo calore uscirà dalla superficie $2\pi(r + dr)$ che chiamiamo \dot{q}_{r+dr} . Dentro si genera il \dot{q}_g''' per cui a regime stazionario il calore che entra nell'elementino deve essere pari al calore che esce globalmente:

$$\dot{q}_r + \dot{q}_g''' \cdot 2\pi r dr L = \dot{q}_{r+dr}$$

Esplicitiamo il rapporto incrementale tra i due calori scambiati dalle due pareti $\ln r$ e $\ln(r + dr)$:

$$\frac{q_r - \dot{q}_{r+dr}}{dr} = -\dot{q}_g''' \cdot 2\pi r L$$

$$\frac{-kS_r \frac{dT}{dr}|_r + kS_{r+dr} \frac{dT}{dr}|_{r+dr}}{dr} = -\dot{q}_g''' \cdot 2\pi r L \text{ supponendo } k = \text{cost o un } k \text{ medio;}$$

$$k \frac{d}{dr} \left(S_r \frac{dT}{dr} \right) = k \frac{d}{dr} \left(2\pi r L \frac{dT}{dr} \right) = 2\pi L k \left(r \frac{dT}{dr} \right)$$

$$\Rightarrow 2\pi L k \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = -\dot{q}_g''' \cdot 2\pi r L$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{\dot{q}_g'''}{k} r$$

Integriamo due volte ed otteniamo l'andamento di T

$$r \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}_g'''}{k} r^2 + c_1 \rightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}_g'''}{k} \frac{r^2}{2} + \frac{c_1}{r}$$

$$\Rightarrow T = -\frac{\dot{q}_g'''}{2k} \frac{r^2}{2} + c_1 \ln(r) + c_2$$

L'andamento di T è di tipo quadratico e logaritmico.

Condizioni al contorno 1

Se il cilindro è cavo abbiamo un raggio interno R_1 e un raggio esterno R_2 .

Si torna al problema precedente dove $\dot{q}_g''' = 0$. Sarebbe un caso nuovo con $\dot{q}_g'' \neq 0$.

Condizioni al contorno 2

Se il cilindro è pieno, iniziano ad esserci problemi, il punto in $r = 0$ da problemi perché nell'espressione di T otterremmo $\ln(0)$ e nell'espressione di $\frac{dT}{dr}$ il secondo termine ($\frac{c_1}{r}$) andrebbe ad ∞ . La condizione di simmetria è imporre qualcosa per $R = L$, e poi imporre qualcosa per $R = 0$;

In base al principio di ragion sufficiente l'unica cosa che si può fare è imporre:

$$\frac{dT}{dr} = 0 \text{ in } r = 0, \text{ cioè } c_1 = 0$$

Infatti quando $r \rightarrow 0$ l'isoterma in 0 diventa una retta e non più un cilindro, allora se il gradiente di temperatura $\frac{dT}{dr}$ fosse diverso da 0 questo sarebbe direzionale mentre invece dovrebbe essere simmetrico. Il calore che arriva su questo elementino in $r = 0$ non può che essere zero, se non lo fosse ci sarebbe una direzionalità.

$$\rightarrow \text{si deve imporre } \frac{dT}{dr} = 0$$

Immaginiamo che in $r = R$ $T_R = T_e$:

$$r = R \rightarrow -\frac{\dot{q}_g''}{4k} R^2 + c_2 = T_e \Rightarrow c_2 = T_e + \frac{\dot{q}_g'' R^2}{4k}$$

$$\Rightarrow T - T_e = \frac{\dot{q}_g''}{4k} (R^2 - r^2) \rightarrow \text{andamento quadratico}$$

Una volta integrato riverificare sempre che con quelle soluzioni trovate devono ridare le condizioni al contorno ovvero che per $r = R \rightarrow T = T_e$.

$$\text{N.B.: in } r = 0 \rightarrow T = T_{max} = \frac{\dot{q}_g''}{4k} R^2$$

Se aggiungiamo di nuovo la condizione di convezione, all'esterno abbiamo l'andamento per cui la temperatura va con lo strato limite a T_e .

Imponiamo che in $r = R$ il calore scambiato per conduzione deve essere pari al calore sottratto per convezione dall'esterno dove immaginiamo una temperatura T_e e un coefficiente di convezione h_e :

$$\dot{q}_k(R) = \dot{q}_c$$

$-kS_R \frac{dT}{dr} \Big|_R = h_e S_R (T_R - T_e)$ il calore che arriva per conduzione è uguale al calore che se ne va per convezione.

$$\frac{k \dot{q}_g'''}{h_e 4k} R^2 = \left(-\frac{\dot{q}_g''' R^2}{4k} + c_2 - T_e \right) \Rightarrow c_2 = T_e + \frac{\dot{q}_g''' R^2}{4k} + \frac{k \dot{q}_g''' R}{2h_e}$$

Abbiamo trovato l'andamento, che è quadratico dentro al cilindro e che poi ha lo scambio di calore per convezione all'esterno.

$$\Rightarrow T - T_e = \frac{\dot{q}_g'''}{4k} (R^2 - r^2) + \frac{\dot{q}_g''' R}{2h_e}$$

Osservazione;

anche in questo caso se $h_e \rightarrow \infty$ la temperatura esterna tende alla temperatura sulla parete e riotteniamo lo stesso risultato del caso 2.1 dove la temperatura all'esterno non è influenzata dalla convezione.

Settimana 10

23-11-21

Estensione della superficie per disperdere più calore

Soltamente questo capitolo si chiama "alette di raffreddamento".

Ora studiamo il problema degli scambi di calore dal punto di vista dell'ingegneria elettrica, in cui si vuole disperdere più calore possibile per non danneggiare i materiali dei circuiti, al contrario dell'ingegneria meccanica in cui si vuole mantenere più calore possibile.

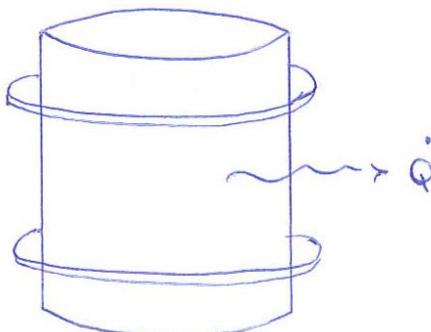
Supponiamo di avere un cilindro che disperde dal calore \dot{Q} , che per la legge di raffreddamento di Newton si scrive così:

$$\dot{Q} = hS(T_p - T_f)$$

Per aumentare questo calore si può aumentare h , S o $(T_p - T_f)$. Soltamente si aumenta il calore dissipato \dot{Q} aumentando la superficie di scambio S . Queste tecniche hanno permesso di fare computer molto più compatti. La problematica civile-meccanica è quella di disperdere meno calore, nell'elettrico invece bisogna disperdere calore.

Se T_p è la temperatura della parete, e se T_f è la temperatura ambiente allora la loro differenza è un valore fissato. h è più elevato se la convezione è forzata e più basso se la convezione è naturale. Quindi la cosa più semplice è aumentare la superficie di scambio.

Per estendere la superficie di scambio si mettono delle **alette di raffreddamento** attorno al cilindro.



Alette circonferenziali a sezione variabile o costante.

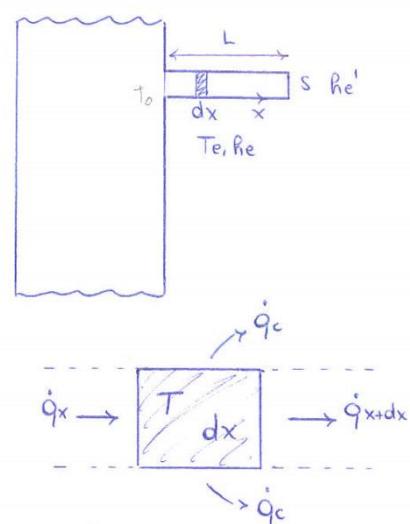
Noi studiamo il caso più semplice in cui c'è una sola barretta lunga L con sezione S , attaccata alla parete e che scambia calore per convezione con l'esterno, dove il fluido è a temperatura T_e e il coefficiente è h_e .

Aletta a spillo.

Supponiamo che la temperatura sia solo funzione di x : $T = T(x)$;

questo va bene se l'aletta è abbastanza sottile e il materiale conduttore ha un k abbastanza elevato in modo tale da poter trascurare la dipendenza da y .

Consideriamo l'elementino dx che ha una temperatura T , ed indichiamo gli scambi di calore per convezione \dot{q}_c lungo il perimetro laterale e per conduzione all'interno del materiale. a questo elementino applichiamo il principio di conservazione dell'energia. Temperatura uniforme in tutto il volume. a sinistra arriva del calore per convezione e va via un calore per conduzione.



A **regime stazionario**, il calore entrante deve essere pari al calore uscente globalmente:

$$\dot{q}_x = \dot{q}_c + \dot{q}_{x+dx}$$

$\dot{q}_c \rightarrow$ calore che esce per conduzione dalla superficie perimetrale.

$$-kS \frac{dT}{dx} \Big|_x = h_e p dx (T - T_e) - kS \frac{dT}{dx} \Big|_{x+dx}$$

$$\frac{kS \frac{dT}{dx} \Big|_{x+dx} - kS \frac{dT}{dx} \Big|_x}{dx} = h_e p (T - T_e)$$

$$\begin{aligned} kS \frac{d^2T}{dx^2} &= h_e p (T - T_e) \Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} = \frac{p h_e}{kS} (T - T_e) = m^2 (T - T_e) \\ &\Rightarrow \frac{d^2(T-T_e)}{dx^2} = m^2 (T - T_e) \quad (\text{tanto } T_e \text{ è una costante}) \end{aligned}$$

Abbiamo trovato una relazione del tipo $\ddot{x} = m^2 x$ la cui soluzione è:

$$T - T_e = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}.$$

c_1 e c_2 devono essere calcolate in base alle condizioni al contorno.

Condizioni al contorno 1

La condizione al contorno più vera è quella in cui all'estremità della barretta, cioè in $L = x$, il calore che arriva per conduzione sulla faccia sx è pari al calore che esce per convezione a dx , con $h'_e \neq h_e$ e in particolare $h'_e < h_e$; invece, in $x = 0$, dove l'aletta a spillo è saldata al materiale la temperatura è imposta dal cilindro:

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow T = T_0 \\ x = L \rightarrow q_k = q_0 \end{cases}$$

$q_k \rightarrow$ calore scambiato per conduzione nell'aletta che ha coefficiente di conducibilità k .

$q_0 \rightarrow$ il calore che esce dalla superficie per $x = L$ per convezione forzata o naturale

$$\begin{aligned} \begin{cases} T_e + c_1 + c_2 = T_0 \\ -kS \frac{dT}{dx} \Big|_L = h'_e S (T_L - T_e) \end{cases} &\Rightarrow -k[c_1 m e^{mL} - c_2 m e^{-mL}] = h'_e [c_1 e^{mL} - c_2 e^{-mL}] \\ \text{con } \frac{dT}{dx} &= mc_1 e^{mx} - mc_2 e^{-mx} \\ \Rightarrow \frac{T - T_e}{T_0 - T_e} &= \frac{\cosh[m(L-x)] + \frac{h'_e}{mk} \sinh[m(L-x)]}{\cosh(mL) + \frac{h'_e}{mk} \sinh(mL)} \end{aligned}$$

L'andamento di questa soluzione è di tipo esponenziale, tra T_0 e T_L ; notiamo che in $x = L$ non arriva con pendenza orizzontale ma con pendenza $\frac{dT}{dx} \neq 0$ (proporzionale al calore che fluisce nella sezione in $x = L$).

Invece, all'esterno della barretta, cioè per $x > L$ abbiamo il classico andamento di tipo strato limite della convezione fino alla temperatura T_e .

Condizioni al contorno 2

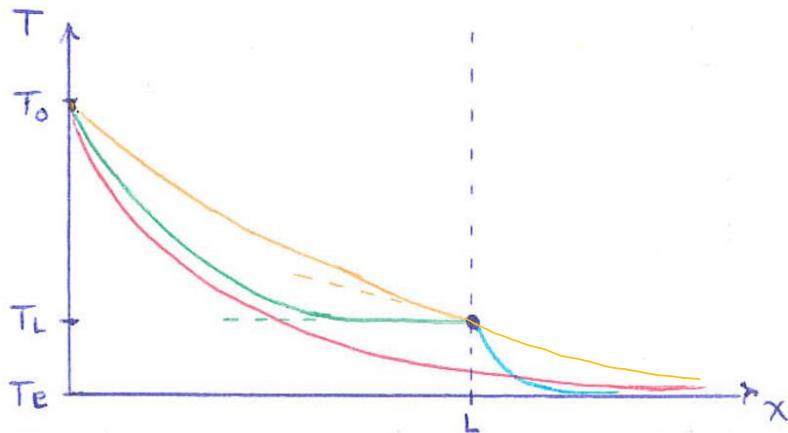
La condizione al contorno più approssimata suppone che la sezione S della barretta sia molto minore della lunghezza L ;

allora il calore in uscita dalla sezione in $x = L$ per convezione è trascurabile, cioè $h'_e \cong 0$; $h'_e \ll h_e$ questo significa che la punta dell'aletta è isolata termicamente.

Se $S \ll L \rightarrow h'_e \cong 0 \Rightarrow$

$$\frac{T - T_e}{T_0 - T_e} = \frac{\cosh[m(L - x)]}{\cosh(mL)}$$

Allora adesso l'andamento esponenziale tra T_0 e T_L arriva in $x = L$ con pendenza orizzontale poiché $h'_e \cong 0$, cioè in $x = L$ non ci deve essere scambio di calore, il calore scambiato per conduzione è nullo (curva verde).



Condizioni al contorno 3

La condizioni al contorno meno approssimata suppone che L è molto grande e che la temperatura in $x = L$ sia proprio T_e :

$$\begin{aligned} x = 0 &\rightarrow T_0 - T_e = c_1 + c_2 \rightarrow c_2 = T_0 - T_e - c_1 \\ x = L &\rightarrow T_L = T_e \rightarrow T_e + c_1 e^{mL} + c_2 e^{-mL} = T_e \end{aligned}$$

Poiché $L \rightarrow \infty$:

$$c_1 e^{m\infty} + c_2 e^{-m\infty} = 0 \rightarrow c_1 = 0 \text{ e } c_2 = T_0 - T_e$$

$$\Rightarrow T - T_e = (T_0 - T_e) e^{-mx} \Rightarrow \frac{T - T_e}{T_0 - T_e} = e^{-mx}$$

Andamento esponenziale che tende a T_e per $x \rightarrow \infty$. (andamento indicato in rosso)

Equazione generale della conduzione del calore: coordinate cartesiane.

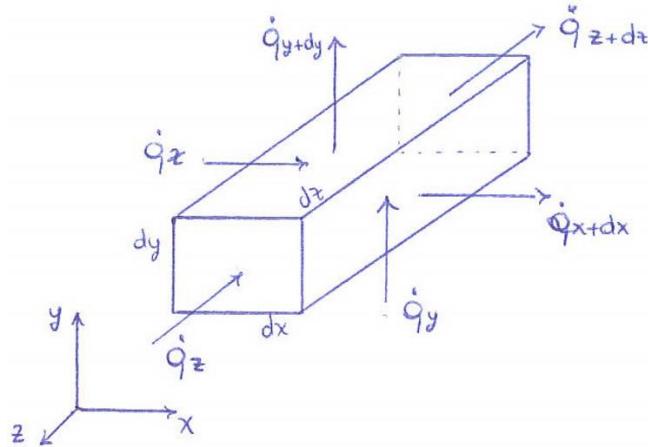
Vogliamo trovare l'equazione generale della conduzione del calore.

Vogliamo ricavare l'equazione generale valida per tutti i problemi della conduzione termica, dalla quale si possono dedurre tutti i casi particolari già visti e anche i successivi.

Ricaviamola in coordinate cartesiane;

consideriamo un corpo in cui la temperatura è funzione di quattro variabili, cioè le tre variabili spaziali x, y, z e il tempo t : $T = T(x, y, z, t)$ è funzione anche del tempo in regime transitorio.

consideriamo un elementino di volume $dxdydz$ fermo, in cui all'interno c'è una generazione di calore per unità di volume \dot{q}_g''' e non consideriamo il moto di fluidi perché studiamo la conduzione.



Ricaviamo l'equazione generale dal primo principio della termodinamica per questo sistema chiuso:

$$dq - dl = du + de_c + de_p$$

Il volume $dxdydz$ è il nostro sistema termodinamico.

Poiché il sistema è fermo e non c'è spostamento di materiale trascuriamo de_c e de_p ; inoltre non c'è lavoro scambiato dl ;

$$\Rightarrow dq = du$$

Moltiplichiamo per la massa e consideriamo nell'unità di tempo:

$$\frac{dU}{dt} = M\dot{q}$$

$dU \cdot M = dU$; nell'unità di tempo diventa $\frac{dU}{dt}$. Stessa cosa per il dq .

- $\frac{du}{dt} = \rho \underbrace{\frac{dxdydz}{dt}}_{M=\rho V} \frac{du}{dt} \underset{V=cost \rightarrow du=c_v dt}{=} \rho dx dy dz c_v \frac{\partial T}{\partial t};$

la temperatura dipende da 4 variabili allora la derivata è una derivata parziale, siamo passati dalla derivata esatta a quella parziale.

dove $\frac{du}{dt}$ è la variazione di energia interna del corpo per unità di tempo

- $$\begin{aligned} M\dot{q} &= \dot{q}_x + \dot{q}_y + \dot{q}_z + \dot{q}_g''' dxdydz - \dot{q}_{x+dx} - \dot{q}_{y+dy} - \dot{q}_{z+dz} = \\ &= -kdydz \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_x + kdydz \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x+dx} - kdx dz \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_y + \\ &\quad + kdx dz \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y+dy} - kdx dy \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_z + kdx dy \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z+dz} + \\ &\quad + \dot{q}_g''' dxdydz \end{aligned}$$

Il calore generato \dot{q}_g''' lo consideriamo entrante nel sistema termodinamico. Non tutti i materiali sono di tipo Fourier, i tessuti del corpo umano non sono foureiani.

Avendo supposto il **materiale isotropo**, cioè in cui k è lo stesso in tutte le direzioni: $k_x = k_y = k_z = k$. Nel corpo umano questo non è vero.

Dobbiamo rendere l'equazione indipendente dal volume quindi dividiamo tutto per $dxdydz$, e otteniamo:

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[k \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[k \frac{\partial T}{\partial z} \right] + \dot{q}_g'''$$

Andando a dividere per $dxdydz$ ottengo i rapporti incrementalni.

Questa è l'equazione generale della conduzione dalla quale si possono ricavare tutti i problemi visti fino ad ora con il metodo induttivo.

k è lo stesso e lo portiamo in evidenza, e dividiamo per ρc dove $c = c_p = c_v$ poiché in un materiale solido $c_p = c_v$ poiché le trasformazioni sono sia isobare che isocore; otteniamo:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{\dot{q}_g'''}{\rho c} = \frac{k}{\rho c} \nabla^2 T + \frac{\dot{q}_g'''}{\rho c}$$

A regime stazionario $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ e il ρc non entrava in gioco, quello che conta nella conduzione è solo il *k del materiale*.

Osservazione;

in generale, considerando i fenomeni transitori, non compare k da solo ma il parametro fisico che entra in gioco è la **diffusività termica**:

$$\alpha = \frac{k}{\rho c}, \quad \text{con } [\alpha] = \frac{L^2}{T}$$

Notiamo che la diffusività termica ha le stesse dimensioni della diffusività di quantità di moto della fluidodinamica $[v] = \frac{L^2}{T}$. Sono parametri analoghi in due fenomeni di trasporto diversi. Allora, i due fenomeni della trasmissione del calore e del moto dei fluidi sono analoghi perché il parametro α è analogo al parametro v . Con la legge di Fick trasporto di massa.

→ analogia tra i fenomeni fluidodinamici e fenomeni termici.

La stessa analogia si potrà fare con il trasporto di massa in cui il coefficiente di diffusione d o di diffusività ha le stesse dimensioni di α e $v \Rightarrow 3$ fenomeni di trasporto analoghi:

- Trasporto di massa
- Trasporto di calore
- Trasporto di quantità di moto

In definitiva **l'equazione generale della conduzione di calore** è:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{\dot{q}_g'''}{\rho c}$$

Con α inversamente proporzionale alla densità ρ e al calore specifico del materiale. è tridimensionale e funzione del tempo.

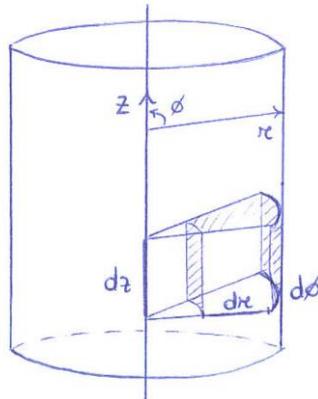
Esercizio: Utilizzare questa equazione per ritrovare tutte le equazioni trovate finora nel caso della conduzione di calore!

→ ρc è molto piccolo, la diffusività termica α è molto alta, il calore si diffonde molto velocemente. Un ρc molto elevato diffonde poco il calore. Questo parametro α è molto importante per valutare il transitorio dei problemi termici.

È un'equazione tridimensionale in coordinate cartesiane.

Equazione generale della conduzione del calore: coordinate cilindriche

Consideriamo un cilindro di materiale e le tre variabili z, r, ϕ con ϕ angolo tra r e z ; allora l'elementino di volume $drdzd\phi$ è una fetta.



Si ottiene la seguente equazione generale della conduzione del calore in coordinate cilindriche:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{\dot{q}_g'''}{\rho c}$$

Non è necessario ricordarlo;

Problema;

vogliamo risolvere il Laplaciano di T in due dimensioni rispetto ad x ed y :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Il problema fisico dal quale ricaviamo questa equazione è quello di una trave incastrata su due lati, rettangolare, soggetta ad una temperatura T_1 sulle due facce estremali; si vuole trovare la distribuzione di temperatura nella sezione di mezzeria.

Allora, nell'ipotesi di **regime stazionario**, e considerando che non c'è generazione di calore, otteniamo:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \text{ e } \dot{q}_g''' = 0$$

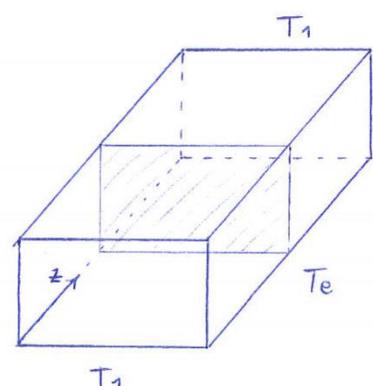
Inoltre, immaginiamo che ci sia simmetria rispetto all'asse z , quindi:

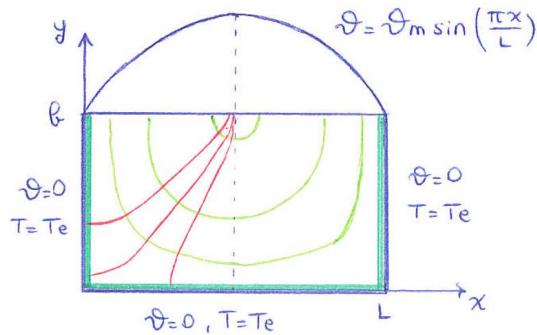
$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0;$$

allora l'equazione generale del calore diventa:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Consideriamo che la faccia della trave è larga L e alta b .





Inoltre, supponiamo che all'esterno ci sia un fluido alla temperatura T_e .

Possiamo riscrivere l'equazione nel seguente modo e poi scegliere una variabile $\theta = T - T_e$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(T-T_e)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(T-T_e)}{\partial y^2} &= 0 \\ \rightarrow \frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2} &= 0, \text{ con } \vartheta = T - T_e. \end{aligned}$$

Le condizioni al contorno richiedono che sui tre lati in $x = 0, x = L$ e $y = 0$ sia $T = T_e$ e cioè $\theta = 0$, invece sul lato $y = b$, T è tale che $\theta = \theta_m \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ condizione di tipo seno sul lato superiore.

Risolviamo l'equazione sfruttando il **metodo della separazione delle variabili**, cioè supponiamo che la soluzione θ sia il prodotto di una funzione X solo funzione di x e una funzione Y solo funzione di y :

$$\theta = X(x) \cdot Y(y).$$

Allora si ottiene:

$$Y \frac{d^2X}{dx^2} + X \frac{d^2Y}{dy^2} = 0 \rightarrow -\frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2}, \quad \forall x \text{ e } \forall y$$

Poiché questa uguaglianza deve valere su tutta la faccia, allora deve valere per ogni $\forall x$ e $\forall y$; di conseguenza il termine a sinistra non deve essere funzione di x e il termine a destra non deve essere funzione di y , e quindi devono essere uguali ad una costante λ^2 :

$$-\frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} = \lambda^2$$

Così otteniamo due equazioni:

$$\begin{cases} \frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \\ \frac{d^2Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \rho^2 + \lambda^2 = 0 \\ \rho^2 = \lambda^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \rho_1 = i\lambda \\ \rho_2 = -i\lambda \\ \rho_3 = \lambda \\ \rho_4 = -\lambda \end{cases}$$

Di conseguenza otteniamo X e Y :

$$\begin{cases} X = C'e^{i\lambda x} + C''e^{-i\lambda x} = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) \\ Y = Ce^{-\lambda y} + De^{\lambda y} \end{cases}$$

In definitiva, abbiamo trovato la seguente espressione per la soluzione di θ , che dipende dalle costanti A, B, C, D che devono essere determinate con le condizioni al contorno sui 4 lati:

$$\theta = T - T_e = [A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)](Ce^{-\lambda y} + De^{\lambda y}) = X(x) \cdot Y(y)$$

Imponiamo le 4 condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} \cdot x = 0 \rightarrow \theta = 0 &= A(Ce^{-\lambda y} + De^{\lambda y}), \forall y \\ \Rightarrow A &= 0 \\ \Rightarrow \theta &= B \sin(\lambda x) \cdot (Ce^{-\lambda y} + De^{\lambda y}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot y = 0 \rightarrow \vartheta = 0 &= B \sin(\lambda x) \cdot (C + D), \forall x \\ \Rightarrow C + D &= 0 \rightarrow D = -C \\ \Rightarrow \theta &= B \sin(\lambda x) \cdot C[e^{-\lambda y} - e^{\lambda y}] \end{aligned}$$

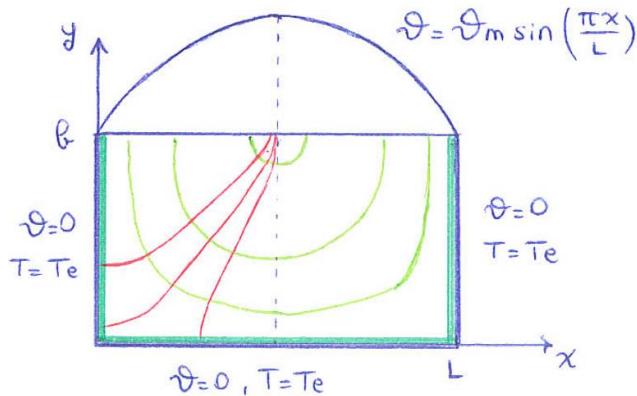
$$\begin{aligned} \cdot x = L \rightarrow \theta = 0 &= BC \sin(\lambda L)(e^{-\lambda y} - e^{\lambda y}), \forall y \\ \Rightarrow \sin(\lambda L) &= 0 \rightarrow \lambda L = n\pi \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{n\pi}{L}, \text{ con } n = 1, 2, \dots \\ \Rightarrow \theta &= BC \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(e^{-\frac{n\pi}{L}y} - e^{\frac{n\pi}{L}y}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot y = b \rightarrow \vartheta = \vartheta_m \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) &= BC \underbrace{\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)}_{2 \sinh(\lambda b)} \left(e^{-\frac{n\pi}{L}b} - e^{\frac{n\pi}{L}b}\right) \\ \Rightarrow n = 1 \text{ e } BC &= \frac{\vartheta_m}{2 \sinh(\lambda b)} \end{aligned}$$

In definitiva la soluzione θ è:

$$\theta = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cdot \frac{\vartheta_m \cdot \sinh(\pi y/L)}{2 \cdot \sinh(\pi b/L)}$$

Osservazione;



per vedere la termocinetica come si vede la termofluidodinamica, disegniamo le isoterme così da poter capire come vanno gli scambi di calore.

Poiché l'isoterma zero è simmetrica rispetto al piano mediano, le altre isoterme hanno anch'esse un andamento simmetrico. Le linee verdi sono le isoterme.

Allora poiché, i flussi termici per conduzione sono sempre ortogonali alle isoterme, sono quelli in figura. La forma dei flussi termici è quella rappresentata dalle curve rosse.

Problemi transitori nel tempo

Studiamo i casi più semplici dei fenomeni transitori.

Convezione forzata in una sfera

Raffreddamento di una sfera, tempra.

Consideriamo una sfera rovente a temperatura molto elevata e di volerla raffreddare facendoci scorrere l'acqua dal rubinetto, cioè la raffreddiamo per convezione. Supponiamo convezione forzata.

Sicuramente per primi si raffredderanno gli strati esterni; un calore va dall'interno verso l'esterno, se il getto non è simmetrico allora il fenomeno potrebbe non essere simmetrico. Problema non stazionario quadridimensionale $T = T(x, y, z, t)$.

Bisogna fare delle ipotesi semplificative così da poterlo integrare analiticamente.*

Chiaramente, nella realtà ci sono delle zone della sfera che si raffreddano prima di altre, ad esempio le zone colpite più direttamente dall'acqua, e quindi le isoterme sarebbero diverse da zona a zona.

Invece, immaginiamo che il raffreddamento sia uniforme su tutta la sfera e allora l'isoterma è una sfera concentrica con il centro della sfera.

Quindi, man mano che gli strati più esterni della sfera si raffreddano, all'interno abbiamo ancora la temperatura iniziale elevata, e così si genera un flusso termico in direzione radiale uscente.

Allora, chiaramente il problema è tridimensionale oltre che non stazionario.

*Facciamo una semplificazione:

supponiamo che il k_s del materiale solido di cui è costituita la sfera sia molto elevato:

se k_s molto elevato $\rightarrow \Delta T$ molto piccolo, cioè non ci sono differenze di temperatura all'interno della sfera e la temperatura all'interno della sfera è unica e tutta concentrata nel baricentro.

⇒ Ipotesi di parametri concentrati

La temperatura è come se fosse uguale concentrata in tutta la sfera. La temperatura allora non dipende dallo spazio ma dipende solo dal tempo. Nonostante sia chiaro che nella realtà non è così, questa ipotesi ci permette di fare un'integrazione molto semplice dell'equazione di raffreddamento, che è utile come prima approssimazione rispetto al caso tridimensionale.

Dal primo principio della termodinamica abbiamo di nuovo che la variazione dell'energia interna del sistema è uguale al calore scambiato:

$$dU = dq \rightarrow \text{moltiplico per la massa: } dU = dQ$$

N.B.: è come se fossimo tornati all'ipotesi termodinamica di stato termodinamico di equilibrio, in cui c'era una sola variabile in tutto il sistema termodinamico nelle condizioni di equilibrio.

Analogamente in questo caso la temperatura è la stessa in tutto il sistema e quindi non si devono scrivere le equazioni interne al sistema ma basta l'equazione del primo principio.

Consideriamo la relazione per unità di tempo ed otteniamo:

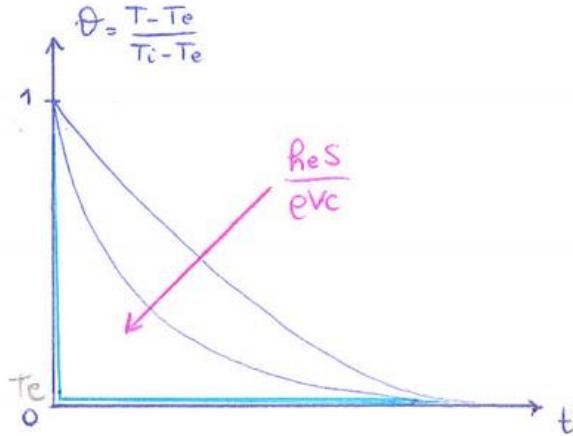
$$\frac{dU}{dt} = \dot{Q} \rightarrow \rho V c \frac{dT}{dt} = -h_e S(T - T_e),$$

dove il calore è scambiato per convezione con un fluido a temperatura T_e e coefficiente di convezione h_e , e dove T è la temperatura uniforme in tutta la sfera. Nel calore scambiato per convezione è sempre meglio scrivere la differenza di temperatura tra l'esterno e l'interno (si rispetta così la convenzione termodinamica).

Separiamo le variabili ed integriamo:

$$\frac{dT}{T - T_e} = -\frac{h_e S}{\rho V c} dt \rightarrow \ln\left(\frac{T - T_e}{T_i - T_e}\right) = -\frac{h_e S}{\rho V c} t$$

$$\Rightarrow \frac{T - T_e}{T_i - T_e} = e^{-\frac{h_e S}{\rho V c} t}$$



Facciamo un grafico di $\vartheta = (T - T_e)/(T_i - T_e)$ temperatura adimensionale che parte da 1 in funzione di t :

- Per $t = 0$, $\vartheta = 1$, cioè $T = T_i$
- Per $t \rightarrow \infty$, $\vartheta \rightarrow 0$, cioè $T \rightarrow T_e$

\Rightarrow curva asintotica verso lo zero

Il parametro di raffreddamento è: $\frac{h_e S}{\rho V c}$

Maggiore è questo parametro e più rapido è il raffreddamento; se il parametro fosse infinitamente grande, l'andamento sarebbe un gradino.

Osservazione:

nell'espressione del parametro di raffreddamento possiamo dividere tutto per S , ed osserviamo che $\frac{V}{S}$ è proporzionale ad una lunghezza L :

$$\frac{h_e S}{\rho V c} = \frac{h_e}{\rho(V/S)c} \cong \frac{h_e}{\rho L c}$$

Allora fissati ρ , h_e e c il parametro di raffreddamento è maggiore quanto più è piccolo L ; quindi, ad esempio, una sfera più piccola dello stesso materiale e che viene raffreddata per convezione con lo stesso fluido, si raffredda più velocemente.

Infine, riprendiamo l'esponente dell'andamento della temperatura e riscriviamolo nel seguente modo:

$$\frac{h_e S}{\rho V c} t = \frac{h_e L^2}{\rho L^3 c} t = \left(\frac{h_e L}{k_s} \right) \left(\frac{k_s t}{\rho L^2 c} \right) = B_i \cdot F_0$$

$k_s \rightarrow$ è del solido

Dove i due termini tra parentesi sono parametri adimensionali che chiamiamo NUMERO DI BIOT e NUMERO DI FOURIER:

$$B_i = \frac{h_e L}{k_s} \quad F_0 = \frac{k_s t}{\rho L^2 c}.$$

Allora l'andamento della temperatura si riscrive così:

$$\frac{T - T_e}{T_i - T_e} = e^{-B_i F_0}$$

Chiaramente, poiché il numero di Fourier dipende dal tempo e non è costante, mentre il numero di Biot dipende solo dalle condizioni geometriche e da proprietà dei fluidi.

Tornando all'ipotesi di parametri concentrati, abbiamo supposto che k_s fosse molto elevato; allora B_i è molto piccolo. Se k_s fosse molto elevato posso fare l'ipotesi dei parametri concentrati.

Quindi, l'**IPOTESI DI PARAMETRI CONCENTRATI** è valida se il numero di Biot è molto piccolo:

$$B_i < 0,1 \rightarrow \text{così l'errore nella distribuzione di temperatura è entro il 5\%}.$$

Programma in cui fino a Natale non si fa più il riassunto ma solo il ricevimento per le domande; il riassunto si fa nelle due settimane di gennaio che concludono il corso.

Problema in regime transitorio;

Problema del radiatore

Il radiatore è un contenitore metallico contenente dell'acqua che nelle condizioni iniziale è alla temperatura $T_i = 100^\circ C$ mentre all'esterno la temperatura è minore della temperatura di fusione, cioè $T_e > T_f$, ad esempio $T_e = -10^\circ C$.

Dopo quanto tempo l'acqua interna congela?

Avendo supposto che le pareti del contenitore siano metalliche, non c'è differenza tra la temperatura dell'acqua interna e delle pareti.

Il fluido esterno con temperatura T_e ha un coefficiente di conduzione h_e .

Osservazione:

in questo caso, l'ipotesi di parametri concentrati è chiaramente verificata perché all'interno la convezione naturale favorisce l'uniformità della temperatura interna finché non si forma il solido.

Si può applicare lo stesso bilancio tra energia interna e calore scambiato, quindi di nuovo $\vartheta = (T - T_e)/(T_i - T_e)$ parte da 1 e tende a 0 esponenzialmente:

$$\frac{T - T_e}{T_i - T_e} = e^{-\frac{h_e S}{\rho V c} t}$$

Se voglio sapere quanto tempo ci vuole perché questa acqua arrivi a zero? Trovo t_f

Però, quando $\theta = \theta_f = (T_f - T_e)/(T_i - T_e)$, con T_f temperatura di fusione, comincia il passaggio di stato e l'acqua comincia a congelare.

Allora, sfruttando la relazione appena scritta valutata in $T = T_f$ possiamo determinare il tempo t_f in cui inizia il congelamento:

$$\frac{T_f - T_e}{T_i - T_e} = e^{-\frac{h_e S}{\rho V c} t_f} \Rightarrow t_f$$

A questo punto il fluido passa dallo stato liquido allo stato solido mantenendo la temperatura costante $T_i = T_f$ finché non è tutto ghiaccio (al tempo t_g).

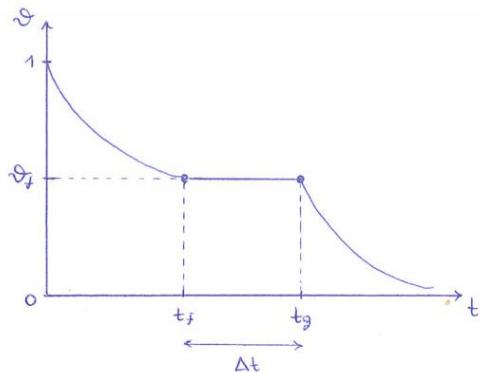
Imponiamo lo stesso bilancio:

$$d\dot{Q} = dU \rightarrow \underbrace{h_e S(T_e - T_f)}_1 = \underbrace{q_L \frac{dM}{dt}}_2$$

1. Calore scambiato per convezione con l'esterno con salto di temperatura fisso perché il corpo ha $T = T_f$ costante.
2. Variazione di energia interna con q_L calore latente di solidificazione. È il calore latente per la variazione di massa nel tempo.

$$h_e S (T_e - T_f) \Delta t = q_L M \Rightarrow \Delta t$$

La massa M erano i litri di acqua presenti dentro.



Osservazione:

il calore latente per unità di massa moltiplicato per la massa restituisce la quantità di calore totale da sottrarre per passare da liquido a solido, scambiato per convezione per unità di tempo.
così possiamo determinare proprio l'intervallo di tempo Δt necessario per il completo passaggio di stato.

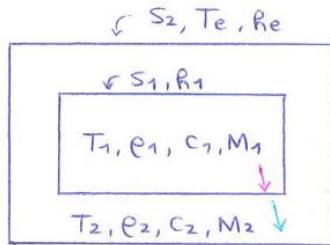
A questo punto, il fluido è tutto ghiacciato e la temperatura prosegue con un andamento esponenziale simile al precedente.

Estensione del problema del radiatore

Capitolo 3;

soggetto in corso di anestesia e ipertermia e la possibilità di rilevarlo;

Facciamo riferimento ad un vaso di terracotta; nel caso del radiatore se è un metallo, siccome la conduttività è elevata, allora la temperatura del metallo è esattamente uguale a quella dell'acqua. Ora supponiamo di avere un vaso di terracotta, ha una conduttività molto inferiore al metallo, quindi dobbiamo distinguere la temperatura del vaso rispetto a quella dell'acqua all'interno del vaso.



S_1 superficie interna del vaso, S_2 superficie esterna del vaso.

Il problema è il raffreddamento dell'acqua verso l'esterno.

Questa è un'estensione del problema del radiatore nel caso in cui le pareti del radiatore non siano trascurabili, cioè nel caso in cui non si possa trascurare la capacità termica delle pareti, che quindi hanno una temperatura $T_2 \neq T_1$, con $T_1 > T_2 > T_e$.

Allora il problema dipende anche dalle caratteristiche del contenitore.

Il fluido interno è acqua a temperatura T_1 , densità ρ_1 calore specifico c_1 , massa M_1 , limitata dalla superficie S_1 e che scambia calore per convezione con un coefficiente h_1 con la parete.

Di nuovo sfruttando l'ipotesi di parametri concentrati, immaginando che la temperatura T_1 dell'acqua sia uniforme dappertutto. Il materiale della parete è caratterizzato da T_2, ρ_2, c_2, M_2 e scambia calore per

convezione con l'esterno in cui il fluido è a temperatura T_e con coefficiente di convezione h_e attraverso la superficie S_2 .

Applichiamo il bilancio imposto dal primo principio della termodinamica sia all'acqua che alla parete:

$$dU = d\dot{Q} \rightarrow \begin{cases} M_1 c_1 \frac{dT_1}{dt} = h_1 S_1 (T_2 - T_1) \\ M_2 c_2 \frac{dT_2}{dt} = h_1 S_1 (T_1 - T_2) - h_e S_2 (T_2 - T_e) \end{cases}$$

$h_1 S_1 (T_2 - T_1)$ → calore scambiato per convezione tra l'interno e la parete interna del vaso.

$h_1 S_1 (T_1 - T_2)$ → calore ricevuto dall'acqua interna

$h_e S_2 (T_2 - T_e)$ → calore scambiato per convezione tra l'esterno e la superficie esterna

Abbiamo ottenuto un sistema di due equazioni in due incognite in cui non possiamo separare le variabili.

Dividiamo la prima per $M_1 c_1$ e la seconda per $M_2 c_2$ ed indichiamo con k_1, k_2, k_3 i coefficienti che moltiplicano le temperature:

$$\begin{cases} \frac{dT_1}{dt} = \frac{h_1 S_1}{M_1 c_1} (T_2 - T_1) = k_1 (T_2 - T_1) \\ \frac{dT_2}{dt} = \frac{h_1 S_1}{M_2 c_2} (T_1 - T_2) - \frac{h_e S_2}{M_2 c_2} (T_2 - T_e) = k_2 (T_1 - T_2) - k_3 (T_2 - T_e) \end{cases}$$

Per riuscire a separare le variabili facciamo la derivata della prima equazione rispetto al tempo, e poi sostituiamo $\frac{dT_2}{dt}$ con la seconda equazione:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T_1}{dt^2} &= k_1 \frac{dT_2}{dt} - k_1 \frac{dT_1}{dt} = k_1 k_2 (T_1 - T_2) - k_1 k_3 (T_2 - T_e) - k_1 \frac{dT_1}{dt} = \\ &= -k_1 k_2 \frac{1}{k_1} \frac{dT_1}{dt} - k_1 k_3 \left(T_1 + \frac{1}{k_1} \frac{dT_1}{dt} \right) + k_1 k_3 T_e - k_1 \frac{dT_1}{dt} \\ &\frac{d^2 T_1}{dt^2} + (k_1 + k_2 + k_3) \frac{dT_1}{dt} + k_1 k_3 T_1 = k_1 k_3 T_e. \end{aligned}$$

Dove abbiamo fatto le seguenti sostituzioni:

$$\frac{1}{k_1} \frac{dT_1}{dt} = -(T_2 - T_1)$$

$$T_1 + \frac{1}{k_1} \frac{dT_1}{dt} = T_2 \text{ dalla prima equazione}$$

Abbiamo trovato un'equazione del secondo ordine a coefficienti costante non omogenea, dove l'omogenea associata è:

$$\rho^2 + (k_1 + k_2 + k_3)\rho + k_1 k_3 = 0 \Rightarrow \rho_1 \text{ e } \rho_2;$$

invece la soluzione particolare è:

$$T_1 = T_e,$$

e deriva dal considerare $T_1 = \text{cost}$ nell'equazione.

In definitiva la soluzione è: $T_1 = A e^{\rho_1 t} + B e^{\rho_2 t} + T_e$

Determiniamo le due costanti A e B imponendo le condizioni al contorno:

- $t = 0 \rightarrow T_1 = A + B + T_e$, cioè impongo il valore iniziale di T_1 ;
- $t = 0 \rightarrow T_1 = T_2 \rightarrow \frac{dT_1}{dt} = 0 = A\rho_1 + B\rho_2$

Cioè impongo che nelle condizioni iniziali c'è un equilibrio termico tra T_1 e T_2 .

Così con queste due equazioni nelle due incognite A e B possiamo determinare proprio A e B .

Il sistema di circolazione del sangue è un semplice scambiatore di calore.

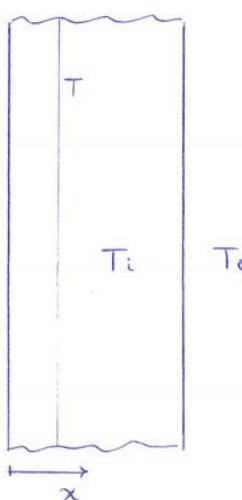
Si ottiene ipertermia maligna se si interrompe la circolazione del sangue della parte centrale. Aumenta la temperatura della parte centrale se smette di funzionare lo scambiatore di calore con la parte esterna, il calore invece di essere portato via, aumenta. In alcuni casi a seguito dell'anestesia, alcuni soggetti hanno una reazione allergica e la temperatura aumenta.

Problema di conduzione transitoria di una parete

Consideriamo una parete, in cui le isoterme sono delle superfici verticali con normale x .

Immaginiamo che non ci sia generazione di calore, cioè $\dot{q}_g''' = 0$, e che il problema sia monodimensionale lungo x ; allora l'equazione generale della conduzione diventa:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$



Molto complicato risolvere analiticamente nel dettaglio questo problema, quindi diamo solo l'impostazione iniziale.

Sfruttiamo il **metodo della separazione delle variabili**, cioè immaginiamo che la temperatura T che è funzione di x e di t sia il prodotto di due funzioni X funzione solo di x e θ funzione solo di t :

$$T(x, t) = X(x) \cdot \theta(t)$$

Quindi dall'equazione della conduzione otteniamo:

$$x \frac{d\theta}{dt} = \alpha \theta \frac{d^2 X}{dx^2}$$

Indichiamo con Θ il solito rapporto tra le temperature, in cui T_e è la temperatura del fluido esterno e T_i è la temperatura iniziale della parete:

$$\Theta = \frac{T - T_e}{T_i - T_e}$$

Separiamo le variabili ed otteniamo:

$$\frac{1}{x} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{\alpha \theta} \frac{d\theta}{dt}, \forall x \text{ e } \forall t$$

Che devono essere uguali per ogni valore di x e t quindi il primo membro non può essere funzione di x e il secondo membro non può essere funzione di t ;

allora devono essere uguali ad una costante $-\lambda^2$ (questa costante non può essere positiva e il perché lo vedremo dopo):

$$\frac{1}{x} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{\alpha \theta} \frac{d\theta}{dt} = -\lambda^2$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \\ \frac{d\theta}{dt} + \lambda^2 \alpha \theta = 0 \end{cases}$$

Separiamo le variabili nella seconda ed integriamo:

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{\theta} &= -\lambda^2 \alpha dt \rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta} = -\lambda^2 \alpha \int_0^t dt \rightarrow \ln\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right) = -\alpha \lambda^2 t \\ \rightarrow \frac{\theta}{\theta_0} &= e^{-\alpha \lambda^2 t} \Rightarrow \theta = \theta_0 e^{-\alpha \lambda^2 t}.\end{aligned}$$

Osserviamo che è stato necessario mettere il segno meno alla costante λ^2 , altrimenti θ sarebbe cresciuto esponenzialmente nel tempo e così anche la temperatura, ma non essendoci generazione di calore questo non avrebbe avuto senso.

Invece dalla prima otteniamo:

$$\rho^2 = -\lambda^2 \rightarrow \rho_1 = i\lambda \text{ e } \rho_2 = -i\lambda \Rightarrow X = Ae^{i\lambda x} + Be^{-i\lambda x}.$$

In definitiva la temperatura ha la seguente espressione:

$$T(x, t) = \theta_0 e^{-\alpha \lambda^2 t} \cdot (Ae^{i\lambda x} + Be^{-i\lambda x})$$

Di questo problema lasciamo solo la ricerca della soluzione generale, senza mettere le condizioni al contorno che sono tantissime.

Corpo semiinfinito

Con il corpo semiinfinito si simula il corpo umano.

Consideriamo in $x = 0$ l'interfaccia tra il corpo umano, immaginato come un corpo semiinfinito e l'esterno in cui c'è un fluido convettivo.

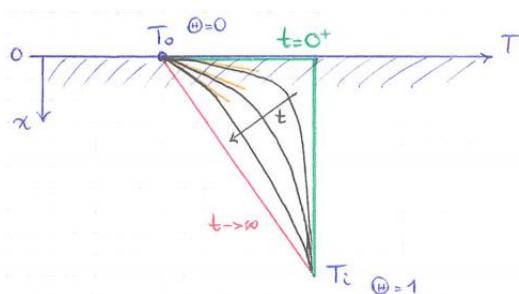
La temperatura interna T_i rimane costante con il tempo ad una certa distanza dall'interfaccia, come accade anche nel terreno.

Supponiamo di raffreddare, non consideriamo il congelamento ma solo il raffreddamento, la piastra a contatto con il corpo ha temperatura T_0 .

Immaginiamo che nelle condizioni in cui la temperatura T_i è la stessa dappertutto. Poi, all'istante $t = 0^+$ portiamo la temperatura nel punto di interfaccia alla temperatura T_0 di raffreddamento.

Quindi all'istante $t = 0^+$ la distribuzione di temperatura è quella in verde;

Con il passare del tempo la temperatura a grande distanza rimane T_i mentre via via si raffreddano gli strati più superficiali. Qual è la distribuzione di temperatura che si ha nel tempo nel terreno?



Chiaramente per $t \rightarrow \infty$ si raggiunge una situazione stazionaria.

L'equazione generale della conduzione per questo problema è la stessa di prima poiché consideriamo il problema monodimensionale, in cui le isoterme sono funzioni solo di x e del tempo, e non c'è generazione di calore:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Possiamo riscriverla così indicando con Θ il rapporto tra le temperature:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}, \text{ con } \Theta = \frac{T - T_0}{T_i - T_0}.$$

Allora il punto in cui si impone T_0 ha $\Theta = 0$ e il punto all'infinito ha $\Theta = 1$; quindi gli andamenti della temperatura vanno da $\Theta = 0$ a $\Theta = 1$, con asintoto la curva per $t \rightarrow \infty$.

Facciamo l'analisi dimensionale di Θ che è funzione di x, t e α :

$\Theta = \Theta(x, t, \alpha)$ è una temperatura adimensionale

Quindi esprimiamo Θ come il prodotto di una costante per x, t e α elevati a certi esponenti:

$$\Theta = \text{cost} \cdot x^a t^b \alpha^c \rightarrow 0 = L^a T^b \left(\frac{L^2}{T} \right)^c \rightarrow 0 = L^{a+2c} \cdot T^{b-c}$$

\downarrow

$$\begin{cases} 0 = a + 2c \\ 0 = b - c \end{cases} \quad \boxed{\begin{array}{l} a = -2c \\ b = c \end{array}}$$

Θ è adimensionale, ha dimensione zero

$$\Theta = \text{cost} x^{-2c} t^c \alpha^c = \text{cost} \left(\frac{\alpha t}{x^2} \right)^c = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{\alpha t} \right)^c \text{ e prendiamo il reciproco della parentesi;}$$

La costante la prendiamo pari ad $\frac{1}{2}$.

Così introduciamo una nuova variabile η che chiamiamo **variabile di similarità** che utilizziamo per il seguito dell'analisi matematica, ha questo nome perchè profili che hanno lo stesso $\frac{x}{\sqrt{\alpha t}}$ sono simili.

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{\alpha t}}$$

Torniamo all'equazione della conduzione, dove la temperatura T si può scrivere in funzione di Θ :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \text{ con } T = T_0 + (T_i - T_0) \cdot \Theta[\eta(x, t)]$$

$$\cdot \frac{\partial T}{\partial t} = (T_i - T_0) \frac{d\Theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t},$$

$$\text{con } \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{x}{2\sqrt{\alpha}} \left(-\frac{1}{2} \right) t^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{x}{2\sqrt{\alpha} \cdot 2\sqrt{t} \cdot t} = -\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \cdot \frac{1}{2t} = -\frac{\eta}{2t}$$

$$\cdot \frac{\partial T}{\partial x} = (T_i - T_0) \frac{d(\Theta)}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \text{ con } \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha t}}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\eta}{2t} (T_i - T_0) \frac{d\Theta}{d\eta} \\ \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_i - T_0}{2\sqrt{\alpha t}} \frac{d\Theta}{d\eta} \end{cases} \rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_i - T_0}{2\sqrt{\alpha t}} \frac{d^2 \Theta}{d\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{T_i - T_0}{4\alpha t} \frac{d^2 \Theta}{d\eta^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{\eta}{2t} (T_i - T_0) \frac{d\Theta}{d\eta} = \alpha \frac{(T_i - T_0)}{4\alpha t} \frac{d^2 \Theta}{d\eta^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \Theta}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\Theta}{d\eta} = 0$$

Abbiamo dimostrato come si ricava a funzione errore, integrando questa equazione si trova la funzione errore.

Osservazione;

Siamo partiti da un'equazione alle derivate parziali e con l'introduzione della variabile di similarità tramite l'analisi dimensionale, siamo giunti ad una equazione alle derivate totali che possiamo integrare più facilmente.

Introduciamo una variabile di comodo ψ

$$\psi = \frac{d\Theta}{d\eta} \rightarrow \frac{d\psi}{d\eta} + 2\eta\psi = 0.$$

Separiamo le variabili ed integriamo:

$$\frac{d\psi}{\psi} = -2\eta d\eta \rightarrow \ln(\psi) = -\frac{\eta^2}{2} + \text{cost} \Rightarrow \psi = c_1 \cdot e^{-\eta^2}$$

Torniamo alla variabile Θ ed integriamo, così otteniamo la soluzione Θ :

$$d\Theta = c_1 e^{-\eta^2} d\eta \Rightarrow \Theta = c_1 \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta + c_2$$

Imponiamo le condizioni al contorno:

$$\cdot x = 0, \text{cioe } \eta = 0 \rightarrow \Theta = 0 = c_1 \int_0^0 d\eta + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\cdot x \rightarrow \infty, \text{cioe } \eta \rightarrow \infty \rightarrow \Theta = 1 = c_1 \int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

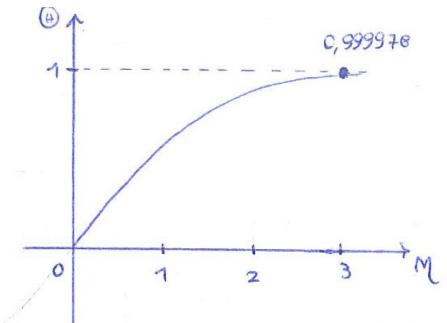
In definitiva la soluzione è:

$$\Theta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\beta^2} d\beta = \text{erf}(\eta) : \text{Funzione Errore}$$

Questa funzione errore si rappresenta nel seguente modo, che cresce con asintoto orizzontale pari ad 1, per $\eta = 3 \Theta = 0,999978 \approx 1$.

È una funzione di tipo esponenziale.

Se si considerano anche gli η negativi, si ottiene l'andamento simmetrico con Θ negativi.



Osservazione;

Abbiamo introdotto una nuova funzione matematica che si può utilizzare per studiare problemi di questo tipo.

Le proprietà della funzione errore sono:

- $\text{erf}(\eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 1$;
- $\text{erf}(\eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow -\infty} -1$;
- $\text{erf}(-\eta) = -\text{erf}(\eta)$.

Il complemento a 1 della funzione errore è $\text{erfc}(\eta)$:

$$\text{erfc}(\eta) = 1 - \text{erf}(\eta)$$

Per questo problema possiamo anche studiare come varia il flusso termico, cioè la tangente alle curve isoterme per $x = 0$; noi abbiamo imposto la temperatura T_0 per $x = 0$ ma quello che può interessare è il flusso termico che è proporzionale per la conduzione alla derivata $\frac{\partial T}{\partial x}$:

$$\dot{Q} = kS \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = kS \cdot \frac{T_i - T_0}{2\sqrt{\alpha t}} \frac{d\Theta}{d\eta} \Big|_{x=0}, \text{ con } \frac{d\Theta}{d\eta} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2}$$

$$\Rightarrow \dot{Q} = kS \cdot \frac{T_i - T_0}{\sqrt{\pi \alpha t}} \cdot e^{-\eta^2} \Big|_{x=0, \text{ coe } \eta=0}$$

$$\Rightarrow \text{per } x = 0, \text{ cioè } \eta = 0 \quad \dot{Q} = kS \frac{T_i - T_0}{\sqrt{\pi \alpha t}} \rightarrow \text{Calore scambiato}$$

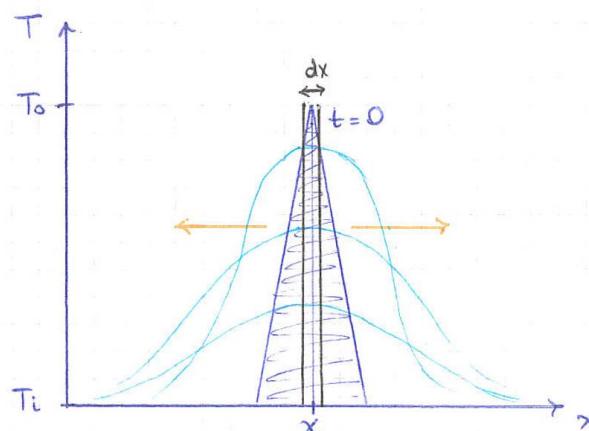
Osservazione:

in $x = 0$ il flusso termico varia con il tempo:

- In $t = 0$, $\dot{Q} \cong 0$ infatti l'isoterma è orizzontale in quel punto
- Per t che cresce

Rilascio istantaneo di calore in una certa posizione dello spazio

Diamo una certa potenza, ovvero calore, in una zona ben definita dello spazio.



Consideriamo il corpo esteso da $-\infty$ a $+\infty$ ed immaginiamo che all'istante $t = 0$ viene fornita una certa quantità di energia così che la temperatura arrivi ad un valore T_0 a partire da un valore iniziale T_i .

Supponiamo che questa energia sia data in un elementino dx ; all'istante t_0 abbiamo una zona larga dx che è a temperatura T_0 maggiore delle zone circostanti. Dall'istante 0^+ in poi che succederà?

Succederà che si avrà calore per conduzione che da T_0 va verso destra. Quindi T_0 diminuisce con il tempo, quindi si riscaldano piano piano le zone laterali.

Rispetto alla zona triangolare che si è scaldata, il resto del materiale è ancora alla temperatura iniziale.

Allora c'è un flusso di calore verso destra e verso sinistra per conduzione; quindi con il tempo si abbassa il punto a temperatura massima, però man mano vengono scaldata anche le parti limitrofe, finché al tempo infinito torna tutto alla temperatura T_i . Poi per conduzione si dissipa nel corpo che è sempre a temperatura T_i .

È sempre un problema bidimensionale non stazionario; L'equazione di conduzione del calore è sempre la stessa:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Supponiamo che la soluzione sia di tipo esponenziale con coefficiente $\frac{A}{\sqrt{t}}$:

$$T(x, t) = \frac{A}{\sqrt{t}} \cdot e^{-\eta^2} = \frac{A}{\sqrt{t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4at}}$$

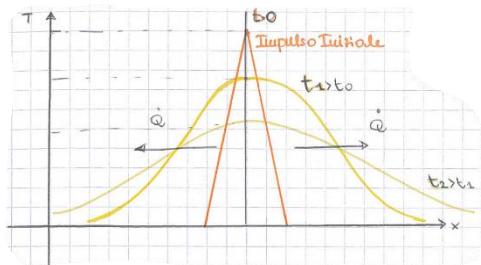
La costante A dipende dalle condizioni iniziali, cioè da quanto calore viene fornito all'istante $t = 0$.

Calcoliamo il flusso termico:

il calore che è stato dato al corpo è uguale all'integrale dell'elementino dx e lo misuriamo come energia interna; l'energia interna è l'integrale tra $\pm \infty$ di $\rho c S dx (T - T_i)$.

$$\dot{Q} = dU = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho c S dx (T - T_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho c S \frac{A}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4at}} dx$$

$$\begin{aligned} \frac{\dot{Q}}{\rho c S} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4at}} dx \\ \Rightarrow \frac{\dot{Q}}{\rho c S} &= 2A\sqrt{\pi\alpha} \end{aligned}$$



l'impulso iniziale era un delta di Dirac, dove la temperatura diminuisce, poi il calore va verso destra quindi la temperatura aumenta.

Vediamo negli appunti di un altro collega lo svolgimento dell'integrale;

$$\Rightarrow \dot{Q} = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho S c T dx \text{ ma } T = A \cdot \frac{e^{-\frac{x}{4at}}}{\sqrt{t}} \frac{x^2}{4at} = \eta^2 = \xi^2$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{4at} \right) = d\xi \cdot 2\xi \rightarrow \frac{2x}{4at} \cdot dx = 2d\xi \text{ ma } \frac{x}{2\sqrt{at}} = \xi \rightarrow \frac{2}{2\sqrt{at}} \frac{dx}{2\sqrt{at}} = 2\xi d\xi$$

$$\rightarrow 2\xi dx \cdot \frac{1}{2\sqrt{at}} = 2\xi d\xi \Rightarrow dx = 2\sqrt{at} \cdot d\xi$$

$$\rightarrow \dot{Q} = \rho S c \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A e^{-\xi^2}}{\sqrt{t}} \cdot 2\sqrt{at} d\xi \rightarrow \frac{\dot{Q}}{\rho S c} = 2A\sqrt{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = A \cdot (2\sqrt{\alpha}) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi$$

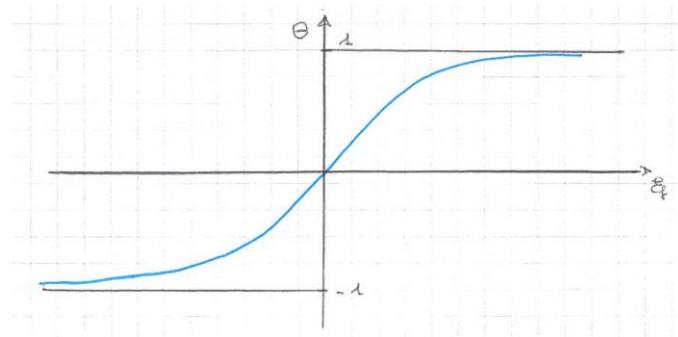
Dall'integrale di Gauss:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}$$

$$\rightarrow \frac{\dot{Q}}{\rho S c} = A \cdot 2\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\pi} = A \cdot 2\sqrt{\alpha\pi}$$

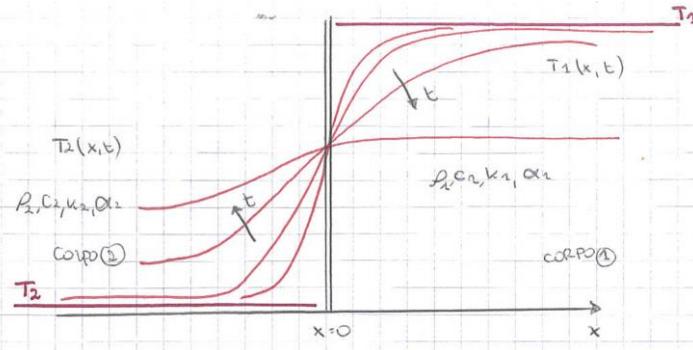
$$A = \frac{\dot{Q}}{\rho S c} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\alpha\pi}}$$

Andamento della funzione errore:



Vediamo ora come si calcola la temperatura di interfaccia tra due corpi.

Problema della temperatura interfacciale tra due corpi con proprietà fisiche diverse



Ad $x = 0$ c'è l'interfaccia tra i due corpi. Se i due corpi avessero stesse proprietà di scambio, l'interfaccia assumerebbe una T che è la media aritmetica tra T_1 e T_2 .

All'istante $t = 0$ si mettono a contatto il corpo a T_1 e il corpo T_2 .

Se i due corpi non hanno le stesse caratteristiche fisiche, la temperatura media non è la media aritmetica; la temperatura finale non è la media tra le due e come si calcola? Si calcola con la funzione errore. La funzione errore una volta introdotta è uno strumento matematico per risolvere certi problemi, come in questo caso e per il problema del congelamento dell'acqua.

All'infinito ciascun corpo presumibilmente mantiene la propria temperatura mentre nelle zone più vicine all'interfaccia $x = 0$, il profilo di temperatura presenterà un andamento particolare.

All'aumentare del tempo, inoltre, i due rami di curva si sposteranno verso il calore che assume il sistema all'equilibrio termodinamico.

Condizioni iniziali temporali;

$$(I) \begin{cases} t = 0, x > 0, T = T_1 = T_0 \\ t = 0, x < 0, T = T_2 = 0 \end{cases}$$

dove per semplicità assumiamo che T_2 sia inizialmente nullo e si scaldi con il corpo 1 a T_0 .

$$(II) \begin{cases} x \rightarrow \infty & T = T_1, \forall t \\ x \rightarrow -\infty & T = T_2, \forall t \end{cases}$$

Condizioni al contorno;

$$(III) \begin{cases} x = 0 \\ T_1(0, t) = T_2(0, t) \end{cases} \quad \text{e} \quad (IV) -k_1 S \cdot \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = k_2 S \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

La seconda condizione è che per $x = 0$ il calore che viene da destra deve essere uguale al calore che va a sinistra.

Dove (IV) è la condizione sul flusso;

Si suppone che l'andamento di temperatura nella parte destra sia del tipo "funzione errore";

- corpo 1 $\rightarrow T_1 = A_1 + B_1 \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_1 t}} \right) \xrightarrow{\eta_1}$ con $\operatorname{erf} \eta = \int_0^\eta e^{-\beta^2} d\beta$
- corpo 1 $\rightarrow T_2 = A_2 + B_2 \left| \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}} \right) \right| = A_2 + B_2 \cdot \operatorname{erf} \left(\frac{|x|}{2\sqrt{\alpha_2 t}} \right)$

Applichiamo (III)

$$x = 0 \rightarrow T_1(x = 0) = A_1 + B_1 \operatorname{erf}(0) \quad \text{ma } \operatorname{erf}(0) = 0 \\ T_2(x = 0) = A_2 + B_2 \operatorname{erf}(0)$$

$$\rightarrow T_1(x = 0) = T_2(x = 0) \Rightarrow A_1 = A_2 \rightarrow \begin{cases} T_1 = A_1 + B_1 \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_1 t}} \right) \\ T_2 = A_2 + B_2 \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}} \right) \end{cases}$$

Applicando (IV)

$$-k_1 S \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = k_2 S \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

Dove il primo termine lo sviluppiamo nel seguente modo:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = B_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x} [\operatorname{erf}(\eta_1)] = B_1 \cdot \frac{d}{d\eta_1} \operatorname{erf}(\eta_1) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \eta_1$$

$$\frac{d}{d\eta_1} \operatorname{erf} \eta_1 = e^{-\eta_1^2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial \eta_1}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha_1 t}}$$

Mentre il secondo termine diventa:

$$\frac{\partial T_2}{\partial x} = \frac{B_2 \cdot e^{-\eta_2^2}}{\sqrt{\pi \alpha_2 t}}$$

$$x = 0 \rightarrow \eta_1 = \eta_2 = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{\eta_1=0} = \frac{B_1}{\sqrt{\pi \alpha_1 t}} \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{\eta_2} = 0 = \frac{B_2}{\sqrt{\pi \alpha_2 t}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{k_1 B_1}{\sqrt{\pi t} \sqrt{\alpha_1}} = \frac{k_2 B_2}{\sqrt{\pi t} \sqrt{\alpha_2}} \rightarrow \left(-\frac{k_1 B_1}{\sqrt{\alpha_1}} = \frac{k_2 B_2}{\sqrt{\alpha_2}} \right)$$

La seconda condizione al contorno è l'uguaglianza dei flussi termici. Si è calcolata la derivata rispetto ad x della temperatura della funzione errore;

Per applicare le condizioni (I) più agevolmente, assumiamo che la T iniziale del corpo 2 sia zero, mentre la T iniziale del corpo 1 sia T_0 .

Allora applicando (II)

per $x \rightarrow \infty, \eta_1 \rightarrow \infty$ e $(\eta_2 \rightarrow \infty) [|x|]$

$$\begin{cases} T_0 = A_1 + B_1 \cdot \lim_{\eta_1 \rightarrow \infty} \operatorname{erf} \eta_1 \\ 0 = A_1 + B_2 \lim_{\eta_2 \rightarrow \infty} \operatorname{erf} \eta_2 \end{cases} \quad \text{sappiamo che } A_1 = A_2$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \operatorname{erf} \eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{-\eta} e^{-\beta^2} d\beta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta$$

Integrale di Gauss: $\int_0^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \rightarrow \lim_{\eta \rightarrow \infty} \operatorname{erf} \eta = 1$

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = T_0 \\ A_1 + B_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} B_2 = -A_1 \\ -B_2 + B_1 = T_0 \end{cases}$$

Ricordiamo che:

$$\begin{aligned} -\frac{k_1 B_1}{\sqrt{\alpha_1}} &= \frac{k_2 B_2}{\sqrt{\alpha_2}} B_2 = -\frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \cdot B_1 \\ \rightarrow +\frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} B_1 + B_1 &= T_0 \rightarrow B_1 = \frac{T_0}{1 + \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}} \rightarrow B_2 = -\frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \cdot \frac{T_0}{1 + \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}} \end{aligned}$$

$$A_1 = A_2 = -B_2$$

$$\rightarrow A_1 = A_2 = \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \cdot \frac{T_0}{1 + \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}}$$

Sostituendo le costanti di integrazioni ottengo i profili di temperatura T_1 e T_2 .

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{T_0}{1 + \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}} \left[\frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} + \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_1 t}} \right) \right] \\ T_2 &= \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \cdot \frac{T_0}{1 + \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}} \right) \right] \end{aligned}$$

Si verifica di nuovo che le condizioni al contorno vengono rispettate:

$$T_1(x=0) = \frac{T_0}{1 + \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}} \cdot \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}$$

$$T_2(x=0) = \frac{T_0}{1 + \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}} \cdot \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}$$

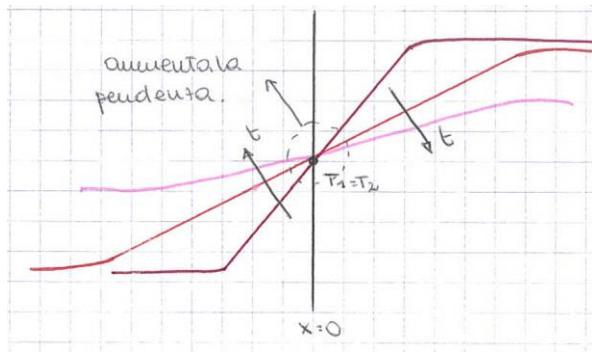
Calcoliamo il valore assoluto del flusso termico \dot{Q}_1 che già sappiamo essere diretto verso sinistra:

$$\frac{\dot{Q}_1}{S} = k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{B_1}{\sqrt{\pi \alpha_1 t}} = \frac{T_0}{1 + \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}} \frac{1}{\sqrt{\pi \alpha_1 t}}$$

Possiamo notare che la temperatura all'interfaccia, ossia il calore assoluto della curva ad $x = 0$ non varia con il tempo! la curva varia solo con la pendenza in $x = 0$, al variare di t la pendenza $\frac{\partial T_1}{\partial x}$ è data dal flusso $\frac{\dot{Q}_1}{Sk_1}$.

In particolar modo la pendenza del profilo della temperatura all'interfaccia tende a diminuire all'aumentare di t :

$$\frac{\dot{Q}_1}{Sk_1} = \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} \propto \frac{1}{\sqrt{t}}$$

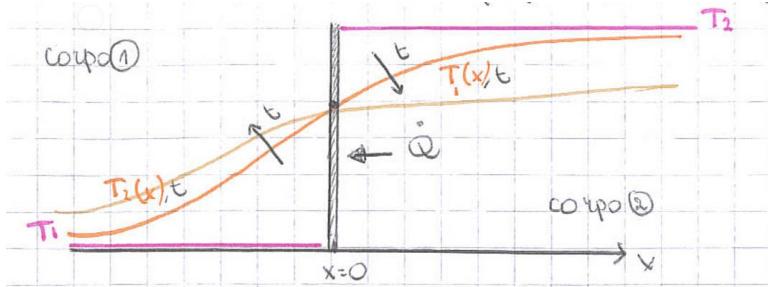


Il senso fisico di questa riduzione, è che con il tempo ci si muove verso la stazionarietà, ossia verso l'omogeneizzazione delle T verso quella di equilibrio.

In questo processo il ΔT tra i due corpi va riducendosi a discapito del flusso termico.

Temperatura all'interfaccia tra due corpi con diverse proprietà fisiche

Se i due corpi avessero le stesse proprietà la temperatura all'interfaccia sarebbe semplicemente la temperatura media;



Per $t \rightarrow \infty$ devo aspettarmi un andamento stazionario della T . (sarà una retta, curva in giallo)

- Condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} t = 0 & \quad T = T_1 \text{ per } x > 0 \\ t = 0 & \quad T = T_2 \text{ per } x < 0 \end{aligned}$$

- Condizioni al contorno:

$$x = 0; \quad T_1(0, t) = T_2(0, t) \quad \forall t \text{ [corpo 1]}$$

$$x = 0 - k_1 S \frac{dT_1}{dx} \Big|_{x=0} = -k_2 S \frac{dT_2}{dx} \Big|_{x=0} \rightarrow -k_1 S \frac{dT_1}{dx} \Big|_{x=0} = k_2 S \frac{dT_2}{dx} \Big|_{x=0}$$

Questa condizione esprime la presenza di un flusso di calore \dot{Q} da destra verso sinistra ($T_2 > T_1$).

Settimana 11

30-11-21

Dal primo principio $dh = dq$ e poi rapportandolo al tempo abbiamo $\frac{dh}{dt} = \frac{dq}{dt}$; poi $dh = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$ e $\frac{dq}{dt}$ si può scrivere in base al bilancio tra le due facce come $-\frac{\partial}{\partial x} \dot{Q}''$;

Materiali che non obbediscono alla legge di Fourier

Riprendendo la legge di Fourier: $\dot{Q} = -kS \frac{\partial T}{\partial x}$ con x coordinata normale all'isoterma.

La legge di Fourier si ottiene come caso particolare dell'equazione generale della conduzione che a sua volta si era ottenuta partendo dal bilancio energetico e dal principio di conservazione dell'energia:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dq}{dt} \rightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \dot{Q}'' = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

Scambio di calore NON FOURIER secondo il quale:

$$\dot{Q}'' = -k \frac{\partial T}{\partial x} - t_0 \cdot \frac{\partial \dot{Q}''}{\partial t}$$

Dove \dot{Q}'' è il calore per unità di superficie (i due pedici indicano l'unità di superficie). Venne proposta inizialmente come semplice ipotesi matematica.

Molti anni dopo la sperimentazione è stato dimostrato che molti fluidi portati a temperature prossime allo zero assoluto, comportandosi come superconduttori, scambiano calore come fluidi **NON FOURIER**, seguendo la legge riportata sopra nota come legge di Cattaneo Vernot.

$$\dot{Q}'' = -k \frac{\partial T}{\partial x} - t_0 \cdot \frac{\partial \dot{Q}''}{\partial t} \quad \text{Legge di Cattaneo-Vernot}$$

Entriamo nel bilancio energetico, sempre valido, qualunque sia la dipendenza tra flusso di calore e gradiente di temperatura con le ipotesi di Cattaneo;

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \dot{Q}''$$

Deriviamo rispetto a t supponendo ρ e c indipendenti dal t .

$$\rho c \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial x} \dot{Q}'' \right]$$

Supponiamo di essere nelle ipotesi di invertibilità dell'ordine di derivazione: $\rho c \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial t} \dot{Q}'' \right]$

$$\text{Da Cattaneo-Vernot esplicitiamo } \frac{\partial}{\partial t} \dot{Q}'' = -\frac{k}{t_0} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\dot{Q}''}{t_0}$$

Sostituendo:

$$\rho c \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{k}{t_0} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\dot{Q}''}{t_0} \right] = \frac{k}{t_0} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{t_0} \frac{\partial \dot{Q}''}{\partial x}$$

Ma dal bilancio energetico: $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \dot{Q}''$

$$\rightarrow \rho c \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{k}{t_0} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\rho c}{t_0} \frac{\partial T}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{1}{t_0} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{k}{\rho c} \cdot \frac{1}{t_0} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad \text{abbiamo ottenuta una equazione nella sola incognita } T.$$

$$\frac{k}{\rho c} = \alpha \rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{1}{t_0} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\alpha}{t_0} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

Moltiplicando per $\frac{t_0}{\alpha}$:

$$\frac{t_0}{\alpha} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Si definisce $\frac{\alpha}{t_0} = c^2$, ha le dimensioni di una velocità; SECONDA VELOCITA' DEL SUONO [c]

Se $c \rightarrow \infty$ allora l'equazione è quella di Fourier;

La c ha senso fisico di una velocità e la possiamo interpretare come la velocità con cui una differenza di temperatura provoca uno scambio di calore, nell'ipotesi di Fourier quando si ha una differenza di temperatura la velocità con cui si forma l'onda termica è infinita e quindi si provoca il passaggio di calore dalla zona a temperatura più elevata alla zona a temperatura più bassa. La prima prova è stata fatta sull'Elio liquido vicino alla zero assoluto, si è visto che questa non è infinito. Dopo che è stato trovato come primo esempio sperimentale la presenza di velocità delle onde termiche non infinta, c non infinito, quindi esistenza di equazioni non di Fourier, è salita sempre più la temperatura a cui si è trovata questa velocità che non è infinita.

La carne animale sembra sia un materiale di tipo non Fourier, applicata una differenza di temperatura la velocità con cui il calore si propaga non è infinitamente elevata. In generale nei mezzi porosi si ha un comportamento di tipo non Fourier;

Si noti che, applicando la legge di Fourier, abbiamo implicitamente ipotizzato che la seconda velocità del suono fosse infinita. Per i fluidi alle bassissime temperature ciò non è vero. Per l'Elio e cristalli dielettrici la c assume bassi valori !!

Il concetto di c prelude il fenomeno delle onde termiche.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Il problema di Stefan e il problema di Newman sono riportati nel libricino, per il problema della criochirurgia.

Congelamento di un liquido

Immaginiamo di avere un liquido con una temperatura $T_i = T_f$;

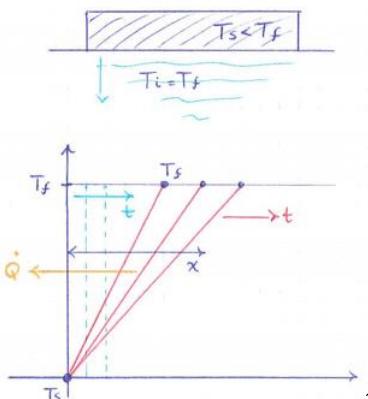
Immaginiamo di poggiare una piastra di materiale solido a temperatura T_s minore della temperatura di fusione del liquido sul quale poggiamo la piastra: $T_s < T_f$.

Nel tempo il liquido man mano solidifica e questo fronte liquido-solido avanza nel tempo verso il basso.

Se il liquido era acqua, il ghiaccio che si forma galleggia sull'acqua e spinge in alto la piastra.

Il fronte liquido-solido avanza nel tempo e l'andamento di temperatura nello strato di ghiaccio che si è formato è lineare tra la temperatura fissata della piastra T_s e la temperatura di fusione T_f .

Anche l'andamento di temperatura avanza nel tempo. andamento lineare;



Questo problema è chiamato PROBLEMA di STEFAN;

Un'antenna in presenza di un flusso di aria molto fredda e umida veniva ricoperta da una bandiera di ghiaccio che cresceva col tempo, che tendeva a piegarla e a romperla.

Il flusso di calore \dot{Q} va da destra verso sinistra poiché il liquido è a temperatura maggiore del solido che si sta formando.

Il punto del T_f all'aumentare del tempo si sposta verso destra.

Imponiamo:

$$d\dot{Q} = \frac{dU}{dt} \rightarrow k \frac{T_f - T_s}{x} S = q_L \rho \frac{dV}{dt} = \rho q_L S \frac{dx}{dt}$$

$$k \frac{T_f - T_s}{x} S \rightarrow \text{legge di Fourier in termini finiti}; \quad \frac{dU}{dt} = q_L \rho \frac{dV}{dt}$$

Separo le variabili e integro:

$$k \frac{(T_f - T_s)}{\rho q_L} dt = x dx \rightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{k(T_f - T_s)}{\rho q_L} t + \text{cost}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{2k\Delta T}{\rho q_L}} \sqrt{t} + \text{cost}$$

L'avanzamento del fronte del solido è proporzionale alla radice del tempo; in definitiva abbiamo trovato che il fronte di ghiaccio avanza con la radice del tempo.

Problema di Newmann

Supponiamo di fare un trattamento criochirurgico della carne umana; supponiamo di avere un liquido che ha una temperatura maggiore della temperatura di fusione; la carne umana per il 70% è acqua con differenza tra i vari organi.

Quindi consideriamo un liquido a temperatura T_{2L} maggiore della temperatura di fusione T_f .

T_{2L} è la temperatura a grande distanza dal piatto freddo a temperatura T_s che rimane costante.

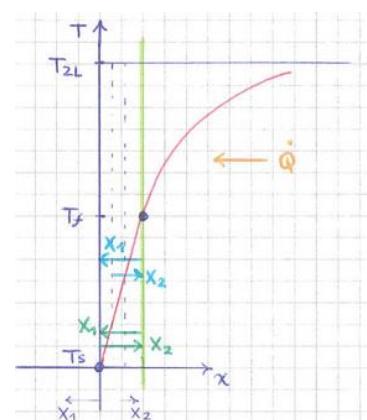
Mettiamo sopra il liquido un piatto che abbia una temperatura $T_s < T_f$.

Immaginiamo che all'istante 0^+ abbiamo applicato il piatto a temperatura fredda T_s ecco che il fronte di congelamento andrà verso destra, però ora possiamo pensare che ci sia il punto a temperatura T_f che mi dice che la zona congelata è quella tra T_f e T_s . A destra di x_2 il corpo non è ancora congelato, si sta raffreddando e tende a T_{2L} .

Supponiamo che siano entrambi fluidi che obbediscono alla legge di Fourier, ritroviamo le due equazioni che abbiamo trovato.

Quindi in questo caso la temperatura iniziale del liquido è maggiore della T_f :

$$T_{2L} > T_f$$



Man mano che si forma uno strato di solido che avanza con x e quindi si ha un flusso di calore \dot{Q} da destra verso sinistra.

Quando il fronte di solido si trova in una posizione x , l'andamento qualitativo della temperatura è quello in figura.

Dobbiamo trattare la zona liquida con la sua equazione della conduzione:

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = \alpha_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_2^2};$$

e la zona solida con la sua equazione della conduzione:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \alpha_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x_1^2};$$

x_1 misura lo spessore del ghiaccio formato;

x_2 è quello da $x = 0$ e misura la quantità di liquido che è passato allo stato solido;

Si misurano a partire dal punto sulla curva.

Se il liquido solidifica, la quantità x_2 del liquido che è passato allo stato solido è pari alla quantità di solido x_1 che si è formato: $x_2 = x_1$ questo se le densità del solido e del liquido sono le stesse.

Infatti, dal bilancio di massa tra solido formato e liquido sparito, otteniamo:

$$\rho_1 S x_1 = \rho_2 S x_2 \rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad \text{questo vale in generale}$$

Cioè il rapporto tra gli spessori di solido x_1 e liquido x_2 passato a solido è pari al rapporto tra le densità:

- Se $\rho_1 = \rho_2$, cioè se la densità del solido è pari alla densità del liquido, gli spessori sono uguali: $x_2 = x_1$. Questo è vero per i fluidi che non sono acqua.
- Se il fluido è acqua, $\rho_1 \neq \rho_2$ con $\rho_2 > \rho_1$, cioè la densità dell'acqua liquida è maggiore del ghiaccio. Allora lo spessore del liquido x_2 passato allo stato solido è minore dello spessore di solido x_2 che si è formato:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \simeq 1,09 = \beta \Rightarrow x_1 > x_2$$
 i due spessori non sono uguali.

L'andamento della curva mostra che la temperatura tenderà asintoticamente a T_{2L} allora supponiamo di utilizzare lo strumento matematico della funzione errore. La funzione errore ha un andamento esponenziale e quindi è uno strumento matematico che utilizziamo per supporre che la temperatura abbia un certo andamento.

Il problema si risolve supponendo che T_1 e T_2 siano funzioni del seguente tipo, cioè con andamento dato dalla funzione errore:

$$T_1 - T_f = (T_{1s} - T_f) + A \operatorname{erf} \left(\frac{x_1}{2\sqrt{\alpha_1 t}} \right)$$

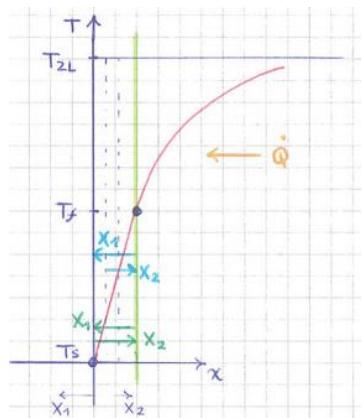
$$T_2 - T_f = (T_{2L} - T_f) + B \operatorname{erfc} \left(\frac{x_2}{2\sqrt{\alpha_2 t}} \right)$$

Dove $\operatorname{erfc} = 1 - \operatorname{erf}$

Sul fronte solido-liquido (retta verticale in verde), sulla sezione a temperatura T_f , abbiamo che a destra la temperatura è più elevata, quindi significa che arriva del calore da destra, invece a sinistra la temperatura diminuisce quindi va via del calore; i due calori però non sono uguali, perché bisogna fornire all'elementino dx il calore latente per farlo passare da liquido a solido.

Imponiamo il bilancio sul fronte solido-liquido:

$$d\dot{Q} = \frac{dU}{dt}$$



La somma dei calori scambiati è pari alla variazione di energia interna che tiene conto del calore latente. Nella somma dei calori abbiamo il calore che arriva da destra valutato sul fronte X_2 meno il calore che va a sinistra calcolato sul fronte X_1).

$$-k_2S\left.\frac{\partial T_2}{\partial x_2}\right|_{X_2} + k_1S\left.\frac{\partial T_1}{\partial x_1}\right|_{X_1} = q_L S \frac{dX_1}{dt} \rho_1 \text{ per la zona solida; } *$$

$$= q_L S \frac{dX_2}{dt} \rho_2 \text{ per la zona liquida; }$$

questa è l'equazione che dobbiamo risolvere.

Abbiamo imposto che la differenza tra i due flussi di calore sui due fronti X_2 (fronte liquido) e X_1 (posizione del fronte di congelamento) è pari al calore latente.

Le due costanti A e B si determinano con le condizioni al contorno imposte sui fronti di solido x_1 e di liquido x_2 :

- in $x_1 = X_1 \rightarrow T_1 = T_f$ sul fronte solido, posizione del fronte di congelamento.
- in $x_2 = X_2 \rightarrow T_2 = T_f$ sul fronte liquido.

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = (T_{1s} - T_f) + A \operatorname{erf}\left(\frac{X_1}{2\sqrt{\alpha_1 t}}\right) \rightarrow \operatorname{erf}\left(\frac{X_1}{2\sqrt{\alpha_1 t}}\right) = \text{cost} \\ 0 = (T_{2L} - T_f) + B \operatorname{erfc}\left(\frac{X_2}{2\sqrt{\alpha_2 t}}\right) \rightarrow \operatorname{erfc}\left(\frac{X_2}{2\sqrt{\alpha_2 t}}\right) = \text{cost} \end{cases}$$

Si osserva che se l'erf deve essere costante anche $\frac{X_1}{2\sqrt{\alpha_1 t}}$ deve essere una costante; α_1 è una costante perché è la diffusività termica del solido, significa che X_1 deve essere proporzionale a \sqrt{t} e ricordiamo che nel caso di Stefan l'avanzamento del fronte di ghiaccio era proporzionale a \sqrt{t} quindi stiamo andando nella direzione giusta; allora:

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1 \propto \sqrt{t} \\ X_2 \propto \sqrt{t} \end{cases}$$

Allora si scrivono le seguenti espressioni per X_1 e X_2 :

$$X_1 = \beta K \sqrt{t} \text{ e } X_2 = K \sqrt{t}.$$

Con K nuova costante da determinare.

Tre condizioni al contorno e tre incognite.

I risultati li scrivo nelle condizioni al contorno sul fronte solido-liquido *. Si risolve per tentativi; si ottiene un'equazione in cui l'unica incognita è proprio K .

Una volta trovata K si sostituiscono X_1 e X_2 nelle due relazioni del sistema e si determinano le due costanti A e B :

$$\begin{cases} A = \frac{T_f - T_{1s}}{\operatorname{erf}(\beta K \sqrt{t} / 2\sqrt{\alpha_1 t})} \\ B = \frac{T_f - T_{2L}}{\operatorname{erfc}(K \sqrt{t} / 2\sqrt{\alpha_2 t})} \end{cases}$$

Negli appunti dell'altra collega sono fatti i passaggi per trovare K , A e B .

Curva logistica

Crescita maltusiana → Maltus agli inizi del 1800, ammetteva una crescita esponenziale nel tempo della popolazione, ipotizzando che il gradiente della variabile popolazione P con t fosse proporzionale a P stesso in ragione di un tasso di crescita r :

$$\frac{dP}{dt} = rP \rightarrow \dot{P} = r \cdot P \rightarrow \left(\frac{\dot{P}}{P}\right) = r$$

In economia si chiama legge del tasso di incremento. $\frac{\dot{P}}{P}$ tasso di crescita percentuale.

$$\frac{dP}{P} = r dt \text{ integrando } \ln \frac{P}{P_0} = rt \rightarrow \frac{P}{P_0} = e^{rt}$$

La crescita della popolazione è una crescita esponenziale. Nel 1800 Verhulst corresse l'equazione di Maltus introducendo un termine che teneva conto del fatto che siccome la popolazione aumenta, questa mangia di più e siccome le risorse non sono illimitate questo è minor cibo per quelli che nascono e quindi la crescita non è esponenziale ma il tasso di crescita r deve essere moltiplicato per un parametro $1 - \frac{P}{k}$.

La forma analitica è:

$$\frac{dP}{dt} = r \cdot (1 - P/k) \cdot P$$

Questa è stata applicata alla crescita dei contagi durante la pandemia per Covid-19;

Moltiplicando entrambi i membri per $1/k$

$$\frac{dP}{k} \frac{1}{dt} = r \left(1 - \frac{P}{k}\right) \frac{P}{k} \rightarrow \frac{\left(d\frac{P}{k}\right)}{P \left(1 - \frac{P}{k}\right)} = r dt$$

Effettuando un cambio di variabile $\frac{P}{k} = x$ abbiamo:

$$\Rightarrow \frac{dx}{x(1-x)} = r dt$$

$$\frac{1}{x(1-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(1-x)} = \frac{A-Ax+Bx}{x(1-x)} = \frac{(B-A)x+A}{x(1-x)} \rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = A = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{(1-x)} \right] dx = r dt \text{ integrando } \ln \frac{x}{x_0} - \ln \frac{(1-x)}{(1-x_0)} = rt$$

$$\rightarrow \ln \left[\frac{x}{x_0} \cdot \frac{(1-x_0)}{(1-x)} \right] = x \cdot t \rightarrow \frac{x}{x_0} \frac{(1-x_0)}{(1-x)} = e^{rt} \rightarrow \frac{x}{x_0} (1-x_0) = e^{rt} - e^{rt} \cdot x$$

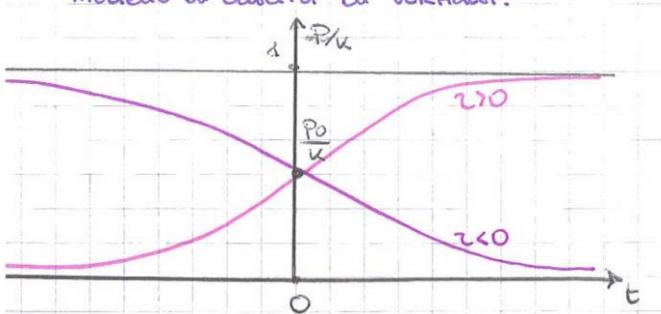
$$\rightarrow \left[\frac{(1-x_0)}{x_0} + e^{rt} \right] x = e^{rt} \rightarrow x = \frac{e^{rt}}{\frac{(1-x_0)}{x_0} + e^{rt}} \rightarrow x = \frac{x_0 e^{rt}}{1 + x_0 (e^{rt} - 1)}$$

$$x = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x_0} - 1\right) \cdot e^{-rt}} \rightarrow P = \frac{k}{1 + \left(\frac{k}{P_0} - 1\right) \cdot e^{-rt}}$$

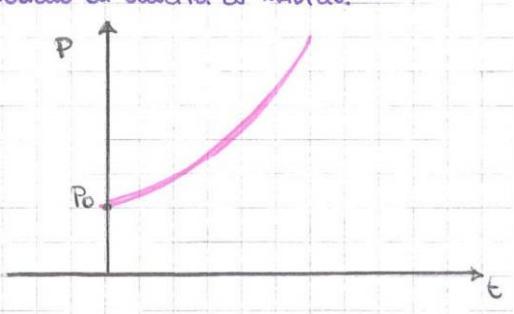
Ora studiamo la funzione;

$$\text{per } t \rightarrow \infty: \begin{cases} x \rightarrow 1 & \text{se } r > 0 \\ x \rightarrow 0 & \text{se } r < 0 \end{cases} \quad \text{per } t \rightarrow -\infty: \begin{cases} x \rightarrow 0 & \text{se } r > 0 \\ x \rightarrow 1 & \text{se } r < 0 \end{cases}$$

Modello di crescita di VERHULST.



Modello di crescita di MALTUS.



Il tasso di crescita, r è rappresentato in figura. In corrispondenza del flesso la curva cambia pendenza.

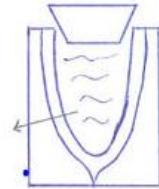
È una curva macroscopica.

Irraggiamento termico

A differenza della conduzione di calore che avviene nella materia (nei tre stati di aggregazione), l'irraggiamento è una forma di trasmissione del calore che avviene nel **vuoto**.

Non è una vera e propria trasmissione di calore, ma il risultato è simile a quello della trasmissione del calore.

Ad esempio, nel vaso Dewar (thermos), c'è una puntina di vetro e con questo puntino era quasi nullo il calore scambiato per conduzione, il calore scambiato è proporzionale alla superficie e se la superficie è un punto il calore scambiato è quasi nulli. Poi c'è il vuoto tra il contenitore di vetro fuso e il contenitore esterno di metallo, in modo tale che il contatto tra l'interno e l'esterno avviene solo attraverso pochi punti, così da minimizzare la conduzione del calore attraverso queste superfici infinitesime.

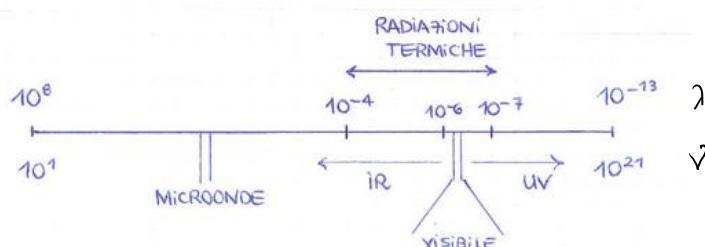


Allora, le due pareti di vetro e di metallo uniformano la loro temperatura con una sorta di trasmissione di calore attraverso il vuoto (NON è per convezione perché non c'è un fluido interposto ma c'è il vuoto). Attraverso le parete del vetro non c'è nulla, c'è il vuoto. Effetto similare alla conduzione perché si uniforma il calore, l'irraggiamento è la seconda componente fondamentale della termocinetica.

Lo studio dell'irraggiamento termico si basa sul fatto che ciascun corpo emette una radiazione elettromagnetica con una certa lunghezza d'onda.

Ricordiamo che la trasmissione della radiazione elettromagnetica avviene per onde, ma la natura dell'onda è di tipo corpuscolare con i quanti di energia.

Nello spettro delle lunghezze d'onda o delle frequenze indichiamo soltanto le radiazioni elettromagnetiche legate alla temperatura:



$$\lambda(m) = \frac{c}{\nu}$$

$$\nu \left(\frac{1}{s} = Hz \right)$$

Di tutti i campi verranno citati solo quelli di interesse; di interesse per la termocinetica abbiamo:

- Radiazioni termiche: $\lambda = 10^{-4} - 10^{-7} m$; vengono emesse a causa della loro temperatura; sono le radiazioni elettromagnetiche emesse da un corpo che si trova ad una certa temperatura. Tra 10^{-6} e 10^{-7} c'è lo spettro del visibile, preceduto dall'infrarosso e seguito dall'ultravioletto.
- Microonde: $\lambda = 10^{-2} - 10^{-3} m$; le microonde interferiscono con la molecola polare H_2O che vibrando produce calore → le microonde scaldano i corpi in modo passivo.

Studiamo le **4 leggi alla base dell'irraggiamento**, ma prima definiamo il corpo nero, il corpo ideale per l'irraggiamento

Corpo nero; è un corpo ideale che assorbe tutta la radiazione elettromagnetica incidente ed emette la massima radiazione possibile.

Definiamo quindi il potere emissivo del corpo nero; L'energia emessa per unità di superficie dal corpo nero si indica con E_n ed è una potenza termica in $\frac{W}{m^2}$:

$E_n [W/m^{-2}]$: POTERE EMISSIVO DEL CORPO NERO

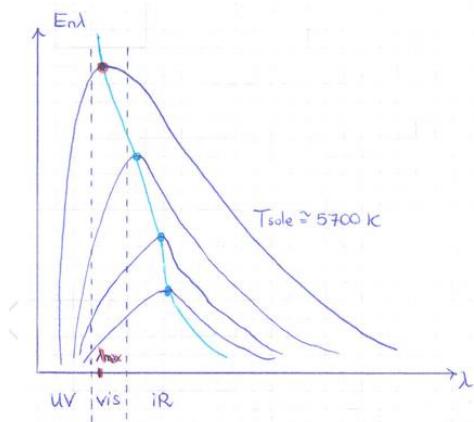
Storicamente prima della legge di Plank c'era la legge di Wien;

1: Legge di Plank

Stabilisce l'andamento del potere emissivo del corpo nero ad ogni lunghezza d'onda:

$E_{n\lambda} [W/n m^{-2}]$: POTERE EMISSIVO SPETTRALE o MONOCROMATICO

È una funzione sia di λ che sdi T :



Questo potere emissivo spettrale è una funzione della lunghezza d'onda e della temperatura:

$$E_{n\lambda} = E_{n\lambda}(\lambda, T)$$

L'andamento prima cresce, poi raggiunge un massimo e poi diminuisce. A sinistra ha un andamento ripido, mentre a destra diminuisce in maniera asintotica.

Allora, il diagramma di $E_{n\lambda}$ in funzione di λ si riporta per diverse temperature:

- L'andamento massimo si ha in corrispondenza della temperatura fittizia del sole ($\approx 5700K$); il massimo di questa curva è nel visibile. Temperatura naturale più elevata vista dalla terra. Come vediamo la radiazione del sole vista dalla terra. È molto bassa rispetto alla temperatura reale del sole. Il massimo di questa curva è nel visibile, a sinistra c'è l'ultravioletto e a destra l'infrarosso con lunghezze d'onda più elevate.
- Per temperature sempre inferiori, dall'equazione di Plank si vede che $E_{n\lambda}$ diminuisce; ha sempre la forma con un massimo e poi una diminuzione asintotica però i massimi si spostano verso destra, verso l'infrarosso, e al diminuire della temperatura questo spostamento è sempre maggiore; infatti guardando un termosifone non vediamo la luce intorno, perché a 100° emette tutto nell'infrarosso e la nostra retina non vede la radiazione magnetica dell'infrarosso. Allora la radiazione elettromagnetica emessa da corpi a queste temperature non è visibile ma è nel campo dell'infrarosso.

La posizione dei massimi è su una iperbole che diminuisce iperbolicamente ed è la seconda legge che in realtà fu trovata empiricamente prima e che si chiama legge di Wien o dello spostamento;

2: Legge di Wien o dello spostamento

La temperatura di un corpo moltiplicato per la lunghezza d'onda a cui si ha il massimo è una costante;

Il prodotto della temperatura per la lunghezza d'onda in cui si ha il massimo di $E_{n\lambda}$ è costante:

$$T \cdot \lambda_{max} = \text{cost}$$

Allora, al diminuire della temperatura aumenta la lunghezza d'onda in cui si ha il max, con una certa proporzionalità, cioè la radiazione elettromagnetica si sposta nell'infrarosso, quindi la curva che congiunge tutti i massimi è un'iperbole.

3: Legge di Stefan- Boltzman

Per ogni curva di $E_{n\lambda}$ posso fare l'integrale.

Spesso non interessa sapere a che lunghezza d'onda viene emessa la radiazione elettromagnetica, cioè non è importante il potere emissivo ad una certa lunghezza d'onda, ma interessa tutta l'energia emessa, cioè l'integrale:

$$E_n = \int_0^{\infty} E_{n\lambda}(\lambda, T) d\lambda = \sigma T^4 : \text{POTERE EMISSIVO totale del corpo};$$

dove σ è la costante di Stefan-Boltzman e T è la temperatura assoluta del corpo in Kelvin.

4: Legge di Lambert o del coseno

L'intensità di radiazione in una direzione non normale è proporzionale al coseno dell'angolo formato con la normale.

Queste sono le 4 leggi fondamentali dell'irraggiamento.

Realizzazione di un corpo nero in laboratorio

Come si realizza un corpo nero in laboratorio?

Si prende una sfera di rame, si fa un piccolo foro così che la sua superficie sia di un ordine di grandezza almeno inferiore rispetto a quello della sfera. Di rame perché così è il più uniforme possibile in termini di temperatura; sulla superficie esterna della sfera ci si mette il Domopak. Con il Domopak argento o dorato si simula il corpo nero. Si mette il Domopak all'esterno perché serve per riflettere tutta la radiazione che incide sulla superficie esterna e che non entra attraverso il foro. Un corpo nero è un corpo che assorbe tutta la radiazione incidente, se il corpo è reale non assorbe tutta la radiazione incidente, ma una parte viene riflessa. Siccome i corpi sono reali, il Domopak serve per riflettere la radiazione. Qui fa comodo rifletterla per avere che la radiazione che attraversa il foro quando entra dentro e trova la superficie di rame, ad ogni rimbalzo della radiazione elettromagnetica una parte viene assorbita (perché il rame non è un corpo nero) e una parte viene riflessa; al rimbalzo successivo continua, finché dopo n rimbalzi tutta la radiazione che è entrata attraverso il forellino viene assorbito. Viene assorbita a meno della radiazione che per caso riesce dal foro. Tutta la radiazione che c'è dentro a causa dei tanti rimbalzi si può considerare che sia la radiazione di corpo nero che c'è dentro. La radiazione che entra nel foro si considera che venga assorbita dal corpo nero costituito dalla sfera.

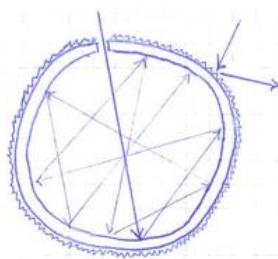
La radiazione che per caso esce dal foro, allo stesso modo, essendo generata dal corpo nero è la radiazione del corpo nero.

Si prenda una sfera di rame cava di un certo spessore e si fa un foro molto piccolo rispetto alla superficie laterale della sfera; poi si incarta tutta la superficie laterale con la carta di alluminio in modo tale che la radiazione che vi incide sopra viene totalmente respinta, cioè riflessa.

Invece, la cavità si comporta come corpo nero per la radiazione che entra attraverso il foro; il rame che è un corpo reale, in parte assorbe la radiazione incidente e in parte la riflette e così via; poiché il foro ha una superficie di uno o due ordini di grandezza minore della superficie della sfera, anche la probabilità che il raggio esca è inferiore di 1 o 2 ordini di grandezza.

Quindi, poiché tutta la radiazione che incide sull'alluminio viene riflessa, la cavità si comporta come un corpo nero per la radiazione che attraversa il foro, perché tutta la radiazione assorbita dal corpo nero è quella che entra e non viene assorbita all'esterno.

Quella che esce è quella che è emessa dal corpo nero.



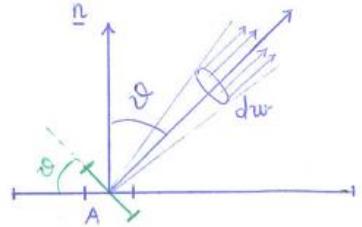
Radiazione emessa da un corpo

Consideriamo un corpo piano posto orizzontalmente che emette energia raggiante nel semispazio superiore in una direzione che forma un angolo θ con la normale \underline{n} .

Consideriamo l'angolo solido $d\omega$ nell'intorno della direzione dell'energia raggiante, che attraversa in una certa quantità l'angolo solido.

Calcoliamo la variazione infinitesima dell'energia per unità di superficie, dove l'energia emessa è proprio pari al calore scambiato q (energia raggiante):

$$d\left(\frac{q}{A}\right) = Id\omega \cos \theta$$



L'energia emessa dal corpo per unità di superficie A è uguale all'intensità di radiazione che attraversa l'angolo solido proporzionalmente al coseno dell'angolo θ (legge dell'irraggiamento).

L'intensità di radiazione è l'energia elettromagnetica per unità di superficie che esce dal corpo per unità di angolo solido in una direzione proporzionale al $\cos \theta$. Definizione di I .

Con $Id\omega$ intensità di radiazione I che attraversa l'angolo solido $d\omega$; inoltre, è proporzionale a $\cos \theta$ a causa del fatto che la radiazione non è emessa in direzione normale ($A \cos \theta$ è la proiezione della superficie A ortogonalmente alla direzione dell'energia raggiante).

Quindi, dq è la quantità di energia che attraversa l'angolo solido $d\omega$:

$$dq = Id\omega - A \cos \theta$$

Allora, con questa relazione possiamo definire l'intensità di radiazione I :

$$I = \frac{d(q/A)}{d\omega \cos \theta}$$

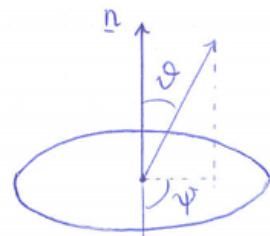
In generale, l'intensità di radiazione è funzione sia dell'angolo θ che dell'angolo ψ , dove ψ è l'angolo tra la direzione di emissione e una direzione nel piano:

$$I = I(\theta, \psi)$$

Però, di norma la dipendenza da ψ è trascurabile, non dipende dalla posizione sul piano ma dipende dall'angolo θ :

$$\Rightarrow I = I(\theta)$$

Inoltre, per i corpi rugosi si può immaginare che non esista neanche la dipendenza da θ .



Allora distinguiamo:

- **Radiazione diffusa** se $I = \text{cost}$ → corpi rugosi;
- **Radiazione speculare** se $I = I(\theta)$ → corpi riflessivi (lo specchio);

Nel caso della radiazione diffusa, la relazione tra l'intensità di radiazione I e il potere emissivo è:

$$I = \frac{E_n}{\pi} \text{ e } I_\lambda = \frac{E_{n\lambda}}{\pi}; \text{ intensità di radiazione totale ed intensità di radiazione spettrale.}$$

N.B.: l'espressione dell'intensità di radiazione è la relazione analitica della **Legge di Lambert**.

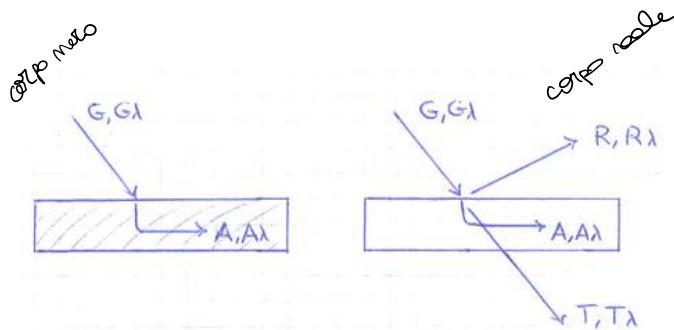
Corpi reali

Il corpo nero è un corpo che assorbe tutta la radiazione incidente; se G è la potenza raggiante incidente, ed è una quantità totale mentre G_λ è una quantità spettrale.

Schematizziamo prima il corpo nero come una lastra colpita da una radiazione elettromagnetica, emessa da un corpo, che indichiamo come irraggiamento totale G o spettrale G_λ .

Essendo il corpo un corpo nero, tutta la radiazione viene assorbita (A, A_{λ}):

$$\Rightarrow \begin{cases} G = A \\ G_\lambda = A_\lambda \end{cases}$$



Il **corpo reale** colpito da un certo irraggiamento totale G o monocromatico G_λ , in parte riflette una certa frazione di radiazione R o R_λ , in parte assorbe una certa frazione di radiazione A o A_λ e in parte trasmette una certa frazione di radiazione T o T_λ (radiazione che attraversa il corpo se è trasparente):

$$\Rightarrow \begin{cases} G = R + A + T \\ G_\lambda = R_\lambda + A_\lambda + T_\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 = \rho + \alpha + t \\ 1 = \rho_\lambda + \alpha_\lambda + \tau_\lambda \end{cases}$$

Con:

- $-\rho_\lambda = \frac{R_\lambda}{G_\lambda}$: **RIFLETTENZA** o **COEFFICIENTE DI RIFLESSIONE** (monocromatica o spettrale)
- $-\alpha_\lambda = \frac{A_\lambda}{G_\lambda}$: **ASSORBENZA** o **COEFFICIENTE DI ASSORBIMENTO** (monocromatica o spettrale)
- $-\tau_\lambda = \frac{T_\lambda}{G_\lambda}$: **TRASMITTENZA** o **COEFFICIENTE DI TRASMITTIVITÀ** (monocromatica o spettrale)

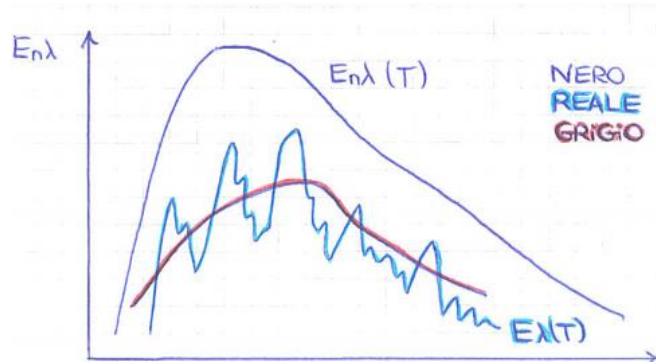
Questi sono tre coefficienti caratteristici del corpo che riceve l'irraggiamento.

Inoltre, l'andamento del potere emissivo spettrale E_λ in funzione di λ del corpo reale ad una certa temperatura T è ben diverso dall'andamento del potere emissivo spettrale $E_{n\lambda}$ del corpo nero dato dalla legge di Planck, alla stessa temperatura T . Ha un andamento indicato con le oscillazioni in azzurro nella figura sotto.

Il disegno del corpo nero alla stessa temperatura ci permette di trovare la curva data dalla legge di Plank.

Definiamo ε_λ come il rapporto tra E_λ e $E_{n\lambda}$ (potere emissivo del corpo nero) ad una certa lunghezza d'onda:

$$\varepsilon_\lambda = \frac{E_\lambda}{E_{n\lambda}} \rightarrow 0 \leq \varepsilon_\lambda \leq 1 \quad \text{Emittenza o coefficiente di emissione spettrale o monocromatica.}$$

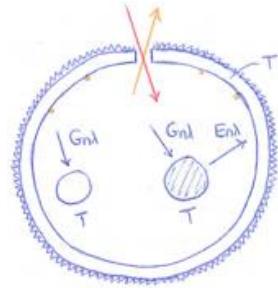


Legge di Kirckhoff

Cerchiamo la relazione tra ε_λ e α_λ .

La trattazione esatta è molta complessa, quindi consideriamo questa interpretazione più fisica. Equazioni integro-differenziali per l'irraggiamento.

Consideriamo il corpo nero realizzato in laboratorio, in cui la calotta di rame è ad una certa temperatura T . Ha un piccolo foro di dimensioni molto piccole rispetto alla superficie, all'esterno c'è un materiale riflettente. Entra la radiazione, questa radiazione a seguito di tutte le riflessioni viene completamente assorbita, perché soltanto una piccola frazione riesce ad uscire. Quindi possiamo pensare che all'interno in ogni punto ci sia statisticamente la stessa radiazione elettromagnetica del corpo nero emittente che è la superficie interna del rame. *



Questo corpo è un corpo nero sia per la radiazione che entra, che viene completamente assorbita da tutte le riflessioni interne, sia per la radiazione che esce, che è quella generata dalla cavità, seppure di 1 o 2 ordini di grandezza inferiore a quella che entra.

Inoltre, la radiazione che esce ha un certo valore nel punto in cui esce e quindi avrà questo stesso valore in tutti i punti della superficie interna.

Allora, la cavità è un corpo nero con una determinata energia emittente, e quindi all'interno della cavità abbiamo una radiazione $E_{n\lambda}$ dovuta a questo corpo nero che è la cavità.

*Ora, consideriamo un altro corpo nero più piccolo alla stessa temperatura T e lo inseriamo all'interno della cavità.

Poiché sono due corpi alla stessa temperatura, il calore netto scambiato è pari a zero; l'irraggiamento che incide sul corpo $G_{n\lambda}$ allora, il corpo nero interno deve emettere tanta energia $E_{n\lambda}$ quanta ne assorbe ($G_{n\lambda}$), proveniente dalla cavità:

$$G_{n\lambda} = E_{n\lambda} .$$

In conclusione, in ogni punto della cavità la radiazione spettrale incidente $G_{n\lambda}$ è pari a quella emessa da un corpo nero che potrebbe essere messo nella cavità.

Invece, se nella cavità inseriamo un **corpo reale (non nero)** alla stessa temperatura T della cavità, di tutta l'energia incidente $G_{n\lambda}$ (perché nella cavità c'è l'irraggiamento da corpo nero) assorbe solo $A_\lambda = G_{n\lambda} \cdot \alpha_\lambda$; il corpo è non nero quindi emette la radiazione E_λ ;

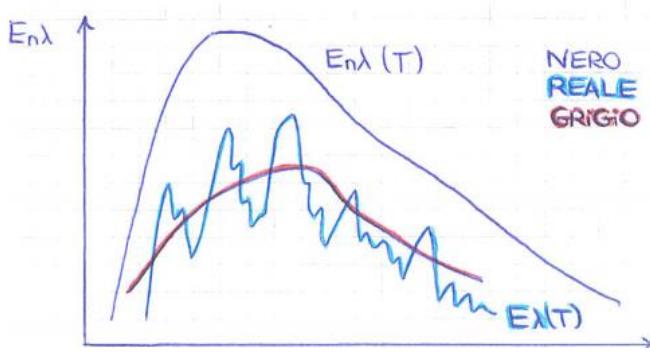
inoltre, poiché il corpo reale ha la stessa temperatura della parete di nuovo il calore netto scambiato è nullo perché hanno la stessa temperatura, tutta l'energia assorbita deve essere emessa:

$$A_\lambda = \alpha_\lambda \cdot G_{n\lambda} = E_\lambda = \varepsilon_\lambda \cdot E_{n\lambda}$$

E_λ è l'energia emessa per irraggiamento da un corpo reale

Poiché $G_{n\lambda} = E_{n\lambda} \Rightarrow \alpha_\lambda = \varepsilon_\lambda$

Per qualsiasi corpo reale, l'emittenza monocromatica del corpo reale è pari all'assorbanza monocromatica del corpo reale.



Vediamo di trovare la curva media di questo andamento;

ε_λ per un corpo reale dipende dalla lunghezza d'onda.

Corpo grigio

Poiché è scomodo avere un'emittenza monocromatica ε_λ che dipende da λ oltre che dalla temperatura, facciamo una media lungo λ del corpo reale così che ε non dipenda da λ . Un corpo grigio è un corpo in cui l'emittenza monocromatica è costante su tutto lo spettro delle lunghezze d'onda. Il corpo grigio non è un corpo reale, ma è un'astrazione che serve per semplificare i problemi.

Si procede così, calcolando ε totale (non monocromatico) che è solo funzione di T :

$$\varepsilon(T) = \frac{E(T)}{E_n(T)} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon_\lambda E_{n\lambda} d\lambda}{\int_0^\infty E_{n\lambda} d\lambda} = \varepsilon_\lambda \Rightarrow \varepsilon_\lambda = \varepsilon$$

$E(T)$ potere emissivo di un corpo reale

$\varepsilon(T)$ emissività totale.

$\varepsilon_\lambda = \varepsilon$ costante rispetto alla lunghezza d'onda! Per un corpo grigio.

Se si ipotizza che ε_λ sia costante, si porta fuori dall'integrale e i due integrali si cancellano.

Assumere che ε_λ non dipende da λ equivale ad assumere che il corpo si comporti come un **corpo grigio**.

Facciamo la stessa cosa per α_λ (calori assorbiti da un corpo reale);

se un corpo reale è investito da un irraggiamento $G_\lambda(\lambda', T')$, come per esempio il sole, dove λ', T' sono le caratteristiche della radiazione elettromagnetica che arriva e che incide.

α_λ è il coefficiente di assorbimento ad ogni lunghezza d'onda, se faccio l'integrale trovo tutto il calore assorbito dal corpo reale in tutto lo spettro delle lunghezze d'onda a quella temperatura T del corpo reale.

Se lo divido per la quantità assorbita dal corpo nero $A_n(T)$.

Ottengo alla fine il coefficiente di assorbimento totale del corpo reale calcolato su tutto lo spettro delle lunghezze d'onda.

$$\alpha(T) = \frac{A(T)}{A_n(T)} = \frac{\int_0^\infty \alpha_\lambda G_\lambda(\lambda', T') d\lambda}{\int_0^\infty G_\lambda(\lambda', T') d\lambda} = \alpha_\lambda \Rightarrow \alpha_\lambda = \alpha$$

Se assumiamo che il corpo sia grigio ovvero $\alpha_\lambda = \text{cost}$ allora lo posso portare fuori dal simbolo di integrale: $\alpha_\lambda = \alpha$ costante rispetto alla lunghezza d'onda!

Con λ' e T' caratteristiche del corpo emittente e λ del corpo che riceve.

In conclusione, poiché per la legge di Kirchhoff $\alpha_\lambda = \varepsilon_\lambda$, otteniamo che per un corpo grigio i 4 parametri $\alpha, \varepsilon, \alpha_\lambda, \varepsilon_\lambda$ si riducono ad uno solo che dipende solo dalla temperatura:

$$\alpha = \alpha_\lambda = \varepsilon = \varepsilon_\lambda \leq 1$$

Osservazione:

un corpo nero è anche un corpo grigio poiché $\varepsilon = 1$ per i corpi neri ($\varepsilon = 1$ non è funzione della lunghezza d'onda).

Invece un corpo grigio non è un corpo nero.

In definitiva, grazie all'ipotesi di corpo grigio, abbiamo delle tabelle dove per ogni sostanza è indicato un unico parametro invece di 4, e l'unica dipendenza è dalla temperatura.

Infine, un altro vantaggio è legato al fatto che la maggior parte dei corpi sono opachi, cioè non lasciano trasparire la radiazione elettromagnetica allora τ e τ_λ sono pari a zero. Allora:

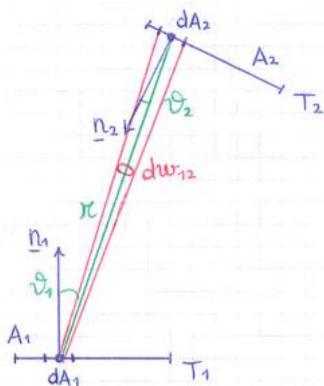
Corpi opachi:

$$\begin{aligned} \tau = \tau_\lambda = 0 \rightarrow & \begin{cases} 1 = \rho + \alpha = \rho + \varepsilon \\ 1 = \rho_\lambda + \alpha_\lambda = \rho_\lambda + \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \rho = \rho_\lambda = 1 - \varepsilon. \\ & \text{Corpo grigio} \end{aligned}$$

Allora per un corpo grigio e opaco noto ε si conosce immediatamente anche ρ .

Calore scambiato tra due corpi per irraggiamento

Consideriamo un corpo 1 disteso orizzontalmente di sezione A_1 e un corpo 2 orientato in un certo modo di sezione A_2 a temperatura T_1 e T_2 rispettivamente. ci poniamo il problema dello scambio di calore tra i due corpi.



Il corpo 2 riscalda il corpo 1 (e viceversa) nella misura in cui la radiazione elettromagnetica emessa da 2 va a finire in 1 (e viceversa).

Il corpo 1 emette energia raggiante in tutto il semispazio superiore, ma di questa solo una parte va a finire sul corpo 2.

L'energia che dal corpo 1 colpisce il corpo 2 è pari a tutta l'energia emessa dal corpo 1, che è un corpo nero, moltiplicata per un **Fattore di vista o di forma** F_{1-2} :

$$q_{1 \rightarrow 2} = E_{n_1} \cdot A_1 \cdot F_{1-2}$$

$E_{n_1} \cdot A_1$ energia totale emessa dal corpo 1; non tutta l'energia raggiante emessa dal corpo 1 va a colpire il corpo 2, quindi definiamo il fattore di vista o fattore di forma; un fattore che moltiplicato per l'energia emessa mi dà l'energia raggiante che emessa dal corpo 1 colpisce 2.

$q_{1 \rightarrow 2}$ energia emessa da 1 che colpisce 2.

In modo del tutto analogo possiamo scrivere l'energia che dal corpo 2 colpisce il corpo 1:

$$q_{2 \rightarrow 1} = E_{n_2} \cdot A_2 \cdot F_{2-1}$$

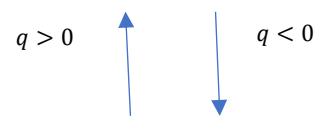
N.B.: nel fenomeno di irraggiamento il calore si considera positivo quando lascia la superficie e negativo quando arriva sulla superficie.

Allora, il calore complessivamente scambiato in regime stazionario è:

$$q_{12} = q_{1 \rightarrow 2} - q_{2 \rightarrow 1} = E_{n_1} A_1 F_{12} - E_{n_2} A_2 F_{21} = 0 \quad \text{se} \quad T_1 = T_2$$

$$\sigma F_1^4 \cdot A_1 F_{12} - \sigma T_2^4 \cdot A_2 F_{21} = 0$$

se i due corpi hanno la stessa temperatura hanno scambio di calore netto pari a zero $q_{12} = 0$; q_{12} calore scambiato tra 1 e 2.



$$\Rightarrow A_1 F_{12} = A_2 F_{21} : \text{Relazione di reciprocità tra i fattori di vista}$$

Siccome ha un significato geometrico allora questa relazione vale anche se le temperature sono diverse.

In definitiva, il calore complessivamente scambiato tra i due corpi neri per irraggiamento è:

$$q_{12} = A_1 F_{12}(E_{n1} - E_{n2}) = A_2 F_{21}(E_{n1} - E_{n2})$$

Ovviamente bisogna calcolarlo questo fattore di vista.

Calcolo del fattore di vista

Consideriamo la radiazione emessa dal corpo 1 e che va a finire sull'elemento dA_2 , e consideriamo l'angolo solido corrispondente a dA_2 , cioè $d\omega_{12}$.

dA_1 e dA_2 superfici infinitesime di A_1 e A_2 . Unisco il centro di dA_1 con il centro di dA_2 con la linea verde e la distanza tra questi punti la chiamiamo r .

La quantità di energia emessa dal corpo 1 che arriva al corpo 2 la scriviamo prima con la legge di Lambert, poi integriamo:

$$dq_{1 \rightarrow 2} = I_1 dA_1 \cos \theta_1 d\omega_{12}, \quad \text{con } d\omega_{12} = \frac{dA_2 \cdot \cos \theta_2}{r^2}$$

$dq_{1 \rightarrow 2}$ quantità infinitesima di calore che emessa dal corpo 1 va al corpo 2.

$$\begin{aligned} \rightarrow dq_{1 \rightarrow 2} &= I_1 dA_1 \cos \theta_1 \frac{dA_2 \cdot \cos \theta_2}{r^2} = \longrightarrow \\ &= \frac{E_{n1}}{\pi} \frac{dA_1 dA_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{r^2} = \end{aligned}$$

Hp: RADIAZIONE DIFFUSA: $I_1 = \frac{E_{n1}}{\pi}$

$$q_{1 \rightarrow 2} = \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{E_{n1}}{\pi} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r^2} dA_1 dA_2.$$

In modo del tutto analogo possiamo determinare l'energia emessa dal corpo 2 che arriva al corpo 1:

$$q_{2 \rightarrow 1} = \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{E_{n2}}{\pi} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r^2} dA_1 dA_2.$$

Allora, il calore scambiato complessivamente è ancora la differenza tra questi:

$$q_{12} = q_{1 \rightarrow 2} - q_{2 \rightarrow 1} = (E_{n1} - E_{n2}) \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2$$

Poiché E_{n1} e E_{n2} dipendono solo dalla temperatura posso portarli fuori dall'integrale.

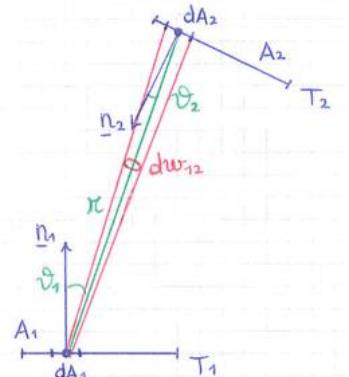
Ora confrontando questa espressione con l'altra espressione del calore netto scambiato:

$$q_{12} = A_1 F_{12}(E_{n1} - E_{n2}) = A_2 F_{21}(E_{n1} - E_{n2})$$

otteniamo:

$$A_1 F_{12} = A_2 F_{21} = \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{12} = \frac{1}{A_1} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2 \\ F_{21} = \frac{1}{A_2} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2 \end{cases}$$



Così abbiamo ottenuto le espressioni dei **Fattori di Vista**.

Vediamo come viene fuori il valore della temperatura fittizia del sole visto dalla terra.

Calcolo della temperatura del sole visto dalla terra

Consideriamo un disco A_2 che rappresenta il sole e un disco A_1 che rappresenta la terra, che si trovano a distanza L tra di loro;

Chiaramente $A_1 \ll A_2$ con a raggio di A_2 .

Dalle formule ricavate per il calcolo dei fattori di vista, integrando si ottiene:

$$A_1 F_{12} = A_2 F_{21} = \frac{A_1 a^2}{a^2 + L^2}$$

Possiamo sfruttare questo risultato della temperatura fittizia del sole vista dalla terra, immaginando di conoscere la potenza termica che arriva dal sole alla terra al di fuori dell'atmosfera (energia raggiante che arriva sulla terra al di fuori dell'atmosfera):

$$\underline{P} = 1353$$

L'energia totale che arriva sulla terra è:

$$\begin{aligned} Q_{21} &= \underline{P} \cdot A_1 = \underline{P} \cdot \pi r_T^2 = A_1 F_{12} (E_{n2} - E_{n1}) = A_1 F_{12} \sigma (T_2^4 - T_1^4) \\ \text{con } A_1 F_{12} &= \frac{A_1 a^2}{a^2 + L^2} = \frac{\pi r_T^2 a^2}{a^2 + L^2} \\ \rightarrow \underline{P} \pi r_T^2 &= \frac{\pi r_T^2 a^2}{a^2 + L^2} \sigma (T_2^4 - T_1^4) \end{aligned}$$

I raggi della terra r_T e del sole a e la distanza L tra i due sono noti; inoltre, imponiamo una temperatura media della terra pari a $T_1 \cong 300K$.

Così l'unica incognita è la temperatura T_2 fittizia del sole che arriva alla terra.

$$\Rightarrow T_2 = 5753K$$

Deriva dall'energia raggiante che il sole emette e che colpisce la terra.

Caratteristiche dei fattori di vista

Consideriamo due corpi distinti che scambiano calore tra loro per irraggiamento.

Il fattore di vista F_{12} è il rapporto tra l'energia emessa dal corpo 1 che finisce sul corpo 2 diviso tutta l'energia emessa dal corpo 1:

$$F_{12} = \frac{E_{n1 \rightarrow 2}}{E_{n1}}$$

Inoltre, il fattore di vista F_{12} indica la frazione di energia emessa dal corpo 1 che va a finire sul corpo 1 stesso.

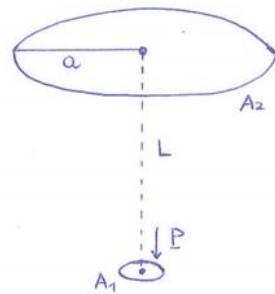
Se il corpo 1 è **concavo** vede se stesso $F_{11} \neq 0$

$\Rightarrow F_{12} + F_{11} = 1$ poiché tutta l'energia emessa dal corpo 1 finisce in parte al corpo 2 e in parte al corpo 1 stesso. Che concetto è questo? è un bilancio energetico; significa che i corpi sono solo due e che l'energia emessa da 1 o scolpisce 1 o colpisce 2. DOMANDA ALL'ORALE.

Non è un fatto geometrico ma è un fatto di bilancio energetico. Quindi la somma dell'energia che cade su 1 e che cade su 2 deve essere per forza uguale all'energia totale emessa.

Se il corpo è **convesso** nessuna energia emessa dal corpo 1 ricade su se stesso e $F_{11} = 0$

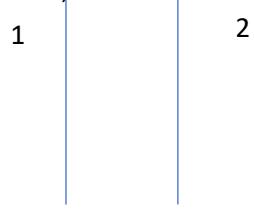
$\Rightarrow F_{12} = 1$ cioè tutta l'energia emessa dal corpo 1 finisce al corpo 2.



Caso 1: 2 pareti infinitamente estese

Due pareti affacciate infinitamente estese. Una superficie infinitamente estesa (non c'è un terzo corpo) è un corpo convesso, quindi tutta l'energia emessa dal corpo 1 finisce al corpo 2 e viceversa, nessuna energia emessa da 1 ricade su 1 stesso e viceversa:

$$F_{11} = 0 \rightarrow F_{12} = 1 \\ F_{22} = 0 \rightarrow F_{21} = 1$$



Caso 2: corpo convesso in una cavità

Per esempio una sfera dentro una sfera;

Vediamo prima le cose dal punto di vista del corpo 1 che è un corpo convesso, quindi il corpo 1 non emette energia che ricade su 1 stesso:

$$F_{11} = 0 \text{ e } F_{12} = 1$$

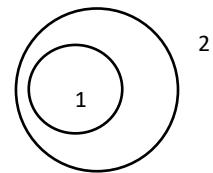
Cioè tutta l'energia emessa dal corpo 1 finisce al corpo 2.

Invece, il corpo 2 è concavo quindi una parte dell'energia emessa dal corpo 2 ricade su se stesso, cioè:

$$F_{22} \neq 0$$

$$\text{Allora: } F_{21} + F_{22} = 1 \rightarrow F_{22} = 1 - F_{21}$$

$$\text{Con } A_1 F_{12} = A_2 F_{21} \rightarrow F_{21} = \frac{A_1}{A_2} F_{12} = \frac{A_1}{A_2}.$$



Relazione di reciprocità degli F

Corpi neri: caso 1.

Consideriamo due superfici nere infinitamente estese di sezione A .

Consideriamo di fare i bilanci in una superficie aderente alla parete 1;

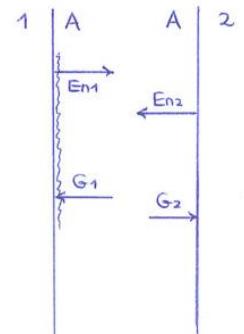
Il corpo 1 è un corpo nero alla temperatura T_1 emette l'energia $E_{n1} = \sigma T_1^4$ così come il corpo 2 emette l'energia $E_{n2} = \sigma T_2^4$.

Sul corpo 1 incide un irraggiamento incognito G_1 dovuto al corpo 2 e sul corpo 2 incide un irraggiamento incognito G_2 dovuto al corpo 1.

Nell'ipotesi di regime stazionario facciamo il bilancio su ciascun corpo, andando a vedere qual è il flusso raggianti su un foglio di alluminio appoggiato alla parete 1 (e 2) ma che non coincide con il corpo stesso.

A regime stazionario la somma algebrica dei due flussi raggianti entranti ed uscenti è pari al calore scambiato dal corpo 1:

$$Q_1 = AE_{n1} - AG_1 = A(E_{n1} - G_1)$$



Inoltre, poiché i corpi sono solo 2, l'energia raggianti che arriva sul corpo 1, che è convesso è quella che arriva dal corpo 2, anch'esso convesso:

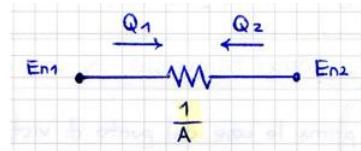
$$AG_1 = AE_{n2} \rightarrow G_1 = E_{n2}$$

$$\Rightarrow Q_1 = A(E_{n1} - E_{n2}) = A\sigma(T_1^4 - T_2^4) \text{ calore totale perso dal corpo 1.}$$

Il calore scambiato dal corpo 1 scritto come differenza di E_n ci permette di fare l'analogia elettrica, dove $(E_{n1} - E_{n2})$ equivale alla differenza di potenziale, $\frac{1}{A}$ equivale alla resistenza e Q_1 è l'effetto della differenza di potenziale che equivale alla corrente:

$$(E_{n1} - E_{n2}) = \frac{1}{A} Q_1 \sim \Delta V = RI$$

La causa è la differenza di potere emissivo dei due corpi;



Chiaramente se volessimo calcolare il calore scambiato dal corpo 2, otterremmo un circuito elettrico analogo dove la corrente Q_2 è uguale e contraria alla corrente Q_1 :

$$Q_2 = A(E_{n2} - E_{n1}) \text{ allora } \rightarrow Q_2 = -Q_1$$

Isolanti per irraggiamento

Vediamo come si può diminuire il calore scambiato per irraggiamento tra le due superfici nere.

Quando si vuole isolare un certo oggetto termicamente, di solito si introduce un materiale che ha una bassa conducibilità termica k e materiali di questo tipo sono gli Aerogel materiali a bassa condutività.

Per tecniche di bassissima temperatura, criogenia, non basta l'isolante per conduzione ma serve l'isolante per irraggiamento. Sono materiali che hanno al loro interno un numero molto grande di schermi radianti (parete/tenda della doccia).

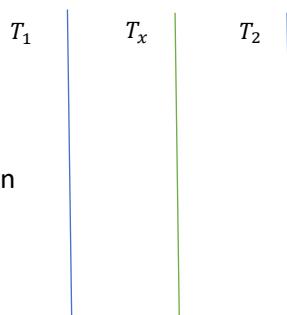
I moderni isolanti termici per impianti a bassissime temperature sono degli isolanti per irraggiamento, costituiti da strati di materiale diverso.

Vediamo in che modo sono utili questi schermi radianti.

Tra le due superfici 1 e 2 a temperatura T_1 e T_2 , inseriamo un'altra superficie a temperatura T_x . Sono tutte superfici piane infinitamente estese.

A regime stazionario, i calori scambiati tra T_1 e T_x e tra T_x e T_2 si calcolano di nuovo come somma algebrica dei flussi raggiunti e come prima otteniamo:

$$Q_{1x} = A\sigma(T_1^4 - T_x^4) = Q_{x2} = A\sigma(T_x^4 - T_2^4)$$



Infatti a regime stazionario questi due calori sono uguali tra loro.

Ricordiamo che abbiamo trovato che $Q_1 = A\sigma(T_1^4 - T_2^4)$ sarebbe il calore se non ci fosse lo schermo T_x .

Invece in presenza dello schermo T_x abbiamo:

$$\begin{aligned} A\sigma(T_1^4 - T_x^4) &= A\sigma(T_x^4 - T_2^4) \rightarrow 2T_x^4 = T_1^4 + T_2^4 \\ \rightarrow T_x^4 &= \frac{T_1^4 + T_2^4}{2} \end{aligned}$$

Allora il calore perso dal corpo 1 diventa:

$$Q_{1x} = A\sigma\left(T_1^4 - \frac{T_1^4 + T_2^4}{2}\right) = A\sigma\frac{T_1^4 - T_2^4}{2} \Rightarrow Q_{1x} = \frac{Q_1}{2}$$

Così abbiamo trovato che interponendo uno schermo il calore si riduce della metà. Aumentando il numero di schermi, il calore perso dal corpo 1 diminuisce progressivamente nel seguente modo:

$$Q'_1 = \frac{Q_1}{N+1}$$

Con N numero di schermi.

Osserviamo che aumentando il numero di schermi Q'_1 si riduce sempre meno (come i materiali utilizzati per fare i rivestimenti degli strumenti criogenici), ma se ci sono un centinaio di schermi il calore scambiato si riduce notevolmente.

Corpi neri: caso 2.

Consideriamo un corpo nero convesso all'interno di una cavità nera, con $A_1 < A_2$.

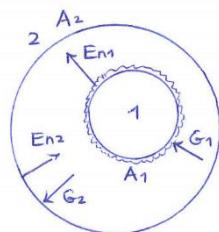
Il corpo 1 emette l'energia $E_{n1} = \sigma T_1^4$ così come il corpo 2 emette l'energia $E_{n2} = \sigma T_2^4$.

Sul corpo 1 incide un irraggiamento G_1 dovuto al corpo 2 e sul corpo 2 incide un irraggiamento G_2 dovuto al corpo 1.

A regime stazionario, il calore scambiato dal corpo 1 è dato ancora dal bilancio sul corpo 1:

$$Q_1 = A_1 E_{n1} - A_1 G_1 = A_1 (E_{n1} - G_1)$$

Nell'irraggiamento il lavoro si da positivo quando esce e negativo quando entra, l'opposto della convenzione termodinamica.



Inoltre, l'energia che arriva sul corpo 1, che è convesso, proviene solo dal corpo 2, che però scambia energia sia con il corpo 1 che con se stesso poiché è concavo; quindi solo la frazione F_{21} dell'energia del corpo 2 finisce sul corpo 1:

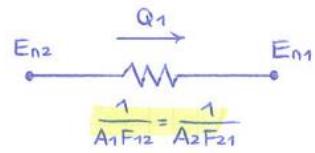
$$A_1 G_1 = A_2 E_{n2} F_{21} = A_1 F_{12} E_{n2} \quad (\text{per la reciprocità } A_2 F_{21} = A_1 F_{12})$$

$$\Rightarrow Q_1 = A_1 E_{n1} - A_1 F_{12} E_{n2} = A_1 F_{12} (E_{n1} - E_{n2}) \text{ siccome } F_{12} = 1;$$

Si può calcolare anche il Q_2 e troviamo $Q_2 = A_2 F_{21} (E_{n2} - E_{n1})$.

Allora il circuito elettrico equivalente presenta una resistenza differente:

$$(E_{n1} - E_{n2}) = \frac{1}{A_1 F_{12}} Q_1 = \frac{1}{A_2 F_{21}} Q_2$$



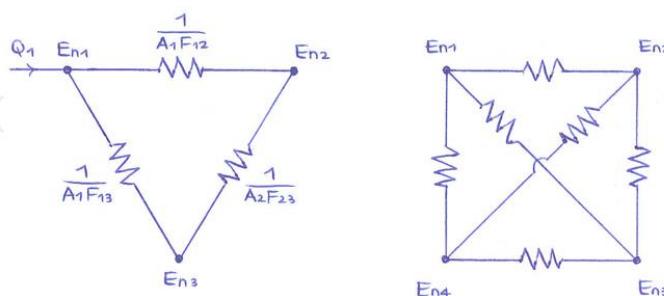
Lo scriviamo come differenza di causa;

Osservazione;

se il problema è a più corpi a diverse temperature, l'analogia elettrica è molto comoda.

Ad esempio il pollo allo spiedo (T_1) riceve calore dalle 2 resistenze (T_3 e T_4) e scambia calore anche con la parete del forno (T_2).

Allora i circuiti elettrici equivalenti sono:



Questo per quanto riguarda i corpi neri, ora vediamo i corpi grigi;

Corpi grigi: caso 1.

Consideriamo due superfici grigie infinitamente estese di sezione A , caratterizzate da un'emittenza ε_1 e ε_2 e da una temperatura T_1 e T_2 .

Inoltre, immaginiamo che le due superfici siano opache, quindi:

$$\tau_1 = 0 \text{ e } \tau_2 = 0 \rightarrow \rho_1 = 1 - \varepsilon_1 \text{ e } \rho_2 = 1 - \varepsilon_2$$

Il corpo 1 emette la radiazione $E_1 = \varepsilon_1 E_{n1}$ e riceve un irraggiamento G_1 dovuto al corpo 2 (se non ci sono schermi), per il fatto che sul corpo 1 impatta l'irraggiamento G_1 per l'esistenza di un corpo grigio reale la radiazione non viene interamente assorbita poiché il corpo non è nero, quindi il corpo 1 riflette una radiazione $R_1 = \rho_1 G_1$. Quindi in realtà abbiamo tre flussi raggianti, due uscenti e uno entrante.

Poiché lavorare con tre flussi è difficoltoso, ci riconduciamo ad avere solo un flusso entrante ed uno uscente sommando i due flussi in uscita:

$$E_1 + R_1 = E_1 + \rho_1 G_1 = J_1 : \text{RADIOSITÀ del corpo 1.}$$

E_1 è l'energia raggianti emessa dal corpo 1 perché si trova alla temperatura T_1 ; mentre R_1 è l'energia raggianti che esce dalla superficie e che è presente perché c'è l'incidenza G_1 di irraggiamento. Se non ci fosse G_1 non ci sarebbe R .

La radiosità rappresenta l'energia raggianti che esce dal corpo 1, dovuta all'energia emessa dal corpo alla temperatura T_1 e all'energia riflessa.

Invece dei tre flussi sul corpo 1 ce ne sono due; J_1 che è l'energia che va via e G_1 che entra. Così anche per il corpo 2 in cui ci sarà J_2 che esce e G_2 che entra.

A regime stazionario il bilancio sul corpo 1 impone che:

$$Q_1 = AJ_1 - AG_1 = A(J_1 - G_1)$$

AG_1 è l'irraggiamento dovuto al corpo 2 che emetteva la radiosità $A_2 J_2 = AJ_2$ perché stessa A ;

L'energia raggianti sul corpo 1 è quella proveniente dal corpo 2 sottoforma di radiosità J_2 poiché anch'esso è un corpo grigio opaco:

$$AG_1 = AJ_2$$

$$\Rightarrow Q_1 = A(J_1 - J_2)$$

Così abbiamo espresso il calore scambiato dal corpo 1 in funzione della differenza tra le radiosità.

Però possiamo riscrivere Q_1 anche in un altro modo, sfruttando la definizione di radiosità:

$$E_1 + \rho_1 G_1 = J_1 \rightarrow G_1 = \frac{J_1 - E_1}{\rho_1} = \frac{J_1 - \varepsilon_1 E_{n1}}{1 - \varepsilon_1}$$

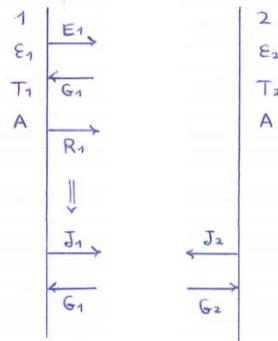
$$\Rightarrow Q_1 = A(J_1 - G_1) = A\left(J_1 - \frac{J_1 - \varepsilon_1 E_{n1}}{1 - \varepsilon_1}\right) = \frac{A}{1 - \varepsilon_1}(J_1 - \varepsilon_1 J_1 - J_1 + \varepsilon_1 E_{n1}) = \frac{A\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1}(E_{n1} - J_1);$$

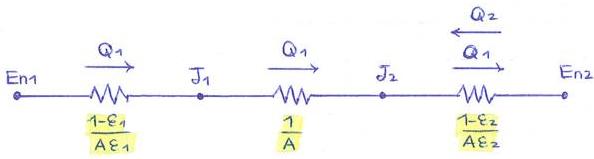
così abbiamo ricavato Q_1 in funzione della differenza di potenziale tra il potenziale del corpo nero E_{n1} e la radiosità J_1 .

Poi facendo la stessa cosa per il calore scambiato dal corpo 2, troviamo una relazione analoga che poi mi permette di scrivere ancora Q_1 in funzione di $(E_{n2} - J_2)$ ricordando che $Q_2 = -Q_1$:

$$Q_2 = \frac{A\varepsilon_2}{1 - \varepsilon_2}(E_{n2} - J_2) \text{ e } Q_2 = -Q_1 \Rightarrow Q_1 = -\frac{A\varepsilon_2}{1 - \varepsilon_2}(E_{n2} - J_2)$$

In definitiva, il circuito equivalente presenta due resistenze addizionali: $(1 - \varepsilon)/A\varepsilon$ quando il corpo è grigio; mentre se il corpo è nero diventano nulle (poiché $\varepsilon = 1$) e danno un cortocircuito e J assume lo stesso potenziale di E_n e si torna al caso precedente:





Il circuito elettrico lo vedo in termini di potenziale di irraggiamento, il potenziale sul corpo 1 è E_{n1} come se fosse nero, in realtà è grigio; il fatto che il corpo sia grigio ha introdotto la J .

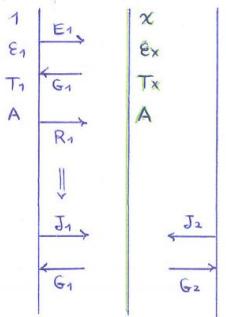
Allora nel caso dei corpi grigi, da questo circuito equivalente scriviamo Q_1 in funzione della differenza $E_{n1} - E_{n2}$ senza dover ricorrere alle radiosità J :

$$Q_1 = \frac{E_{n1} - E_{n2}}{R_s} = \frac{E_{n1} - E_{n2}}{\frac{1-\varepsilon_1}{A\varepsilon_1} + \frac{1}{A} + \frac{1-\varepsilon_2}{A\varepsilon_2}} = \frac{A(E_{n1} - E_{n2})}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} = \frac{A\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

Isolanti per irraggiamento

Vediamo come diminuisce il calore scambiato per irraggiamento tra le due superfici grigie quando inseriamo tra loro un'altra superficie a temperatura T_x .

A regime stazionario i due calori scambiati tra T_1 e T_x e tra T_x e T_2 sono uguali:



$$Q_{1x} = \frac{A\sigma(T_1^4 - T_x^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_x} - 1} = Q_{x2} = \frac{A\sigma(T_x^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_x} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

Se $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ i denominatori sono uguali;

$$(T_1^4 - T_x^4) = \frac{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_x} - 1}{\frac{1}{\varepsilon_x} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} (T_x^4 - T_2^4) \rightarrow \dots \Rightarrow T_x^4 = \dots$$

$$\Rightarrow Q_{1x} = f(Q_1)$$

Corpi grigi: caso 2.

Consideriamo un corpo grigio convesso all'interno di una cavità grigia, con $A_1 \ll A_2$.

I corpi emettono una radiosità $J_1 = E_1 + \rho_1 G_1$ e $J_2 = E_2 + \rho_2 G_2$ e ricevono irraggiamento G_1 e G_2 .

A regime stazionario il bilancio sul corpo 1 impone ci sono solo due scambi:

$$Q_1 = A_1 J_1 - A_1 G_1 = A_1 (J_1 - G_1)$$

Inoltre, l'energia raggiante sul corpo 1 proviene solo dal corpo 2 che però scambia energia anche con se stesso perché è concavo:

$$A_1 G_1 = A_2 J_2 F_{21} = A_1 F_{12} J_2$$

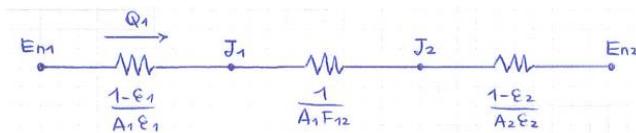
È uguale a tutta l'energia che esce dal corpo 2, però di tutta questa va a finire sul corpo 1 solo la frazione F_{21} .

$$\Rightarrow Q_1 = A_1 J_1 - A_1 J_2 F_{12} = A_1 F_{12} (J_1 - J_2) \text{ siccome } F_{12} = 1$$

Quindi la resistenza intermedia del circuito è cambiata.

Invece, se scriviamo come prima il calore scambiato Q_1 in funzione di $(E_{n1} - J_1)$ e di $(E_{n2} - J_2)$ otteniamo le stesse resistenze addizionali:

$$Q_1 = \frac{A_1 \varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1} (E_{n1} - J_1) = -\frac{A_2 \varepsilon_2}{1 - \varepsilon_2} (E_{n2} - J_2)$$



Allora da questo circuito elettrico equivalente scriviamo Q_1 in funzione della differenza $(E_{n1} - E_{n2})$:

$$Q_1 = \frac{E_{n1} - E_{n2}}{R_s} = \frac{E_{n1} - E_{n2}}{\frac{1 - \varepsilon_1}{A_1 \varepsilon_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{1 - \varepsilon_2}{A_2 \varepsilon_2}} = \frac{A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{F_{12}} + \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2}}$$

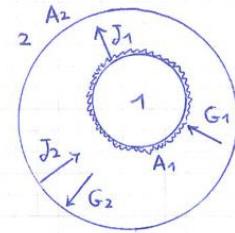
Se $A_1 \ll A_2 \rightarrow A_1/A_2 \ll 1$:

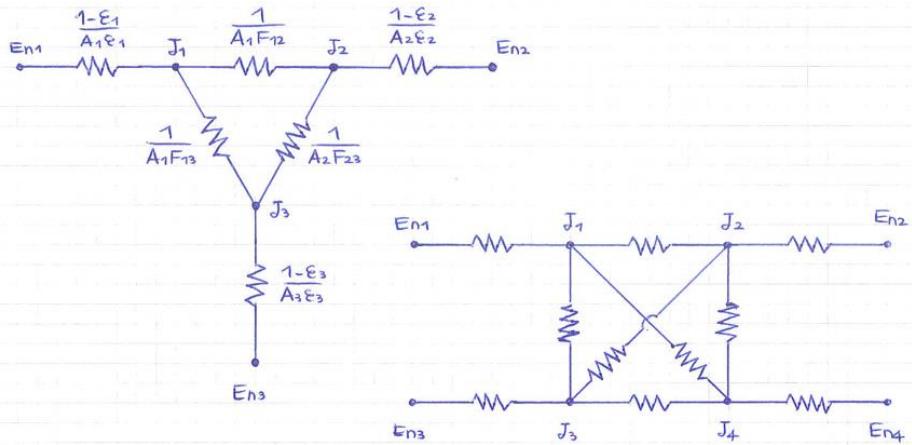
$$Q_1 \simeq \frac{A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + \frac{1}{F_{12}}} = \varepsilon_1 A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

Calore totale perso dal corpo 1. In prima approssimazione questa espressione si può applicare nel comfort termico, per calcolare le perdite del corpo umano in una stanza.

Osservazione;

se il problema è a più corpi grigi l'analogia elettrica ci permette di utilizzare i seguenti circuiti elettrici equivalenti:





Nel caso del corpo nero non ci sono le resistenze laterali.

Radiazione solare che incide sull'atmosfera

Il problema della radiazione solare che arriva sullo strato di gas che costituisce l'atmosfera, lo riconduciamo ad un problema con due pareti tra le quali è presente un gas (m) (aria con vapore d'acqua) che assorbe parzialmente la radiazione che lo attraversa e non la riflette. Consideriamo le grandezze totali e non monocromatiche. La curvatura terrestre ci permette di dire che i due strati possono essere orizzontali.

P irraggiamento sulla superficie terrestre.

Quindi è come se avessimo un problema a 3 corpi:

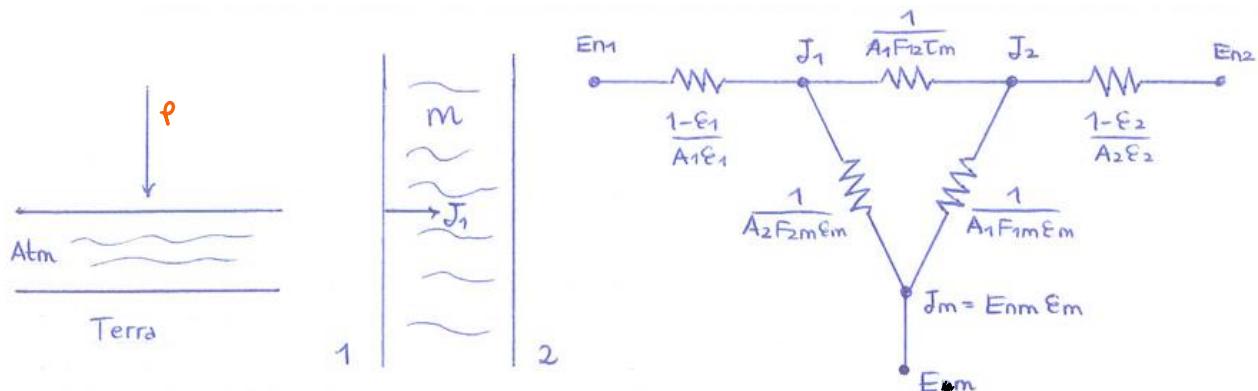
- Corpo 1: grigio e opaco con $T_1, \varepsilon_1, \rho_1 = 1 - \varepsilon_1, \alpha_1 = \varepsilon_1$;
- Corpo 2: grigio e opaco con $T_2, \varepsilon_2, \rho_2 = 1 - \varepsilon_2, \alpha_2 = \varepsilon_2$;
- Corpo intermedio (m) gas non riflette:

$$1 = \rho_m + \varepsilon_m + \tau_m, \text{ con } \alpha_m = \varepsilon_m$$

Per Hp. m non riflette la radiazione (assorbe e trasmette); $\rho_m = 0$. Se la superficie ha una radiosità J_m ;

$$\Rightarrow J_m = E_m + \rho_m G_m = E_m = \varepsilon_m E_{nm}$$

E_m emissività del corpo grigio.



Il calore scambiato tra il corpo 1 e il corpo 2 è:

$$Q_{1-2} = Q_{1 \rightarrow 2} - Q_{2 \rightarrow 1} = A_1 J_1 F_{12} \tau_m - A_2 J_2 F_{21} \tau_m = A_1 F_{12} \tau_m (J_1 - J_2),$$

$A_1 J_1$ è tutta l'energia che esce dal corpo 1, va su 2 però solo la frazione τ_m ; stesso discorso per l'energia che da 2 va ad 1. Poiché di tutta la radiazione emessa dai corpi 1 e 2 solo la frazione F_{12} e F_{21} arriverebbe ai corpi 2 e 1 ma inoltre il corpo intermedio m lascia passare solo la frazione τ_m .

$$\Rightarrow R_{J_1-J_2} = \frac{1}{A_1 F_{12} \tau_m}$$

Nello schema elettrico abbiamo tre corpi;

Il calore scambiato tra il corpo 1 e il corpo m è:

$$Q_{1-m} = Q_{1 \rightarrow m} - Q_{m \rightarrow 1} = A_1 J_1 F_{1m} \varepsilon_m - A_m J_m F_{m1} = A_1 J_1 F_{1m} \varepsilon_m - A_m F_{m1} \varepsilon_m E_{nm} = A_1 F_{1m} \varepsilon_m (J_1 - E_{nm})$$

Dove $\varepsilon_m E_{nm} = J_m$

Poiché di tutta la radiazione che dal corpo 1 arriverebbe al corpo m ($A_1 J_1 F_{1m}$) questo assorbe solo la frazione α_m che però è uguale ad ε_m .

$$\Rightarrow R_{J_1-m} = \frac{1}{A_1 F_{1m} \varepsilon_m} \text{ e analogamente } \Rightarrow R_{J_2-m} = \frac{1}{A_2 F_{2m} \varepsilon_m}$$

Legge di Beer

Consideriamo un vetro investito da un'intensità di radiazione solare I . I_λ radiazione spettrale o monocromatica. Parte della radiazione viene assorbita e parte viene trasmessa.

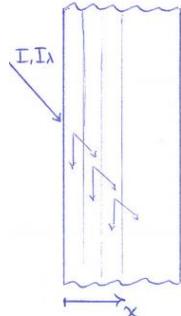
Possiamo determinare come è distribuita spazialmente l'intensità di radiazione, che ad ogni stato viene in parte assorbita e in parte trasmessa → distribuzione dell'intensità di radiazione I in funzione di x .

Il bilancio si può fare sia in maniera totale che in modo spettrale ed impone che la quantità di intensità di radiazione assorbita in ogni strato è proporzionale tramite k all'intensità di radiazione I per dx :

$dI = -KIdx$ per le quantità totali o $dI_\lambda = -K_\lambda I_\lambda dx$ per le quantità monocromatiche; facendo la separazione delle variabili e poi l'integrazione, si ottiene:

$$\rightarrow \ln \left(\frac{I_\lambda}{I_{\lambda_0}} \right) = -k_\lambda x \Rightarrow \frac{I_\lambda}{I_{\lambda_0}} = e^{-k_\lambda x}$$

Legge del decadimento esponenziale dell'intensità di radiazione 38:50



Allora l'intensità di radiazione I diminuisce esponenzialmente con x :

$$I_\lambda = I_{\lambda,0} e^{-k_\lambda x}.$$

Combinazione tra irraggiamento e convezione

Vediamo come per i corpi parzialmente trasparenti come l'aria o anche l'acqua si lasciano attraversare anche dall'irraggiamento. Consideriamo una parete a temperatura T_p ed un fluido a temperatura T_f .

Sappiamo dalla convezione che la distribuzione di temperatura \\ 39:30

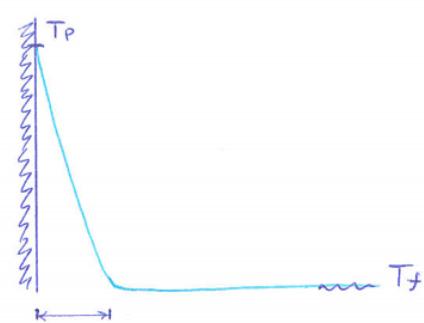
- Lo scambio di calore per convezione tra la parete e il fluido permette di considerare la solita distribuzione di temperatura data dalla legge di raffreddamento:

$$Q_c = h_c S(T_p - T_f)$$

- Lo scambio di calore per irraggiamento tra la parete e il fluido (ad una certa distanza dalla parete) è data da:

$$Q_I = F_{pf} S \sigma (T_p^4 - T_f^4)$$

Con F_{pf} relazione tra le resistenze.



32:30 Mentre il calore scambiato per convezione è proporzionale alla differenza tra le due temperature, il calore scambiato per irraggiamento è proporzionale alla differenza tra le 4° potenze della temperatura.

→ il problema è estremamente complicato poiché si otterebbe un sistema di equazioni alle derivate parziali con integrali che non ha soluzione analitica e si risolve per via numerica con sistemi stocastici (statistici).

Allora da un punto di vista ingegneristico approssimiamo il calore Q_I nel seguente modo:

$$Q_I = F_{pf} S(T_p^2 + T_f^2)(T_p + T_f)(T_p - T_f) \cong F_{pf} \cdot 4T_p^3 \cdot S \cdot (T_p - T_f) = h_I S(T_p - T_f)$$

Somma dei quadrati per la somma delle differenze dei quadrati → scomposizione.

Dove $(T_p^2 + T_f^2) \cong 2T_p^2$ e $(T_p + T_f) \cong 2T_p$

In questo modo siamo riusciti a definire un h_I , un coefficiente di irraggiamento e possiamo sommare i due effetti di trasmissione del calore; il σ poi finisce in h_I .

Allora il calore totale scambiato è:

$$Q_{TOT} = Q_c + Q_I = (h_c + h_I)S(T_p - T_f)$$

Sebbene siamo ben consapevoli di aver ottenuto un risultato approssimato, questo ci è utile per stabilire un ordine di grandezza di h_I e quindi di Q_{TOT} .

Convezione

Arriveremo a risolvere due equazioni alle derivate parziali.

La convezione è basata macroscopicamente sulla legge di Newton che definisce

Ai fini ingegneristici è utile imporre che la convezione sia un meccanismo fondamentale di trasmissione di calore, dove il calore scambiato è dato dalla legge di Newton:

$$\dot{Q} = hS(T_p - T_f)$$

In realtà, la convezione è un meccanismo combinato che accoppia la conduzione con il moto dei fluidi.

Immaginiamo di avere una parete ad una certa temperatura T_p maggiore della temperatura del fluido T_f : $T_p > T_f$.

Nel fluido più vicino alla parete abbiamo la conduzione di calore ed in contemporanea si ha anche il moto del fluido rispetto alla parete.

Il moto del fluido può essere dovuto alla presenza di un ventilatore se il fluido è un aeriforme o di una pompa se il fluido è un liquido, e si parla di **convezione FORZATA** a causa dell'organo esterno che dà lavoro.

Oppure, se non c'è un organo esterno, il fluido si muove solo per differenza di densità poiché in prossimità della parete la temperatura è maggiore e la densità minore mentre il fluido ad una certa distanza dalla parete è a temperatura minore e densità maggiore, quindi pesa di più e tende a scendere mentre il fluido vicino alla parete tende a salire per cause naturali; allora si parla di:

convezione NATURALE o LIBERA.

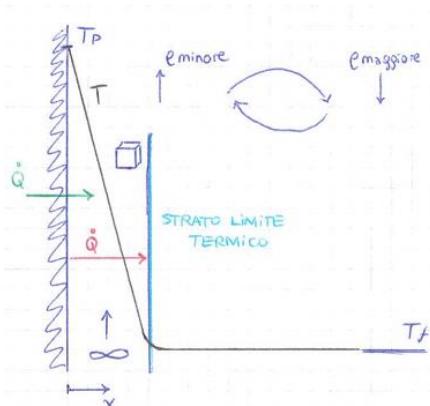
L'andamento della temperatura è quella in figura, secondo cui il gradiente di temperatura è quasi completamente concentrato nello STRATO LIMITE TERMICO, mentre oltre questo strato il fluido si considera a temperatura costante pari a T_f (o una percentuale di T_f tra il 90% e il 100%).

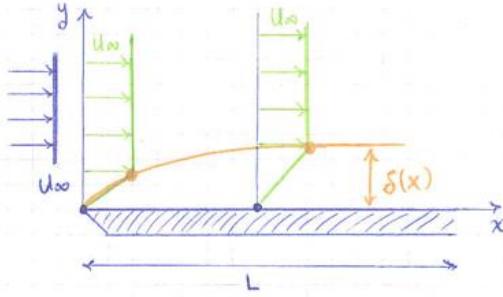
Lo strato limite termico si associa allo strato limite dinamico che possiamo facilmente individuare mandando un fluido contro un oggetto orizzontale tramite un ventilatore (convezione forzata).

Il fluido proveniente dal ventilatore ha un profilo di velocità costante u_∞ fino a $x = 0$.

Nel punto in $x = 0^+$ in cui incontra la parete, il profilo di velocità (in verde) si incurva in modo tale che il fluido in prossimità della parete abbia la stessa velocità della parete ferma mentre a grande distanza abbia il valore di velocità u_∞ ; quindi si ha una variazione di velocità lungo y .

All'aumentare di x , strati con y maggiore vengono interessati da questo gradiente di velocità.





Allora si può individuare lo strato limite dinamico (in arancione), che è la linea che unisce le altezze y dello strato limite.

Lo spessore $\delta(x)$ dello strato limite è l'intervallo in cui il profilo di velocità va da 0 a u_∞ variando lungo y e dipende da x .

Numero di Nusselt

Il coefficiente di convezione h è un parametro dimensionale [W/m^2K], ma è utile ricavarlo tramite un numero adimensionale.

Imponiamo che a regime stazionario, il flusso termico che attraversa la parete per conduzione è pari al flusso termico che va dalla parete allo strato limite termico per convezione:

$$hS(T_p - T_f) = -K_f S \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0}$$

da questa uguaglianza, moltiplicando e dividendo per L il primo membro, otteniamo il seguente parametro adimensionale:

$$\frac{hL}{K_f} = \frac{\left| \frac{dT}{dx} \right|_{x=0}}{\frac{T_p - T_f}{L}} = Nu : \text{Numero di Nusselt}$$

Con L lunghezza definita a convenienza.

Così possiamo definire h in maniera adimensionale.

Osservazione;

il numero di Nusselt è simile al numero di Biot, dove però compare K_s del solido a differenza del numero di Nusselt in cui compare K_f del fluido:

$$Bi = \frac{hL}{K_s}$$

Il numero di Nusselt rappresenta il flusso termico alla parete ($x = 0$) rispetto al flusso macroscopico tra la parete e il fluido.

In conclusione, se si vuole considerare la convezione come un meccanismo separato dalla conduzione e dall'irraggiamento, dobbiamo in qualche modo valutare h e cioè il numero di Nusselt.

Così non c'è più bisogno di collegare la convezione con il moto dei fluidi.

Determinazione di Nu in convezione forzata: 1° metodo

Applichiamo il metodo dell'analisi dimensionale per studiare il gradiente di calore alla parete, che consideriamo funzione di alcune variabili fluidodinamiche ($w, \rho, \mu, L, \Delta T, \alpha = \frac{k}{\rho c_p}$):

$$\frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = f(w, \rho, \mu, L, \Delta T, \alpha) = \sum \text{cost} \cdot w^a \rho^b \mu^c L^d \Delta T^e \alpha^f$$

Secondo l'analisi dimensionale immaginiamo che questa funzione sia la sommatoria del prodotto di una costante per le varie variabili elevate ad un certo esponente.

Imponiamo l'uguaglianza dimensionale:

$$\frac{\vartheta}{L} = \left(\frac{L}{T}\right)^a \left(\frac{M}{L^3}\right)^e \left(\frac{M}{LT}\right)^c L^d \vartheta^e \left(\frac{L^2}{T}\right)^f$$

$$\begin{cases} -1 = a - 3b - c + d + 2f \\ 0 = b + c \\ 0 = -a - c - f \\ 1 = e \end{cases}$$

Poiché abbiamo ottenuto un sistema di 4 equazioni in 6 variabili, esistono ∞^2 soluzioni; allora ricaviamo 4 delle 6 variabili in funzione delle altre 2.

Solitamente si scelgono come variabili indipendenti l'esponente di μ e di α , cioè c ed f ; otteniamo:

$$\begin{cases} d = -1 + c + f - 3c + c - 2f = -1 - c - f \\ b = -c \\ a = -c - f \\ e = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = \text{cost} \cdot w^{-c-f} \cdot e^{-c} \cdot \mu^c \cdot L^{-1-c-f} \cdot \Delta T \cdot \alpha^f = \text{cost} \cdot \frac{\Delta T}{L} \cdot \left(\frac{\mu}{w\rho L}\right)^c \left(\frac{\alpha}{wL}\right)^f$$

- $\frac{\mu}{w\rho L} = \frac{\nu}{wL} = \frac{1}{Re}$, con $Re = \frac{wL}{\nu}$;

- $\frac{\alpha}{wL} \cdot Re = \frac{\alpha}{wL} \cdot \frac{wL}{\nu} = \frac{\alpha}{\nu} = \frac{1}{Pr}$

Con $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$: **NUMERO DI PRANDTL**

$$\Rightarrow \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = \text{cost} \cdot \frac{\Delta T}{L} \cdot Re^x Pr^y$$

In conclusione, possiamo determinare il numero di Nusselt in convezione forzata:

$$Nu = \frac{hL}{K_f} := \frac{dT/dx|_{x=0}}{\Delta T/L} = \text{cost} \cdot Re^x Pr^y$$

Dove x, y e la costante possono essere determinati solo sperimentalmente con Re diversi e Pr diversi e poi trovando il modo di correlarli.

Così con x, y e la costante forniti sperimentalmente si può calcolare il numero di Nusselt e di conseguenza il parametro h .

Convezione forzata: 2° metodo

Questo è un metodo esatto che si basa sull'integrazione delle equazioni di base della convezione, che andiamo a ricavare nel caso di **convezione forzata laminare su lastra piana**.

Nonostante il fenomeno sia tridimensionale, per semplicità lo trattiamo in maniera bidimensionale immaginando che la velocità sia solo funzione di x e y nello strato limite: $dz = 1 \rightarrow w = 0$.

Invece, al di fuori dello strato limite immaginiamo che il profilo sia indisturbato, con $u_\infty = \text{cost}$.

Allora consideriamo un elementino di fluido all'interno dello strato limite, che chiamiamo ELEMENTO FLUIDO, o VOLUME DI CONTROLLO o VOLUME FINITO.

Per studiare il problema, imponiamo al volume di controllo le equazioni di conservazione della massa (scalare), di conservazione della quantità di moto (vettoriale) e di conservazione dell'energia (scalare).

Quindi abbiamo 5 equazioni scalari nelle 5 variabili p, T, u, v, w e il problema è determinato.

Però le equazioni che ricaveremo sono alle derivate parziali e poiché ciascuna variable è funzione di 4 variabili (x, y, z, t) , il sistema non è stato ancora risolto.

Immaginiamo di essere in regime stazionario e che il fluido non cambi composizione chimica.

Conservazione della massa o equazione di continuità

In regime stazionario, il fluido che entra nel volume di controllo deve essere pari al fluido totale che esce.

Nelle due sezioni di ingresso abbiamo scritto $G = \rho v S$.

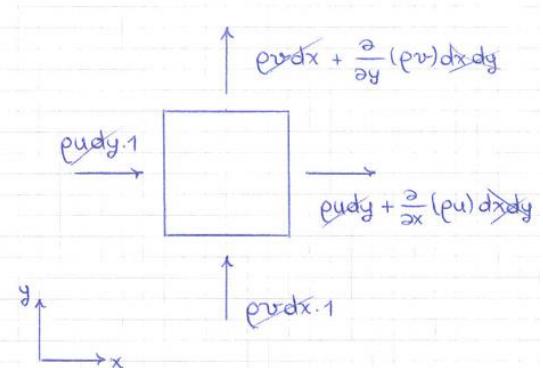
Nelle due sezioni di uscita abbiamo fatto lo sviluppo in serie di Taylor arrestato al 1° ordine.

Otteniamo:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0$$

Nell'ipotesi di **moto incomprimibile** (cioè moto di un fluido incomprimibile o moto di un fluido compressibile che si muove con $Ma \ll 1$), $\rho = \text{cost}$;

inoltre immaginiamo anche che tutte le proprietà fisiche del fluido siano costanti.



$$\Rightarrow (1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Conservazione della quantità di moto

La seconda equazione della dinamica in forma vettoriale impone che la sommatoria delle forze è pari alla derivata temporale del vettore dell'impulso:

$$\sum \bar{F} = \frac{d}{dt}(m\bar{v})$$

In direzione x:

$$\sum F_x = \frac{d}{dt}(mu) = \frac{dm}{dt} \cdot u + m \frac{du}{dt} = \dot{m}u$$

Dove $\frac{du}{dt} = 0$ poiché $u = \text{cost}$ in regime stazionario.

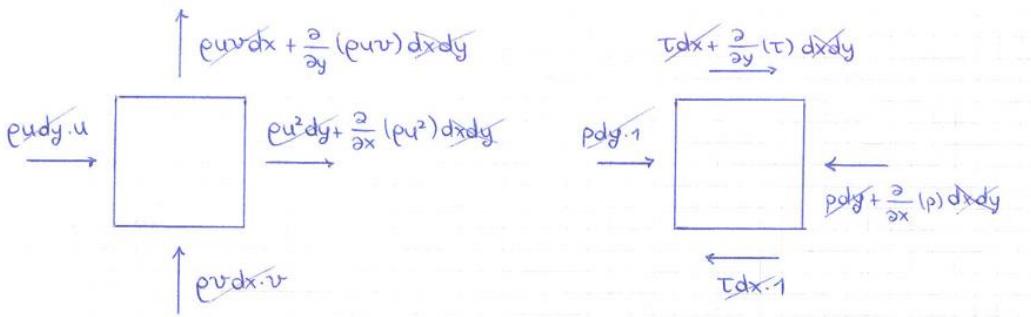
2° membro:

nel bilancio della quantità di moto si impone sempre la quantità uscente meno la quantità entrante:

$$\dot{m}u = \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) = \rho \left(u \cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} + u \frac{\partial u}{\partial x} + u \cancel{\frac{\partial v}{\partial y}} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) =$$

Dove abbiamo semplificato i due termini per l'equazione di continuità;

$$= \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$



1° membro

Consideriamo le forze di pressione e le forze di taglio (pS e τS). Le forze di taglio hanno quei versi poiché il fluido più in basso va a velocità inferiore e quindi rallenta il flusso mentre il fluido in alto è a velocità maggiore e alimenta il flusso.

$$\sum F_x = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Dove abbiamo supposto l'equazione costitutiva del FLUIDO NEWTONIANO.

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \text{ con } \mu = \text{cost}$$

$$\Rightarrow (2) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \text{con } v = \frac{\mu}{\rho}$$

In direzione y si otterebbe un risultato del tutto analogo:

$$(3) \quad u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Conservazione dell'energia

Scriviamo il primo principio della termodinamica per sistemi aperti:

$$dq - dl_f = dh + de_c + de_p = d(h + e_c + e_p) \cdot G$$

$$d\dot{Q} - dL_f = Gd(h + e_c + e_p).$$

2° membro

Nella conservazione dell'energia si impone sempre la quantità uscente meno la quantità entrante:

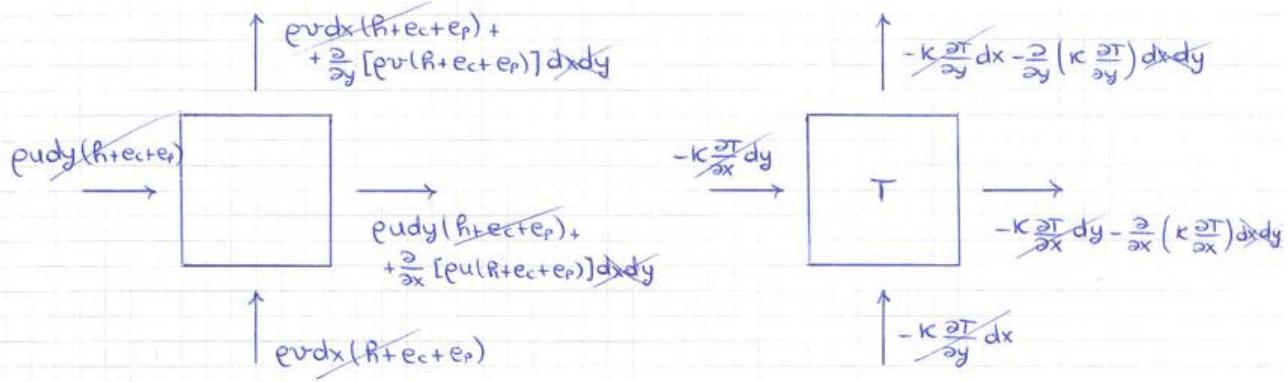
$$\frac{\partial}{\partial x} [\rho u (h + e_c + e_p)] + \frac{\partial}{\partial y} [\rho v (h + e_c + e_p)] =$$

Sapendo che $\rho = \text{cost}$

$$= \rho \left\{ u \frac{\partial}{\partial x} (h + e_c + e_p) + (h + e_c + e_p) \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} (h + e_c + e_p) + (h + e_c + e_p) \frac{\partial v}{\partial y} \right\} =$$

I due contributi si semplificano per l'equazione di continuità.

$$= \rho \left\{ u \frac{\partial (h + e_c + e_p)}{\partial x} + v \frac{\partial (h + e_c + e_p)}{\partial y} \right\}$$



1° membro: $d\dot{Q}$

Immaginiamo che il fluido nel volume di controllo abbia una temperatura T uniforme dappertutto, diversa dalla temperatura del fluido all'esterno, quindi c'è uno scambio di calore per conduzione tra fluido esterno e fluido interno:

$$\dot{Q} = -kS \frac{dT}{d}, \text{ con } k = \text{ cost se il fluido è ISOTROPO}$$

Ricordando che il calore entrante è positivo e il calore uscente è negativo, otteniamo:

$$d\dot{Q} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

1° membro: $d\dot{L}_f$

Immaginiamo che il lavoro sia dovuto solo alle forze di taglio τS , anche perché il lavoro dovuto alla pressione è nullo poiché la pressione è normale alla superficie.

Il fluido al centro del volume di controllo ha una velocità maggiore del fluido in basso, quindi il fluido al centro fa lavoro positivo sul fluido in basso; al contrario, in alto il lavoro è fatto dall'esterno sul fluido, quindi è negativo.

$$d\dot{L}_f = -\frac{\partial}{\partial x}(u\tau) = -\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \text{ con } \mu = \text{ cost}$$

con $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ **Fluido Newtoniano**

$$\Rightarrow (4) \quad \rho \left\{ u \frac{\partial(h + e_c + e_p)}{\partial x} + v \frac{\partial(h + e_c + e_p)}{\partial y} \right\} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

