

*Appunti di*

# FISICA TECNICA

*A cura di Alessandro Mastrofini*

*Docenti del corso:*

Prof. F. Gori

Prof. I. Petracci



*Alessandro Mastrofini*



QUESTA PAGINA È STATA LASCIATA BIANCA INTENZIONALMENTE

# Indice

Indice	III
Indice settimana 1	2
<b>martedì 22 settembre 2020 - Lezione 1 .....</b>	<b>3</b>
Introduzione	3
A cosa serve il corso di fisica tecnica ?	4
Grandezze fisiche e unità di misura	5
La revisione del sistema internazionale di misura	7
<b>mercoledì 23 settembre 2020 - Lezione 2 .....</b>	<b>34</b>
Variabili termodinamiche	34
Principio zero della termodinamica (o di Fowler)	36
Calore	38
<b>giovedì 24 settembre 2020 - Lezione 3 .....</b>	<b>39</b>
1° principio della termodinamica	39
Energia totale	40
Trasformazioni termodinamiche	41
Sistemi aperti	42
2° principio della termodinamica	45
Indice settimana 2	48
<b>martedì 29 settembre 2020 - Lezione 4 .....</b>	<b>49</b>
Generalizzazione del 2° principio della termodinamica	49
Entropia	51
<b>mercoledì 30 settembre 2020 - Lezione 5 .....</b>	<b>55</b>
Trasformazioni irreversibili	56
Ciclo motore ( o ciclo diretto)	57
Macchina di Carnot	57
Sistemi aperti	60
Generalizzazione dei sistemi aperti	62
<b>giovedì 1 ottobre 2020 - Lezione 6 .....</b>	<b>63</b>
Proprietà delle sostanze	65
Equazioni di Maxwell (termodinamiche)	68
Relazioni tra Cp e Cv	71
Indice settimana 3	74
<b>martedì 6 ottobre 2020 - Lezione 7 .....</b>	<b>75</b>
Gas perfetti	76
Teorema di Guoj-Stodola	79
Exergia	80
Diagramma pv	82
Trasformazioni termodinamiche dei gas perfetti	83
<b>mercoledì 7 ottobre 2020 - Lezione 8 .....</b>	<b>84</b>
Esperienza di Andrews	84
Diagramma pT	86
Diagramma pvT	87
Diagramma hs	88
<b>giovedì 8 ottobre 2020 - Lezione 9 .....</b>	<b>91</b>
Diagramma Ts	91
Gas reali: equazioni del viriale	91
Indice settimana 4	100
<b>martedì 13 ottobre 2020 - Lezione 10 .....</b>	<b>101</b>
Andare a vedere i file aggiornati nel materiale!	101
Impianti frigoriferi	101
<b>mercoledì 14 ottobre 2020 - Lezione 11 .....</b>	<b>109</b>
<b>giovedì 15 ottobre 2020 - Lezione 12 .....</b>	<b>117</b>
Fenomeni termoelettrici	117
Indice settimana 5	124
<b>martedì 20 ottobre 2020 - Lezione 13 .....</b>	<b>125</b>
Termofluidodinamica	131
Principio di conservazione della massa di Leonardo da Vinci	134
Principio di conservazione dell'energia: equazione di Bernoulli generalizzata	135
<b>mercoledì 21 ottobre 2020 - Lezione 14 .....</b>	<b>137</b>
Equazione di Euelro	137
Legge di Newton	138
Analisi dimensionale per le perdite distribuite	139

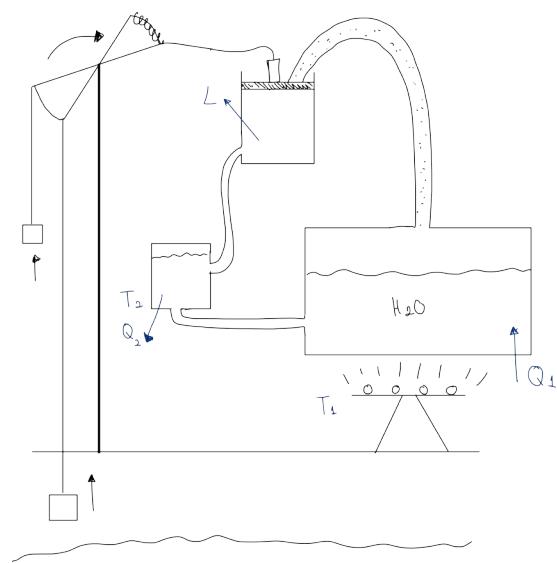
Perdite di pressione concentrate	142
<i>Domani ci sarà la prima esercitazione dell'Ing Petracci.....</i>	<i>144</i>
<i>giovedì 22 ottobre 2020 - Esercitazione 1 .....</i>	<i>145</i>
Esercitazione	145
Indice settimana 6	154
<i>martedì 27 ottobre 2020 - Lezione 15.....</i>	<i>155</i>
Moto di un fluido Newtoniano tra 2 piani paralleli	156
Moto di un fluido in uscita da un serbatoio	160
<i>mercoledì 28 ottobre 2020 - Lezione 16 .....</i>	<i>163</i>
Misure	164
Andamento della temperatura nell'atmosfera terrestre	171
<i>giovedì 29 ottobre 2020 - Esercitazione 2 .....</i>	<i>175</i>
Esercitazione	175
Indice settimana 7	184
<i>martedì 3 novembre 2020 - Lezione 17 .....</i>	<i>185</i>
Moto comprimibile e con elevate differenze di pressione	191
<i>mercoledì 4 novembre - Lezione 18 .....</i>	<i>192</i>
<i>giovedì 5 ottobre - Esercitazione 3 .....</i>	<i>203</i>
Indice settimana 8	212
<i>martedì 10 novembre 2020 - Ricevimento - Panoramica generale.....</i>	<i>213</i>
<i>martedì 10 novembre 2020 - Lezione 19 .....</i>	<i>214</i>
Termocinetica	214
<i>mercoledì 11 novembre - Lezione 20 .....</i>	<i>222</i>
<i>giovedì 12 novembre - Lezione 21 .....</i>	<i>233</i>
Indice settimana 9	242
<i>martedì 17 novembre 2020 - Ricevimento - Panoramica generale.....</i>	<i>243</i>
<i>martedì 17 novembre 2020 - Lezione 22 .....</i>	<i>245</i>
Materiali che non obbediscono alla legge di Fourier (non Fourieriani)	254
Congelamento di un liquido	255
Curva logistica	258
<i>mercoledì 18 novembre 2020 - Lezione 23 .....</i>	<i>260</i>
Irraggiamento termico	260
<i>giovedì 19 novembre 2020 - Lezione 24 .....</i>	<i>268</i>
Convezione	277
Indice settimana 10	280
<i>martedì 24 novembre - Ricevimento - Panoramica generale.....</i>	<i>281</i>
<i>martedì 24 novembre 2020 - Lezione 25 .....</i>	<i>283</i>
Convezione	283
Convezione naturale	288
<i>mercoledì 25 novembre 2020 - Lezione 26 .....</i>	<i>290</i>
Termostato (scambiatori di calore)	291
Scambiatori di calore: condensatore e vaporizzatore	292
<i>giovedì 26 novembre 2020 - Lezione 27 .....</i>	<i>298</i>
Convezione forzata su lastra piana	298
Soluzione di Blasius	299
Indice settimana 11	306
<i>martedì 1 dicembre 2020 - Ricevimento 4 .....</i>	<i>307</i>
<i>martedì 1 dicembre 2020 - Lezione 28 .....</i>	<i>308</i>
Problema termodinamico: soluzione di Polhausen	310
Soluzione di Von Karman - Polhausen	313
Convezione naturale	315
<i>mercoledì 2 dicembre 2020 - Lezione 29 .....</i>	<i>318</i>
Fenomeni di trasporto	325
<i>giovedì 3 dicembre 2020 - Lezione 30 .....</i>	<i>327</i>
Criochirurgia	327
Indice settimana 12	330
<i>mercoledì 9 dicembre 2020 - Lezione 31 .....</i>	<i>331</i>
Termoregolazione in anestesia	331
<i>giovedì 10 dicembre 2020 - Lezione 32 .....</i>	<i>332</i>
Aneurisma dell'aorta	332
Indice settimana 13	334
<i>martedì 15 dicembre 2020 - Ricevimento panoramica generale .....</i>	<i>335</i>
<i>martedì 15 dicembre 2020 - Lezione 33 .....</i>	<i>337</i>
Fluidodinamica e trasporto di massa nel circolo di Willis	337
<i>mercoledì 16 dicembre 2020 - Lezione 34 .....</i>	<i>338</i>
Acustics problems in cardiac fluid dynamics.	338

<i>giovedì 17 dicembre 2020 - Esercitazione 4.....</i>	<b>339</b>
Aria umida	339
Indice settimana 14	348
<i>martedì 22 dicembre 2020 - Ricevimento panoramica generale .....</i>	<b>349</b>
<i>martedì 22 dicembre 2020 - Esercitazione 5.....</i>	<b>350</b>
Indice settimana 15	368
<i>giovedì 7 gennaio 2021 - Esercitazione 6 .....</i>	<b>369</b>
Impianti di climatizzazione	369
Indice settimana 16	388
<i>martedì 12 gennaio 2021 - Esercitazione 7 .....</i>	<b>389</b>
Impianti frigoriferi	389
<i>mercoledì 13 gennaio 2021 - Esercitazione 8.....</i>	<b>405</b>
<i>giovedì 14 gennaio 2021 - Esercitazione 9 .....</i>	<b>420</b>
Indice settimana 17	430
<i>martedì 19 gennaio 2021 - Approfondimento .....</i>	<b>431</b>
Domande	431
Scambi termici - osservazioni generali	432



# FISICA TECNICA

## Settimana 1



MACCHINA DI WATT

# Indice settimana 1

Indice settimana 1	2
martedì 22 settembre 2020 - Lezione 1	3
Introduzione	3
<i>Docenti</i>	3
<i>Programma del corso</i>	3
<i>Modalità d'esame</i>	3
<i>Date esame</i>	3
<i>Libri di testo</i>	4
A cosa serve il corso di fisica tecnica ?	4
Grandezze fisiche e unità di misura	5
<i>Grandezze derivate</i>	5
La revisione del sistema internazionale di misura	7
mercoledì 23 settembre 2020 - Lezione 2	34
Variabili termodinamiche	34
<i>Temperatura</i>	36
Principio zero della termodinamica (o di Fowler)	36
Calore	38
giovedì 24 settembre 2020 - Lezione 3	39
1° principio della termodinamica	39
<i>Esperienza di Joule</i>	39
Energia totale	40
Trasformazioni termodinamiche	41
Sistemi aperti	42
2° principio della termodinamica	45
<i>Macchina di Newcomen</i>	45
<i>Macchina di Watt</i>	45

martedì 22 settembre 2020 - Lezione 1

# Introduzione

## *Docenti*

Fabio Gori —> 6 CFU

Ivano Petracci —> 3 CFU

## *Programma del corso*

Resta uguale a quello dell'anno scorso.

**Obiettivi del corso:** l'obiettivo principale del corso è la conoscenza dei fenomeni di trasporto, e cioè della Termodinamica, della Termofluidodinamica, della Termocinetica e del trasporto di massa.

**Termodinamica:** Scienza della termodinamica. Primo principio della Termodinamica. Termometria. Sistema aperto. Sistema aperto con più correnti. Secondo principio della Termodinamica. Teorema dell'aumento di entropia e sorgenti entropiche. Lavoro meccanico per trasformazioni irreversibili. Sistemi tecnici. Pompe di calore. Sistema aperto con più correnti. Proprietà delle sostanze. Coefficienti calorimetrici. Energia ed entalpia libera. Equazioni di Maxwell. Passaggi di stato. Exergia. Gas reali. Stati corrispondenti. Benessere ambientale. Miscele di aria e vapore. Impianti tecnici inversi. Cicli termodinamici di impianti tecnici inversi. Impianti frigoriferi a compressione, con camera di separazione, ad acqua con elettore e ad aria. Impianto di aria condizionata per aerei. Liquefazione dei gas. Impianti frigoriferi termoelettrici. Impianti inversi ad assorbimento. Frigorifero Electrolux.

**Termofluidodinamica:** Linee di flusso. Equazione di conservazione della massa e dell'energia. equazione di Bernoulli. Legge di Newton. Esperienza di Reynolds. Moto laminare e turbolento. Attrito. Perdite di carico, moto con volume specifico costante. Scarico da serbatoi. Equazione di Eulero e tempi di svuotamento di serbatoi, moto con notevoli differenze di temperatura. Metanodotto. Camino. Ristagno. Misure di temperatura, velocità e portata. Velocità del suono, equazione di Hugoniot. Condotti a sezione variabile con continuità. Tubi di efflusso, velocità e portata.

**Termocinetica:** Trasmissione del calore e Termodinamica. Modalità di trasmissione del calore. Leggi fondamentali. Unità di misura e dimensioni. Conduzione termica. Conduzione monodimensionale in regime permanente. Proprietà variabili. Conduzione transitoria a parametri concentrati. Alette di raffreddamento. Conduzione bi e tridimensionale in regime stazionario. Conduzione in regime transitorio. Corpo infinito e semi infinito. Solidificazione e fusione. Irraggiamento termico. Corpi neri. Corpi grigi, in presenza o meno di gas assorbenti e riflettenti. Irraggiamento con convezione. Convezione termica. Convezione forzata su lastra piana. Equazioni di conservazione della massa, energia e quantità di moto. Soluzione di Blasius. Equazione di conservazione dell'energia. Soluzione di Polhausen. Soluzione di Von Karman. Convezione naturale. Soluzione di Polhausen. Scambiatori di calore: termostati, condensatori e vaporizzatori. Scambiatori di calore, equicorrente e controcorrente. Differenza di temperatura media logaritmica ed efficienza.

**Trasporto di massa:** Equazione di Fick e analogie. Diffusione equimolecolare di gas e in film stagnante. Convezione formata di massa. Torri di raffreddamento.

Fine lezioni per la settimana di natale + 2 settimane a gennaio.

Dovremmo riuscire a fare 30 lezioni di 2 ore e 15 esercitazioni di 2 ore. (Totale di 45 lezioni per 90 ore)

Il prof vuole finire le lezioni entro la settimana di Natale lasciando gennaio per le esercitazioni con l'ing. Petracci.

NO esercitazioni sulla termofluidodinamica.

Da metà novembre interverranno lezioni ed esercitazioni con l'ing Petracci.

## *Modalità d'esame*

1 scritto numerico (esercizi) + orale con 3 domande teoriche sui tre argomenti principali (termodinamica, termofluidodinamica, termocinetica e trasporto di massa).

Non facendo esercitazioni di termofluidodinamica lo scritto **non** comprenderà esercizi su questa parte (solo su termodinamica, termocinetica e trasporto di massa).

Se rimangono in atto le disposizioni faremo solo due esercizi, 1 di termodinamica e 1 sulla trasmissione del calore, se invece torniamo in aula con lo scritto di tre ore si tornerà a fare 2 esercizi di termodinamica (di cui uno sulle miscele aria vapore) e 1 esercizio sulla trasmissione del calore.

## *Date esame*

26 gennaio 2021 aula A1 9:30 - 13:30

23 febbraio 2021 Aula A1 9:30 - 13:30

In modalità telematica le date restano le stesse.

Sono state scelte in modo tale di dare la possibilità di avere 2 fine settimana dalla fine delle lezioni a chi fa il primo scritto.

## Libri di testo

Per la Termodinamica: Fabio Gori - Lezioni di Termodinamica Texmat.

Per gli esercizi: Corasaniti- Petracci - Gori - Esercizi di termodinamica - Texmat

Per la seconda parte: Gori- Corasaniti - Petracci - Lezioni di Termofluidodinamica - Texmat. (Lo useremo solo in parte)

Per la termocinetica: Frank Kreith - Principi di trasmissione del calore - Liguori editore. (Lo useremo solo in parte)

## A cosa serve il corso di fisica tecnica ?

Tesi di cui ci ha parlato:

- Fluidodinamica negli stent
- L'acustica nella termofluidodinamica cardiaca. Casi filologico di stenosi e di insufficienza valvolare aortica.
- Emodinamica e trasporto di massa in aorta toracica. Casi fisiologico e aurismatico.
- Analisi numerica dell'emondinamica e del trasporto di massa nel circolo di Willys.

Dottorati di ricerca:

- Numerical solution of hydrodynamics in Cardiovascular and respiratory system.
- Transport equation in ...

# Grandezze fisiche e unità di misura

## CAPITOLO 1 LIBRO TERMODINAMICA.

Si definiscono in maniera operativa, cioè si definisce dal modo in cui si misura, cioè si confronta la grandezza fisica con il campione scelto come riferimento.

Il sistema di unità di misure definisce i campioni di grandezza fondamentali, le unità di misura e le convenzioni con le quali si definiscono le grandezze derivate.

Nel S.I. (Sistema internazionale) ci sono 4 grandezze fondamentali:

Grandezze meccaniche:

- Lunghezza (***m***):  $x$ , [ $L$ ],
- Tempo (***s***):  $t$ , [ $T$ ]
- Massa (***kg***):  $M$ , [ $M$ ]

Grandezze termiche:

- Temperatura (***K***):  $T$ , [ $\theta$ ]

I **campioni** sono dei sistemi con cui si mette a confronto la grandezza che vogliamo misurare. Sono necessari per definire operativamente le grandezze fondamentali (la grandezza sarà tutt'uno il campione). Vedremo che non sarà poi così semplice.

Lunghezza:

dopo la rivoluzione francese costruiranno uno strumento di platino iridio a forma di X, dal 1960 è la lunghezza d'onda della radiazione rossa-rosso-arancio emessa dal crioporto 86 nel vuoto, segue dalla relazione

$$1 \text{ m} = 1.650.763,73 \text{ campioni}$$

nel 1983 è il percorso fatto dalla velocità della luce in un certo tempo,  
nel 1997 è il percorso fatto dalla velocità della luce dai laser moderni,

$$1 \text{ m} = \# \text{ di campioni.}$$

Tempo: è il periodo della radiazione dell'atomo di Cesio 133, dove  $1 \text{ s} = 9.192.631,770$  campioni

Massa: inizialmente era definita in maniera metafisica, dopo la rivoluzione francese il campione è la massa di un campione di platino iridio (cilindrico)  $1 \text{ kg} = 1$  campione

Temperatura: la definiamo dopo il 1° principio della termodinamica

## Grandezze derivate

Si derivano dalle grandezze fondamentali in base ad una convettione o ad una definizione fisica o una legge fisica

- Superficie,  $m^2$ , [ $L^2$ ], la superficie unitaria è l'area di un quadrato di lato 1m.
- Volume,  $m^3$ , [ $L^3$ ], volume unitario è il volume di un cubo di lato unitario
- Densità,  $\rho$ ,  $\rho = \frac{M}{V}$  si ricava, per convenzione, da questa legge,  $\text{kg}/\text{m}^3$  [ $L^3 M^{-1}$ ]
- Volume specifico,  $v$ , volume per unità di massa  $v = \frac{V}{M}$ ,  $\text{m}^3/\text{kg}$ , [ $L^3 M^{-1}$ ]
- Portata,  $g$ , massa per unità di tempo  $G = \frac{M}{\Delta T}$ ,  $\text{kg}/\text{s}$ , [ $MT^{-1}$ ]
- Velocità,  $w$ , spazio per unità di tempo,  $w = \frac{L}{\Delta t}$ ,  $\text{m}/\text{s}$ , [ $LT^{-1}$ ]
- Accelerazione,  $a$ , velocità nell'unità di tempo,  $a = \frac{w}{\Delta t}$   $\text{m}/\text{s}^2$ , [ $LT^{-2}$ ]
- Forza,  $F$ , si è scelta la 2° legge della dinamica (non la forza di attrazione tra 2 corpi)  $F = Ma$ ,  $\text{kg m}^2/\text{s}^2$  [ $MLT^{-2}$ ] =  $N$  (Newton)
- Lavoro,  $L$ , forza per lo spostamento nella direzione della forza,  $L = F\Delta x$ ,  $\text{kg m}^2/\text{s}^2$ , [ $ML^2 T^{-2}$ ] =  $J$ ,  $N \times s = Joule$
- Potenza,  $P$ , lavoro nell'unità di tempo,  $P = \frac{L}{\Delta T}$ ,  $\text{kg m}^2/\text{s}^3$ , [ $ML^2 T^{-3}$ ] =  $W$ ,  $J/s = Watt$ ,
- Pressione,  $p$ , forza per unità di superficie  $p = \frac{F}{S}$ ,  $\text{kg}/\text{ms}^2$ , [ $ML^{-1} T^{-2}$ ] =  $Pa$  (Pascal). Si utilizza anche la pressione atmosferica:  $p_a = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1,013 \text{ Bar} = 1013 \text{ mBar}$ .

Per convenzione si indicano con le lettere minuscole le quantità intensive (per unità di massa) mentre con la lettera minuscola le grandezze estensive.

Fa eccezione la temperatura che pur essendo una grandezza intensiva si indica con la lettera maiuscola.

Misura della pressione (grandezza meccanica di un sistema):

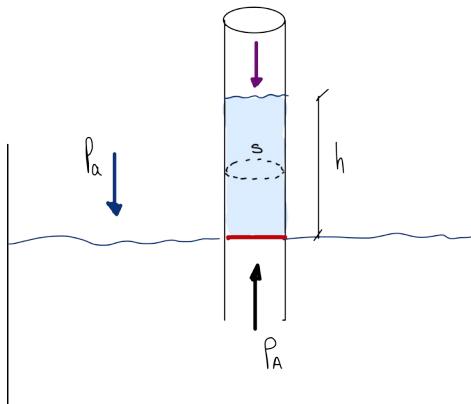
Misurare la pressione significa misurare la forza per unità di superficie. cioè misurando la pressione atmosferica misuriamo il peso della colonna d'aria sopra di noi.

Utilizziamo un barometro, immergiamo in un fluido un tubo in modo tale che nella parte superiore rimanga 'il vuoto'.

Se il liquido barometrico è ad esempio mercurio il livello a cui arriva il fluido si ferma ad un'altezza  $h$ . La pressione atmosferica si riflette sulla sezione nel tubo esercitando una certa forza.

Assumendo quasi il vuoto nella sezione superiore la forza di pressione atmosferica nella parte inferiore bilancia la forza peso della colonna di fluido.

Facendo l'equilibrio si trova  $h = 760 \text{ mmHg}$ , in base all'esperienza di Torricelli.



densità del liquido barometrico

$$\text{Se } h \text{ ha} \quad M = \rho V = \rho Sh$$

$$p_A \cdot S = p_0 \cdot S + Mg$$

$$p_A \cdot S = \rho Sh g$$

$$\Rightarrow p_A = \rho h g$$

Cioè identifichiamo la pressione atmosferica misurata dal barometro:  $p_A = \rho h g$ .

Ad esempio:

$p_A = 1,013 \text{ Bar}$  è il valore che devo ottenere per la pressione atmosferica.

- Con  $\rho_{\text{Mercurio}} = 13,500 \text{ kg/m}^3$  si ottiene  $h = 0,76 \text{ m}$
- Con  $\rho_{H_2O} = 1000 \text{ kg/m}^3$  si ottiene  $h = 10 \text{ m}$
- Con  $\rho_{\text{aria}} = 1 \text{ kg/m}^3$  si ottiene  $h = 10.000 \text{ m}$  che corrisponde circa all'altezza dell'atmosfera terrestre.

Il barometro quindi ci restituisce la pressione assoluta e di solito si parla di pressione assoluta atmosferica.

Però quando si fanno le misure termofluidodinamiche si misura la pressione relativa rispetto l'atmosfera con il **manometro differenziale**.

Misura la differenza tra la pressione nel recipiente rispetto l'atmosfera.

Foro nel recipiente e attraverso un tubo si fa in modo di avere una parte inferiore con il liquido manometrico. I due livelli di altezza del liquido manometrico rappresentano la differenza di pressione.

Se la differenza è nulla allora  $p = p_A$ .

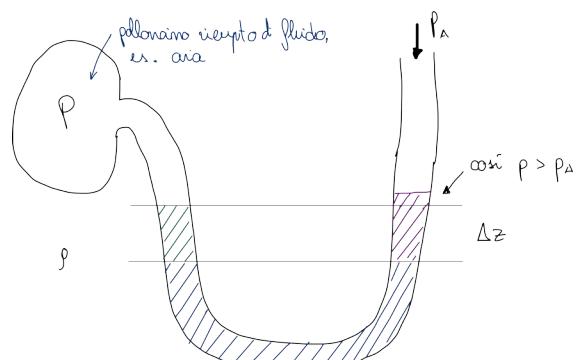
Se invece c'è un dislivello, faccio un bilancio delle forze:

$$pS = \rho g \Delta z = p_A S + \rho m g \Delta z$$

Cioè  $p - p_A = \Delta z (\rho_m - \rho) g$

Se nel palloncino c'è aria ( $\rho \approx 1 \text{ kg/m}^3$ ) posso trascurare questo valore

e allora:  $p - p_A \approx \rho_m g \Delta z$ .



NELLA PROSSIMA LEZIONE VEDREMO I FENOMENI TERMOELETTRICI.

# La revisione del sistema internazionale di misura



## LA REVISIONE DEL SISTEMA INTERNAZIONALE DI UNITÀ DI MISURA

Ing. Angelo Sardi  
Dott. Marco Pisani  
Istituto Nazionale di Ricerca Metrologica  
INRIM

---

Raccolta di monografie su  
GESTIONE DELLA STRUMENTAZIONE NEI LABORATORI DI PROVA PER APPARECCHIATURE ELETTRICHE  
Monografia N° 3 - Pagina 1 di 27



### **1. Premessa: la necessità della misura**

L'esigenza di misurare le grandezze fisiche si è manifestata molto prima dello sviluppo delle scienze e della nascita del concetto stesso di grandezza fisica. Di certo la misura era già presente nell'economia di baratto e si sviluppò con l'introduzione della moneta.

L'evoluzione della metrologia è stata anche influenzata dalle vicende storiche e politiche: l'alternanza tra imperi e secoli bui, cui corrispondevano globalizzazione e "localizzazione" dei commerci ha portato ad alterne unificazioni e moltiplicazioni delle unità di misura. Si verificavano casi in cui, un'unità di misura aveva valori diversi a seconda della località. In Tabella 1 sono confrontati i valori dell'unità di superficie "tavola" e dei suoi multipli in alcuni capoluoghi di provincia della Pianura Padana<sup>1</sup>.

Tabella 1		
Valori della "tavola" in diverse località della pianura padana		
località	[m <sup>2</sup> ]	Multiplo
Bergamo	27,60	pertica = 24 t
Bologna	14,45	tornatura = 144 t
Brescia	32,55	piò = 100 t
Crema	31,50	pertica = 24 t
Cremona	33,67	pertica = 24 t
Ferrara	16,31	tornatura = 144 t
Mantova	31,39	biolca = 100 t
Modena	39,39	biolca = 72 t
Piacenza	31,75	pertica = 24 t

Prendendo in esame i valori di Bologna e Modena, che distano meno di 50 km, una distanza non eccezionale nemmeno in tempi di trasporti a dorso di mulo, si ha una differenza pari al 270 % per la stessa unità, mentre per i multipli la differenza "si riduce" al 136 %. In passato per la stessa grandezza fisica (peso, lunghezza, volume) si potevano avere unità diverse secondo l'ambito in cui si operava la misura<sup>2</sup>. Le necessità di misura condizionavano sia la scelta dell'unità di misura sia la scelta della base numerica<sup>3</sup>. Una tale babel di valori poteva essere mantenuta solo in assenza di esigenze di confronto tra grandezze omogenee, tipiche della scienza moderna, o, più prosaicamente, fino a che, con la nascita degli stati nazionali, non si ponesse il problema del calcolo delle tasse.

Lo sviluppo dei commerci e la nascita degli stati nazionali hanno dato un primo impulso all'unificazione delle unità di misura in senso moderno. La scienza ha poi operato sia richiedendo l'unificazione delle unità sia fornendo i mezzi per realizzarla. Una trattazione sui sistemi di misura non può che partire dalla storia della loro evoluzione nell'età contemporanea.

<sup>1</sup> I valori della tabella costituiscono un esempio eclatante delle controindicazioni del federalismo.

<sup>2</sup> L'unità veniva spesso scelta in modo da evitare l'uso di numeri troppo grandi o troppo piccoli.

<sup>3</sup> Un esempio è rappresentato dalle uova che, prima della cottura, sono intrinsecamente indivisibili. Ne segue che l'unità di misura deve essere necessariamente l'uovo. Per quanto riguarda la scelta della base numerica, la base dodici (misura a dozzine) ha un innegabile vantaggio: il numero dodici è, infatti, divisibile con quoziente intero per 2, 3, 4 e 6, mentre per un sistema decimale i possibili divisori sono solo 2 e 5.

## 2. Dal sistema metrico decimale al SI

Il primo passo nello sviluppo dell'attuale Sistema di Unità di Misura può essere fatto risalire alla rivoluzione francese. L'Assemblea Nazionale Costituente francese, su proposta di Charles-Maurice de Talleyrand-Périgord<sup>4</sup>, decise di adottare un sistema unificato di pesi e misure, seguendo la richiesta di "Un roi, une loi; un poids et une mesure".<sup>5</sup>

<i>Longueur de quelques pieds de France.</i>		<i>Suite des Mesures pour les Aunages.</i>	
Besançon,	137 10	Toulon.	859 60
Dijon.	139 20	Montpellier.	841 60
Dole.	150 30	Provence.	600 90
Grenoble.	131 20	Toulouse.	827
Lyonne.	137 20	Troyes.	331 70
Lyon.	131 50		
Mâcon.	131 20		
Paris.	141 "		
Rouen.	139 00	Lyon. Pouces cubes	9670
Sedan.	131 00	(Mâcon.	12693
		Châlons-sur-Saône.	9283
Strasbourg.	Pied de ville. 138 20	Vézelay.	9670
	Pied de cane pagne. 135 90		
Vienne en Dauphiné.	143 "	Ambroise.	553
		Arras.	1114
Abbeville, l'Aune est de	524	Blois.	387
Arras.	389 10	Bordeaux.	3068
Bayonne.	343 80	Bourbon-Lancy.	573
Bordeaux.	528	La Charité.	967
Brest-s'gne.	597 20	Chardieu.	1221
Caen.	524 "	Châteauneuf-sous-Loire.	1169
Caen.	317 60	Compiègne.	311
Cambrai.	299 80	Dijon.	517
Dunkerque.	299 80	Haire-de-Grace.	1713
Lille.	305 60	Houleur.	176
Lyon.	520 50	Montreuil.	430
	(Pour les Soieries. 927 50)	Morlaix.	2670
Paris.	(Pour les Laines. 525 00)	Nevers.	967
Paris.	(Pour les Toilleries. 524 00)	Paris.	6114
Morlaix.	507 20	Périgueux.	1547
Nantes.	526 "	Perpignan.	977
Rouen.	Pour les Laines. 516 "	La Rochelle.	1653
	Pour les Toilleries. 319 20	Rouen.	123
Saint-Malo.	507 20	Tours.	513
		Villerceau d'Agénais.	4120
		Briare.	757
		Calais.	1469

Figura 1

Tabella con le differenze tra le unità di misura utilizzate in Francia, dalla proposta all'Assemblea Nazionale.

Le commissioni scientifiche istituite per definire le nuove unità di misura, comprendenti tra gli altri da Jean-Charles de Borda, Joseph-Louis Lagrange, Pierre-Simon de Laplace, Antoine Lavoisier e Gaspard Monge, elaborarono le seguenti definizioni:

- Il metro è la decimilionesima parte dell'arco di meridiano terrestre tra il polo boreale e l'equatore;
- Il grammo è il peso assoluto di un volume di acqua pura pari al cubo della centesima parte del metro alla temperatura del ghiaccio fondente<sup>6</sup>.

A seguito delle due definizioni, furono realizzati due campioni materiali, in platino, del metro e del chilogrammo, conservati negli Archives de la République a Parigi<sup>7</sup>.

<sup>4</sup> Proposition faite à l'Assemblée nationale sur les poids et mesures par M. l'évêque d'Autun, Paris, 1790.

<sup>5</sup> Cahiers des doléances, 1789

<sup>6</sup> Décret relatif aux poids et aux mesures 18 germinal an 3 (7/4/1795) «Gramme, le poids absolu d'un volume d'eau pure égal au cube de la centième partie du mètre , et à la température de la glace fondante». Nel decreto erano definite anche le unità di area (Ara=100 m<sup>2</sup>) di volume di legna da ardere (Stereo=1 m<sup>3</sup>), di volume (Litro= 1 dm<sup>3</sup>) e di moneta (franco).



Nel 1832 il matematico e fisico Carl Friedrich Gauss realizzò la prima misura del campo magnetico terrestre, utilizzando un sistema decimale basato sull'utilizzo, come unità di misura, del millimetro e del milligrammo, rispettivamente per la lunghezza e la massa, oltre alla definizione del secondo astronomico come unità di misura del tempo. Il secondo era definito partendo dall'osservazione astronomica della rotazione della terra: il giorno solare veniva diviso in due cicli di 12 periodi (le ore), a loro volta divise in 60 periodi (i minuti); ogni minuto era ulteriormente suddiviso in 60 periodi (i secondi). In questo modo il secondo risultava pari a 1/86400 del giorno<sup>8</sup>. Negli anni seguenti Gauss e Wilhelm Eduard Weber continuarono gli studi sui fenomeni elettromagnetici, contribuendo alla promozione dell'uso del sistema metrico decimale.

Le applicazioni del Sistema metrico nel campo delle misure elettromagnetiche furono ulteriormente sviluppate negli anni '60 del 1800 sotto la direzione di William Thomson (Lord Kelvin) e James Clerk Maxwell, attraverso la British Association for the Advancement of Science (BAAS, oggi British Science Association BSA). I due fisici formularono la richiesta di un sistema di misura coerente basato su poche unità di misura di base, da cui derivare le altre unità. Nel 1874 la BAAS introdusse il sistema di unità CGS, un sistema coerente basato su tre unità di misura meccaniche, il centimetro, il grammo e il secondo, utilizzando prefissi dal micro al mega per indicare i multipli e sottomultipli. La fisica e le scienze sperimentali delle ultime decadi dell'800 sono state sviluppate utilizzando il sistema CGS.

Le unità coerenti del sistema CGS nel campo dell'elettricità e del magnetismo si rivelarono non molto comode per l'utilizzo pratico<sup>9</sup>. Per questo motivo, negli anni 80 dell'800, la BAAS e il Congresso Elettrotecnico Internazionale, precursore della International Electrotechnical Commission – IEC, approvarono l'utilizzo di un sistema coerente di unità pratiche, tra cui l'ohm per la resistenza elettrica, il volt per la forza elettromotrice e l'ampere per la corrente.

Dopo la firma della Convenzione del Metro, il 20 maggio 1875, che creò l'Ufficio Internazionale dei Pesi e delle Misure (BIPM), istituì la Conferenza Generale dei Pesi e delle Misure (CGPM) e il Comitato Internazionale dei Pesi e delle Misure (CIPM), iniziarono le attività volte alla realizzazione dei nuovi prototipi internazionali del metro e del chilogrammo. Nel 1899 la prima Conferenza Generale dei Pesi e delle Misure definì i prototipi per il metro e il chilogrammo<sup>10</sup>, insieme al secondo astronomico come unità di tempo. Le tre unità così definite costituirono un sistema meccanico simile al CGS, ma con le unità di base metro, chilogrammo e secondo, il sistema MKS.

<sup>7</sup> Il campione del metro ha sezione rettangolare, a differenza dei campioni successivi, mentre il campione di massa ha una forma cilindrica simile a quella che sarà poi adottata per i campioni in platino/iridio.

<sup>8</sup> Va notato come la misura del tempo non sia basata solo su un sistema decimale, ma su due altre basi numeriche (60 e 24).

<sup>9</sup> L'unità di carica elettrostatica esu equivale a  $3,3356 \times 10^{-10}$  C, l'unità di potenziale elettrico statvolt corrisponde a 299,792458 volt, la capacità è misurata in cm con 1 cm =  $1,113 \times 10^{-12}$  F.

<sup>10</sup> Resolution 1 of the 1st CGPM, 24-28 September 1889



Fu l'ingegnere e fisico italiano Giovanni Giorgi (1871-1950) a dimostrare, nel 1901<sup>11</sup>, la possibilità di combinare le tre grandezze meccaniche di base del sistema MKS con le unità pratiche utilizzate per l'elettromagnetismo, per formare un unico sistema coerente di unità basato su 4 grandezze di base: Il sistema si basava sulle 3 unità del sistema MKS, a cui si univa una quarta unità elettrotecnica, l'ampere o l'ohm. Si potevano quindi riscrivere le equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo nella cosiddetta forma razionale. La proposta di Giorgi, figura di scienziato poco nota in Italia, aprì la strada ai successivi sviluppi.

Dopo la revisione della convenzione del metro nella sesta CGPM del 1921, che ampliò gli obiettivi e le responsabilità del BIPM in altri campi della fisica, e l'istituzione del Consultative Committee for Electricity CCE, oggi Consultative Committee for Electricity and Magnetism CCEM, durante la settima CGPM del 1927 la proposta di Giorgi fu analizzata in ogni sua parte dalla IEC, dalla International Union of Pure and Applied Physics - IUPAP e da altre organizzazioni internazionali. I risultati dell'analisi portarono il CCE a proporre, nel 1939, l'adozione di un sistema con 4 unità di base: metro, chilogrammo, secondo e ampere, il Sistema MKSA. La proposta del CCE fu approvata dal CIPM nel 1946. La settima CGPM elaborò anche la seguente definizione del metro<sup>12</sup>:

*The unit of length is the metre, defined by the distance, at 0°, between the axes of the two central lines marked on the bar of platinum-iridium kept at the Bureau International des Poids et Mesures and declared Prototype of the metre by the 1st Conférence Générale des Poids et Mesures, this bar being subject to standard atmospheric pressure and supported on two cylinders of at least one centimeter diameter, symmetrically placed in the same horizontal plane at a distance of 571 mm from each other.*

Nel 1948 il BIPM promosse un'inchiesta internazionale, a seguito della quale la decima CGPM, nel 1954, approvò l'introduzione, come unità di base per la corrente elettrica, la temperatura termodinamica e l'intensità luminosa, rispettivamente l'ampere, il kelvin e la candela. La denominazione Sistema Internazionale di Unità, con l'abbreviazione SI, è stata assegnato al sistema dall'undicesima CGPM nel 1960. La CGPM del 1960 sancì la nuova definizione del metro attraverso la lunghezza d'onda del Kripton, mandando in pensione la barra di platino/iridio. Il metro è la prima unità di base che è stata definita attraverso una costante fisica.

La quattordicesima CGPM del 1971, dopo un lungo confronto tra fisici e chimici, ha introdotto la mole come unità di base per la qualità di sostanza, completando l'attuale versione del SI, portando il numero totale di unità di base a sette.

<sup>11</sup> G. Giorgi "Unità razionali di elettromagnetismo" Atti dell'Associazione elettrotecnica italiana, V (1902), pp. 402-418

<sup>12</sup> In realtà la definizione, come tutti i documenti della CGPM è stata redatta in francese, lingua ufficiale della metrologia. In questo documento la definizione è riportata nella traduzione inglese dal sito del BIPM.



### 3. L'attuale struttura del SI

Come illustrato nel paragrafo precedente, l'attuale Sistema Internazionale di Unità di misura si basa su 7 unità (le unità di base) per le seguenti grandezze fisiche:

- Lunghezza;
- Massa;
- Tempo;
- Corrente Elettrica;
- Temperatura Termodinamica;
- Quantità di Sostanza;
- Intensità luminosa.

Le rispettive unità di misura sono state introdotte in tempi diversi, seguendo lo sviluppo della scienza e della tecnica (Figura 2). Lo stesso sviluppo delle conoscenze scientifiche ha comportato un'evoluzione delle definizioni, finalizzata ad aumentare la stabilità e la ripetibilità delle realizzazioni delle unità.



Figura 2  
Rappresentazione grafica delle unità di misura del SI

Le prime definizioni delle unità erano basate sulla realizzazione di manufatti (i cosiddetti "Campioni Materiali", come barre e cilindri metallici) e sulla definizione di unità di misura di una grandezza come il valore della grandezza del manufatto. Questa procedura non era dissimile da quella utilizzata fin dal rinascimento, quando i campioni di lunghezza e di peso erano conservati presso le porte delle città per la misura delle merci e il calcolo dei dazi<sup>13</sup>.

<sup>13</sup> Nella loggia della torre dell'orologio di Berna (Zytglogge), antica porta occidentale della città sono visibili ancora oggi le unità di misura di lunghezza (cubito e bracciata), realizzate con barre metalliche.



I problemi legati alla stabilità nel tempo dei campioni materiali erano noti prima ancora dell'approvazione della convenzione del metro. J. C. Maxwell, in occasione della riunione della British Association for the Advancement of Science del 1870, dichiarò:

*"If we wish to obtain standards of length, time and mass which shall be absolutely permanent, we must seek them not in the dimensions or the motion, or the mass of our planet, but in the wavelength, the period of vibration, and the absolute mass of these imperishable and unalterable and perfectly similar molecules."*

*"Se si vogliono ottenere campioni di lunghezza, tempo e massa che siano assolutamente permanenti, dobbiamo cercarli non nelle dimensioni o nel movimento, o nella massa del nostro pianeta, ma nella lunghezza d'onda, nel periodo di vibrazione e nella massa assoluta, imperituri, inalterabili e perfettamente simili delle molecole".*

È quindi opportuno ripercorrere l'evoluzione delle definizioni delle unità di misura SI dalla prima definizione all'attuale struttura.

### **3.1 Unità di misura della lunghezza (metro - m)**

La prima definizione del metro come distanza tra due tacche della barra di platino/iridio conservata presso il BIPM è stata sostituita dall'undicesima CGPM del 1960 con una definizione basata sulla lunghezza d'onda della radiazione del Kripton 86:

*"Il metro è la lunghezza pari a 1 650 763,73 lunghezze d'onda nel vuoto della radiazione corrispondente alla transizione fra i livelli 2p10 e 5d5 dell'atomo di kripton-86"*

In questo modo era possibile realizzare campioni di lunghezza utilizzando un interferometro e un microscopio per il conteggio delle frange d'interferenza.

La definizione basato sulla lunghezza d'onda del Kripton fu a sua volta sostituita nel 1983 dalla 17° CGPM<sup>14</sup> legando la definizione del metro alla velocità della luce nel vuoto:

*"Il metro è la lunghezza del percorso computato da un raggio di luce nel vuoto in un intervallo di tempo pari a 1/299 792 458 s".*

Da cui segue che la velocità della luce nel vuoto vale esattamente 299 792 458 m/s. Il prototipo internazionale del metro, in platino/iridio, definito dalla 1° CGPM del 1889, è comunque conservato presso il BIPM, nelle condizioni definite nel 1889.

### **3.2 Unità di massa (chilogrammo - kg)**

Il chilogrammo è definito tramite un manufatto (Cilindro di platino/iridio con altezza e diametro di 39 mm), noto come il Prototipo Internazionale, conservato presso il BIPM. L'unico intervento nella definizione del campione di massa si è verificato nella 3° CGPM del 1901, con una dichiarazione tesa a eliminare l'ambiguità tra massa e peso:

*"Il chilogrammo è l'unità di massa;  
è uguale alla massa del Prototipo Internazionale del chilogrammo."*

<sup>14</sup> 17th CGPM 1983, Resolution 1, CR, 97, and Metrologia, 1984, 20, 25;



Conseguenza diretta della definizione è che la massa del prototipo è esattamente pari a 1 kg. Tuttavia, a causa dell'inevitabile accumulo di contaminanti sulla superficie, il Prototipo Internazionale è soggetto a una contaminazione reversibile, pari a circa 1 µg per anno. Per questo motivo la CIPM ha stabilito che, in attesa di ulteriori ricerche, la massa del Prototipo Internazionale è quella ottenuta dopo una specifica pulizia e uno specifico lavaggio<sup>15</sup>. La massa così definita è utilizzata per il confronto con i campioni nazionali, anch'essi realizzati in platino/iridio<sup>16</sup>.

### **3.3 Unità di tempo (secondo - s)**

L'unità di tempo, il secondo, è stata inizialmente definita come 1/86 400 del giorno solare medio. La definizione del giorno medio fu lasciata agli astronomi.

Misurazioni successive mostrarono irregolarità nel moto di rotazione terrestre, rendendo la definizione non più soddisfacente. Per definire un'unità di tempo più precisa l'11° CGPM del 1960 adottò una definizione fornita dall'unione Astronomica Internazionale, basata sull'anno 1900<sup>17</sup>.

Molti studi dimostrarono poi che il Tempo Standard Atomico, basato su una transizione tra due livelli energetici, può essere realizzato e riprodotto con minore incertezza. La necessità, manifestata dalla scienza e dalla tecnologia, di una definizione dell'unità di tempo sempre più precisa ha portato all'attuale definizione, approvata dalla 13° CGPM del 1968:

*Il secondo è la durata di 9 192 631 770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione tra due livelli iperfini dello stato di base dell'atomo di Cesio 133*

Ne segue che la frequenza associate alla transizione tra i due livelli del Cesio 133 è esattamente 9,192631770 GHz. Nella riunione del CIPM del 1997 si è inoltre precisato che:

*La definizione fa riferimento all'atomo di Cesio a riposo, a una temperatura di 0 K<sup>18</sup>.*

La nota del CIPM intendeva chiarire che la definizione SI del secondo è basata su di un atomo di Cesio non perturbato dalla radiazione del corpo nero, condizione che si ottiene alla temperatura di 0 K (Pari a -273,15 °C). Le frequenze ottenute dagli orologi a temperatura ambiente dovrebbero quindi essere corrette per lo scostamento indotto dal rumore elettromagnetico di fondo<sup>19</sup>, come ribadito nella riunione del Comitato Consultivo per il Tempo e la Frequenza del 1999.

<sup>15</sup> PV, 1989, 57, 104-105 and PV, 1990, 58, 95-97

<sup>16</sup> Metrologia, 1994, 31, 317- 336

<sup>17</sup> Resolution 9; CR, 86

<sup>18</sup> Il famoso "Zero Assoluto"

<sup>19</sup> Ogni corpo la cui temperatura sia al di sopra dei 0 K emette energia per irraggiamento.

### 3.4 Unità di corrente elettrica (ampere - A)

Le unità elettriche per la corrente e la resistenza sono state introdotte nel Congresso Internazionale di Elettricità di Chicago del 1893 (Figura 3); le definizioni di "ampere internazionale" e di "ohm internazionale" sono state confermate nella Conferenza Internazionale di Londra del 1908:

*L'ohm internazionale è la resistenza in corrente continua di una colonna di mercurio di sezione costante, lungo 106,3 cm e con massa di 14,4521 g alla temperatura del ghiaccio fondente<sup>20</sup>;*

*L'ampere internazionale è uguale alla corrente continua che depositerebbe 0,001 118 000 grammi di argento al secondo da una soluzione di nitrato d'argento in acqua<sup>21</sup>.*



Figura 3  
Congresso di Chicago del 1893, foto dei partecipanti; all'estrema sinistra Galileo Ferraris

Le unità definite in questo modo presentavano notevoli problemi di realizzazione. Già in occasione dell'8° CGPM del 1933 si era registrato un unanime consenso sulla necessità di sostituire le unità definite sopra con le cosiddette "Unità Assolute", coerenti con le unità MKS. La decisione finale fu presa solo nella 9° CGPM del 1948. Si scelse quindi come unità della corrente elettrica l'ampere, secondo la definizione proposta da CIPM del 1946<sup>22</sup>:

*L'ampere è l'intensità di corrente continua che, se mantenuta in due conduttori rettilinei paralleli di lunghezza infinita, di sezione circolare trascurabile, posti a una distanza di 1 m nel vuoto, produrrebbe tra i conduttori una forza pari a  $2 \times 10^{-7}$  newton<sup>23</sup> per metro di lunghezza.*

Ne segue che la permeabilità magnetica del vuoto  $\mu_0$  è esattamente  $4\pi \times 10^{-7}$  H/m.

<sup>20</sup> L'ohm così definito corrisponde a circa 0,00049 Ω nel SI.

<sup>21</sup> L'ampere così definito corrisponde a circa 0,99985 A nel SI.

<sup>22</sup> Resolution 2; PV, 20, 129-137

<sup>23</sup> Nella prima stesura della definizione del 1946 il newton era indicato come "unità di forza MKS". Il nome newton fu introdotto nella 9° CGPM del 1948.



### **3.5 Unità di misura della temperatura termodinamica (kelvin - K)**

La definizione dell'unità di misura della temperatura termodinamica è stata deliberata dalla 10° CGPM del 1954, che ha scelto il punto triplo<sup>24</sup> dell'acqua come punto fisso fondamentale e gli ha assegnato il valore di 273,16 K. La 13° CGPM del 1967/68 adottò il nome kelvin, simbolo K al posto del precedente "Grado Kelvin" con simbolo °K". Da definizione dell'unità è quindi:

*Il kelvin, unità di temperatura termodinamica è la frazione 1/273,16 della temperatura del punto triplo dell'acqua.*

Un'ulteriore precisazione sulla definizione del kelvin è stata fatta nella riunione del CIPM del 2005:

*La definizione si riferisce all'acqua con composizione isotopica definita esattamente con le seguenti quantità di sostanza: 0,000 155 76 moli di  $^2\text{H}$  per mole di  $^1\text{H}$ , 0,000 379 9 moli di  $^{17}\text{O}$  per mole di  $^{16}\text{O}$  e 0,002 005 2 moli di  $^{18}\text{O}$  per mole di  $^{16}\text{O}$ .*

Per la misura della temperatura rimane ancora in uso la scala in gradi Celsius (simbolo °C). I gradi Celsius hanno la stessa ampiezza dei kelvin. Una differenza di temperatura ha quindi lo stesso valore numerico sia se espressa in kelvin sia se espressa in gradi Celsius.

### **3.6 Unità di quantità di sostanza (mole - mol)**

Seguendo l'evoluzione della conoscenza delle leggi della chimica furono introdotte unità di misura per la quantità di sostanza quali il grammo-atomo e la grammo-molecola, con la definizione:

*Grammo-atomo è la massa di un elemento il cui valore in grammi è uguale al peso atomico dell'elemento stesso.*

*Grammo-molecola è la massa di una molecola il cui valore in grammi è uguale alla somma dei pesi atomici degli elementi.*

Le due unità di quantità di sostanza avevano un legame diretto con il concetto di peso atomico (in realtà si tratta di massa e non di peso). Il peso atomico era in origine riferito al peso atomico dell'ossigeno, fissato a 16. Su questa definizione nacque un'ambiguità tra le misure in fisica, dove il valore 16 era assegnato all'isotopo  $^{16}\text{O}$ , e le misure in chimica, dove lo stesso valore veniva assegnato a una mistura di isotopi  $^{16}\text{O}$ ,  $^{17}\text{O}$  e  $^{18}\text{O}$ , corrispondente alla composizione naturale dell'ossigeno. Un accordo tra l'International Union of Pure and Applied Physics (IUPAP) e l'International Union of Pure and Applied Chemistry (IUPAC) fu raggiunto nel 1959/60. Chimici e fisici si accordarono per assegnare il valore 12 alla massa atomica dell'isotopo di carbonio con numero di massa 12 (con 6 protoni e 6 neutroni nel nucleo).

In seguito alla proposta dell'IUPAC, dell'IUPAP e dell'ISO, il CIPM elaborò la definizione della mole nel 1967 e la confermò nel 1969. Questa definizione fu adottata dalla 14° CGPM del 1971:

*La mole è la quantità di sostanza di un sistema che contiene tante entità elementari quanti sono gli atomi in 0,012 kg di carbonio 12.*

*Le entità elementari devono essere specificate e possono essere atomi, molecole, ioni, elettroni, ecc. ovvero gruppi specificati di tali particelle.*

---

<sup>24</sup> Punto, in un diagramma di stato pressione-temperatura, che corrispondente allo stato in cui le tre fasi (solida, liquida e aeriforme) di una determinata sostanza coesistono in condizioni di equilibrio.



Nel 1980 il CIPM approvò il rapporto del Consultative Committee for Units CCU che chiariva come la definizione si riferisse ad atomi non legati di carbonio 12, a riposo e nel loro stato fondamentale. La definizione della mole determina anche il valore della costante di Avogadro.

### **3.7 Unità di intensità luminosa (candela - cd)**

Le unità di intensità luminosa basate su campioni di fiamma o incandescenza in uso in vari paesi prima del 1948 furono inizialmente sostituite dalla "nuova candela" basata sulla luminanza di un radiatore Planck (un corpo nero) alla temperatura di solidificazione del platino.

La modifica era stata preparata dall'International Commission on Illumination (CIE) e dal CIPM prima del 1937. La decisione fu promulgata dal CIPM nel 1946. Fu poi ratificata nel 1948 dalla 9° CGPM che adottò un nuovo nome internazionale per questo unità, la candela, simbolo cd. La 13° CGPM del 1967 ha dato una versione modificata di questa definizione.

A causa delle difficoltà tecnologiche nella realizzazione di un radiatore Planck alle alte temperature, e considerando le possibilità offerte dalla radiometria, la 16a CGPM del 1979 ha adottato una nuova definizione della candela:

*La candela è l'intensità luminosa, in una data direzione, di una sorgente che emette una radiazione monocromatica di frequenza 540 x 1 012 hertz e la cui intensità energetica in quella direzione è 1/683 watt per steradiane.*

### **3.8 Le unità derivate**

Dalle 7 unità di base sono derivate tutte le altre unità di misura. Ciascuna unità è ottenuta come il prodotto di più unità di base, ciascuna elevate a una determinata potenza. In un Sistema coerente di unità di misura non vengono utilizzati fattori moltiplicativi diversi da 1. In Tabella 2 alcuni esempi:

Tabella 2			
Grandezza derivata		Unità coerente SI derivata	
Nome	Simbolo	Nome	Simbolo
Area	A	metro quadro	$m^2$
Velocità	v	metro al secondo	$m/s$
Accelerazione	a	metro al secondo quadrato	$m/s^2$
Densità	$\rho$	chilogrammo al metro cubo	$kg/m^3$
Densità di corrente	j	ampere per metro quadro	$A/m^2$
Intensità di campo magnetico	H	ampere per metro	$A/m$



### 3.9 Unità derivate a cui sono stati assegnati nomi propri

Per comodità, ad alcune unità derivate sono stati assegnati nomi propri e propri simboli<sup>25</sup>. Si tratta di 22 unità, elencate nella Tabella 3.

Tabella 3			
Unità derivata	Nome	Simbolo	Espressione in termini di unità di base
Angolo piano	Radiante	rad	$m/m$
Angolo solido	steradiante	sr	$m^2/m^2$
Frequenza	Hertz	Hz	$s^{-1}$
Forza	Newton	N	$m \text{ kg } s^{-2}$
Pressione	Pascal	Pa	$m^{-1} \text{ kg } s^{-2}$
Energia/ lavoro/quantità di calore	Joule	J	$m^2 \text{ kg } s^{-2}$
Potenza/ flusso radiante	Watt	W	$m^2 \text{ kg } s^{-3}$
Carica elettrica	Coulomb	C	$s A$
Differenza di potenziale elettrico/ forza elettromotrice	Volt	V	$m^2 \text{ kg } s^{-3} A^{-1}$
Capacità elettrica	Farad	F	$m^{-2} \text{ kg } s^4 A^2$
Resistenza elettrica	Ohm	$\Omega$	$m^2 \text{ kg } s^{-3} A^{-2}$
Conducibilità elettrica	Siemens	S	$m^{-2} \text{ kg } s^3 A^2$
Flusso magnetico	Weber	Wb	$m^2 \text{ kg } s^{-2} A^{-1}$
Densità di flusso magnetico	Tesla	T	$kg \text{ s}^{-2} A^{-1}$
Induttanza	Henry	H	$m^2 \text{ kg } s^{-2} A^{-2}$
Temperatura celsius	grado celsius	$^{\circ}\text{C}$	K
Flusso luminoso	Lumen	lm	cd
Illuminamento	Lux	lx	$m^{-2} cd$
Radioattività	becquerel	Bq	$s^{-1}$
Dose assorbita	Gray	Gy	$m^2 s^{-2}$
Dose equivalente	Sievert	Sv	$m^2 s^{-2}$
Attività catalitica	Katal	kat	$s^{-1} mol$

I nomi e i simboli di queste unità possono a loro volta essere utilizzati per definire altre unità derivate (es. 1 Pa = 1 m<sup>-1</sup> kg s<sup>-2</sup> = 1 N/m<sup>-2</sup>).

<sup>25</sup> Unità derivate con un proprio nome erano presenti anche nel sistema CGS, dove l'unità di densità di flusso magnetico era in gauss (simbolo G) che è ancora molto utilizzato nelle misure magnetiche. Il gauss è pari a  $1/10^4$  T. L'uso del gauss è vantaggioso per due motivi: per chi non è dotato di un cervello particolarmente "matematico" ragionare in termini di centinaia di gauss è più agevole che maneggiare decine di microtesla; la misura delle sezioni dei nuclei magnetici in cm<sup>2</sup> è anch'essa più agevole che imbarcarsi in una misura in decimillesimi di m<sup>2</sup>.



### 3.10 Multipli e sottomultipli decimali delle unità SI

Anche la definizione dei prefissi, per formare i multipli e i sottomultipli decimali delle unità SI, ricade tra i compiti delle CGPM. In particolare l'11° CGPM<sup>26</sup> ha adottato prefissi per i multipli da  $10^{-12}$  a  $10^{12}$ . In seguito la 12° CGPM<sup>27</sup> ha aggiunto i prefissi per  $10^{-15}$  e  $10^{-18}$ , la 15° CGPM<sup>28</sup> quelli per  $10^{15}$  e  $10^{18}$  e la 19° CGPM<sup>29</sup> quelli per  $10^{21}$ ,  $10^{24}$ ,  $10^{-21}$  e  $10^{-24}$ . I prefissi e i simboli adottati sono elencati in Tabella 4.

Tabella 4		
Multipli e sottomultipli delle unità SI		
Fattore	Nome	Simbolo
$10^{24}$	Yotta	Y
$10^{21}$	Zetta	Z
$10^{18}$	Exa	E
$10^{15}$	Peta	P
$10^{12}$	Tera	T
$10^9$	Giga	G
$10^6$	Mega	M
$10^3$	Kilo	K
$10^2$	Hector	H
$10^1$	Deca	de
$10^{-1}$	deci	d
$10^{-2}$	centi	c
$10^{-3}$	milli	m
$10^{-6}$	micro	$\mu$
$10^{-9}$	nano	n
$10^{-12}$	pico	p
$10^{-15}$	femto	f
$10^{-18}$	atto	a
$10^{-21}$	zepto	z
$10^{-24}$	yocto	y

Tra le unità di base del SI, il chilogrammo è l'unico il cui simbolo, per ragioni storiche, include un prefisso. I nomi e i simboli dell'unità di massa sono ottenuti unendo un prefisso al nome "grammo" e al simbolo "g"<sup>30</sup> ( $10^{-6}$  kg = 1 mg, la notazione 1  $\mu$ kg (microchilogrammo) è errata).

<sup>26</sup> 11th CGPM (1960, Resolution 12; CR, 87)

<sup>27</sup> 12th CGPM (1964, Resolution 8; CR, 94)

<sup>28</sup> 15th CGPM (1975, Resolution 10; CR, 106 and Metrologia, 1975, 11, 180-181)

<sup>29</sup> 19th CGPM (1991, Resolution 4; CR, 185 and Metrologia, 1992, 29, 3)

<sup>30</sup> CIPM 1967, Recommendation 2; PV, 35, 29 and Metrologia, 1968, 4, 45



#### **4. La continua revisione del SI e la 26° CGPM**

Come visto nei paragrafi precedenti, le definizioni delle unità di misura di base del SI sono state aggiornate man mano che l'evoluzione della scienza e della tecnologia hanno messo a disposizione dei metrologi nuove tecniche per la realizzazione dei campioni. Il fine ultimo dei continui aggiornamenti è di ottenere realizzazioni delle unità di misura con sempre minore incertezza e sempre maggiore stabilità.

Una volta definita un'unità di misura la sua "realizzazione" può essere ottenuta con tre differenti procedimenti:

- Il primo prevede la realizzazione fisica dell'unità di misura a partire dalla sua definizione (realizzazione in senso stretto, per esempio l'orologio atomico al cesio che realizza l'unità di tempo);
- Il secondo, definito "riproduzione", consiste nella realizzazione dell'unità di misura non a partire dalla definizione, ma dalla predisposizione di un campione di misura altamente riproducibile basato su un fenomeno fisico (per esempio l'impiego dei laser stabilizzati in frequenza per la realizzazione di campioni di misura per il metro, dell'effetto Josephson per il volt o dell'effetto Hall quantistico per l'ohm);
- Il terzo procedimento consiste nell'adottare un campione materiale come campione di misura (per esempio il campione del chilogrammo).

La scelta del procedimento dipende strettamente dalla definizione dell'unità di misura.

L'evoluzione delle definizioni non ha, però, interessato nella stessa maniera tutte le grandezze di base. Confrontando le due unità di base più antiche, il metro e il chilogrammo, si nota come, mentre per il primo si è passati da un campione materiale, la famosa barra di platino/iridio, a una definizione basata sulla lunghezza d'onda di una radiazione elettromagnetica e, in seguito, a una definizione basata sulla velocità della luce, per il chilogrammo è ancora utilizzato il prototipo depositato al BIPM, risalente al 1889.

La differente evoluzione è dovuta al fatto che, mentre per il metro si sono rese disponibili tecniche di realizzazione via via più raffinate, fino ad oggi non è stato possibile trovare una soluzione per la realizzazione del chilogrammo migliore (più stabile e/o facile da realizzare e riprodurre) del cilindro di platino/iridio con diametro e altezza di 39 mm. Il principale svantaggio dell'attuale definizione del chilogrammo è che si riferisce alla massa del manufatto che, per sua stessa natura, sappiamo che non può essere assolutamente stabile. A riprova di ciò in Figura 4 sono mostrati i risultati dei confronti tra alcune copie ufficiali e il prototipo internazionale. Dai primi confronti, risalenti a oltre 100 anni fa si hanno variazioni di circa 5 parti in  $10^{-8}$ , equivalenti a 50 µg. Il grafico mostra solo i cambiamenti relativi dalla massa del prototipo internazionale (corrispondente al valore zero dell'asse y). La deriva nella massa del prototipo internazionale dal 1889 non può essere determinata, ma deve certamente essere presente.

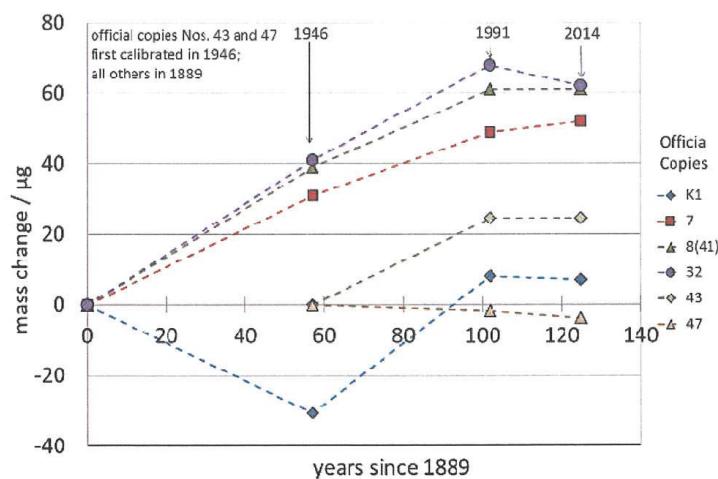


Figura 4  
Risultati dei confronti tra il prototipo del chilogrammo e le copie ufficiali

Una variazione incognita dell'unità di massa influenza anche la definizione delle unità delle grandezze elettriche, poiché la definizione di ampere è in relazione con il chilogrammo. In modo analogo le unità mole e candela dipendono dal chilogrammo.

Al di là della singolarità rappresentata dal campione di massa, si può individuare un andamento generale nell'evoluzione delle definizioni, da campioni materiali (oggetti costruiti dall'uomo) si è cercato di passare a definizioni legate a costanti fondamentali (per esempio la velocità della luce, la frequenza di una radiazione).

Le nuove definizioni che saranno adottate nella 26° CGPM del 13-16/11/2018 sembrerebbero non costituire, quindi, un'assoluta novità per il mondo della metrologia. In realtà il processo che si concluderà con questa CGPM rappresenta una completa revisione del SI.

Nella nuova organizzazione del SI vengono abrogate le definizioni delle unità di base<sup>31</sup> e si definiscono i valori esatti di sette costanti fisiche fondamentali. I valori delle costanti (fissi ed esatti per definizione) potranno essere utilizzati per la realizzazione delle unità SI, sia unità di base sia unità derivate. La distinzione tra unità di base e unità derivate perderà, quindi, di significato. La struttura attuale sarà comunque mantenuta per assicurare la continuità con il sistema attuale, ormai ben consolidato. Un altro motivo per mantenere la struttura attuale è la necessità di mantenere la coerenza con il Sistema Internazionale di Quantità (ISQ), definita dalla serie di norme ISO/IEC 80000, che è organizzato in grandezze di base e grandezze derivate.

<sup>31</sup> Si veda L'appendice 1 del " Draft resolution A – 26th meeting of the CGPM (13-16 November 2018)" su [www.bipm.org](http://www.bipm.org)



Per alcune unità (secondo, metro) la realizzazione non subirà variazioni, dato che i metodi attualmente utilizzati si basano già su due delle costanti del nuovo SI (frequenza di oscillazione del cesio per il secondo e velocità della luce per il metro). Per le unità chilogrammo, kelvin e mole i concetti fisici alla base delle loro definizioni subiranno cambiamenti sostanziali, da cui deriveranno cambiamenti nelle tecniche di realizzazione.

### **5. Il nuovo SI**

Il nuovo SI, che sarà introdotto in occasione della 26° CGPM, non sarà più basato sulla definizione di 7 unità di base, ma sui valori numerici fissi di un insieme di 7 costanti fondamentali. Secondo la nuova definizione il SI sarà un sistema di misura coerente in cui:

- La frequenza di transizione iperfine dello stato fondamentale dell'atomo di cesio 133,  $\Delta\nu_{\text{Cs}}$ , è  $9\,192\,631\,770\text{ Hz}$  (hertz).
- La velocità della luce nel vuoto,  $c$ , è  $299\,792\,458\text{ m/s}$  (metri al secondo).
- La costante di Planck,  $h$ , è  $6,62607040 \times 10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s}$  (joule secondo=kg m<sup>2</sup> s<sup>-1</sup>).
- La carica elementare,  $e$ , è eguale a  $1,602\,176\,620 \times 10^{-19}\text{ coulomb}$  (A s).
- La costante di Boltzmann,  $k$ , è  $1,380\,64852 \times 10^{-23}\text{ J/K}$  (joule al kelvin).
- La costante di Avogadro,  $N_A$ , è  $6,022\,140\,857 \times 10^{23}\text{ mol}^{-1}$  (mole<sup>-1</sup>).
- L'efficienza luminosa,  $K_{cd}$ , della radiazione monocromatica di frequenza  $540 \times 10^{12}\text{ Hz}$  è  $683\text{ lm/W}$  (lumen per watt).

dove hertz, joule, coulomb, lumen e watt, con simboli rispettivamente Hz, J, C, lm e W, sono relativi alle unità secondo, metro, chilogrammo, ampere, kelvin, mole e candela (s, m, kg, A, K, mol e cd) con le relazioni:

- $\text{Hz} = \text{s}^{-1}$ ;
- $\text{J} = \text{m}^2 \text{ kg s}^{-2}$ ;
- $\text{C} = \text{A s}$ ;
- $\text{lm} = \text{cd m}^2 \text{ m}^{-2} = \text{cd sr}$ ;
- $\text{W} = \text{m}^2 \text{ kg s}^{-3}$

Una rappresentazione della transizione tra il vecchio e il nuovo SI è mostrata in Figura 5. La transizione non costituisce un semplice cambio delle unità di base. In tutti i sistemi di misura coerenti definiti in precedenza (CGS, MKS, SI), Le unità di base erano "definite"<sup>32</sup>: per ognuna di esse veniva scelta una definizione che era più o meno legata alla tecnologia per la sua realizzazione. In sede di realizzazione, presso il BIPM e gli istituti metrologici nazionali, e attraverso i confronti tra le varie realizzazioni si poteva definire un'incertezza sulla definizione dell'unità. Per esempio, la tecnica di realizzazione del metro con metodi interferometrici, partendo dall'attuale definizione, consente di realizzare il campione di

<sup>32</sup> Si veda il § 3



lunghezza con un'incertezza dell'ordine di  $1 \times 10^{-11}$ . Le unità derivate dal metro (es la velocità in m/s) non possono, di conseguenza, essere realizzate con incertezza minore.

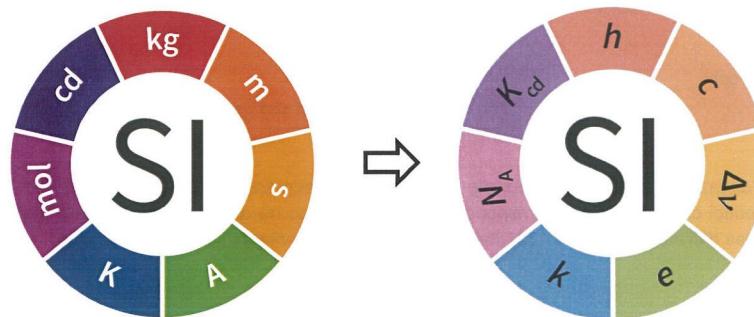


Figura 5  
Rappresentazione grafica delle unità di base del SI: dalla situazione attuale alle costanti fondamentali.  
I simboli e i colori sono codificati<sup>33</sup>

Nel nuovo SI i valori numerici delle sette costanti non hanno incertezza. L'uso delle costanti per la definizione delle unità permette di separare la definizione dalla realizzazione. I laboratori metrologici nazionali e il BIPM continueranno le attività di sviluppo di metodi per la realizzazione delle unità. Con il nuovo SI si avrà la possibilità di sviluppare nuove o differenti tecniche di realizzazione pratica delle unità senza avere, come in passato, la necessità di cambiare le definizioni. Non si esclude la possibilità di realizzare quelle che nell'attuale SI sono grandezze derivate direttamente dalle costanti fondamentali, ottenendo incertezze sulla realizzazione inferiori a quelle ottenibili con le grandezze di base<sup>34</sup>.

La scelta delle sette costanti è stata fatta in modo che, complessivamente, le loro unità di misura coprano le unità di misura SI. In generale non vi è una corrispondenza biunivoca tra le sette unità di base dell'attuale SI e le sette costanti del nuovo SI, ad eccezione della frequenza del cesio con il secondo e del numero di Avogadro con la mole.

Come nell'attuale SI, ogni unità di misura è ottenibile come prodotto di una o più costanti, elevate a opportune potenze, con fattori adimensionali. Vediamo ora le definizioni delle sette grandezze di base e le relazioni matematiche che le esprimono in termini di costanti fondamentali.

<sup>33</sup> Si veda <https://www.bipm.org/utils/common/pdf/SI-Illustration-Guidelines.pdf>

<sup>34</sup> È il caso del volt e dell'ohm, che possono essere ricavati con l'effetto Josephson e l'effetto Hall quantistico.



### 5.1 Il secondo

Il secondo, simbolo s, è l'unità di misura SI del tempo. È definito a partire dal valore numerico fisso della frequenza di transizione iperfine dello stato fondamentale dell'atomo di cesio 133,  $\Delta\nu_{\text{Cs}}$ , pari a 9 192 631 770, espressa nell'unità Hz ( $\text{s}^{-1}$ ).

$$\Delta\nu_{\text{Cs}} = 9\ 192\ 631\ 770 \text{ Hz}$$

da cui

$$1 \text{ Hz} = \frac{\Delta\nu_{\text{Cs}}}{9\ 192\ 631\ 770} \Leftrightarrow 1 \text{ s} = \frac{9\ 192\ 631\ 770}{\Delta\nu_{\text{Cs}}}$$

L'equazione scritta sopra equivale a definire il secondo come la durata di 9 192 631 770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione tra due livelli iperfini dello stato di base dell'atomo di Cesio 133, che coincide alla precedente definizione del secondo.

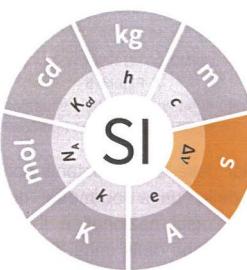


Figura 6  
Rappresentazione grafica della relazione tra il secondo e le costanti fondamentali del nuovo SI

### 5.2 Il metro

Il metro, simbolo m, è l'unità di misura SI della lunghezza. È definito a partire dal valore numerico fisso della velocità della luce nel vuoto, c, pari a 299 792 458, quando espressa in  $\text{m s}^{-1}$ , dove il secondo è definito a partire dalla frequenza del cesio  $\Delta\nu_{\text{Cs}}$ .

Il metro può quindi essere espresso in termini di frequenza del cesio e di velocità della luce:

$$1 \text{ m} = \left( \frac{c}{299\ 792\ 458} \right) \text{s} = \frac{9\ 192\ 631\ 770}{299\ 792\ 458} \frac{\text{c}}{\Delta\nu_{\text{Cs}}} \approx 30,663\ 319 \frac{\text{c}}{\Delta\nu_{\text{Cs}}}$$

Anche in questo caso l'equazione, affermando che metro è la lunghezza del percorso composto da un raggio di luce nel vuoto in un intervallo di tempo pari a  $1/299\ 792\ 458$  s, rimanda alla definizione dell'attuale SI.

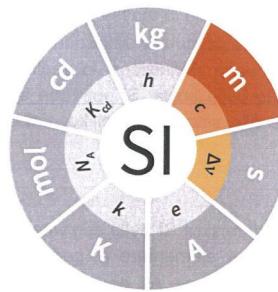


Figura 7  
Rappresentazione grafica della relazione tra il metro e le costanti fondamentali del nuovo SI

### 5.3 Il chilogrammo

Il chilogrammo, simbolo kg, è l'unità di misura SI della massa. È definito a partire dal valore numerico fisso della costante di Planck  $h$ , pari a  $6,626\ 070\ 15 \times 10^{-34}$  quando espressa nell'unità J s, che corrisponde a  $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$ , dove il metro e il secondo sono definiti a partire da  $c$  e  $\Delta\nu_{\text{Cs}}$ .

$$1 \text{ kg} = \left( \frac{h}{6,626\ 070\ 15 \times 10^{-34}} \right) \text{ m}^{-2} \text{ s}$$

$$1 \text{ kg} = \frac{(299\ 792\ 458)^2}{(6,626\ 070\ 15 \times 10^{-34})(9\ 192\ 631\ 770)} \frac{h\Delta\nu_{\text{Cs}}}{c^2} \approx 1,475\ 521\ 4 \times 10^{40} \frac{h\Delta\nu_{\text{Cs}}}{c^2}$$

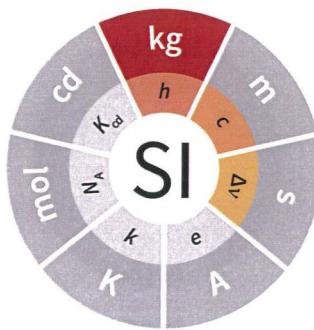


Figura 8  
Rappresentazione grafica della relazione tra il chilogrammo e le costanti fondamentali del nuovo SI



La definizione del kg nell'attuale SI fissa la massa del prototipo internazionale del kg  $m_{(K)}$  al valore esatto di 1 kg. Con questa nuova definizione la massa del kg sarà realizzata tramite esperimenti. Con la nuova definizione la realizzazione dell'unità può essere realizzata in un qualsiasi punto della scala. Si potrebbe scegliere di realizzare campioni primari da 1 g, ponendo fine alla singolarità del kg, unica unità espressa in termini di fattore moltiplicativo<sup>35</sup>.

#### 5.4 L'ampere

L'ampere, simbolo A, è l'unità di misura SI della corrente elettrica. È definito a partire dal valore numerico fisso della carica elementare  $e$ , pari a  $1,602\ 176\ 634 \times 10^{-19}$  quando espressa nell'unità C, che corrisponde ad As, dove il secondo è definito a partire da  $\Delta v_{Cs}$ .

La definizione implica che la carica elementare valga esattamente:

$$e = 1,602\ 176\ 634 \times 10^{-19} \text{ A s}$$

Invertendo tale relazione si ottiene l'espressione dell'ampere a partire da  $e$   $\Delta v_{Cs}$ :

$$1 \text{ A} = \left( \frac{e}{1,602\ 176\ 634 \times 10^{-19}} \right) \text{ s}^{-1}$$

che equivale a scrivere:

$$1 \text{ A} = \frac{1}{(9\ 192\ 631\ 770)(1,602\ 176\ 634 \times 10^{-19})} e \Delta v_{Cs} \approx 6,789\ 687 \times 10^8 \Delta v_{Cs} e$$

La precedente definizione dell'ampere si basava sulla forza tra due conduttori percorsi da corrente e aveva l'effetto di fissare il valore della permeabilità magnetica del vuoto  $\mu_0$  a:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1} = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$$

Il valore di  $\mu_0$  non è più noto e dovrà essere determinato per via sperimentale.

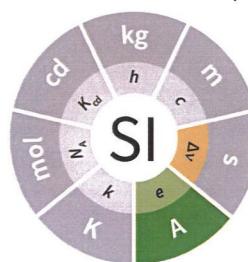


Figura 9  
Rappresentazione grafica della relazione tra l'ampere e le costanti fondamentali del nuovo SI

<sup>35</sup> Si veda §3.10



### 5.5 Il kelvin

Il kelvin, simbolo K, è l'unità di misura SI della temperatura. È definito a partire dal valore numerico fisso della costante di Boltzmann  $k$ , pari a  $1,380\ 649 \times 10^{-23}$  quando espressa nelle unità  $\text{J K}^{-1}$ , che corrisponde a  $\text{kg m}^2 \text{s}^{-2} \text{K}^{-1}$ , dove il chilogrammo, il metro e il secondo sono definiti a partire da  $h$ ,  $c$  e  $\Delta V_{\text{Cs}}$ .

La relazione che lega il kelvin alle costanti fondamentali è la seguente:

$$1 \text{ K} = \left( \frac{1,380\ 649}{k} \right) \times 10^{-23} \text{ kg m}^2 \text{s}^{-2}$$

da cui

$$1 \text{ K} = \frac{1,380\ 649 \times 10^{-23}}{(6,626\ 070\ 15 \times 10^{-34})(9\ 192\ 631\ 770)} \frac{\Delta V_{\text{Cs}} h}{k} \approx 2,266\ 665\ 3 \frac{\Delta V_{\text{Cs}} h}{k}$$

La precedente definizione del kelvin fissava la temperatura del punto triplo dell'acqua  $T_{\text{TPW}}$  a 273,16 K; con la nuova definizione la temperatura del punto triplo dell'acqua sarà determinato sperimentalmente. Anche in questo caso la realizzazione del kelvin può essere fatta in qualunque punto della scala delle temperature.

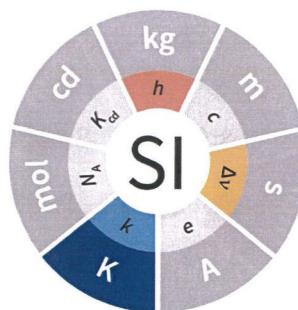


Figura 10  
Rappresentazione grafica della relazione tra il kelvin e le costanti fondamentali del nuovo SI



### 5.6 La mole

La mole, simbolo mol, è l'unità di misura SI della quantità di sostanza. Una mole contiene esattamente  $6,022\ 140\ 76 \times 10^{23}$  entità elementari. Tale numero è il valore fissato per la costante di Avogadro  $N_A$  quando espressa nell'unità mol<sup>-1</sup>, ed è detto numero di Avogadro.

La quantità di sostanza, simbolo  $n$ , di un sistema è la misura del numero di specifiche entità elementari. Un'entità elementare può essere un atomo, una molecola, uno ione, un elettrone, ogni altra particella o gruppi di particelle.

La definizione implica che la costante di Avogadro vale:

$$N_A = 6,022\ 140\ 76 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

da cui si ricava:

$$1 \text{ mol} = \left( \frac{6,022\ 140\ 76 \times 10^{23}}{N_A} \right)$$

La precedente definizione della mole fissava il valore della massa molare del carbonio 12,  $M_{(12\text{C})}$ , al valore di 0,012 kg/mol. Con la nuova definizione il valore di  $M_{(12\text{C})}$  non è più noto e deve essere ricavato sperimentalmente.

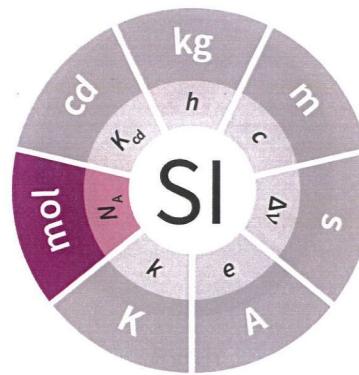


Figura 11  
Rappresentazione grafica della relazione tra la mole e le costanti fondamentali del nuovo SI



### 5.7 La candela

La candela, simbolo cd, è l'unità di misura SI dell'intensità luminosa. È definita a partire dal valore numerico fisso dell'efficienza luminosa,  $K_{cd}$ , della radiazione monocromatica di frequenza  $540 \times 10^{12}$  Hz, pari a 683 (lumen per watt) quando espressa nelle unità lm/W, che corrisponde a  $cd \text{ sr W}^{-1}$  o  $cd \text{ sr kg}^{-1} m^{-2} s^3$  dove il chilogrammo, il metro e il secondo sono definiti a partire da  $h$ ,  $c$  e  $\Delta\nu_{Cs}$ .

La definizione porta a esprimere la candela in funzione delle costanti fondamentali, partendo dalla formula:

$$1 \text{ cd} = \left( \frac{K_{cd}}{683} \right) \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-3} \text{ sr}^{-1}$$

Sostituendo le espressioni per il chilogrammo, il metro, il secondo e lo steradiano si ottiene:

$$\begin{aligned} 1 \text{ cd} &= \frac{1}{(6,626\,070\,15 \times 10^{-34})(9\,192\,631\,770)683} (\Delta\nu_{Cs})^2 h K_{cd} \approx \\ &\approx 2,614\,830 \times 10^{10} (\Delta\nu_{Cs})^2 h K_{cd} \end{aligned}$$

Dalla relazione discende che una candela è l'intensità luminosa, in una data direzione, da una sorgente che emette una radiazione monocromatica con frequenza  $540 \times 10^{12}$  Hz e ha un'intensità di radiazione in quella direzione di  $(1/683)$  W/sr.

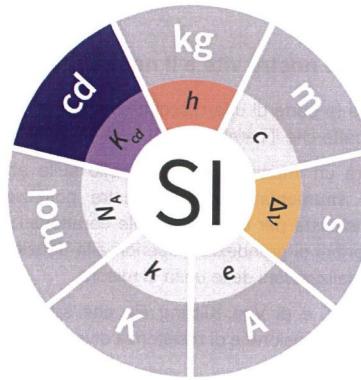


Figura 12  
Rappresentazione grafica della relazione tra la candela e le costanti fondamentali del nuovo SI



### **5.8 La realizzazione pratica delle unità**

I metodi sperimentali per la realizzazione delle unità di misura a partire dalle equazioni della fisica sono detti metodi primari e i campioni ottenuti sono detti campioni primari<sup>36</sup>. Un metodo primario è una procedura impiegata per ottenere un risultato di misura senza eseguire un confronto con un campione di misura di una grandezza della stessa specie.

Con la nuova formulazione del SI, la variazione delle definizioni di alcune grandezze imporrà lo sviluppo di nuovi metodi di realizzazione. Rispetto alle vecchie definizioni, che venivano sviluppate a partire dalle tecnologie disponibili per la realizzazione delle unità di base, nel nuovo SI gli istituti metrologici potranno scegliere qualsiasi equazione fisica che colleghi le costanti definite alla quantità che si intende misurare.

Quest'approccio è molto più generale della vecchia definizione delle unità di misura di base, non essendo limitato dalla scienza o dalla tecnologia odierna. Gli sviluppi futuri possono portare a diversi modi di realizzare unità con maggiore precisione. Non vi è, in linea di principio, alcun limite alla precisione con cui un'unità può essere realizzata. L'eccezione rimane la definizione del secondo, in cui la transizione originale a microonde del cesio deve rimanere, per ora, la base della definizione.

Il BIPM sta sviluppando linee guida per la "mise en pratique" delle unità di misura. Con la formula mise en pratique si intende un insieme di istruzioni che consente di realizzare la definizione di un'unità, nella pratica, al più alto livello. Per le grandezze elettriche il CCEM ha già preparato una mise en pratique per l'ampere e altre unità elettriche, e il CCM, CCQM e CCT stanno lavorando al progetto di mise en pratique per il chilogrammo, la mole e il kelvin.

### **Che cosa cambia per le nostre vite e il nostro lavoro?**

Dato che questa dispensa fa parte di una raccolta dedicata ai laboratori di prova, sembra opportuno affrontare l'impatto che il cambio del SI avrà sull'attività dei laboratori.

In realtà il nuovo SI avrà un impatto pressoché nullo sulle attività di prova: non sarà necessario cambiare la strumentazione delle nostre postazioni di prova, poiché le esigenze di incertezza, richieste per la verifica delle caratteristiche delle apparecchiature elettriche, sono di molti ordini di grandezza superiori alle riduzioni delle incertezze che si otterranno con le nuove realizzazioni delle unità di misura.

Le costanti di Josephson  $K_J$  e di Von Klitzing  $R_K$ , che sono utilizzate dal 1990 per la realizzazione dei campioni di tensione e di resistenza diventano:

$$K_J = 2e/h = 483\,597,\!848\,416\,984 \text{ GHz/V}$$

$$R_K = h/e^2 = 25\,812,\!807\,459\,3045 \Omega$$

<sup>36</sup> Si veda VIM - Vocabolario Internazionale Metrologia 5.4.



Le unità di tensione e di resistenza elettrica sono quindi definite in termini di costanti fondamentali come:

$$1 \text{ V} = \frac{h}{2e} 483\,597,\!848\,416\,984 * 10^9 \text{ Hz} = \frac{483\,597,\!848\,416\,984 * 10^9}{9\,192\,631\,770} \frac{\Delta\nu_{Cs} h}{2e}$$

$$1 \text{ V} \approx 52607,\!1163 \frac{\Delta\nu_{Cs} h}{2e}$$

$$1 \Omega = \left( \frac{R_k}{25\,812,\!807\,459\,3045} \right) = \left( \frac{1}{25\,812,\!807\,459\,3045} \right) \frac{h}{e^2}$$

Il volt e l'ohm ottenuti con le due equazioni scritte sopra risultano più piccoli di quelli definiti dal CIPM nel 1990 rispettivamente di  $1,067 \times 10^{-7}$  e di  $1,779 \times 10^{-8}$ .

Apparentemente lo stesso discorso vale anche per la vita di tutti i giorni. In realtà molti oggetti tecnologici (smartphone, PC, navigatori) basano il proprio funzionamento sulla disponibilità di misure particolarmente accurate. Spesso quando un tecnico discute con la gente comune, si vede porre la domanda su quale sia l'utilità di misurare il tempo con incertezza dell'ordine di qualche unità in  $10^{-16}$  (1 s ogni 317 milioni di anni). Chi volesse rispondere in maniera elegante potrebbe utilizzare un semplice esempio.

*Se lo scopo fosse di arrivare puntuale a un appuntamento e si disponesse di un orologio che accumula un ritardo/anticipo di 1 s l'anno (pari a uno scostamento relativo di circa  $3 \times 10^{-8}$ ) la mancanza di puntualità, anche in caso di longevità lavorativa eccezionale, potrebbe essere imputata solo alla trascuratezza della persona.*

*Se però, per raggiungere il luogo dell'appuntamento dovessimo utilizzare un navigatore satellitare, uno scostamento di  $3 \times 10^{-8}$  per gli orologi a bordo dei satelliti (pari a 3 millisecondi al giorno), dopo un solo giorno produrrebbe un errore nella posizione pari a:*

$$3 \text{ ms} \times c \equiv 3 \cdot 10^{-3} \times 3 \cdot 10^{18} \equiv 10^{16} \text{ m} = \underline{1000 \text{ km}}$$

*Fissato l'appuntamento alle 8.00 del 02/01/2019 presso la sede dell'INRIM, in C.so Massimo d'Azeglio, 42 a Torino, fidandosi ciecamente del nostro orologio e del nostro navigatore, se il sistema GPS avesse riallineato i propri orologi alle 8.00 del giorno prima, ci si potrebbe trovare a parcheggiare alle 7,55 alla periferia nord di Berlino! Il tutto sperando che il navigatore non ci guidi verso sud, costringendoci a prendere un traghetto per Tunisi o Algeri. A questo punto sarebbe molto difficile con le attuali tecnologie di trasporto, raggiungere il luogo dell'appuntamento in tempo.*



## **6. Curiosità: grandezze adimensionate e grandezze non SI**

Vi sono quantità la cui definizione è tale per cui tutti gli esponenti delle dimensioni sono zero. Questo vale in particolare per ogni quantità definita come rapporto tra due quantità dello stesso tipo. Come esempio si può citare la permeabilità magnetica relativa di un materiale  $\mu_r$ , data dal rapporto tra la permeabilità magnetica del materiale e quella del vuoto. Queste quantità sono essenzialmente numeri, la cui unità di misura è l'unità uno, simbolo 1, spesso non precisata. Ci sono anche quantità che non possono essere descritte in termini delle sette unità base del SI, ma hanno la natura di un conteggio. Esempi sono un numero di molecole, di cellule. Le quantità associate a un conteggio sono anch'esse le quantità la cui unità di misura è 1. L'unità uno è automaticamente l'elemento neutro di qualsiasi sistema di unità. Non è necessario introdurlo formalmente come le altre unità.

Gli angoli piano e solido, quando espressi rispettivamente in radianti e in steradiani, sono, in effetti, trattati anche all'interno del SI come quantità con l'unità 1. I simboli rad e sr sono scritti esplicitamente, al fine di sottolineare che, per i radianti o gli steradiani, la quantità da considerare è, o riguarda rispettivamente l'angolo piano o l'angolo solido. Per ragioni storiche, il radiante e lo steradiano sono trattati come unità derivate.

È particolarmente importante avere una chiara descrizione con l'unità 1 di qualsiasi quantità che viene espressa come un rapporto di quantità dello stesso tipo (ad esempio rapporti di lunghezza o frazioni di quantità) o come conteggio (ad esempio numero di fotoni o decadimenti).

Il principale vantaggio del SI è dato dal fatto che fornisce il riferimento per la definizione di tutte le altre unità. Le unità coerenti del SI hanno il vantaggio di non richiedere fattori di conversione tra le unità di base e quelle derivate. Tuttavia, alcune unità non SI sono ampiamente utilizzate e si prevede che continueranno a essere utilizzate per molti anni. Pertanto, il CIPM ha accettato alcune unità non SI da utilizzare con il SI. Le unità non SI sono elencate nella Tabella 5.

Nella tabella sono elencate le unità del rapporto logaritmico, il neper, il bel e il decibel. Il neper, Np, è usato per esprimere i valori delle grandezze i cui valori numerici si basano sull'uso del logaritmo neperiano (o naturale),  $\ln = \log_e$ . Il bel e il decibel, B e dB, dove:

$$1 \text{ dB} = (1/10) B,$$

sono usati per esprimere i valori delle grandezze del rapporto logaritmico i cui valori numerici sono basati sul logaritmo decadico,  $\lg = \log_{10}$ . Le unità neper, bel e decibel sono state accettate dal CIPM per l'uso con il Sistema Internazionale, ma non sono unità SI.



Tabella 5

## Unità non SI accettate per l'uso con le unità SI

Quantità	Nome dell'unità	Simbolo dell'unità	Valore in unità SI
Tempo	minuto	min	1 min = 60 s
	ora	h	1 h = 60 min = 3600 s
	giorno	d	1 d = 24 h = 86 400 s
Lunghezza	unità astronomica	au	1 au = 149 597 870 700 m
Anglo piano e fase	grado	°	$1^\circ = (\pi/180) \text{ rad}$
	minuto	'	$1' = (1/60)^\circ = (\pi/10\ 800) \text{ rad}$
	secondo	"	$1'' = (1/60)' = (\pi/648\ 000) \text{ rad}$
area	ettaro	ha	$1 \text{ ha} = 1 \text{ hm}^2 = 10^4 \text{ m}^2$
Volume	litro	l, L	$1 \text{ l} = 1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = 10^3 \text{ cm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$
Massa	tonnellata	t	$1 \text{ t} = 10^3 \text{ kg}$
	dalton	Da	$1 \text{ Da} = 1.660\ 538\ 86 (28) \times 10^{-27} \text{ kg}$
Energia	elettronvolt	eV	$1 \text{ eV} = 1.602\ 176\ 634 \times 10^{-19} \text{ J}$
logaritmica	neper	Np	Vedi nel testo
Rapporti	bel	B	
	decibel	dB	

Altre unità non-SI, di interesse storico, ancora presenti in campi specifici (per esempio, il barile di petrolio o il carato) o in particolari paesi (il pollice, il piede e la iarda), sono tuttora utilizzate. Il loro utilizzo nell'ambito tecnico e scientifico non è opportuno, anche se ne rimarrà traccia, per molti anni, in molti ambiti<sup>37</sup>. L'utilizzo delle unità non SI priva di alcuni vantaggi quali la coerenza e l'assenza di coefficienti di conversione. Non è però pensabile di eliminarli dall'uso quotidiano. L'uso, per alcune di queste unità, dei prefissi SI è ammesso, ma non, ad esempio, con le unità di tempo non-SI.

**Ringraziamenti**

Gli autori desiderano ringraziare

- L'ing Saverio Manganaro di ACAE per aver proposto l'argomento di questa monografia;
- La dott.ssa Patrizia Tavella, direttrice del Time Department del BIPM, per le informazioni sulla misura del tempo;
- La dott.ssa Cristina Cassiago dell'INRIM per gli spunti di riflessione;
- Il prof. Arturo Tagliacozzo dell'INFN di Napoli per le interessanti osservazioni e la correzione del testo.

<sup>37</sup> Nel campo dell'unificazione elettrotecnica non è raro trovare flange con interassi tra i fori che richiamano le misure anglosassoni (es 127 mm ⇔ 5 pollici – 203 mm ⇔ 8 pollici)

mercoledì 23 settembre 2020 - Lezione 2

## Variabili termodinamiche

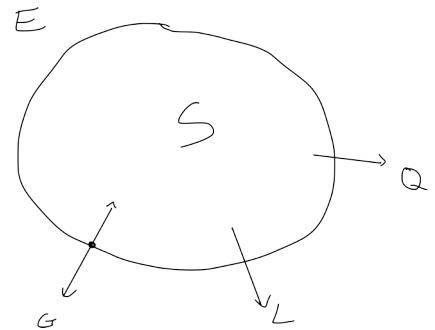
Noi affronteremo la termodinamica classica, stabilita dall'inizio dell'800 fino alla fine dell'800 alla quale poi si sono aggiunte la termodinamica statistica. La rivotazione in termodinamica razionale (rimane sempre la termodinamica classica). E dalla metà del 900 è stata introdotta la termodinamica irreversibile.

La termodinamica classica parte definendo cosa stiamo studiando indicandolo con un contorno al cui intorno  $S$  indica il sistema termodinamico oggetto dello studio.

Ci sarà poi l'esterno del nostro sistema ma noi ci occuperemo dell'interno, in relazione a quello che ci interessa fare, cioè scambiare massa (possibile se ci sono dei fori).

Sistema chiuso: si hanno scambi di massa

Sistema aperto: fori, la massa entra ed esce.



Il nostro studio è macroscopico (prescindendo) dalla natura molecolare del sistema), non ci interessano i dettagli ma gli scambi tra esterno ed interno.

Un sistema è chiuso quando non si hanno scambi di massa.

Un sistema è aperto quando si hanno scambi tra interno ed esterno.

Così come la massa può entrare e uscire anche il lavoro può entrare e uscire, così come anche il calore.

Noi vogliamo relazionare queste quantità scambiate con il sistema termodinamico.

Non vogliamo farlo studiando il movimento delle molecole (approccio microscopico) ma con uno studio macroscopico. Quindi non ci interessano i dettagli microscopici del sistema termodinamico, questo è proprio l'approccio della termodinamica classica.

Scambi di tre tipologie:

- scambi di massa
- Scambi di lavoro
- Scambi di calore

Dobbiamo definire lo stato del sistema, ciò che individua univocamente il sistema, cioè dobbiamo dire quanta è la massa e la sua composizione chimica ( $M$ , composizione chimica,  $p, v, T, w, z$ ).

Se il sistema è aperto (quindi c'è scambio di massa) il sistema può cambiare composizione chimica.

Se il sistema è chiuso rimane la stessa massa con la stessa composizione chimica.

Dobbiamo dire anche in che stato e quali sono le coordinate termomeccaniche del sistema, cioè pressione  $p$ , volume specifico  $v$  e temperatura  $T$ .

Ci sono poi delle variabili esterne, cioè rispetto all'esterno, dove vogliamo dire la quota del sistema  $z$  (riferita al baricentro poiché stiamo facendo uno studio macroscopico) e la velocità  $w$  (sempre del baricentro).

Quindi le variabili termodinamiche (o termomeccaniche) sono  $p, v$  e  $T$  e sono le stesse dappertutto (poiché nello studio macroscopico ci interessa avere un unico valore nel nostro sistema).

Quindi la termodinamica classica assume l'**equilibrio interno** al sistema e la termodinamica studia questi stati di equilibrio.

Per caratterizzare le trasformazioni di interesse dovremmo anche ragionare su cosa succede all'esterno.

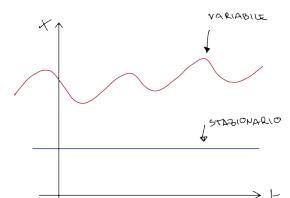
È chiaro che queste ipotesi sono molto lontane dalle realtà e per i tre argomenti della fisica tecnica possiamo dire che la trasmissione del calore si sente, la termodinamica si vede (con dei disegni) mentre la termodinamica ne si vede ne si sente proprio perché gli stati di equilibrio che studiamo nella realtà non esistono.

La termodinamica serve perchè per noi la termodinamica classica rappresenta il limite oltre il quale non si può andare e quindi nella realtà otterrò sempre dei risultati inferiori a questo limite e allora la termodinamica serve a stimare il limite superiore a cui la realtà può tendere.

La termodinamica non ha il tempo tra le sue variabili (poiché idealmente per l'equilibrio si dovrebbe aspettare un tempo infinito, cosa falsa nella realtà).

Soltanente si definisce stato (o regime) stazionario uno stato in cui tutte le variabili sono costanti nel tempo.

Se la quantità  $x$  varia con il tempo lo stato sarà uno stato variabile o non stazionario.



Vogliamo quindi studiare come relazionare lo scopo che avevamo inizialmente (scambi di massa, lavoro e calore, anche se stiamo considerando un sistema chiuso e quindi non ci sono scambi di massa), cioè relazionare come il nostro sistema chiuso in equilibrio si relaziona con variazioni dello stato del sistema, cioè la variazione delle variabili interne del sistema.

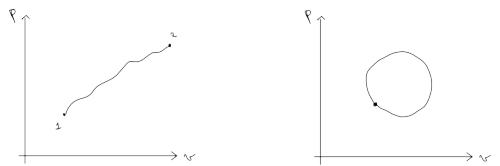
**N.B.** Parlando di variazione non si intende una variazione nel tempo ma una variazione dallo stato 1 allo stato 2.

Questa variazione prende il nome di **trasformazione termodinamica**.

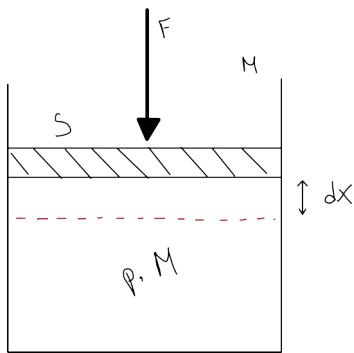
Si parla di:

- Trasformazione aperta, quando si parte da uno stato (1) che non coincide con lo stato finale (2).
- Trasformazione ciclica (o chiusa), quando lo stato finale coincide con lo stato iniziale.

È meglio utilizzare il termine 'ciclica' poiché chiusa può far confusione con 'sistema chiuso'.



Vediamo come caratterizzare il lavoro con la variazione delle variabili termomeccaniche  $p$  e  $v$ .



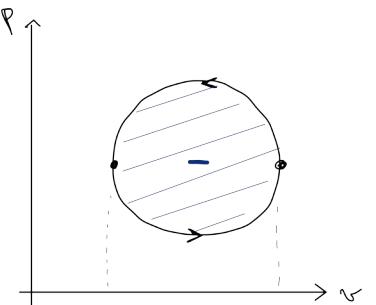
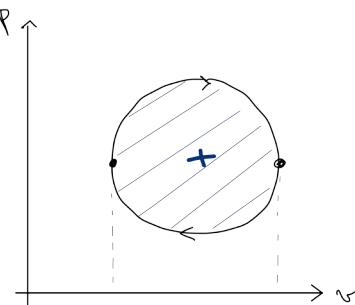
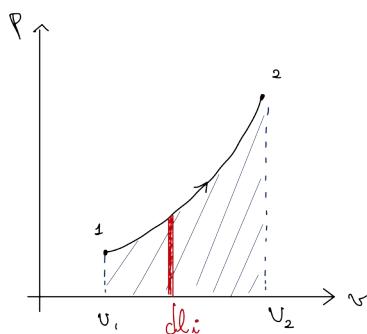
A fisica abbiamo definito il lavoro immaginando di avere un cilindro con pressione  $p$  e massa  $M$  e un pistone a cui si applica una forza muovendo il pistone con uno spostamento  $dx$  e ciò provoca una variazione di volume.

Il sistema è chiuso e quindi la massa è costante. La variazione del volume totale coincide quindi con la variazione del volume specifico. Analizzando la forza,  $F = pS$ , e considerando che il lavoro è la forza per lo spostamento nella direzione della forza, cioè  $L = F \cdot dx = p S dx = pdV$  e quindi il lavoro compiuto da un gas (dividendo per la

$$\text{massa la quantità va scritta minuscola)} \quad dl = \frac{p S dx}{M} = \frac{pdV}{M} = p \cdot dv$$

Considerando che esistono sia una pressione interna che una pressione esterna al sistema possiamo allargare il ragionamento a quando facciamo scendere il pistone per calcolare il lavoro fatto. Se il pistone scende verso il passo di  $dx$  il lavoro compiuto all'interno sarà quello compiuto con la pressione  $p_i$ , cioè il lavoro infinitesimo compiuto dalla forze interne al sistema, **lavoro interno**, sarà:  $\frac{p_i S dx}{M} = p_i dv = dl_i$

E se voglio calcolare il lavoro totale sarà l'integrale:  $l_i = \int_1^2 dl_i = \int_1^2 p_i dv$  (cioè l'area sottesa alla trasformazione).



**Oss:**  $l_i > 0$  se  $dv > 0$ , cioè se c'è un aumento di volume il lavoro è positivo.

**Oss:** Se invece il ciclo è percorso in senso orario il lavoro è positivo (ed è l'area racchiusa nella trasformazione ciclica) altrimenti il lavoro è negativo.

È utile ricordare che la definizione data all'inizio è la definizione fisica mentre la **definizione termodinamica** di lavoro è la seguente: il lavoro positivo è fatto da un sistema se l'unico effetto esterno al sistema può essere ricondotto al sollevamento di un peso.

C'è bisogno di una definizione termodinamica perché considerando ad esempio una resistenza dove passa corrente viene fatto del lavoro ma non c'è un aumento di volume e secondo la definizione fisica non ci sarebbe lavoro ma c'è un lavoro elettrico! C'è bisogno quindi di una definizione più ampia.

Ci sarà anche il lavoro legato alle forze interne e un lavoro fatto dalle forze esterne,  $l_e$ .

Ma quando è che risulta  $l_i = l_e$ ?

Noi non possiamo analizzare tutte le pressioni esterne e interne e calcolare il lavoro scambiato ma vogliamo soltanto misurare la pressione interna e relazionare il lavoro delle forze interne con quello fatto dalle forze esterne che rappresenta quindi il lavoro scambiato con l'esterno.

Ci poniamo allora il problema opposto, quando è che il lavoro fatto dalle forze interne corrisponde proprio al lavoro fatto dalle forze esterne, ovvero corrisponde al lavoro scambiato con l'esterno. Questo proprio perché a noi interessa  $l_e$ .

Come abbiamo già accennato la termodinamica è una scienza che lavora al limite e quindi ci chiediamo quando  $I_i = I_e$  ?

Facciamo il seguente ragionamento: immaginiamo di avere una bombola d'azoto che gonfia un palloncino. Aprendo la bombola entra l'azoto dentro il palloncino che inizia a gonfiarsi. Si dilata e per dilatarsi è necessario allargare o diminuire lo spessore del materiale del palloncino. Quindi sarà necessario effettuare degli sforzi di taglio sul materiale che non sono lavoro scambiato con l'esterno ma lavoro effettuato per poter avere il lavoro con l'esterno. Quindi le forze interne sono servite sia per dilatare il materiale di cui è costituito il palloncino sia per aumentare il volume. In conclusione il lavoro fatto dalle forze interne in parte è stato scambiato con l'esterno facendo aumentare il volume (quelle di nostro interesse) però parte è stato anche utilizzato per dilatare il materiale. Ciò possiamo dire che  $I_i = I_e + I_d \leftarrow \text{dilatazione}$  e siccome vogliamo trovare le condizioni per cui  $I_i = I_e$  dobbiamo trovare le condizioni per cui il lavoro di dilatazione è nullo o trascurabile.

Si ricordi che in ingegneria parlando di nullo spesso in realtà ci riferiamo a TRASCURABILE.

L'uguaglianza si ottiene se:

- Chiaramente deve essere garantito l'equilibrio termodinamico interno
  - $p_i = p_e$ , altrimenti la differenza di pressione va a finire nella dilatazione del materiale.
  - Assenza di attriti, sarebbero quelli necessari a dilatare il palloncino ma che noi vogliamo trascurare
  - $T_i = T_e$ , affronteremo questa condizione più avanti
- 

Ritornando alla definizione di lavoro, la generalizzazione vale anche per il lavoro elettrico.

Se una corrente  $I$  attraversa una resistenza, ho del lavoro elettrico concentrato nella resistenza, allora immagino di mandare la stessa corrente in una macchina elettrica, così fa ruotare l'albero al quale posso attaccare un filo che solleva un peso.

### N.B.

- Il sollevamento del peso deve essere l'unico effetto
  - Definendo solo il lavoro positivo, allora solo in questo modo possiamo distinguere lo scambio di calore, che devono rimanere ben distinti
- 

## Temperatura

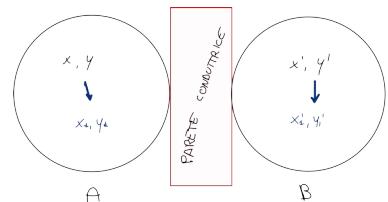
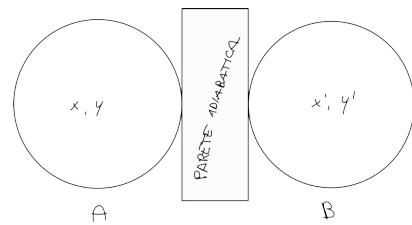
Per definirla non vale più il discorso del sistema campione ma la metodologia è molto diversa.

Immaginiamo di avere due sistemi termodinamica A, il cui stato è caratterizzato da due variabili  $x, y$  e un sistema B caratterizzato da  $x', y'$  diverse. Mettiamo tra i due una parete che definiamo adiabatica.

Devo definire questa parete e la definisco come una parete che interposta tra i due sistemi consente di rimanere ai due sistemi allo stesso stato di equilibrio che avevano prima di essere messi a contatto con la parete.

Per un esempio pratico, si immagini una parete dove dentro c'è un isolante termico.

Mettiamo invece a contatto i due sistemi attraverso una parete conduttrice (es di rame) e osserviamo che A passa ad uno stato  $x_1, y_1$  mentre B passa allo stato  $x'_1, y'_1$ . Quindi una parete conduttrice è una parete che messa tra due sistemi modifica lo stato dei due sistemi e li porta ad avere due stati diversi da quelli iniziali. Essendo i due stati finali a contatto tramite la parete si dicono essere in equilibrio termico tra loro.



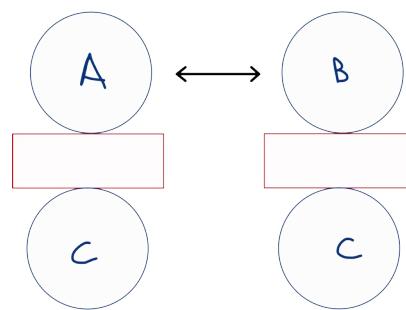
Cioè due sistemi sono in equilibrio se messi a contatto con una parete conduttrice.

Utilizzando queste considerazioni possiamo introdurre il

## Principio zero della termodinamica (o di Fowler)

Si basa sul concetto di equilibrio termico.

Prendo il sistema caratterizzato da A e lo metto in contatto con C attraverso una parete conduttrice e quindi raggiungono l'equilibrio termico poi metto un sistema B a contatto con C attraverso una parete conduttrice e quindi B sarà in equilibrio con C. Allora A sarà in equilibrio con B.



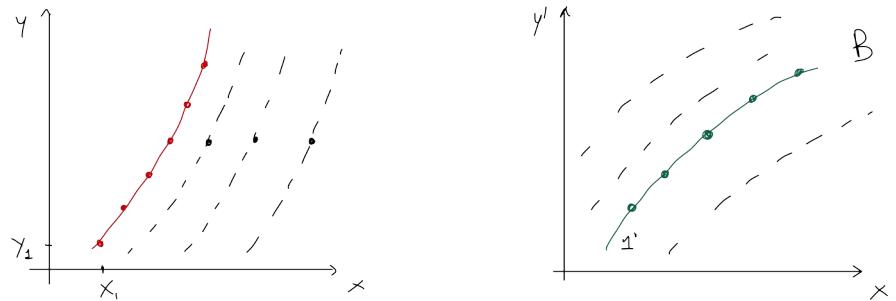
Questo principio ci consente di verificare che A e B siano in equilibrio termico senza metterli in contatto tra loro ma utilizzando il terzo corpo C che quindi diventa uno strumento per verificare l'equilibrio termico che per ora prende il nome di termoscopio.

Successivamente con un ragionamento più evoluto lo chiameremo **termometro**.

Consideriamo il sistema caratterizzato da due variabili  $(x, y)$  e consideriamo poi l'altro sistema B caratterizzato dalle sue variabili  $(x', y')$ . Prendiamo un primo stato 1 di A caratterizzato da  $x_1, y_1$  e poi posso verificare che

sperimentalmente esisterà uno stato 1' di B in equilibrio termico con A.

Se cambio  $x'$  di B posso trovare un altro stato  $x', y'$  che è sempre in equilibrio con 1 di A. Cioè per ogni punto di B ci sarà un equilibrio con il punto 1 di A ed essendo tutti in equilibrio con lo stesso punto di A questi saranno in equilibrio termico tra di loro e si trovano quindi lungo una *curva isotermica* (=insieme dei punti in equilibrio tra loro).



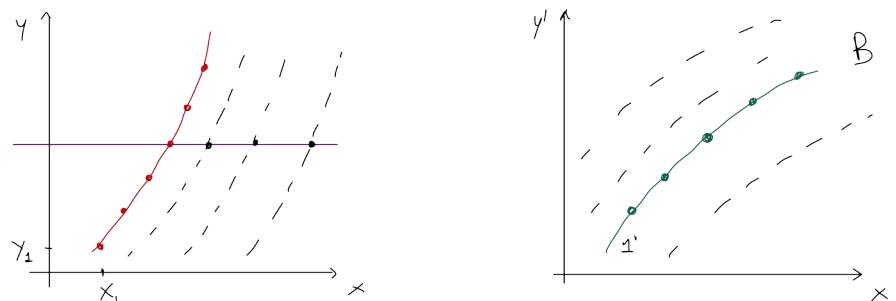
Posso fare la stessa cosa prendendo come riferimento 1' e cercando tutti i punti di A in equilibrio con 1' e tutti questi punti saranno l'**isoterma di A**. Cioè l'isoterma di A (in rosso) è in equilibrio con l'isoterma di B (in verde) e quindi le due isoterme sono corrispondenti.

Allora scelgo A come termoscopio e quindi A avrà delle isoterme  $\theta_A = f(x, y)$  e dirò che questa curva rappresenta la **temperatura empirica** del sistema A.

$x$  e  $y$  sono le variabili termometriche (per ora pressione e volume specifico) che servono per mostrare l'isotermicità.

Tuttavia avere due variabili è complesso e quindi si sceglie una  $y$  costante, cioè  $\theta_A = f'(x)$ .

Prende una  $y$  costante per il termoscopio A significa fare una linea orizzontale su cui ci sono le intersezioni con l'isoterma in cui le diverse  $x$  caratterizzano le diverse A del sistema A.



Cioè aver scelto  $y$  significa aver ridotto le variabili con la temperatura empirica funzione di  $x$ .

E per questa funzione  $f'$  nel S.I. Si sceglie una funzione lineare (con la costante  $a$  da determinare). Cioè  $\theta_A = f'(x) = ax = T_A$ .

Poi assumiamo che la temperatura empirica corrisponde alla temperatura termodinamica  $T_A$ .

Cioè abbiamo visto come la temperatura sia  $T = ax$ . Dove possiamo scegliere la pressione costante e la variabile termodinamica  $x$  è il volume oppure un volume costante dove la variabile termodinamica  $x$  è la pressione.

Iniziato il S.I. c'è stata una modifica e sono stati scelti dei criteri.

Per prima cosa si è definita la temperatura di riferimento come quella del *punto triplo dell'acqua*, in cui l'acqua è all'equilibrio tra le tre fasi solido, liquido e aeriforme. Si trova a pressione molto bassa. Per questo punto si stabilisce la temperatura termodinamica che indico come  $T_T = 273,16 \text{ K} = ax_T$  in Kelvin. Dove  $x_T$  è la misura della lunghezza (pressione o volume) del termoscopio che ho scelto quando l'ho messo a contatto con il punto triplo dell'acqua.

Volendo quindi misurare la temperatura di un altro corpo questa sarà  $ax$  dove  $a$  è la stessa costante mentre  $x$  è la pressione (o temperatura) che avrò a contatto con l'altro corpo, cioè  $T = 273,16 \frac{x}{x_T}$  e scompare  $a$  lasciando solo la temperatura.

Abbiamo quindi definito la **scala di temperatura internazionale**.

Per più di un secolo si è però usato un altro metodo (a volte ancora si usa) basato sulla definizione di due punti fissi:

- Punto fisso del ghiaccio, in cui acqua e ghiaccio rimangono in equilibrio alla temperatura atmosferica
- Punto fisso del vapore, in cui c'è equilibrio tra liquido e vapore

Si definisce allora la temperatura del ghiaccio  $T_g = ax_g$  e del vapore  $T_v = ax_v$  e la differenza di temperatura

$$T_v - T_g = a(x_v - x_g) \text{ da cui se prendo un terzo corpo di cui devo misurare la temperatura otteniamo } \frac{T}{T_v - T_g} = \frac{x}{x_v - x_g}$$

dove  $T$  è la temperatura che devo trovare e  $x$  è la variabile termometrica del corpo di cui voglio trovare la temperatura. Devo però definire gli intervalli di temperatura.

Nella scala centigrada  $T_v - T_g = 100$  mentre nella scala Fahrenheit  $T_v - T_g = 180$ .

Quindi per far tornare uguali i valori del ghiaccio e del vapore in scala centigrada si assumeva che  $T_g = 0^\circ C$  e  $T_v = 100^\circ C$

Allora si definisce la temperatura in gradi Celsius  $T(^\circ C) = T(K) - 273,15$ .

In questo modo torna lo  $0^\circ C$  al punto del ghiaccio e i  $100^\circ C$  al punto del vapore mentre  $0,01^\circ C$  al punto triplo dell'acqua.

Possiamo allora definire il

## Calore

Il calore non è un fluido (come si parlava nel '800).

È l'interazione che avviene tra un sistema termodinamico e l'esterno quando è presente una differenza di temperatura attraverso il contorno.

**Convenzione termodinamica:** il calore è assunto positivo quando assorbito dal sistema, cioè val dall'esterno all'interno del sistema. (Convenzione opposta a quella del lavoro).

**Sorgente di calore** (o sorgente termica): è un corpo con una massa infinita, ovvero una capacità termica infinita, tale che possa scambiare calore senza cambiare temperatura.

Ad esempio acqua del mare ( $a 4^\circ C$ ), aria, ecc.

SI DA ALLORA UNA DEFINIZIONE OPERATIVA CHE VEDREMO NELLA PROSSIMA LEZIONE.

# 1° principio della termodinamica

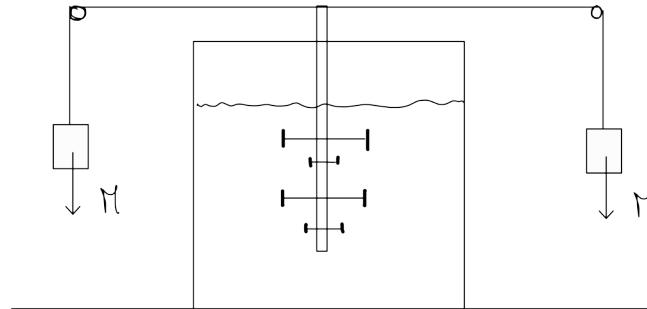
→ principio di conservazione dell'energia

È stato scoperto dopo il secondo principio della termodinamica e vedremo cosa comporta questo.

Daremo una interpretazione empirica sperimentale che si basa su quella che è chiamata

## *Esperienza di Joule*

Si osservi che comunque questo principio è stato formulato nel '800 da un medico, Mayer.



In sintesi possiamo schematizzare con un recipiente che contiene acqua e ghiaccio. All'interno c'è un mulinello rotante con delle palette e colleghiamo l'albero con due fili collegati a due pesi con lo scopo di far ruotare l'albero. Il mulinello prende il nome di *Mulinello di Rowlands*.

1° fase:

Iniziamo la trasformazione partendo da uno stato iniziale con i pesi ad una certa altezza e nel recipiente acqua e ghiaccio, questi due costituiscono il sistema termodinamico chiuso. L'albero rappresenta lo scambio di lavoro rispetto l'esterno.

Nella prima fase dell'esperienza si abbassano i pesi che fanno ruotare l'albero la cui rotazione provoca lo scioglimento di una certa quantità di ghiaccio. Considerando di aver isolato il sistema termodinamico non c'è scambio di calore ma solo di lavoro che è entrato nel sistema dall'esterno.

2° fase:

Leviamo l'isolamento termico e sottraiamo del calore in modo da riformare la stessa quantità di ghiaccio che si è sciolta, cioè torniamo allo stato iniziale.

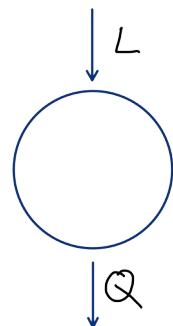
Abbiamo quindi compiuto una trasformazione ciclica in cui c'è stato un ingresso di lavoro nella prima fase e una cessione di calore nella seconda fase.

Allora, il **primo principio della termodinamica** stabilisce che in una trasformazione ciclica il lavoro scambiato entrante è uguale al calore totale uscente.  $L = Q$

**Oss:** abbiamo trovato che il lavoro scambiato è uguale al calore scambiato.

Dopo quest'esperienza possiamo dare una definizione operativa del calore: il calore scambiato da un sistema si misura come il lavoro scambiato da un sistema in un'esperienza di Joule (un'esperienza dove un sistema chiuso compie una trasformazione ciclica).

Anche il calore si misura in Joule.



Si ricordi che AI TEMPI DEL LICEO si definisce la caloria come la quantità di calore necessaria per far aumentare di 1°C 1 kg di H<sub>2</sub>O da 14,5 °C a 15,5°C.

Il lavoro ha un'altra definizione. Si deve far in modo che la caloria definita così fosse uguale al Joule definito in maniera diversa e allora si introduceva l'equivalente meccanico del lavoro.

Dal punto di vista termodinamico davamo lavoro e (lavoro fatto sul sistema) quindi dovremmo scrivere  $-|L| = -|Q|$ , dove il calore è negativo poiché viene ceduto dal sistema e allora possiamo dire che  $L = Q$  senza specificare il segno.

**N.B:** Vedremo che questo fatto di cambiare il segno ha qualche controindicazione dal punto di vista del 2° principio della termodinamica.

Se considero la relazione come  $\oint dL = \oint dQ \Rightarrow \oint (dQ - dL) = 0$  ma questo dall'analisi sappiamo che possiamo dire che la quantità è un differenziale è esatto. Questo possiamo riscrivere come una quantità totale che chiamo, **energia totale**, cioè  $\oint dE = 0$ .

Questa grandezza è allora anche una funzione di stato (definita dall'integrale ciclico), definita a meno di un valore assoluto che è rappresentato dallo stato di riferimento dove bisogna assegnare il valore di riferimento.

Conviene però vederla come quantità finita. Supponiamo che un sistema vada dallo stato 1 a 2 attraverso la trasformazione a e che poi possa tornare da 2 a 1 attraverso la trasformazione b o attraverso una trasformazione c.

Posso identificare due trasformazioni cicliche e si può applicare il 1° principio della termodinamica ad entrambe, cioè la somma dei calori scambiati deve essere uguale al totale dei lavori scambiati.

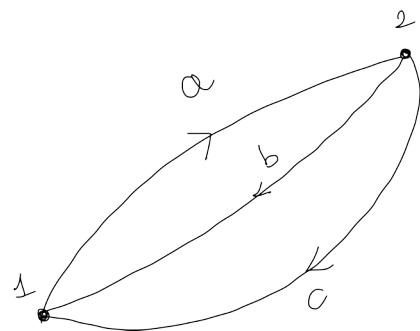
Allora:

- Per la trasformazione 1-a-2-b-1 abbiamo

$$Q_a + Q_b = L_a + L_b \rightarrow Q_a - L_a = L_b - Q_b$$

- Per la trasformazione 1-a-2-c-1 abbiamo

$$Q_a + Q_c = L_a + L_c \rightarrow Q_a - L_a = L_c - Q_c$$



E allora si ottiene  $Q_b - L_b = Q_c - L_c$ , cioè la differenza tra il lavoro scambiato e il calore scambiato non dipende dalla trasformazione b o c perché è una grandezza funzione di stato, quindi la stessa per tutte le trasformazioni.

Cioè, in termini finiti,  **$Q - L = \Delta E$** .

Abbiamo così definito l'energia totale, una funzione di stato definita a meno costante e allora bisogna definire il valore di riferimento che fa riferimento ad uno stato di riferimento.

Allora posso scrivere genericamente  $\Delta E = E - E_o$ , dove  $E_o$  è uno stato di riferimento che posso assumere arbitrariamente, chiaramente conviene prendere  $E_o = 0$ .

## Energia totale

Supponiamo che la funzione di stato  $E$  sia n variabili che si suddividono ad esterne (stato del sistema rispetto un sistema di riferimento esterno) ed interne (variabili termomeccaniche  $p$ ,  $v$  e  $T$  e variabili termochimiche che vedremo più avanti). Cioè abbiamo due contributi.  $\Delta E = \Delta E_i + \Delta E_e$ , cioè la variazione di energia totale è pari alla variazione di energia interna più la variazione rispetto le variabili esterne.

Allora le variabili esterne sono:

- Velocità del baricentro rispetto ad un s.d.r fermo
- Quota del baricentro rispetto ad un s.d.r scelto

$$\Delta E_e = \Delta E_w + \Delta E_z = \underbrace{\Delta E_C}_{\text{e. cinetica}} + \underbrace{\Delta E_P}_{\text{e. potenziale}}$$

Per quanto riguarda le variabili interne le suddividiamo in:

- Variabili termodinamiche,  $p$ ,  $v$  e  $T$
- Variabile elettrochimiche legate a fenomeni chimici e termoelettrici

$$\Delta E_i = \underbrace{\Delta E(p, v, T)}_{\Delta U: \text{e. interna termodinamica}} + \underbrace{\Delta E(x_i, el)}_{x_i \text{ i-esima componente}, \text{ el elettrico}} = \Delta U + \Delta U_x,$$

dove  $x$  rappresenta il grado di avanzamento, cioè ogni variazione di energia interna di origine elettrochimica.

**N.B.** Noi supponiamo che non ci siano reazione chimiche né fenomeni elettrochimici, cioè  $\Delta U_x = 0$

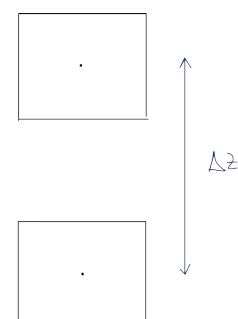
Allora, mettendo insieme queste considerazioni:  $Q - L = \Delta E = \Delta U + \Delta U_x + \Delta E_C + \Delta E_P$

**N.B.** Abbiamo considerato le lettere maiuscole poiché sono grandezze estensive, ma poiché abbiamo un sistema chiuso la massa M è costante e possiamo dividere ed ottenere le grandezze intensive.

Calcoliamo  $\Delta E_P$ :

Prendiamo un corpo di massa M sul tavolo e lo solleviamo fino ad un'altezza z. Per sollevarlo devo fare un lavoro legato a  $\Delta z$ . Il sistema non scambia calore.

- $Q = 0$
- $L \neq 0$  poiché è stato sollevato un peso
- $\Delta U = 0$  poiché la variazione di energia interna è legata a  $p, v, T$  e queste rimangono pressoché costanti.
- $\Delta U_x = 0$ , poiché non cambiano le variabili chimiche



- $\Delta E_C = 0$ , poiché è rimasto fermo
- $\Delta E_P = M\Delta z g$ , poiché è cambiata la quota del baricentro

E allora il lavoro per sollevare la massa  $M$  richiede:  $-L = Mg\Delta z \rightarrow L = -Mg\Delta z$

**N.B.** Il lavoro è negativo poiché è stato fatto dall'esterno sul sistema.

Se dividiamo per la massa  $M$  otteniamo la grandezza intensiva  $l = -g\Delta z$  e considerando le quantità infinitesime  $dl = -dgz$ . Possiamo quindi dire che la variazione di energia potenziale è  $dE_p = -g dz$ .

Facendo lo stesso ragionamento, calcoliamo  $\Delta E_c$ .

Mettiamo in movimento un copro di massa  $M$  imprimendo una forza e dalla velocità nulla raggiunge la velocità  $w$ .

- $Q = 0$
- $L \neq 0$  poiché è stato sollevato un peso
- $\Delta U = 0$  poiché la variazione di energia interna è legata a  $p, v, T$  e queste rimangono pressoché costanti.
- $\Delta U_x = 0$ , poiché non cambiano le variabili chimiche
- $\Delta E_C \neq 0$ , poiché cambia velocità
- $\Delta E_P = 0$ , poiché la quota del baricentro resta la stessa



Allora  $-L = \Delta E_c$

Per comodità passiamo alle quantità infinitesime e calcoliamo il lavoro necessario ad imprimere la velocità  $w$ :

$$dL = -F dx = -M \frac{dw}{dt} dx = -M \frac{dw}{dx} \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=w} dw = -M w dw = -M \frac{dw^2}{2}$$

E per le quantità finite  $L = -M \frac{\Delta w^2}{2}$  e dividendo per la massa  $l = -\frac{\Delta w^2}{2}$  mentre la quantità infinitesima  $l = -\frac{dw^2}{2}$ .

Passando alle quantità intensive, dividendo per la massa, la variazione di energia cinetica:  $q - l = \Delta u + \Delta u_x + \Delta e_c + \Delta e_p$ ,

cioè  $q - l = \Delta u + \Delta u_x + \frac{\Delta w^2}{2} + g\Delta z$

E in termini differenziali, cioè con quantità infinitesime:  $dq - ld = du + du_x + \frac{dw^2}{2} + gdz$

**Oss.** Passando dall'espressione  $Q = L$  del 1° principio della termodinamica all'espressione  $Q - L = \Delta E$ , siamo passati dal considerare una trasformazione aperta in cui  $\Delta E \neq 0$  mentre per la trasformazione ciclica  $\Delta E = 0$ .

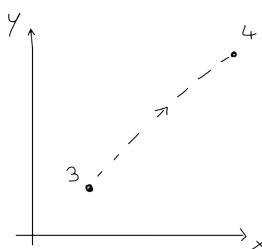
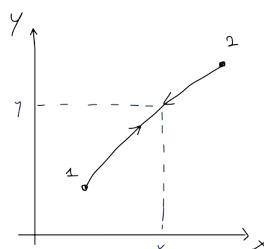
Di conseguenza queste espressioni sono ottenute con una **generalizzazione del 1° principio della termodinamica** per un sistema che compie trasformazioni aperte con la massa costante.

## Trasformazioni termodinamiche

Abbiamo visto come le trasformazioni termodinamiche implicano un cambio dello stato del sistema termodinamico.

Si dice **trasformazione reversibile** se si può andare da 1 a 2 e da 2 da 1, dove andare significa che ogni punto rappresenta uno stato di equilibrio del sistema  $(x, y)$ . Cioè può avvenire nei due versi.

Si dice **trasformazione irreversibile** se c'è uno stato 3 che compie una trasformazione alla fine della quale va nello stato 4 ma la trasformazione non può essere percorsa nel verso contrario. La indicio con una linea tratteggiata e ogni punto della linea NON rappresenta uno stato di equilibrio.



Partendo dal presupposto che la termodinamica è una scienza delle cose impossibili, in quanto parliamo di trasformazioni reversibili che in realtà non esistono, vediamo il significato fisico di queste trasformazioni.

Si ricordi che le trasformazioni reversibili rappresentano il limite superiore oltre il quale non è possibile andare.

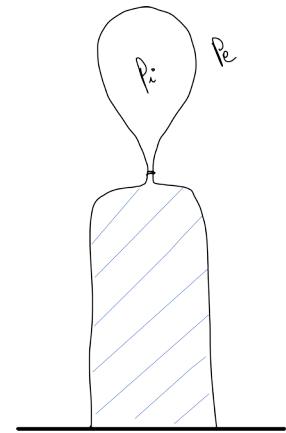
Le condizioni necessarie e sufficienti per una trasformazione reversibile sono:

- Equilibrio interno (che diamo per scontato essendo una scienza macroscopica)
- $p_i = p_e$
- $T_i = T_e$
- Assenza di attriti

Tomiamo all'esempio del palloncino con un contenitore di azoto che fa gonfiare il sistema.

Facciamo alcune osservazioni:

- Se  $p_i > p_e$  il palloncino continua ad espandersi così come se  $p_e > p_i$  il palloncino si contrae. Cioè se  $p_i \neq p_e$  è possibile solo una trasformazione, o espansione o contrazione. E affinché la trasformazione sia reversibile cioè il palloncino possa sia espandersi che contrarsi è necessario che  $p_i = p_e$  e in questo caso non avviene né uno né l'altro. Questo è proprio il limite superiore cercato.
- Affinché venga gonfiato dobbiamo estendere il materiale di cui è costituito cioè esercitare una forza di distensione del materiale che rappresenta un contributo al lavoro di deformazione di questa superficie. Se non ci fosse questa forza di deformazione il palloncino ritornerebbe nella posizione sgonfia. Cioè per far estendere occorre esercitare un lavoro di dilatazione a cui si oppongono le forze interne del materiale. Nella realtà c'è l'attrito è quindi non è possibile avere indifferentemente contrazione o espansione (naturalmente il sistema tende a contrarsi verso la posizione di equilibrio). Quindi è richiesta assenza di attriti.
- Abbiamo visto come per il 1° principio della termodinamica  $dq - dl = du + d\mu_x + de_c + de_p$ , supponiamo la situazione 1 nel caso più compresso e 2 nel caso espanso e quindi l'espansione è la trasformazione  $1 \rightarrow 2$  mentre la contrazione è  $2 \rightarrow 1$ . I tre termini a destra nell'equazione rappresentano differenziali di variabili di stato e quindi le due trasformazioni stanno a rappresentare l'inversione del segno di  $du$ ,  $de_c$ ,  $de_p$ , che quindi significa poter invertire  $dq - dl$ . Ricordiamo che il termine di lavoro  $dl = p dv$  ammette il fatto di poter essere negativo o positivo a seconda che si stia contraendo od espandendo. Allora si deve invertire necessariamente anche  $dq$  e la condizione in cui in sistema possa scambiare calore in un verso e nell'altro è che sia  $T_i = T_e$ , altrimenti il calore potrebbe andare da un solo verso.



Vediamo allora quali trasformazioni andremo a considerare in questo corso:

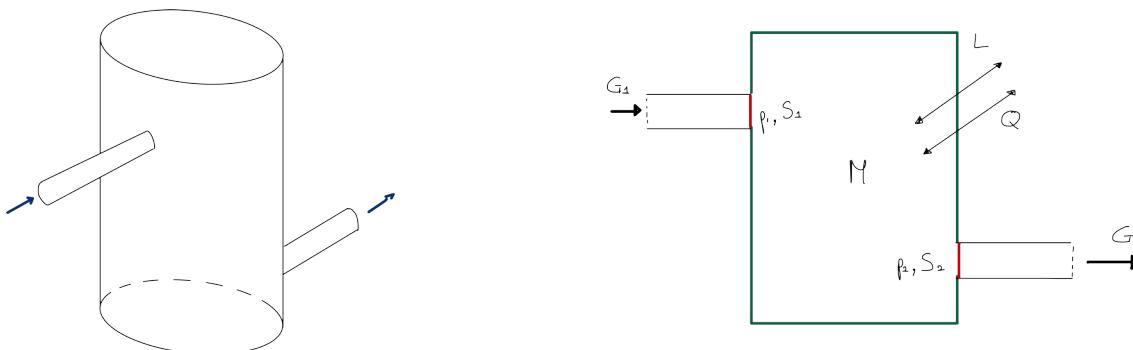
- Trasformazioni **adiabatiche**: in cui  $Q = 0$ , il calore scambiato è nullo
- Trasformazioni **isocore**:  $L = 0$ , il lavoro è nullo
- Trasformazioni **isobare**:  $p = \text{cost}$
- Trasformazioni **isoterme**:  $T = \text{cost}$

## Sistemi aperti

Quindi usciamo da quanto fatto a fisica.

Consideriamo un sistema costituito da un recipiente, un tubo di ingresso e un tubo di uscita. In sezione lo rappresentiamo con un riquadro e i due tubi di uscita. Considerando il contorno possiamo dividere in contorno fisso o fisico (in verde) e un contorno mobile (in rosso) costituito dalle due sezioni di ingresso  $S_1$  e di uscita  $S_2$  in cui il fluido passa attraverso. supponiamo  $M$  sia la massa all'interno sia del contorno fisso che mobile e che ci sia uno scambio di lavoro  $L$  che possa entrare (negativo) o uscire (positivo) e uno scambio di calore  $Q$  che possa entrare (positivo) e uscire (negativo).

Sopponiamo che la portata di ingresso sia  $G_1$  e quella in uscita  $G_2$ .

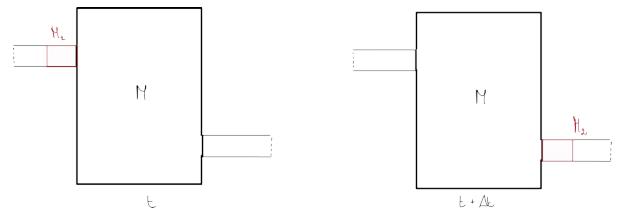


La prima **ipotesi** è quella di **regime stazionario**, cioè che la massa  $M$  di liquido all'interno del contenitore sia costante. Intuitivamente possiamo dire che le due portate devono essere uguali, cioè  $G_1 = G_2$ , bilancio di massa.

Verifichiamo quanto detto:

Supponiamo di fare una fotografia all'istante  $t$  e di fotografare il fluido all'interno del contorno fisso e mobile,  $M$ , e poi supponiamo che ci sia una quantità molto piccola di fluido  $M_1$  che sta entrando. Poi facciamo una seconda fotografia all'istante  $t + \Delta t$  e supponiamo che tutto  $M_1$  sia entrato e che una parte,  $M_2$ , sia uscita.

A regime stazionario la massa  $M$  all'istante  $t$  deve essere la stessa di quella all'istante  $t + \Delta t$ . Cioè  $M_1 + M = M_2 + M \rightarrow M_1 = M_2$  e allora  $G_1 \Delta t = G_2 \Delta t \Rightarrow G_1 = G_2$ .



Questo è il **bilancio di massa** per un sistema aperto a regime stazionario con una corrente entrante e una corrente uscente.

Applichiamo il 1° principio della termodinamica, ovvero facciamo il **bilancio di energia**.

Facciamolo con l'equazione delle quantità estensive che, non essendoci reazioni chimiche, sarà

$$q - l = \Delta u + \cancel{\Delta u_x} - \frac{\Delta w^2}{2} + g \Delta z$$

Dove:

- $q$  è il calore scambiato dal sistema con l'esterno. Consideriamo però dei fluidi tali che si possa trascurare il calore scambiato attraverso il contorno mobile, questi fluidi hanno un'alta conduttività termica e si chiamano metalli liquidi e sono di poco interesse per l'ingegneria medica, quindi risulta ragionevole trascurarli.
- $l$  è il lavoro, costituito da una parte attraverso il contorno fisso  $l_f$  e una parte scambiata attraverso il contorno mobile di entrata, lavoro di introduzione del fluido, e attraverso il condotto di uscita, lavoro di estrazione del fluido. Consideriamo le due sezioni e supponiamo che il fluido faccia uno spostamento  $x_2$ , per farlo il sistema dovrà fare del lavoro verso l'esterno (il fluido si espanderà verso l'esterno), questo sarà:  $l_2 = \frac{F}{p_2 S_2} x_2 = p_2 \underbrace{V_2}_{=S_2 x_2} = p_2 v_2 M_2$  e  $l_1 = \frac{L_2}{M_2} = p_2 v_2 > 0$ . Analogamente all'ingresso si

produce lavoro negativo perché il sistema si contrarie verso l'interno, cioè  $l_1 = -p_1 v_1$

$$\text{L'equazione diventa allora } q - l_f + p_2 v_2 - p_1 v_1 = \Delta u - \frac{\Delta w^2}{2} + g \Delta z.$$

Andiamo a considerare la variazione dell'energia interna tra l'istante  $t$  e  $t + \Delta t$ , cioè

$$\Delta u = \frac{u(M) + u(M_2)}{u(t + \Delta t)} - \frac{u(M) - u(M_1)}{u(M_t)} = u_2 - u_1 \text{ dove } u_2 \text{ è l'energia interna del fluido che esce mentre } u_1 \text{ è l'energia}$$

interna del fluido che entra. Per il fluido interno l'energia interna rimane la stessa poiché siamo in regime stazionario.

Discorso analogo per l'energia interna:  $\Delta e_c = e_c(M) + e_c(M_2) - e_c(M) - e_c(M_1) = e_{c2} - e_{c1}$  e per  $\Delta e_p = e_{p2} - e_{p1}$ .

Cioè in conclusione possiamo dire che  $q - l_f - p_2 v_2 + p_1 v_1 = u_2 - u_1 + e_{c2} - e_{c1} + e_{p2} - e_{p1}$ , cioè

$q - l = (u_2 + p_2 v_2) - (u_1 + p_1 v_1) + e_{c2} - e_{c1} + e_{p2} - e_{p1}$  abbiamo esteso il 1° principio della termodinamica applicandolo ad un **sistema aperto** con una corrente entrante ed una uscente.

La conclusione più importante è che abbiamo introdotto la somma dell'energia interna più pressione per volume e questa è una nuova grandezza termodinamica (funzione di stato) che chiamiamo **entalpia**:  $h = u + pv <- \text{definizione analitica}$ .

Posso riscrivere il 1° principio della termodinamica per sistemi aperti come:  $q - l_f = \Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p$ .

**Oss.** al posto di  $\Delta u$  è presente  $\Delta h$  rispetto l'equazione per i sistemi chiusi.

Inoltre il lavoro  $l_f$  è solo quello attraverso il contorno fisso perché  $p_2 v_2 - p_1 v_1$  è il lavoro perso per l'introduzione e l'estrazione del fluido.

In termini differenziali, cioè con quantità infinitesime:  $dq - dl_f = dh + de_c + de_p$ , quella che posso considerare l'equazione più generale per i sistemi aperti.

È necessario però dare una **definizione operativa** dell'entalpia.

Se prendiamo un sistema aperto facendo in modo che l'energia cinetica sia la stessa tra ingresso ed uscita ( $\Delta e_c = 0$ ) e che la variazione di energia potenziale sia nulla (condotto in posizione orizzontale). Si fa in modo che il lavoro scambiato sia nullo e allora  $dq = dh$ . L'entalpia si misura come un calore.

Allora, riprendendo la definizione analitica,  $dh = du + p \, dv + v \, dp$ .

\ Passiamo al capitolo 5 del libricino \\\

## 2° principio della termodinamica

Noi diamo una formulazione del 2° principio della termodinamica dopo la pubblicazione del libro di Carnot che però è avvenuta solo dopo diversi decenni di esperimenti con sistemi cilindro-pistone.

Per alcuni libri anglosassoni si fa riferimento alla macchina di Newcomen per introdurre tale principio mentre i francesi parlano della macchina di Papin.

### Macchina di Newcomen

Utilizzata nel 1712 per sollevare l'acqua dalle miniere e portarla a livello del terreno. Solitamente si utilizzano delle pompe a braccio dove un bilanciere ruota e solleva l'acqua. Per fare questo ci vuole una forza che faccia ruotare il bilanciere dove Newcomen propose di usare questo dispositivo.

Facciamo bruciare del carbone che scalda l'acqua e il vapore va a riempire il sistema cilindro-pistone, è bene precisare che senza carbone il bilanciere si posiziona a sinistra per via del peso dell'acqua. Scaldando l'acqua il vapore riempie il sistema e poi immaginiamo di far entrare acqua fredda che fa condensare il vapore e quindi diminuisce la pressione rispetto quella esterna (atmosferica) che diventa maggiore. Si ottiene quindi l'abbassamento del pistone e il sollevamento dell'acqua, cioè la fase utile della macchina di Newcomen.

È un sistema aperto (entra acqua che poi andrà tolta).

**Rendimento della macchina** si può considerare come il rapporto tra quello che si voleva ottenere, cioè l'acqua sollevata, rispetto al carbone bruciato, cioè ciò che si spende:  $\eta = \frac{\text{H}_2\text{O sollevata}}{\text{carbone bruciato}} \approx 3 - 4\%.$

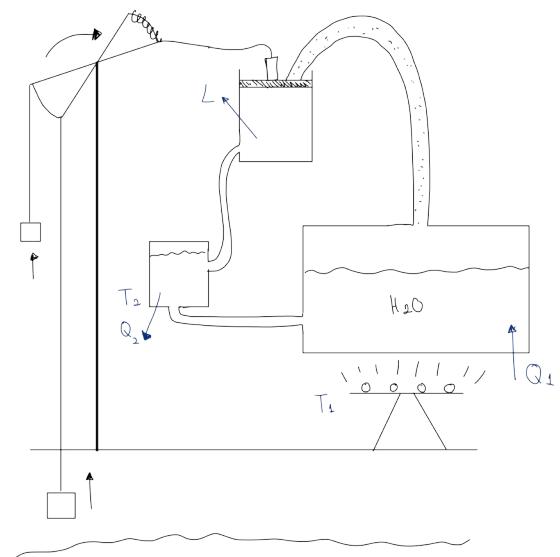
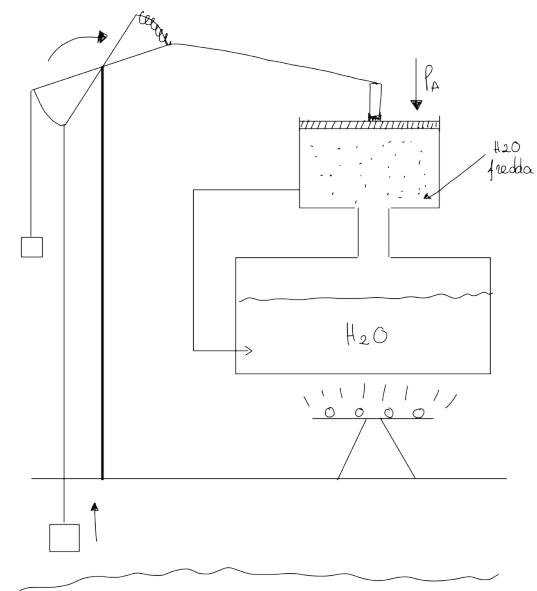
Circa 70 anni dopo James Watt introdusse la

### Macchina di Watt

C'è sempre il bilanciere che ruotando verso destra solleva l'acqua facendo lavoro utile. Il carbone brucia e scalda l'acqua che si vaporizza facendo aumentare la pressione in modo che spinga verso il basso il pistone nel sistema cilindro pistone (fase utile).

Il pistone arriva a fine corsa e si fa in modo che il vapore esca andando in un nuovo recipiente dove si fa condensare, cioè questo diventa il condensatore. È sufficiente fare intorno una camicia con l'acqua estratta dalle miniere che quindi si trova all'incirca a 4°C contro il vapore a 100°C che cede calore verso l'esterno rispetto ad un corpo a temperatura T2 (acqua di raffreddamento). L'acqua poi torna nuovamente nel contenitore principale dove gli si dà il calore T1 e la si fa nuovamente vaporizzare. Nella macchina di Watt abbiamo un sistema chiuso, l'acqua non esce dal sistema.

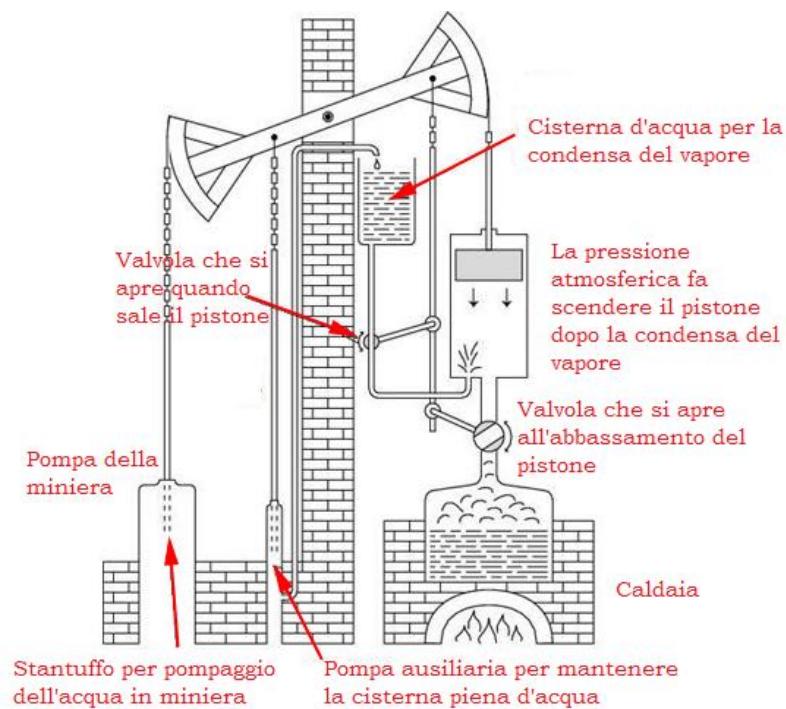
C'è stato ingresso del calore Q1, ingresso del lavoro L, uscita del calore Q2. Lavoro positivo perché fatto verso l'esterno al sollevamento del peso, calore negativo perché ceduto all'esterno e un calore negativo perché assorbito dall'esterno.



QUESTA PAGINA È STATA LASCIATA BIANCA INTENZIONALMENTE

# FISICA TECNICA

## Settimana 2



# Indice settimana 2

Indice settimana 2	2
martedì 29 settembre 2020 - Lezione 4	3
Generalizzazione del 2° principio della termodinamica	3
<i>Formulazione di Kelvin-Plank</i>	4
<i>Formulazione di Clausius</i>	4
<i>Equazioni del 2° principio della termodinamica (dis. Clausius)</i>	5
Entropia	5
<i>Energia interna in funzione dell'entropia</i>	6
<i>Entalpia in funzione dell'entropia</i>	6
<i>Teorema dell'aumento dell'entropia</i>	6
<i>Cause di irreversibilità di 1° specie legate alla differenza finita di temperatura</i>	8
<i>Cause di irreversibilità di 1° specie legate a differenze di pressione e attrito</i>	8
mercoledì 30 settembre 2020 - Lezione 5	9
<i>Cause di irreversibilità di 2° specie: fenomeni elettrochimici</i>	9
Trasformazioni irreversibili	10
Ciclo motore ( o ciclo diretto)	11
Macchina di Carnot	11
<i>Ciclo inverso</i>	12
Sistemi aperti	14
<i>Espansore</i>	14
<i>Compressore</i>	15
<i>Valvola di laminazione</i>	15
<i>Tubo di efflusso</i>	15
Generalizzazione dei sistemi aperti	16
<i>Regime non stazionario</i>	16
giovedì 1 ottobre 2020 - Lezione 6	17
<i>Rappresentazioni termodinamiche sui diagrammi termodinamici</i>	17
<i>Diagramma pressione - volume specifico</i>	17
<i>Diagramma TS temperatura - entropia</i>	17
<i>Diagramma hs, entalpia-entropia</i>	18
Proprietà delle sostanze	19
<i>Calore specifico</i>	19
Equazioni di Maxwell (termodinamiche)	22
<i>Diagramma Ts</i>	24
Relazioni tra Cp e Cv	25

Abbiamo affrontato il 2° principio della termodinamica presentando le macchine di Newcomen e Watt. Le abbiamo descritte osservando cosa fanno.

Dal punto di vista della schematizzazione la macchina di James Watt è un sistema chiuso in cui ci sono lo scambio di calore  $Q_1$  dato alla macchina dal carbone, lo scambio di calore  $Q_2$  ceduto all'acqua di raffreddamento nel condensatore e il lavoro  $L$  è costituito dal sollevamento del peso.  $T_1$  è la temperatura della sorgente superiore, in questo caso la fiamma che cede calore all'acqua facendola vaporizzare, mentre  $T_2$  è la temperatura dell'acqua di raffreddamento.

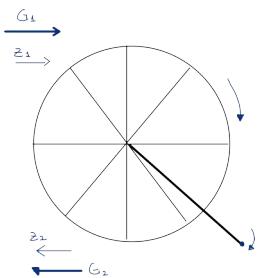
Riprendiamo la definizione del rendimento, definito come il rapporto  $\eta = \frac{\text{ciò che si ottiene}}{\text{ciò che si spende}}$  e nel caso della macchina di Watt  $\eta = \frac{L}{Q_1}$ .

Il problema è che per ottenere un dato lavoro  $L$  devo spendere una certa quantità di calore e ovviamente vorrei produrre un certo lavoro  $L$  con la minore quantità di calore spesa, quindi avere il massimo rendimento.

Per la macchina di Watt si ottiene un rendimento maggiore alla macchina di Newcomen.

Questo ragionamento fu la base delle ricerche di Carnot che all'inizio dell'ottocento formulò il risultato che noi chiamiamo **rendimento massimo di Carnot**, cioè che il rendimento è soltanto funzione delle temperature e questo è il limite superiore del rendimento termodinamico. Cioè il risultato di Carnot è che il rendimento delle macchine termomeccaniche (i.e. che producono lavoro meccanico attraverso un mezzo termico, il calore) è dato nel limite superiore dalla relazione  $\eta_{max} = \eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ .

Vediamo quale ragionamento portò Carnot a questa conclusione: utilizzò il principio di similitudine basato sul fatto che conoscono qualcosa e l'ho interpretato allora lo applico a qualcosa che non conosco e che quindi devo interpretare. Carnot fece la similitudine tra il mulino ad acqua (macchina meccanica) e la macchina di Watt (termomeccanica).



Il mulino ad acqua è costituito da una ruota che gira con delle pale ed una acqua che entra ad una certa quota  $z_1$  e fa girare la ruota, tale rotazione costituisce il lavoro meccanico ottenuto e poi l'acqua va via ad un livello  $z_2$ . Nel mulino ad acqua è necessaria una certa portata d'acqua di ingresso e una certa portata di uscita alle due quote. Il parallelo è tra le portate d'acqua e il calore e le quote corrispondono alle temperature (o quote termiche a cui entra il calore).

In questa similitudine c'è qualcosa di giusto e qualcosa di errato.

Nel bilancio di massa nel mulino va bene il lavoro ma la portata di acqua che entra deve essere uguale a quella che esce mentre per i calori nella macchina di Watt può esserci accumulo di calore e non è vero che  $Q_1$  sia uguale a  $Q_2$ . Questo errore viene dal fatto che nell'800 si considerava tutto un fluido e il calore era considerato il "fluido calorico" e veniva citato il fatto che il vuoto non esisteva ma esisteva l'etere. Oggi sappiamo che se i calori fossero uguali allora il lavoro sarebbe nullo, cioè per avere un  $L > 0$  (macchina motrice) il calore  $Q_1$  deve essere per forza maggiore di  $Q_2$ .

Possiamo quindi concludere che la similitudine Carnot era sbagliata dal punto di vista della termodinamica mentre non è sbagliata dal punto di vista del 2° principio della termodinamica che quindi possiamo dire che fu originato da questi ragionamenti.

Dal punto di vista fisico la conclusione è che se queste considerazioni sono risultate giuste per quanto riguarda il 2° principio della termodinamica anche se erano basate su un concetto errato questo significa che i 2 principi sono separati l'uno dall'altro, altrimenti essendo uno violato sarebbe dovuto essere violato anche l'altro.

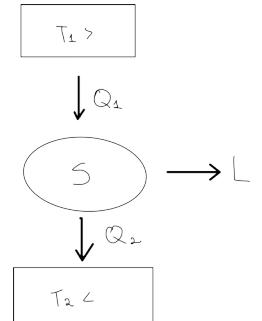
Vediamo come abbiamo giustificato queste considerazioni dopo due secoli di esperienza:

## Generalizzazione del 2° principio della termodinamica

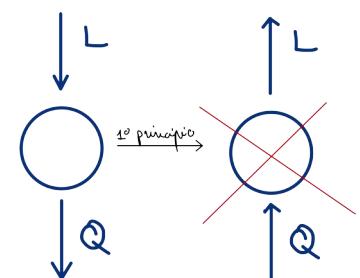
Cerchiamo di considerare anche l'esperienza di Joule che ci dice come io cedo calore all'acqua e ghiaccio sottoforma di abbassamento dei pesi e poi ritorno alle condizioni iniziali (trasformazione ciclica) se sottraggo una certa quantità di calore, formulando il primo principio della termodinamica come  $L=Q$  (in realtà entrambi avrebbero segno negativo per la termodinamica).

Però interpretare l'esperienza di Joule con entrambi positivi significa che io potrei dare calore all'acqua e ghiaccio e questo mette in moto le pale del Mulinello di Rowlers e questi sollevano i pesi che erano scesi, cioè compio lavoro verso l'esterno.

È chiaro che questa interpretazione fisica non è possibile e questo significa che ci sono delle trasformazioni che posso avvenire in un solo verso e non si può invertire.

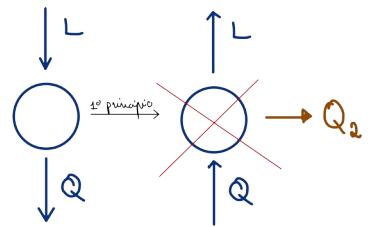


NICOLAS LÉONARD SADI CARNOT



Confrontando questo con la macchina di Watt abbiamo un sistema che riceve calore e produce lavoro ma cede calore! In questo caso mancherebbe  $Q_2$ , cioè le macchine reali devono avere anche questo secondo calore.

Possiamo quindi dire che certi fenomeni fisici vanno solo in un verso mentre certi fenomeni elettromeccanici possono andare in entrambi i versi.



I fenomeni termomeccanici non possono essere invertiti, ovvero sono costituiti da **trasformazioni irreversibili**.

Vediamo allora come si formula nella termodinamica classica il 2° principio.

La prima formulazione è

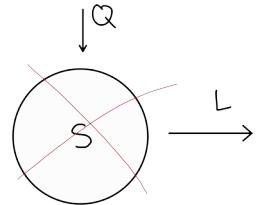
### Formulazione di Kelvin-Planck

“È impossibile che l'unico risultato di una trasformazione ciclica di un sistema chiuso sia la generazione di lavoro positivo”.

Per produrre lavoro positivo è necessario cedere calore, cioè è impossibile che un sistema chiuso che compie trasformazioni cicliche produca lavoro positivo scambiando calore (assorbendo) con una sola sorgente!

(È impossibile la trasformazione in figura senza il  $Q_2$ ).

Nel caso della macchina di Watt è impossibile cedere il calore nella fiamma, ottenere il sollevamento del peso senza condensare il fluido.



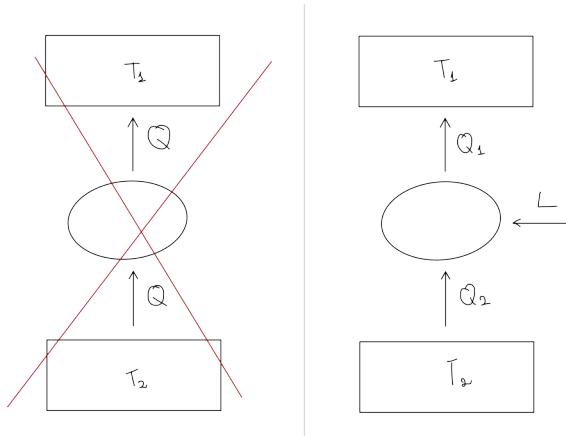
La seconda formulazione è la

### Formulazione di Clausius

“Non è possibile che l'unico risultato di una trasformazione ciclica sia il passaggio di calore da una sorgente di temperatura inferiore ad una a temperatura superiore”,

cioè significa che questo è possibile se c'è un altro effetto compensatore come ad esempio la cessione di lavoro.

Cioè la seguente schematizzazione di un sistema chiuso non è possibile:

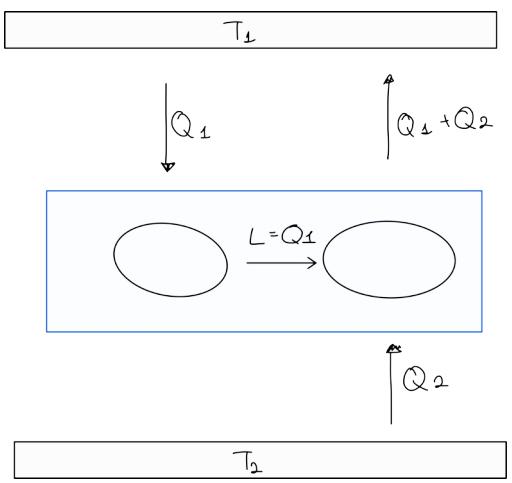


Se questo non è possibile è possibile quanto rappresentato a destra, cioè che dando del lavoro si ottiene la sottrazione di calore a temperatura inferiore e la cessione di  $Q_1$  a temperatura superiore, cioè quello che per la conoscenza attuale è un **ciclo frigorifero**.

Si dimostra che i due principi sono equivalenti

Per dimostrarlo bisogna ragionare per assurdo, cioè negando Planck e quindi immaginiamo che sia possibile sottrarre calore  $Q_1$  alla sorgente 1 produrre del lavoro  $L$  che, in base al primo principio, sarà  $Q_1$ . Utilizziamo poi questo  $L$  in una macchina frigorifera che quindi sottrae calore ad una sorgente a  $T$  inferiore per cederlo alla sorgente  $T_1$ , cedendo il calore  $Q_1+Q_2$ . Vediamo come si può vedere la combinazione dei due sistemi, cioè considerando il rettangolo celeste che ha dentro  $L=Q_1$  che non ci interessa (ci interessa solo quello che avviene al contorno). Cioè per noi entra  $Q_2$  ed esce  $Q_1+Q_2$  ed entra  $Q_1$ , cioè entra  $Q_2$  ed esce  $Q_2$ , quindi neghiamo Clausius. La negazione di Kelvin-Planck ha portato a negare Clausius.

Possiamo passare al ragionamento opposto, neghiamo Clausius e vediamo cosa succede a Kelvin-Planck. Cioè ammettiamo che si possa sottrarre il calore  $Q_2$  e cederlo al sistema termodinamico chiuso che compie

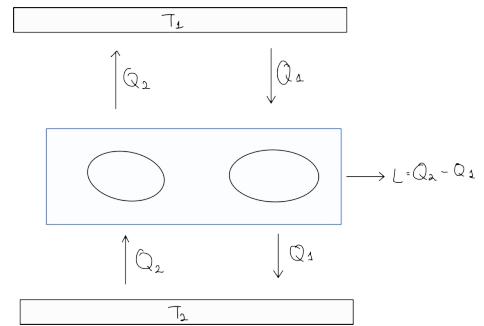


trasformazioni cicliche e lo cede alla sorgente T1. Questa sorgente immaginiamo che ceda il calore Q1 a questo sistema termodinamico il quale produce il lavoro L e cede il calore Q2. Cioè immaginiamo che con il calore della sorgente superiore T1 possa far funzionare una macchina di Watt.

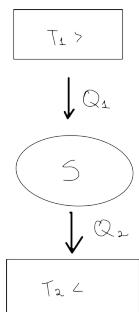
Combinando i due sistemi in un unico sistema termodinamico vedo come attraverso il contorno entra Q2 ed esce Q2 (come se non scambiasse calore Q2) mentre per l'altra parte assorbe Q2-Q1 e produce un lavoro L che per il primo principio deve essere proprio Q2-Q1, cioè si è negato Kelvin-Planck.

Questa doppia negazione in entrambi i versi significa che i principi sono equivalenti.

Vediamo come renderlo esplicito analiticamente.



### Equazioni del 2° principio della termodinamica (dis. Clausius)



Riprendiamo la macchina di Watt (sottrae Q1 alla sorgente superiore, cede Q2 e produce L).

Vale la regola che se qualcuno inventa qualcosa con il metodo deduttivo bisogna solo verificare se questo è verificabile o meno e per il secondo principio della termodinamica la formulazione analitica è la

**diseguaglianza di Clausius:**  $\oint \frac{dQ}{T} \leq 0$ , dove  $\begin{cases} = 0 & \text{trasformazioni REVERSIBILI} \\ < 0 & \text{trasformazioni IRREVERSIBILI} \end{cases}$

Vediamo se è possibile verificarlo o falsificarlo  $\rightarrow$  metodo deduttivo.

Supponiamo che questa uguaglianza esprime il 2° principio della termodinamica e applichiamo l'integrale ciclico (dQ positivo se assorbito, negativo se ceduto) alla macchina di Watt, cioè

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \leq 0 \rightarrow \frac{Q_1}{T_1} \leq \frac{Q_2}{T_2}, \text{ cioè abbiamo che } \frac{Q_{ASS}}{T_+} \leq \frac{Q_{CED}}{T_-}.$$

Andando ad applicare la diseguaglianza al ciclo frigorifero, o inverso, abbiamo che  $-\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0 \rightarrow \frac{Q_2}{T_2} \leq \frac{Q_1}{T_1}$ , il risultato

$$\text{sembra diverso ma è sempre } \frac{Q_{ASS}}{T_+} \leq \frac{Q_{CED}}{T_-}.$$

Il risultato è lo stesso sia se è un ciclo che produce lavoro (ciclo motore o ciclo diretto) sia se è un ciclo inverso in cui viene fornito lavoro per ottenere qualcosa.

Se qualcuno dovesse trovare che queste diseguaglianze non siano vere negherebbe il 2° principio della termodinamica ma ancora non ci è riuscito nessuno.

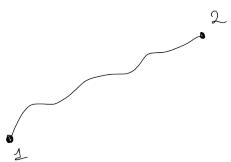
## Entropia

Abbiamo visto come la diseguaglianza di Clausius ci da una formulazione analitica del 2° principio e se la trasformazione è reversibile allora  $\oint \frac{dQ}{T} = 0$  ma sappiamo che se l'integrale ciclico è nullo allora l'integrando è un differenziale esatto e quindi la

grandezza è una grandezza di stato che in questo caso prende il nome di **entropia**:  $\frac{dq}{T} = ds$ .

Allora possiamo dire che se la trasformazione è irreversibile l'integrale è  $< 0$  e quindi l'integrando può essere scritto come  $\frac{dq}{T} = ds - ds_s$  dove questo ultimo termine  $ds_s \geq 0$  e precisamente  $\begin{cases} > 0 & \text{per trasf IRREVERSIBILI} \\ = 0 & \text{per trasf REVERSIBILI} \end{cases}$

Quest'ultimo termine è un **termine di produzione entropica** o sorgente entropica ed è dovuta alle cause di irreversibilità presenti nel sistema.



Vediamo cosa succede per una trasformazione generale 1-2, abbiamo definito analiticamente ma dobbiamo dare anche una definizione operativa e allora consideriamo questa trasformazione reversibile.

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 \frac{dq}{T}$$

Si calcola calcolando il calore scambiato alla relativa temperatura durante questa trasformazione.

Essendo una grandezza di stato dobbiamo dire quale è lo stato di riferimento 0 e quale è il valore di riferimento dell'entropia.

### Energia interna in funzione dell'entropia

Riprendendo l'espressione del 1° principio della termodinamica per i sistemi chiusi:

$dq - dl = du - de_c - de_p \rightarrow du = dq - dl - d\epsilon_c - d\epsilon_p$  e cerchiamo di calcolare il differenziale  $du$  cioè l'energia interna dovuta alle variabili termomeccaniche  $p, v, T$  e lo possiamo calcolare lungo qualsiasi trasformazione (tanto non dipende dalla trasformazione) e consideriamo allora una trasformazione tale che  $de_c = de_p = 0$ .

Dall'entropia sappiamo che  $dq = T ds$  e sappiamo che per le trasformazioni reversibili  $dl = p dv$  e allora possiamo concludere che  $du = T ds - p dv$ .

Abbiamo calcolato questa quantità lungo trasformazioni reversibili ma cosa succede se sono irreversibili? Essendo però un differenziale esatto (i.e differenziale di una grandezza di stato) la sua variazione non dipende dal tipo di trasformazione (ovviamente se devo calcolare l'entropia sceglierò la trasformazione più semplice).

Abbiamo definito l'entropia in base al 2° principio della termodinamica, quindi in base al  $dq$  e  $T$  è diventata una variabile termodinamica non più derivata da  $dq$  e  $T$  ma che serve a determinare  $du$ .

### Entalpia in funzione dell'entropia

Lo stesso ragionamento possiamo farlo sull'entalpia che avevamo definito come  $h = u + pv$  e allora il suo differenziale sarà  $dh = d(u + pv) = du + pv + v dp \rightarrow dh = \underbrace{T ds}_{T ds} + v dp$ .

Queste due espressioni sono molto importanti e dovremmo TATUARCELE !

Possiamo allora concludere l'analisi del 2° principio della termodinamica andando a formulare il

### Teorema dell'aumento dell'entropia

[VALUTARE L'ESPOSIZIONE SUL LIBRO A PG. 38 CON LE QUANTITÀ FINITE]

Supponiamo di avere un sistema termodinamico  $S$  isolato termicamente con l'esterno, cioè che non scambia calore con l'esterno ( $dq = 0$ ).

Otteniamo:  $ds = \frac{dq}{T} + ds_s$ , cioè otteniamo  $ds = ds_s \geq 0$ .

Si vede allora che l'entropia dei sistemi termodinamici isolati rispetto l'esterno aumenta sempre per le trasformazioni irreversibili.

L'entropia del sistema reale isolato cresce sempre!

Possiamo allora formulare la diseguaglianza di Clausius introducendo la quantità negativa che prende il nome di **traccia**

**termodinamica** e identifichiamo come:  $\tau = - \oint \frac{dq}{T} \geq 0$ .

Facciamo questo perchè dal punto di vista ingegneristico le quantità positive sono sempre più comode.

Si trova quindi che per trasformazioni reversibili rimane 0 mentre per le trasformazioni irreversibili rimane una traccia termodinamica maggiore di zero e maggiore è l'irreversibilità maggiore sarà la traccia.

Facciamo un'osservazione sulla diseguaglianza di Clausius e dimostriamo che viene negata se applicata ai cicli che non seguono il 2° principio della termodinamica.

cioè riferiamoci alla formulazione di Kelvin-Planck e consideriamo la sua negata cioè che si può sottrarre calore da una sorgente a temperatura T producendo solo lavoro.

Applicando la diseguaglianza di Clausius  $\oint \frac{dQ}{T} = \frac{Q}{T} > 0$  poiché  $Q > 0$ .

Mentre per una macchina che nega la formulazione di Clausius, cioè che sottrae  $Q_2$  a temperatura inferiore  $T_2$  per cederlo a temperatura superiore  $T_1$ . E applicando la diseguaglianza:  $\oint \frac{dQ}{T} = \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_2}{T_1} = Q_2 \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) > 0$  poichè

$$Q_2 > 0; \quad T_2 < T_1.$$

Infine vediamo come rappresentare nel diagramma  $T, s$  una qualsiasi trasformazione.

Abbiamo visto sempre solo diagrammi pressione-volume.

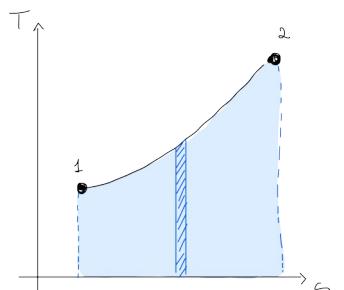
Poi abbiamo definito le grandezze derivate, finora energia interna, entropia, entalpia e queste possono essere utilizzate come variabili termodinamiche indipendenti anche se sono state ricavate come variabili termodinamiche dipendenti.

Riprendendo la relazione di prima  $dq = Tds - Tds_s$ .

Se la trasformazione è reversibile, cioè se  $ds_s = 0$  otteniamo che  $dq = Tds \rightarrow q = \int_1^2 T ds$ .

Allora nel diagramma  $T, s$  il calore scambiato è l'area sottesa alla trasformazione.

Posso allora utilizzare l'entropia per dare un'interpretazione all'area sottesa come il calore scambiato.



Ritorniamo alla definizione del **termine di produzione entropica**  $ds_s$  facendo una suddivisione in:

- Sorgenti entropiche di prima specie, quelle legate a cause di irreversibilità di 1° specie, cioè sono le differenze di pressione, le differenze di temperatura e gli attriti
- Sorgenti entropiche di seconda specie, legate alle cause di irreversibilità di 2° specie, cioè dovute a fenomeni elettrochimici come il grado di avanzamenti  $x_i$  della generica reazione chimica e il lavoro elettrico.

Cioè  $ds_s = ds_{sI}(\Delta p, \Delta T, \text{attriti}) + ds_{sII}(x_i, \ell_{el})$

### Cause di irreversibilità di 1° specie legate alla differenza finita di temperatura

Ricordiamo che  $ds = \frac{dq}{T} + ds_s$  e allora per calcolare  $ds_s$  devo considerare trasformazioni senza scambi di calore così che  $ds_s = ds$  ma  $ds$  lo so calcolare perché è una grandezza di stato e la calcolo lungo una trasformazione reversibile.

Consideriamo un corpo 1 di massa  $M_1$  e temperatura  $T_1$  e un corpo 2 con massa  $M_2$  e temperatura  $T_2$ , tali che  $\Delta T = T_1 - T_2 > 0$ . Sappiamo allora che c'è un passaggio di calore dal corpo 1 al corpo 2. Se questa trasformazione la faccio avvenire in un sistema isolato termicamente significa che posso considerare il calore scambiato all'esterno nullo. Allora  $ds = ds_{sI}(\Delta T)$ .

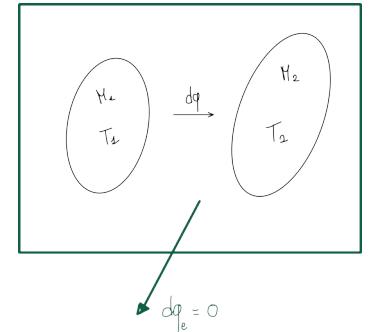
Così possiamo calcolare il termine di produzione entropica  $ds_{sI}(\Delta T)$  come se fosse una variazione di entropia.

$$\text{Calcoliamo allora (lungo una qualsiasi trasformazione reversibile)} \quad dS = M_1 ds_1 + M_2 ds_2 = M_1 \frac{dq_1}{T_1} + M_2 \frac{dq_2}{T_2}$$

Se vado a calcolare il calore scambiato tra il corpo 1 e 2, essendo il calore scambiato con l'esterno nullo, sarà tutto il calore trasmesso da un corpo all'altro e assumendo positivo quando assorbito da 2 sarà  $dq = -M_1 dq_1 = M_2 dq_2$ .

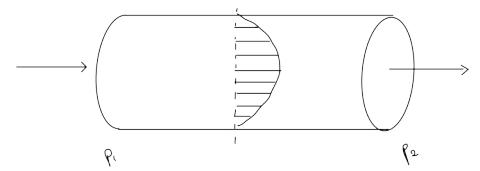
$$\text{Cioè otteniamo } dS = dq \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) = dS_{sI}(\Delta T) > 0, \text{ poiché } T_1 > T_2.$$

Ritorniamo allora alla condizione di irreversibilità secondo cui deve essere  $T_1 = T_2$  e infatti  $dS = ds_{sI}(\Delta T) = 0 \iff T_1 = T_2$  mentre se  $T_1 \neq T_2$  esiste una sorgente entropica che causa l'irreversibilità e si calcola come abbiamo trovato.



### Cause di irreversibilità di 1° specie legate a differenze di pressione e attrito

Dobbiamo innanzitutto definire l'**attrito** e consideriamo un fluido che scorre in un condotto da sx a dx in cui lo scorrimento è assicurato da un  $\Delta p$  tale che  $p_1 > p_2$  in regime stazionario. applicando il 1° principio della termodinamica per sistemi aperti tra due sezioni (considerando che tra le due sezioni non c'è lavoro, condotto orizzontale e stesse velocità) avremo che  $dq - d\mathcal{H}_f = dh + d\mathcal{E}_c + d\mathcal{E}_p$



Il fluido scorre ma  $p_1 > p_2$  e la differenza di pressione mantiene il fluido in moto e l'attrito presente mantiene la differenza di pressione e possiamo dire che l'attrito e la differenza di pressione sono legati tra loro e possiamo misurare l'attrito con la presenza di questa differenza di pressione.

$$\text{Sfruttiamo allora l'espressione dell'entalpia in funzione dell'entropia: } dq = dh = \underbrace{T ds}_{=dq+T ds_s} + v dp = dq + T ds_s + v dp$$

$$\text{Cioè otteniamo che } ds_{sI}(\Delta P) = -\frac{v dp}{T}.$$

Ritroviamo nuovamente la condizione di irreversibilità per cui deve essere  $p_1 = p_2$  e infatti  $ds_{sI}(\Delta p) = 0 \iff p_1 = p_2$ .

Se  $p_1 \neq p_2$  esiste una sorgente entropica che si calcola come abbiamo appena visto.

La definizione operativa di attrito la deremo solo quando diremo come si misura, ma per ora sappiamo che è legato ad una differenza finita di pressione.

## Cause di irreversibilità di 2° specie: fenomeni elettrochimici

Si intendono fenomeni con reazioni chimiche e passaggio di corrente, quindi lavoro elettrico.

Ricordiamo che dopo il 1° principio abbiamo espresso l'energia interna del sistema in funzione di:  $e_i = e_i(p, v, T, x_i, \ell_{el})$  dividendo i contributi in un'energia interna termodinamica (legata alle variabili termomeccaniche) e un energia interna di origine chimica e del lavoro elettrico scambiato, cioè  $de_i = du(p, v, T) + du_x(x_i, \ell_{el})$ .

In maniera molto semplice scriviamo il differenziale dell'energia interna di origine chimica, cioè

$$du_x = \left( \frac{\partial e_i}{\partial x_i} \right)_{p, v, T, \text{cost}} dx = X dx$$

Mentre la variazione di energia interna di origine chimica supponiamo sia dovuta a scambio di valore elettrico e dissipazione, ovvero a sorgenti entropiche, i segni saranno coerenti con quanto fatto nel caso dei termini termodinamici:

$$du_x = -d\ell_{el} - T ds_{II}$$

Vediamo un esempio:

Avendo una reazione chimica come una fiamma, reazione esotermica dove si brucia combustibile, cambia l'energia interna di origine chimica ma non c'è raccolta di lavoro elettrico e tutta la variazione di energia interna di origine chimica va in entropia.

In conclusione possiamo scrivere che  $ds_{II} = \frac{1}{T}(-du_x - dl_{el}) = -\frac{dl_{el}}{T} - \frac{x dX}{T}$  e questa espressione è conveniente da utilizzare per i **sistemi chiusi**.

Riferendoci invece all'entalpia, possiamo fare gli stessi ragionamenti, e si può parlare di un'entalpia totale  $dh_t = dh + dh_x$ , somma di una variazione di origine termodinamica e una variazione di origine chimica.

Possiamo scrivere il differenziale  $dh_x = \left( \frac{\partial h_t}{\partial x} \right)_{p, v, T, \text{cost}} dx = X' dx$

Nuovamente possiamo supporre che in parte sia legata al lavoro elettrico e in parte alla sorgente entropica di seconda specie, per cui:  $dh_x = -dl_{el} - T ds_{II}$  e quindi, in conclusione  $ds_{II} = -\frac{dl_{el}}{T} - \frac{X' dx}{T}$  (sistemi aperti).

# Trasformazioni irreversibili

## Sistemi chiusi

Sappiamo che il lavoro meccanico è  $p \, dv$  ma cosa succede quando la trasformazione diventa irreversibile ? partiamo dal 1° principio della termodinamica introducendo termini totali somma di lavoro meccanico e lavoro elettrico,  $dl_t = dl_m + dl_{el}$  e allora  $dq - dl_t = du_t + de_c + de_p$ .

In questa espressione devo sostituire le precedenti considerazioni e considerando che  $du_t$  è una grandezza di stato posso calcolarla lungo qualsiasi trasformazione e scelgo quella con  $de_c = de_p = 0$

Allora da  $du_t = dq - dl_t$  sostituisco sia  $du_t = du + du_x$  sia  $dq = Tds - Tds_s$  e allora ottengo

$$du + du_x = Tds - Tds_{sI} - Tds_{sII} - dl_m - dl_{el}$$

Ancora posso considerare  $du_x = -dl_{el} - Tds_{sII}$  e  $du = Tds - p \, dv$  da cui arrivo a

$$Tds - p \, dv - dl_{el} - Tds_{sII} = Tds - Tds_{sI} - Tds_{sII} - dl_m - dl_{el}$$

$$dl_m = p \, dv - Tds_{sI}$$

Si osservi che se la trasformazione fosse reversibile torna  $dl_m = p \, dv$ .

Il lavoro meccanico in presenza di irreversibilità sia di prima che seconda specie diminuisce della quantità  $Tds_{sI}$  della sorgente entropica di prima specie mentre al lavoro meccanico non interessa se ci sono o meno sorgenti entropiche di seconda specie.

Facciamo la stessa cosa per i

## Sistemi aperti

Partiamo dal primo principio  $dq - dl'_t = dh_t + de_c + de_p$  dove  $dl'_t = dl'_m + dl_{el}$  utilizzando sempre una trasformazione tale che  $de_c = de_p = 0$ .

Dalla definizione di entalpia possiamo scrivere che  $dh_t = dq - dl'_t$  dove  $dh_t = dh + dh_x$  e  $dq = Tds - Tds_s$ , cioè otteniamo  $dh + dh_x = Tds - Tds_{sI} - Tds_{sII} - dl'_m - dl_{el}$

e nuovamente possiamo sostituire  $dh = Tds + vdp$  e  $dh_x = -dl_{el} - Tds_{sII}$

E allora  $Tds - v \, dp - dl_{el} - Tds_{sII} = Tds - Tds_{sI} - Tds_{sII} - dl'_m - dl_{el}$  e in conclusione

$$dl'_m = -v \, dp - T \, ds_{sI}$$

Si osservi che se fosse reversibile si ha  $dl'_m = -v \, dp$

Nel caso di irreversibilità il lavoro meccanico è diminuito di una quantità  $T \, ds_{sI}$

**Oss.** Nel caso di sistema aperto se le trasformazioni sono reversibili il lavoro meccanico è  $dl'_m = -v \, dp$

E il lavoro sarà positivo se la pressione iniziale è minore di quella finale, cioè si ottiene lavoro positivo da un sistema aperto se la pressione del sistema termodinamico diminuisce dallo stato iniziale a quello finale.

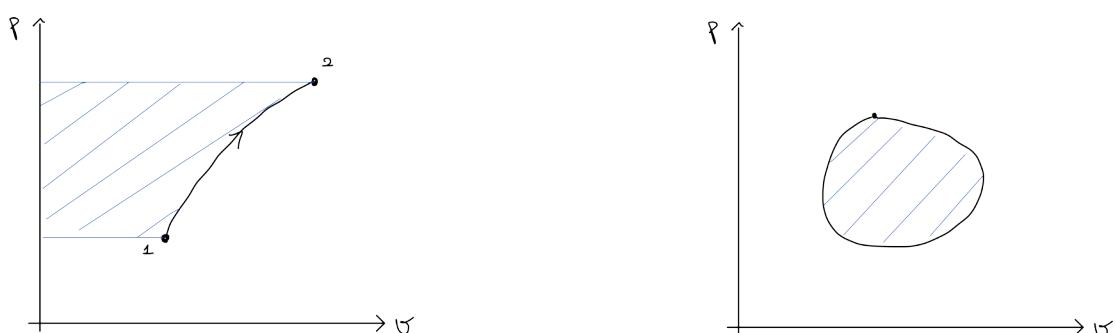
Se invece  $dp > 0$ , cioè se la pressione tra lo stato iniziale e quello finale aumenta, il lavoro è negativo. Questo significa che per far aumentare la pressione ad un fluido devo spendere lavoro.

Ottenerne lavoro meccanico positivo avviene a spese di una riduzione di pressione, ovvero un'espansione di un fluido.

Possiamo considerare  $l'_m = - \int_1^2 v \, dp = -v_{media}(p_2 - p_1) = v_{media}(p_1 - p_2)$

dove  $p_1, p_2$  sono rispettivamente la pressione di ingresso e uscita.

Vediamo l'interpretazione grafica del lavoro meccanico in un sistema aperto, essendo il lavoro  $-v \, dp$  è l'area sottesa rispetto la variabile  $p$ . Se la trasformazione è ciclica rimane comunque l'area racchiusa alla curva.



## Passiamo a vedere alcune applicazioni pratiche e come prima applicazione vediamo la macchina di Watt che chiamiamo Ciclo motore ( o ciclo diretto)

Nel senso che da lavoro positivo verso l'esterno, rappresentata con un sistema termodinamico che riceve calore  $Q_1$  e cede calore  $Q_2$  alla sorgente inferiore  $T_2$  e produce un lavoro  $L = Q_1 - Q_2$  positivo poiché verso l'esterno.

Introduciamo l'opposto della diseguaglianza di Clausius, cioè la traccia termodinamica

$$\tau = - \oint \frac{dq}{T} \text{ e allora avremmo che } \tau = -\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2}.$$

Ricordiamo il rendimento termodinamico  $\eta = \frac{L}{Q_1}$  possiamo metterlo in funzione delle variabili  $Q_1$  e

$$Q_2, \text{ cioè } \eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

A questo punto posso riscrivere  $\frac{\tau}{Q_1} = -\frac{1}{T_1} + \frac{Q_2}{Q_1} \frac{1}{T_2} \rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} + \frac{\tau}{Q_1} T_2$ .

Possiamo identificare il **rendimento del ciclo motore** (irreversibile)  $\eta = \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) - \frac{\tau T_2}{Q_1}$ .

Si osservi che il termine tra parentesi è il risultato ottenuto da Carnot sul limite del rendimento delle macchine termodinamiche e noi chiameremo questo rendimento il **rendimento di Carnot**. Allora possiamo scrivere generalmente  $\eta = \eta_c - f(\tau)$ .

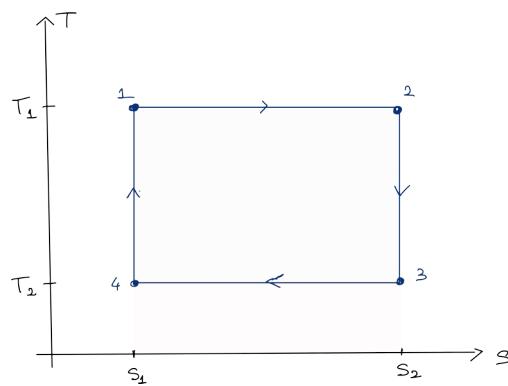
Abbiamo visto come la traccia termodinamica  $\tau \geq 0$  dove =0 solo per le trasformazioni reversibili.

$$\text{Allora per una trasformazione reversibile } \tau = 0 \implies \eta = \eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

## Macchina di Carnot

È una macchina reversibile che funziona tra due sorgenti  $T_1 > T_2$ . È composto di trasformazioni reversibili e quindi seguono le condizioni di reversibilità  $p_1 = p_2, T_1 = T_2$  e assenza d'attrito. Quindi quando il sistema scambia calore con la fiamma deve avere la temperatura della fiamma e avere la temperatura  $T_2$  quando cede il calore  $Q_2$ .

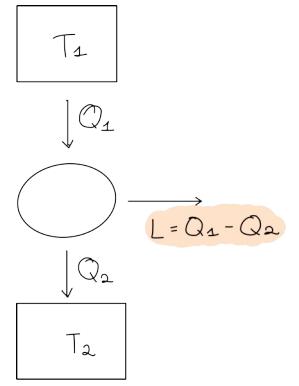
Rappresento il ciclo di Carnot su un diagramma  $T, s$  dove il sistema assorbe il calore  $Q_1$  andando da una entropia  $s_1$  ad una entropia  $s_2$  alla temperatura  $T_1$ . Quando invece cede il calore  $Q_2$  deve avere la temperatura  $T_2$ , da 3 a 4. Poi il sistema deve andare da 2 a 3 e da 4 a 1, ma abbiamo detto che le trasformazioni devono essere reversibili e che non devono esserci altre sorgenti allora deve per forza essere un adiabatica con una variazione di entropia nulla.  $dq = 0, ds = \frac{dq}{T} + ds = 0$ , isoentropica.



Si osservi che il calore  $Q_1$  è l'area sottesa dalla  $1 \rightarrow 2$  ed è positivo mentre il calore ceduto è l'area sottesa dalla  $3 \rightarrow 4$  ed è negativo. La loro differenza da il lavoro che è positivo poiché fatto dall'esterno.

Quindi una macchina di Carnot per compiere trasformazioni reversibili scambiando calore con due sole sorgenti deve compiere una trasformazione nel piano (T,s) di tipo rettangolare, con due isoterme e due isoentropiche.

Allora il ciclo di Carnot è solo una caso particolare dei cicli motore, cioè un ciclo motore che lavora tra 2 sorgenti in modo reversibile e quindi ha rendimento massimo  $\eta = \eta_c = -f(\tau)$



**Nota bene**

il rendimento di un ciclo termomeccanico massimo NON è 1 e infatti se  $\eta = \frac{L}{Q_1}$  ed essendo il lavoro ed il calore quantità non equivalenti poiché per il 2° principio non sono invertibili, abbiamo che  $\eta_{max} = \eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{L}{Q_1}$

$$\text{equivalenti poiché per il 2° principio non sono invertibili, abbiamo che } \eta_{max} = \eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{L}{Q_1}$$

Possiamo osservare che per aumentare il lavoro ottenuto possiamo variare le temperature, allora:

- $\eta_c \uparrow$  se  $T_2 \downarrow$  dove  $T_2$  è la temperatura dell'acqua di raffreddamento della macchina di Watt, il limite di questa è la temperatura dell'ambiente e allora  $T_{2,min} = T_a$
- $\eta_c \uparrow$  se  $T_1 \uparrow$  dove  $T_1$  era la temperatura della fiamma ed è rappresentata dal limite metallurgico dei metalli del braciere e della cisterna e allora  $T_{1,max} \approx 2000^\circ\text{C}$

**Ciclo inverso**

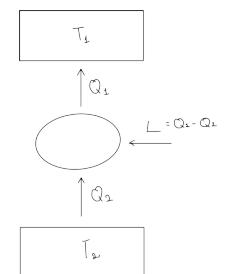
(Sistema chiuso)

Dove calorì e lavoro vanno nel verso opposto. Si chiama inverso poiché con questo ciclo si cede il calore  $Q_2$  alla sorgente inferiore per cedere calore  $Q_1$  alla sorgente inferiore utilizzando del lavoro meccanico  $L$ .

Possiamo chiamarlo:

- Ciclo frigorifero, per sottrarre il calore  $Q_2$  alla sorgente inferiore
- Pompa di calore, per cedere il calore  $Q_1$  alla sorgente superiore

Utilizziamo la traccia termodinamica  $\tau = - \oint \frac{dq}{T} = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2}$  dove possiamo calcolare i rendimenti



quando consideriamo un ciclo inverso con l'obiettivo di un ciclo frigorifero, cioè  $\eta_F = \frac{Q_2}{L}$ .

Cerchiamo una relazione tra il rendimento e la traccia termodinamica:

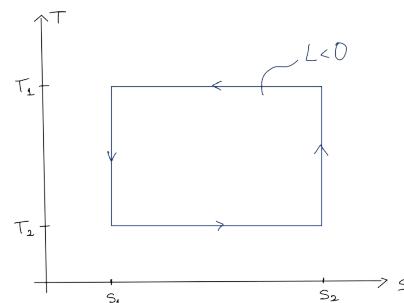
$$\frac{\tau}{L} = \frac{Q_1}{T_1 L} - \frac{Q_2}{T_2 L} = \frac{L + Q_2}{T_1 L} - \frac{Q_2}{T_2 L} = \frac{Q_2}{L} \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) + \frac{1}{T_1} = \frac{Q_2}{L} \cdot \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} + \frac{1}{T_1}$$

Inoltre abbiamo che  $\eta_F = \frac{Q_2}{L} = \left( \frac{\tau}{L} - \frac{1}{T_1} \right) \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1}$  e allora

$$\text{Il rendimento del ciclo frigorifero è } \eta_F = \frac{T_2}{T_1 - T_2} - \frac{\tau}{L} \cdot \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2}$$

Ci sono due termini, il primo funziona solo delle temperature e un secondo termine che contiene anche la traccia termodinamica e questo ci dice che se le trasformazioni sono **reversibili** ( $\tau = 0$ ) il ciclo inverso ha un rendimento massimo  $\eta_F = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$  e

questo prende il nome di **Ciclo di Carnot inverso** o *ciclo frigorifero reversibile*.



Per rappresentarlo sul diagramma (T,s) valgono le stesse condizioni fatte prima per la reversibilità e anche il diagramma del ciclo frigorifero è un rettangolo ma percorso in verso opposto.

Nuovamente il rendimento massimo non è 1 e ad esempio in casa per il frigorifero abbiamo 4°C contro 24°C con un rendimento di circa  $\eta_F = \frac{273 + 4}{20} = 14\eta_F = \frac{273 + 4}{20} = 14\eta_F = \frac{273 + 4}{20} = 14$ , può essere maggiore di 1.

Riscrivendo il rendimento come  $\eta_F = \frac{1}{T_1/T_2 - 1}$  si vede che:

- $\eta_F \uparrow$  se  $T_1 \downarrow$
- $\eta_F \uparrow$  se  $T_2 \uparrow$

Cioè si deve restringere il rettangolo.

Continuiamo a parlare di sistema inverso ma vediamo il sistema chiamato **pompa di calore** il cui obiettivo è la cessione di calore ad alta temperatura.

Vediamo il rendimento  $\eta_{PC} = \frac{Q_1}{L}$  e cerchiamo una relazione tra il rendimento e la traccia termodinamica,

$$\frac{\tau}{L} = \frac{Q_1}{LT_1} - \frac{Q_2}{LT_2} = \frac{Q_1}{LT_1} - \frac{Q_1 - L}{LT_2} = \frac{Q_1}{L} \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) + \frac{1}{T_2} = \frac{Q_1}{L} \cdot \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} + \frac{1}{T_2}$$

Allora abbiamo che  $\eta_{PC} = \frac{Q_1}{L} = -\frac{1}{T_2} \cdot \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} + \frac{\tau}{L} \cdot \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1}$  e allora

il **rendimento della pompa di calore** è  $\eta_{PC} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} - \frac{\tau}{L} \cdot \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2}$ ,

Anche qui è formato da un primo termine funzione solo delle temperature e un secondo termine dove c'è la traccia termodinamica.

Quindi per le trasformazioni **reversibili** dove  $\tau = 0$  il rendimento massimo sarà  $\eta_{PC} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}$ .

Nel riscaldamento invernale  $T_1=100^\circ\text{C}$  e  $T_2=0^\circ$  abbiamo che  $\eta_{PC} = \frac{373}{100} = 3,73$ .

Il diagramma della pompa di calore è lo stesso del frigorifero nel piano  $(T,s)$  e valgono tutti i ragionamenti compreso il modo di massimizzare il rendimento. Cambiano solo i valori numerici delle temperature.

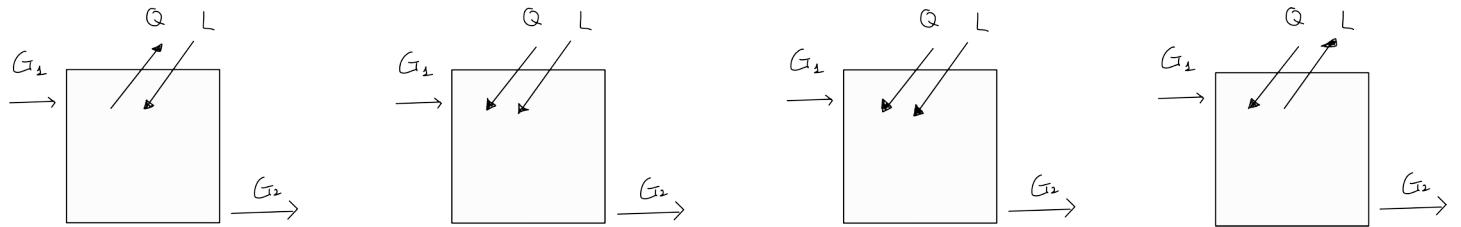
Analizzando i **sistemi chiusi** abbiamo visto come esistono soltanto due possibilità:

- Macchina di Watt per produrre lavoro positivo
- Ciclo inverso per produrre o assorbire calore

Passiamo allora ai

## Sistemi aperti

I sistemi aperti sono sistemi dove ci sono dei buchi nel contorno attraverso i quali entra ed esce massa e poi ci sono scambi di calore e lavoro. Rappresentiamo il contenitore in modo analogo e supponiamo di considerare una sola corrente entrante e una sola corrente uscente e vediamo che in assenza di reazioni chimiche possiamo avere queste quattro combinazioni:



Questi 4 tipi di sistemi aperti sono possibili anche con le reazioni chimiche.

Per i sistemi chiusi invece le reazioni chimiche non possono esserci altrimenti il sistema potrebbe fare un solo ciclo e alla fine al posto dei reagenti conterrà solo i prodotti della combustione non essendoci scambi di massa con l'esterno.

I sistemi aperti invece, avendo un flusso di massa, possono essere sia con che senza reazioni chimiche con le 4 combinazioni di  $Q$  ed  $L$ , allora i possibili schemi sono 8.

Tra i vari esempi abbiamo:

- Motore a combustione interna, è il 3° caso in presenza di reazioni chimiche dove  $G_1$  è la corrente d'aria e miscela entrante,  $G_2$  è la corrente dei prodotti di combustione e la reazione chimica è esotermica quindi cede calore all'estero oltre a compiere lavoro
- Mulino, è il 3° caso senza reazioni chimici

Se consideriamo anche il lavoro elettrico avremo tutti i motori reali.

## Espansore

È un sistema aperto che compie lavoro verso l'esterno a spese di una diminuzione di pressione.

Ad esempio, il **motore di un aereo**,

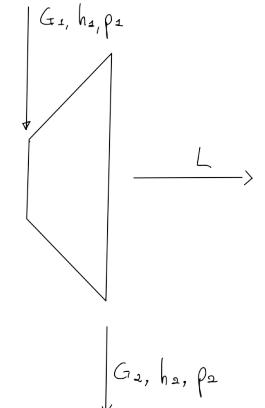
Nella simbologia meccanica l'espansione si rappresenta come un trapezio (isoscele) dove si fa entrare il fluido dalla sezione più piccola e si fa uscire dalla sezione più grande, è una **turbina**. Si associa l'aumento di sezione alla diminuzione di pressione, il risultato è un lavoro positivo come la rotazione dell'albero della turbina.

Applichiamo il principio di conservazione della massa a regime stazionario  $G_1 = G_2$  e poi la conservazione dell'energia (1° principio termodinamico) abbiamo che  $q - l_f = \Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p$  dove studiamo il caso limite in cui riusciamo ad annullare il calore perso verso l'esterno e supponiamo anche di riuscire a trascurare energia cinetica e potenziale.

Cioè si ottiene  $l_f = h_1 - h_2$ , cioè il lavoro ottenuto è la differenza tra l'entalpia entrante e l'entalpia uscente.

Lo chiamiamo espansore poiché la pressione  $p_1 > p_2$ .

Moltiplicando per la portata otteniamo la **potenza meccanica**  $P = l_f \cdot G = G(h_1 - h_2) > 0$ .



Nella realtà questa differenza può esser calcolata sia lungo una trasformazione reversibile che irreversibile e allora definiamo il **rendimento isoentropico dell'espansore** il rapporto  $\eta_e = \frac{\ell_{\text{reale}}}{\ell_{\text{ideale}}} = \frac{(h_1 - h_2)}{(h_1 - h_2)_s}$  dove il pedice  $s$  indica che viene calcolato lungo una trasformazione isoentropica.

**N.B.** In questo caso il limite superiore è uguale ad 1 e lo è quando la trasformazione è effettivamente reversibile. Adesso viene 1 perché dividiamo due quantità omogenee tra loro, entrambe sono un  $\Delta h$ , mentre negli altri casi abbiamo diviso  $L/Q$  cioè due quantità qualitativamente diverse.

Abbiamo visto il rendimento dell'espansore e, in base alla definizione di potenza, possiamo scrivere  $\eta_e = \frac{P_{\text{reale}}}{G_{\text{reale}}} \cdot \frac{G_{\text{ideale}}}{P_{\text{reale}}} \leq 1$

Se consideriamo due macchine di cui funziona in modo ideale e l'altra in modo irreversibile o reale supponiamo che esse abbiano la stessa potenza:

- Se  $P_{\text{re}} = P_i \implies G_i \leq G_{\text{re}}$ , cioè se vogliamo produrre la stessa potenza meccanica la macchina reale deve avere una portata superiore

- Se  $G_{re} = G_i \implies P_{re} \leq P_i$ , se immettiamo la stessa portata la potenza della macchina reale è inferiore a quella della potenza della macchina ideale.

## Compressore

L'obiettivo è ottenere un fluido con una pressione maggiore e si ricordi che se  $dP$  è positivo il meno davanti lo rende negativo per cui il lavoro deve essere dato per ottenere un aumento di pressione.

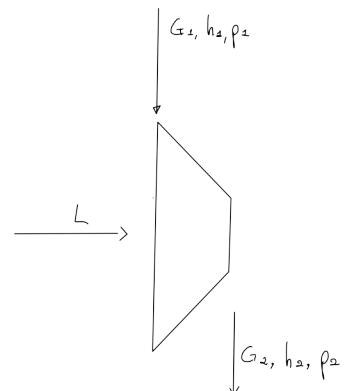
Utilizzando le stesse espressioni dell'espansore si ottiene  $l_f = h_1 - h_2 < 0$  per cui l'entalpia all'ingresso è minore dell'entalpia del fluido all'uscita.

Anche per la potenza si ottiene  $P = l_f \cdot G_1 = G(h_1 - h_2) < 0$ .

Anche qui possiamo calcolare il **rendimento isoentropico del compressore**, pari al reciproco di prima,  $\eta_c = \frac{\ell_{\text{idela}}}{\ell_{\text{reale}}} = \frac{(h_1 - h_2)_s}{(h_1 - h_2)} \leq 1$ , dove il pedice  $s$  indica che viene calcolato lungo una trasformazione isoentropica.

Anche qui possiamo dire che  $\eta_c = \frac{P_{id}}{G_{id}} \cdot \frac{G_{re}}{P_{re}} \leq 1$  e concludere che:

- Se  $P_{re} = P_{id} \implies G_{re} \leq G_{id}$ , se forniamo la stessa potenza riusciamo a comprimere una portata inferiore di fluido con la macchina reale rispetto quella ideale
- Se  $G_{re} = G_{id} \implies P_{id} \leq P_{re}$ , a parità di portata la potenza nel caso reale è maggiore di quella nel caso ideale



## Valvola di laminazione

O rubinetto.

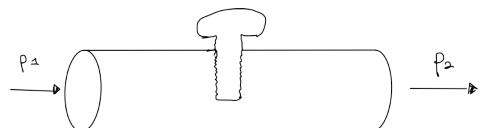
Si consideri un fluido che attraversa un tubo e un rubinetto che lo chiude. Quando la vite arriva in fondo non passa il fluido mentre quanto è tutto aperto massa la massima portata di fluido. È un condotto con un restringimento di pressione, ad esempio per un esempio medico possiamo considerare la stenosi.

Si rappresenta con una valvola a farfalla e la vite sopra.

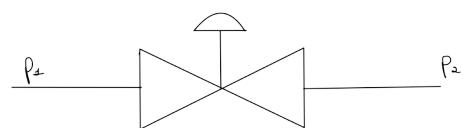
Serve semplicemente ad aumentare/diminuire la portata da una zona a pressione maggiore  $p_1$  ad una zona a pressione minore  $p_2$ .

Applicando il primo principio della termodinamica, abbiamo che

$\mathcal{H} - \mathcal{H}_f = \Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p$  dove supponiamo non ci sia scambio di calore e lavoro, che il condotto sia orizzontale e che il fluido sia incompressibile tale che essendo la sezione uguale sia uguale anche la velocità e quindi energia cinetica nulla. Cioè  $\Delta h = 0 \implies h_1 = h_2$ .



Questo NON significa che sia isoentalpica poiché con isoentalpica si intende una trasformazione reversibile in cui l'entalpia è uguale in tutti i punti mentre questa è una trasformazione irreversibile in cui l'entalpia della sezione d'ingresso è uguale a quella d'uscita e non si può dire niente dello stato nel fluido nelle sezioni intermedie.



## Tubo di efflusso

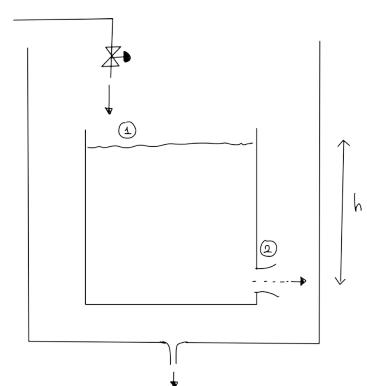
Cioè l'esperienza di Torricelli, la velocità di un fluido che esce da un contenitore in cui il fluido raggiunge un livello  $h$ . Lasciando aperta la valvola di laminazione il liquido arriva fino al livello 1 e poi esce (troppo pieno) e in questo modo manteniamo il livello del fluido. Possiamo dire che a regime stazionario  $h = z_1 - z_2$  differenza tra il livello del fluido e il baricentro della sezione d'uscita.

In base al ragionamento di Torricelli  $\frac{w^2}{2g} = h \implies w = \sqrt{2gh}$  la velocità del fluido è la stessa di un corpo che cade da un'altezza  $h$ .

Possiamo ricavare la stessa relazione con il 1° principio della termodinamica facendo riferimento al sistema termodinamico costituito dal recipiente con sezione di ingresso 1 e di uscita 2, supponiamo sempre il calore scambiato nullo, e non essendoci lavoro, abbiamo che  $\mathcal{H} - \mathcal{H}_f = \Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p$

Dove possiamo dire che  $\cancel{h_2} - \cancel{h_1} = \frac{w_2 - w_1}{2} + g(z_2 - z_1) = 0$  dove supponiamo che lo

stato termodinamico sia lo stesso (i.e. stessa temperatura e pressioni quasi uguali). Se la sezione di ingresso è molto più grande di quella di uscita si può trascurare la sua energia cinetica e ritroviamo la relazione di Torricelli  $w_2 = \sqrt{2gh}$ .



# Generalizzazione dei sistemi aperti

Nei casi precedenti abbiamo considerato soltanto la presenza di una corrente entrante e una uscente e supponiamo ci siano  $m$  correnti entranti e  $n$  correnti uscenti e gli scambi di calore e lavoro.

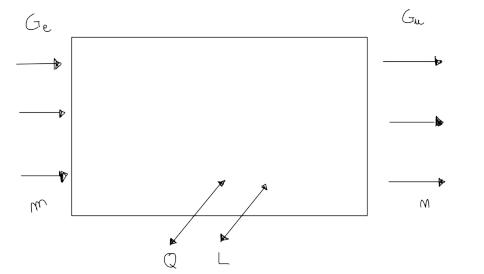
Generalizzando il principio di conservazione della massa:  $\sum_{e=1}^m G_e = \sum_{u=1}^n G_u$

Generalizzando il 1° principio della termodinamica consideriamo quello per una sola sezione di ingresso e di uscita e moltiplichiamo tutto per  $G = G_1 = G_2$ , cioè

$$q - l_f = h_2 - h_1 + e_{c2} - e_{c1} + e_{p2} - e_{p1} \longrightarrow \dot{Q} - P_f = G_2 h_2 - G_1 h_1 + G_2(e_{c2} - e_{p2}) + G_1(e_{c2} - e_{p1}) = G_2(h_2 + e_{c2} + e_{p2}) - G_1(h_1 + e_{c1} + e_{p1})$$

dove è convenzione che la quantità  $\dot{Q}$  con il puntino indica una quantità per unità di massa.

Allora possiamo concludere che  $\dot{Q} - P_f = \sum_{u=1}^n G_u (h_u + e_{cu} + e_{pu}) - \sum_{e=1}^m G_e (h_e + e_{ce} + e_{pe})$ .



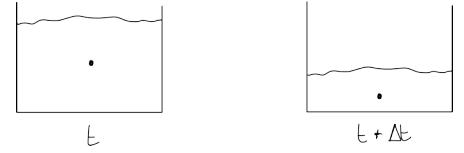
## Regime non stazionario

Nel regime non stazionario la massa del sistema non rimane più costante nel tempo e si vede come varia il baricentro.

Allora per generalizzare il principio di conservazione della massa dobbiamo considerare la variazione della massa nel tempo

$$\sum_{e=1}^m G_e - \sum_{u=1}^n G_u = \frac{dM}{dT} = \frac{M_f - M_i}{\Delta t}$$

Ovviamente se  $\sum_e G_e > \sum_u G_u$ ,  $\frac{dM}{dT} > 0$  e la massa cresce nel tempo, mentre se  $\sum_e G_e < \sum_u G_u$ ,  $\frac{dM}{dT} < 0$  e la massa diminuisce nel tempo.



Passando al 1° principio della termodinamica moltiplichiamo l'equazione per  $\Delta t$ , cioè per l'intervallo di tempo che vogliamo studiare, cioè otteniamo  $Q - L_f = \sum_u G_u \Delta t (h_u + e_{cu} + e_{pu}) - \sum_e G_e \Delta t (h_e + e_{ce} + e_{pe}) + \bigcirc$  dove  $\sum_i G_i \Delta t$

rappresenta la massa entrata/uscita nell'intervallo di tempo.

Questo era quanto presente nel caso stazionario che in questo caso NON è sufficiente e bisogna tener conto anche delle variazioni delle proprietà fisiche della massa ai diversi instanti di tempo.

Ai due termini a destra dobbiamo sommare lo stato della massa di fluido all'istante  $t$  e all'istante  $t + \Delta t$ .

Cioè  $Q - L_f = \sum_u G_u \Delta t (h_u + e_{cu} + e_{pu}) - \sum_e G_e \Delta t (h_e + e_{ce} + e_{pe}) + M_f e_{tf} - M_i e_{ti}$  dobbiamo considerare la massa moltiplicata per l'energia totale sia nello stato finale che in quello iniziale.

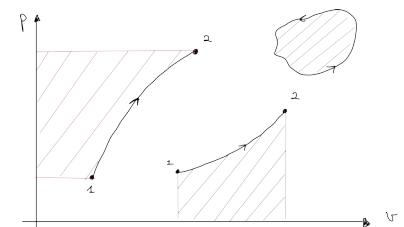
giovedì 1 ottobre 2020 - Lezione 6

## Rappresentazioni termodinamiche sui diagrammi termodinamici

### Diagramma pressione - volume specifico

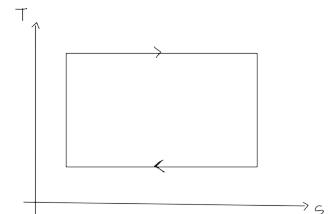
Dove la trasformazione 1-2 compiuta da un sistema chiuso ha come rappresentazione del lavoro l'area sottesa alla curva mentre per un sistema aperto il lavoro è rappresentato dall'area rispetto l'asse p.

Sia per un sistema aperto sia chiuso se la trasformazione è ciclica il lavoro è l'area racchiusa dalla curva.



### Diagramma TS temperatura - entropia

L'abbiamo usato per rappresentare il ciclo motore reversibile o ciclo di Carnot dove l'area sottesa da ogni trasformazione con l'asse s rappresenta il calore scambiato. Ciclo motore diretto se percorso in senso orario e produce lavoro positivo mentre se percorso in senso antiorario il ciclo è inverso e si può comportare come un ciclo frigorifero o come una pompa di calore. Le isoterme sono le linee orizzontali mentre le isoentropiche delle linee verticali.



Questo diagramma permette di rappresentare le trasformazioni **isobare** e cerchiamo il differenziale dell'entalpia, funzione di T e p,

$$\text{facendone il differenziale esatto: } dh = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_P dT + \left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T dp.$$

Ricordiamo che  $dh = Tds + v dp$ .

Stiamo parlando di isobare quindi abbiamo che  $dp = 0$  e allora

$$dh = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_P dT = c_p dT = T ds$$

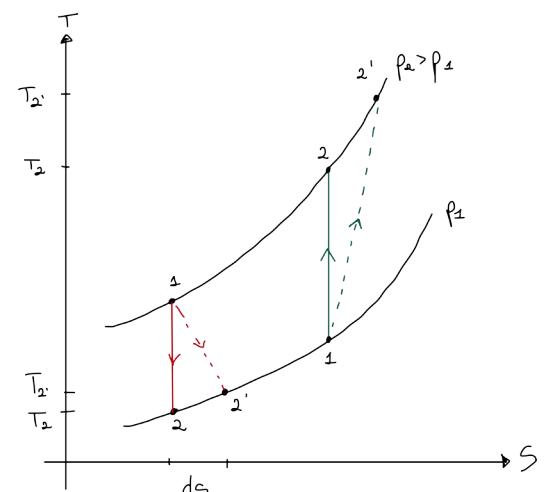
dove  $\left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_P = c_p$  che prende il nome di **calore specifico isobaro** ed

è misurabile con sufficiente approssimazione.

Scrivendo correttamente l'espressione dal punto di vista analitico, abbiamo

$$\text{che } \left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_P = \frac{T}{c_p} > 0 \text{ essendo } T > 0, c_p > 0.$$

Dove  $\left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_P$  rappresenta la pendenza di un'isobara nel piano TS.



**Oss.** Supponendo  $c_p$  costante dall'espressione precedente la pendenza cresce all'aumentare della temperatura e quindi la curva è una curva con concavità verso l'alto.

Non possiamo dimostrare però cosa accade all'isobara aumentando la pressione ma dimostreremo che se l'isobara  $p_2$  è fatta ad una pressione maggiore la curva starà sopra.

Possiamo rappresentare nel diagramma Ts le trasformazioni compiute da un **espansore**. Abbiamo visto come il fluido si espande ad una pressione inferiore per cui supponiamo il punto di ingresso sia 1 (in **rosso**). Se l'espansione è adiabatica e reversibile sarà anche isoentropica per cui la trasformazione è la verticale  $1 \rightarrow 2$  ma nella realtà sappiamo che sono presenti le sorgenti entropiche per cui il punto reale di uscita sarà un punto con entropia maggiore, cioè la trasformazione  $1 \rightarrow 2'$

In modo analogo il **compressore** ha un fluido in ingresso con pressione inferiore e dandogli del lavoro la pressione aumenta. (In **verde**) se è reversibile sarà una retta verticale  $1 \rightarrow 2$  altrimenti, se reale, sarà  $1 \rightarrow 2'$ .

### Diagramma hs, entalpia-entropia

Partiamo dal differenziale di  $h$  funzione di  $p$  ed  $s$ .

$$\text{Cioè } dh = \left( \frac{\partial h}{\partial s} \right)_p ds + \left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_s dp$$

e ricordiamo che  $dh = T ds + v dp$

e allora possiamo trasformazioni isobare per cui  $dp = 0$  e allora

$$dh = \left( \frac{\partial h}{\partial s} \right)_P ds = T ds, \text{ cioè } \left( \frac{\partial h}{\partial s} \right)_P = T > 0 \text{ essendo } T > 0.$$

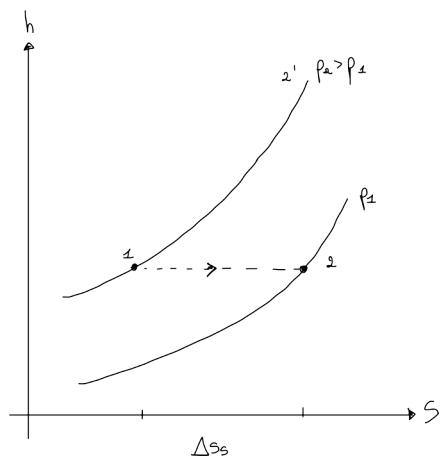
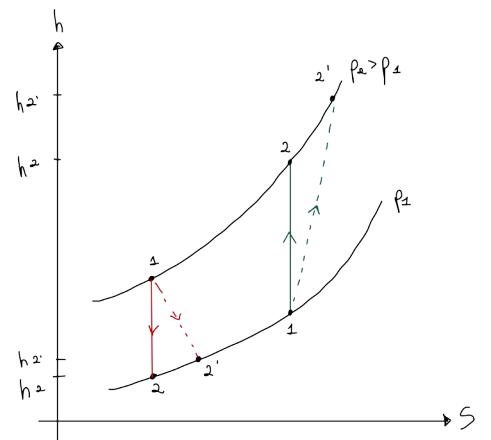
Allora abbiamo trovato la pendenza di un'isobara nel piano hs.

Possiamo osservare che all'aumentare della temperatura che si riflette su un aumento di pressione andando verso punti di entalpia maggiore otteniamo delle curve con pendenza maggiore. L'isobara è quindi una curva con concavità verso l'alto.

Rappresentiamo allora l'**espansore** (in rosso) in cui si entra con un'entalpia maggiore e si esce con un'entalpia minore e se la trasformazione è reversibile essendo adiabatica sarà isoentropica sarà una retta verticale altrimenti se è reale sarà il punto finale sarà 2'.

Per un **compressore** (in verde) l'ingresso è alla pressione inferiore e comprimo alla pressione superiore, se reversibile sarà la linea verticale altrimenti il punto finale sarà il punto 2'.

Il diagramma hs si presta anche la rappresentazione della trasformazione irreversibile che avviene in una **valvola di laminazione** dove la trasformazione è irreversibile (si sposta da una zona a pressione maggiore ad una a pressione minore) in cui l'entalpia finale è uguale a quella iniziale. Quindi questa trasformazione sarà rappresentata da una linea orizzontale tratteggiata perché irreversibile.



# Proprietà delle sostanze

Le proprietà delle sostanze sono legate alle variabili termodinamiche e la cosa straordinaria che possiamo fare derivate parziali come fossero funzioni analitiche qualsiasi e poi nella termodinamica classica si trova che le derivate parziali sono quantità misurabili e che si possono mettere in relazione con altre proprietà fisiche.

Partiamo dalla conoscenza di una relazione tra volume specifico e pressione e temperatura, cioè la **funzione di stato** di una sostanza  $v = v(T, p)$ .

Facciamone il differenziale esatto poiché essa è una funzione di stato:  $dv = \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T dp$ .

Quindi in termini finiti la quantità  $\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$  è una quantità misurabile, ad esempio do una quantità di calore e misuro la variazione di temperatura e volume specifico a pressione costante.

Questo parametro rapportato al volume specifico si chiama **coefficiente di dilatazione isobaro**  $\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \cdot \frac{1}{v} = \beta$ .

Naturalmente per ogni sostanza va misurato e tabellato.

Analogamente in termini finiti  $\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T$  rappresenta una quantità misurabile. Do una variazione di pressione a temperatura costante

e misuro la variazione di volume. Rapportato a  $v$  e con il segno meno (aumentando la pressione solitamente diminuisce il volume specifico) viene fuori il **coefficiente di compressione isotermica**  $\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T \cdot \left(-\frac{1}{v}\right) = \gamma$ .

Rappresentando l'espressione di prima generica  $dv = \beta v dT - \gamma v dp$  e quindi conoscendo questi valori è possibile relazionare la variazione di volume alla variazione di pressione e temperatura.

Inoltre se la sezione rimane costante spesso si utilizza il **coefficiente di dilatazione lineare**  $\frac{1}{x} \left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_P = \alpha$

Definiamo il

## Calore specifico

Dove si intende il rapporto  $c = \frac{dq}{dT}$  che non è una grandezza funzione di stato poiché  $dq$  non è un differenziale esatto e quindi dipende dalla trasformazione.

Per esempio se la trasformazione è adiabatica  $dq = 0$  e allora  $c = 0$ .

Per un'isotermia dove c'è uno scambio di calore  $dq \neq 0$  (cioè i passi di stato) c'è per  $dT = 0$  e allora  $c = \pm \infty$   
Il calore specifico può assumere qualunque valore.

Prendiamo il 1° principio della termodinamica per i sistemi chiusi  $dq - dl = du + de_c + de_p$  ed esprimiamolo in funzione di  $du = dq - dl - \cancel{de}_c - \cancel{de}_p$  e scegliamo quindi una trasformazione di comodo per semplificare qualche termine.

Prendiamo una trasformazione reversibile per cui  $dl = p dv$  e allora  $du = dq - p dv$ .

Posso ricavare  $dq = du + p dv$ .

Allora posso metterlo nell'espressione generica del calore specifico  $c = \frac{dq}{dT} = \frac{du}{dT} + p \frac{dv}{dT}$ .

Supponiamo poi che  $u$  sia funzione di  $T, v$  e faccio il differenziale esatto per cui:  $du = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T dv$

Divido per  $dT$  e allora  $\frac{du}{dT} = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T \frac{dv}{dT}$

Quindi sostituendo nell'espressione del calore specifico trovo  $c = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v + \left[p + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T\right] \frac{dv}{dT}$

Nuovamente possiamo moltiplicare per  $dT$  e otteniamo  $dq = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT + \left[p + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T\right] dv$  ← calore scambiato

Osserviamo che se la trasformazione è un'**isocora** cioè  $v = \text{cost}$  allora  $c = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v = c_v$ , **calore specifico a volume costante**.

Definizione operativa: se  $dv = 0 \rightarrow dq = c_v dT$  allora  $c_v = \frac{dq}{dT} \Big|_v = \frac{q}{\Delta T} \Big|_v$  essendo quantità piccole ma finite.

Metto il gas in un recipiente chiuso senza aperture dove il volume specifico sarà costante. Do una certa quantità di calore (ad esempio con una resistenza) e misuro la variazione di temperatura.

Se invece considero una trasformazione **isoterma** cioè  $T = \text{cost} \Rightarrow dT = 0$  posso dire che

$$dq = \left[ p + \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T \right] dv = c_d dv \text{ che prende il nome di } \text{calore specifico di dilatazione isoterma}: c_d = p + \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T.$$

Definizione operativa: abbiamo visto che  $dT = 0 \rightarrow dq = C_d dv \Rightarrow c_d = \frac{dq}{dv} \Big|_T = \frac{q}{\Delta v} \Big|_T =$

Metto un gas in un recipiente e fornisco una certa quantità di calore e misuro la variazione di volume a temperatura costante per cui la quantità di calore deve essere abbastanza piccola da non far variare la temperatura.

Per le sostanze che non cambiano di stato la determinazione del  $c_d$  è abbastanza difficile mentre se ho un cambiamento di stato la temperatura rimane costante e posso misurare più facilmente.

Quindi abbiamo trovato le espressi del calore specifico per i sistemi chiusi  $c = c_v + c_d \frac{dv}{dT}$  mentre il calore

$$dq = c_d dT + c_d dv.$$

Applichiamo lo stesso ragionamento ai **sistemi aperti** partendo dal 1° principio:  $dq - dl_f = dh + de_c + de_p$  e consideriamo nulle le variazioni di energia cinetica e potenziale, allora  $dh = dq - dl_f - de_c - de_p$  e il lavoro come quello scambiato lungo trasformazioni reversibili  $dl_f = -v dp$ .

Cioè  $dh = dq + vdp$  ovvero  $dq = -v dp$

$$\text{Ritornando all'espressione del calore specifico abbiamo che } c = \frac{dq}{dT} = \frac{dh}{dT} - v \frac{dp}{dT}.$$

Supponendo  $h = h(T, p)$  possiamo farne il differenziale esatto  $dh = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T dp$  e ne calcoliamo la derivata

$$(\text{dividiamo per } dT) \quad \frac{dh}{dT} = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dT}.$$

Possiamo allora sostituire nell'espressione del calore specifico e troviamo  $c = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p + \left[\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T - v\right] \frac{dp}{dT}$ .

$$\text{In conclusione possiamo moltiplicare per } dT \text{ e trovare } dq = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT + \left[\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T - v\right] dp$$

Se considero trasformazioni **isobare**  $dp = 0$  e allora rimane soltanto  $c = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p = c_p$  che prende il nome di **calore specifico a pressione costante**.

Definizione operativa: abbiamo  $dp = 0 \rightarrow dq = c_p dt$  e allora  $c_p = \frac{dq}{dT} \Big|_p = \frac{q}{\Delta T} \Big|_p$ . Il sistema aperto deve scorrere a

pressione costante allora gli do una certa quantità di calore e misuro la variazione di temperatura.

Consideriamo invece trasformazioni **isoterme** abbiamo che  $dq = \left[\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T - v\right] dp = c_c dp$  dove  $c_c = \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T - v$  prende il nome di **calore specifico di comprimibilità isotermia**.

Definizione operativa: se  $dT = 0 \rightarrow dq = c_c dp$  allora abbiamo che  $c_c = \frac{dq}{dp} \Big|_T$  ma questo non è facilmente calcolabile ma lo posso calcolare solo nei passaggi di stato.

Cioè abbiamo trovato le espressioni per il calore  $q = dT + c_c dp$  e del calore specifico  $c = c_p + c_c \frac{dp}{dT}$  per i sistemi aperti.

In conclusione abbiamo 4 calori specifici:

- $c_v, c_p$  facilmente misurabili e alcuni valori sono tabellati
- $c_c, c_d$  difficilmente misurabili sperimentalmente (tranne nei casi dei cambiamenti di stato).

Allora si cerca di mettere in relazione analitica i calori specifici  $c_c$  e  $c_d$

## Equazioni di Maxwell (termodinamiche)

Dobbiamo però introdurre due nuove grandezze:

- $e_u = u - Ts$ , **energia libera** (funzione di Gibbs)
- $e_h = h - Ts$ , **entalpia libera** (funzione di Helmotz)

Entrambe sono grandezze funzioni di stato e quindi possiamo farne il differenziale

- $de_u = du - Tds - sdT$  e sostituendo  $du = Tds - pdv$  abbiamo che  $de_u = -p dv - s dT$
- $de_h = dh - Tds - sdT$  dove sostituisco  $dh = Tds + vdp$  e ottengo  $de_h = v dp - s dT$

Nel caso di passaggi di stato, cioè trasformazioni  $T = \text{cost}$ ,  $p = \text{cost}$  sono nulli  $dT = dp = 0$  e quindi  $de_h = 0$ , l'entalpia libera o funzione di Helmotz rimane costante.

Nel caso di una trasformazione isoterma,  $dT = 0$  ho che  $de_u = -p dv$  cioè la variazione di energia libera è meno il lavoro scambiato da un sistema chiuso:  $p dv = -de_u \rightarrow \int_1^2 p dv = l_{21} = e_{u1} - e_{u2}$

In questo modo possiamo ricondurre il calcolo del lavoro in un sistema chiuso (che non è una grandezza funzione di stato) alla variazione di una grandezza di stato.

Ricordiamo il teorema **dei differenziali esatti** o di Schwartz: se  $dz = Xdx + Ydy$  ed è un differenziale esatto si può scrivere che  $\frac{\partial X}{\partial y} \Big|_x = \frac{\partial Y}{\partial x} \Big|_y$ .

Applichiamo allora questo teorema all'energia libera  $de_u$ , all'entalpia libera  $de_h$ , all'energia interna  $du$  e all'entalpia  $dh$ , otteniamo le **4 equazioni di Maxwell**:

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v &= -\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T \\ \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p &= -\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \\ \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s &= -\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_v \\ \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s &= \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p \end{aligned}$$

Cerchiamo allora delle espressioni per  $c_d$  e  $c_c$  calcolabili analiticamente.

Partiamo del differenziale dell'entropia e sostituiamo l'espressione di  $dq$  per i sistemi chiusi, cioè  $ds = \frac{dq}{T} = \frac{c_v}{T}dT + \frac{c_d}{T}dv$ .

Inoltre possiamo fare il differenziale rispetto a  $T$  e  $v$ , cioè  $ds(T, v) = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T dv$ .

Consideriamo delle trasformazioni **isocore** in cui  $dv = 0$  otteniamo che  $ds = \frac{c_v}{T}dT = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v dT$  cioè abbiamo ottenuto

$c_v = T \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v$ , abbiamo trovato un modo diverso di calcolare analiticamente il calore specifico a volume costante (tuttavia si determina facilmente anche in modo sperimentale).

Invece per le trasformazioni **isoterme** abbiamo che  $dT = 0$  otteniamo che  $ds = \frac{c_d}{T} dV = \left( \frac{\partial s}{\partial v} \right)_T dV$  e allora

$c_d = T \left( \frac{\partial s}{\partial v} \right)_T$  e allora per la 1° equazione di Maxwell abbiamo  $c_d = T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v$  e in questo modo conoscendo l'equazione di stato posso calcolare la variazione della pressione rispetto la temperatura e calcolare il calore specifico di dilatazione isoterma.

Considerando invece i sistemi aperti posso ricavare sempre il differenziale dell'entropia  $ds = \frac{dq}{dT} = \frac{c_p}{T} dT + \frac{c_c}{T} dp$  e fare il differenziale esatto  $ds(p, T) = \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_p dT + \left( \frac{\partial s}{\partial p} \right)_T dp$ .

Per le trasformazioni **isobare** cioè  $dp = 0$  rimangono i termini  $ds = \frac{c_p}{T} dT = \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_p dT$  e allora trovo  $c_p = T \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_p$  (tuttavia conviene sempre misurarlo sperimentalmente).

Invece per trasformazioni **isoterme**  $dT = 0$  rimangono i termini  $ds = \frac{c_c}{T} dP = \left( \frac{\partial s}{\partial P} \right)_T dP$  cioè trovo  $c_c = T \left( \frac{\partial s}{\partial P} \right)_T$  e dalla 2° equazione di Maxwell posso concludere che  $c_c = -T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_P$ .

In questo modo posso ottenere analiticamente  $c_c$  conoscendo l'equazione di stato della sostanza e facendone la derivata parziale.

In conclusione possiamo considerare questi risultati nelle espressioni più generali possibili, cioè:

### SISTEMI CHIUSI

$$1. dq = c_v dT + T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dv$$

$$2. du = c_v dT + \left[ T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - p \right] dv$$

$$3. ds = \frac{c_v}{T} dT + \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dv$$

### SISTEMI APERTI

$$4. dq = c_p dT - T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dp$$

$$5. dh = c_p dT + \left[ v - T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right] dp$$

$$6. ds = \frac{c_p}{T} dT - \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dp$$

Dopo aver ricavato queste espressioni che sono le più generali possibili della termodinamica ottenibili con questo tipo di analisi, ritorniamo ai diagrammi termodinamici che ci consentono di giustificare diverse assunzioni.

### Diagramma Ts

Dimostriamo che nel diagramma Ts l'isobara a  $p_2 > p_1$  sta sopra a  $p_1$

Consideriamo la sesta equazione e se la trasformazione è isoentropica  $ds = 0$  avremmo che  $\frac{c_p}{T} dT = \underbrace{\left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dp}_{v\beta}$  e allora

avremmo che  $\frac{dT}{dP} = \frac{v\beta T}{c_p} > 0$  essendo tutte quantità positive.

Allora muovendosi lungo un'isoentropica ad un aumento di temperatura corrisponde un aumento di pressione.

Dimostriamo che la pendenza dell'isocora è maggiore della pendenza dell'isobara.

Consideriamo la terza espressione e se la trasformazione è isocora  $dv = 0$  e allora

$ds = \frac{c_v}{T} dT$  allora abbiamo che  $\frac{dT}{ds} \Big|_v = \frac{T}{c_v} \Big|_v$  abbiamo quindi trovato la pendenza

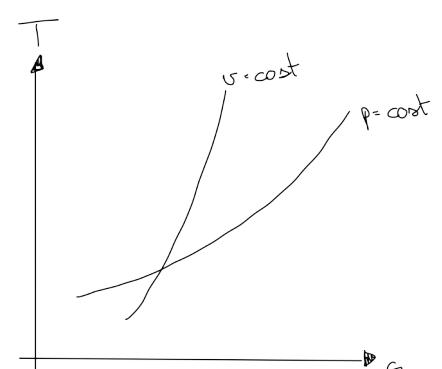
di un'isocora sul piano Ts.

Mentre se consideriamo la sesta espressione per un'isobara abbiamo  $dp = 0$  e allora

$ds = \frac{c_p}{T} dT$  da cui si ricava  $\frac{dT}{ds} \Big|_p = \frac{T}{c_p} \Big|_p$  abbiamo quindi trovato la pendenza di

un'isobara sul piano Ts.

E poiché abbiamo che  $c_p > c_v$  (come dimostreremo) la pendenza dell'isobare è minore dell'isocora!



# Relazioni tra $C_p$ e $C_v$

Quindi possiamo identificare le relazioni tra  $c_p$  e  $c_v$ , partendo da  $c_p - c_v$ :

Dalla sesta e dalla terza equazione di prima posso ricavare:

$$c_p = T \frac{ds}{dt} + \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p T \frac{dp}{dt}$$

$$c_v = T \frac{ds}{dT} - \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v T \frac{dv}{dT}$$

$$\text{Posso farne la differenza e ricavo } c_p - c_v = \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p T \frac{dp}{dT} + \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v T \frac{dv}{dT}$$

Allora consideriamo una generica funzione pressione  $p = p(T, v)$  e facciamone il differenziale esatto essendo una grandezza di stato, cioè  $dp = \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dT + \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T dv$

$$\text{Calcoliamo la derivata, cioè dividiamo per } dT: \frac{dp}{dT} = \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v + \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T \frac{dv}{dT}$$

$$\text{Sostituendo nella relazione di prima otteniamo: } c_p - c_v = \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v + T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T \frac{dv}{dT} + T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \frac{dv}{dT},$$

$$\text{cioè } c_p - c_v = \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v T + T \frac{dv}{dT} \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T + \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \right]}_{=0 \text{ per il teorema dei differenziali esatti}}$$

$$\text{Allora possiamo dire che } c_p - c_v = \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v T$$

VEDERE DA QUALCHE LIBRO DI ANALISI IL TEOREMA DEI DIFFERENZIALI ESATTI: SE  $p = p(T, v)$  IL PRODOTTO DELLE 3 DERIVATE PARZIALI DI CIASCUNA COPPIA CON IL TERZO LASCIATO COSTANTE È PARI A  $-1$ , CIOÈ  $\left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_T = -1$

$$\text{Inoltre sempre dal teorema dei differenziali esatti possiamo scrivere: } \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = - \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T$$

$$\text{Cioè questo ci permette di riscrivere la relazione come } c_p - c_v = - T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v^2 \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T$$

Supponendo che l'equazione di stato sia quella dei **gas perfetti**:

$$\text{Cioè del tipo } p v = RT \text{ allora si vede come } \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v = \frac{R}{v} \text{ mentre } \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T = - \frac{RT}{p^2}$$

$$\text{Cioè } c_p - c_v = + T \frac{R^2}{v^2} \frac{RT}{p^2} = R, \text{cioè possiamo concludere che } c_p - c_v = R.$$

Passiamo ad un'altra relazione tra  $c_p$  e  $c_v$  ovvero  $c_p/c_v$ :

Se la relazione è isoentropica abbiamo che  $ds = 0$  e dalle due equazioni di prima possiamo dire che

$$c_p = T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_s$$

$$c_v = - T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_s$$

$$\text{E allora } \frac{c_p}{c_v} = - \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_s}{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_s} \text{ da cui otteniamo che } \frac{c_p}{c_v} = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s,$$

qui abbiamo fatto l'osservazione che a  $s = \text{cost}$  posso semplificare i termini  $\partial T$  e ottengo un rapporto  $\partial p / \partial v$  mentre per gli altri termini ho che  $\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p / \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = - \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T$  per Schwartz.

Si osservi che per i **gas perfetti** in cui l'equazione di stato  $p v = RT$  da cui possiamo dire che  $\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = - \frac{RT}{p^2}$  e per le

trasformazioni isoentropiche per i gas perfetti abbiamo che  $p v^k = \text{cost}$  da cui possiamo fare il differenziale esatto  $d p v^k + p k v^{k-1} d v = 0$ .

Da questo possiamo dire che  $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right) = - k p \frac{v^{k-1}}{v^k} = - k \frac{p}{v}$

Cioè possiamo considerare  $\frac{c_p}{c_v} = \frac{RT}{p^2} \cdot k \frac{p}{v} = \frac{RT}{p v} k = k$ , cioè abbiamo ricavato che  $\frac{c_p}{c_v} = k$ .

# FISICA TECNICA

## Settimana 3

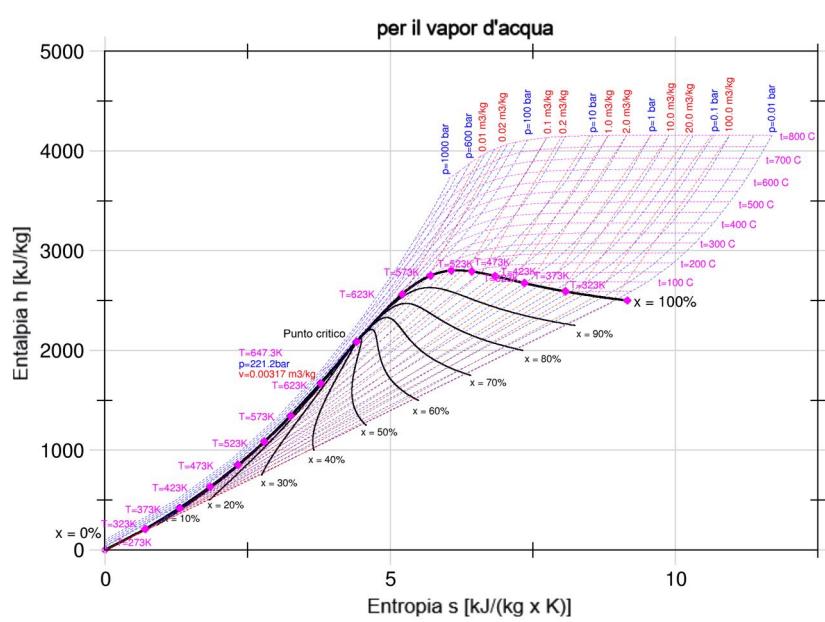


DIAGRAMMA DI MOLLIER

# Indice settimana 3

Indice settimana 3	2
martedì 6 ottobre 2020 - Lezione 7	
<i>Dipendenza di Cv da v</i>	3
<i>Dipendenza di Cp da p</i>	3
Gas perfetti	4
<i>Esperienza di Joule</i>	5
<i>Esperienza di Joule-Thompson</i>	5
Teorema di Guo-Stodola	7
Energia	8
<i>Diagramma exergia-entalpia</i>	8
Diagramma pv	10
Trasformazioni termodinamiche dei gas perfetti	11
mercoledì 7 ottobre 2020 - Lezione 8	
Esperienza di Andrews	12
Diagramma pT	14
Diagramma pVT	15
Diagramma hs	16
giovedì 8 ottobre 2020 - Lezione 9	
Diagramma Ts	19
Gas reali: equazioni del viriale	19
<i>Equazione degli stati corrispondenti</i>	20
<i>Equazione di Van der Waals</i>	22
<i>Equazione di Dieterici</i>	23
<i>Equazione di Berthelot</i>	23
<i>Equazione di Beattie-Bridgman</i>	23

*Dipendenza di Cv da v*

Abbiamo definito  $c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v$  e facciamone la derivata rispetto a v, a T costante:

$$\left(\frac{\partial c_v}{\partial v}\right)_T = \frac{\partial}{\partial v} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v \right]_T = \frac{\partial}{\partial T} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_T \right]_v , \text{ dove supponiamo sia possibile invertire l'ordine di derivazione.}$$

Ora ricordiamo l'espressione generale per l'energia interna ricavata utilizzando le equazioni di Maxwell dove l'unico calore specifico a rimanere era  $c_v$ , cioè

$$du = c_v dT + \left[ T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - p \right] dv$$

Allora  $\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = \left[ T \left( \frac{\partial p}{\partial p} \right)_v - p \right]$ , quindi il termine tra parentesi rappresenta la derivata dell'energia interna rispetto a v a T costante e sostituiamo l'espressione trovata prima

$$\left(\frac{\partial c_v}{\partial v}\right)_T = \frac{\partial}{\partial T} \left[ T \left( \frac{\partial p}{\partial p} \right)_v - p \right] = \cancel{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v} + T \left( \frac{\partial^2 v}{\partial T^2} \right)_v - \cancel{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v}$$

$$\text{cioè } \left(\frac{\partial v}{\partial v}\right)_T = T \left( \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} \right)_v$$

Questa è la dipendenza di  $c_v$  da  $v$ .

*Dipendenza di Cp da p*

Facciamo lo stesso ragionamento per il calore specifico a volume costante. Partiamo dalla definizione:

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p$$

Facciamone la derivata rispetto a p, a T costante

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_T = \frac{\partial}{\partial p} \left[ \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p \right]_T = \frac{\partial}{\partial T} \left[ \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T \right]_p \text{ dove invertiamo l'ordine di derivazione}$$

Ora riprendiamo la definizione del differenziale dell'entalpia dove avevamo sostituito al posto di  $c_v$  l'espressione analitica basata su una delle equazioni di Maxwell e quindi il termine tra parentesi quadre rappresenta la derivata di h rispetto a p, a T costante.

$$dh = c_p dT + \left[ v - T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right] dp$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T = \left[ v - T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right]$$

Allora sostituiamo quanto trovato prima e otteniamo

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_T = \frac{\partial}{\partial T} \left[ v - T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right]_p = \cancel{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_p} - \cancel{\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p} - T \left( \frac{\partial^2 v}{\partial T^2} \right)_p$$

$$\text{Cioè } \left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_T = - T \left( \frac{\partial^2 v}{\partial T^2} \right)_p$$

Questa è la dipendenza di  $c_p$  da  $p$ .

Ricordiamo che i

## Gas perfetti

Sulla base di esperienze secolari abbiamo visto obbediscono all'equazione di stato dei gas perfetti, rappresentata dalla legge

$$pV = nR_uT$$

Questa compensa tutte le altre leggi che erano state studiate con il sistema cilindro-pistone (+ la legge di Avogadro).

Possiamo scriverla anche dividendo il volume specifico per un unità di moli, cioè  $p\tilde{v} = R_uT$ , cioè usando il volume molare.

Ottenevi sostituendo al posto del numero di moli la massa per il numero molecolare e dividendo per la massa, ottenendo:

$$pV = \frac{m}{p \cdot m} R_u T \longrightarrow pV = \frac{R_u}{p \cdot m} T \implies pV = RT \text{ con } R = \frac{R_u}{p \cdot m}$$

Dove  $R$  dipende dal tipo di gas considerato, infatti al denominatore c'è il peso molecolare.

Ricordiamo allora le relazioni che abbiamo tra  $c_v$  e  $c_p$

Si mostra che  $c_p - c_v = R$  mentre  $\frac{c_p}{c_v} = k$ , dove  $k$  è l'esponente dell'adiabatica.

Inoltre per i gas perfetti ottieniamo che:

- $\left( \frac{\partial c_v}{\partial V} \right)_T = T \left( \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} \right)_V = 0$ , cioè  $c_v$  NON dipende da  $V$  ma soltanto da  $T$ :  $c_v(T)$
- $\left( \frac{\partial c_p}{\partial P} \right)_T = -T \left( \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} \right)_P = 0$ , cioè  $c_p$  non dipende da  $P$  ma soltanto da  $T$ :  $c_p(T)$

Andando a riprendere le espressioni di prima per l'energia interna e per l'entalpia ottieniamo che  $du(T)$  dipende solo da  $T$  e stesso discorso per  $dh(T)$  e il termine tra parentesi quadra è identicamente nullo.

Cioè possiamo dire che per i **gas perfetti** consideriamo le seguenti espressioni:

- $du(T) = c_v(T) dT$
- $dh(T) = c_p(T) dT$

Infine, troviamo il coefficiente di dilatazione isobara  $\beta$  per i gas perfetti.

Lo abbiamo definito come

$$\beta = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

Dove per i gas perfetti possiamo considerare che

$$\beta = \frac{1}{V} \frac{R}{P} = \frac{R}{RT}$$

$$\text{Cioè ottieniamo: } \beta = \frac{1}{T}$$

Questo ci spiega perché si è scelto  $T=273$  per il punto triplo e questo deriva dal fatto che quando si facevano esperimenti sui gas si metteva il gas in un recipiente chiuso dove si utilizzava per le misure le caratteristiche dei gas. Chiaramente le caratteristiche dei

gas reali si avvicinano ai gas ideali e quindi se si calcolava il  $\beta$  del gas questo era all'incirca  $\beta = \frac{1}{273}$  ma siccome questo è

relazionato alla temperatura è chiaro che risulta  $T = 273$

Le conclusioni di prima sono state dimostrate attraverso due esperienze:

### Esperienza di Joule

Si metteva del gas in un contenitore A e il tutto veniva messo in un termostato con del liquido. Con la valvola chiusa si lasciava il gas nel contenitore A e si misurava la temperatura. Poi si apriva la valvola facendo riempire anche il recipiente B e aspettando un certo tempo in modo che il sistema raggiungesse l'equilibrio. Dopo aver aspettato un certo tempo si misurava la temperatura.

Il risultato fu che la temperatura non cambiava se il gas era poco, cioè molto rarefatto e quindi che si avvicinava ad un gas perfetto.

Le trasformazioni erano con temperature costante  $T = \text{cost}$   $\rightarrow dT = 0$  e quindi che non c'era scambio di calore tra A+B e il liquido.

Applicando ad A+B il 1° principio della termodinamica per sistemi chiusi:

$$\mathcal{Q} - \mathcal{V} = \Delta u + \cancel{\Delta e_c} + \cancel{\Delta e_p}$$

Dove:

- Non si scambia lavoro:  $l = 0$
- Poiché  $T = \text{cost}$ ,  $q = 0$
- Supponiamo che il gas abbia velocità nulla sia all'inizio che alla fine:  $\Delta e_c = 0$
- L'energia potenziale non varia:  $\Delta e_p = 0$

E allora  $\Delta u = 0$ , cioè  $du = 0$

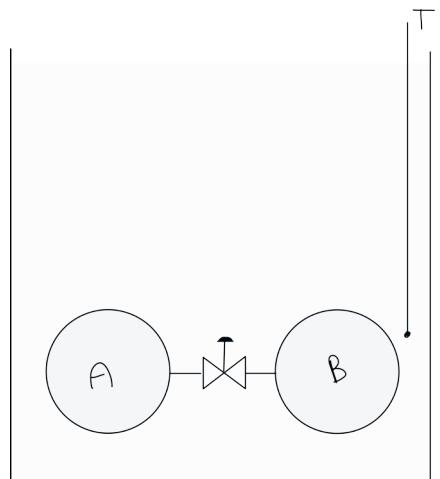
Poiché in generale  $u$  è funzione di  $v$  e  $T$  il suo esatto è

$$u(v, T) \longrightarrow du = \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T dv + \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT$$

E poiché  $dv \neq 0$  essendo un'espansione, si ha che

$$\left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T dv = 0 \implies \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T = 0$$

Cioè l'energia interna è funzione solo della temperatura e non dipende dal volume specifico.  $du = c_v(T) dT$



### Esperienza di Joule-Thompson

Si prende un condotto con un restringimento di sezione dove c'è un flusso che scorre da sinistra verso destra  $p_1 > p_2$  e si misurano le temperature. Si suppone che non ci siano scambi di calore o che il condotto sia isolato termicamente (si fa l'esperienza inserendo un isolante termico). Applicando il 1° principio per sistemi aperti tra la sezione 1 e 2:

$$\mathcal{Q} - \mathcal{V}_f = \Delta h + \cancel{\Delta e_c} + \cancel{\Delta e_p}$$

Dove:

- Non ci sono scambi di calore:  $q = 0$
- Non si scambia lavoro:  $l_f = 0$
- Se il condotto è orizzontale:  $\Delta e_p = 0$
- Se le sezioni sono uguali:  $\Delta e_c = 0$

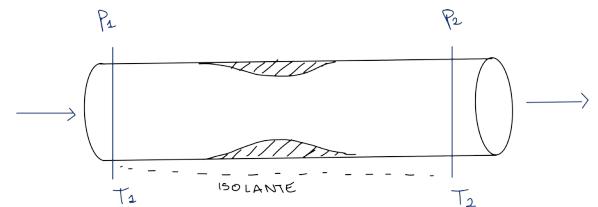
Si ottiene  $\Delta h = 0$ , cioè  $dh = 0$

$$\text{Ma essendo il suo differenziale esatto: } h(p, T) \longrightarrow dh = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p dT + \left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T dp$$

E se misurassimo un  $dT = 0$  ed essendo  $dp \neq 0$  deve essere che:

$$\left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T dp = 0 \implies \left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T = 0$$

Cioè il risultato è che l'entalpia non dipende dalla pressione ma è solo funzione della temperatura,  $dh = c_p(T) dT$



Vedremo che nella maggior parte dei casi non sono gas ideali e nella realtà  $dT \neq 0$  e allora  $\left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T \neq 0 \longrightarrow h = h(p, T)$

L'entalpia, per un gas reale, è funzione della pressione e della temperatura.

L'esperienza di Joule-Thompson si rappresenta nel diagramma Tp.

Si fa entrare un gas a pressione  $p_1$  e poi si abbassa sempre più la pressione  $p_2$  a valle. Otteniamo che il gas si riscalda mentre abbassando sempre più  $p_2$  il gas si abbassa sempre di più fino ad un certo valore dove trovo un massimo di aumento. Diminuendo ancora  $p_2$  trovo che la temperatura si abbassa. Ogni curva si trova partendo da una temperatura  $T_1$  diversa.

In questo campo di temperatura osservo sempre un massimo e poi diminuisce.

Dall'analisi considerata prima del caso di gas reale:

$$dh = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p dT + \left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T dp = 0, \text{ funziona come una valvola di laminazione.}$$

$\underbrace{= c_p}$

$$\text{Cioè si ottiene il coefficiente di Joule-Thompson: } c_{JT} = \frac{dT}{dp} \Big|_h = - \frac{\left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T}{c_p}$$

Questo coefficiente se lo vado a calcolare è minore di 0 a destra del massimo ( $p$  diminuisce e  $T$  aumenta), a sinistra del massimo è maggiore di 0 (diminuisce  $p$  e diminuisce  $T$ ), poi c'è il punto a tangente orizzontale. Unendo tutti i punti di massimo ottengo una curva in cui il coefficiente di Joule-Thompson è nullo.

Andando invece con una temperatura iniziale maggiore di un certo valore indicato dalla curva in alto si ottiene che le temperature aumenta sempre al diminuire della pressione prende il nome di temperatura limite di inversione al di sopra della quale il  $c_{JT} < 0$

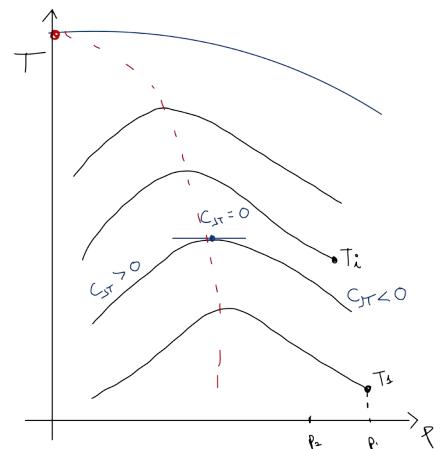
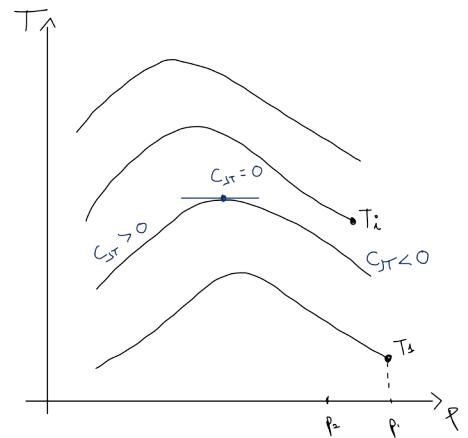
Osservazioni:

Di solito un gas che si espande si raffredda.

Sperimentalmente, se si misura  $\Delta T / \Delta p$  nell'esperienza di Joule-Thompson si ottiene che è proporzionale a  $\Delta p / T^2$  tramite una costante  $k$ :

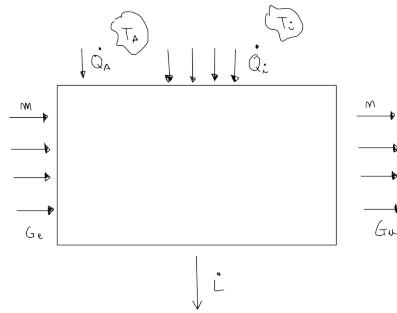
$$\text{Cioè } c_{JT} = \frac{\Delta T}{\Delta p} = \frac{\Delta p}{T^2} k$$

$$\text{Dove } \begin{cases} \text{se } k > 0 \rightarrow \Delta T > 0 \\ \text{se } k < 0 \rightarrow \Delta T < 0 \end{cases}$$



## Teorema di Guo-Stodola

Supponiamo di avere un sistema aperto con  $m$  correnti entranti con portata  $G_e$  e  $n$  correnti uscenti con portata  $G_u$ . Supponiamo una potenza meccanica  $\dot{L}$  e che scambi potenze termiche con un numero di sorgenti suddivise in due categorie: calore scambiato con la sorgente ambiente, che quindi non posso cambiare,  $\dot{Q}_A$  e gli altri  $n$  calori scambiati con le sorgenti artificiali  $\dot{Q}_i$ .



Applico allora il 1° principio della termodinamica per i sistemi aperti (siamo a regime stazionario):

$$\dot{Q} - \dot{L} = \sum_{u=1}^n G_u (h_u + e_{cu} + e_{pu}) - \sum_{e=1}^m G_e (h_e + e_{ce} + e_{pe})$$

Dove in questo caso  $\dot{Q} = \dot{Q}_A + \sum_{i=1}^n \dot{Q}_i$

Considero anche il 2° principio della termodinamica per sistemi aperti:

lo scriviamo in quantità finita come  $\frac{\dot{Q}}{T} = \Delta \dot{S} - \Delta \dot{S}_s$ , dove tengo conto anche di eventuali irreversibilità (S è maiuscolo poiché sono quantità estensive mentre il punto indica che sono quantità nel tempo)

Cioè sostituendo otteniamo che  $\frac{\dot{Q}_A}{T_A} + \sum_1^n \frac{\dot{Q}_i}{T_i} = \sum_1^n G_u S_u - \sum_1^m G_e S_e - \Delta S_s$

Dove teniamo conto dell'entropie delle corrente  $G_u s_u$  (dove s è minuscolo perchè moltiplica per la portata)

Cioè ricaviamo  $\dot{Q}_A = -T_A \sum_i \frac{\dot{Q}_i}{T_i} + \sum_u G_u T_A S_u - \sum_e G_e T_A S_e - T_A \Delta S_s$

Sostituiamo allora  $\dot{Q}_A$  nell'espressione del 1° principio e otteniamo:

$$\sum_i \dot{Q}_i - \sum_i \frac{\dot{Q}_i T_A}{T_i} - \dot{L} + \sum_u G_u T_A S_u - T_A \Delta S_s = \sum_u G_u (h_u + e_{cu} + e_{pu}) - \sum_e G_e (h_e + e_{ce} + e_{pe})$$

Allora risolviamo per  $\dot{L}$ , cioè ricavo:

$$\dot{L} = \sum_i \dot{Q}_i \left( 1 - \frac{T_A}{T_i} \right) + \sum_e G_e (h_e - T_A s_e + e_{ce} + e_{pe}) - \sum_u G_u (h_u - T_A s_u + e_{cu} + e_{pu}) - T_A \Delta S_s$$

Questo è il risultato che chiamiamo **Teorema di Guo-Studola**, cioè il calcolo del lavoro scambiato da un sistema aperto con più correnti entranti ed uscenti dove eliminò il calore scambiato con l'ambiente e dove sono presenti sorgenti entropiche.

Se le trasformazioni sono reversibili si ha che  $\Delta \dot{S}_s = 0$  si ottiene il lavoro massimo, cioè  $\dot{L}_{max}$

Allora in definita il lavoro ottenuto da questo sistema è:  $\dot{L} = \dot{L}_{max} - T_A \Delta S_s$

Se restringiamo l'attenzione ai **sistemi chiusi** spariscono i termini delle correnti entranti ed uscenti quindi:

$$\dot{L}_{max} = \sum_i \dot{Q}_i \left( 1 - \frac{T_A}{T_i} \right)$$

Se c'è una sola sorgente, cioè  $i = 1$  si ottiene

$\dot{L}_{max} = \dot{Q}_1 \left( 1 - \frac{T_A}{T_1} \right) = \dot{E}x$ , dove questo prende il nome di **exergia del sistema chiuso**, cioè il lavoro massimo ottenuto da un sistema chiuso con una sola sorgente (un solo scambio di calore).

Si osservi che  $\frac{\dot{E}x}{\dot{Q}_1}$  restituisce il rendimento di una macchina di Carnot:  $\frac{\dot{E}x}{\dot{Q}_1} = 1 - \frac{T_A}{T_1}$

Se facciamo il diagramma dell'exergia per unità di calore scambiato in modulo, in funzione della temperatura  $T_1$  della sorgente, fissata al temperatura ambiente  $T_A$ :

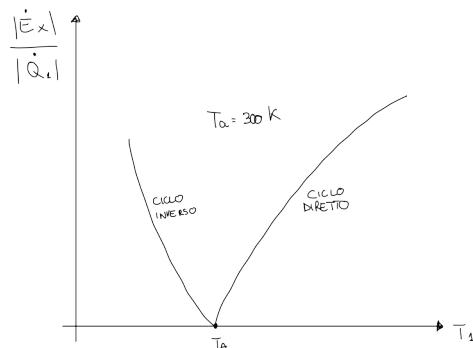
$$\text{Se } T_1 = T_A \text{ allora } \frac{|\dot{E}x|}{|\dot{Q}_1|} = 0$$

$$\text{Se } T_1 > T_A \text{ allora } \frac{|\dot{E}x|}{|\dot{Q}_1|} \text{ aumenta verso la saturazione e l'exergia sul}$$

calore scambiato cresce, cioè si ha a che fare con un ciclo motore che produce lavoro positivo

$$T_1 < T_A \text{ si ha che } \frac{|\dot{E}x|}{|\dot{Q}_1|} \text{ aumenta in maniera inversa e quindi ho a}$$

che fare con un ciclo inverso,



Invece per un **sistema aperto** che scambia calore solo con l'ambiente si ha che il primo termine  $\dot{L}_{max}$  è nullo:

$$\sum_i \dot{Q}_i \left( 1 - \frac{T_A}{T_i} \right) = 0$$

Inoltre, se suppongo trasformazioni reversibili non c'è il  $\Delta S_s$ .

Se suppongo di avere a che fare con un sistema con una sola corrente entrante ed una uscente ho che  $G_e = G_u = G$  e si ottiene:

$$\dot{L}_{max} = G_e \left( h_e - T_A s_e + \cancel{e_{ce}} + \cancel{e_{pe}} \right) - G_u \left( h_u - T_A s_u \cancel{e_{cu}} + \cancel{e_{pu}} \right)$$

Dove suppongo trascurabili le variazioni di energia cinetica e potenziale, cioè  $\dot{L}_{max} = G_e \left( h_e - T_A s_e + \cancel{e_{ce}} \right) - G_u \left( h_u - T_A s_u \right)$

Dividendo per G (massa per unità di tempo), ottengo una quantità estensiva:

$$l_{max} = (h_e - T_A s_e) - (h_u - T_A s_u)$$

Definisco la quantità  $e_x = h - T_a s$  come **exergia del sistema aperto** e allora si ha che

$$l_{max} = ex_e - ex_u$$

Questo è il massimo lavoro che si può ottenere da un sistema aperto con Ge e Gu e che scambia lavoro sono con l'ambiente.

## Exergia

È definita come  $e_c = h - T_a s$ , un caso particolare dell'entalpia libera, dove h ed s sono funzioni di stato e Ta una costante per cui anch'essa è una grandezza di stato.

Bisogna quindi definire uno stato di riferimento e se ne definisce uno valutato nelle condizioni ambientali:  $e_{xa} = h_a - T_a s_a = 0$ , cioè allo stato di riferimento ambiente definiamo un'exergia nulla. L'ambiente si definisce come **stato morto**. Infatti con del calore a temperatura ambiente non possiamo ricavare lavoro.

Possiamo dire che la differenza tra exergia e exergia dello stato morto è  $ex - \cancel{ex_0} = (h - h_a) - T_a(s - s_a)$

E costruiamo il

### Diagramma exergia-entalpia

E studiamo le varie trasformazioni.

Si possono utilizzare allo stesso modo degli altri diagrammi termodinamici

Trasformazioni **isoentropiche**, cioè  $s = \text{cost}$

Si vede come  $de_x = dh$  e allora  $\left(\frac{\partial e_x}{\partial h}\right)_s = 1$ .

Quindi le isoentropiche sono rette a  $45^\circ$ .

Trasformazioni **isobare**, cioè  $p = \text{cost}$

Facciamo la derivata parziale dell'exergia rispetto l'entalpia a pressione costante

$$\left(\frac{\partial e_x}{\partial h}\right)_p = 1 - T_a \underbrace{\left(\frac{\partial s}{\partial h}\right)_p}_{=1/T} = 1 - \frac{T_a}{T}$$

Poiché nel diagramma h-s la pendenza delle isobare  $\left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)_p = T$

Si osserva che se:

- Se  $T > T_a$  si ha una pendenza positiva
- Se  $T = T_a$  la pendenza è zero (cioè si ha un minimo)
- Se  $T < T_a$  si ha pendenza negativa

Trasformazioni **isoterme**, cioè  $T = \text{cost}$

Che ricordiamo per i gas perfetti sono anche isoentalpiche

Trasformazioni **isocore**, cioè  $v = \text{cost}$

Facciamo la derivata dell'exergia rispetto l'entalpia a volume costante

$$\left(\frac{\partial e_x}{\partial h}\right)_v = 1 - T_a \left(\frac{\partial s}{\partial h}\right)_v$$

Riprendiamo l'espressione di  $ds$  e di  $dq$

$$ds = \frac{dq}{T} = \frac{du + pdv}{T} \quad \text{che per i gas perfetti diventa} \quad = c_v \frac{dT}{T} = \frac{c_v}{T} \frac{dh}{c_p} = \frac{dh}{Tk}$$

Dove ho considerato sia  $dh = c_p dT$  e che  $k = c_p/c_v$  che valgono solo per i gas perfetti

$$\text{Cioè ottengo } \frac{ds}{dh} = \frac{1}{Tk}$$

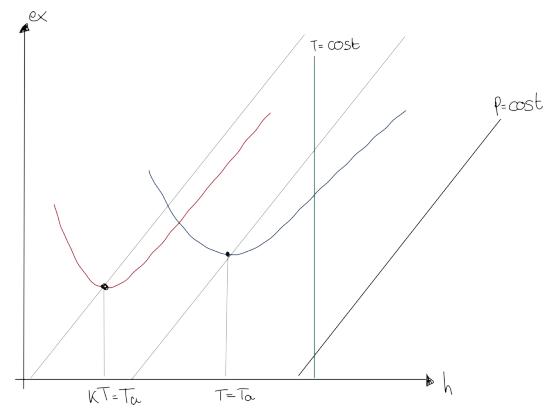
In conclusione abbiamo visto come  $\left(\frac{\partial e_x}{\partial h}\right)_v = 1 - \frac{T_a}{kT}$

Dove  $k > 1$  perché  $c_p > c_v \implies kT > T$

Questo vuol dire che:

- Se  $kT > T_a$ , pendenza positiva
- Se  $kT = T_a$ , pendenza nulla, cioè un minimo
- Se  $kT < T_a$ , pendenza negativa

La curva relativa alle isocore è simile alla curva delle isobare con un minimo che risulta inferiore al minimo trovate per le isobare e la pendenza delle isocore è maggiore di quella delle isobare.



## Diagramma pv

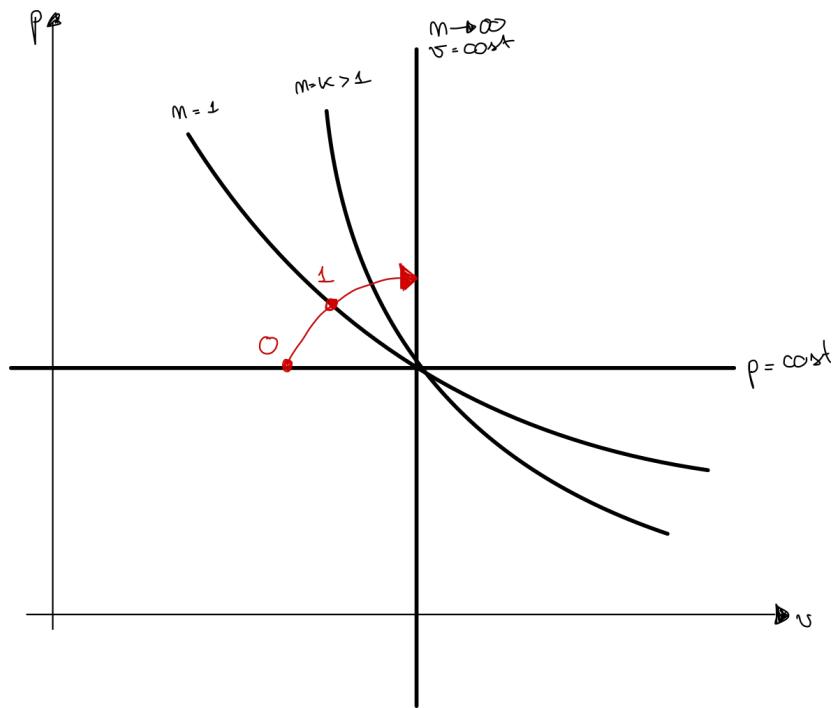
Riassumiamo tutte le trasformazioni termodinamiche sul piano pv utilizzando l'espressione generica  $p v^n = \text{cost}$  dove  $n$  è un parametro empirico che cambia con le trasformazioni

- Se  $n = 0$  otteniamo l'isobara,  $p=\text{cost}$ , retta orizzontale
- Se  $n \rightarrow \infty$  si ha che  $p^{1/n}v = \text{cost} \rightarrow v = \text{cost}$  si ha l'isocora, retta verticale

Tra il minimo e il massimo valore di  $n$  possiamo considerare TUTTE le trasformazioni termodinamiche,

In particolare:

- Se  $n = 1$  abbiamo  $p v = \text{costo} = RT$  per i gas perfetti e quindi  $T = \text{cost}$ , trasformazione isoterma di un gas perfetto, iperbole
- Se  $n = k$  si ha  $p v^k = \text{cost}$  e quindi la trasformazione isoentropiche di un gas perfetto dove  $k > 1$ , con una pendenza maggiore dell'isoterma



# Trasformazioni termodinamiche dei gas perfetti

Dimostriamo che le trasformazioni termodinamiche isoentropiche compiute dai gas perfetti sono:

$$1) \frac{p v^k}{T} = \text{cost}$$

$$2) \frac{p^{\frac{k-1}{k}}}{v} = \text{cost}$$

$$3) T v^{k-1} = \text{cost}$$

1) Partiamo dall'espressione più generale che abbiamo trovato per  $ds$  per i sistemi chiusi

$$2) ds = c_v \frac{dT}{T} + \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dv \quad \text{E visto che per i gas perfetti si ha } p v = RT \text{ otteniamo } c_v \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v}$$

Se la trasformazione è isoentropica,  $ds = 0$ .

Inoltre facciamo un'ipotesi semplificativa, cioè supponiamo che  $c_v = \text{cost}$ , **ipotesi di politropica**, e integriamo:

$$c_v \ln(T) + R \ln(v) = \text{cost}$$

$$\ln(T^{c_v}) + \ln(v^R) = \text{cost}$$

$$\ln(T^{c_v} \cdot v^R) = \text{cost}$$

$$T^{c_v} v^R = \text{cost}, \text{ radice di } c_v: T v^{\frac{R}{c_v}} = \text{cost}, R=c_p-c_v: T v^{\frac{c_p-c_v}{c_v}} = \text{cost}$$

$$\text{E allora } T v^{k-1} = \text{cost}$$

(2) Parliamo dall'espressione generale di  $ds$  per i sistemi aperti:

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dp \quad \text{che per i gas perfetti è } ds = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p}$$

Se la trasformazione è isoentropica,  $ds = 0$ , inoltre per l'ipotesi di politropica  $c_p = \text{cost}$

Integriamo:

$$c_p \ln(T) - R \ln(p) = \text{cost}$$

$$\ln(T^{c_p}) - \ln(p^R) = \text{cost}$$

$$\ln\left(\frac{T^{c_p}}{p^R}\right) = \text{cost}$$

$$\frac{T^{c_p}}{p^R} = \text{cost}, \text{ radice di } c_p: \frac{T}{p^{\frac{R}{c_p}}} = \text{cost}, R=c_p-c_v: \frac{T}{p^{\frac{c_p-c_v}{c_p}}} = \text{cost} \text{ e considerando che } c_p/c_v=k$$

$$\text{Cioè } \frac{T}{p^{\frac{k-1}{k}}} = \text{cost}$$

$$(3) \text{ Sappiamo che } p v = RT \text{ allora facendone il differenziale } pdv + vdp = Rdt, \text{ cioè } dt = \frac{p}{R} dv + \frac{v}{R} dp$$

Sostituiamo allora  $dt$  nell'espressione di  $ds$  per i sistemi chiusi

$$ds = \frac{c_v}{T} \frac{p}{R} dv + \frac{c_v}{T} \frac{v}{R} dp + R \frac{dv}{v}$$

$$\text{Se la trasformazione è isoentropica, } ds = 0 \text{ si ha inoltre che } \frac{p}{TR} = \frac{1}{v} \text{ e } \frac{v}{TR} = \frac{1}{p} \text{ e allora:}$$

$$c_v \frac{dv}{v} + R \frac{dv}{v} + c_v \frac{dp}{p} = 0 \text{ e considerando che } R+c_v=c_p$$

$$c_p \frac{dv}{v} + c_v \frac{dp}{p} = 0$$

Integriamo, sempre con l'ipotesi di politropica:

$$c_p \ln(v) + c_v \ln(p) = \text{cost}$$

$$\ln(v^{c_p}) + \ln(p^{c_v}) = \text{cost}$$

$$\ln(v^{c_p} p^{c_v}) = \text{cost} \quad \ln(v^{c_p} p^{c_v}) = \text{cost}$$

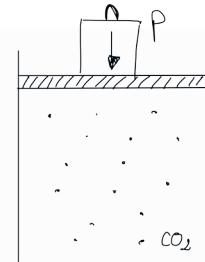
$$v^{c_p} \cdot p^{c_v} = \text{cost}, \text{ radice di } c_v: v^{\frac{c_p}{c_v}} \cdot p = \text{cost} \text{ e considerando che } c_p/c_v=k$$

$$\text{Allora si ha che } p v^k = \text{cost}$$

## Esperienza di Andrews

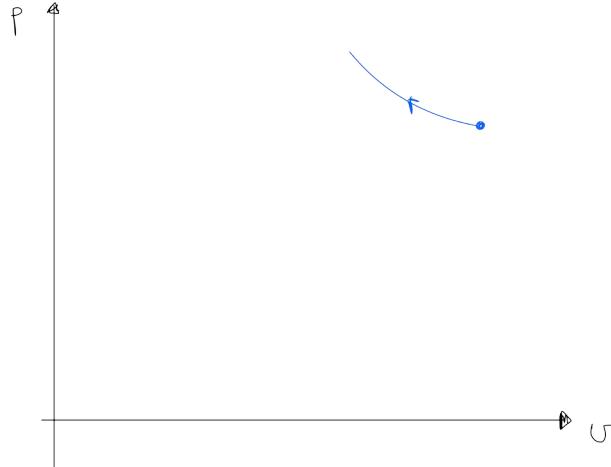
In pratica si tratta di studiare come avviene la liquefazione di un gas.

Immaginiamo di avere un termostato con del liquido che mantiene la temperatura costante all'esterno supponendo quindi che la sostanza sia alla temperatura  $T$ . Si fa un'esperienza di compressione aumentando il peso che a sua volta provoca l'abbassamento del pistone. La compressione avviene mantenendo il tutto in equilibrio con il liquido del termostato e quindi è una compressione isoterma.



$T = \text{cost}$

Rappresentiamo quello che avviene nel diagramma  $pV$ .

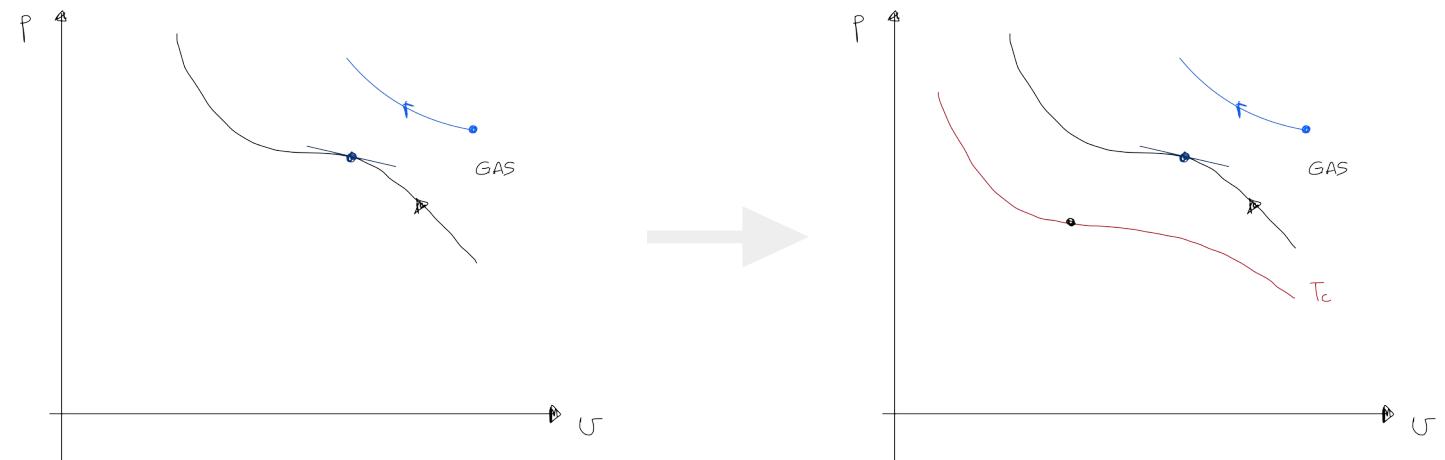


Effettuiamo la compressione isoterma e osserviamo che il volume specifico diminuisce e aumenta la pressione.

La curva azzurra, se il gas è molto rarefatto, è un'iperbole equilatera: si suppone di avere a che fare con un gas perfetto e quindi  $pV = \text{cost}$ .

Poi vediamo questa seconda curva, sempre una trasformazione termodinamica a  $T$  costante ma inferiore di quella precedente. Si osserva che il gas diminuisce il volume specifico e aumenta la pressione ma ad una certa temperatura non sarà più rappresentabile come un'iperbole ma presenta una curva con dei punti di flesso.

Supponiamo che il flesso abbiano una tangente obliqua e negativa.



Diminuendo ancora la temperatura della compressione isoterma si vede che il flesso (sempre presente) ha una pendenza che tende ad essere sempre più orizzontale.

Finché abbassando la temperatura ad un valore di **temperatura critica**  $T_c$  si osserva un flesso a tangente orizzontale.

Questo punto prende il nome di **punto critico** ed è un punto fisso delle sostanze gassose a cui corrisponde una certa pressione critica e una certa temperatura critica che troviamo tabellati.

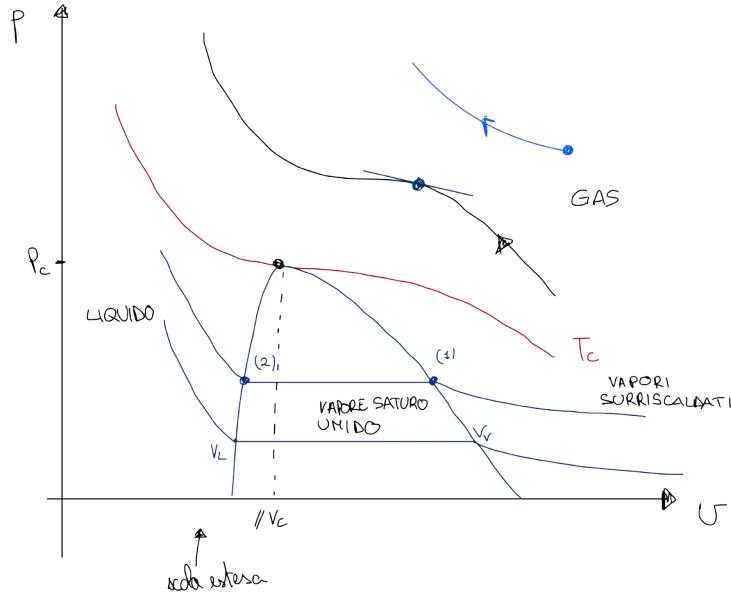
NEL LIBRO DELLE LEZIONI DEL PROF. GORI TROVIAMO NELLE TABELLE FINALI CHE PER LA CO<sub>2</sub> LA  $T_c = 31,1^\circ\text{C}$  E  $p_c = 74$  bar E UN CORRISPONDENTE VOLUME CRITICO DI  $v_c = 2,14 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}$ .

La zona superiore si chiama *zona dei gas* poiché sopra la temperatura critica il gas rimane sempre allo stato aeriforme e non si può liquefare per compressione isoterma.

Per temperature inferiori alla temperatura critica si vede come si parte da un gas che in questa zona è sempre aeriforme ma arrende il nome di vapore surriscaldato. Iniziamo la compressione isoterma che seguirà una curva simile ma arrivati ad una certa pressione ovvero ad un certo volume osservo che nel punto (1) cominciano a formarsi delle goccioline di liquido all'interno del sistema cilindro-pistone.

Continuando nella compressione isoterma si vede come la pressione rimane costante viceversa aumenta la quantità di  $\text{CO}_2$  che passa dallo stato aeriforme allo stato liquido.

Questo dura fino al punto (2) dove posso dire che tutto l'aeriforme è passato allo stato liquido.



Essendo i liquidi molto ben approssimati da un comportamento di incomprimibilità la pressione schizza in alto (curva molto verticale).

Al di sotto della temperatura critica posso distinguere:

- Zona del liquido
- Zona dei vapori surriscaldati
- Zona di vapore umido saturo, poiché il liquido è in equilibrio con il vapore, tra (1) e (2)

Abbassando la temperatura troverò un comportamento analogo ma osservo che a temperatura più bassa l'aeriforme comincia a diventare liquido per un volume specifico maggiore. Cioè la curva di equilibrio tra vapore saturo umido e vapore riscaldato va verso destra.

Continuando invece a comprimere trovo un comportamento analogo (pressione costante) ma alla fine della compressione quando tutto l'aeriforme è passato liquido ho un liquido con un volume minore, ma molto poco, cioè la curva di sinistra è quasi verticale.

Cioè possiamo dire che a destra del punto critico c'è una scala con cui segniamo tutti i punti come (1) e  $v_v$ , mentre a sinistra la scala è più estesa e la curva è quasi verticale.

Se faccio tutte queste compressioni isoterme a varie temperature troverò tutti i corrispondenti punti (1) e l'unione di questi punti in cui c'è equilibrio tra vapore surriscaldato e vapore saturo umido si chiama **curva limite superiore**.

La curva prende il nome di **campana dei vapori** anche se a sinistra è quasi verticale.

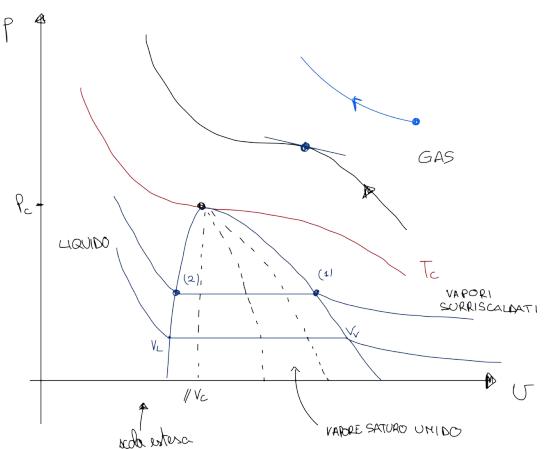
All'interno della campana la pressione e la temperatura rimangono costanti in cui c'è un passaggio di stato tra liquido e vapore e i passaggi di stato sono **isotermobarici**. All'interno della campana la pressione e la temperatura non identificano lo stato e allora si introduce un altro parametro per indicare lo

stato del vapore umido:  $x = \frac{M_v}{M_v + M_L}$  che prende il nome di **titolo del vapore**.

Si osservi che :

- Se  $M_L = 0 \rightarrow x = 1$ , sono tutti i punti sulla curva limite superiore
- Se  $M_x = 0 \rightarrow x = 0$ , sono tutti i punti sulla curva limite inferiore

Essendoci proporzionalità tra il segmento e  $x$  a metà avrà un titolo  $x = 0,5$  e le curve **isotitolo** sono delle curve che tagliano a metà tutti i segmenti. In figura si vedono le curve **0,25 0,5 0,75**



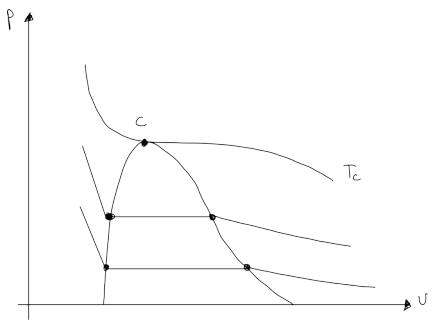
All'interno della curva posso dire che:

$$v = \frac{V_L + V_V}{M_L + M_V} = \frac{M_L v_L + M_V v_V}{M_L + M_V} = (1 - x) v_L + x v_V$$

Cioè  $v = v_L + x(v_V - v_L)$

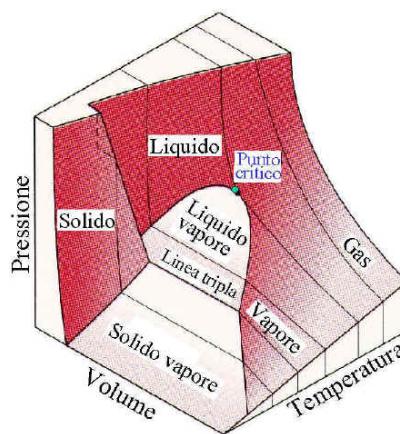
In definitiva, il diagramma  $pV$  delle sostanze è rappresentato da un campana con una curva limite inferiore quasi verticale e una curva limite superiore più allargata a campana.

È COME FOSSE UNA MEZZA CAMPANA.



Il gas generico è funzione di  $(p, v, T)$  e lo abbiamo rappresentato nel diagramma  $pV$  a temperatura costante. Volendo rappresentare un diagramma tridimensionale dobbiamo rappresentare un altro asse di variabile temperatura.

Quindi lo stato della sostanza è rappresentato da un diagramma tridimensionale  $(p, v, T)$



Se fossimo interessati allo stato di solido dovremmo introdurre il punto triplo che nel diagramma  $pV$  risulta difficile da rappresentare.

Risulta più facile da rappresentare nel

## Diagramma $pT$

Si osservano i punti critico C e triplo T.

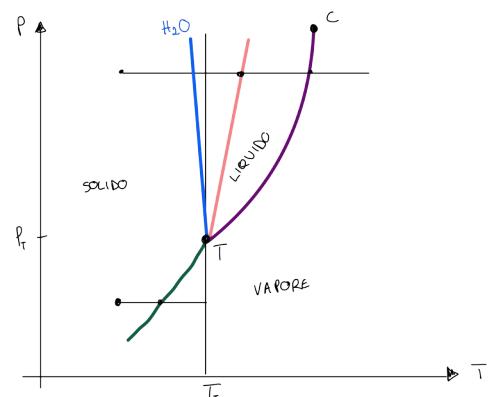
A destra dell'isoterma critica (retta verticale per C) ci sono i gas che non sono comprimibili per sola compressione. Viceversa, a sinistra dell'isoterma critica abbiamo la zona di vapore, liquidi e vapori riscaldati.

La curva **viola** rappresenta la zona di equilibrio tra vapore e liquido. Diminuendo la temperatura questa finisce nel punto triplo (dove sono presenti le tre fasi, solido, liquido e aeriforme).

PER LA CO<sub>2</sub>  $T_T = -56,6^\circ\text{C}$  E  $p_T = 517 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$

PER L'ACQUA INVECE  $T_T = 273,16 \text{ K}$  E  $p_T = 611,7 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$

PER ULTERIORI VALORI CONSULTA IL LIBRO DI TESTO



La curva che va dal punto triplo a critico è la zona di equilibrio tra liquido e vapore (come fosse una sezione della campana di prima vista nel diagramma tridimensionale). Questa prende il nome di **curva di vaporizzazione** mentre curva di **liquefazione** a seconda del verso.

Immaginando di partire con uno stato di aeriforme e di raffreddare (diminuire T a p costante) compiamo la trasformazione isobara rappresentata dalla retta orizzontale. Vado fino al liquido e se continuo vado al solido.

Ci sono due tipi di sostanze quelle che passano da liquido a solido per temperature maggiori del punto triplo mentre per l'acqua il liquido passa da solido per pressioni superiori a quelle del punto triplo con valori della temperatura inferiori al punto triplo.

0,01 °C per il punto triplo mentre a pressione atmosferica il liquido passa a 0°C.

Parliamo di trasformazioni con pressione inferiore alla pressione critica ma superiori alla pressione tripla.

Sotto il punto triplo non esiste più lo stato liquido e vado da aeriforme a solido senza passare per il liquido e l'insieme di questi punti rappresenta la **curva di sublimazione** (in verde).

Esempio della naftalina solida che alla p atmosferica passa direttamente dallo stato solido ad aeriforme senza passare allo stato liquido.

Si osservi che:

- Per  $p < p_T$ , si rappresenta come  $p_e = f(T_e)$  dove il pedice "e" indica l'equilibrio tra le fasi considerate.
- Per  $p > p_T$  (ovviamente inferiore a  $p_c$ ) ho due curve. Una rappresentata come  $p_e = f(T_e)$  e la **curva di liquefazione** con pendenza positiva per tutte le sostanze tranne l'acqua. Anch'essa con un'espressione del tipo  $p_e = f(T_e)$ .

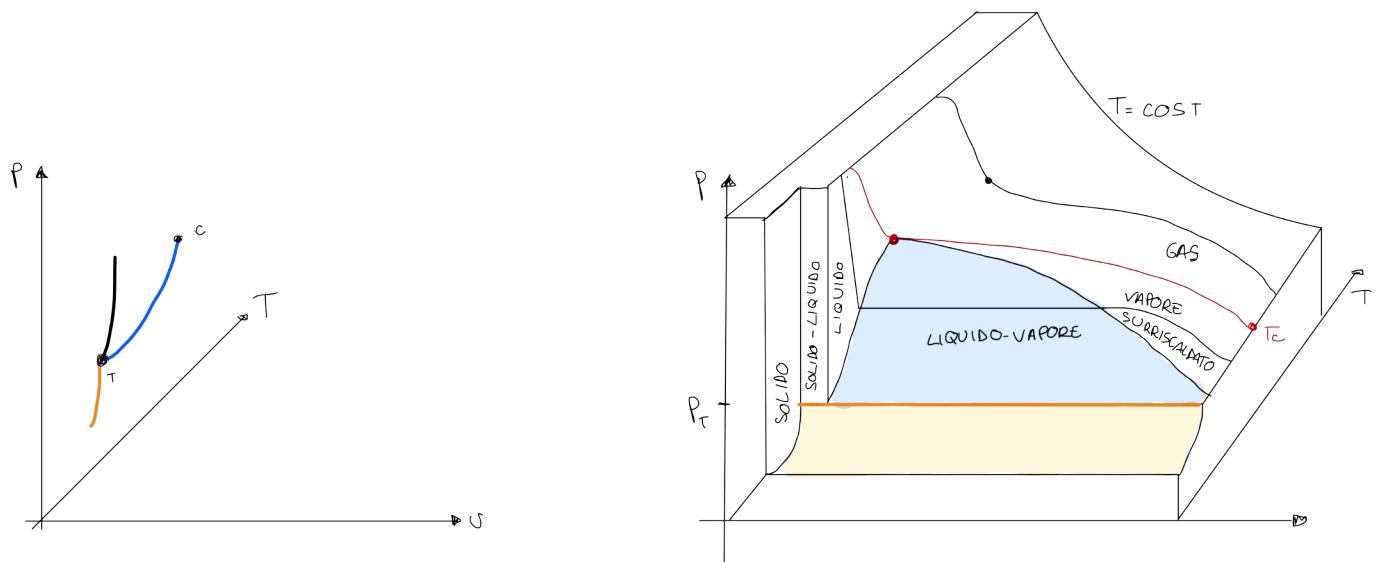
Cioè possiamo dire che eccezion fatta per  $H_2O$  tutte le curve di liquefazione, vaporizzazione e sublimazione hanno pendenza

$$\frac{dp_e}{dT_e} > 0$$

Mentre per l'acqua si ha una pendenza  $\frac{dp_e}{dT_e} < 0$

## Diagramma $pVT$

Ci mostra come si combinano i diagrammi  $pT$  (per le sostanze non acqua) e  $pV$  visti prima.



Il punto critico si dovrebbe proiettare sul punto corrispondente mentre il punto critico  $T$  è rappresentato dal segmento.  
La curva di sublimazione diventa una superficie mentre la curva di vaporizzazione è rappresentata da una superficie  
La curva rossa è una sezione fatta a  $p$  costante.

VEDERE IL LIBRO DELLE LEZIONI A PG 77:

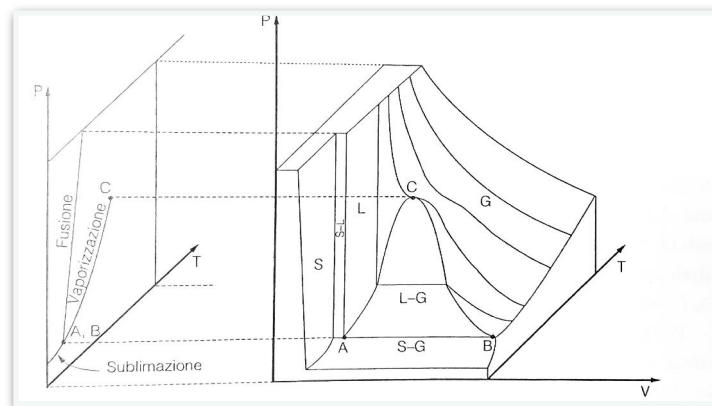


DIAGRAMMA  $P,V,T$

Riprendiamo il coefficiente di dilatazione isoterma che per la definizione data:

$$c_d = T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v = \underbrace{\frac{q}{\Delta v}}_{T} \quad \text{def. operativa} \quad \leftarrow \text{nota come } \textcolor{red}{\text{equazione di Clapeyron}}.$$

Nel caso di un cambiamento di stato, in cui  $T=\text{cost}$ , otteniamo:

$$q = \Delta v \cdot T \cdot \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v$$

Inoltre, nel caso dei cambiamenti di stato abbiamo visto che c'è una relazione biunivoca tra pressione e temperatura di equilibrio, quindi la derivata parziale diventa una deriva totale della  $p_e$  sulla  $T_e$ :

$$p_e = f(T_e) \longrightarrow q = \Delta v T_e \frac{dp_e}{dT_e}$$

Questo ci permette di calcolare il calore latente del passaggio di stato con l'equazione di equilibrio di  $p_e$  e  $T_e$ .

Se invece non conosciamo la relazione possiamo separare le variabili e otteniamo:

$$\frac{dT_e}{T_e} = \frac{\Delta v}{q} dp_e$$

$$\text{Cioè } \ln(T_e) = \frac{\Delta v}{q} p_e + \text{cost}$$

Quindi noto il  $\Delta v$  e il calore latente  $q$ , possiamo sfruttare l'equazione di Clapeyron per mettere in relazione  $T_e$  con  $p_e$ .

Quindi abbiamo detto che tutte le curve di sublimazione e vaporizzazione avevano pendenza maggiore di zero  $\frac{dp_e}{dT_e} > 0$

Allora posso dire che se  $\Delta v > 0$ , cioè il volume specifico aumenta nel passaggio di stato che consideriamo, sublimazione o vaporizzazione, abbiamo  $q>0$ .

Per l'acqua durante da liquefazione ci ricordiamo che  $\frac{dp_e}{dT_e} < 0$  per cui il  $\Delta v$  deve essere negativo dovendo essere  $q>0$ , tra 0°C e 4°C.

## Diagramma hs

Vediamo come determinare il diagramma entalpia-entropia partendo dal diagramma pv.

Vogliamo calcolare l'entalpia e l'entropia corrispondente ai vari punti sotto l'isoterma critica, partendo dal diagramma pv.

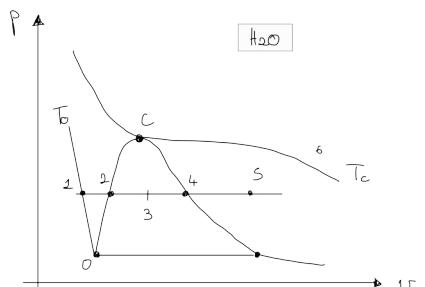
Riprendiamo il differenziale dell'entalpia

$$dh = c_p dT + \left[ v - T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right] dp$$

È una grandezza funzione di stato definita a meno di una costante per cui definiamo uno

dato di riferimento come lo stato di liquido saturo  $p_o T_o$  alla temperatura di  $T_o = 0^\circ$  e

quindi una pressione molto bassa  $p_o = 610 \text{ N/m}^2$ , punto 0. Tracciamo anche l'isoterma a questa temperatura.



Assegnato il valore di riferimento  $h_o = 0$  possiamo calcolare l'entalpia. Essendo una grandezza di stato possiamo usare qualsiasi trasformazione: scegliamo l'isoterma  $T_0$  da 0 a 1 e poi l'isobara da 1 a 5, cioè:

- Isoterma da 0 a 1:  $dh = \left[ v - T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right] dp \longrightarrow h_1 - h_0 = \int_0^1 \left[ v - T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right] dP \sim v(p_1 - p_0)$ , dove

semplifichiamo per i calcoli ingegneristico dove  $v \approx \text{cost}$ , cioè  $h_1 - h_0 \sim v(p_1 - p_0)$

- Isobara da 1 a 2:  $dh = c_p dT$  cioè  $h_2 - h_1 = \int_1^2 c_p dT = c_{p_m} (T_2 - T_1)$ , dove assumiamo di poter esprimere  $c_p$  come il suo valore medio.

- Isobara da 2 a 4: nel punto 2 avevo liquido mentre in 4 ho tutto vapore e allora devo dare il calore latente di vaporizzazione e lungo un'isobara la variazione di entalpia è uguale al calore scambiato  $h_4 - h_2 = q_v$ . Supponendo di voler calcolare l'entalpia

di un punto 3 all'interno della campana caratterizzato da un certo titolo si ha che  $h_3 - h_2 = q_v \cdot x$  dove

$$\begin{cases} \text{se } x = 0, & 3 \equiv 2 \\ \text{se } x = 1, & 3 \equiv 4 \end{cases}$$

- Isobata da 4 a 5: anche qui la differenza di entalpia sarà  $h_5 - h_4 = \int_4^5 c_p dT = c_{p_m} (T_5 - T_4)$

Considerando nuovamente l'espressione generale dell'entropia:

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dp$$

Anche l'entropia è funzione di stato e sceglieremo lo stato di riferimento zero in cui sceglieremo  $s_o = 0$  e sceglieremo di nuovo le stesse trasformazioni: isoterma a  $T_0$  da 0 a 1 e l'isobara da 1 a 5.

- Isoterma da 0 a 1: il primo termine non c'è nell'isoterma e allora  $ds = - \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dp$ , quindi integrando
- $s_1 - s_0 = \int_0^1 \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dp \simeq 0$  quindi quota curva è un'isoterma, un'isocora (infatti  $v \sim \text{cost}$ ) e un'isoentropica
- Isobara da 1 a 2: in cui  $ds = c_p \frac{dT}{T}$  e integrando  $s_2 - s_1 = \int_1^2 c_p \frac{dT}{T} = c_{p_m} \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right)$
- Isobare da 2 a 4, dobbiamo cedere il calore latente di vaporizzazione ma questo viene fatto a T costante e allora:  $s_4 - s_2 = \frac{q_v}{T}$
- Mentre per il punto 3 avente un certo titolo x si ha che  $s_3 - s_2 = \frac{q_v}{T} \cdot x$
- Isobara da 4 a 5 si ha  $s_5 - s_4 = c_{p_m} \ln \left( \frac{T_5}{T_4} \right)$

### Osservazione:

Abbiamo calcolato per ogni punto l'entalpia, fissando  $h_o = 0$  nello stato di riferimento. Possiamo allora calcolare l'energia interna in tutti i punti poiché  $u = h - p v$

Ma lo stato di riferimento di  $u$  dipende da quello di  $h$  e allora:  $u_0 = h_o - p_o v_o$

Cioè  $u_o = -p_o v_o$

Vediamo come è fatto il **diagramma hs**.

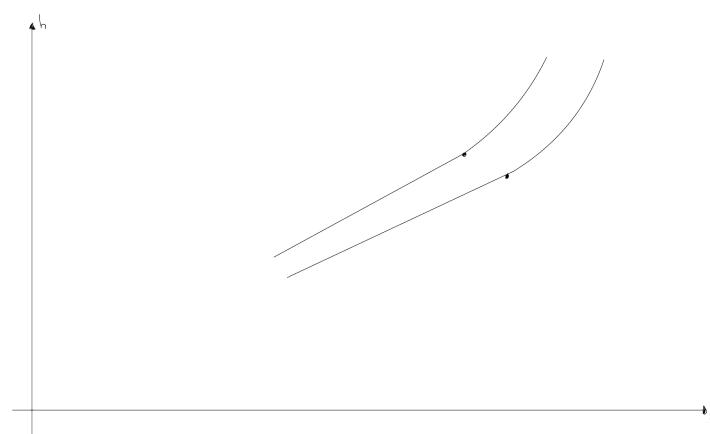
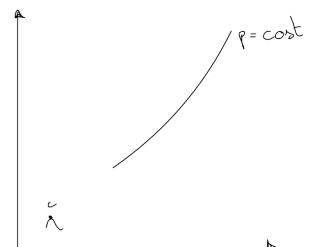
Avevamo visto che considerando l'isobara si ottiene una pendenza  $\left( \frac{\partial h}{\partial s} \right)_p = T$  cioè se T

cresce cresce anche la pendenza, concavità verso l'alto.

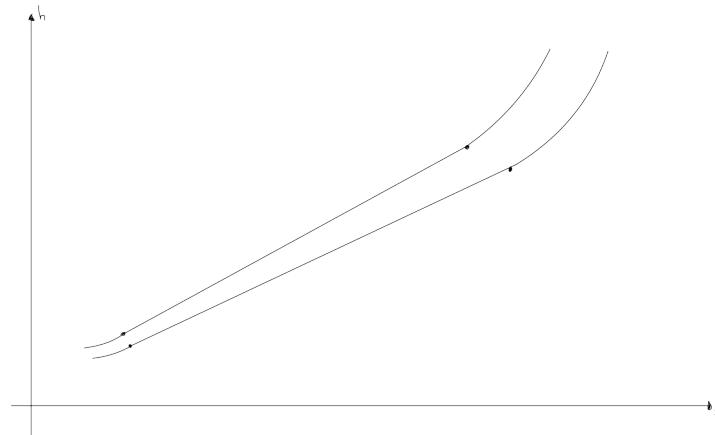
Ma le curve limiti e il punto triplo si trovano in basso a sinistra rispetto all'isobara.

In questo però avevamo considerato solo i gas e per questo la campana era molto piccola. Quando dall'isobara passiamo alla curva limite superiore la pendenza (uguale alla temperatura) rimane costante e l'esponenziale crescente diventa una retta.

Discorso analogo per una curva a p inferiore, quando entro dentro la curva limite la pendenza sarà inferiore per cui la curva sono convergenti verso il basso.



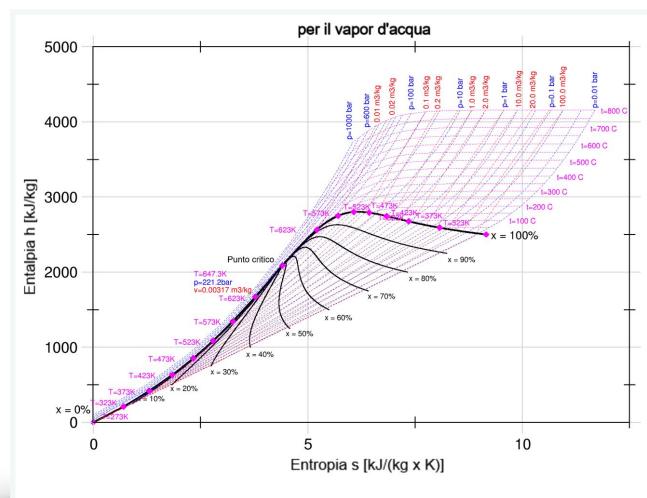
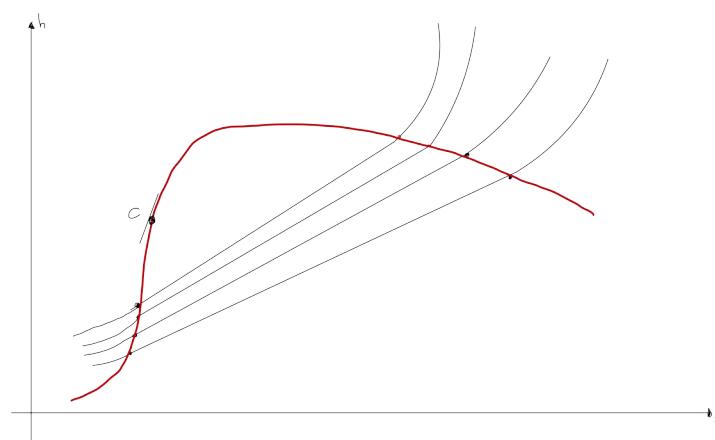
Sulla curva limite inferiore dovevo avere la stessa cosa. Al di fuori della curva limite c'è una curva con una certa concavità che poi arrivati nella zona di liquido entriamo nella campana per cui abbiamo una curva a pendenza costante ( $T$  costante).



Aumentando invece la pendenza si ha l'ingresso nella zona della curva limite superiore, una pendenza superiore, e le curve diventano sempre più pendenti.

Cioè i punti in basso diventano una curva con concavità verso l'alto, in **rosso**.

Ad un certo punto questa curva ha un flesso e diventa la curva limite superiore. Dove c'è il flesso c'è il **punto critico**, dove le curve hanno pendenza maggiore.



Abbiamo visto come disegnare il **diagramma hs** delle sostanze.

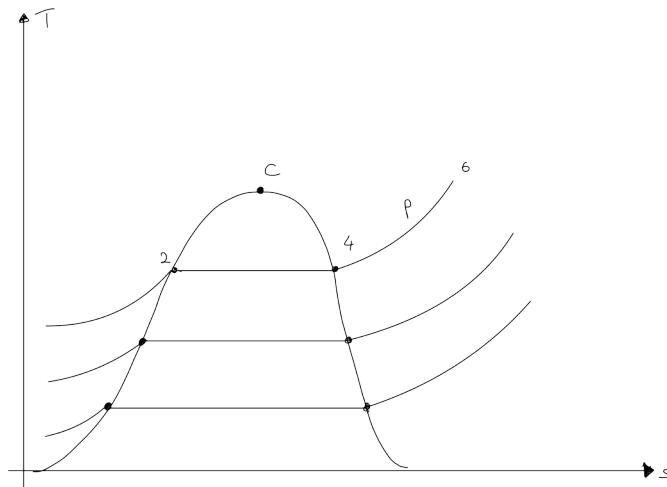
Parte inferiore con concavità in alto e pendenza crescente. Nel punto critico si ha il massimo della pendenza ed un flesso (curva limite superiore) poi la concavità si inverte.

## Diagramma Ts

Abbiamo visto che nel diagramma temperatura-entropia la pendenza dell'isobara è pari a

$$\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p = \frac{T}{c_p}$$

quindi con concavità verso l'alto (se cresce  $T$  e  $c_p$  è costante allora cresce la pendenza)



Diminuendo la temperatura al punto 4 abbiamo il cambio di stato da aeriforme a liquido e continuando a raffreddare si forma sempre più liquido ma essendoci un cambiamento di stato la temperatura rimane costante finché tutto l'aeriforme è diventato liquido. Raffreddando ancora la temperatura del liquido diminuisce ancora sempre con un esponenziale con la concavità verso l'alto.

Analizziamo la pendenza dell'isobara tra le curve limiti. Il calore specifico definito come  $dq/dT$ , durante il cambiamento di stato assume un valore infinito e allora la pendenza delle curva diventa nulla.

PER QUANTO CONCLUSO POSSIAMO FAR RIFERIMENTO AL CAPITOLO 7 DEL LIBRO DELLE LEZIONI CIOÈ "PROPRIETÀ DELLE SOSTANZE" CHE SI CONCLUDE CON LE MISCELE DI ARIA E VAPORE CHE TRATTEREMO CON L'ING. PETRACCI SIA DAL PUNTO DI VISTA TEORICO CHE NUMERICO → **ESERCITAZIONI**.

QUESTO CAPITOLO SI CONCLUDE CON LA TRATTAZIONE DEI **GAS REALI**:

## Gas reali: equazioni del viriale

Sono due:

$p v = A + B p + C p^2 + \dots$ , esprime il prodotto  $p v$  come una serie di potenze della pressione

$p v = A \left( 1 + \frac{B'}{v} + \frac{C'}{v^2} + \dots \right)$ , esprime il prodotto  $p v$  in funzione di  $v$ .

B e C sono numeri caratteristici del gas.

Queste equazioni hanno come limite il caso del gas perfetto cioè quando  $p \rightarrow 0$  e  $v \rightarrow \infty$ , cioè quando c'è poco gas e molto rarefatto dove allora  $p v = A = RT$ .

Vogliamo trovare allora una relazione tra  $B, B', C, C'$  perchè solitamente ci si ferma alla seconda potenza.

Prendiamo allora la pressione dalla 2° eq e sostituiamo nella prima:

$$p = \frac{RT}{v} \left( 1 + \frac{B'}{v} + \frac{C'}{v^2} + \dots \right)$$

$$\text{Cioè } RT \left( 1 + \frac{B'}{v} + \frac{C'}{v^2} \right) = RT + B \frac{RT}{v} \left( 1 + \frac{B'}{v} + \frac{C'}{v^2} \right) + C \frac{R^2 T^2}{v^2} \left( 1 + \frac{B'}{v} + \frac{C'}{v^2} \right)^2$$

Facciamo allora i prodotti e trascuriamo tutte le potenze superiori a  $v^2$

$$RT \frac{B'}{v} + RT \frac{C'}{v^2} = \frac{BRT}{v^2} + \frac{BB'RT}{v^2} + \frac{CR^2T^2}{v^2}$$

Uguagliamo allora i termini con  $v$  e quelli con  $v^2$

$$- RT \frac{B'}{v^2} = B \frac{RT}{v^2}, \text{ cioè } B = B'$$

$$- RT \frac{C'}{v^2} = BB' \frac{RT}{v^2} + C \frac{R^2 T^2}{v^2}, \text{ cioè } C' = BB' + CRT$$

Mettendo insieme i risultati otteniamo:  $C' = B^2 + CRT$ .

Sostituendo allora nelle serie- di potenze e otteniamo:

$$pv = RT + p(B + Cp) = RT + p \cdot f(p)$$

$$pv = RT + \frac{RT}{v} \left( B + \frac{C'}{v} \right) = RT + \frac{RT}{v} \cdot f(p), \text{ dove } f(p) \text{ è funzione anche di } B \text{ e } C.$$

Il parametro  $B$  ha un significato fisico importante (è in relazione con le forze di attrazione e repulsione tra le molecole), cioè

- Se  $T$  è basso  $\rightarrow B < 0$
- Se  $T$  è alta  $\rightarrow B > 0$

Allora  $\exists$  tempratura  $T_B$  t.c.  $B = 0$  e prende il nome di **Temperatura di Boyle**.

Allora ci chiediamo se è possibile descrivere il comportamento generale dei gas con delle relazioni indipendenti dal comportamento e delle proprietà di ogni singolo gas.

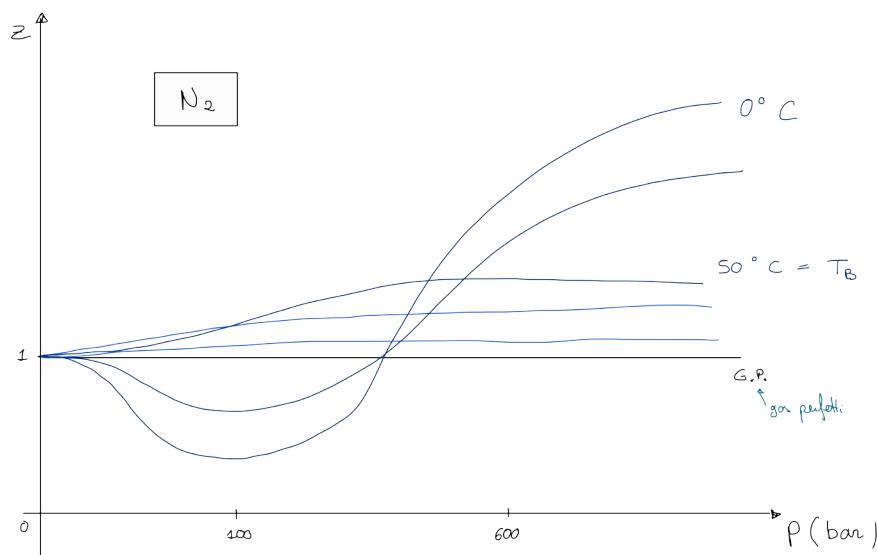
Prendiamo ad esempio il buco dell'ozono provocato dai fluoroclorocarburi, utilizzati negli anni 50/60 per i clichi frigoriferi. Questo porta alla ricerca di un'equazione che rappresenta diversi tipi di gas con uno stesso tipo di equazione, cioè:

**Equazione degli stati corrispondenti**

Partiamo dalla definizione del **fattore di comprimibilità**:  $z = \frac{pv}{RT}$

Che chiaramente per un gas perfetto  $z = 1$ . Per i gas reali invece all'aumentare della pressione.

Ad esempio vediamo il diagramma per il fattore di comprimibilità dell'azoto:



FATTORE DI COMPRIMIBILITÀ VS PRESSIONE PER L'AZOTO

Aumentando la pressione e allontanandosi in alto sopra il punto critico il comportamento tende nuovamente a quello dei gas perfetti. Aumentando la temperatura ottengo una curva finché vedo che per una temperatura di 50°C la pendenza tende ad essere orizzontale e questa è proprio la temperatura di Boyle. Se aumento oltre i 50 la pendenza non è più zero ma il comportamento tende ad essere più vicino ad un gas perfetto.

Vediamo che la pendenza a 50°C è zero in partenza e infatti dalle equazioni del viriale esprimiamo il fattore di compatibilità  $z$  e facciamone la derivata:  $z = \frac{pv}{RT} = A + Bp + Cp^2 \rightarrow \frac{dz}{dp} = B + 2Cp$ , quindi in prima approssimazione la pendenza è

lineare in  $p$  se  $B = 0$  (condizione per cui ottengo la  $T_B$ ).

Aumentando ancora ulteriormente la temperatura, le curve tendono all'orizzontale  $z = 1$ , (in **azzurro**) cioè a comportarsi come gas perfetti.

Poiché il diagramma zp è diverso per ogni gas si introducono i seguenti rapporti:

- Pressione ridotta  $p_R = \frac{p}{p_C}$
- Temperatura ridotta  $T_R = \frac{T}{T_c}$
- Volume specifico ridotto  $v_R = \frac{v}{v_C}$

Ovviamente  $p_R = v_R = T_R = 1$  se siamo in corrispondenza del punto critico, qualsiasi legge degli stati corrispondenti è verificata nel punto critico mentre lontano dal punto critica tendono ad essere meno valide.

L'equazione degli stati corrispondenti che cerchiamo è quindi una legge  $f(p_R, T_R, v_r) = 0$ , funzione di queste tre variabili.

Chiaramente ogni gas al punto critico ha un fattore di comprimibilità al punto critico diverso:  $z_c = \frac{p_C v_C}{R T_C}$

Possiamo allora riscrivere il volume ridotto  $v_R$  andando a sostituire  $v$  e  $v_C$  in funzione di  $z$  e  $z_C$

$$v_R = \frac{v}{v_C} = \frac{zRT}{p} \frac{p_C}{z_C RT_c} = \frac{z}{z_C} \cdot \frac{T_R}{p_R}$$

Quindi abbiamo espresso il volume ridotto in funzione di  $T_R, p_R$  e  $z/z_C$

Sostituendo allora l'espressione precedente al  $v_R$  ho una funzione di  $f(T_R, p_R, z/z_C) = 0$

Se esistesse una relazione di questo tipo per lo stesso rapporto  $z/z_C$  dovremmo avere la stessa  $T_R$  e  $p_R$ .

Però,  $z_C = 0,23$  per il vapore d'acqua e  $z_C = 0,31$  per l'olio e quindi questa equazione non è sufficiente a rappresentare il comportamento dei gas perfetti, cioè non è sufficiente quando siamo lontani dal punto critico.

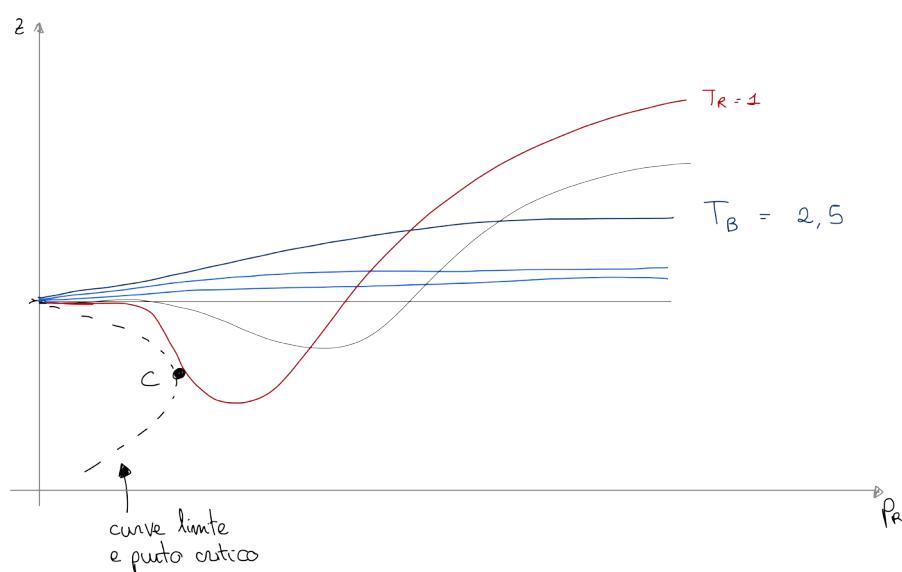
Modifichiamo per tanto il volume ridotto moltiplicandolo per  $z_C$ , cioè  $v_r^* = v_R \cdot z_C = z \cdot \frac{T_R}{p_R}$  che prende il nome di **volume ridotto ideale**.

Allora la nuova relazione sarà funzione di  $f'(p_R, T_R, v_r^*)$

Per cui questa relazione sarà funzione di  $f'(p_R, T_R, v_R) = f'(p_R, T_R, z) = 0$

Inoltre, se ammettiamo che  $z$  sia esplicitabile in funzione di  $p_R$  e  $T_R$  otteniamo:  $z = g(T_R, p_R)$

L'andamento di  $z$  in funzione di  $p_R$  si può trovare sperimentalmente considerando le curve limiti e l'isoterma critica diventa l'isoterma per  $T_R = 1$  (in rosso). Mentre per  $T_B = 2,5$  è l'isoterma di Boyle, con la temperatura  $T_B$ . Andando oltre si vede che  $z$  tende ad essere orizzontale, cioè a comportarsi come gas perfetti.



Cioè questo è il ragionamento generale che si può fare sui gas reali, poi nello specifico si può assumere un'equazione piuttosto che un'altra di quelle proposte in letteratura.

Sono state proposte diverse equazioni in letteratura, tra cui

### Equazione di Van der Waals

(1873), modifica l'eq dei gas perfetti tenendo conto dei comportamenti delle molecole

$$p v = R_u T \longrightarrow p \tilde{v} = R_u T$$

Nell'equazione di Van der Waals il volume molare viene diminuito dal valore del volume delle molecole stesse ( **$b$  = covolume**) per tener conto della loro dimensione finita. Invece la pressione è aumentata in relazione al volume specifico molare tramite  **$a$**  (se  $\tilde{v}$  è molto grande, la  $p$  non ne risente ma se è piccolo le molecole sono soggette a forze di repulsione e contribuiscono alla pressione del sistema), cioè:

$$(\tilde{v} - b) \left( p + \frac{a}{\tilde{v}^2} \right) = R_u T$$

Con  **$a, b$**  parametri caratteristici delle varie sostanze.

Chiaramente se  $\tilde{v}$  è molto grande,  $b \ll \tilde{v}$  e  $\frac{a}{\tilde{v}^2} \ll p$  e otteniamo nuovamente  $p \tilde{v} = R_u T$

Possiamo rappresentarlo nel piano  $p v$  dove già abbiamo rappresentato l'esperienza di Andrews:

$$p = \frac{R_u T}{\tilde{v} - b} - \frac{a}{\tilde{v}^2} \quad (@)$$

All'interno il comportamento si modifica e diventa una specie di sinusode che tiene conto del sottoriscaldamento e del surriscaldamento delle molecole.

Rispetto alla situazione di equilibrio dell'esperienza di Andrews l'andamento dell'equazione di Van der Waals (in **rosso**) tra le curve limite spiega il comportamento negli *stati metastabili* (non di equilibrio) che danno comportamenti transitori se si procede in maniera troppo rapida.

Possiamo vedere di studiare il comportamento di Van der Waals vicino al punto critico che essendo un flesso orizzontale avrà derivata prima e seconda nulla:

$$\frac{\partial p}{\partial v} \Big|_C = - \frac{R_u T_c}{(\tilde{v}_c - b)^2} + \frac{2a}{\tilde{v}^3} = 0$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \Big|_C = \frac{2R_u T_c}{(\tilde{v}_c - b)^3} - \frac{6a}{\tilde{v}^4} = 0$$

Abbiamo ottenuto 2 equazioni che mettono in relazione  $T_c$  e  $v_c$  nelle due incognite  **$a$  e  $b$**

VEDERE E FARE TUTTI I PASSAGGI

Per arrivare ai seguenti risultati:

$$b = \frac{\tilde{v}_c}{3} \text{ e } a = 3v_c^2 \quad p_c = \frac{9}{8} R_u T_c v_c \text{ e trovo } R_u = \frac{8}{3} p_c \tilde{v}_c T_c$$

Da cui, sostituendo il valore del volume critico, ricavo:

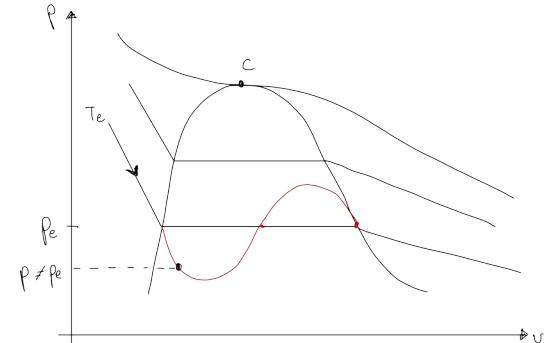
$$\tilde{v}_c = \frac{3}{8} R_u \frac{T_c}{p_c} \longrightarrow b = \frac{1}{8} R_u \frac{T_c}{p_c} \text{ e } a = \frac{27}{64} R_u^2 \frac{T_c^2}{p_c}$$

Poiché abbiamo definito il seguente fattore di comprimibilità al punto critico otteniamo:  $z_c = \frac{p_c \tilde{v}_c}{R_u T_c} = \frac{3}{8} = 0,375$

Allora l'equazione di Van der Waals troverebbe  $z_c = 0,375$  per ogni gas mentre abbiamo visto che  $z_c = 0,23$  per l'H<sub>2</sub>O e  $z_c = 0,308$  per l'He per cui l'equazione di Van der Waals con 2 costanti  **$a$  e  $b$**  al punto critico non funziona benissimo.

Scriviamo allora il fattore di comprimibilità dell'equazione di Van der Waals sfruttando (@) e otteniamo:

$$z = \frac{p \tilde{v}}{R_u T} = \frac{\tilde{v}}{\tilde{v} - b} - \frac{a}{R_u T \tilde{v}}$$



Il primo termine può essere riscritto tramite la densità molare:  $\frac{\tilde{v}}{\tilde{v} - b} = \frac{1/\tilde{\rho}}{1/\tilde{\rho} - b} = \frac{1}{1 - b\tilde{\rho}}$ , e facendo lo sviluppo con la serie

$$\text{di Mc Laurin } = 1 + b\tilde{\rho} + b'^2\tilde{\rho}^2 + \dots = 1 + \frac{b'}{\tilde{v}} + \frac{b'^2}{\tilde{v}^2} + \dots$$

$$\text{Allora sostituiamo: } z = 1 + \frac{1}{\tilde{v}} \left( b' - \frac{a}{R_u T} \right) + \frac{b'^2}{\tilde{v}^2}$$

E in conclusione l'equazione di Van der Waals si può scrivere come un'equazione del viriale con una serie di potenze di  $\tilde{v}$ , cioè:

$$p\tilde{v} = R_u T + \frac{R_u T}{\tilde{v}} \left( b' - \frac{a}{R_u T} \right) + \frac{R_u T}{\tilde{v}^2} \cdot n'^2$$

Questa è l'equazione degli stati corrispondenti nella forma del viriale per i gas che seguono Van der Waals.

### Equazione di Dieterici

(1899)

Modifica l'equazione di Van der Waals tenendo sempre conto delle caratteristiche delle molecole (volume proprio e interazione) ma nel seguente modo:

$$p = \frac{RT}{v - b} e^{-\frac{a}{RTv}}$$

La sua interpretazione con gli stati corrispondenti è data dalla seguente equazione:  $p_R = \frac{T_R}{v_R^* - 1/e^2} \cdot e^{-\frac{4}{T_R v_R^* e^2}}$

Infine, l'equazione di Dieterici può essere scritta anche nella forma del viriale:

$$z = 1 + \frac{1}{e^2} \left( 1 - \frac{4}{T_R} \right) \frac{1}{v_R^*} + \frac{1}{e^4} \left( 1 - \frac{4}{T_R} - \frac{8}{T_R^2} \right) \frac{1}{v_R^{*2}}$$

Questa equazione di Dieterici è stata accettata perché migliorava l'approssimazione di  $z_C$  rispetto all'eq di Van der Waals:

$z_C = 0,271$  e questo valore è più vicino ai valori reali dei 3 gas presi come esempio.

### Equazione di Berthelot

(1900)

Riprende Van der Waals con una leggera modifica:

$$p = \frac{RT}{v - b} - \frac{a}{Tv^2}$$

Interpretandola come una legge per gli stati corrispondenti si ottiene:  $p_R = \frac{T_R}{v_R^* - 1/8} - \frac{27}{64} \frac{1}{T_R v_R^{*2}}$

Infine, può essere scritta nella forma del viriale:  $z = 1 + \left( \frac{9}{128} - \frac{27}{64 T_R^2} \right) \frac{1}{v_R^*} + \left( \frac{9}{128} \right)^2 \cdot \frac{1}{v_R^{*2}} + \dots$

Anche questa equazione di Berthelot fornisce una stima migliore del  $z_C$  rispetto a Van der Waals.

### Equazione di Beattie-Bridgman

(1920)

È una relazione modificata dell'eq di Van der Waals e contiene tre costanti ( $A, B, \epsilon$ ) migliorando ancora di più la stima di  $z_C$

$$p = RT \frac{1 - \epsilon}{v^2} (v + B) - \frac{A}{v^2}$$

La corrispondente equazione del viriale è:  $z = 1 + \frac{\beta}{v} + \frac{\gamma}{v^2} + \frac{\delta}{v^3}$

$$\text{Con } \beta = B_0 - \frac{A_0}{RT} - \frac{e}{T^3}, \gamma = -B_0 b + \frac{A_0 a}{RT} - \frac{e B_0}{T^3} \text{ e } \delta = \frac{B_0 b e}{T^3}$$

Dove  $A_0, B_0$  sono definiti come:

[ASPETTARE IL FILE CON LE DEFINIZIONI ]

**Osservazione:**

Quando siamo nella zona dei vapori surriscaldati l'equazione dei gas perfetti è sufficientemente accurata, per poi confrontare la soluzione trovata con dati sperimentali che si hanno a disposizione.

Vediamo che ripercussioni ha l'ipotesi dei gas reali:

**Esperienza di Joule**

- Abbiamo visto che  $du = c_v dT + \left[ T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - p \right] dv$

Avevamo visto che conveniva fare la derivata parziale della pressione rispetto la temperatura conoscendo però l'eq di stato. Assumiamo l'eq di stato sia quella di Van der Waals e calcoliamo la derivata parziale:

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2} \rightarrow \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v = \frac{R}{v-b}$$

$$\text{Sostituendo } du = c_v dT + \left[ \frac{RT}{v-b} - p \right] dv = c_v dT + \frac{a}{v^2} dv$$

Ricordiamo che nel caso dei gas perfetti  $du = c_v dT$ , quindi nell'esperienza di Joule dove  $du = 0$ , si otteneva un  $dT=0$ .

Se segue Van der Waals c'è anche la dipendenza dal volume specifico.

Facendo l'esperienza di Joule per un gas reale che segue la legge di Van der Waals si trovano delle variazioni di temperatura  $dT \neq 0$  in relazione alle variazioni del volume specifico  $dv$

- Andando avanti:  $dq = du + pdv$

$$\text{Sostituendo } dq = c_v dT + \left[ p + \frac{a}{v^2} \right] dv \text{ e consideriamo van der Waals } dq = c_v dT + \frac{RT}{v-b} dv$$

$$\text{In una trasformazione a } T=\text{cost}, dT=0 \text{ e allora } dq = \frac{RT}{v-b} dv \text{ allora } q = RT \ln \left( \frac{v_2-b}{v_1-b} \right) \neq 0$$

Quindi se il gas obbedisce alla legge di Van der Waals se  $T=\text{cost}$  il calore  $q$  non è nullo, seppur piccolo.

- Per il lavoro scambiato per un sistema chiuso ( $d\ell = p dv$ )

$$\ell = \int_1^2 p dv$$

Allora considero Van der Waals e ottengo  $\ell = \int_1^2 \left( \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2} \right) dv$  e se considero la  $T=\text{cost}$

$$\ell = RT \ln \left( \frac{v_2-b}{v_1-b} \right) - \left( \frac{a}{v_1} - \frac{a}{v_2} \right)$$

- Mentre per il lavoro in un sistema aperto ( $d\ell = -v dp$ )

$$\ell = - \int_1^2 v dp = \int_1^2 d(vp) - \int_1^2 p dv = (p_2 v_2 - p_1 v_1) - RT \ln \left( \frac{v_2-b}{v_1-b} \right) + \left( \frac{a}{v_1} - \frac{a}{v_2} \right)$$

**Esperienza di Joule-Thompson**

- Abbiamo visto  $dh = c_p dT \left[ v - T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right] dp$

In cui abbiamo trovato il coefficiente di Joule-Thompson  $c_{JT} = \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_h$  dove ottenevamo l'espressione considerando  $dh = 0$ , cioè si trovava  $c_{JT} = \frac{dT}{dp} = \frac{1}{c_p} \left[ T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p - v \right]$

Bisogna calcolare  $\frac{\partial v}{\partial T}$  dobbiamo trovare l'espressione di  $v$  in funzione di  $T$  e supponiamo che il gas segua l'eq di van der Waals

anche se tuttavia per trovare l'espressione di  $v$  in funzione di  $T$  possiamo farlo soltanto in maniera approssimata, cioè

$$p = \frac{RT}{v - b} - \frac{a}{v^2} \rightarrow \left( p + \frac{a}{v^2} \right) = \frac{RT}{v - b} \rightarrow v - b = \frac{RT}{p + a/v^2} + b = \frac{RT}{p} \left( \frac{1}{1 + a/pv^2} \right) + b$$

$$\text{moltiplichiamo e dividiamo per } 1 - a/pv^2 \text{ e otteniamo } v = \frac{RT}{p} \left( \frac{1 - a/pv^2}{1 - \cancel{a^2/p^2v^4}} \right) + b$$

Facciamo allora altre ipotesi semplificative: immaginiamo che  $p^2v^4$  sia molto grande e quindi si trascura rispetto a 1:

$$v = b + \frac{RT}{p} - \frac{aRT}{p^2v^2}$$

Inoltre nel 3° termine supponiamo di poter considerare  $p v = RT$  come nel caso dei gas perfetti, ma limitatamente a quest'ultimo termine.

$$v = b - \frac{RT}{p} - \frac{a}{RT}$$

Così abbiamo ottenuto un'espressione di  $v$ :

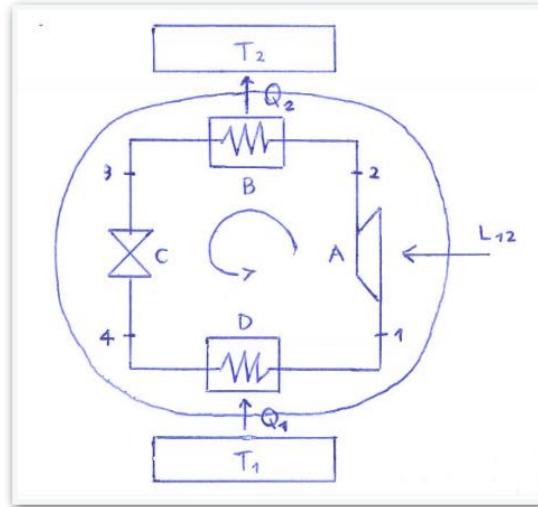
$$\left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = \frac{R}{p} + \frac{a}{RT^2}$$

E allora a  $c_{JT} = \frac{1}{c_p} \left[ \frac{RT}{p} + \frac{Ta}{RT^2} - v \right]$  sostituisco  $v$  e allora ottengo  $c_{JT} = \frac{1}{c_p} \left[ \cancel{\frac{RT}{p}} + \frac{a}{RT} - b - \cancel{\frac{RT}{p}} + \frac{a}{RT} \right]$

$$\text{Cioè } c_{JT} = \frac{1}{c_p} \left( \frac{2a}{RT} - b \right)$$

ANDANDO A VEDERE IL LIBRO DI LEZIONI IL CAPITOLO SUCCESSIVO "IMPIANTI TECNICI", IL PRIMO ARGOMENTO È RIVOLTO PRINCIPALMENTE AGLI IMPIANTI MOTORE, CIOÈ IMPIANTI CHE PRODUCONO LAVORO MECCANICO COME LA MACCHINA DI NEWCOMEN O LA MACCHINA DI WATT. UNA DELLE PARTI PIÙ IMPORTANTI PER GLI ING. MECCANICI PER FISICA TECNICA. PER GLI ING. MEDICI NON AFFRONTIAMO QUESTO ARGOMENTO MA SALTIAMO AL PARAGRAFO SUCCESSIVO "**IMPIANTI FRIGORIFERI**" INTENDENDO QUELLI CHE SERVONO PER RAFFREDDARE, CIOÈ CICLI INVERSI CHE UTILIZZANO IL LAVORO PER COMPIERE CERTE TRASFORMAZIONI COME LA SOTTRAZIONE DI CALORE A BASSA TEMPERATURA (FRIGORIFERO) O LA CESSIONE DI CALORE AD ALTA TEMPERATURA (POMPA DI CALORE).

Alla fine del corso ci spiegherà tutti i simboli del **ciclo frigorifero**:

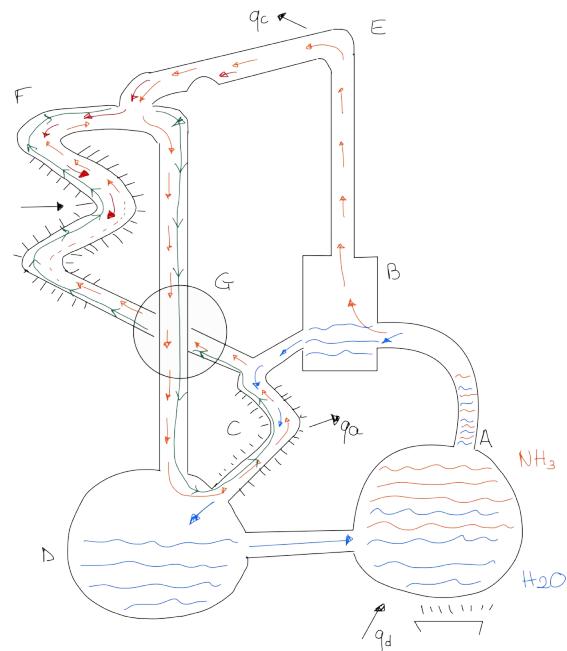


Per noi sarà fondamentale imparare bene:

- **Miscele aria umida** o **aria/vapore**, connesse con il benessere igrometrico degli edifici (comfort)
- **Cicli frigoriferi**, a partire dal raffreddamento dei cibi al mantenimento dei freezer medicali o impianti criogenici che conservano vicino lo zero assoluto le proprietà della materia

# FISICA TECNICA

Settimana 4



**FRIGORIFERO AD ASSORBIMENTO ELECTROLUX**

# Indice settimana 4

Indice settimana 4	2
martedì 13 ottobre 2020 - Lezione 10	3
Andare a vedere i file aggiornati nel materiale!	3
<b>Impianti frigoriferi</b>	<b>3</b>
<i>Ciclo frigorifero a compressione di vapore</i>	3
<i>Diagramma pv</i>	4
<i>Diagramma Ts</i>	4
<i>Diagramma hs</i>	5
<i>Diagramma ph</i>	5
<i>Progettazione</i>	7
<i>Ciclo con camera di separazione (o camera flash)</i>	8
<i>Ciclo frigorifero ad H<sub>2</sub>O con elettore</i>	9
mercoledì 14 ottobre 2020 - Lezione 11	11
<i>Frigorifero ad aria</i>	11
<i>Impianto di aria condizionata per aerei</i>	12
<i>Impianti di liquefazione dei gas</i>	13
<i>Ciclo Linde</i>	14
<i>Dewar</i>	14
<i>Kamalring-Omnes</i>	15
<i>Ciclo Claude</i>	15
<i>Impianto misto</i>	15
<i>Impianto inverso ad assorbimento</i>	16
<i>Ciclo frigorifero ad assorbimento Electrolux</i>	18
giovedì 15 ottobre 2020 - Lezione 12	19
<b>Fenomeni termoelettrici</b>	<b>19</b>
<i>Effetto Seebeck</i>	19
<i>Effetto Peltier</i>	19
<i>Effetto Thomson</i>	19
<i>Ciclo frigorifero ad effetto termoelettrico</i>	20

# Andare a vedere i file aggiornati nel materiale!

## Impianti frigoriferi

PER IL LIBRO:

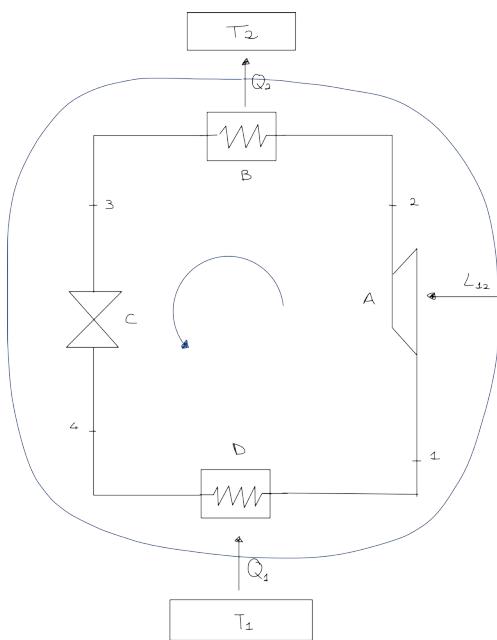
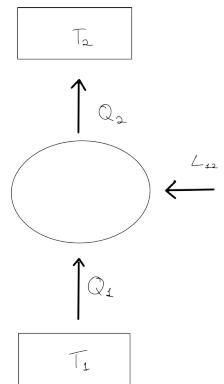
ABBIAMO SALTATO L'ULTIMO PARAGRAFO DELLE "PROPRIETÀ DELLE SOSTANZE" (MISCELE ARIA UMIDA) CHE VEDREMO CON L'ING PETRACCI. ADESSO PASSIAMO AL CAPITOLO 8: "IMPIANTI TECNICI" DI CUI NOI SALTIAMO GLI IMPIANTI MOTORE E PASSIAMO AL SECONDO PARAGRAFO "IMPIANTI FRIGORIFERI".

### Ciclo frigorifero a compressione di vapore

Ricordiamo lo schema termodinamico del ciclo inverso dove abbiamo una sorgente inferiore  $T_1$  e una superiore  $T_2$ . Forniamo lavoro al sistema che (oggi vediamo come) sottrae calore  $Q_1$  alla sorgente inferiore e grazie al lavoro cede  $Q_2$  alla sorgente superiore.

Per un esempio domestico la sorgente inferiore è quanto c'è nel frigorifero, pareti comprese, con una temperatura tipica di 4°C tali da non congelare l'acqua. Questo calore  $Q_1$ , tenendo il frigorifero chiuso, viene dall'esterno in quanto la stanza è a 20°C e cederà comunque del calore tramite le pareti che, per quanto isolate, lasceranno passare comunque un certa quantità di calore. Cioè  $Q_1$  deve essere continuamente sottratto!

Il lavoro è chiaramente fornito dalla corrente elettrica.  
 $Q_2$  è invece il calore fornito all'aria della stanza.



CICLO FRIGORIFERO A COMPRESSIONE DI VAPORE

Per realizzare questo scambio di calore  $Q_1$  si fa passare un fluido con una temperatura inferiore a  $T_1$  (nel frigo domestico si parla di fluido frigorifero che solidifica a  $T$  inferiori a quella dell'acqua, es -50°C) nella serpentina D, cioè uno scambiatore di calore che in questo caso è un **vaporizzatore** in cui il fluido entra liquido ed esce vapore.

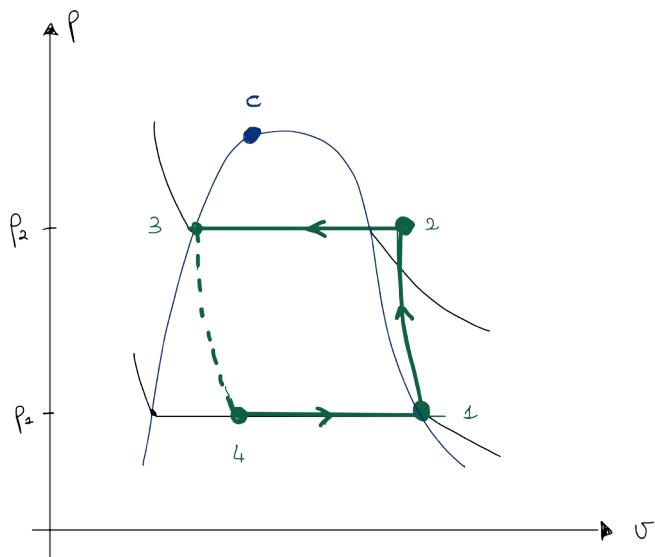
Poi un **compressore** A, comandato dal motore elettrico, lo comprime e poi ad alta pressione (ancora vapore) viene ricondensato attraverso un altro scambiatore di calore B, un **condensatore**, che cede calore alla cucina. Poi il liquido ad alta pressione si fa espandere in una **valvola di laminazione** C e ricomincia il ciclo.

I fluidi frigoriferi inizialmente erano fluidi biodegradabili o ecologici come l'ammoniaca  $\text{NH}_3$  poi (dopo la seconda guerra mondiale) entrarono in uso i clorofluorocarburi, composti chimici in cui l'idrogeno del metano  $\text{CH}_4$  è sostituito con molecole di cloro e fluoro, come il freon che portarono alla distruzione dello strato di ozono. Questi sono stati sostituiti da nuove miscele.

Riportiamo però la descrizione e i diagrammi per l'ammoniaca,  $\text{NH}_3$ .

Riportiamo il ciclo frigorifero nei 3 diagrammi noti **pv**, **Ts** e **hs**.

## Diagramma pv

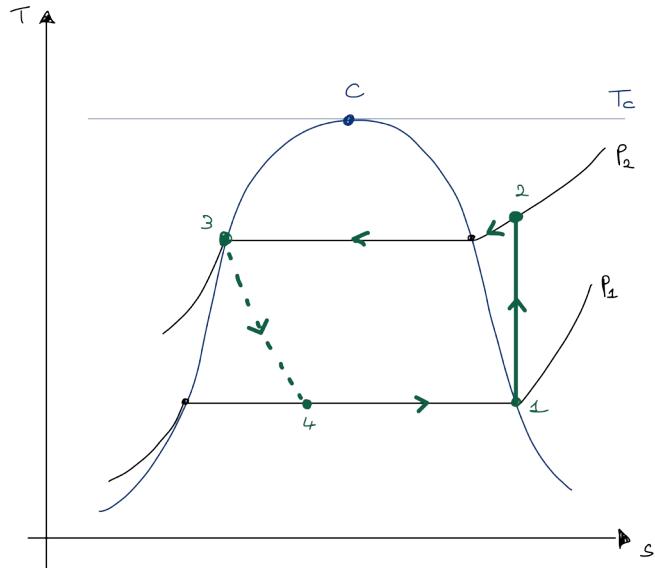


1 è l'uscita dal vaporizzatore ad alta temperatura che sottrae il calore  $Q_1$ , quindi il punto di ingresso nel compressore. Questo comprime da  $p_1$  a  $p_2$  nel punto 2. Dal punto 1 (vapore saturo secco,  $x = 1$ ) al punto 2 (vapore riscaldato), si immagina sia un'adiabatica isoentropica.

Qui il vapore surriscaldato entra nel condensatore che cede calore  $Q_2$  alla sorgente superiore e durante la condensazione passa dal vapore surriscaldato al liquido saturo ( $x = 0$ ).

Poi facciamo espandere il liquido attraverso una laminazione, trasformazione irreversibile ma tale che l'entalpia finale in 4 sia uguale a quella iniziale in 3. Il fluido si espande e diminuisce la pressione per cui lo stato (dalla curva limite inferiore) si sposta al punto 4 dove  $x \neq 0$  per via della parziale vaporizzazione. A questo punto il vapore saturo umido (liquido+vapore indicati da  $x_4$ ) entrano nel vaporizzatore che esce nuovamente nel punto 1 per rientrare nel compressore.

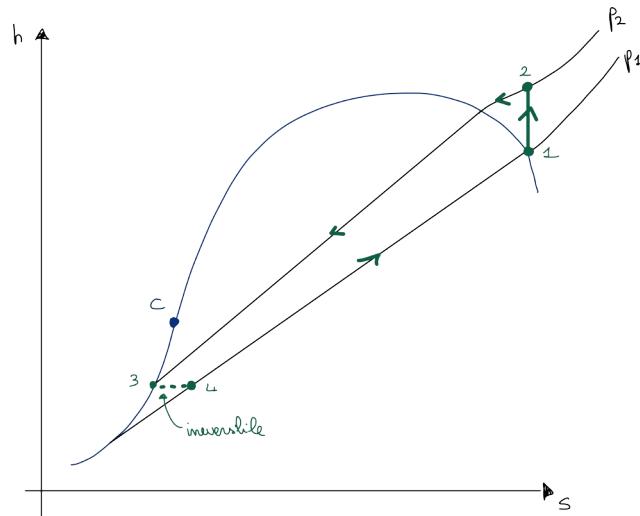
## Diagramma Ts



Disegno prima le curve limiti inferiore e superiore (in blu, prima e dopo il punto critico). Ricordando la temperatura critica (orizzontale) e le isobare. Riportiamo i punti.

Punto 1 è sulla curva limite superiore alla temperatura  $T_1$  e la trasformazione 1-2 (supposta adiabatica reversibile → isoentropica) qui è una curva verticale che arriva fino a  $T_2$ . Nella trasformazione successiva diminuisce la temperatura da vapore si arriva alla temperatura di equilibrio per poi continuare la liquefazione lungo un'isotermobarica per arrivare al punto 3. 3-4 è sempre un'irreversibile di espansione compiuta nella valvola per cui l'entropia iniziale è aumentata e la differenza di entropia è esattamente la sorgente entropica  $\Delta s_s$  che possiamo considerare di prima specie. Il punto 4 ha lo stesso  $x_4$  del diagramma pv.

## Diagramma hs



La curva limite inferiore è un esponenziale crescente con la concavità in alto. Il punto critico è il punto di flesso.

Partiamo dal punto 1, sempre sulla curva limite superiore alla pressione  $p_1$ , si comprime isoentropicamente e si arriva a  $p_2$ .

Si osservi che la curva a  $p_2$ , all'interno delle curve limiti, è una retta con la stessa pendenza che rimane fuori (la pendenza di  $p_2$  è superiore a quella di  $p_1$ ). Diminuisco la temperatura e inizio l'isotermobarica di liquefazione da 2 a 3.

A 3 sono all'ingresso della valvola di laminazione dove avviene una trasformazione dove l'entalpia rimane uguale anche se la trasformazione è irreversibile. Da 4 a 1 entro nel vaporizzatore e quindi ritorno al punto 1.

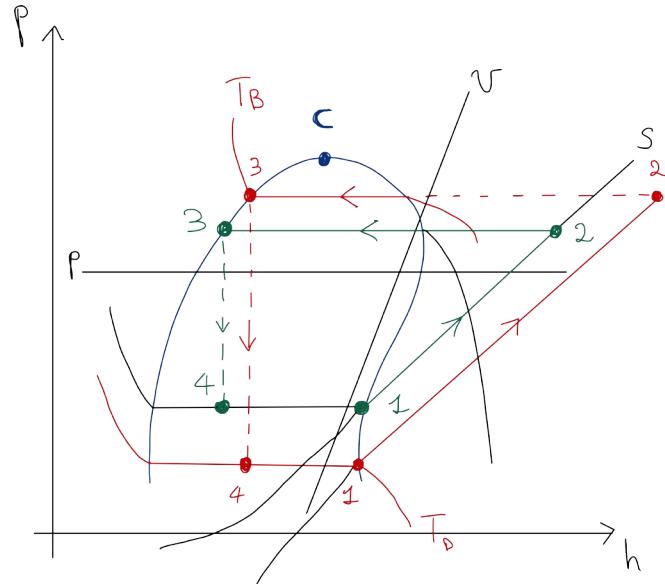
Nei frigoriferi si usa spesso anche il

## Diagramma ph

È il diagramma più usato nella scienza frigorifera. Le curve limiti inferiori e superiori diventano:

- Limite inferiore, concavità verso il basso abbastanza verticale
- Punto critico alla sommità
- Limite superiore, all'inizio tende a diminuire e poi c'è la concavità verso il basso

[ VEDI FIGURA A PG 159 DAL LIBRO ]



Per le trasformazioni:

- Isobare, orizzontali
- Isoentalpiche, verticali
- Isoterme, tendono ad essere verticali nella zona dei liquidi sottoraffreddati, sono isobare tra le curve limiti e tendono ad essere verticali nella zona dei vapori surriscaldati
- Isoentropica, tra le curve limiti non è una retta ma ha concavità verso il basso mentre fuori dalla curva limite è vicina ad una retta.

[ NEL LIBRO LE FIGURE NON SONO UN GRANCHÉ E IL DIAGRAMMA HS NON VA CONSIDERATO DA LIBRO LEZIONI DI TERMODINAMICA ]

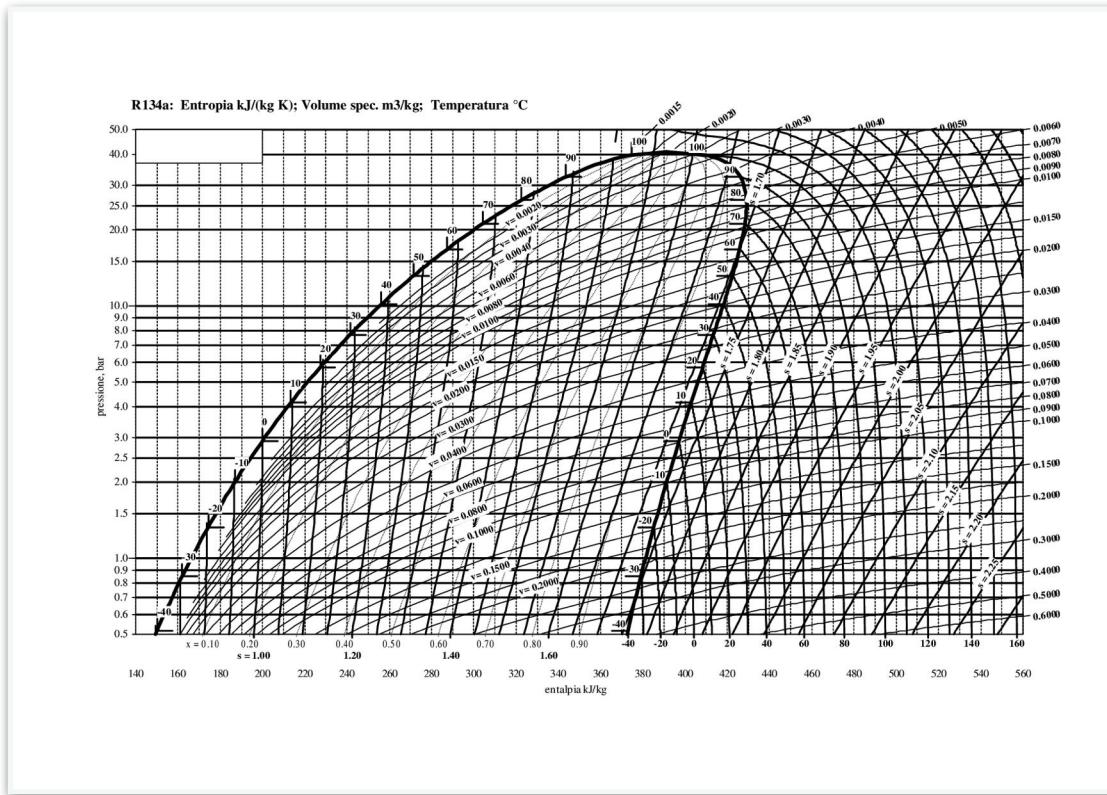


DIAGRAMMA PH GAS REFRIGERANTE R134A

CREDITS: <https://www.docscity.com/it/esercizio-09-r134a-diagramma-p-h-termodinamica-applicata/179926/>

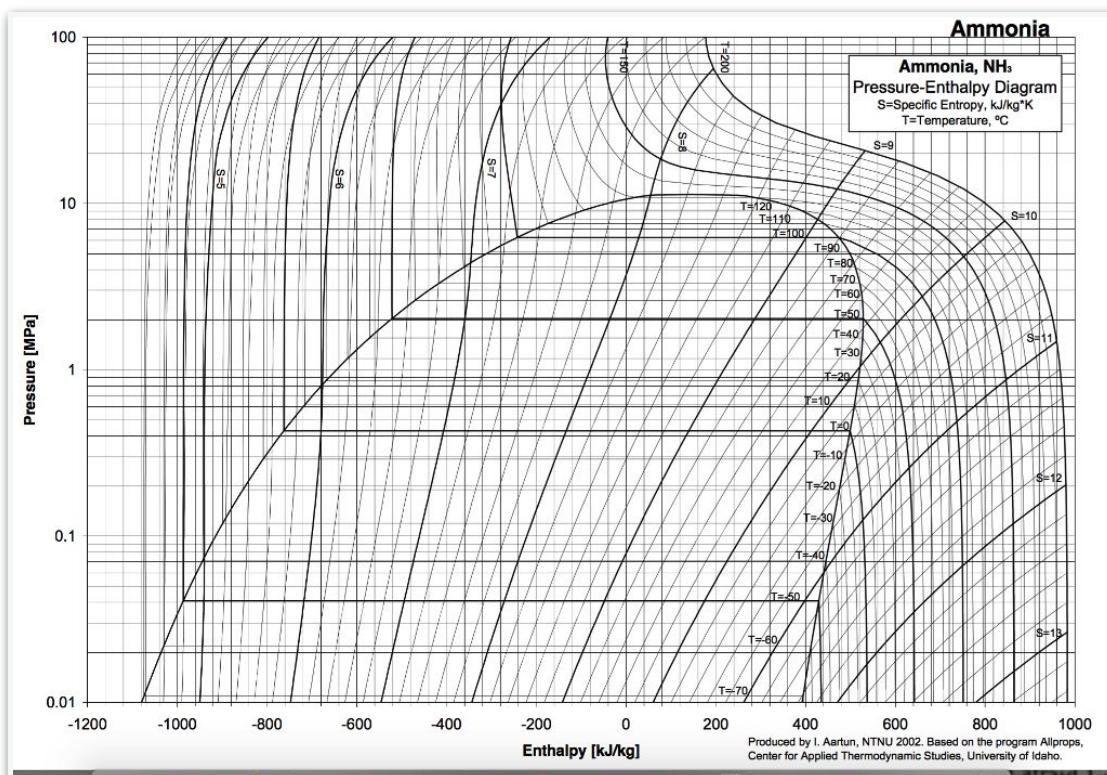
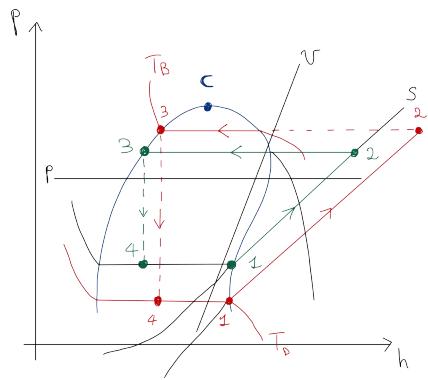


DIAGRAMMA PH AMMONIACA

CREDITS: <https://www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/1-vapor-compression-refrigeration-system-using-ammonia-r-717-refrigerant-operating-evapora-q33413229>

Consideriamo il ciclo in **verde**, punto 1 ingresso nel compressore dove la compressione isoentropica 1-2 è approssimabile con una retta che porta al punto 2, vapori surriscaldati. Da 2 si entra nel condensatore, p costante e la T diminuisce facendo raffreddare il vapore finché tocca la curva limite superiore da cui, continuando, si forma il liquido. Cambiamento di stato isotermobarico finché all'uscita del condensatore il liquido è saturo. Poi si entra nella valvola di laminazione dove la trasformazione con entalpia tale che  $h_4 = h_3$  (NB non è una isoentalpica) irreversibile. Si osservi che l'entropia è aumentata, in figura crescono da sinistra verso destra.



## Progettazione

Da laureati il calcolo della dispersione termica è una cosa facilmente fattibile, basta comprare il software e aver seguito il corso di fisica tecnica.

Parlando in concreto attualmente per l'**ecobonus 110%** : è necessario fare interventi sull'edificio affinché la trasmittanza sia sotto un certo valore, questo si traduce nel fatto che le prestazioni energetiche dell'edificio devono salire di due gradini.

Immaginiamo di dover progettare una cella frigorifera che mantiene la temperatura  $T_1 = -20^\circ\text{C}$ . In casa il freezer solitamente funziona a  $-18^\circ\text{C}$ . La cella deve mantenere questa temperatura e supponiamo (dal grafico precedente) che  $T_1$  sia nel punto 1. Nel diagramma ph (dal libro) possiamo vedere la pressione  $p_1 = 1,9$  bar corrispondente.

La temperatura  $T_2$  è la temperatura ambiente  $T_2 = Ta$  e dal diagramma ph (dal libro) si legge che a  $20^\circ\text{C}$  corrisponde una pressione di **8,5** bar.

Vediamo alcuni criteri di progettazione: supponiamo che il vaporizzatore riesca a vaporizzare tutto il fluido (punto 2) mentre il punto 3 è il punto di uscita liquido del condensatore. Questi sono i due punti di partenza.

Visto che la sorgente deve essere a  $T_1$  e siccome devo fare la sottrazione di calore è necessario che la temperatura del fluido sia inferiore a  $T_1$ . Cioè immagino che la temperatura del fluido sia ad esempio  $T_D$  (in **rosso**) ad esempio si considera spesso negli esempi ed esercizi che sia inferiore di  $10^\circ\text{C}$  così da considerare un certo  $\Delta T$ . Si comprime da  $p_1$  a  $p_2$  ma nuovamente devo poter cedere calore alla sorgente superiore (ambiente) quindi far sì che la temperatura del fluido che condensa sia superiore alla temperatura ambiente, immaginiamo nuovamente un certo  $\Delta T$  tale che porti il fluido ad una temperatura superiore  $T_B$  di  $30^\circ\text{C}$ . Quindi il ciclo con cui devo far funzionare la cella frigorifera a  $-20^\circ\text{C}$  e l'ambiente a  $20^\circ\text{C}$  è in realtà quello in **rosso**.

Cioè abbiamo visito il ciclo termodinamico 1234 fatto con le temperature  $T_1$  e  $T_2$  impostate dalle *condizioni di progetto*, cioè  $-20^\circ\text{C}$  e  $+20^\circ\text{C}$ . Poi facendo le considerazioni con gli scambi di calore con le sorgenti superiore/inferiore e affinché ci sia scambio calore deve essere un  $\Delta T$ . In conclusione il ciclo reale che deve fare l'ammoniaca è quello **rosso**, quello verde ci è servito solo per la costruzione del ciclo effettivo.

Cioè possiamo considerare solo il ciclo rosso.

Questo diagramma è utile poiché si vede come ad ogni ciclo il calore sottratto è  $h_1 - h_4$  ed rappresentato nel diagramma da un segmento.

Cioè abbiamo che  $q_1 = h_1 - h_4$

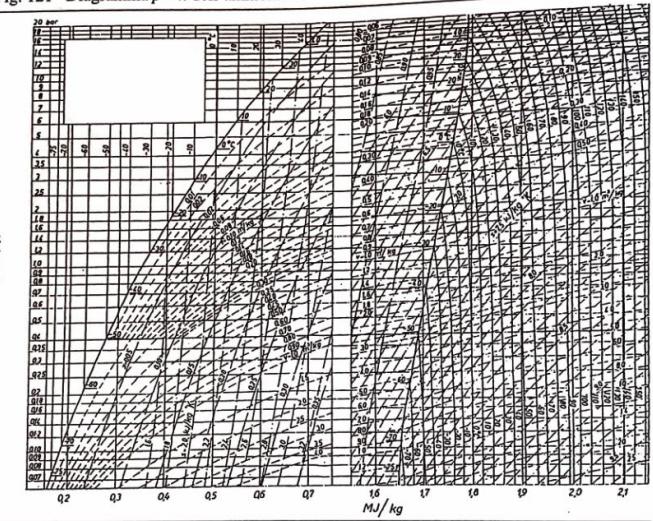
Dobbiamo calcolare (o ricevere come dato) la potenza termica che bisogna sottrarre alla sorgente inferiore  $\dot{Q}_1$  mentre  $q_1$  lo calcoliamo dal diagramma affinché soddisfi le temperature imposte di  $+30^\circ\text{C}$  e  $-30^\circ\text{C}$

$$\text{Allora ricaviamo la portata di fluido frigorifero } \dot{Q}_1 = G q_1 \rightarrow G = \frac{\dot{Q}_1}{q_1}$$

Per il lavoro del ciclo  $\ell_{12} = h_2 - h_1$

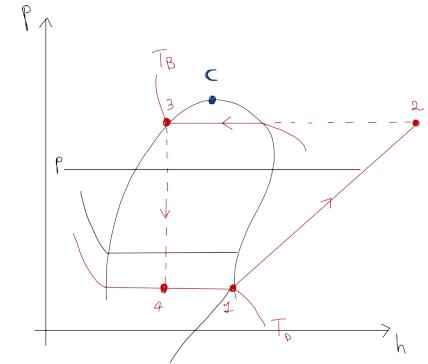
Moltiplicando il lavoro per la portata otteniamo la potenza da fornire al compressore  $P = G \ell_{12} = G (h_2 - h_1)$

Fig. 121 Diagramma  $p - h$  dell'ammoniaca



Fonte: Raznjevic, 1971

DIAGRAMMA PH DAL LIBRO DI LEZIONI DI TERMODINAMICA



Infine per la potenza termica dello scambiatore termico (condensatore) abbiamo che  $q_2 = h_2 - h_3$  e la potenza termica è data da

$$\dot{Q}_2 = G q_2 = G (h_2 - h_3)$$

Invece la potenza termica del vaporizzatore (D) è nota:  $\dot{Q}_1$ .

Sappiamo quindi quanto fluido deve circolare, la potenza da dare al compressore e la potenza del condensatore.

QUESTI DATI SAREMO IN GRADO DI CALCOLARLI SOLO ALLA FINE DEL CORSO!

Possiamo calcolare il **rendimento del ciclo frigorifero**:  $\eta_f = \frac{h_1 - h_4}{h_2 - h_1} = \frac{q_1}{\ell_{12}}$

Inoltre sappiamo che il limite del rendimento di Carnot inverso è:  $\eta_C = \frac{T_1}{T_2 - T_1}$

Abbiamo quindi fatto una progettazione di massima del ciclo frigorifero.

È bene osservare che questo progetto di massima ci permette di valutare dalla portata le dimensioni che devono avere i tubi (maggiore è la portata maggiori saranno i tubi), la potenza del compressore e la potenza termica del condensatore.

Il costo fisso è l'acquisto dell'impianto: compressore, condensatore, vaporizzatore, ecc. E i costi fissi aumentano aumentando la portata.

Mentre i costi operativi o di mantenimento sono legati al rendimento  $\eta_f$  (cioè che si ottiene rispetto ciò che si spende), infatti maggiore è il rendimento dell'impianto e minore è il lavoro che si spende.

Indicativamente la scelta tra un tipo di impianto o un altro tipicamente ricade sull'ottimo economico tra costi fissi e costi variabili.

Per fare un ciclo frigorifero a compressione di vapore è necessario un fluido frigorifero e frigorigeno che solidifica a temperature molto inferiori a quelle del ghiaccio.

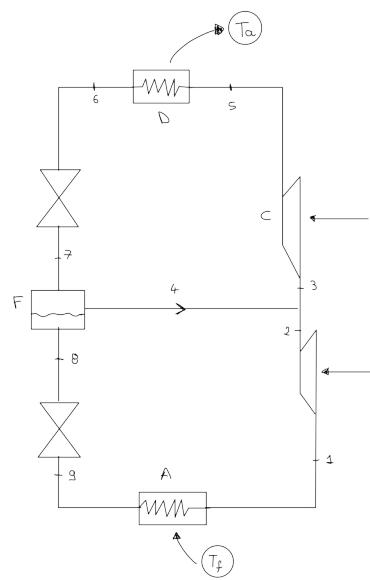
SI CONCLUDE COSÌ IL CICLO FRIGORIFERO A COMPRESSIONE DI VAPORE

VEDIAMO COME MODIFICARE QUESTO CICLO.

Una delle problematica e dei costi maggiori è il compressore, a sua volta legato alla portata e il salto di entalpia. Nel diagramma precedente il salto di entalpia era legato alla trasformazione isoentropica da 1 a 2.

Una modifica possibile è con l'introduzione della camera di separazione

*Ciclo con camera di separazione (o camera flash)*



C'è sempre il condensatore che cede calore alla sorgente a temperatura superiore  $T_a$  e il vaporizzatore che sottrae calore dalla cella frigorifera  $T_f$ . Le modifiche riguardano le valvole di laminazione che raddoppiano, l'introduzione di una camera di separazione che raccoglie liquido dal basso e vapore dall'alto, e la compressione divisa in due parti.

I passaggi sono: compressione in 2, poi si mescola il vapore ottenendo lo stato 3 dove si comprime fino a 5.

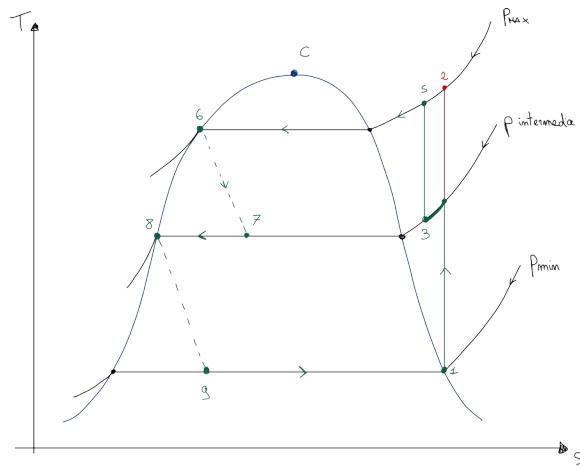
Da 5 a 6 si fa sempre l'espansione.

1 è la pressione bassa, 4 e 3 alla stessa pressione intermedia mentre 5 è la pressione superiore.

Da 6 a 7 faccio una prima espansione e poi separo in una camera il vapore saturo dall'alto e il liquido da 8.

Poi espando nuovamente dalla pressione intermedia alla pressione inferiore 9 per poi entrare nuovamente nel vaporizzatore A.

Sono raddoppiati i compressori e le valvole ed è stata aggiunta la camera di separazione.  
Lo schema meccanico è più complicato e ci si aspetteranno spese di manutenzione più elevate.  
Vediamo come rappresentare questo ciclo in un diagramma Ts.



LE ISOBARE A SINISTRA DELLA CURVA LIMITE INFERIORE  
DOVREBBERO ESSERE ANCORA PIÙ INCLINATE E QUASI  
COINCIDENTI CON LA CURVA LIMITE STESSA.

Partiamo dal punto 1 sulla curva limite superiore dove la vaporizzazione porta ad un fluido nello stato di vapore saturo secco dove si comprime dalla pressione minore alla pressione intermedia. Comprimiamo fino a 3 e mescoliamo con 4. Poi 3 si comprime fino a 5 dove si entra nel condensatore fino a condensare allo stato di liquido saturo a 6. Da 6 a 7 si fa la prima espansione in valvola dove rimane la stessa entalpia di 6. Nella camera di separazione si prende dalla testa il vapore saturo secco e dal fondo il liquido che si fa espandere da 8 e 9 per poi rifare la vaporizzazione da 9 a 1.

È importante sottolineare che una compressione con un unico compressore da 1 a 2 sarebbe stata un'unica trasformazione verticale (**verde + rosso**) mentre avendo compresso in due stati abbiamo fatto da 1 a 3, poi il mescolamento e poi fino a 5. Questo ci dà il vantaggio che essendo le isobare divergenti verso destra il salto di pressione in 3 (con il mescolamento) è minore di quello che si farebbe direttamente da 1 a 2. Si riduce quindi il salto di temperatura (e pressione) nonché di entalpia.

Cioè la differenza  $h_2 - h_1$  è maggiore della somma  $(h_5 - h_3) + (h_3 - h_2)$

Di conseguenza il rendimento  $\eta$  di questo ciclo aumenta rispetto al ciclo a compressione del vapore perché il lavoro diminuisce poiché la somma dei lavori dei 2 compressori è minore del lavoro del singolo compressore:  $\eta = \frac{q}{l}$ .

Per i costi fissi è chiaro che l'acquisto di due compressori e della camera di separazione (le valvole hanno un costo irrisiono) è maggiore però si spende meno come costi operativi perchè si aumenta il rendimento.

Questi due cicli utilizzando un fluido frigorifero.

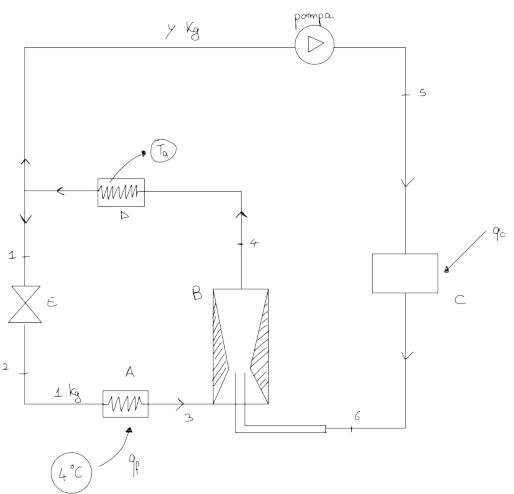
Vediamo invece un ciclo che utilizza l'acqua, quindi sicuramente non lavorerà sotto zero. Sarebbe infatti più corretto parlare di ciclo di raffrescamento (le T non scendono sotto il limite del congelamento), quindi:

### Ciclo frigorifero ad $H_2O$ con elettore

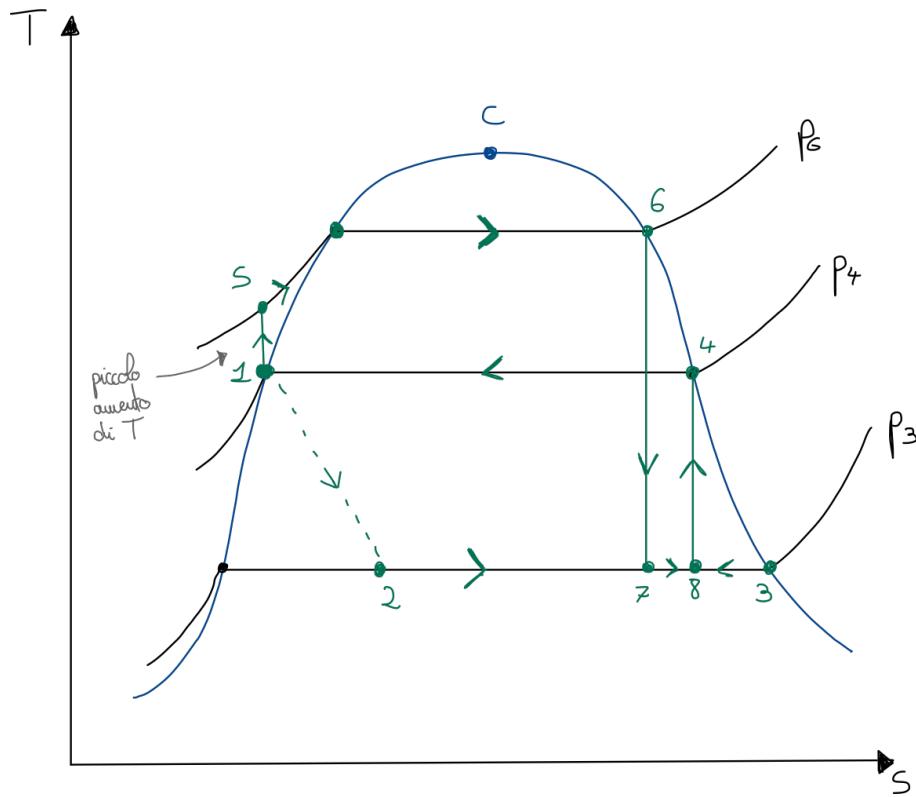
La base del frigorifero è la parte a sinistra con condensatore D, valvola di laminazione E, vaporizzatore A.

Qui la compressione avviene con un elettore. Un elettore (ci servono altre informazioni che vedremo più avanti per capire correttamente il funzionamento) raccoglie il vapore di acqua che esce dal vaporizzatore e che entra nella sezione inferiore, questa diminuisce fino ad un certo punto per poi aumentare in modo che la lunghezza del convergente sia minore del divergente. In un'altra posizione ancora non ben stabilita si immette vapore d'acqua ad alta pressione da un tubo e questo provoca una leggera depressione che permette di aspirare il vapore da 3 e i due si mescolano e la risultante in 4 sarà una pressione media maggiore rispetto al punto 3. Poi ricomincia il ciclo.

Immaginando circoli 1 kg di vapore nel ramo di sx e che l'elettore funzioni con una quantità  $y$  (massa per unità di vapore in circolo) all'uscita avremo  $1 + y$  kg. Dopo la condensazione separerò gli  $y$  kg di vapore dal 1 kg che andrà nel vaporizzatore posso pensare di generare gli  $y$  kg di vapore con una pompa che comprimiamo e mandiamo in una caldaia dove ottengo vapore ad alta temperatura e alta pressione che immetterò poi nell'elettore.



Vediamo il diagramma termodinamico Ts di questo ciclo:



Si vedono la pressione inferiore, una pressione intermedia  $p_4$  e una pressione superiore  $p_6$ , cioè le differenze di pressione tra 1 e 2, poi 3+6 che ci dà  $p_4$  e poi la pressione in uscita con la pompa ci da  $p_6$ .

Partiamo a numerare dall'ingresso nella valvola 1 (uscita del condensatore), la 1→2 è un'espansione irreversibile con parziale vaporizzazione. Da 2 vaporizziamo fino alla curva limite superiore 3. Poi consideriamo che l'uscita dall'elettore è il punto 4 (vedremo più avanti perchè) che entra nel condensatore e condensa fino ad 1. Dove ritorna a 2 e segue il ciclo appena indicato.

Gli  $y$  kg invece vengono presi in 1 e una pompa li comprime (si osservi che qui l'aumento di temperatura è quasi nullo o comunque molto piccolo) fino a 5 dove una caldaia lo porta a vaporizzarsi in 6.

La trasformazione da 6 a 4 è molto complessa e calcolabile solo con un software termofluido-dinamico che usa fluidodinamica e scambi di calore. Noi invece facciamo il ragionamento termodinamico più semplice: si immagina che il vapore  $p_6$  si espanda fino alla pressione inferiore  $p_3$  (altrimenti andrebbe contro a 3 e il sistema si bloccherebbe) si mescolano quindi in un gas saturo umido in 8 e a seguito della fluidodinamica nel divergente la pressione aumenta fino ad un valore intermedio 4.

IL FUNZIONAMENTO DI QUESTO DISPOSITIVO, CHE SI BASA SULLA LEGGE DI BERNOULLI, LO VEDREMO NELLA SECONDA PARTE DEL CORSO.

L'elettore consuma molta meno potenza meccanica rispetto ai compressori.

$$\text{Il rendimento è dato da } \eta = \frac{\dot{q}_f}{\dot{q}_c} = \frac{(h_3 - h_2) \cdot 1 \text{ kg}}{(h_6 - h_5) \cdot y \text{ kg}}$$

Dove  $y$  è la portata di vapore necessaria per avere l'innalzamento di pressione nell'elettore e quindi dipende da come funziona l'elettore.



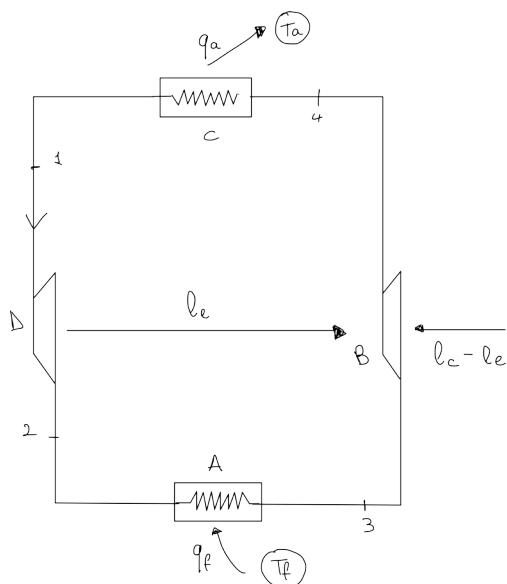
LA SETTIMANA PROSSIMA NON CI SARÀ IL RICEVIMENTO MA MARTEDÌ 20 CI SARÀ LA PRIMA ESERCITAZIONE

mercoledì 14 ottobre 2020 - Lezione 11

## Frigorifero ad aria

Questo frigorifero è molto semplice ma richiede un filtraggio dell'aria tale da non far assolutamente entrare vapore d'acqua che altrimenti andrebbe a solidificare.

Lo schema del frigorifero è il seguente:



Si modifica leggermente il ciclo a compressione e si vede come la valvola di laminazione è sostituita con un espansore, una macchina che produce lavoro  $l_e$ .

Il compressore rimane e richiede un lavoro, in particolare  $l_c - l_e$ .

I due scambiatori di calore rimangono uguali (sono **scambiatori di calore** e non vaporizzatori o condensatori).

Abbiamo aria, quindi un gas perfetto e i cicli si possono rappresentare in un diagramma pv stando nella zona dei gas:

SI OSSERVI IN BASSO A SINISTRA IL DISEGNO DEL PUNTO CRITICO E DELL'ISOTERMA LIMITE SUPERIORE, NOI SIAMO MOLTO FUORI → GAS PERFETTO

Immaginando che 1 sia il punto di ingresso nell'espansore e che l'espansione sia una classica trasformazione senza scambio di calore e reversibile (isoentropica  $p v^k$ ). La trasformazione 2-3 è un'isobara. Mentre 3-4 è un'adiabatica reversibile e 4-1 è la cessione di calore nello scambiatore ad alta pressione.

Nel **diagramma Ts** le curve limiti si trovano sempre in basso a sinistra e noi siamo molto al di sopra della temperatura critica. L'espansione nell'espansore è l'isoentropica 1-2, la 2-3 è un'isobara (curve con concavità in alto). 3-4 è la compressione isoentropica da  $p_2$  a  $p_1$  fino al punto 4 dove c'è l'isobara di raffreddamento è la 4-1.

L'area sottesa dalla trasformazione 2-3 è il calore assorbito mentre l'area sottesa dalla 4-1 è il calore ceduto dallo scambiatore i calore ad alta pressione.

Questo ciclo è anche chiamato **ciclo Joule inverso**

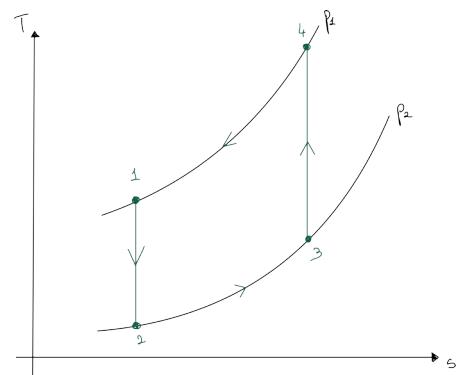
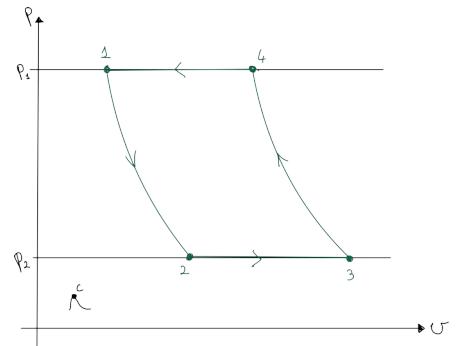
Il rendimento termodinamico (ciò che vogliamo ottenere diviso quello che si spende)

$$\eta = \frac{q_f}{l_c - l_e} = \frac{h_3 - h_2}{(h_4 - h_3) - (h_1 - h_2)}$$

Se l'aria è assimilabile ad un gas perfetto e  $c_p = \text{cost}$  (non è così nella realtà ma dobbiamo supporlo per arrivare ad un'espressione trattabile), quindi:

$$\eta = \frac{c_p(T_3 - T_2)}{c_p(T_4 - T_3) - c_p(T_1 - T_2)} = \frac{T_2(T_3/T_2 - 1)}{T_4 - T_1 - (T_3 - T_2)} = \frac{T_2(T_3/T_2 - 1)}{T_1(T_4/T_1 - 1) - T_2(T_3/T_2 - 1)}$$

Quindi in base alle trasformazioni cerchiamo le relazioni tra  $T_3/T_2$  e  $T_4/T_1$ :



Chiamiamo  $\alpha = \frac{k-1}{k}$  (dove  $k = c_p/c_v$  per un gas perfetto)

Per l'isoentropica vale:

$$\text{per l'espansione: } \frac{T_1}{p_1^\alpha} = \frac{T_2}{p_2^\alpha}$$

$$\text{Per la compressione: } \frac{T_3}{p_{\dot{S}2}^\alpha} = \frac{T_4}{p_{\dot{S}1}^\alpha}$$

$$\text{Cioè } \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^\alpha \text{ e } \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^\alpha = \frac{T_4}{T_3}$$

$$\text{I termini tra parentesi vanno via: } \frac{T_1}{T_2} = \frac{T_4}{T_3} \Rightarrow \frac{T_3}{T_2} = \frac{T_4}{T_1}$$

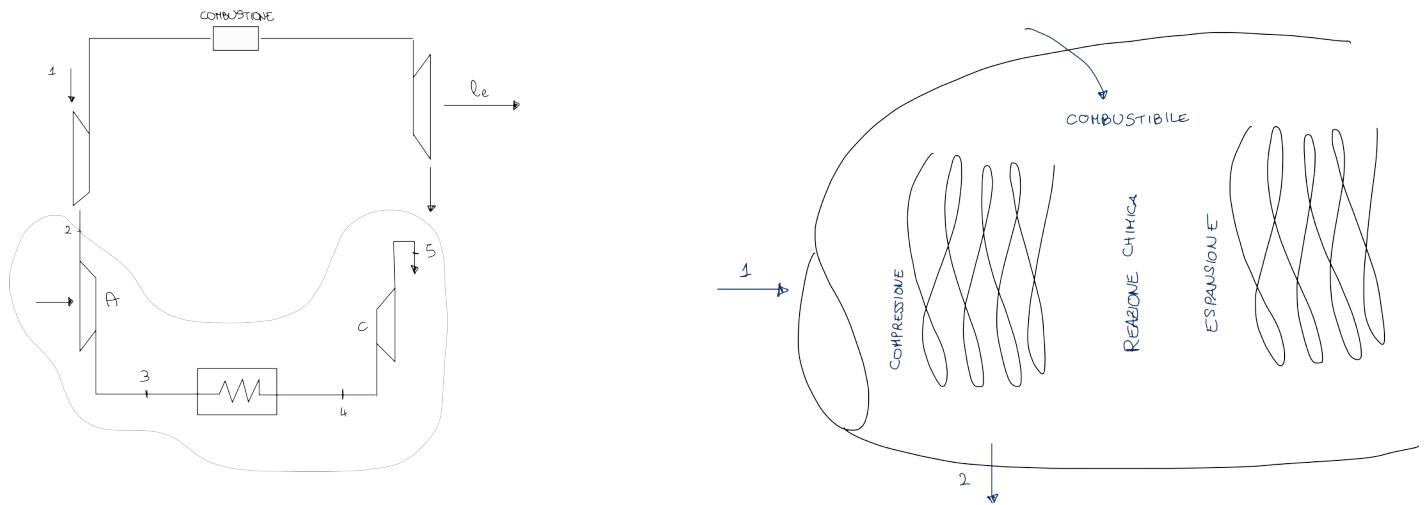
$$\text{Allora il rendimento è } \eta = \frac{1}{T_1/T_2 - 1} = \frac{1}{r_p^\alpha - 1} \text{ con } r_p = \frac{p_1}{p_2}, \quad \text{con } p_1 > p_2$$

Vediamo anche come funzionano qualitativamente:

### Impianto di aria condizionata per aerei

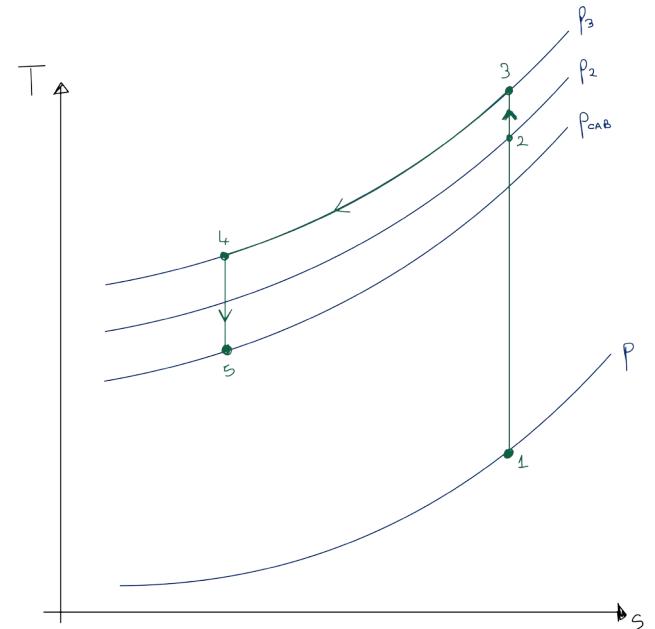
Vediamo uno schema meccanico del propulsore dove entra l'aria e viene compressa, poi con il combustibile e la reazione chimica, viene espansa per produrre lavoro. Questo prende il nome di **ciclo Joule diretto**.

Abbiamo l'aria esterna che viene compressa, poi c'è la combustione e poi l'espansione che produce il lavoro  $l_e$ .



In 1 è l'aria presa dall'esterno (sotto i  $-50^{\circ}\text{C}$  con una pressione molto bassa) immaginiamo di fare un prelievo dell'aria compressa nel compressore principale ad una pressione intermedia  $p_2$  dopodiché per controllare meglio questa aria la mandiamo in un compressore molto più piccolo e molto più facile da regolare in cui aumentiamo ulteriormente la pressione ad un valore  $p_3$  (molto più preciso e controllato). Con lo scambiatore B sottraiamo il calore  $q$  e la temperatura diminuisce fino a 4. Facciamo un'altra espansione con un espansore molto piccolo che permette di controllare finemente la pressione e scaricarla poi nella cabina dell'aereo con pressione e temperatura pari a quella interna alla cabina.

N.B. Nella cabina c'è circa la pressione che si avrebbe a 2000-2500m.



## Impianti di liquefazione dei gas

Hanno una storia relativamente recente (ca 130 anni).

La letteratura attribuisce al **Pichet** (1997) la costruzione del primo impianti di liquefazione dei gas. I suoi impianti si basano sull'applicazione dell'impianto frigorifero a compressione di vapore in vari stati successivi.

C'è un ciclo frigorifero con  $\text{NH}_3$  ( $T_c = 132$ ) a compressione di calore che sottrae calore al circuito frigorifero a compressione di vapore (non alla sorgente inferiore) che si trova a temperature inferiore dove circola etilene ( $T_c = 9,9$  °C).

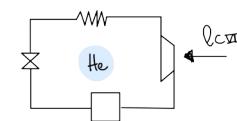
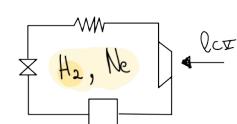
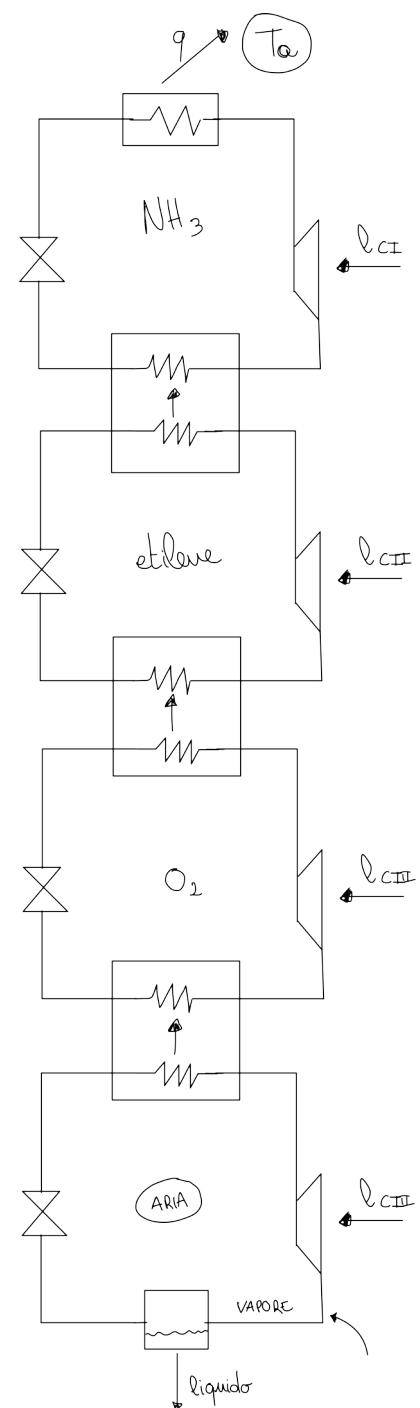
Questo secondo ciclo funziona allo stesso modo e sottrae calore ad un terzo ciclo ad ossigeno ( $T_c = -119$  °C). Questo ciclo a sua volta sottrae calore all'ultimo ciclo ad aria ( $T_c = -140$  °C).

In questo ultimo impianto c'è la camera di separazione dove ottengo liquido mentre il vapore lo rимetto in circolo. Ovviamente se sottraggo il liquido devo immettere una stessa massa di vapore in modo di avere la stessa portata.

Con 4 impianti si riesce a liquefare l'aria.

Aggiungendo un 5 impianto (un altro ciclo a compressione di vapore) si riesce a liquefare il neon o l'idrogeno ( $T_c = -240$  °C). Ovviamente il 4 ciclo sarebbe analogo al 3 ma con l'aria, quindi senza camera di separazione che invece starebbe sul 5 con l'idrogeno.

Utilizzandone 6 e mettendo la camera di separazione nel sesto si riesce a liquefare anche l'elio  $T_c = -267,8$  °C, si arriva molto vicini allo zero assoluto.



## Ciclo Linde

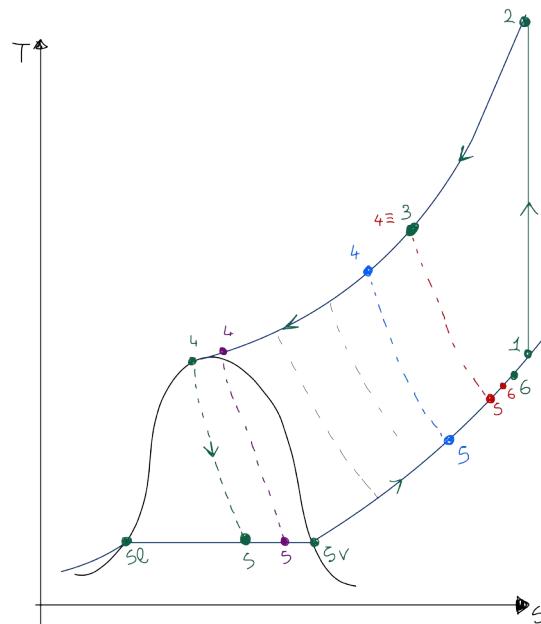
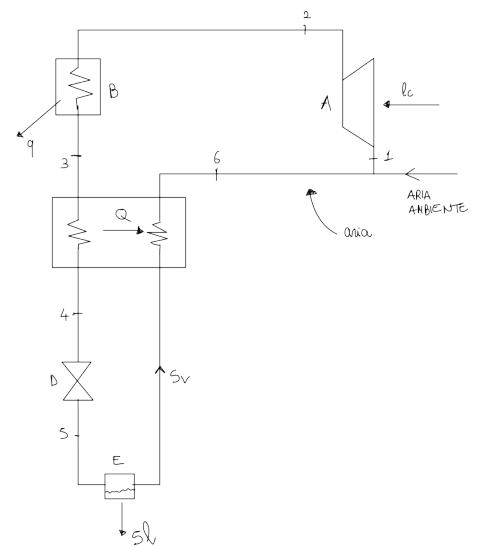
Partiamo dell'aria a temperatura ambiente in 1, la comprimiamo nel compressore A e poi gli sottraiamo calore  $q$  nello scambiatore di calore B. Poi mettiamo uno scambiatore di calore controcorrente (in cui due fluidi circolano in verso opposto) in cui il fluido cede calore all'aria che ritorna dal basso. Si fa poi espandere in D e poi abbiamo la camera di separazione E.

A regime si riuscirà a liquefare una certa massa di aria e per ripristinare nel ramo 2-5 la stessa portata iniziale bisogna continuare a immettere aria con una massa uguale all'aria liquida che si è formata. Il vapore che rimane in E entra nello scambiatore controcorrente dove riceve calore e poi si mescola con l'aria presa dall'ambiente per ricominciare il ciclo.

### Importante il **diagramma Ts**.

Nella situazione di regime (in **verde**) l'aria esterna allo stato 1 viene compressa nella trasformazione 1→2 poi raffreddato da 2 a 3. In 3-4 attraverso lo scambiatore di calore, cioè devo essere entrato sotto le curve limiti (sotto la T critica). In 4 entro nella valvola dove si espande irreversibilmente fino a 5 che è ancora tra le curve limiti. In questo momento separo il liquido dal vapore nella camera di separazione che posso vedere rispettivamente dalla curva limite inferiore e superiore.

Da 5v (parte di vapore) immagino di riscaldare fino a 6 che viene mescolato con aria esterna e ritorno allo stato 1 che quindi chiude il ciclo a regime stazionario.



Ma c'è anche il transitorio, interessante, poiché supponiamo di essere al primo giro dove comprimo l'aria esterna fino a 2. Poi la raffreddo fino a 3. Nello scambiatore di calore 3 va direttamente a 4 poiché nello scambiatore controcorrente non c'è l'altro fluido. Da 4 espando fino a 5 e poi da 5 il fluido passa nello scambiatore di calore (adesso c'è corrente in entrambi i versi) e quindi si riscalda fino a 6 dove si mescola con 2 per ricominciare. Al secondo giro cambia la situazione da 3 a 4 dove scendo di temperatura poiché a destra c'è il fluido più freddo.

Ad ogni giro il 4 scende sempre fino ad entrare nelle curve limite fino a raggiungere un regime stazionario (in **verde**). Questo dipende da quanto è isolata termicamente tutta la macchina.

## Dewar

Nel 1898 liquefò l'idrogeno.

Il termos in realtà lo chiama vaso di Dewar.



VASO DEWAR

## Kamarling-Omnes

Lui nel 1908 fu il primo a liquefare l'elio, He.

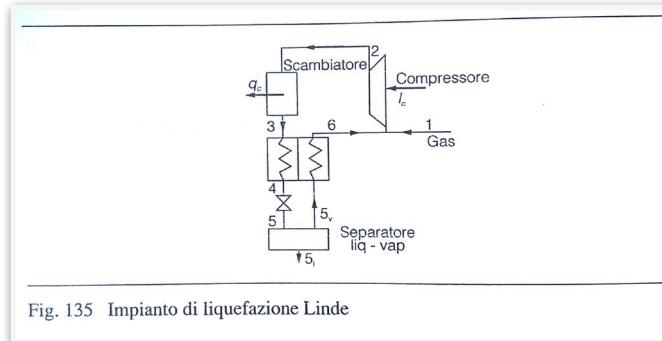
Così scoprì la supercondutività secondo cui sotto ai 4 K i metalli non hanno più resistenza elettrica e non si dissipa più calore per effetto Joule. Scoperta poi anche a temperature via via superiori fino ad arrivare ad azoto liquido, a temp più alte.

Una delle applicazioni più importanti dell'elio liquido è nei calcolatori dove grandi correnti dissipano tantissimo calore (in alcune applicazioni sembra ci siano potenze per unità di superficie superiori a quelle del lancio di razzi orbitali) per cui si utilizzano dei componenti ad elio liquido con resistenza molto bassa.

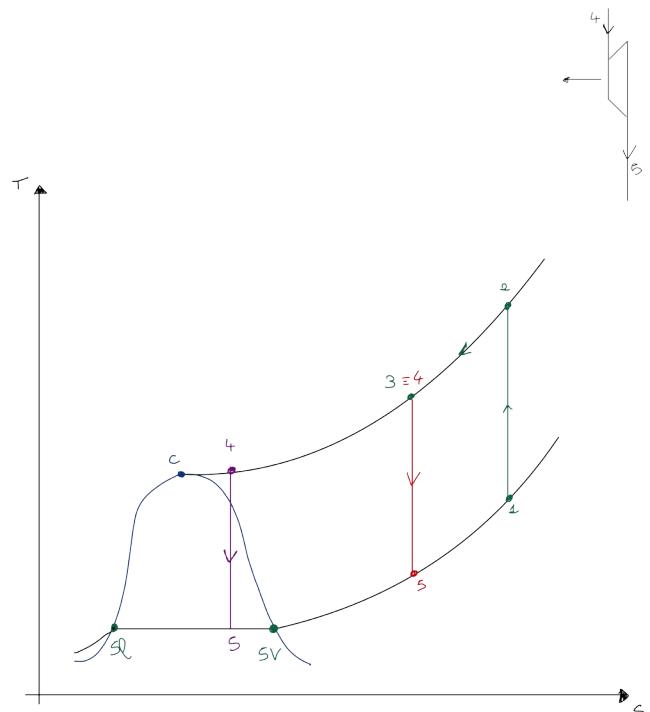
## Ciclo Claude

È una modifica del ciclo Linde:

- Lo scambiatore B veniva usato solo nei primi giri (nel transitorio)
- La valvola di espansione è stata sostituita da un espansore



IMPIANTI DI LIQUEFAZIONE LINDE DAL LIBRO "LEZIONI DI TERMODINAMICA"



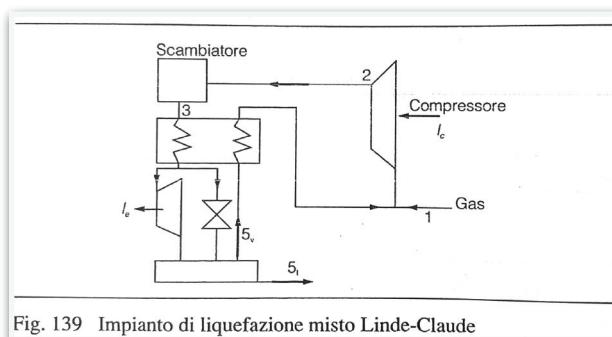
Nello stazionario: da 1 vado a 2 poi raffreddo fino ad un punto 4 tale che l'espansione nell'espansore riesca a portare il punto 5 nelle curve limiti. Poi nella camera di separazione separo il liquido a sinistra dal vapore a destra che ritorna in 1 a miscelarsi con l'aria.

Nel transitorio, c'è sempre il compressore che comprime l'aria dall'esterno, da 1 a 2. Nei primi giri c'è la sottrazione di calore che porta il fluido a raffreddarsi da 2 a 3. La temperatura 3 è uguale alla temperatura 4 (lo scambiatore concorrente ha corrente da un solo verso). Al secondo giro il raffreddamento va oltre a 3 e per trasformazioni successive il transitorio va a vanti fino ad arrivare al regime stazionario.

## Impianto misto

C'è in parallelo sia la valvola di laminazione che l'espansore.

L'espansore è più efficiente, la curva di espansione è più verticale e quindi entra prima nelle curve limite, ma è anche molto più dispendioso.

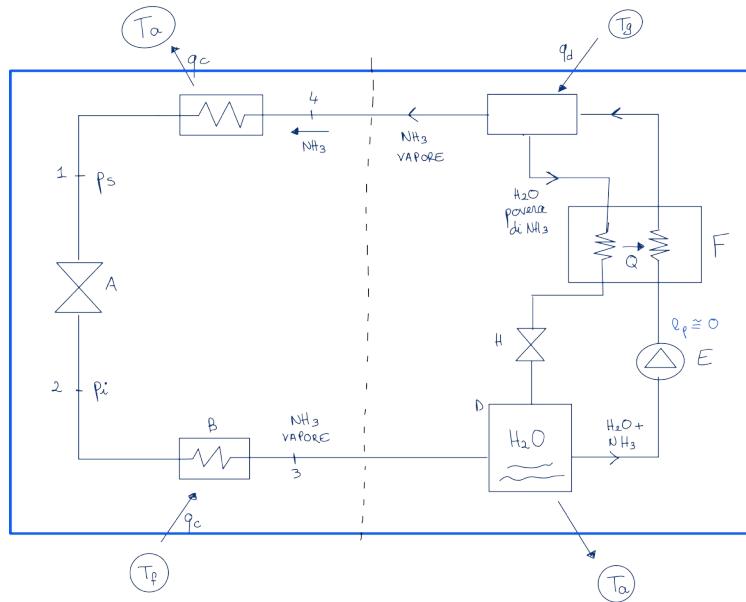


IMPIANTO MISTO DAL LIBRO "LEZIONI DI TERMODINAMICA"

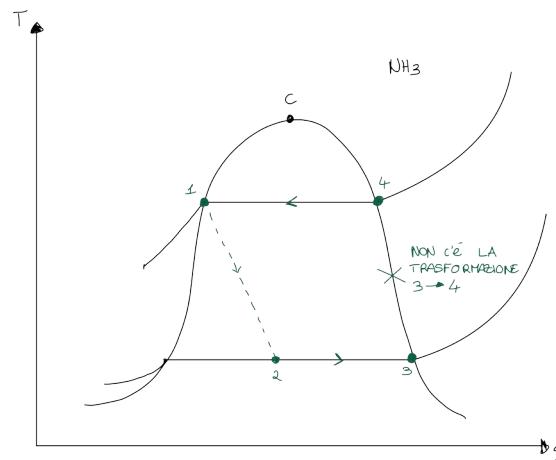
FINIAMO COSÌ IL PARAGRAFO 8.2 E PASSIAMO AL PARAGRAFO SUCCESSIVO, "IMPIANTI INVERSII AD ASSORBIMENTO".

## Impianto inverso ad assorbimento

Quanto vediamo adesso può essere utilizzato sia come ciclo frigorifero che come pompa di calore.  
Vediamo lo schema meccanico:



Partiamo dalla parte sinistra che risulta qualitativamente identica alla parte dell'impianto frigorifero a compressione di vapore.  
In 4 vapore di ammoniaca viene condensato nel condensatore. C fino alla curva limite inferiore 1 cedendo il calore  $q_c$  all'ambiente.  
In 1 liquido ad alta pressione si espande nella valvola di laminazione fino al punto finale a T superiore e pressione inferiore. In B vaporizzandosi sottrae valore alla sorgente  $T_f$ .  
Rappresentando nel diagramma Ts si vede sempre vapore saturo secco 4. La liquefazione totale in 4-1, l'espansione 1-2 e poi da 2 a 3 la vaporizzazione fino alla curva ,limite superiore.



Nel ciclo a compressione di vapore tutta la parte destra era costituita da un compressore

Il vapore di NH<sub>3</sub> ora si manda in un assorbitore cioè si fa gorgogliare il vapore di NH<sub>3</sub> nell'acqua. Con un fenomeno di assorbimento NH<sub>3</sub> viene inglobato nell'acqua e questo fenomeno è favorito se si raffredda per cui questo avviene raffreddando l'acqua con dentro il vapore di NH<sub>3</sub> cedendo calore alla temperatura ambiente  $T_a$  (la stessa a cui cede calore il condensatore C durante la condensazione dell'ammoniaca).

**IL FATTO CHE L'ASSORBIMENTO È FAVORITO A BASSA TEMPERATURA LO SI VEDE METTENDO L'ACQUA GASSATA NEL FRIGORIFERO DOVE SI VEDONO MOLTE MENO BOLLICINE RISPETTO A T<sub>a</sub>. SCALDANDO INVECE L'ACQUA CON IL CALORE SI VEDE SUBITO LA CO<sub>2</sub> CHE VA VIA VELOCEMENTE (DEASSORBIMENTO).**

Abbiamo un liquido NH<sub>3</sub>+acqua e allora al posto del compressore (costoso) usiamo una pompa per liquidi e supponiamo di avere un consumo circa nullo  $\ell_p \cong 0$ . La pressione fino all'ingresso nella pompa è sempre  $p_3$  mentre all'uscita c'è la pressione  $p_4$ . Si fa poi assorbire calore al fluido nello scambiatore F e poi lo si manda nel desorbitore dove si scalda il fluido facendo separare NH<sub>3</sub> vapore dall'acqua. Solo NH<sub>3</sub> vapore nello stato 4 torna a sinistra (l'acqua non ci deve andare poiché le temperature andranno sotto lo zero). Dalla parte bassa del desorbitore invece viene presa l'acqua povera di NH<sub>3</sub>. Il desorbitore deve essere scaldata attraverso un calore di una sorgente a temperatura  $T_g$ . Quest'acqua povera di NH<sub>3</sub> ma calda conviene raffreddarla cedendo calore all'altra corrente che deve essere riscaldata attraverso uno scambiatore controcorrente F ad alta pressione. La valvola di laminazione H serve ad abbassare la pressione per l'assorbitore.

Il diagramma termodinamico Ts di questo *impianto ad assorbimento di ammoniaca in acqua* si rappresenta solo per NH<sub>3</sub>. Se si volesse vedere come rappresentare per le **miscele NH<sub>3</sub>+liquido** vedere dal libro il diagramma a mandorla. Il diagramma Ts è solo per NH<sub>3</sub>.

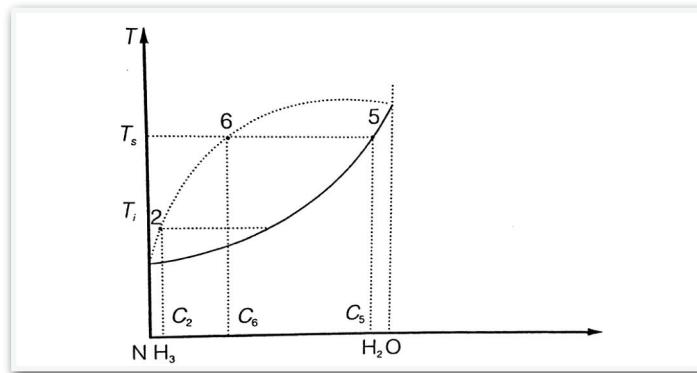


DIAGRAMMA DUE COMPONENTI ACQUA-AMMONIACA DAL LIBRO "LEZIONI DI TERMODINAMICA"

Vediamo il rendimento limite sia per l'impianto frigorifero che per l'impianto a pompa di calore.

Per il ciclo frigorifero schematizzato come in figura:

C'è la sorgente a temperatura  $T_f$  a cui bisogna sottrarre il calore  $q_v$  (quello che vogliamo ottenere). Poi c'è una sorgente a temperatura intermedia  $T_a$  e la sorgente superiore  $T_g$  con cui scaldiamo il separatore di NH<sub>3</sub> e acqua. Facendo una linea (vedi linea **azzurra**) che racchiude tutto il sistema termodinamico si vede che il lavoro scambiato è nullo ( $\ell_p \cong 0$ ) mentre entrano  $q_v$  e  $q_d$  ed escono  $q_c$  e  $q_a$ .

Dividiamo ulteriormente lo schema nelle due macchine termodinamiche di destra e sinistra rappresentando la parte sinistra con il cerchio  $\eta_m$  che riceve calore  $q_d$  e cede  $q_a$ , dal punto di vista termodinamico è come fosse una macchina Watt o Newcomen che produce lavoro con cui comanda la macchina frigorifera,  $\eta_f$  che prende il calore dalla sorgente a T inferiore e lo cede a temperatura ambiente.

Si considera una produzione di lavoro  $L$  che si usa all'interno delle macchine (non esce all'esterno ma da destra va a sinistra).

Il rendimento limite del ciclo frigorifero ad assorbimento è quello che si ottiene fratto quello che pago, cioè  $\eta_{fa} = \frac{q_v}{q_d}$

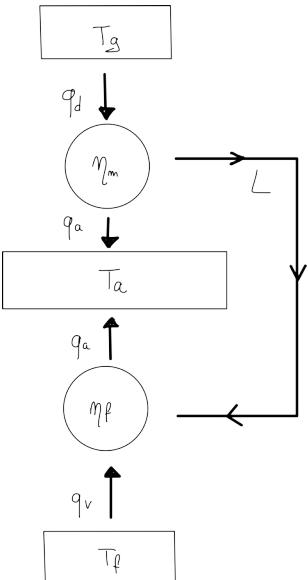
Immaginiamo di moltiplicare e dividere per  $L$ , cioè  $\eta_{fa} = \frac{q_v}{q_d} \cdot \frac{L}{L} = \frac{L}{q_d} \cdot \frac{q_v}{L}$  dove si vedono i rendimenti della macchina motrice superiore e quella della macchina frigorifera inferiore, cioè  $\eta_{fa} = \eta_m \cdot \eta_f$

Allora il rendimento limite è il rendimento delle macchine reversibili di Carnot sia diretto che inverso, cioè il rendimento limite è:

$$\eta_{fa} = \frac{T_g - T_a}{T_g} \cdot \frac{T_f}{T_a - T_f}$$

Per capire l'ordine del rendimento limite  $\eta_{fa}$  prendiamo dalle temperature ragionevoli, ad esempio:

$$T_a = 300 \text{ K}, T_f = 250 \text{ K} \text{ e } T_g = 700 \text{ K} \text{ si ottiene: } \eta_{fa} = \frac{400}{700} \cdot \frac{250}{30} = \frac{20}{7} \cong 3$$



Tornando all'interpretazione del ciclo e volendo calcolare il rendimento della pompa di calore quindi per riscaldare l'ambiente a  $T_a$  sottraendo calore  $q_v$  a  $T_f$  e utilizzando il calore  $q_d$  dalla sorgente  $T_g$ . Cambiano i valori assoluti dove  $T_f$  sarà la temperatura dell'ambiente mentre  $T_a$  sarà il calore della sorgente, ad esempio 90°C nei termosifoni domestici.

Cioè, il rendimento della pompa di calore ad assorbimento è quello che vogliamo ottenere (cessione di  $q_a + q_c$ ) diviso quello che spendiamo  $q_d$ . Cioè  $\eta_{pca} = \frac{q_a + q_c}{q_d}$

Si osservi che i calori che attraversano l'intero contorno termodinamico (in **azzurro**) sono 4 e quindi ci dovrà essere un bilancio  $q_d + q_v = q_a + q_c$  e sostituendo:

$$\eta_{pca} = \frac{q_d + q_v}{q_d} = 1 + \frac{q_v}{q_d} = 1 + \frac{T_g - Ta}{T_g} \cdot \frac{T_f}{Ta - T_f}$$

Ma considerando che utilizziamo temperature diverse, come  $T_f = T_{amb} = 300\text{ K}$ ,  $Ta = 400\text{ K}$  e  $T_g = 700\text{ K}$  allora

$$\eta_{pca} = 1 + \frac{300}{700} \cdot \frac{300}{100} \approx 2 \text{ ,il rendimento è leggermente inferiore.}$$

### Ciclo frigorifero ad assorbimento Electrolux

Ciclo brevettato dall'Electrolux.

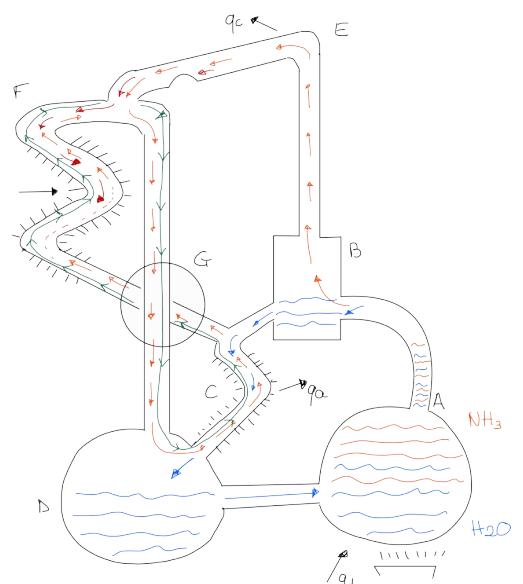
In basso a destra il desorbitore che riceve il calore  $q_d$  e serve per separare  $\text{NH}_3$  (in **arancio**) dall'acqua (in **azzurro**).  $\text{NH}_3$  sottoforma di vapore va verso l'alto dalla camera di separazione mentre l'acqua va in basso. Seguendo l'acqua

Seguendo l'acqua da B questa, povera di  $\text{NH}_3$ , deve andare all'assorbitore che si considera essere il percorso C che quindi mentre  $\text{NH}_3$  fa tutto il circolo l'acqua si rimescola con  $\text{NH}_3$  nell'assorbitore C. In D si riprende l'acqua e la si fa tornare al desorbitore.

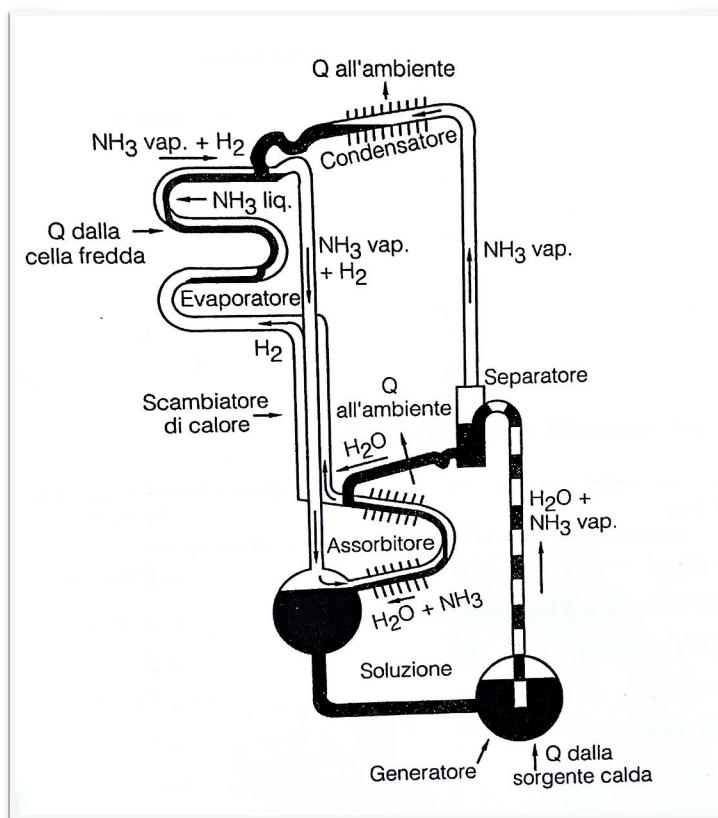
Mentre l'ammoniaca liquida si separa e va verso E dove c'è il condensatore che cede calore  $q_c$ . Poi dal condensatore ritorna nel vaporizzatore (serpentina F) dove si cede il calore  $q_v$ . Nell'assorbitore viene assorbito in acqua che ritorna giù mentre una parte verrà rimessa in circolo.

Lo scambiatore di calore non è rappresentato bene ma è in G.

Per facilitare il movimento dell' $\text{NH}_3$  nel circuitino intermedio CFG è inserito idrogeno (in **verde**) che a queste temperature è sempre gas e facilita il movimento trasportano con sé  $\text{NH}_3$  gassoso.



QUESTO DISEGNO POTREBBE CONTENERE ALCUNI ERRORI



FRIGORIFERO "ELECTROLUX" DAL LIBRO "LEZIONI DI TERMODINAMICA", PG177.

giovedì 15 ottobre 2020 - Lezione 12

# Fenomeni termoelettrici

## Effetto Seebeck

Il primo analizzato, storicamente datato al 1821 e intitolato al ricercatore Seebeck, dice che se prendiamo due materiali metallici A e B e li saldiamo in due punti. Le due saldature a temperatura  $T_1$  e  $T_2$  poi metto un misuratore di differenza di potenziale, un voltmetro a resistenza infinita tale che non circoli corrente. Non circolando corrente questa misurata è la forza elettromotrice.

Se  $T_1 = T_2$  non viene misurato niente.

Se mantengo una giunzione a  $T_1$  l'altra la porto a  $T_2$ , diversa, allora il misuratore indica una forza elettromotrice  $\Delta E$  funzione della differenza di temperatura  $(T_2 - T_1)$ , cioè una relazione:  $\Delta E = f(T_2 - T_1)$

Se la relazione tra  $E$  e  $\Delta T$  è lineare si introduce un coefficiente di proporzionalità  $\Delta E = \alpha_{AB} \cdot (T_2 - T_1)$ .

dove  $\alpha_{AB}$  prende il nome di coefficiente di Seebeck e poi rinominato **potere termoelettrico** e analiticamente è definito come:

$$\alpha_{AB} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta E}{\Delta T} = \frac{dE}{dT}$$

I coefficienti sono ormai tabulati e i due materiali prendono il nome di coppie termoelettriche.

Vedremo come questo effetto è utilizzato per misurare la differenza di temperatura rispetto un punto fisso, spesso preso come la fusione del ghiaccio a 0°C inserendolo in un termos con acqua e ghiaccio. Si risale allora a  $T_2$  dalla differenza di potenziale.

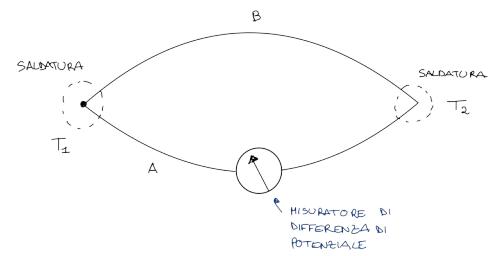
## Effetto Peltier

Un secondo effetto è attribuito a Peltier e datato 1834.

Prendiamo due materiali **A** e **B** e li saldiamo nella giunzione **AB** e facciamo passare una corrente da A verso B. Se circola una corrente **I** in una giunzione si libera calore (la giunzione cede calore all'esterno). Se invece si inverte il segno della corrente il calore è assorbito.

Questo calore è proporzionale alla corrente secondo un coefficiente  $\pi_{AB}$  noto come coefficiente di Peltier che dipende dai materiali e dalla temperatura.

Più avanti si è visto che  $\alpha_{AB} \cdot T = \pi_{AB} \Rightarrow \pi_{AB} = \alpha_{AB} \cdot T$



## Effetto Thomson

Facendo passare una corrente in un conduttore e scegliendo una coordinata x lungo il conduttore si vede che si stabilisce una differenza di temperatura  $\Delta T$  sulla lunghezza  $\Delta x$  che quindi determina uno scambio di calore verso l'esterno.

$$\text{In modulo, questo calore: } |d\dot{Q}_T| = \left| \tau \cdot I \cdot \frac{\partial T}{\partial x} dx \right|$$

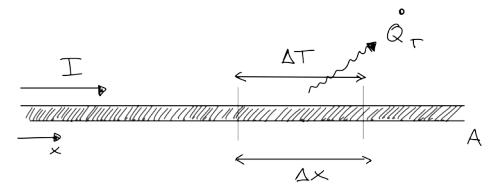
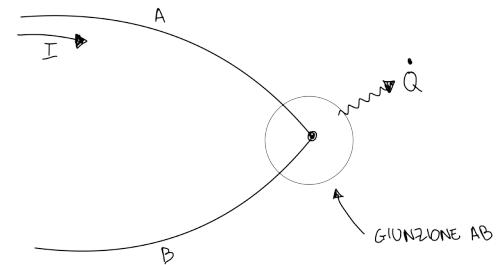
Dove  $\tau$  è il coefficiente di Thomson.

Questa relazione permette di definire il coefficiente di Thompson come:  $\tau = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\dot{Q}_T}{I \cdot \Delta T} = \frac{1}{I} \cdot \frac{\delta \dot{Q}_T}{\delta T}$

Se  $\delta \dot{Q}_T > 0$  il calore è assorbito dall'esterno.

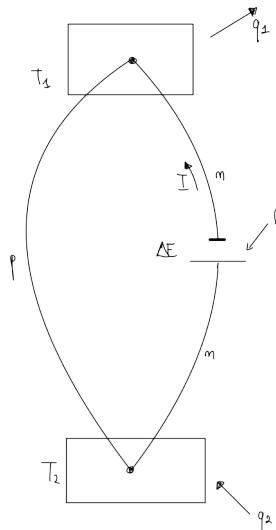
Esiste anche una relazione che lega  $\tau$  e  $\alpha_{AB}$ , cioè  $\tau = T \cdot \frac{d\alpha_{AB}}{dT}$

QUESTE RELAZIONI TRA I COEFFICIENTI DEI FENOMENI TERMOELETTRICI È POSSIBILE RICAVARLE UTILIZZANDO LA TERMODINAMICA DEGLI STATI IRREVERSIBILI (CHE NOI NON VEDREMO).



## Ciclo frigorifero ad effetto termoelettrico

I COLLEGHI ING. MECCANICI VEDRANNO ANCHE IL CICLO MOTORE AD EFFETTO TERMOELETTRICO, CIOÈ UN CICLO CHE PRODUCE LAVORO ELETTRICO.



Consideriamo un materiale **p** (metallico o meno, vedremo che sono leghe speciali) e un materiale **n** (possono anche essere semiconduttori). Si saldano in due giunzioni. La giunzione 1 viene mantenuta in un contenitore a  $T_1$ , cioè si dice che la giunzione 1 è a temperatura  $T_1$ . L'altra giunzione invece viene mantenuta a  $T_2$ . Mettiamo una pila che genera una forza elettromotrice  $\Delta E$  che quindi induce un passaggio di corrente che supponiamo dello stesso verso indicato in figura. Supponiamo che il passaggio della corrente in 1 fa sì (effetto Peltier) che venga ceduto calore all'esterno. Al contrario nella giunzione 2 (sempre effetto Peltier) viene assorbito.

Supponiamo questo avvenga mantenendo  $T_2$  inferiore a  $T_1$ .

Abbiamo un sistema termodinamico che se considerato nel totale entra del lavoro (lavoro elettrico che richiede il generatore di corrente, prodotto  $\Delta E \cdot I$ ) entra calore  $q_2$  ed esce  $q_1$ .

Per Peltier possiamo dire che :

$$q_1 = \alpha T_1 I \quad \text{e} \quad q_2 = \alpha T_2 I$$

Si osservi che  $\alpha = \alpha_{pn}$  ma omettiamo i pedici.

$$\text{Il lavoro scambiato: } \ell = q_1 - q_2 = \alpha I (T_1 - T_2)$$

Ma il lavoro elettrico è anche  $\ell = \Delta E \cdot I$

$$\text{Quindi il rendimento, inteso come ciclo frigorifero, } \eta = \frac{q_2}{\ell} = \frac{\alpha T_2 I}{\alpha I (T_1 - T_2)} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

Cioè si trova il rendimento di un ciclo reversibile inverso (o alla Carnot)

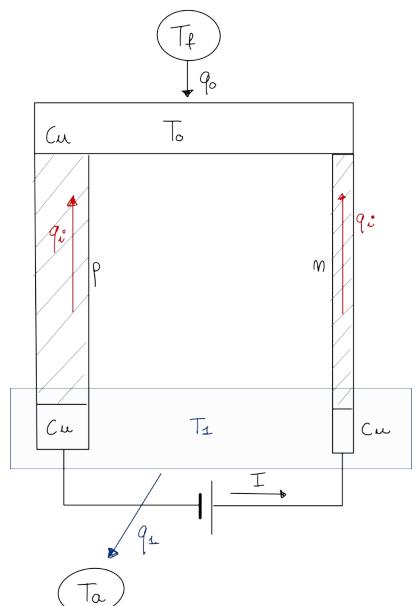
Abbiamo supposto i fili di pochi mm e la giunzione come un punto, ma *nella pratica come si può realizzare?*

Supponiamo che il materiale **p** sia come una barra di materiale a sinistra e a destra il materiale **n** considerato con la stessa lunghezza ma con una sezione più piccola, o comunque diversa da p. La giunzione  $T_2$  adesso è in alto e si immagina una giunzione di rame (Cu) che suppongo essere la giunzione a temperatura  $T_0$ .

Se questo è un ciclo frigorifero sottrae un calore  $q_0$  dalla cella frigorifera  $T_f$  (o ambiente a temperatura più bassa). La temperatura  $T_1$  adesso la considero nel rettangolo blu cioè che i due materiali all'estremità inferiore sono in contatto con del rame per entrambi alla temperatura  $T_1$ . Il materiale p attraverso il rame viene messo in contatto con l'altro materiale con un filo elettrico e la pila che genera la corrente  $I$ . Questa corrente per effetto Peltier sottrae  $q_0$  dalla sorgente  $T_f$  e cede  $q_1$  alla sorgente  $T_a$ .

Per Peltier il calore assorbito nel caso ideale (caso precedente) sarebbe  $q_{P0} = \alpha I T_0$ , dove il pedice indica P=Peltier, 0=T0.

Ma nella realtà le trasformazioni sono più complicate poiché il passaggio di corrente nel circuito provoca sicuramente la dissipazione di calore  $RI^2$  per effetto Joule. Questo effetto lo possiamo considerare dovuto all'irreversibilità (è similare all'effetto di attrito). C'è anche una seconda irreversibilità dovuta al fatto che le due estremità, sia di p che di



n, si trovano due temperature diverse e questa differenza di temperatura sarà tale da generare una conduzione termica e quindi ci sarà del calore  $q_i$ , scambiato tra  $T_1$  e  $T_0$ . Ricordiamo che le irreversibilità di prima specie sono dovute all'attrito (Effetto joule in questo caso) e alle differenze finite di temperatura.

Alla sorgente  $T_0$  quindi arriva anche il calore  $q_i$  e allora il calore  $q_0$  sottratto va diminuito del calore che arriva attraverso i due conduttori dalla sorgente  $T_1$ .

Inoltre, indicando con  $R$  la resistenza elettrica complessiva del circuito e il calore dissipato per effetto Joule è  $RI^2$ , supponiamo metà sia dissipato nella sorgente  $T_1$  e metà nella sorgente  $T_0$ . Cioè il calore  $q_0$  effettivamente sottratto non è affatto quello di Peltier

$$\text{ma va diminuito delle due quantità: } q_0 = q_{P_0} - q_i - \frac{RI^2}{2} = \alpha IT_0 - K(T_1 - T_0) - \frac{RI^2}{2}$$

Vedremo più avanti per  $q_i$  è proporzionale alla differenza di temperatura tramite un coefficiente  $k$ , cioè  $q_i = K(T_1 - T_0)$

Il lavoro elettrico che faccio sarà quello per far circolare la corrente  $\Delta E$  con una differenza di forza elettromotrice  $\Delta E$  a cui devo sommare l'energia  $RI^2$ , cioè  $\ell_e = \Delta E \cdot I + RI^2$

Questo per effetto Seebeck è riconducibile ad un  $\Delta E = \alpha(T_1 - T_0)$

Cioè il lavoro elettrico  $\ell_e = \alpha I(T_1 - T_0) + RI^2$

Chiaramente il caso ideale si ottiene supponendo  $R = 0$  e  $K = 0$ , cioè che non c'è effetto Joule e non c'è calore scambiato dai conduttori.

Considerato il fatto che prima la sezione era moto piccola e quindi possiamo pensare (essendo il calore proporzionale alla sezione) fosse uguale a zero. Essendo il filo molto sottile sarà piccola anche la resistenza. Quindi il caso ideale più corrisponde ad un caso particolare di questo reale.

Allora il rendimento del ciclo frigorifero è:

$$\eta_f = \frac{q_0}{\ell_e} = \frac{\alpha IT_0 - K(T_1 - T_0) - RI^2/2}{\alpha I(T_1 - T_0) + RI^2}$$

Vogliamo studiare l'effetto utile (o effetto termico) cioè il calore  $q_0$  sottratto alla sorgente ad alta temperatura.

Cioè considero  $\frac{dq_0}{dI} = \alpha T_0 - \cancel{\alpha} \frac{RI}{\cancel{\alpha}} = 0$

$$\text{Da cui ricavo } I_{\text{ottimo}} = \frac{\alpha T_0}{R}$$

Verifichiamo che sia un massimo, cioè  $\frac{d^2 q_0}{dI^2} = -R < 0$

E allora  $I_{\text{ottimo}}$  è effettivamente un massimo per cui c'è il massimo dell'effetto frigorifero.

Si va allora a calcolare il  $q_{\max}$ , cioè:  $q_{0, \max} = \frac{\alpha^2 T_0^2}{R} - k(T_1 - T_0) - \frac{K}{2} \cdot \frac{\alpha^2 T_0^2}{R}$

Introduciamo allora una variabile chiamata **fattore di merito** definita come  $z = \frac{\alpha^2}{KR}$

Fisicamente questo tiene conto con  $\alpha^2$  della scelta dei materiali e una volta scelti è fissato mentre KR tengono conto delle irreversibilità presenti, K dovuta ad una differenza finita di temperatura ed R la resistenza elettrica incontrata dagli elettroni.

Tornando alla trasformazione ideale con i due fili, K e R vanno a zero e allora  $z \rightarrow \infty$ , mentre diminuisce per trasformazioni reali.

$$\text{Allora riscrivo il } q_{0, \max} \text{ come } q_{0, \max} = k \left[ \frac{\alpha^2 T_0^2}{2KR} - (T_1 - T_0) \right] = k \left[ \frac{z T_0^2}{2} - (T_1 - T_0) \right]$$

Si costruisce allora un diagramma che riporta il fatto di merito in funzione della differenza di temperatura  $T_1 - T_0$ .

Si osservi che se il frigorifero funziona con temperatura superiore ambiente allora questa è  $T_1$ , supponiamo 27°C quindi 300 K. Nel costruire il diagramma abbiamo fissato  $T_1$  e andando verso destra diminuisce  $T_0$  della sorgente fredda.

$z$  tiene conto delle caratteristiche fisiche del materiale pn e delle irreversibilità K ed R.

Rigiriamo l'espressione di prima ricavando la differenza di temperatura

$$T_1 - T_0 = \frac{\alpha^2 T_0^2}{2kR} - \frac{q_{0,\max}}{k} = \frac{z T_0^2}{2} - \frac{q_{0,\max}}{k}$$

$$T_1 - T_0 = \frac{\alpha I T_0}{k} - \frac{R I^2}{2k} - \frac{q_0}{k}$$

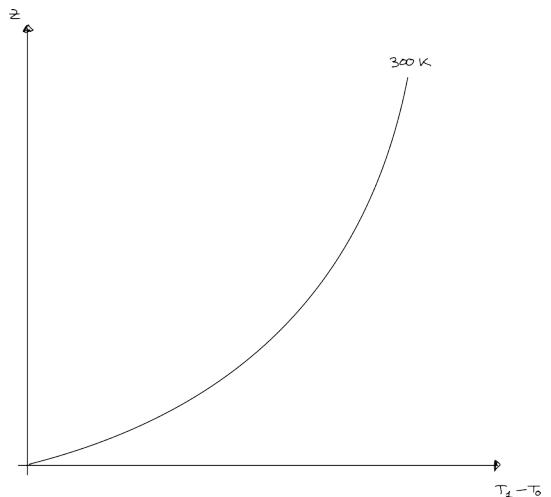
Costruiamo il diagramma nel caso limite in cui  $q_{0,\max} = 0$

$$\text{E allora } z = \frac{2}{T_0^2} (T_1 - T_0)$$

Considerando la sorgente inferiore a 7°C, cioè 280 K.

Quindi lo  $z$  con cui devo valutare i materiali e le irreversibilità dipende, nel caso estremo, solo dalle temperature.

Abbiamo trovato l'ordine di grandezza di  $z$ .



Studiamo il fattore di merito  $z$ , che, per ogni alpha fissato in base alla scelta dei materiali elettrici p e n, dipende da KR. Cioè, il prodotto della resistenza elettrica per il coefficiente totale di conduzione, è

$$KR = \left( \rho_p \cdot \frac{L_p}{A_p} + \rho_n \cdot \frac{L_n}{A_n} \right) \cdot \left( k_p \cdot \frac{A_p}{L_p} + k_n \cdot \frac{A_n}{L_n} \right)$$

resistenza totale di p ed n      conduttanza totale di p ed n

VEDREMO BENE QUESTA ESPRESSIONE DOPO AVER FATTO LA PARTE DI CONDUZIONE DEL CALORE

Si vede che nella pratica mettendo insieme tanti materiali p ed n conviene questi abbiano la stessa altezza  $L_p = L_n$  mentre le sezioni posso farle diverse  $A_p \neq A_n$ . Indichiamo con  $y = \frac{A_p}{A_n}$ .

$$\text{Moltiplicando e dividendo per } A_n \text{ otteniamo } KR = \left( \frac{\rho_p}{y} + \rho_n \right) \left( k_p y + k_n \right).$$

Abbiamo quindi espresso il fattore di merito in funzione del rapporto delle sezioni. In un fattore diminuisce all'aumentare di  $y$  mentre nell'altro aumenta.

Vogliamo allora studiare come varia KR rispetto a  $y$ , lo deriviamo:

$$\frac{d(KR)}{dy} = -\frac{\rho_p}{y^2} (k_p y + k_n) + \left( \frac{\rho_p}{y} + \rho_n \right) k_p = 0 \implies -\frac{\rho_p k_p}{y} - \frac{\rho_p k_n}{y^2} + \frac{\rho_p k_p}{y} + \rho_n k_p = 0 \implies y^2 = \frac{\rho_p k_n}{\rho_n k_p}$$

$$\text{Cioè si ottiene: } y = + \sqrt{\frac{\rho_p k_n}{\rho_n k_p}}$$

Verifichiamo allora se è un massimo o minimo, facendo la derivata seconda:

$$\frac{d^2(KR)}{dy^2} = -2y^{-3}\rho_p k_n > 0, \text{ cioè si vede che } KR \text{ ha un minimo mentre } z \text{ ha un massimo per questo } KR_{\min}$$

Sostituendo allora  $y$  in  $KR$  si ottiene:

$$KR_{\min} = \left( \frac{\rho_p}{\sqrt{\frac{\rho_p k_n}{\rho_n k_p}}} + \rho_n \right) \left( k_p \sqrt{\frac{\rho_p k_n}{\rho_n k_p}} + k_n \right)$$

$$\implies z_{\max} = \frac{\alpha^2}{KR_{\min}}$$

Passiamo invece a massimizzare il rendimento  $\eta_f$ :

$$\text{Abbiamo visto che possiamo scriverlo come } \eta_f = \frac{\alpha T_0 I - k (T_1 - T_0) - RI^2 / 2}{\alpha (T_1 - T_0) I + RI^2}$$

Cioè studiamo come massimizzarlo rispetto la corrente, cioè deriviamolo:  $\frac{d\eta_f}{dI} = 0$

$$\left( \alpha T_0 - 2 \frac{RI}{2} \right) [\alpha(T_1 - T_0)I + RI^2] - \left[ \alpha T_0 I - k(T_1 - T_0) - \frac{RI^2}{2} \right] \cdot [\alpha(T_1 - T_0) + 2RI] = 0$$

$$\cancel{\alpha^2 T_0 (T_1 - T_0) I} + \alpha T_0 R I^2 - \alpha R I^2 (T_1 - T_0) - R^2 I^3 - \left[ \cancel{\alpha^2 T_0 (T_1 - T_0)} + \alpha T_0 2 R I^2 - \alpha k (T_1 - T_0)^2 - 2k (T_1 - T_0) R I - (R I^2 / 2) \alpha (T_1 - T_0) - R^2 I^3 \right] = 0$$

$$-\alpha T_0 R I^2 - \frac{\alpha}{2} R I^2 (T_1 - T_0) + \alpha k (T_1 - T_0)^2 + 2k R I (T_1 - T_0) = 0$$

$$= -\alpha R I^2 \left( T_0 + \frac{T_1 - T_0}{2} \right)$$

$$\Rightarrow -\alpha R I^2 T_m + \alpha k (T_1 - T_0)^2 + 2k R I (T_1 - T_0) = 0, \text{ con } T_m = (T_1 + T_0) / 2 \text{ (media aritmetica)}$$

Abbiamo un'equazione del 2° ordine in  $I$

$$\text{E allora si ricava } I_{\text{ottimo}} = \frac{k}{\alpha} \frac{T_1 - T_0}{T_m} \left[ 1 \pm \sqrt{1 + z T_m} \right], \text{ con } z = \frac{\alpha^2}{K R}$$

È il valore della corrente che massimizza il rendimento (infatti si verifica che in corrispondenza di  $d^2\eta_f/dI^2 > 0$ )

Con  $I_{\text{ottimo}}$  si può ricavare  $\Delta E_{\text{ottimo}}$ , cioè:

$$\Delta E_{\text{ottimo}} = I_{\text{ottimo}} \cdot R = \frac{\alpha}{z} \cdot \frac{T_1 - T_0}{T_m} \left[ 1 + \sqrt{1 + z T_m} \right]$$

Per semplicità si introduce  $m^* = \sqrt{1 + z T_m}$

$$\text{E allora } I_{\text{ottimo}} = \underbrace{\frac{T_0}{T_1 - T_0}}_{\eta_f} \cdot \frac{m^* - T_1/T_0}{m^* - 1}, \text{ dove } \eta_f \text{ è il rendimento ideale di Carnot e l'altro termine è una funzione di } m^* \text{ e}$$

delle irreversibilità  $\Delta S_s$  legate alle differenze finite di temperatura e all'attrito dovuto alla resistenza.

Nel caso di reversibilità  $KR \rightarrow 0, z \rightarrow \infty$  e quindi  $m^* \rightarrow \infty$

In corrispondenza di  $I_{\text{ottimo}}$  possiamo calcolare il rendimento massimo in funzione di  $m^*$ , cioè:

$$\eta_{f\max} = \eta_{fc} \cdot f(m^*, \Delta S_s) \xrightarrow{m^* \rightarrow \infty} \eta_{fc} = \frac{T_0}{T_1 - T_0}$$

Possiamo concludere che il rendimento massimo del frigorifero è il rendimento del ciclo di Carnot (reversibile) per una funzione di  $m^*$  (a sua volta funzione di  $z$  quindi delle irreversibilità) e delle irreversibilità.

Posso disegnare qualitativamente il rendimento in funzione della differenza di temperatura  $T_1 - T_0$ .

Prendiamo  $T_1 = 300 \text{ K}$  e si andrà verso destra a diminuire della temperatura inferiore.

Il rendimento del frigorifero di Carnot ci darà un'iperbole ( $x y = T_0$ )

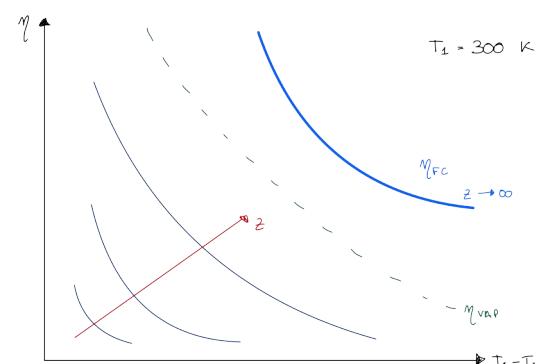
Se vado a confrontare i rendimenti del frigorifero ideale con quelli di un ciclo frigorifero a compressione di vapore vedo come questo è rappresentato dalla curva tratteggiata in verde.

Mentre i frigoriferi per effetto termoelettrico sono molto inferiori.

Posso osservare che questi rendimenti crescono all'aumentare di  $z$ , fattore di merito.

Per i materiali metallici si ottengono degli  $z$  molto bassi e nella scienza dei materiali sono stati scelti delle leghe ottimali:

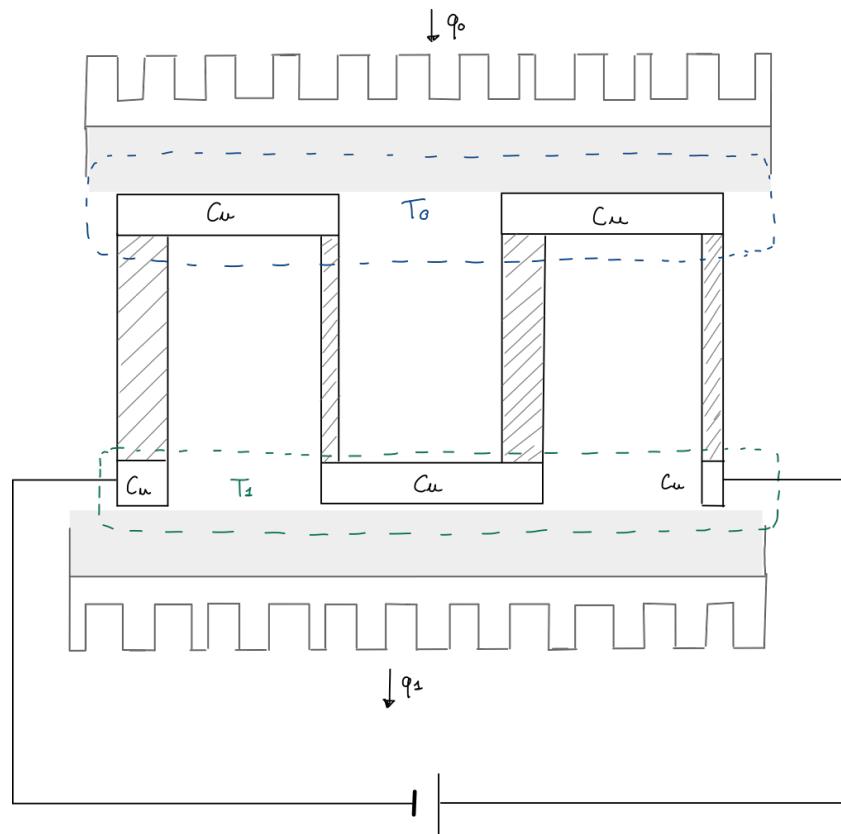
- Per p: bismuto-tellurio-stronzio
- Per n: bismuto-tellurio-selenio



In conclusione:

Il rendimento dei frigoriferi ad effetto termoelettrico è basso e bisogna cercare di aumentarlo con la scelta dei materiali. Il vantaggio è che non ci sono i compressori e il tutto si risolve nel congiure elettricamente con una pila i vari materiali.

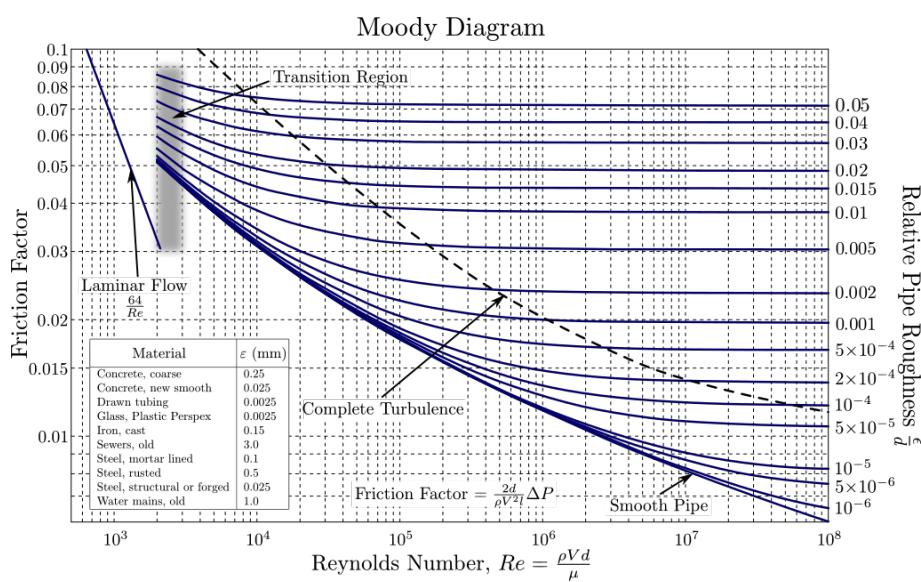
Possiamo quindi dire che la convenienza maggiore dei frigoriferi ad effetto termoelettrico è dovuta al fatto che non ho parti rotanti ma ho un sistema statico dove passa semplicemente corrente.



Abbiamo un circuito che con un solo elemento il Cu si chiude sulla pila , inserendo più elementi pn in serie la corrente produce lo stesso effetto. In figura è disegnato anche lo scambiatore di calore (con le alette) che permette di assorbire il calore  $q_0$  e cedere il calore  $q_1$ .

# FISICA TECNICA

## Settimana 5



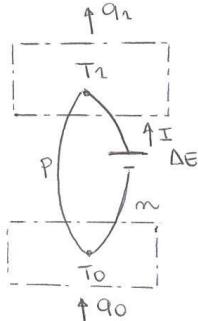
# Indice settimana 5

Indice settimana 5	2
martedì 20 ottobre 2020 - Lezione 13	3
Termofluidodinamica	9
Principio di conservazione della massa di Leonardo da Vinci	12
Principio di conservazione dell'energia: equazione di Bernoulli generalizzata	13
<i>Definizione operativa di attrito</i>	14
mercoledì 21 ottobre 2020 - Lezione 14	15
Equazione di Euelro	15
Legge di Newton	16
Analisi dimensionale per le perdite distribuite	17
Perdite di pressione concentrate	20
<i>Allargamento di sezione</i>	20
<i>Restringimento di sezione</i>	21
<i>Gomiti a 90°</i>	22
Domani ci sarà la prima esercitazione dell'Ing Petracci.	22
giovedì 22 ottobre 2020 - Esercitazione 1	23
Esercitazione	23
<i>Esercizio</i>	25
<i>Esercizio</i>	29

**REFRIGERAZIONE TERMOELETTRICA. Cicli frigoriferi termoelettrici.**

Sintesi dell'effetto Peltier.

Nel circuito viene fatta passare, spendendo un certo lavoro, una corrente elettrica  $I$  continua, ottenendo un giunto di calore  $q_0$  al giunto FREDDO a temperatura  $T_0$ , da un lato a  $T_1 < T_{amb}$ . Al giunto caldo a temperatura  $T_1 > T_0$  viene rilasciata a regime una potenza termica pari alla somma di  $q_1$  e della potenza elettrica  $\Delta E$  per alimentare il circuito ( $L = q_0 + q_1$ )

**\* SCHEMA DI FUNZIONAMENTO IDEALE**

Stiamo trascurando gli effetti legati alle irreversibilità da conduzione e dissipazione per effetto Joule.

Stiamo implicitamente trascurando le resistenze tra i nodi dei termostendi e la resistenza interna del circuito.

In queste condizioni, gli unici scambi termici coinvolgono potenze termiche di Peltier.

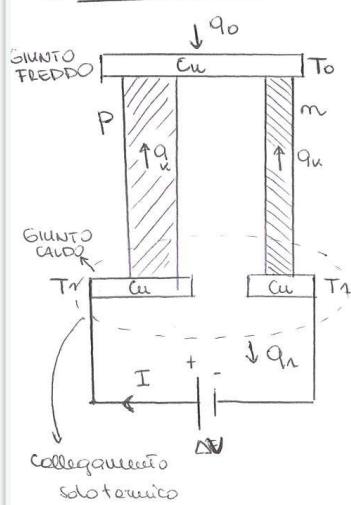
$$q_1 = q_{1P} = \frac{\pi}{2} I = \alpha_{Pm} \cdot T_1 \cdot I \quad q_0 = q_{0P} = \frac{\pi}{2} I = \alpha_{Pm} T_0 \cdot I$$

Il lavoro elettrico (spesa energetica) si calcola come:  $L_{el} = \Delta E \cdot I$ , dove  $\Delta E$  è la d.d.p. ai monti del generatore.

La  $\Delta E$  è data dall'effetto Seebeck e vale:  $\Delta E = \alpha_{Pm}(T_1 - T_0) \rightarrow L_{el} = \alpha_{Pm}(T_1 - T_0) \cdot I$

Il rendimento del ciclo frigorifero, o meglio il COEFFICIENTE DI EFFETTO UTILE è pari a:

$$\eta_F = \frac{q_0}{L_{el}} = \frac{\alpha_{Pm} T_0 \cdot I}{\alpha_{Pm}(T_1 - T_0) \cdot I} = \frac{T_0}{T_1 - T_0} \quad \text{che corrisponde alla formula del coefficiente di effetto utile del ciclo inverso di Carnot!}$$

**\* SCHEMA DI FUNZIONAMENTO REALE**

$\rightarrow$   $A_m, A_{pT0} \rightarrow$  del calore si trasmette tra le due sorgenti per conduzione Fourierana.

$\rightarrow$  Risistenza interna del circuito  $\neq 0 \rightarrow$  calore viene dissipato per effetto Joule. Supponiamo ancora che questo calore si ripartisca a metà tra giunto caldo e freddo.

**BILANCIO AL GIUNTO FREDDO**

La sorgente a  $T_0$  riceve dall'ambiente esterno una potenza termica per effetto Peltier  $P_{0P}$ , dal giunto caldo una potenza termica di conduzione  $q_K$  e metà della potenza dissipata per effetto Joule.

$$q_0 = q_{0P} - q_K - \frac{1}{2} q_J \quad q_{0P} = \alpha_{Pm} T_0 \cdot I$$

$$q_K = K(T_1 - T_0)$$

$$q_J = RI^2$$

$$\rightarrow q_0 = \alpha_{Pm} T_0 \cdot I - K(T_1 - T_0) - \frac{1}{2} RI^2$$

La potenza sferica nel circuito è:  $L_{el} = \Delta V \cdot I$

La d.d.p.  $\Delta V$  ai capi del generatore elettrico può essere espressa come somma del  $\Delta E$  per effetto Seebeck e della caduta di tensione dovuta alla circolazione di corrente.

$$\Delta V = \Delta E + RI = \alpha_{pu}(T_1 - T_0) + RI$$

$$\rightarrow L_{el} = \alpha_{pu}(T_1 - T_0)I + RI^2$$

Studiamo l'andamento della potenza frigorifera  $q_0$ , al variare dell'intensità di  $I$ :

$$q_0 = \alpha_{pu} T_0 I - \kappa(T_1 - T_0) - \frac{RI^2}{2}$$

$$\frac{dq_0}{dI} = 0 \rightarrow \alpha_{pu} T_0 - RI = 0 \rightarrow I_{\text{out}} \Big|_{q_0 \text{ max}} = \frac{\alpha_{pu} T_0}{R}$$

valore che massimizza  $q_0$ .  $\frac{dq_0}{dI^2} = -R < 0$

A parità di  $q_0$ , questo stesso valore di  $I$  massimizza la differenza di temperatura tra i due punti.

$$(T_1 - T_0) = \frac{\alpha_{pu} T_0 I - RI^2/2 - q_0}{\kappa} \quad \frac{d(T_1 - T_0)}{dI} = \frac{\alpha_{pu} T_0}{\kappa} - \frac{RI}{\kappa} = 0 \rightarrow I = \frac{\alpha_{pu} T_0}{R}$$

N.B. La diff. di  $T$  massima si ha pure realtà, ad effetto frigorifero nullo ( $q_0 = 0$ ).

$$q_0^{\text{max}} = \frac{\alpha_{pu}^2 T_0^2}{2R} - \kappa(T_1 - T_0)$$

$$q_0^{\text{max}} = \kappa \left[ \frac{\alpha_{pu}^2 T_0^2}{2} - (T_1 - T_0) \right]$$

Definiamo FIGURA di MERITO:  $\zeta = \frac{\alpha_{pu}^2}{R\kappa}$ , fatto che ha lo stesso significato del fattore di merito degli impianti motori termoelettrici

$$(T_1 - T_0)^{\text{max}} = (T_1 - T_0) \Big|_{I_{\text{out}}} = \frac{1}{\kappa} \left[ \frac{\alpha_{pu}^2 T_0^2}{R} - \frac{\alpha_{pu}^2 T_0^2}{2R} - q_0 \right] = \frac{\zeta \cdot T_0^2}{2} - \frac{q_0}{\kappa} \Rightarrow q_0^{\text{max}}$$

### STUDIO del RENDIMENTO

$$\eta_F = \frac{q_0}{L_{el}} = \frac{\alpha_{pu} T_0 I - \kappa(T_1 - T_0) - RI^2/2}{\alpha_{pu}(T_1 - T_0) I + RI^2} \quad \frac{d\eta_F}{dI} = 0 \rightarrow I_{\text{out}} \Big|_{\eta_F \text{ max}}$$

$$\frac{d\eta_F}{dI} = \frac{\alpha_{pu} T_0 - RI}{\alpha_{pu}(T_1 - T_0) I + RI^2} - \left( \alpha_{pu} T_0 - \kappa(T_1 - T_0) - \frac{RI^2}{2} \right) \cdot \frac{\alpha_{pu}(T_1 - T_0) + 2RI}{(\alpha_{pu}(T_1 - T_0) I + RI^2)^2} = 0$$

$$(\alpha_{pu} T_0 - RI) \left( \alpha_{pu} (T_1 - T_0) + 2RI \right) - \left[ \alpha_{pu} T_0 - \kappa(T_1 - T_0) - \frac{RI^2}{2} \right] \left( \alpha_{pu} (T_1 - T_0) + 2RI \right) = 0$$

$$\alpha_{pu}^2 T_0 (T_1 - T_0) I + \alpha_{pu} T_0 R I^2 - \alpha_{pu} R (T_1 - T_0) \cdot \frac{I}{2} - R^2 I^3 - (\alpha_{pu}^2 T_0 (T_1 - T_0) \cdot I) - 2 \alpha_{pu} R T_0 \cdot I^2 + \kappa (T_1 - T_0)^2 \alpha_{pu} + \\ + (2 \kappa R (T_1 - T_0) \cdot I) + R \frac{\alpha_{pu} (T_1 - T_0) I^2}{2} + R^2 I^3 = 0$$

Parliamo di frigorifero ad effetto termoelettrico.

Si scrive il rendimento e si deriva rispetto alla corrente e si uguaglia a zero cercando  $I_{\text{ottimo}}$  che massimizza il rendimento.

Si eliminano i due termini con  $I^3$ .

Raggruppo i termini con  $I^2$  e semplifco, rimane un solo termine. Discorso analogo per i termini con  $I$

Rimane quindi un'espressione del secondo ordine e si trova  $I$

Si osservi che  $\frac{T_1 + T_0}{2} = T_m$ .

Raggruppando i termini in  $I^2$ :

$$\left[ \alpha_{pn} \cdot T_0 R - \alpha_{pu} (T_1 - T_0) \cdot R - 2 \alpha_{pn} \cdot R \cdot T_0 + \frac{R \alpha_{pu}}{2} (T_1 - T_0) \right] \cdot I^2 \\ \left[ \alpha_{pu} R - \alpha_{pu} T_1 R + \alpha_{pu} T_0 R - 2 \alpha_{pu} R T_0 + \frac{R \alpha_{pu}}{2} T_1 - \frac{R \alpha_{pu}}{2} T_0 \right] \cdot I^2 = \\ = \left[ - \frac{\alpha_{pu} R}{2} \cdot T_1 - \frac{\alpha_{pu} R}{2} \cdot T_0 \right] \cdot I^2 = - \alpha_{pu} R \left( \frac{T_1 + T_0}{2} \right) \cdot I^2 = - R \alpha_{pu} T_m \cdot I^2$$

Raggruppando i termini in  $I$ :

$$\left[ \alpha_{pu}^2 T_0 (T_1 - T_0) - \alpha_{pu}^2 T_0 (T_1 - T_0) + 2 \kappa R (T_1 - T_0) \right] \cdot I = 2 \kappa R (T_1 - T_0) \cdot I$$

$$\frac{d\eta_F}{dT} = 0 \rightarrow (R \alpha_{pu} T_m) I^2 - [2 \kappa R (T_1 - T_0)] \cdot I - \kappa \alpha (T_1 - T_0)^2 = 0 \\ I = \frac{+2 \kappa R (T_1 - T_0) + \sqrt{4 \kappa^2 R^2 (T_1 - T_0)^2 + 4 \kappa R \alpha_{pu}^2 T_m (T_1 - T_0)^2}}{2 \alpha_{pu} T_m \cdot R} = \frac{\kappa}{\alpha_{pu}} \cdot \frac{(T_1 - T_0)}{T_m} + \sqrt{\frac{(T_1 - T_0)^2 4 \kappa^2 R^2 \left( 1 + \frac{\alpha_{pu}^2}{R \kappa} T_m \right)}{2 \alpha_{pu} T_m}}$$

$$\rightarrow I = \frac{\kappa}{\alpha_{pu}} \cdot \frac{(T_1 - T_0)}{T_m} \pm \frac{\sqrt{\kappa R (T_1 - T_0)}}{\sqrt{\kappa^2 \alpha_{pu} T_m}} \sqrt{1 + \frac{\alpha_{pu}^2}{R^2} T_m} = \frac{\kappa}{\alpha_{pu}} \cdot \frac{(T_1 - T_0)}{T_m} + \sqrt{1 + z \cdot T_m} \quad \text{considerando soluzioni positive.}$$

$$z = \frac{\alpha_{pu}^2}{R^2}$$

$$\frac{\kappa}{\alpha_{pu}} = \frac{\alpha_{pu}}{z R} \quad \text{indichiamo con } m^* = \sqrt{1 + z \cdot T_m} \Rightarrow \text{funzione dell'irreversibilità}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T_m} = \frac{m^{*2} - 1}{z} \\ \Rightarrow I_{ott.} = \frac{\alpha_{pu}}{z R} \cdot \frac{(T_1 - T_0)}{T_m} (1 + m^*) = \frac{\alpha_{pu}}{z R} \cdot \frac{(T_1 - T_0)}{m^{*2} - 1} (1 + m^*) = \frac{\alpha_{pu} (T_1 - T_0)}{R} \cdot \frac{(1 + m^*)}{(m^* + 1)(m^* - 1)}$$

$$\rightarrow I_{ott.} \Big|_{m^{*\max}} = \frac{\alpha_{pu}}{R} \frac{(T_1 - T_0)}{m^{*2} - 1}$$

$$\rightarrow m^{*\max} = \frac{T_0}{T_1 - T_0} \cdot \frac{m^* - T_1/T_0}{m^* + 1}$$

Judicando con  $\varphi = f(m^*, s_s) = \frac{m^* - T_1/T_0}{m^* + 1}$  il FATTORE DI IRREVERSIBILITÀ, possiamo più convenientemente scrivere:

$$m^{*\max} = m_c \cdot \varphi$$

Ridurre le irreversibilità vuol dire diminuire i valori delle resistenza elettrica e della conduttoria termica globale  $\kappa$ .

Bisogna, cioè, realizzare valori più elevati possibili delle figure di merito e in rapporto alla capacità termocellula della coppia  $(\alpha_{pu})$ .

All'aumentare di  $z$ , migliorano tutte le prestazioni del ciclo. In particolare, al tendere ad  $\infty$  di  $z$ ,  $m^* \rightarrow \infty$ , e  $\varphi \rightarrow 1$ ,  $m_f \rightarrow m_c$ .

Si trova allora  $I_{ottimo}$  e viene introdotto  $m^* = \sqrt{1 + z \cdot T_m}$ .

Si sostituisce nel rendimento e si trova  $\eta_{\max}$  e l'espressione che poi prende il nome di  $\varphi$  funzione dell'irreversibilità  $m^*$  e  $s_s$ .

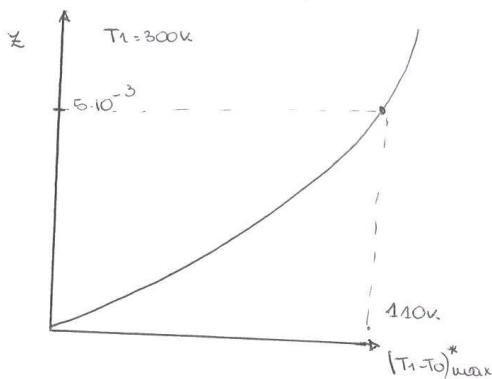
La differenza  $\Delta T$  tra giunto caldo e giunto freddo era:

$$(T_1 - T_0) = \frac{(\alpha_{pu} \cdot T_0 \cdot I - RI^2/2 - q_0)}{K}$$

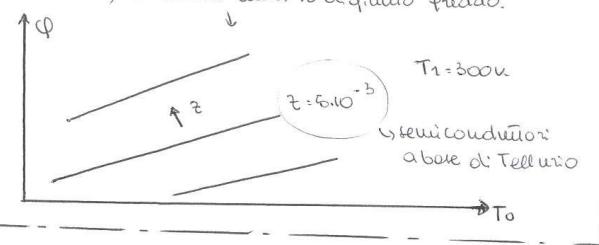
ed a partire di queste condizioni, per una valori massimo per  $q_0 = 0$ , otteniamo effetto frigorifero:

$$(T_1 - T_0)^* = \frac{\alpha_{pu} T_0 I - RI^2/2}{K} \rightarrow (T_1 - T_0)^*_{\max} = (T_1 - T_0)^* \Big|_{I_{\text{tot}}} = \frac{\frac{I_{\text{tot}}}{K} = \frac{\alpha_{pu} T_0}{R}}{\frac{I_{\text{tot}}^2}{2}} = \frac{2 \alpha_{pu} T_0^2}{R}$$

Si può disegnare questo  $\Delta T$  realizzabile con un incremento in funzione della figura di merito  $z$ , la base della relazione su riportata.



Dunque, si riporta il diagramma del fattore di irreversibilità  $\varphi$  in funzione della figura di merito  $z$ , al valore della  $T_0$  di giunto freddo.



Supponiamo che i due termoconduttori siano cilindri di sezioni  $A_p$  e  $A_u$  e stessa altezza  $L$  (condizione di facoltà l'una sulla altra).

$$R = \rho_p \frac{L}{A_p} + \rho_u \frac{L}{A_u} \quad K = k_p \frac{A_p}{L} + k_u \frac{A_u}{L}$$

N.B. Siamo implicitamente assumendo le seguenti ipotesi: (i) scambio termico con l'esterno localizzato ai giunti.

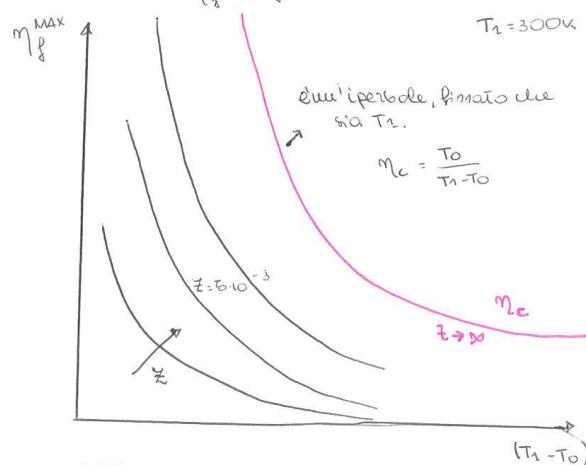
(ii) resistenza termica ed elettrica di cattura tra elmetti e piastre del giunto trascurabile.

(iii) Resistenza elettrica trascurabile delle piastre di spunto in Cu.

$$\rightarrow K \cdot R = \left( k_p \frac{A_p}{L} + k_u \frac{A_u}{L} \right) \left( \rho_p \frac{L}{A_p} + \rho_u \frac{L}{A_u} \right) = \frac{L}{A_u} \left( k_p \frac{A_p}{L} + k_u \frac{A_u}{L} \right) \cdot \frac{A_u}{L} \left( \rho_p \frac{L}{A_p} + \rho_u \frac{L}{A_u} \right) =$$

$$\rightarrow K \cdot R = \left( k_p \frac{A_p}{A_u} + k_u \right) \left( \rho_p \frac{A_u}{A_p} + \rho_u \right) \quad \text{indichiamo } \eta = \frac{A_p}{A_u}$$

Il diagramma del rendimento frigorifero massimo  $m_f^{\max}$  in funzione di  $z$  è invece:



Appare chiaro che realizzare valori elevati della figura di merito  $z$  della coppia termoelettrica dipende non solo dall'utilizzo materiali con valori favorevoli delle proprietà intrinseche di condutività e resistività ( $\rho$  e  $K$ ), ma anche ottimizzare la GEOMETRIA DEL SISTEMA.

Troviamo quindi uno  $z_{\max}$  in funzione del rapporto che coinvolge resistenza e conducibilità termica. Il problema è proprio cosa succede per i materiali con il prodotto  $k \cdot \rho = \frac{k}{\sigma}$  ( $\sigma$ =conduttanza elettrica) ed esiste la legge di Weidmann-Franz che dice che il prodotto della conducibilità termica per la resistenza è uguale ad una costante per la temperatura:  $k \cdot \rho = 2,4 \cdot 10^{-8} \cdot T [K]$ .

$$\rightarrow KR = (k_p \cdot y + k_m) \left( \frac{P_p}{y} + P_m \right) = k_p P_p + k_p P_m y + \frac{k_m P_p}{y} + k_m P_m$$

Rispetto alla geometria della coppia termoelettrica, il valore massimo di  $z$  si ottiene al minimo di  $(KR)$

che si ha per  $\frac{d(KR)}{dy} = 0$  quando  $\frac{d^2(KR)}{dy^2} > 0$  [concavità verso l'alto].

$$\frac{d(KR)}{dy} = k_p P_m - \frac{k_m P_p}{y^2} = 0 \rightarrow y = \sqrt{\frac{k_m \cdot P_p}{k_p \cdot P_m}}$$

$$\frac{d^2(KR)}{dy^2} = \frac{2k_m P_p}{y^3} > 0$$

$\rightarrow y = y_{\min} = \sqrt{\frac{k_m \cdot P_p}{k_p \cdot P_m}}$  è effettivamente un minimo per il prodotto delle soglie di invertibilità, e quindi un massimo per la figura di merito  $z$ .

$$(KR)^{\min} = k_p P_p + k_p P_m \sqrt{\frac{k_m \cdot P_p}{k_p \cdot P_m}} + k_m P_m \sqrt{\frac{k_p \cdot P_m}{k_m \cdot P_p}} + k_m P_m = k_p \cdot P_p + 2 \sqrt{k_m \cdot P_m \cdot \sqrt{k_p \cdot P_p}} + k_m \cdot P_m$$

$$\rightarrow (KR)^{\min} = \left( \sqrt{k_m P_m} + \sqrt{k_p P_p} \right)^2 \rightarrow z^{\max} = \frac{\alpha_p^2}{(KR)^{\min}} = \left[ \frac{\alpha_p}{\sqrt{k_m P_m} + \sqrt{k_p P_p}} \right]^2$$

Per i metalli la quantità  $\kappa \cdot \rho = \frac{\kappa}{\sigma}$  è vincolata strettamente alle temperature dalla LEGGE DI WIEDMANN-FRANTZ:

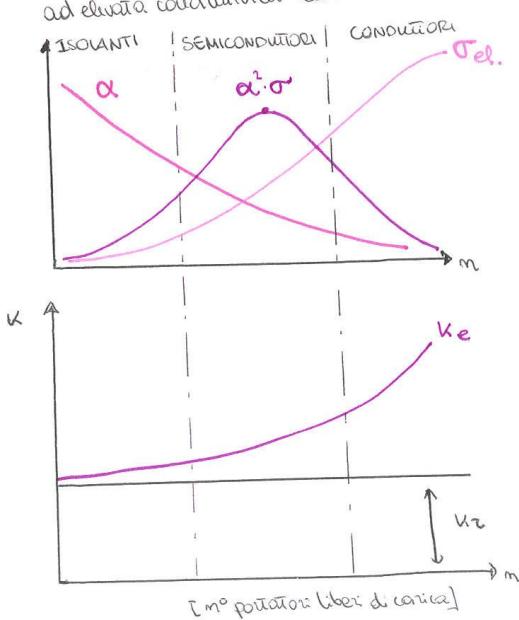
$$\kappa \cdot \rho = 2,4 \cdot 10^{-8} \cdot T [K]$$

$$\alpha_p - \alpha_u \text{ con } \frac{\alpha_p}{\alpha_u} = \frac{1}{40}$$

seppure nelle migliori delle ipotesi il potere della coppia termoelettrica fone alto ( $\alpha_p = 80 \frac{\mu V}{K}$ ) a temperatura di scarico in ambiente ( $T=300K$ ), otteniamo:  $z_{\max} = 2,22 \cdot 10^{-4} K^{-1}$ , cui corrisponde un  $(T_2 - T_1)_{\max}$  di appena  $10^\circ C$  (potere frigorifero nullo).

$\rightarrow$  è impossibile utilizzare metalli come termoeletrodì.

$\rightarrow$  si usano SEMICONDUTTORI, che presentano elevato potere termoelettrico di accoppiamento ( $\alpha$ ), connesso ad elevata condutività elettrica e bassa condutività termica.



$\alpha$  decresce al crescere di  $n$ .  $\sigma$  decresce al crescere di  $n$ .  
 $\kappa \propto \alpha^2 \cdot \sigma$  → il max di  $\alpha \cdot \sigma$  cade negli  $n$  intermedi, ossia nel campo dei semiconduttori.

La conducibilità termica si compone di una parte di vibrazione reticolare  $\kappa_v$  (indipendente da  $n$ ) e da una parte elettronica  $\kappa_e$  proporzionale a  $n$ .

$$\kappa \propto \frac{1}{v} \propto \frac{1}{v_e}$$

$\rightarrow$  il max di  $t = \frac{\alpha^2 \sigma}{\kappa}$  si trova nel campo dei semiconduttori.

Attualmente i semi conduttori più utilizzati sono leghe di (Bi-Te-Au) per  $P$  e leghe (Bi-Te-Se) per  $N$ . Con queste termocouple si raggiunge  $T \approx 0,003$

Anche il fattore di Seebeck  $\alpha_{pn}$  è fissato una volta scelti i materiali per cui considerando la temperatura ambiente si ottiene uno  $z_{\max}$  che corrisponde ad un  $\Delta T$  di soli  $10^\circ C$ .

In conclusione per fare questi frigoriferi non si possono usare metalli ma devono essere usati dei semiconduttori che quindi hanno un potere termoelettrico massimo.

Lo scopo principale dei ricercatori dei materiali è quello di identificare delle combinazioni ottimali!

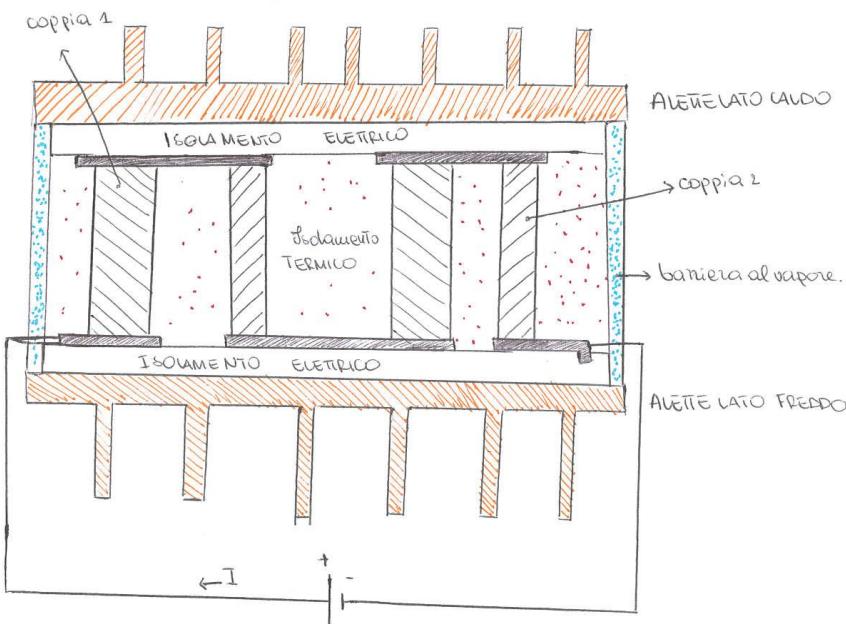
### \*CONSIDERAZIONI ENERGETICHE

Il rendimento ottenibile con un refrigeratore termoelettrico è molto inferiore a quello che si può realizzare, con le medesime condizioni operative, in un sistema tradizionale a compressione di vapore.

Si utilizza un  
REFRIGERATORE  
TERMOELETTRICO  
quando sono  
presenti i seguenti  
requisiti

- > semplicità di regolazione delle potenze frigorifera e possibilità di passare alla funzione di riscaldamento, invertendo la polarità della tensione esterna applicata.
- > mancanza di particoli di movimento → NO rumore, silenziosità
- > possibilità di operare a gravità nulla o in condizioni di accelerazione intorno (veicoli spaziali).

### \* SCHEMA DI MODULO PER REFRIGERAZIONE TERMOELETTRICA



Le singole coppie termoelettriche vengono solitamente disposte in serie.

Le giunture calde e fredde sono saldate alle rispettive superfici di scambio termico con un materiale che sia un buon conduttore termico ma isolante elettrico.

Le superfici di scambio termico sono spesso alzate per favorire lo scambio, in modo che il  $\Delta T$  tra i giunti termoelettrici sia quanto più vicino possibile al  $\Delta T$  tra gli ambienti esterni.

La parte inferiore è quella che va mantenuta a  $T_0$  che sottrae calore alla sorgente termica mentre quella superiore cede calore alla sorgente calda.

POSSIAMO CONSIDERARE COMPLETATA LA PARTE DI TERMODINAMICA

IL PROF VORREBBE FARE DELLE ESERCITAZIONI OLTRE ALLE 10 LEZIONI DELL'ING PETRACCI SULLA TERMODINAMICA. IL PROF VUOLE SOSTituIRE O AGGIUNGERE DELLE ESERCITAZIONI PIÙ CHE ALTRO DIMOSTRAZIONI PRATICHE DI COSA SI PUÒ FARE CON QUESTE CONOSCENZE SULLE DUE PARTI DI TERMOFLUIDODINAMICA E TERMOCINETICA, CIOÈ L'ACCOPPIAMENTO TRA MOTO DEI FLUIDI E TRASMISSIONE DEL CALORE.

## Termofluidodinamica

SEGUIMMO IL LIBRO "LEZIONI DI TERMOFLUIDODINAMICA".

Consideriamo un fluido che scorre in un condotto:

Partiamo dall'elemento infinitesimo che chiamiamo **particella elementare** (o filetto fluido) un insieme di particelle, tecnicamente sarebbe una molecola ma non potendone seguire una per una consideriamo un gruppo di molecole, quindi un insieme grande rispetto le singole molecole ma piccolo rispetto il condotto.

Si considerano **3 linee di flusso**:

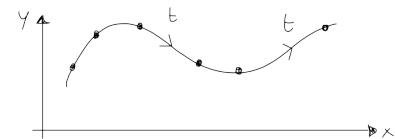
- Traiettoria della particella di fluido, o **linea di percorso** (*path-line*). È l'insieme dei punti dello spazio occupati dal baricentro della particella nello spazio (analogo della dinamica del punto materiale). Possiamo definire le velocità nelle tre dimensioni.

$$u = \frac{dx}{dt}, v = \frac{dy}{dt}, w = \frac{dz}{dt}$$



- **Linea di corrente** (*stream-line*), è la curva che ha come tangente in ogni suo punto il vettore velocità. Così ci soffermiamo sulla direzione della particella. Per definire le linee di corrente, scomponiamo la velocità ddi un punto nelle sue componenti e scriviamo:

$$\frac{v}{u} = \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{v}{dy} = \frac{u}{dx} = \frac{w}{dz}.$$



- **Linea di fumo**, o di colore (*streak-line*), rappresenta la traiettoria dei punti che sono passati per un punto fisso dello spazio in tempi precedenti. Le linee di fumo si calcolano a partire dalle traiettorie invertendo il senso del tempo (dall'istante  $t$  all'istante  $t_0$ ) perché all'istante iniziale  $t_0$  le traiettorie **devono essere passate per un punto fisso  $x_0, y_0$** . Si possono realizzare mettendo un filo elettrico su cui metto dell'olio e faccio passare della corrente che per effetto Joule scalda l'olio che fa fumo. Il fumo va in alto e la linea di fumo è evidente mentre se mando dell'aria con un ventilatore l'andamento sarà una curva generica. Il fatto che vedo l'andamento del fumo significa che quelle particelle sono passate attraverso il punto dove si faceva passare corrente e c'era l'olio che faceva fumo, una linea accanto non viene mostrata dal fumo perché non passa per il filo.

Si tenga presente che a regime stazionario le 3 linee coincidono!

Invece se il moto non è stazionario ma variabile e funzione del tempo, le 3 linee sono distinte.

Andiamo a dare un esempio numerico per illustrare meglio:

Supponiamo un moto bidimensionale quindi  $w = 0$  che si volge nel piano  $xy$ .

Supponiamo che  $v = y$  e che  $x = \frac{x}{1+t}$

Per le linee di corrente:

$$\frac{v}{dy} = \frac{u}{dx} \rightarrow \frac{y}{dy} = \frac{x}{1+t} \frac{1}{dx}$$

$$\frac{dx}{x}(1+t) = \frac{dy}{y}$$

Integriamo in un certo istante di tempo  $t = \text{cost}$

$$(1+t) \cdot \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = \ln\left(\frac{u}{y_0}\right) \rightarrow \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)^{(1+t)} = \ln\left(\frac{y}{y_0}\right)$$

Allora  $\left(\frac{x}{x_0}\right)^{(1+t)} = \frac{y}{y_0}$ , abbiamo trovato una funzione solo dello spazio (poiché  $t = \text{cost}$ )

e quindi abbiamo una relazione tra  $x$  e  $y$  ad ogni istante di tempo  $t$  fissato.

FAR RIFERIMENTO ALLE FIGURE 1.4 E 1.5 DEL LIBRO

Le linee di corrente all'istante  $t = 0$  sono date da:  $\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0}$  e quindi sono delle rette (rette a  $45^\circ$  se  $x_0 = y_0$ )

45° se  $x_0 = y_0$ )

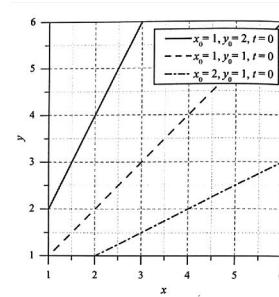


Figura 1.4 — Linee di corrente per  $t = 0$ .

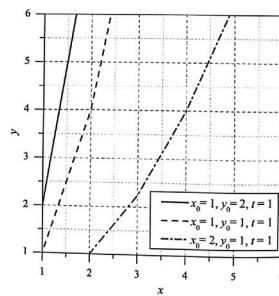


Figura 1.5 — Linee di corrente per  $t = 1$ .

Se  $t = 1$  le linee di corrente sono date da:  $\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 = \frac{y}{y_0}$  e quindi c'è un andamento quadratico del tipo  $y = x^2$

Se  $t = 2$ , chiaramente l'andamento sarà cubico.

Le linee di corrente cambiano istante per istante e non coincidono con la traiettoria proprio perchè c'è una funzione del tempo.

Per le traiettorie sono definite come:

$$u = \frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{x}{1+t} = \frac{dx}{dt} \xrightarrow{\text{separo le variabili}} \frac{dx}{x} = \frac{dt}{1+t} \xrightarrow{\text{integrandi}} \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = \ln\left(\frac{1+t}{1+\theta_0}\right)$$

$$v = \frac{dy}{dt} \rightarrow y = \frac{dy}{dt} \rightarrow dt = \frac{dy}{y} \rightarrow t - \theta_0 = \ln\left(\frac{y}{y_0}\right)$$

Cioè  $\Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{y_0} = e^{(t-\theta_0)} \\ \frac{x}{x_0} = \frac{1+t}{1+\theta_0} \end{cases}$  le leggi che legano  $x$  e  $y$  al tempo  $t$  che è variabile

Eliminiamo il tempo tra le 2 relazioni (ricavo da una e sostituisco nell'altra) per ottenere la relazione tra  $x$  e  $y$ :

$$\frac{x}{x_0}(1+\theta_0) = 1+t \rightarrow t = \frac{x}{x_0}(1+\theta_0) - 1$$

$$\frac{y}{y_0} = \exp\left[\frac{x}{x_0} + \frac{x}{x_0}\theta_0 - 1 - \theta_0\right] = \exp\left[\frac{x}{x_0}(1+\theta_0) - (1+\theta_0)\right]$$

$$\text{Allora } \frac{y}{y_0} = \exp\left[\left(\frac{x}{x_0} - 1\right)(1+\theta_0)\right]$$

Per semplicità ipotizziamo  $\theta_0 = 0$  e  $x_0 = y_0 = 1$  e allora:

$$y = \exp(x - 1) = e^{x-1}$$

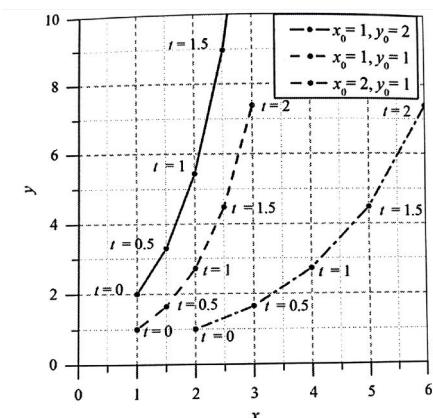
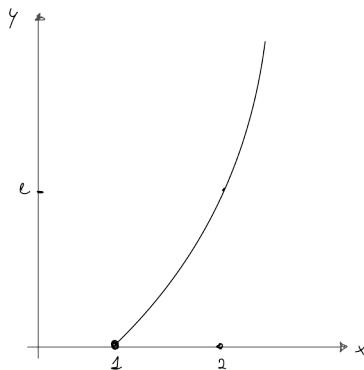


Figura 1.6 -- Traiettorie a diversi istanti di tempo.

CONVIENE PERÒ FAR RIFERIMENTO ALLA FIGURA 1.6 DEL LIBRO

Le linee di fumo sono le più difficili concettualmente. Ripartiamo dalle equazioni delle traiettorie supponendo che ci sia un punto fisso di partenza della linea di fumo cioè  $x_0, y_0$  ad istanti di  $\tau$  precedenti.

$$x_0 = \xi_x, \quad y_0 = \xi_y, \quad \theta_0 = \tau < t$$

$$\text{Allora le espressioni della traiettorie le scrivo come } \begin{cases} y = \xi_y \cdot e^{t-\tau} \\ x = \xi_x \left(\frac{1+t}{1+\tau}\right) \end{cases}$$

Per ottenere la relazione tra  $x$  e  $y$  eliminiamo  $\tau$  o  $t$ :

$$y = \xi_y \cdot \exp\left[\frac{x - \xi_x}{x}(t+1)\right], \text{ oppure } y = \xi_y \cdot \exp\left[\frac{x - \xi_x}{\xi_x}(1+\tau)\right]$$

Facciamo allora un diagramma di  $y$  in funzione di  $x$  con  $\tau$  fissato e queste sono le traiettorie del fluido così come le abbiamo studiate prima. Sia per  $\tau=0$  che per  $\tau=1$  o  $\tau=2$ .

Invece le linee di fumo si ottengono con  $t$  ad instanti di tempo precedenti.

Cioè per  $t = 1$ ,  $t = 2$  e  $t = 3$  trovo tre curve diverse. per capire i colori facciamo il seguente ragionamento:  
Supponiamo che il fumo che parte dal filo elettrico sia bianco (**azzurro**) tra l'istante 0 e 1, poi è **rosso** tra 1 e 2 e poi è **giallo** tra 2 e 3.

La testa del fumo, e quindi la traiettoria è tutta bianca, poi dall'istante 1 a 2 diventa rossa, quindi per  $t=1$  la curva sarà rossa e infine sarà giallo da 2 a 3.

Ci sono quindi 3 traiettorie diverse con colori diversi perché il fumo aveva colori diversi tra 1-2-3.

Le linee di fumo invece sono la prima di colore bianco (**azzurro**) in basso che poi all'istante  $t_2$ . La seconda è celeste ma dietro è rossa perché tra 1 e 2 era rossa. Discorso analogo per la terza che prima era rossa e prima ancora gialla.

Cioè, per le traiettorie:

- $\tau = 0 \rightarrow y = e^{x-1}$
- $\tau = 1 \rightarrow y = e^{2(x-1)}$
- $\tau = 2 \rightarrow y = e^{3(x-1)}$

Mentre per le linee di fumo:

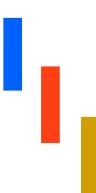
$$t = 1 \rightarrow \begin{cases} \text{se } x = 1 \rightarrow y = 1 \\ \text{se } x = 2 \rightarrow y = e \end{cases}$$



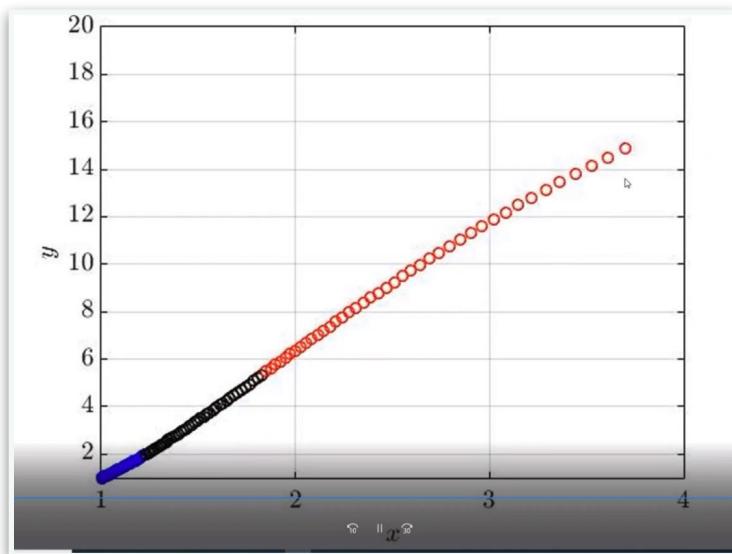
$$t = 2 \rightarrow \begin{cases} \text{se } x = 1 \rightarrow y = 1 \\ \text{se } x = 1,5 \rightarrow y \approx e \\ \text{se } x = 3 \rightarrow y = e^2 \end{cases}$$



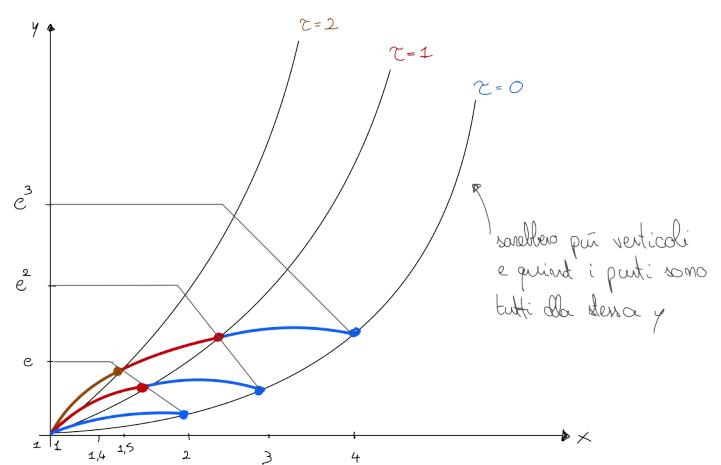
$$t = 3 \rightarrow \begin{cases} \text{se } x = 1 \rightarrow y = 1 \\ \text{se } x = 1,4 \rightarrow y \approx e \\ \text{se } x = 2 \rightarrow y = e^2 \\ \text{se } x = 4 \rightarrow y = e^3 \end{cases}$$



SI FACCIA RIFERIMENTO AL VIDEO DELLA LEZIONE PER IL FILMATO:



Le traiettorie si potrebbero vedere facendo delle foto a istanti di tempo successivi da cui si vede la testa della particella di fluido che posizioni occupa nello spazio invece le linee di fumo si possono vedere solo con un tracciante che passa per il punto definito. Per le linee di corrente è stato possibile visualizzarle sono con l'avvento dei computer mediante un fascio laser e l'abbinamento tra le posizioni  $t$  e  $t + \Delta t$  ricavandone la tangente.



# Principio di conservazione della massa di Leonardo da Vinci

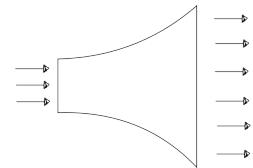
Studiamo un fluido in un condotto divergente dove la sezione aumenta e partiamo con il concetto che la portata rimane costante.

$$\text{La portata si può scrivere } G = \frac{wS}{v} = wSl$$

Se il regime è stazionario, cioè se non ci sono aggiunte o perdite di fluido (contorno chiuso) allora

$$G = \text{cost}$$

$$w_1 S_1 l_1 = w_2 S_2 l_2$$



Oss. Con  $w$  indichiamo la velocità media del fluido quindi è come se immaginassimo un profilo di velocità costante sulla sezione.

**Moto incomprimibile** si può avere sia se il fluido è incomprimibile, sia se il fluido è comprimibile ma con variazione di pressione piccole.

In un divergente la velocità diminuisce:

$$\rho_1 = \rho_2 \longrightarrow w_1 S_1 = w_2 S_2 \implies \begin{cases} \text{se } S \uparrow, w \downarrow \\ \text{se } S \downarrow, w \uparrow \end{cases}$$

N.B. Questo è vero finché la velocità è minore della velocità del suono, oltre questo limite questa legge viene falsificata.

**Moto comprimibile**  $\rho_1 \neq \rho_2$  e supponiamo il condotto sia a sezione costante:

$$\rho_1 \neq \rho_2$$

$$\text{Se abbiamo } S_1 = S_2 \longrightarrow w_1 \rho_1 = w_2 \rho_2 \implies \frac{w_1}{w_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

- Se il fluido si dilata,  $v_2 > v_1$ , allora la velocità aumenta:  $w_2 > w_1$
- Se il fluido si comprime,  $v_2 < v_1$ , allora la velocità diminuisce:  $w_2 < w_1$

Allora si parla di compressione dinamica.

$$\text{Se invece } w_1 = w_2 \longrightarrow S_1 \rho_1 = S_2 \rho_2 \implies \frac{S_1}{S_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

La compressione dinamica si può avere anche a causa di una variazione di sezione, cioè se  $S_2 < S_1$  il fluido si comprime ( $v_2 < v_1$ )

Facciamo il differenziale dell'espressione della portata  $G$  e dividiamo per  $G$ :

$$G = wSl \longrightarrow \frac{dG}{G} = 0 = \frac{dwSl + dSwl + dlwS}{G}$$

Cioè  $0 = \frac{dw}{w} + \frac{dS}{S} + \frac{dl}{l}$ : **equazione differenziale della conservazione della massa** (della portata) dove ogni termine è relativo ad una variabile.

# Principio di conservazione dell'energia: equazione di Bernoulli generalizzata

La ricaviamo partendo dalla conservazione dell'energia per sistemi aperti per ottenere la versione generalizzata che coinvolge anche l'attrito, che non si ottiene invece partendo dalla quantità di moto.

Equazione di conservazione dell'energia per sistemi aperti:

$$dq - dl_f = dh + \frac{dw^2}{2} + g dz, \text{ con } de_c = \frac{dw^2}{2} \text{ e } de_p = g dz$$

Ricordiamo le equazioni costitutive di  $dh$  e  $dq$  in base alla termodinamica:

$$dh = T ds + v dp$$

$$\frac{dq}{T} = ds - ds_s$$

Poi in base alla diseguaglianza di Clausius abbiamo che  $dq = T ds - T ds_s$

Sostituendo:

$$T ds - T ds_s - dl_f = T ds - v dp + \frac{dw^2}{2} + g dz$$

$$\text{allora } T ds_s + dl_f + v dp + \frac{dw^2}{2} + g dz = 0$$

Tutti i termini hanno un significato fisico:

- $de_p = g dz$  : carico effettivo
- $de_c = \frac{dw^2}{2}$  : carico cinetico
- $v dp$  : carico piezometrico (la pressione si misura con il piezometro). Cioè  $= \frac{dp}{\rho}$
- Definiamo poi  $dz_f$  tale che moltiplicato per  $g$  dia  $dl_f$ . Cioè la quantità  $dl_f = g dz$  : lavoro scambiato
- $T ds_s$ , sono le sorgenti entropiche dovute alle irreversibilità che prevalentemente sono rappresentate dall'attrito. Allora si definisce  $dz_a$  tale che moltiplicata per  $g$  dia  $T ds_s = g dz_a$  : irreversibilità per attrito

$$\text{Allora l'equazione diventa: } g dz_a + g dz_f + \frac{dp}{\rho} + \frac{dw^2}{2} + g = 0 dz$$

Dividiamo per  $g$  e otteniamo l'**equazione di Bernoulli generalizzata**:

$$dz_a + dz_f + \frac{dp}{\gamma} + \frac{dw^2}{2g} + dz = 0, \text{ con } \gamma = \rho g \text{ (peso specifico) in forma differenziale}$$

$$z_a + z_f + \int_1^2 \frac{dp}{\gamma} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + (z_2 - z_1) = 0, \text{ in forma integrale.}$$

Se il moto è incomprimibile e quindi  $\gamma = \text{cost}$  si ha che:

$$\int_1^2 \frac{dp}{\gamma} = \frac{p_2 - p_1}{\gamma}$$

$$\text{allora } z_a + z_f + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{w_2^2}{2g} + z_2 = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{w_1^2}{2g} + z_1$$

In definitiva, la somma dei 3 carichi effettivo, cinetico e piezometrico è costante. Però, se c'è un organo motore e se ci sono attriti, si devono aggiungere i termini  $z_a$  e  $z_f$  ai termini d'uscita.

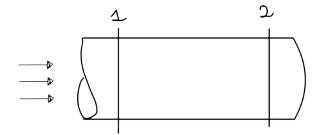
È importantissima in quanto lega velocità e pressione.

Tuttavia dobbiamo però dare una:

### *Definizione operativa di attrito $z_a$*

Quindi immaginiamo un esperimento da cui misurarlo. Un condotto tra sezione iniziale 1 e sezione finale 2.

- Se il condotto è orizzontale  $z_1 = z_2$
- Se tra 1 e 2 non ci sono organi motori  $z_f = 0$
- Facciamo in modo che  $w_1 = w_2$ , cioè se il moto è incomprimibile basta impostare  $S_1 = S_2$ , mentre se il moto è comprimibile prendiamo  $S_1, S_2$  tali che risulti  $w_1 = w_2$  tra le due sezioni.



Allora, sotto queste condizioni, dall'eq di Bernoulli generalizzata otteniamo: 
$$z_a = \frac{p_1 - p_2}{\gamma}$$
, cioè la caduta di pressione ovvero il carico piezometrico perso.

Abbiamo visto che nell'equazione di Bernoulli non c'è la variabile tempo.

Ma prima di Bernoulli era stata scritta un'eq più generale (che diventa l'eq di Bernoulli nel caso stazionario).

Passiamo a ricavare

## Equazione di Eulero

Consideriamo un cilindro di fluido in direzione  $\bar{s}$ , di lunghezza  $ds$  e sezione  $dA$

quindi di massa  $dm = \rho dV = \rho ds dA$

Immaginiamo  $\varphi$  l'angolo tra la forza di gravità e la direzione  $\bar{s}$ .

Sulla faccia alta agisce una pressione  $p$  mentre su quella inferiore sarà  $p + dp$ .

Applicando il 2° principio della dinamica secondo cui la somma delle forze in direzione  $\bar{s}$  è pari alla derivata nel tempo della quantità di moto (impulso):

$$\sum F_{\bar{s}} = \frac{d}{dt} (mw)$$

Nella realtà pratica però il termine della derivata nel tempo si mette a sinistra dell'uguale, per cui:

$$dm \cdot \frac{dw}{dt} = w \cancel{\cdot \frac{dm}{dt}} = p dA - \left( p + \frac{\partial p}{\partial s} ds \right) dA + g dm \cos \varphi$$

Dove  $\frac{dm}{dt} = 0$  poiché per la massa il regime è stazionario.

Consideriamo  $dm = 0$  e quindi  $\rho ds dA \cdot \frac{dw}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial s} ds dA + g \rho ds dA \cos \varphi$

$$\rho \frac{dw}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial s} + \rho g \cos \varphi$$

$$\text{Cioè: } \frac{dw}{dt} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g \cos \varphi$$

Supponiamo che la velocità dipenda dalla "quota" e dal tempo e facciamone il differenziale:

$$w(s, t) \rightarrow dw(s, t) = \frac{\partial w}{\partial s} ds + \frac{\partial w}{\partial t} dt$$

Deriviamo rispetto al tempo:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{ds}{dt} + \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial s} \cdot w + \frac{\partial w}{\partial t}$$

Imponiamo allora l'uguaglianza

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial s} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g \cos \varphi = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \frac{\partial z}{\partial s}, \text{ dove consideriamo } dz = - ds \cos \varphi$$

$$\text{Allora } \frac{\partial w}{\partial t} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g \frac{\partial z}{\partial s} = 0$$

Moltiplichiamo per  $ds$  e otteniamo l'**equazione di Eulero**:

$$\frac{\partial w}{\partial t} ds + w \cdot \frac{\partial w}{\partial s} ds + \frac{\partial p}{\rho} ds + g dz = 0 \quad (\text{In forma differenziale})$$

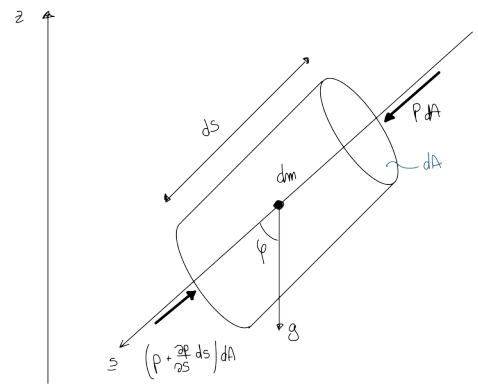
integrandi tra due sezioni avremo che  $\int_1^2 \frac{\partial w}{\partial t} ds + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) = 0$ , dove facciamo l'ipotesi di

$\rho = \text{cost}$ , cioè otteniamo:

$$\int_1^2 \frac{\partial w}{\partial t} ds + \frac{w_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g z_2 = \frac{w_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g z_1 \quad (\text{In forma integrale})$$

Questa equazione da luogo come condizione nel caso stazionario all'equazione semplificata di Bernoulli ma quando si ricavano Eulero o Bernoulli a partire dalla quantità di moto non si riesce ad introdurre fisicamente l'attrito.

Noi invece partendo dalla conservazione dell'energia abbiamo ricavato Bernoulli con l'attrito.



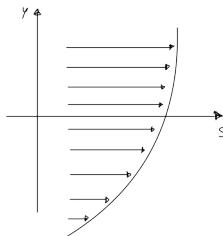
SI CHIUE COSÌ IL CAPITOLO 1 DEL LIBRO DI LEZIONI "GENERALITÀ DEL MOTO ED EQUAZIONI DI CONSERVAZIONE". PASSIAMO ALLORA AL CAPITOLO 2 "MOTO INCOMPRESSIBILE DEI FLUIDI" IN CUI SI AFFRONTANO FLUIDI CON DENSITÀ O VOLUME SPECIFICO COSTANTE.

Nell'800 sono state formulare le 3 equazioni costitutive dei 3 fenomeni di trasporto, cioè trasporto della **quantità di moto** (Newton), della **massa** (Fick) e dell'**energia termica** (Fourier).

## Legge di Newton

È una legge costitutiva del trasporto della quantità di moto. Cerca quindi di legare l'effetto con la causa. La causa è una differenza di quantità di moto o più semplicemente (essendo  $\rho$  costante) possiamo dire un gradiente di velocità che provoca come effetto uno sforzo di taglio.

Supponiamo di avere un fluido con un profilo di velocità variabile con  $y$  come in figura

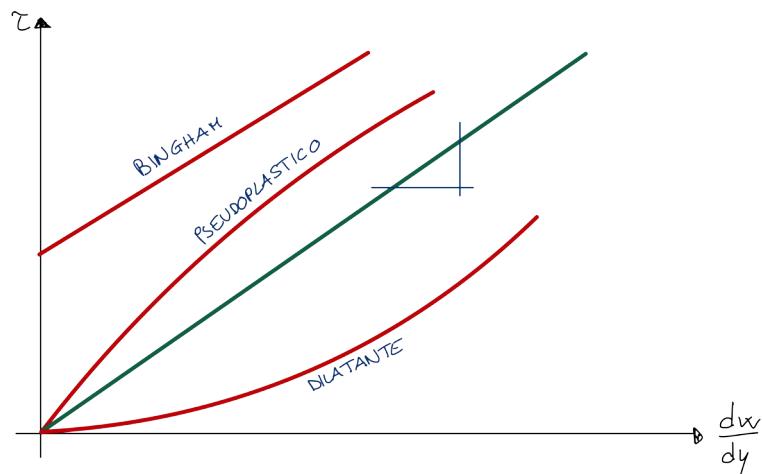


In una sezione generica  $S$  è applicata nella parte superiore una velocità maggiore rispetto a quella sulla faccia inferiore. Quindi questa superficie  $S$  è sottoposta ad un effetto di taglio. La legge di Newton assume una proporzionalità tra il gradiente di velocità e lo sforzo di taglio che si genera sulla superficie:  $\tau = \mu \frac{dw}{dy}$ , con  $\mu = \mu(p, T)$ , nota come **viscosità cinematica**.

Esiste anche la **viscosità dinamica**:  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ .

L'importanza di questa legge sta nel fatto che  $\mu$  è una proprietà soltanto della pressione e temperatura, cioè soltanto delle proprietà fisiche del fluido. Quindi questa oltre ad essere una legge costitutiva è anche una legge fisica.

Facciamo un diagramma tra sforzo di taglio e gradiente di velocità:



Per i fluidi newtoniani si ha una retta (**verde**) dove la tangente è proporzionale alla viscosità.

Quindi i fluidi Newtoniani sono tutte le sostanze pure aria, acqua, olio, plasma, ecc

Dal punto di vista fisico negli ultimi 50 anni è stato scoperto che i fluidi quando gli si aggiunge qualcosa non si comportano più come fluidi newtoniani come come una classe di fluidi nota come **fluidi non Newtoniani** (es plasma con globuli rossi, aria con pulviscolo atmosferico, acqua con limo o argilla, ecc) e il legame tra  $\tau$  e  $dw/dy$  non è una retta nell'origine:

$$\tau = \tau_0 + k \frac{dw}{dy}, \text{ con } k = k \left( \mu, \left| \frac{dw}{dy} \right| \right) \text{ che prende il nome di consistenza.}$$

Per i fluidi di Bingham è presente lo sforzo di taglio all'origine  $\tau_0$  e la proporzionalità è sempre con  $\mu$

Poi ci sono anche i fluidi pseudoplastico e dilatante. Il coefficiente di proporzionalità dipende anche dal valore assoluto dello sforzo di taglio.

I fluidi non newtoniani li abbiamo tutti i giorni sotto mano come l'acqua con piccole particelle come la vernice. Infatti prendendo un secchio pieno d'acqua e provando a versarlo l'acqua esce quando il livello del fluido arriva al bordo del secchio e la superficie

dell'acqua che esce è orizzontale se invece lo facciamo con la vernice mescolando il bianco con l'acqua quando versiamo la vernice in un altro recipiente si vede come il fluido vernice non esce appena arriva al bordo ma si forma una specie di piccola gobba al bordo e non esce se non aumentiamo ulteriormente. Discorso analogo con il Ketchup che va sbattuto per farlo uscire (richiede un  $T_0$ ) o la passata. Anche il dentifricio o lo shampoo.

AFFRONTEREMO LEGGERMENTE IL DISCORSO PER IL SANGUE QUANDO AFFRONTEREMO ALCUNE ESERCITAZIONI PER LE APPLICAZIONI TERMOFLUIDODINAMICHE A STENT E MAGNETOFLUIDODINAMICA E RELATIVI COMPORTAMENTI.

ANDANDO SUL LIBRO DI LEZIONI VENGONO Citate alcune evidenze sperimentali sul moto laminare che non affronteremo in questo corso. Non vedremo HAGEN-POISEUILLE, MOTO LAMINARE, ESPERIENZA DI OSBORNE REYNOLDS.

PASSIAMO QUINDI AL PARAGRAFO 5 DEL CAPITOLO 2.

## Analisi dimensionale per le perdite distribuite

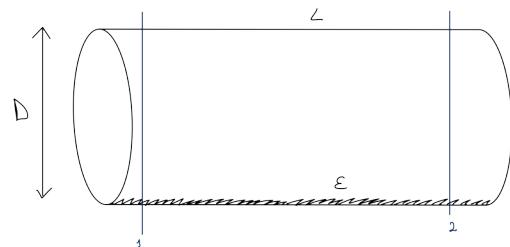
Parliamo di perdite di pressione che un fluido subisce scorrendo in un tubo.

Il fluido entra nel condotto a sezione circolare, un tubo commerciale con una rugosità superficiale  $\epsilon$  molto piccola rispetto diametro e lunghezza.

Abbiamo visto come è definito l'attrito  $z_a$  del fluido che si muove sotto una differenza di pressione tra 1 e 2 e subisce una perdita di carico.

Facciamo il seguente ragionamento (**analisi dimensionale**): di quali proprietà fisiche è funzione il rapporto tra la caduta di pressione

$$\Delta p = p_1 - p_2, \quad p_1 > p_2 \text{ fluido verso destra e la lunghezza } L.$$



Si parla di perdite distribuite poiché la rugosità è uniformemente distribuita per tutta la lunghezza e quindi le perdite avvengono in ogni punto del condotto.

Scegliamo come variabili densità, velocità, viscosità, una lunghezza e la rugosità (in generale si fanno esperimenti per escludere/includere altre variabili).  $\frac{\Delta p}{L} = f(w, \rho, \mu, D, \epsilon)$

Partiamo supponendo che non ci siano rugosità superficiali, quindi un **tubo liscio**  $\epsilon = 0$  (processi di eliminazione delle rugosità noto come lappatura).

Allora  $\frac{\Delta p}{L} = f(w, \rho, \mu, D) \rightarrow \frac{\Delta p}{L} = c_i w^{a_i} \rho^{b_i} \mu^{c_i} D^{d_i}$ , esprimiamo la funzione  $f$  come sommatoria di tanti termini che

sono il prodotto di una costante  $C_i$  per le potenze di  $w, \rho, \mu, D$ , ovviamente devono essere rispettate le dimensioni di  $\frac{\Delta p}{L}$  per omogeneità dimensionale.

Scriviamo allora le dimensioni fisiche di tutti i termini:

$$\left[ \frac{\Delta p}{L} \right] = \frac{M\mathcal{L}}{T^2 L^2} \frac{1}{\mathcal{L}} = MT^{-2} L^{-2}$$

$$[\text{cost} \cdot w^a \rho^b \mu^c D^d] = \left( \frac{L}{T} \right)^a \left( \frac{M}{L^3} \right)^b \left( \frac{M}{LT} \right)^c (L)^d = M^{b+c} \cdot L^{a-3b-c+d} \cdot T^{-a-c}$$

Abbiamo tre equazioni ma 4 variabili quindi  $\infty^1$  soluzioni e possiamo esprimere tre variabili lasciando la 4 incognita e la determineremo con l'analisi sperimentale (e non dimensionale).

Uguagliamo le dimensioni fisiche:  $\begin{cases} +1 = b + c \\ -2 = -a - c \\ -2 = a - 3b - c + d \end{cases}$

Esprimiamo allora tutto in funzione di  $c$ , scelta che non influenzera il risultato finale:

$$\begin{cases} b = 1 - c \\ a = 2 - c \\ d = -2 - a + 3b + c \end{cases} \Rightarrow -2 - 2 + c + 3 - 3c + c = -1 - c$$

$$\text{Allora possiamo dire che } \frac{\Delta p}{L} = \text{cost} \cdot w^{2-c} \cdot \rho^{1-c} \cdot \mu^c \cdot D^{-1-c} = \text{cost} \cdot \frac{w^2 \rho}{D} \left( \frac{\mu}{w \rho D} \right)^c$$

Scegliendo come costante  $1/2$  si riconosce il **numero di Reynolds** tra parentesi (in realtà è l'inverso ma tanto l'esponente è da trovare sperimentalmente), cioè otteniamo

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{w^2}{L} \cdot \frac{\rho}{L} \cdot Re^x, \text{ con } x \text{ da trovare sperimentalmente.}$$

Facciamo l'estensione ai tubi rugosi  $\epsilon \neq 0$

NON SONO RIPORTATI TUTTI I PASSAGGI E BISOGNA CONSIDERARE  $\epsilon^i$  E RIFARE TUTTI I PASSAGGI. SI OSSERVA CHE LA VARIABILE  $\epsilon$  VIENE ADIMENSIONALIZZATA CON  $D$ ,

cioè  $\left(\frac{\epsilon}{D}\right)$ .

SI OSSERVI CHE LE DIMENSIONI DI  $\frac{\Delta p}{L}$  SONO LE DIMENSIONI DEI TERMINI DI DESTRA, DOVE PERÒ  $Re$  È ADIMENSIONALE.

$$\text{In conclusione per si arriva a } \frac{\Delta p}{L} = \frac{w^2}{2} \cdot \frac{\rho}{D} \cdot \left[ Re^x \cdot \left(\frac{\epsilon}{D}\right)^y \right] \rightarrow \frac{\Delta p}{L} = \frac{w^2 \rho}{2D} \cdot \lambda$$

Dove  $\lambda = f\left(Re, \frac{\epsilon}{D}\right)$  è il **fattore di attrito** (per il moto turbolento mentre per il moto laminare non dipende da  $\epsilon/D$ ).

Vediamo come costruire il diagramma del fattore di attrito in funzione di  $Re$  e di  $\epsilon/D$ .

Calciamo il fattore di attrito  $\lambda$  per il moto laminare.

$$\text{Partiamo dell'equazione di Hagen-Poiseuille e cioè sappiamo che } \frac{\Delta p}{L} = 8\mu \frac{w}{R^2}$$

Imponiamo allora il risultato dell'analisi dimensionale:

$$8\mu \frac{w}{R^2} = \frac{w^2 \rho \lambda}{2D}$$

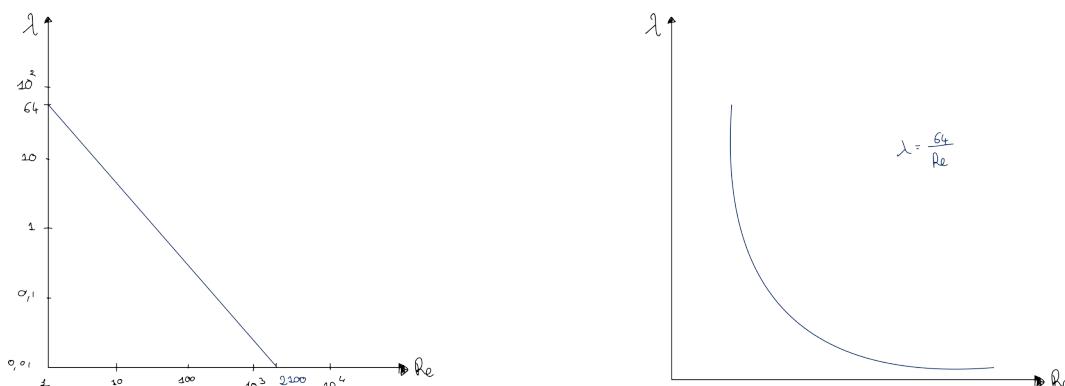
$$\text{Cioè } \lambda = \frac{8\mu w}{R^2} \cdot \frac{2D}{w^2 \rho} = \frac{32\mu}{R w \rho} = \frac{64\mu}{D w \rho} = \frac{64}{Re}, \text{ dove teniamo conto che } D = 2R \text{ e che } Re = \frac{w D \rho}{\mu}$$

Sul diagramma logaritmico  $\lambda - Re$  otteniamo:

$$\lambda = \frac{64}{Re} \text{ allora } \ln(\lambda) = \ln(64) - \ln(Re), \text{ con } y = \text{cost} - x \Rightarrow \text{è una retta di coefficiente angolare } -1.$$

Si osservi che questo vale nel moto laminare (condizioni per Hagen-Poiseuille,  $Re < 2100$ ).

Se vogliamo rappresentare  $\lambda$  in funzione di  $Re$  in un diagramma lineare questo è una iperbole. Ma se faccio il diaframma in scala logaritmica ottengo una retta



In base all'esperienza di Reynolds si fissa a  $Re = 2100$  il moto laminare.

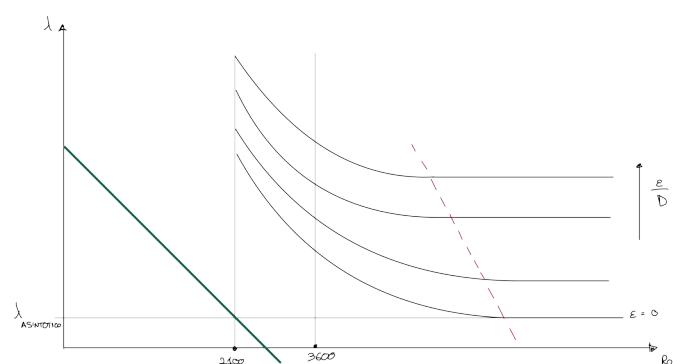
$Re = 1 \implies \lambda = 64$  e lo riporto sulla scala.

Nel moto turbolento non si calcola analiticamente ma servono degli esperimenti che ha fatto negli anni 30 (del 900), il ricercatore Polhausen fissando  $\epsilon$  incollando dei granelli di dimensione uguale all'interno di un condotto.

Questo diagramma viene chiamato anche **diagramma di Moody** (per i meccanici) o **diagramma di Fenning** (per i chimici)

Il tratto laminare è fino a 2100 poi c'è un regime di transizione (o transizionale) fino a 3600 in cui sono possibili entrambi i moti.

Per  $Re$  maggiore di quello identificato dal tratteggio rosso si può assumere ingegneristicamente  $\lambda = \text{cost}$  come una retta orizzontale e questo prende il nome di **moto completamente turbolento**.



Negli esperimenti con  $\epsilon \uparrow$  e riportando come ulteriore variabile  $\frac{\epsilon}{D}$  aumenta  $\lambda$  (aumenta l'attrito).

Per  $\epsilon$  molto grande  $\lambda$  potrebbe leggermente diminuire tra 2100 e 3600.

Mettendo insieme tutti i risultati sperimentali si trova l'andamento in figura.

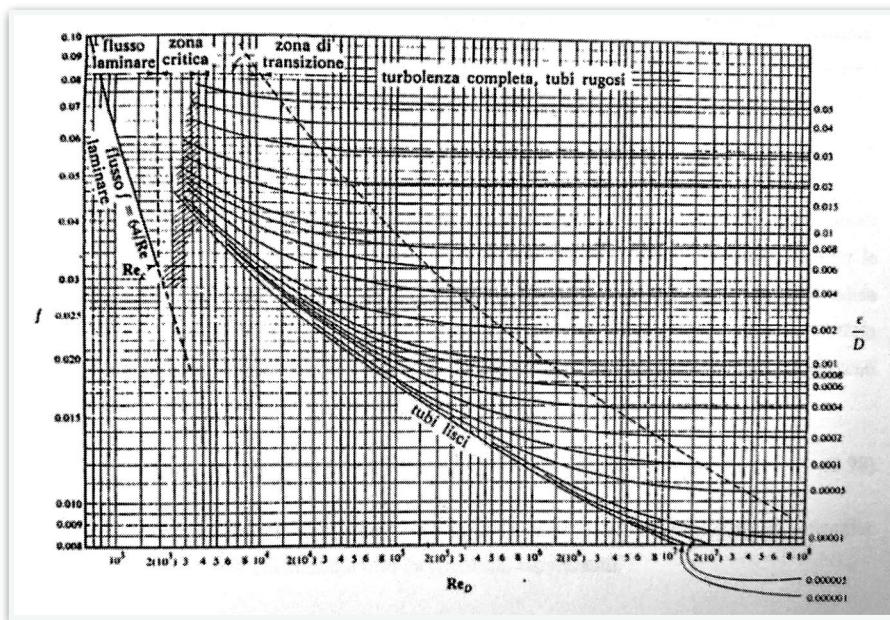


FIGURA PG 51 - **DIAGRAMMA DI MOODY** DEL FATTORE DI ATTRITO IN SCALA BILOGARTIMICA. [TRATTO DA L.M. MOODY, TRANS- ASME, 66, P. 672, 1944]

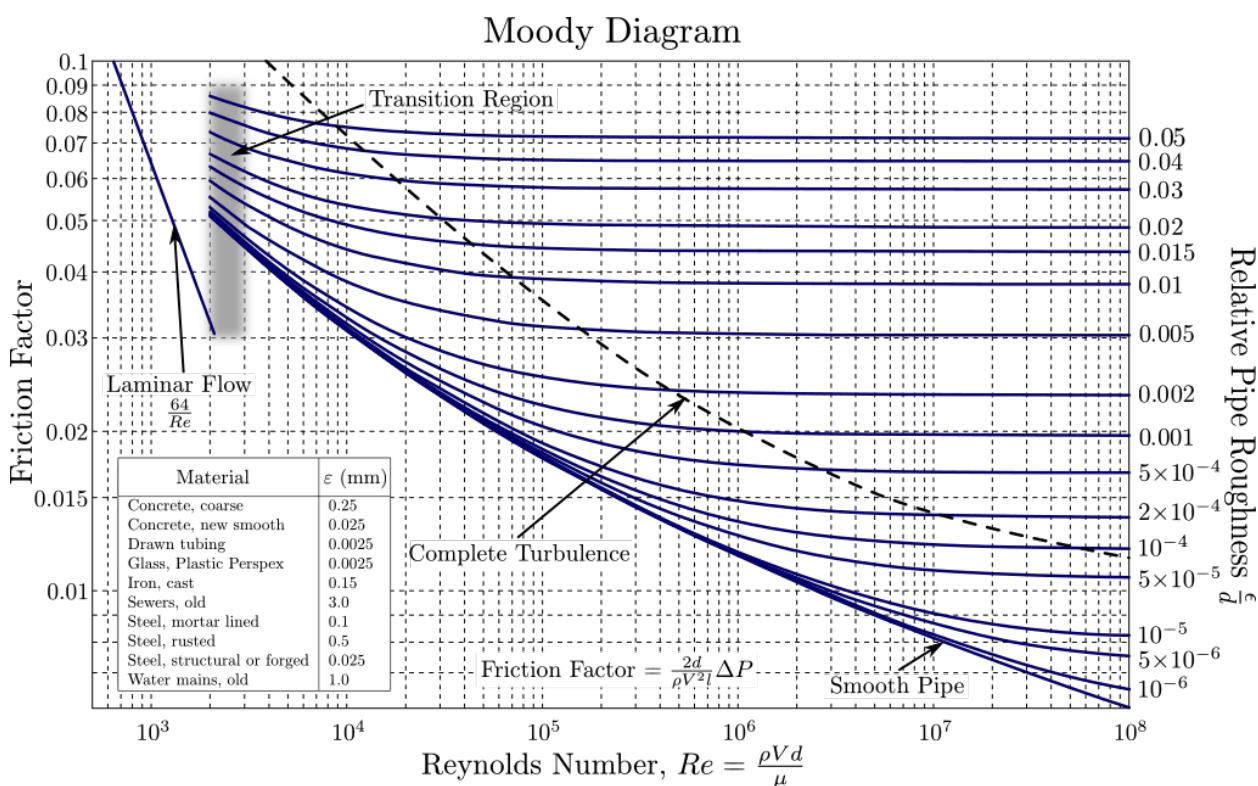


DIAGRAMMA DI MOODY. DA [https://it.m.wikipedia.org/wiki/Diagramma\\_di\\_Moody](https://it.m.wikipedia.org/wiki/Diagramma_di_Moody)

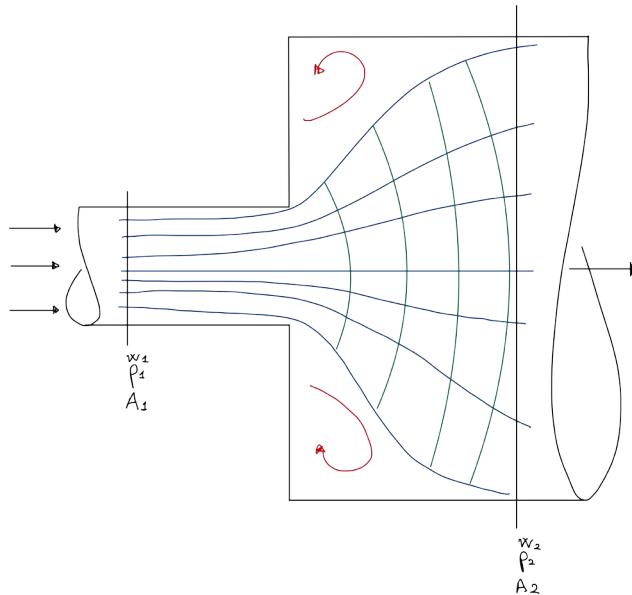
# Perdite di pressione concentrate

## Allargamento di sezione

Si parla di "brusco" allargamento di sezione.

Dobbiamo far riferimento alle linee di flusso e siamo a regime stazionario per cui le linee di flusso sono al contempo linee di percorso (o traiettoria), linee di corrente e linee di fumo.

Se considero l'asse del cilindro e una particella di fluido si trova sull'asse continuerà indisturbata a rimanere sull'asse e la linea di flusso non è disturbata.



Al contrario le altre linee di corrente saranno sempre più disturbate dall'allargamento di sezione ad esempio ci saranno linee di corrente passanti vicino allo spigolo che successivamente si allargheranno riattaccandosi alla parete.

Nello spazio indicato con la freccia rossa viene intrappolato del fluido che viene mantenuto in rotazione dalle linee di corrente, rotazione antioraria se la linea di corrente va in alto e verso destra, discorso analogo per la parte inferiore.

Sezione 1 prima dell'allargamento di sezione con velocità media  $w_1$  e pressione  $p_1$  mentre dopo l'allargamento di sezione abbiamo la sezione 2 con velocità  $w_2$  e pressione  $p_2$  possiamo considerare il fluido incomprimibile e quindi aumentando la sezione diminuisce la velocità.

Vediamo come esprimere le perdite di pressione concentrate (a partire da quelle distribuite)  $\Delta p = \rho \frac{w^2}{2} \frac{L}{D} \lambda$ , cioè proporzionale alla densità, energia cinetica, il parametro  $\lambda$  ma in questo caso non ha senso di parlare di lunghezza e quindi si parla di **fattore di attrito per le perdite concentrate**  $\Delta p = \rho \frac{w^2}{2} \lambda'$ .

Moltiplicando e dividendo per  $g$  otteniamo  $\Delta p = \gamma \frac{w^2}{2g} \lambda'$

E allora possiamo definire il **carico perso per attrito** come  $z_a = \frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{w^2}{2g} \lambda'$

Vogliamo allora calcolare  $\lambda'$  facendo riferimento all'allargamento di sezione. Nel caso in esame abbiamo supposto che il fluido vada da sinistra verso destra, quindi  $\Delta p = p_1 - p_2 > 0$ . Inoltre, aumentando la sezione, diminuisce la velocità  $w_2$ .

Facendo quindi riferimento ad un sistema che si muove con velocità  $w_2$  la sezione 2 è ferma e in 1 si ha una velocità  $w_1 - w_2$ .

Allora la perdita di pressione è esattamente l'energia cinetica che il fluido aveva nella sezione iniziale  $\Delta p = \gamma \frac{(w_1 - w_2)^2}{2g}$ .

Questo posso riscrivere in funzione di  $\lambda'$  riferendomi solo alla velocità  $w_1$ , cioè  $\Delta p = \gamma \frac{w_1^2}{2g} \lambda'$

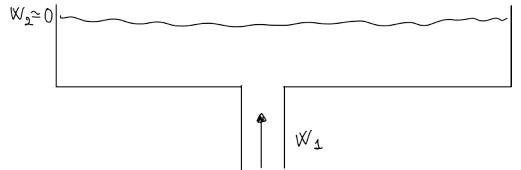
E, uguagliando, i due termini, posso trovare  $\lambda'$ .

Per un moto incomprimibile, quindi con  $\rho_1 = \rho_2$ , posso dire che  $w_1 A_1 = w_2 A_2 \Rightarrow w_2 = w_1 \frac{A_1}{A_2}$ , e sostituendo:

$$\Delta p = \frac{\gamma}{2g} \left( w_1 - w_1 \frac{A_1}{A_2} \right)^2 = \frac{\gamma}{2g} w_1 \left( 1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2 = \gamma \frac{w_1^2}{2g} \lambda'$$

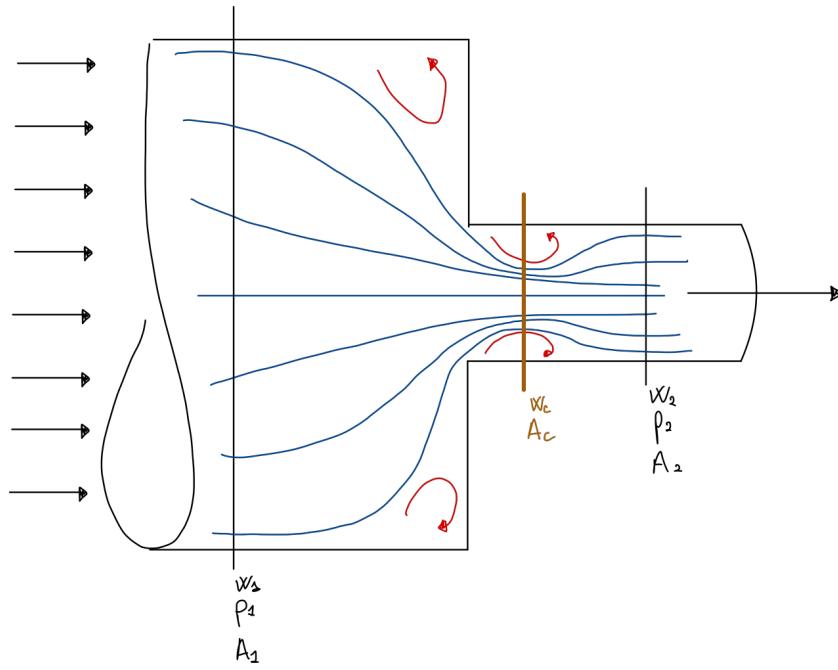
$$\text{E allora } \lambda' = \left( 1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2$$

Si vede che se  $A_2 \gg A_1$  allora  $\lambda' \approx 1$  e quindi tutta l'energia cinetica che il fluido aveva si è persa. Questo corrisponde per esempio all'arrivo di un fluido in tubo con sezione 1 che arriva in un serbatoio con una sezione molto più grande. Il fluido che arriva si ferma e se il serbatoio è molto grande non vedo neanche l'aumento di quota.



## Restringimento di sezione

Il fluido va da una sezione più grande ad una sezione più piccola e supponiamo le due sezioni 1 e 2.



Si osserva un discorso analogo per i vortici ma l'ultima linea di corrente tangente allo spigolo per inerzia continua dritta e si manifesta una **contrazione della vena** che poi si riallarga ed intrappola del fluido che mostrerà dei vortici.

Allora questo si può ricondurre ad un allargamento di sezione contratta  $A_c$  alla sezione  $A_2$ . Posso fare le considerazioni di prima e considerando un moto incomprimibile ( $\rho_c = \rho_2$ )

Dalla portata  $w_c A_c = w_2 A_2$  indico con  $\frac{w_2}{w_c} = \frac{A_c}{A_2} = \Psi$  (questo è un fatto empirico che non posso calcolare),

Di nuovo faccio riferimento ad un s.d.r. Che ha velocità  $w_2$  così il fluido nella sezione 2 ha velocità nulla e nella sezione 1 ha velocità  $(w_c - w_2)$ , così tutta l'energia cinetica si è persa nello  $z_a$  per attrito.

Scriviamo allora la differenza di pressione:

$$\Delta p = \gamma \frac{(w_c - w_2)^2}{2g}$$

Inoltre calcoliamo il carico perso per attrito  $z'_a$

Allora:

$$z'_a = \frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{(w_c - w_2)^2}{2g} = \frac{w_2^2}{2g} \left( \frac{w_c}{w_2} - 1 \right)^2 = \frac{w_2^2}{2g} \left( \frac{A_2}{A_c} - 1 \right)^2 = \frac{w_2^2}{2g} \left( \frac{1}{\Psi} - 1 \right)^2$$

Confrontando questo con  $\Delta p$  otteniamo il fattore di attrito  $\lambda'$  per le perdite concentrate per restringimento di sezione:

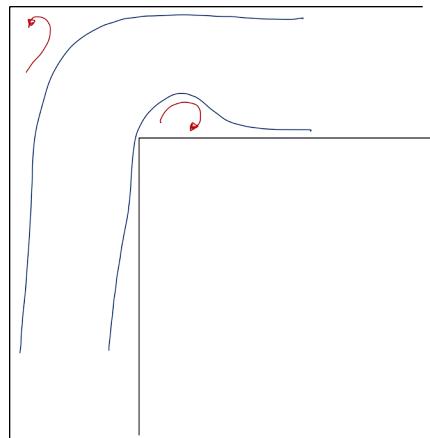
$$\lambda' = \left( \frac{1}{\Psi} - 1 \right)^2$$

Si osservi però che  $\Psi$  non si può determinare in base alle sezioni poiché  $A_c$  dipende da tanti fattori tra cui anche dalla finezza degli spigoli.

## Gomiti a 90°

Con un cambio di direzione la stessa cosa per le linee di correnti tangentì che continueranno sopra per poi riallargarsi generando un vertice. Discorso analogo per un vertice nell'angolo superiore

Questa differenza di pressione concentrata avrà il suo  $\lambda'$ .



Domani ci sarà la prima esercitazione dell'Ing Petracci.

MARTEDÌ PROSSIMO CI SARÀ UN ALTRO RICEVIMENTO E IL PROF PROPONE DI FARE DELLE LEZIONI RIASSUNTIVE IN CUI SI PASSA IN RASSEGNA QUELLO CHE ABBIAMO VISTO NELLE LEZIONI PRECEDENTI. POSSIAMO FARLO AL RICEVIMENTO MARTEDÌ ALLE 10:30 ! **RIVEDERE GLI ARGOMENTI VISTI DALL'INIZIO DEL CORSO.**

# Esercitazione

Sito web del corso: <https://didattica.uniroma2.it/informazioni/index/insegnamento/190890-Fisica-Tecnica>



*Università degli Studi di Roma "Tor Vergata" – Dipartimento di Ingegneria Industriale*

**FISICA TECNICA (9CFU)**

**Docente:**  
**Ing. Ivano Petracci**  
**Dip. Ing. Industriale**  
**Settore Scientifico:** ING-IND/10  
**E-mail:** ivano.petracci@uniroma2.it; ivano.petracci@uniroma2.eu  
**Ricevimento:** edificio industriale, 1° piano, stanza 1036/7, tel.: 06 7259 7126.



1° Semestre (21/09/2020 - 16/01/2021)					
MEDICA	LUN	MAR	MER	GIO	VEN
8.30-9.15					
9.30-10.15			CEM		BIO
10.30-11.15			CEM		BIO
11.30-12.15	<b>FT</b>	<b>FT</b>	CEM	S	
12.30-13.15	<b>FT</b>	<b>FT</b>	CEM	S	
14.00-14.45		CEM	S	<b>FT</b>	
15.00-15.45		CEM	S	<b>FT</b>	
16.00-16.45			BIO	BIO	
17.00-17.45			BIO	BIO	
18.00-18.45			BIO	BIO	

Testi Consigliati (da preferire quelli in grassetto):

- F. Gori, **Lezioni di Termodinamica**, TEXMAT
- F. Kreith, **Principi di trasmissione del calore**, Liguori Editore
- F. Gori, S. Corasaniti, I. Petracci, **Lezioni di Termofluidodinamica**, TEXMAT
- S. Corasaniti, I. Petracci, F. Gori, **Esercizi di Termodinamica, Trasmissione del Calore e Termofluidodinamica**, TEXMAT
  
- Guglielmini e Pisoni, Elementi di Trasmissione del calore, Ambrosiana
- Yunus A. Çengel, Termodinamica e trasmissione del calore, McGraw-Hill

Testi e dispense sono disponibili presso la libreria TEXMAT, via di Tor Vergata 93/950, 00133 Roma.

SITO WEB del corso (2020-2021):

<https://didattica.uniroma2.it/informazioni/index/insegnamento/190890-Fisica-Tecnica>

Password pdf esercizi: FT(MEDICA)-ESERCIZI-20\_21  
 Password per i pdf testi esame: FT(MEDICA)-ESAMI-2020

6 appelli - Scritto + orale (richiede scritto **≥ 18**).

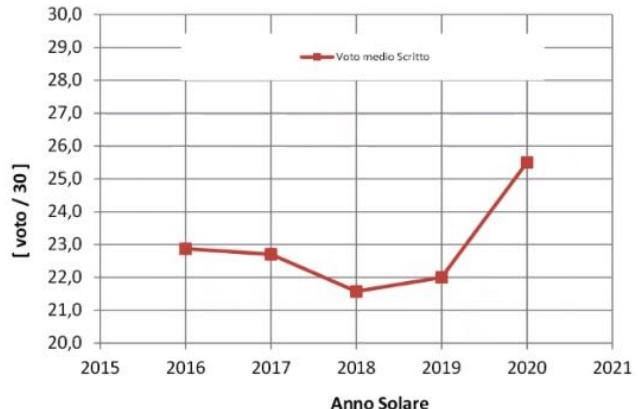
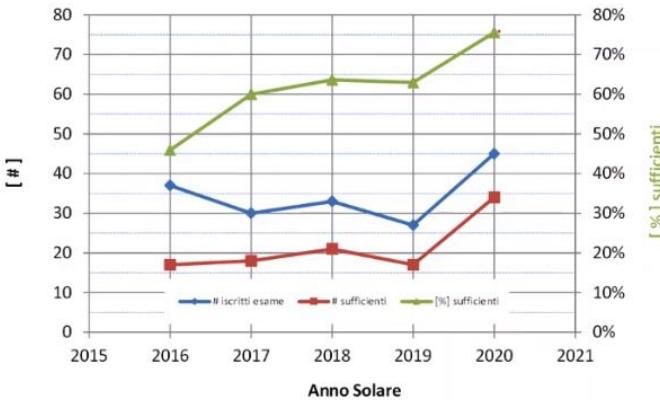
Teoricamente dovrebbero essere 3 esercizi se in presenza o 2 se in presenza.

FISICA TECNICA (9CFU)				
2015 - 2016				
Prove Scritte	Partecipanti	Sufficienti	MEDIA VOTO	[%] sufficienti
ESAME I	7	2	25,5	29%
ESAME II	11	7	24,0	64%
ESAME III-a	//	//	//	//
ESAME III-b	3	0	//	0%
ESAME IV	7	1	20,0	14%
ESAME V	9	7	22,0	78%
<b>TOTALE</b>	<b>37</b>	<b>17</b>	<b>22,9</b>	<b>46%</b>

FISICA TECNICA (9CFU)				
2016 - 2017				
Prove Scritte	Partecipanti	Sufficienti	MEDIA VOTO	[%] sufficienti
ESAME I	16	10	27,0	63%
ESAME II	9	4	22,5	44%
ESAME III	1	1	18	100%
ESAME IV	//	//	//	//
ESAME V	//	//	//	//
ESAME VI	4	3	23,3	75%
<b>TOTALE</b>	<b>30</b>	<b>18</b>	<b>22,7</b>	<b>60%</b>

Statistiche esami fisica tecnica:



Esempio d'esame:

## Esami del Corso

Nome: \_\_\_\_\_ Cognome: \_\_\_\_\_ Matricola: \_\_\_\_\_  
E-mail: \_\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_ Cognome: \_\_\_\_\_ Prova di esame del 23/02/2016 Matricola: \_\_\_\_\_  
E-mail: \_\_\_\_\_ ALLEGATI

Nome: \_\_\_\_\_ Cognome: \_\_\_\_\_ Prova di esame del 23/02/2016 Matricola: \_\_\_\_\_  
E-mail: \_\_\_\_\_ ALLEGATI

### FISICA TECNICA (9CFU – Ing. MEDICA)

#### Prova di esame del 23/02/2016

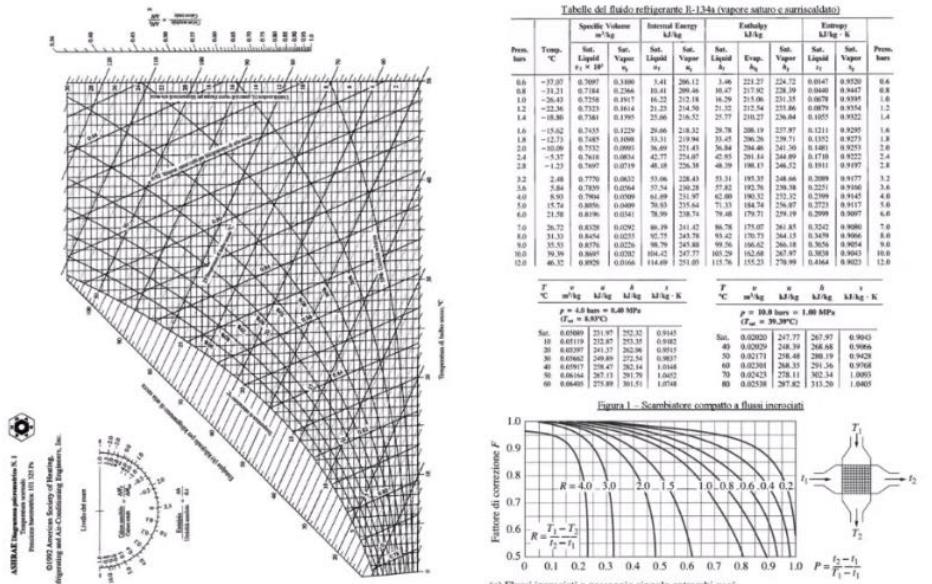
##### Esercizi numerici

1. Un impianto a tutta aria deve garantire in un locale (alto 4 m, con pianta rettangolare 10x10m<sup>2</sup>) una temperatura di 18°C e un'umidità relativa del 50%. Il locale perde un calore termico sensibile pari a 4 kW e presenta un carico di umidità di 1,5 kg/h (vapore considerarsi alla temperatura del locale). Il volume del locale deve essere rinnovato 5 volte in un'ora con aria prelevata dall'esterno (5 °C ed umidità relativa del 10%). Sapere che il saldo di temperatura un l'aria immessa e quella all'interno del locale non deve essere superiore a 20°C, verificare se è necessario dover far ricorso ad una portata di ricirco. Determinare, inoltre, le potenze termiche sottratte e la temperatura di uscita dal saturatore sapendo che questo ha un'efficienza del 75%. Riportare tutte le trasformazioni diagramma psicrometrico allegato.

T[°C]	3	10	20	30	40	50	55
h[kJ/kg]	2510,1	2519,2	2537,4	2555,5	2573,5	2591,3	

2. Si consideri un impianto frigorifero a compressione di vapore con camera di separazione liquido-vapore. Le pressioni minima e massima sono di 1,2 e 10 bar, mentre la cam lavora a 4 bar. Il fluido frigorifero esce come liquido saturo dal condensatore ed en vapore saturo nei due compressori. Determinare la potenza termica sottratta nell'evaporatore ed il rendimento, sia per l'impianto con separatore che per quello senza camera, che opta le due stesse pressioni massima e minima con la stessa portata all'evaporatore. Sia pure 0,78 il rendimento isentropico di ciascun compressore. La portata di refrigerante (R134a) condensatore è di 0,20 kg/s. Determinare lo stato termodinamico caratteristico separatore e, infine, riportare sugli stessi diagrammi p-h e T-s le trasformazioni associate due impianti.

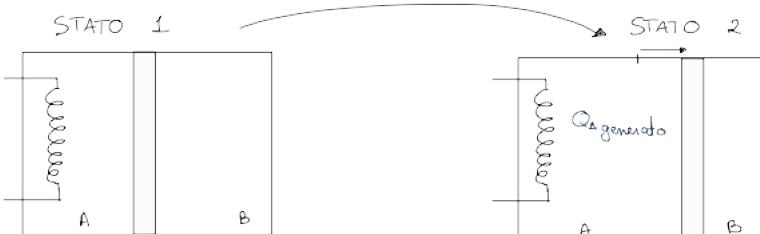
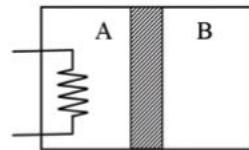
3. Un radiatore per uso automobilistico (scambiatore compatto a flussi incrociati di aria-acqua, cfr Fig.1) è costituito da 40 tubi con diametro interno pari a 0,5 cm e lunghezza pari a 65 cm che attraversano una matrice di piastre aletteate ravvicinate. Una portata di 0,6 kg/s acqua calda ( $c_p = 4195 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ) entra nei tubi a 90°C e ne esce a 65°C. L'aria attraversa radiatore costretta tra le piastre e passa da 20°C a 40°C. Si determini il coefficiente globale di scambio termico relativo alla superficie interna dei tubi.



DOVREMMO ARRIVARE A RISOLVERE ESERCIZI SUGLI IMPIANTI DI CONDIZIONAMENTO

**Esercizio**

Un cilindro rigido contiene un pistone fluttuante libero di muoversi senza attrito. Inizialmente lo stantuffo divide il volume in due parti ( definite A e B) aventi entrambe, all'interno, una massa di 1.5 kg di ossigeno (gas ideale biatomico), alla pressione di 1 bar e alla temperatura di 10 °C. Nella porzione A viene installato un riscaldatore a resistenza elettrica, che porta il gas in tale porzione alla temperatura di 130 °C. Supponendo il pistone ed il cilindro perfetti isolanti termici, calcolare la quantità di calore fornita al sistema dalla resistenza



punto calore  $\Rightarrow$  il sistema si espanderà

$$T_{A2} = 130^\circ\text{C}$$

di fatto conosciamo tutto:

$$T_{A1} = T_{B1} = 10^\circ\text{C}$$

$$P_{A1} = P_{B1} = 1 \text{ bar}$$

$$m_{A1} = m_{B1} = m = 1.5 \text{ kg}$$

rimane la stessa energia i sistemi duri.

$Q_{gen} = ?$   $\leftarrow$  vogliamo conoscere il calore generato in A

Essendoci generazione di calore in A ci aspettiamo di osservare un aumento di temperatura e il sistema tenderà ad espandersi. Infatti il pistone si sposterà verso B.

Quale equazione ci permetterà di calcolare questo calore generato?

Conviene utilizzare il primo principio essendo di mezzo un'energia (calore).

Prendiamo come volume di controllo tutto il sistema termodinamico (in verde).

$$Q - L = \Delta U + \Delta E_p + \Delta E_k$$

$\uparrow$  il tubo del "cilindro rigido"  $\Rightarrow$  non può deformarsi

Variazioni di energia potenziale e cinetica sono nulle, non è indicato diversamente. Le forme di lavoro possono essere diverse ma solitamente si fa riferimento a forze di superficie quindi scambiate sul contorno che, essendo rigido, saranno nulle.

Non c'è attrito  $\Rightarrow$  trasformazione REVERSIBILE

"perfetti isolanti termici" fa riferimento al fatto che non scambia calore con l'estero, alla fine il calore sarà solo  $Q_{gen}$

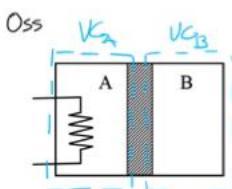
$$Q_{gen} = \Delta U_A + \Delta U_B \quad \leftarrow \text{si parte dalle grandezze estensive e poi si passa a vedere se è possibile scriverele in termini delle grandezze specifiche}$$

$\hookrightarrow$  fattiamo il fatto che utilizziamo O<sub>2</sub> (gas ideale biatomico)  $\Rightarrow \Delta U = m C_V \Delta T$

$$Q_{gen} = m C_V (T_{A2} - T_{A1}) + m C_V (T_{B2} - T_{B1})$$

$\uparrow$  ricogliuta  $\leftarrow$  dobbiamo ricavare  $T_{B2}$  al fine di poter ricavare il calore generato in A

Si poteva scegliere anche un altro volume di controllo:



$$\text{Oss} \quad VCA \Rightarrow Q_A - L_A = \Delta U_A + \Delta E_{PA} + \Delta E_{KA}$$

$$VCB \Rightarrow Q_B - L_B = \Delta U_B + \Delta E_{PB} + \Delta E_{KB}$$

$\downarrow$  il sistema è adiabatico

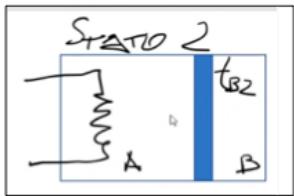
$$Q_A - L_A - Q_B - L_B = \Delta U_A + \Delta U_B \quad \Rightarrow \quad Q_A - Q_{gen} = \Delta U_A + \Delta U_B$$

$\downarrow L_A - L_B < 0$   $\leftarrow L_A$  è positivo perché A espande e quindi B subisce una compressione e si può semplificare.

Lavorando in termini dei due sottosistemi avremmo potuto fare queste considerazioni

Con un volume di controllo più piccolo si ha una descrizione più dettagliata ma si devono avere equazioni aggiuntive mentre con volumi di controllo più ampio ci sono meno equazioni descrittive ma c'è anche il rischio di avere una descrizione meno dettagliata.

Dobbiamo trovare la temperatura in B<sub>2</sub>.



→ legge dei gas perfetti:  $p_{A2} \cdot V_{A2} = R \cdot T_{A2}$   
 $\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$   
 incognite  
 1 eq in 3 incognite

$$\text{volume totale: } V = m_{A2} \cdot V_{A2} + m_{B2} \cdot V_{B2} = m \cdot \underbrace{(V_{A2} + V_{B2})}_{\text{notata}} \downarrow = m (V_{A2} + V_{B2}) \uparrow \text{incognita}$$

Essendo il sistema chiuso le due condizioni saranno uguali tra lo stato 1 e 2

Siamo a 2 eq. in 4 incognite:

L'equilibrio termodinamico significa: equilibrio termico, meccanico e chimico. Per l'equilibrio meccanico, sia nello stato 1 che in 2, le forze saranno in equilibrio e quindi la risultante delle forze di pressione saranno uguali. Essendo la superficie la stessa saranno le stesse anche le forze.

$$p_{A2} - p_{B2}$$

↑

Siamo a 5 incognite in 3 equazioni, possiamo considerare l'equazione di stato anche in A

$$p_{A2} \cdot V_{A2} = R \cdot T_{A2}$$

manca 1 equazione:

$$\text{B compie un'adiabatica reversibile} \rightarrow \text{isentropica} \quad \frac{T_{A2}}{P_{B1}^{\frac{k-1}{k}}} = \frac{T_{B2}}{P_{B2}^{\frac{k-1}{k}}}$$

Dobbiamo 5 eq in 5 incognite ✓

Oss: Dobbiamo ricavare il  $c_v$  e la  $R$ :

$$R = \frac{R_u}{\rho_m} = \frac{8,314 \text{ J/mol} \cdot \text{K}}{32 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}} \Rightarrow R = 253,81 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$C_V = \frac{5}{2} R \quad \text{e} \quad C_P = \frac{7}{2} R \quad \text{allora} \quad C_V = 643,53 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

↑  
GAS BIATOMICO

$$k = \frac{C_P}{C_V} = \frac{7}{5} = 1,4$$

$$\text{Inoltre per lo stato 1 vale} \quad p_{A1} \cdot V_{A1} = R \cdot T_{A1} \Rightarrow V_{A1} = R \frac{T_{A1}}{p_{A1}}, \text{ cioè} \quad V_{A1} - V_{B1} = 253,81 \frac{283,15}{1 \cdot 10^5} = \dots \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

Vediamo come poter trovare la soluzione.  
Andando ad esplicitare  $T_{B2}$  potremmo ottenere:

$$T_{B2} = \left( \frac{mR}{V_{tot}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \cdot \left( \frac{T_{B1}}{p_{B1}^{\frac{k-1}{k}}} \right) \cdot (T_{A2} + T_{B2})^{\frac{k-1}{k}}$$

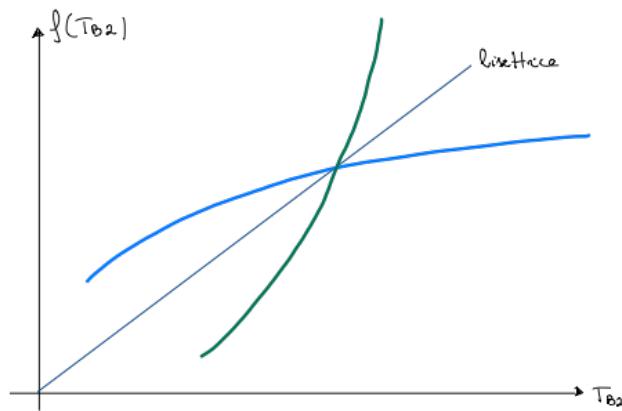
Oppure:

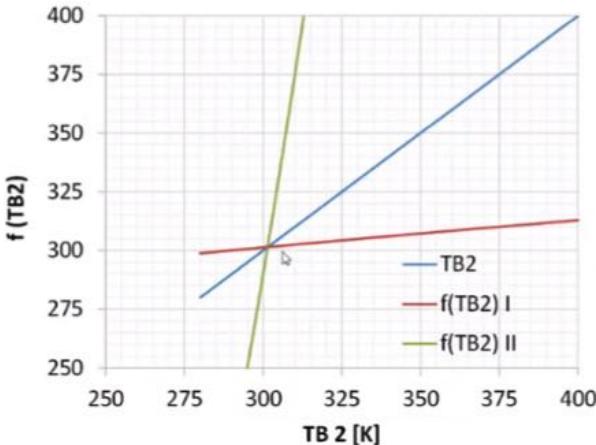
$$T_{B2} = \frac{1}{\left( \frac{mR}{V_{tot}} \right) \cdot \left( \frac{T_{B1}}{p_{B1}^{\frac{k-1}{k}}} \right)} T_{B2}^{\frac{k}{k-1}} - T_{A2}$$

$$\frac{k-1}{k} < 1 \quad \text{per} \quad \blacksquare$$

$$\frac{k}{k-1} > 1 \quad \text{per} \quad \blacksquare$$

Tra le due cambia l'esponente di  $T_{B2}$  e in entrambe otteniamo una funzione di  $T_{B2}$ . Ci sarà un valore in cui la funzione sarà esattamente  $T_{B2}$  e nei due casi l'esponente ci fa variare le curve come in figura.





Si sceglie un punto valore :

Bisogna assegnare un valore di primo tentativo.  
Riflettendo la temperatura TB2 sarà sicuramente maggiore di 10°C e minore di 130°C

Sopponiamo di dare un valore di 1° tentativo e sostituirlo nella funzione e questo ci restituisce un certo valore che a sua volta corrisponde ad un nuovo valore di  $T_{B2}$  che sarà il valore di 2° tentativo.  
Sostituendo nuovamente otterremo un valore di 3° tentativo e così via.  
Man mano ci avviciniamo alla soluzione.

Discorso analogo partendo da valori minori del valore vero.

Questo con la curva con l'esponente negativo.

#### Metodo di iterazione funzionale

- Data una funzione continua  $g(x)$ , sia  $x_i$  la successione generata dal metodo iterativo

$$x_{i+1} = g(x_i), \quad i = 0, 1, \dots$$

Se la successione è convergente, posto  $\alpha = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$ , risulta

$$\alpha = \lim_{i \rightarrow \infty} x_{i+1} = \lim_{i \rightarrow \infty} g(x_i) = g(\lim_{i \rightarrow \infty} x_i) = g(\alpha).$$

Quindi  $\alpha$  è un punto fisso della  $g(x)$ , cioè è soluzione dell'equazione  $x = g(x)$ .

- Teorema (del punto fisso): Sia  $\alpha$  punto fisso di  $g(x)$ . Se in un intorno  $S$  circolare e chiuso di  $\alpha$  la  $g(x)$  è derivabile con continuità e  $|g'(x)| < 1$ , allora comunque si scelga  $x_0$  in  $S$ , ogni  $x_i \in S$  e  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \alpha$ .

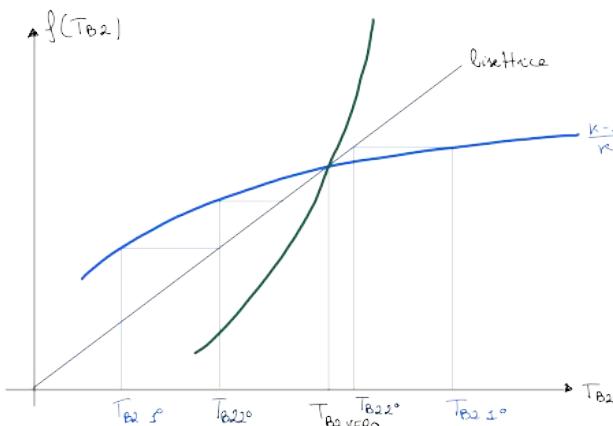
Se  $0 < g'(x) < 1$  e  $x_0 < \alpha$ , la successione  $x_i$  è monotona crescente,  
se  $0 < g'(x) < 1$  e  $x_0 > \alpha$ , la successione  $x_i$  è monotona decrescente,  
se  $-1 < g'(x) < 0$ , la successione  $x_i$  è alternata, cioè ha elementi alternativamente maggiori o minori di  $\alpha$ .

- In pratica si verifica se la condizione vale in un intervallo chiuso  $[a, b]$  contenente  $\alpha$  nella sua parte interna. Se  $0 < g'(x) < 1$  si può scegliere come  $x_0$  indifferentemente uno dei due estremi. Se  $-1 < g'(x) < 0$  si dovrebbe scegliere come  $x_0$  l'estremo dell'intervallo più vicino ad  $\alpha$ .

• Un metodo iterativo si dice (localmente) convergente ad  $\alpha$  se esiste un intorno circolare di  $\alpha$  tale che tutte le successioni costruite con il metodo a partire da punti dell'intorno convergono ad  $\alpha$ . In tal caso si dice che  $\alpha$  è un punto attrattivo per la funzione  $g(x)$ . Per il teorema questo accade se  $|g'(\alpha)| < 1$ . Se invece  $|g'(\alpha)| > 1$ , il punto  $\alpha$  è detto repulsivo e il metodo può essere considerato convergente, anche se non è escluso che esistano punti  $x_0$  a partire dai quali accade che  $x_i = \alpha$  per qualche indice  $i$ .

- La successione è convergente anche se la condizione  $|g'(x)| < 1$  vale in tutto l'intorno  $S$  eccetto il punto  $\alpha$  (per continuità deve essere  $|g'(\alpha)| = 1$ ).

• Come condizione di arresto si usa  $|x_{i+1} - x_i| < \epsilon$ , dove  $\epsilon > 0$  è una tolleranza prefissata. Questa condizione garantisce che  $|x_i - \alpha| < \epsilon$  solo se la successione  $x_i$  è alternata. Se la successione è monotona, la condizione non è sempre soddisfacente: dipende da quanto  $g'(\alpha)$  è vicino ad 1. In alternativa si può usare la condizione  $|f(x_i)| < \epsilon$  che però garantisce che  $|x_i - \alpha| < \epsilon$  solo se  $|f'(x)|$  non è troppo piccolo vicino ad  $\alpha$ .



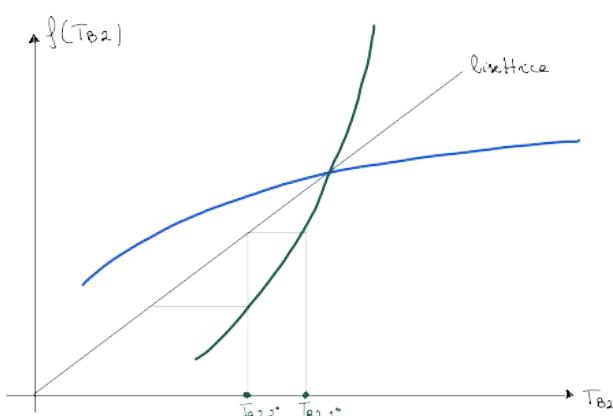
Scegliendo l'altra curva si ottengono valori che man mano si allontanano dalla soluzione e siamo noi che, valutando la soluzione, se vediamo  $\Delta$  che aumentano allora dovremmo spostarci dall'altra parte.

Questo è spiegato in maniera più completa e rigorosa nel file caricato nelle dispense.

Si arriva ad uno 0,01%.

In sede di esame verrà comunicata l'incertezza di 3-4-5%.

Nel caso dell'equazione implicita si sarebbe osservato come il metodo di iterazione non sarebbe stato convergente.



Allora si utilizza il METODO DI BISSEZIONE.

$$g(T_{B2}) = T_{B2} - \left( \frac{mR}{V_{tot}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \left( \frac{T_{A2}}{p_{as}^{\frac{k-1}{k}}} \right) (T_{B2} - T_{B2})^{\frac{k-1}{k}} = 0$$

Per noti teoremi dell'analisi con una funzione continua se assume valori discordi agli estremi ci aspettiamo uno zero tra i due valori.

Riscriviamo la funzione portando  $T_{B2}$  al secondo membro e cerchiamo gli zeri.

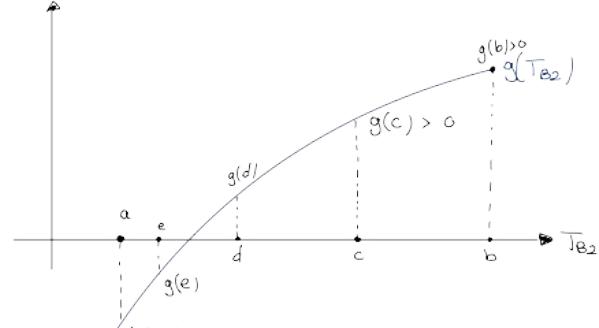
$$\begin{cases} a \rightarrow g(a) < 0 \\ b \rightarrow g(b) > 0 \end{cases}$$

si controllano i segni di  $g(a)$  e  $g(b)$

$$\begin{cases} a = a \rightarrow g(a) < 0 \\ c = \frac{a+b}{2} \rightarrow g(c) > 0 \end{cases}$$

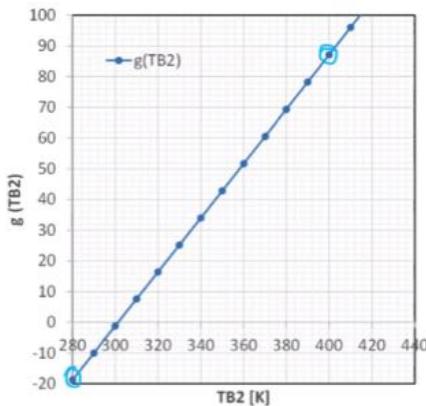
$$\begin{cases} a = a \rightarrow g(a) < 0 \\ c = \frac{a+d}{2} \rightarrow g(c) > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = a \rightarrow g(a) = \dots \\ f = \frac{e+d}{2} \rightarrow g(f) = \dots \end{cases}$$



Tornando all'esercizio  
si trova:

$$g(T_{B2}) = T_{B2} - \left( m R V_{tot}^{-1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \cdot \left( T_{B1} p_{B1}^{-\frac{k-1}{k}} \right) \cdot (T_{A2} + T_{B2})^{\frac{k-1}{k}}$$

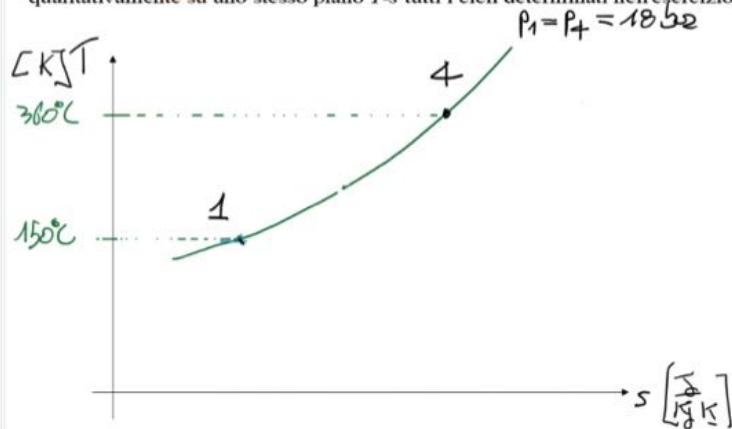


N	a	b	$g(a)$	$g(b)$
1	283,15	403,15	-15,98	89,92
2	283,15	343,15	-15,98	36,77
3	283,15	313,15	-15,98	10,34
4	283,15	298,15	-15,98	-2,84
5	298,15	305,65	-2,84	3,75
6	298,15	301,90	-2,84	0,45
7	298,15	300,03	-2,84	-1,19
8	300,03	300,96	-1,19	-0,37
9	300,96	302,84	-0,37	1,28
10	300,96	301,90	-0,37	0,45
11	300,96	301,43	-0,37	0,04

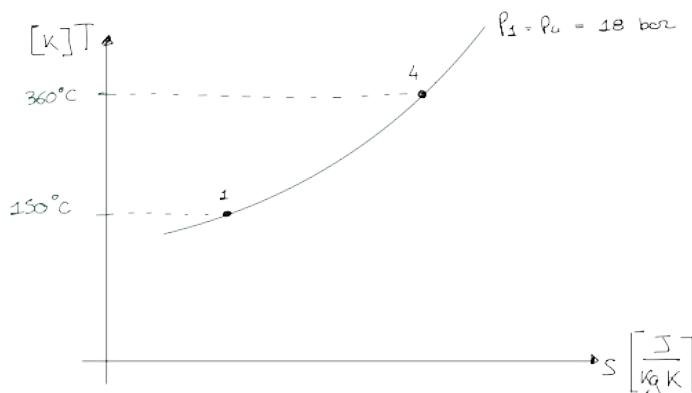
Anche qui si stabilisce un criterio di convergenza e ci si arresta con le iterazioni.

## Esercizio

Aria, da considerarsi gas perfetto, evolve in un sistema chiuso secondo un ciclo inverso reversibile, costituito nell'ordine dalle seguenti trasformazioni: 1-2 politropica di indice  $n = 2k/(1+k)$ ; 2-3 isobara; 3-4 isoentropica di esponente  $k$ ; 4-1 isobara alla pressione di 18 bar. Determinare il rapporto di compressione per il quale il rendimento del ciclo è pari a 0.43, considerando che la sola fase utile è data dalla trasformazione 2-3. Siano  $150^{\circ}\text{C}$  e  $360^{\circ}\text{C}$  le temperature rispettivamente negli stati termodinamici 1 e 4. Nella configurazione trovata calcolare il lavoro netto del ciclo e determinare gli stati termodinamici notevoli. In seguito, determinare il rapporto di compressione per cui è minimo il rendimento. Rappresentare qualitativamente su uno stesso piano  $T-s$  tutti i cicli determinati nell'esercizio.



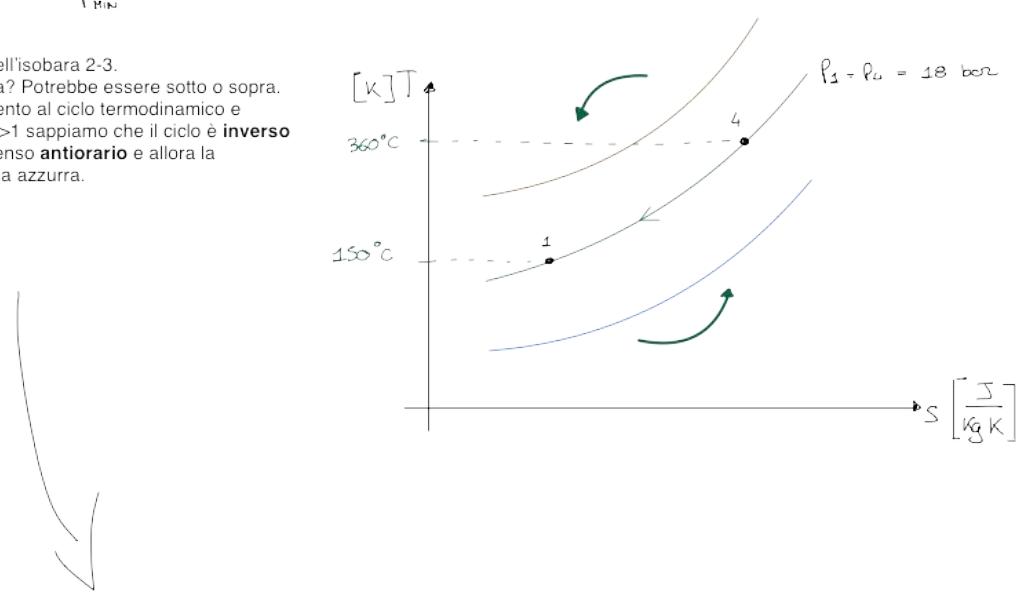
Prendiamo il piano  $T-s$  e riportiamo l'isobara nota che nel diagramma  $T-s$  ha una pendenza  $T/c_p$ .



Andando a vedere le altre trasformazioni sappiamo che il rapporto di compressione è in generale un rapporto di pressioni:

$$\text{RAPPORTO DI COMPRESSIONE} : r_p = \beta = \frac{p_{\max}}{p_{\min}}$$

Cioè ci chiediamo la pressione dell'isobara 2-3. Dove la riportiamo sul diagramma? Potrebbe essere sotto o sopra. Per capirlo possiamo fare riferimento al ciclo termodinamico e partendo dalla trasformazione 4→1 sappiamo che il ciclo è **inverso** reversibile e quindi percorso in senso **antiorario** e allora la trasformazione deve essere quella azzurra.



Sappiamo quindi dove saranno gli stati termodinamici 2 e 3.

Possiamo riportare facilmente lo stato 3 sapendo che 3→4 è un'isoentropica e quindi verticale nel diagramma Ts.

Per lo stato 2 sappiamo che andiamo da 1 a 2 con una politropica di indice n, abbiamo che:

Aria: gas perfetto bicromatico  $K = 1,4$

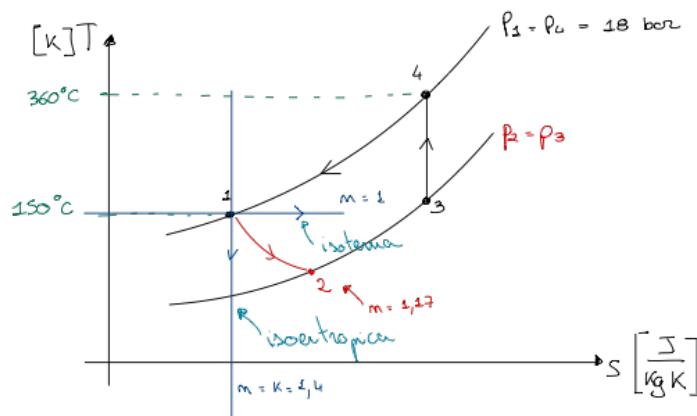
$$(p_m)_{\text{aria}} = 28,9 \cdot 10^{-3} \text{ Kg/mol}$$

$$R = \frac{R_u}{p_m} =$$

$$c_p = \frac{3}{2} R, \quad c_v = \frac{5}{2} R$$

$$\text{Dal testo. } m = \frac{2K}{K+1} = \frac{28}{2+1} \simeq 1,17$$

Nel diagramma conosciamo le due trasformazioni notevoli, facilmente rappresentabili, l'isoterma e l'isoentropica.



Per l'isoentropica  $n=k=1,4$  mentre per l'isoterma  $n=1$  e allora  $n=1,17$  dovrà trovarsi compreso tra le due curve.

Dobbiamo allora trovare il rapporto di compressione:

$$\text{rapporto di compressione} \cdot r_p = \beta \cdot \frac{p_1}{p_2} = \frac{p_4}{p_3}$$

$$\text{dal rendimento} \quad \eta = \frac{q_{2-3}}{|l_n|} = 0,43 \quad \Rightarrow \quad \gamma = f(\beta)$$

Sappiamo che, nella fase utile 2-3, il ciclo sottrae calore in quanto è un ciclo inverso (funziona come ciclo frigorifero).

Dove per lavoro si intende il lavoro netto del ciclo ovvero l'area del ciclo che dovrà essere negativo, per questo lo consideriamo in modulo.

Dovremmo scrivere questo rendimento in funzione di  $\beta$  e risolvere l'equazione.

Sappiamo che il lavoro netto è la somma dei singoli lavori delle trasformazioni.

$$l_n = l_{1-2} + l_{2-3} + l_{3-4} - l_{4-1} \quad \left\{ \rightarrow \text{li vediamo nella prossima lezione} \right.$$

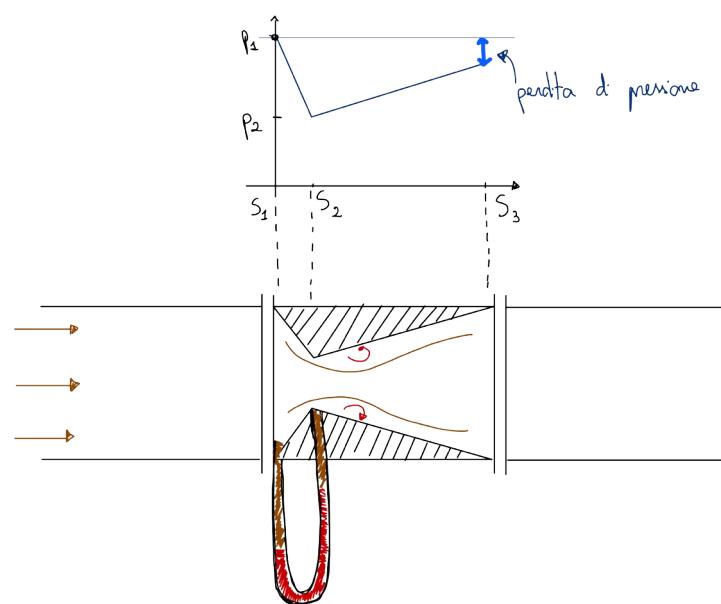
Il calore  $q_{2-3}$  è quello di un'isobara:

$$q_{2-3} = c_p (T_3 - T_2)$$

Adesso dovremmo scrivere i singoli contributi delle trasformazioni.

# FISICA TECNICA

## Settimana 6



# Indice settimana 6

Indice settimana 6	2
martedì 27 ottobre 2020 - Lezione 15	3
Moto di un fluido Newtoniano tra 2 piani paralleli	4
<i>Pareti ferme</i>	5
<i>Moto a Covette</i>	6
<i>Applicazioni</i>	7
Moto di un fluido in uscita da un serbatoio	8
<i>Torricelli</i>	8
<i>Svuotamento di un serbatoio attraverso un foro</i>	9
mercoledì 28 ottobre 2020 - Lezione 16	11
Misure	12
<i>Misure di pressione</i>	12
<i>Misura di velocità: tubo di Pitot</i>	13
<i>Misura della portata: tubo di venturi</i>	14
<i>Misure di viscosità</i>	14
Andamento della temperatura nell'atmosfera terrestre	19
giovedì 29 ottobre 2020 - Esercitazione 2	23
Esercitazione	23

martedì 27 ottobre 2020 - Lezione 15

Ci mancava da considerare il fatto che l'equazione di Bernoulli generalizzata in forma integrale:

$$z_a + z_f + \int_1^2 \frac{dp}{\gamma} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + (z_2 - z_1) = 0$$

Abbiamo definito il termine  $z_a = \left( \frac{\Delta p}{\gamma} \right)_{tot}$

Che poi si divide tra le perdite concentrate e le perdite distribuite:

$$z_a = \frac{(\Delta p)_d}{\gamma} + \frac{(\Delta p)_c}{\gamma} = \sum_i \frac{w_i^2}{2g} \frac{l_i}{D_i} \lambda_i + \sum_j \frac{w_j^2}{2g} \lambda'_j$$

Nel condotto ci saranno perdite di carico distribuite, per ogni tratto, e perdite concentrate come restrinzione e allargamento di sezione o cambi di direzione, per ciascuna abbiamo associato un fattore di attrito  $\lambda'$

Quindi otteniamo l'equazione di Bernoulli generalizzata che può essere utilizzata sia in fase di progettazione che in caso di verifica.

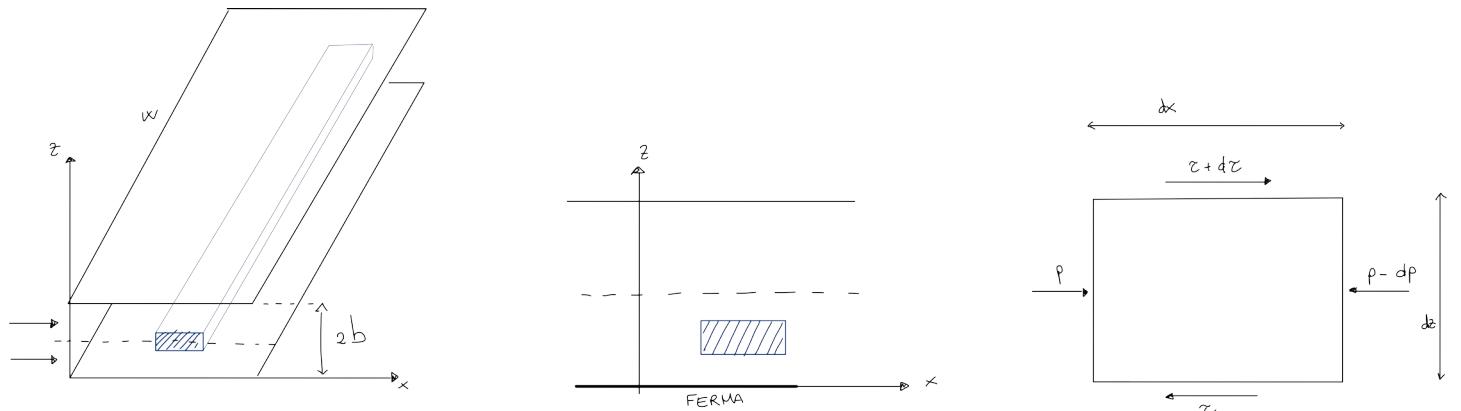
Per il caso **verifica**: abbiamo un impianto idraulico già costruito, con i vari tratti in cui doppiamo valutare il  $\lambda_i$  in base alla portata, e le varie perdite concentrate, e dobbiamo verificare soltanto che ci sia effettivamente la portata desiderata in presenza di un lavoro  $z_f$  che può essere ad esempio una pompa. Si immagini un condominio con 3 abitazioni e una pompa nel seminterrato e vogliamo verificare che arrivi la corretta portata, quindi dovremmo avere una certa velocità a seconda del diametro da cui possiamo calcolare Reynolds e quindi  $\lambda_i$ .

Diverso è il caso della **progettazione** cioè se vogliamo progettare un impianto tale che messa un'autoclave in cantina vogliamo calcolare che potenza è necessaria per la pompa per avere la portata stabilità. Identificati tutti i componenti dell'impianto valutiamo il lavoro per unità di massa  $\ell_f = g z_f$  e nota la portata e possiamo quindi calcolare la potenza della pompa  $G \ell_f = P_f$

# Moto di un fluido Newtoniano tra 2 piani paralleli

Dovremmo aver visto il caso per il moto di un fluido newtoniano in moto laminare mentre ora vediamo il moto di un fluido newtoniano tra due piani paralleli. Ci si può chiedere perché i piani paralleli e non un tubo ma questo perché i piani paralleli sono il caso limite dello scorrimento tra due cilindri, cioè considerando una corona circolare con il raggio che tende ad infinito diventa il moto tra due piani paralleli, oppure possiamo considerare la distanza tra i due cilindri molto piccola rispetto il raggio del cilindro interno.

Supponiamo di studiare un caso bidimensionale, prendiamo un elemento di fluido e supponiamo la parete inferiore ferma.



Supponendo valida la condizione di aderenza il fluido avrà velocità nulla sulla faccia inferiore e quindi crescerà da **0** per  $z = 0$  e crescerà con un estremo sull'asse dei due piani.

Considerando l'elementino riportato in figura questo avrà una lunghezza  $w$  e sulla faccia di sinistra agisce una certa pressione  $p$ , mentre sulla parte destra ci sarà una certa pressione  $p - dp$  (il fluido quindi va da sinistra verso destra diminuendo la pressione). La faccia è larga  $dx$  lungo  $x$  e con una larghezza  $w$  quindi il fluido che si trova sotto ha una velocità inferiore rispetto il fluido dentro l'elemento (la velocità cresce lungo l'asse dei piani) e quindi ci sarà un certo sforzo di taglio  $\tau$ . Discorso analogo per la faccia superiore dove la velocità è maggiore e quindi c'è uno sforzo di taglio maggior  $\tau + d\tau$ .

Facciamo un bilancio delle forze che agiscono sull'elementino:

$$\rho dx w + (\tau + d\tau) dx w = \tau dx w + (p - dp) dz w$$

Semplificando otteniamo  $d\tau dx = - dz dp$

E allora  $\frac{d\tau}{dz} = - \frac{dp}{dx}$ , dove il termine a destra è il gradiente di pressione nella direzione del moto e considerando che  $dp/dx$

diminuisce la quantità  $-\frac{dp}{dx}$  è una quantità positiva.

Supponendo il fluido newtoniano abbiamo che  $\tau = \mu \frac{dw}{dz}$

Allora sosteniamo, supponendo  $\mu = \text{cost}$  (cioè ingegneristicamente si può dire che supponiamo di considerare un  $\mu$  medio)

$$\text{otteniamo: } \mu \frac{d^2w}{dz^2} = - \frac{dp}{dx} = \text{cost}$$

Abbiamo detto come questa costante è positiva.

Integrando due volte:

$$\mu \frac{dw}{dz} = - \frac{dp}{dx} z + C_1$$

$$w = - \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2$$

Cioè l'integrale generale del moto tra due piani paralleli nel caso di moto di un fluido newtoniano.

Allora possiamo studiare 2 casi:

- Le due pareti sono ferme, quindi c'è una pompa che spinge il fluido da sinistra verso destra
- La parete inferiore è ferma mentre la parete superiore si muove da sinistra a destra

## Pareti ferme

Ci servono due condizioni al contorno:

- $z = 0$ , si ottiene  $w = 0 = C_2$
- $z = 2b$ , si ottiene  $w = 0 = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{4b^2}{2} + 2bC_1 + C_2$

Per l'ipotesi di aderenza del fluido alla parete. Questo significa che abbiamo una funzione nulla alle pareti e per il teorema di Rolle, dovendo crescere, sarà positiva con un massimo nella sezione di mezzeria per ragioni di simmetria.

Si ottiene allora:

$$\begin{aligned} C_2 &= 0 \\ C_1 &= \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} b \end{aligned}$$

Quindi l'espressione del profilo di velocità è  $w = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{z^2}{2} + \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} bz \rightarrow$

$$w = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \left( bz - \frac{z^2}{2} \right)$$

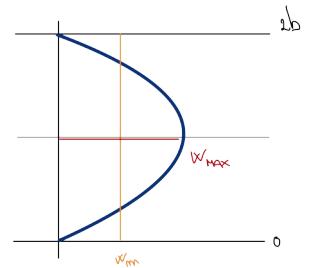
Questa espressione è verificata sia in  $z = 0$  che  $z = 2b$  in cui  $w = 0$  mentre per valori intermedi l'andamento della velocità è **quadratico** e il massimo è in corrispondenza del piano di simmetria, in cui  $z = b$  e  $w_{\max} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{b^2}{2}$

Invece il valor medio, si definisce come la velocità costante su tutta la sezione che restituisce la stessa portata del profilo parabolico, allora si determina come:

$$Sw_m = \bar{w} = w_m = \int_0^{2b} w dz = \int_0^{2b} \left[ -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \left( bz - \frac{z^2}{2} \right) \right] dz = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \left[ \frac{bz^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right]_0^{2b} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{b^2}{3}$$

Cioè  $w_m = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{b^2}{3}$

E si ha che  $w_m = \frac{2}{3} w_{\max}$

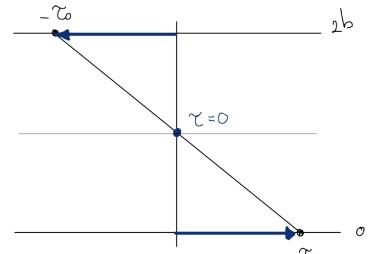


Calcoliamo lo sfrozo di taglio sulla faccia inferiore e superiore tramite l'equazione costitutiva del fluido newtoniano:

$$\tau = \mu \frac{dw}{dz} = \mu \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} (b - z) = \frac{dp}{dx} (b - z)$$

Considerando le condizioni:

- In  $z = 0$  si ha che  $\tau_0 = \frac{dp}{dx} b$
- In  $z = 2b$  si ha  $\tau_{2b} = -\frac{dp}{dx} b = -\tau_0$
- In  $z = b$  si ha  $\tau_b = 0$  poiché  $\tau$  è la tangente al profilo di velocità sull'asse si deve annullare per simmetria mentre è massimo agli estremi.



Calcoliamo il fattore di attrito  $\lambda$  a partire dalla definizione che abbiamo trovato per le perdite distribuite  $\Delta p / L$ , cioè:

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{\lambda \rho w_m^2}{2D}$$

Da cui si ricava  $\lambda = \frac{\Delta p}{L} \cdot \frac{2D}{\rho w_m^2}$

Nel caso di condotto cilindrico  $D$  è semplicemente il diametro, mentre di i condotti di forma qualsiasi si definisce il **diametro idraulico**  $D_h = \frac{4S}{P}$ , dove:

- $S$  è la sezione di passaggio:  $S = 2bw$
- $P$  è il perimetro bagnato  $P = 2w$ , dove si considera che i 2 piani sono infinitamente estesi e quindi all'infinito i lati  $2b$  non sono bagnati.

$$\text{Si ha allora } D_h = \frac{4 \cdot 2bw}{2w} = 4b = 2(2b)$$

Se invece avessimo considerato  $P = 2w + 4b$  si ottiene  $D_h = \frac{4 \cdot 2bw}{2w + 4b} = \frac{8b}{2 + \frac{4b}{2w}} \rightarrow 0$  per  $w \rightarrow \infty$

annulla per  $w \rightarrow \infty$

Allora calcoliamo  $\lambda = \frac{\Delta p}{L} \cdot \frac{2D_h}{\rho w_m^2}$  e supponendo la caduta di pressione costante in  $x$ , cioè  $\frac{\Delta p}{L} = \frac{dp}{dx}$  si ottiene

$$\lambda = \frac{dp}{dx} \frac{2 \cdot 4b}{\rho w_m^2}$$

Utilizzando l'espressione di  $dp/dx$  dall'espressione della velocità media:

$$w_m = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{b^2}{3} \rightarrow \frac{dp}{dx} = w_m \frac{3\mu}{b^2}$$

Allora  $\lambda = \frac{w_m}{\cancel{b^2}} \frac{3\mu}{\cancel{b^2}} \cdot \frac{8b}{\rho w_m^2} = \nu \cdot \frac{24}{b w_m}$ , con  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  che prende il nome di **viscosità cinematica**

Ricordando l'espressione del numero di Reynolds  $Re = \frac{w_m D_h}{\nu} = \frac{w_m 4b}{\nu}$  ed estraiamo  $w_m = \frac{Re \nu}{4b}$

Da cui si ricava  $\lambda = \frac{96}{Re}$ , nel moto di un fluido newtoniano in un condotto a sezione circolare era  $64/Re$  mentre in questo caso si ottiene  $96/Re$ .

### Moto a Covette

La parete inferiore è ferma mentre la parete superiore si muove a velocità  $w_d$ . Supponiamo non ci sia un pompa quindi il fluido non si muove per un gradiente di pressione indotto, cioè  $\frac{dp}{dx} = 0$  e allora la relazione è  $w = C_1 z + C_2$ .

Imponendo le condizioni al contorno:

- In  $z = 0$  si ha che  $w = 0 = C_2$
- In  $z = 2b$  si ha che  $w = w_d = C_1 2b + C_2$

Cioè le due costanti sono:  $C_1 = \frac{w_d}{2b}$  e  $C_2 = 0$

Quindi l'espressione del profilo di velocità è  $w = \frac{w_d}{2b} z$

Allora l'andamento è lineare con valori 0 e  $w_d$  ai 2 estremi.

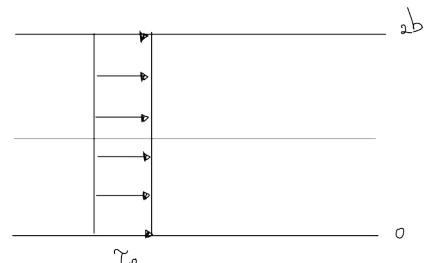
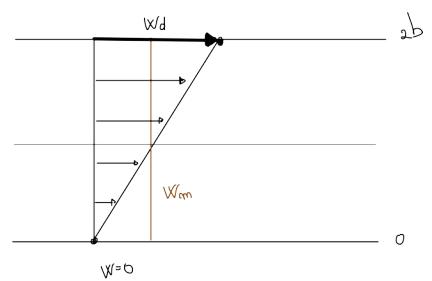
La velocità media è  $w_m = \frac{1}{2b} \int_0^{2b} \frac{w_d}{2b} z dz = \frac{w_d}{4b^2} \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^{2b} = \frac{w_d}{2}$

Cioè  $w_m = \frac{w_d}{2}$

Andando a calcolare lo sforzo di taglio tramite l'equazione costituita del fluido newtoniano:

$$\tau = \mu \frac{dw}{dx} = \mu \frac{w_d}{2b}$$

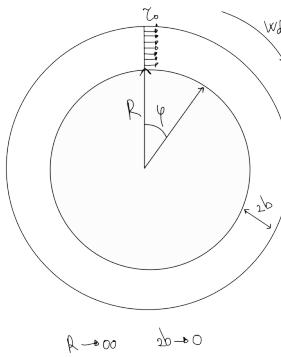
Quindi è costante e non dipende da  $z$ .



Vediamo quali sono le possibili

## Applicazioni

**Viscosimetro a cilindri concentrici**, o rotoviscosimetro. .



Prendiamo un cilindro di materiale metallico pieno e un secondo cilindrico intorno tale che nella corona circolare ci sia il fluido di cui vogliamo calcolare la viscosità. Mettiamo in rotazione il cilindro interno di velocità  $w_d$ . Questo movimento induce una situazione analoga a quanto visto prima e se  $R$  è molto grande si può pensare questo spazio assimilabile a quello tra due piani paralleli. Cioè ingegneristicamente consideriamo il meato (spazio tra i due cilindri) molto piccolo,  $2b \ll R$ , e ci riconduciamo al moto tra due piani paralleli di cui quelli inferiore è fermo e quello superiore si muove con velocità  $w_d$ .

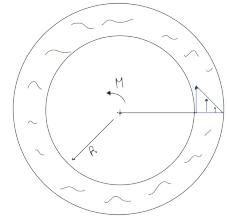
Ci sarà quindi uno sforzo di taglio  $\tau_0$  applicato sia sulla sezione esterna che su quella interna. Lo sforzo di taglio sulla superficie esterna provocherà una forza che farà sì che il cilindro interno ruoterà di un centro angolo  $\varphi$  e poi si fermerà in questa posizione pur continuando a ruotare il cilindro esterno. Posso misurare la velocità del cilindro esterno e l'angolo di rotazione del cilindro interno per effetto della forza applicata. Quindi mettendo in relazione il momento  $(\tau_0 \cdot 2\pi RW)$  con l'angolo  $\varphi$  si ottiene:

$$\mu = \frac{\tau_0 \cdot 2b}{w_d}$$

Discorso analogo se faccio ruotare il cilindro interno, dove il fluido è messo in movimento con uno sforzo di taglio  $\tau$

E quindi con un momento  $M = \tau \cdot 2\pi Rh$

$$\text{Si arriva allora ad una velocità angolare } \omega = \frac{2\pi}{60} \text{ rpm}$$



Questo solitamente è utilizzato con fluidi che non si danneggiano per tali rotazioni come l'olio.

Volendo utilizzare un viscosimetro per misurare ad esempio la viscosità del sangue questo sistema distruggerebbe i globuli rossi modificandone la viscosità, e allora si usano dei sistemi che esercitano uno sforzo di taglio meno intenso.

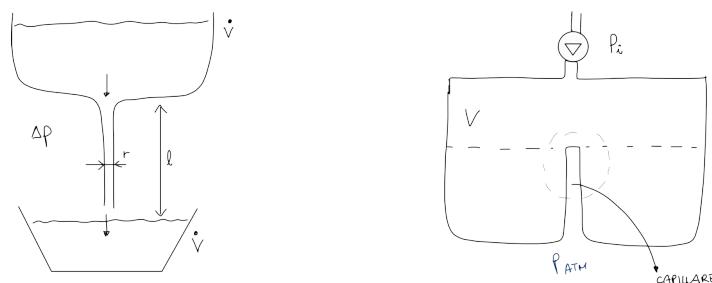
## Viscosimetro a tubo capillare.

Prendiamo un contenitore e ci mettiamo un tubo capillare molto sottile da cui scorrerà il fluido.

Nel tubo capillare soggetto alla differenza di quota c'è un moto con una velocità abbastanza piccola per cui possiamo considerare

$$\text{il moto laminare, cioè con la legge di Hagen-Poiseuille } \frac{\Delta p}{L} = 8\mu \frac{1}{r^2} w \text{ e sostituendo } wA = \dot{V} \rightarrow w = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{\dot{V}}{\pi r^2}$$

$$\text{Si può quindi ricavare } \mu = \frac{\pi r^3 \Delta p}{8 \dot{V} l}$$



Allora la viscosità si misura calcolando la differenza di pressione a cui è soggetto il fluido che si muove in un capillare di raggio  $r$  noto e di lunghezza  $l$  misurando la portata in volume.

Si fa quindi scorrere il fluido e si misura l'intervallo di tempo in cui il fluido raggiunge un certo volume  $V$ , e dividendo per l'intervallo di tempo si ottiene  $\dot{V}$ .

Nella pratica questo non è comodo e quindi il tubo capillare si mette dentro e il fluido scorre dentro ed esce alla pressione atmosferica e basta impostare in ingresso una pressione  $p_i$  e quindi il  $\Delta p$  è noto.

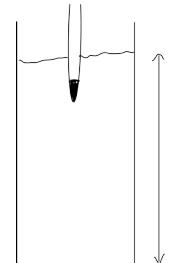
Riempendo fino al livello massimo il fluido si ferma all'altezza del capillare e non esce più quindi uscirà solo un certo volume noto  $V$ . Allora è sufficiente misurare l'intervallo di tempo in cui c'è flusso e si può calcolare il  $\Delta t$ . Da questi due dati posso ottenere il  $\dot{V}$  e posso calcolare la viscosità.

Un altro sistema è il

### Viscosimetro ad ago cadente

Si prende un tubo di vetro e si misura il tempo che impiega il cilindro a raggiungere il fondo. È quindi il moto di un fluido all'interno di una corona circolare. Questo viene utilizzato per misurare la viscosità del sangue con un brevetto di proprietà dell'università di New York.

Sembra sia particolarmente appropriato per misurare la viscosità del sangue.

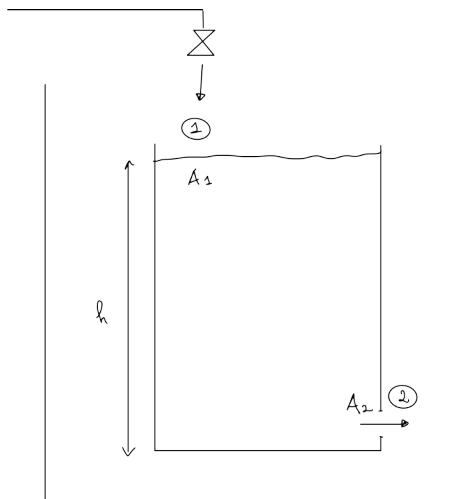


## Moto di un fluido in uscita da un serbatoio

### Torricelli

Supponiamo di avere un recipiente con un fluido ad un'altezza  $h$  e che il contenitore abbia un'apertura al livello indicato in figura. Il livello del fluido si mantenga costante con un sistema di troppo pieno, cioè si mette un rubinetto in cui si fa entrare l'acqua che quando arriva al livello massimo uscirà lateralmente andando via e quindi il livello rimane costante.

Torricelli dice che la velocità di un fluido è quella che il fluido avrebbe se cadesse con energia cinetica da un'altezza  $h$ , cioè  $\frac{w^2}{2g} = h \rightarrow \sqrt{2gh}$ .



Possiamo ricavare questo ragionamento scrivendo l'equazione di Bernoulli (i.e. è come se scrivessimo l'equazione dell'energia per il sistema termodinamico considerato) tra la sezione 1 e la sezione 2:

$$\cancel{\gamma z_a + \cancel{\gamma f} + \frac{p_2 - p_1}{\gamma}} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + z_2 - z_1 = 0$$

Dove abbiamo supposto  $\gamma = \text{cost}$  e inoltre supponiamo che non ci siano organi meccanici ( $z_f = 0$ ) e che  $p_1 = p_2 = p_{atm}$  e che le perdite distribuite siano trascurabili ( $z_a$  trascurabile). Infine osserviamo che  $w_1 = 0$ .

$$\text{Allora } \frac{w_2^2}{2g} = z_1 - z_2 = h, \text{ da cui si ricava } w_2 = \sqrt{2gh}$$

Questa la chiamiamo **velocità ideale** ed è la velocità media nella sezione 2.

Allora la portata ideale in volume è  $V_C = w_i A_2 = A_2 \sqrt{2gh}$

Invece, se  $z_a$  non fosse trascurabile, ottengo che la velocità reale in presenza di attrito (irreversibilità) è inferiore a quella ideale:

$$\frac{w_2^2}{2g} = z_1 - z_2 - z_a = h - z_a, \text{ cioè } w_r < w_a$$

Questo si indica tramite un coefficiente  $\varphi$  che indica che le irreversibilità incidono al massimo per un 5%.

Cioè  $w_R = w_i \cdot \varphi$ , con  $0,95 \leq \varphi \leq 1$

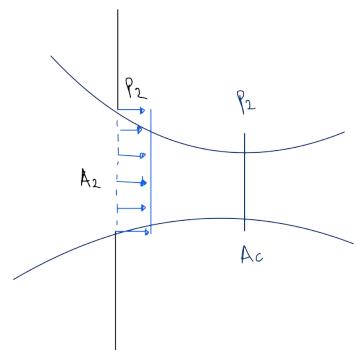
Se andiamo a vedere l'andamento delle linee di corrente nel fluido nella sezione di uscita ci accorgiamo che accade quello che si ha in un restringimento di sezione. Cioè ad una certa distanza ci sarà un restringimento di sezione nella vena contratta (dove il fluido prosegue per inerzia)  $A_c < A_2$ .

Quindi la portata reale in volume del fluido è:  $\dot{V}_r = w_r \cdot A_c$ , a causa della restrizione della sezione.  $p_2$  rimane la stessa essendo il fluido in atmosfera.

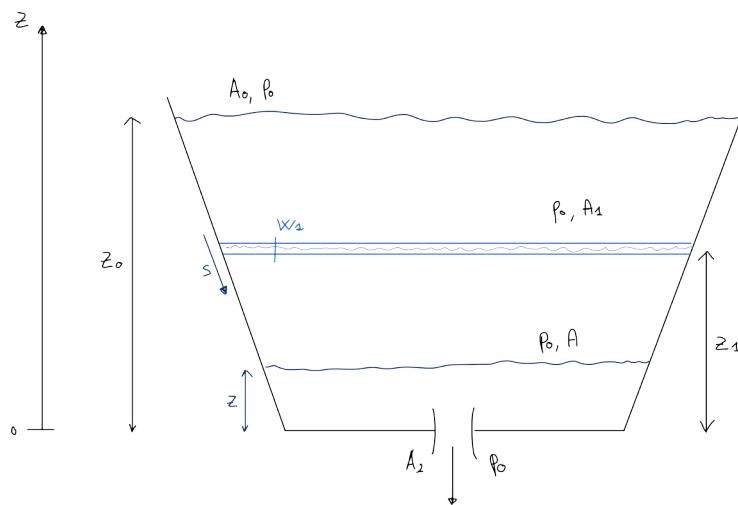
Indichiamo il rapporto tra le sezioni come  $\Psi = \frac{A_c}{A_2}$  e otteniamo che la portata reale è

$$\dot{V}_r = w_r \Psi A = w_i \varphi \Psi A = \Phi w_i A$$

Dove  $\Phi \approx 0,63$  ed indica quanto la vena contratta riduce la portata (di più rispetto la riduzione di velocità).



### Svuotamento di un serbatoio attraverso un foro



Supponiamo che il contenitore sia di tipo vaso e non cilindrico e una coordinata  $s$  sul lato. Il foro di sezione  $A_2$  con il fluido che scarica in atmosfera  $p_0$ . Chiamiamo  $A$  la generica sezione ad un'altezza  $z$  mentre  $A_1$  la generica sezione ad un'altezza  $z_1$ .

Utilizziamo l'equazione di Eulero che ci dice che la somma dei tre carichi (cinetico, effettivo e piezometrico) nella sezione iniziale è uguale a quello dell'altra sezione più il termine transitorio, cioè

$$\frac{w_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{w_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \int_1^2 \frac{1}{g} \frac{\partial w}{\partial t} ds, \text{ dove } p_1 = p_2 = p_0$$

$$\text{Cioè } \frac{w_1^2}{2g} + z_1 = \frac{w_2^2}{2g} + \int_1^2 \frac{1}{g} \frac{\partial w}{\partial t} ds$$

Mentre l'equazione della conservazione della massa ci dice che:

$$w_1 A_1 \rho_1 = \Phi w_2 A_2 \rho_2, \text{ dove } \rho = \text{cost poiché ipotizzo il fluido incompressibile}$$

$$\text{Si ha che } w = w_1 \frac{A_1}{A} \text{ e quindi } \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{w_1 A_1}{A} \right)$$

$$\text{Allora si ha che: } \frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial w}{\partial t} ds = \frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{w_1 A_1}{A} \right) ds = \frac{1}{g} A_1 \frac{dw_1}{dt} \int_1^2 \frac{ds}{A}$$

Dove  $A_1 \frac{dw_1}{dt}$  li considero indipendenti da  $s$

$$\text{Sostituendo nell'equazione di Eulero si ha che: } \frac{w_1^2}{2g} + z_1 = \frac{w_2^2}{2g} + \frac{A_1}{g} \frac{dw_1}{dt} \int_1^2 \frac{ds}{A} = \frac{w_2^2}{2g} + \frac{dw_1}{dt} \cdot g(z_1)$$

Dove chiamo  $g(z_1) = \frac{A_1}{g} \int_1^2 \frac{ds}{A}$ , noto se conosco quanto è svasato il vaso, cioè come varia  $A$  con  $s$

Dall'equazione di conservazione della massa esplicito  $w_2 = \frac{w_1 A_1}{\Phi A_2}$

$$\text{E quindi } \frac{w_1^2}{2g} - \frac{1}{2g} \left( \frac{w_1^2 A_1^2}{\Phi^2 A_2^2} \right) + z_1 = \frac{dw_1}{dt} \cdot g(z_1)$$

$$\frac{w_1^2}{2g} \left( 1 - \frac{A_1^2}{\Phi^2 A_2^2} \right) + z_1 = \frac{dw_1}{dt} \cdot g(z_1)$$

$$-w_1^2 \cdot f(z_1) + z_1 = \frac{dw_1}{dt} \cdot g(z_1), \text{ con } -f(z_1) = \left( 1 - \frac{A_1^2}{\Phi^2 A_2^2} \right) \cdot \frac{1}{2g}$$

Considerando uno spessore infinitesimo  $dz_1$ , le velocità  $w_1$  sarà:

$$w_1 = -\frac{dz_1}{dt} (< 0 \text{ poiché andando verso il basso } z \text{ si riduce})$$

$$\text{E quindi } -f(z_1) \left( \frac{dz_1}{dt} \right)^2 + z_1 + g(z_1) \cdot \frac{d^2 z_1}{dt^2} = 0$$

Dividendo per  $g(z_1)$  si:

$$\frac{d^2 z_1}{dt^2} - \frac{f(z_1)}{g(z_1)} \left( \frac{dz_1}{dt} \right)^2 + \frac{z_1}{g(z_1)} = 0$$

$$\frac{d^2 z_1}{dt^2} - \varphi(z_1) \left( \frac{dz_1}{dt} \right)^2 + \Psi(z_1) = 0, \text{ con } \begin{cases} \varphi(z_1) = \frac{f(z_1)}{g(z_1)} \\ \Psi(z_1) = \frac{z_1}{g(z_1)} \end{cases}$$

Cioè un'equazione differenziale del secondo ordine di difficile risoluzione che si risolve con metodi di sostituzione.

VEDERE SUL LIBRO PER LA SOLUZIONE COMPLETA MENTRE DOMANI VEDREMO SOLTANTO LA "**SOLUZIONE PER PICCOLE APERTURE DI CARICO**".

Eraamo arrivati all'equazione  $\frac{d^2z_1}{dt^2} - \varphi(z_1) \left( \frac{dz_1}{dt} \right)^2 + \Psi(z_1) = 0$ , con  $\begin{cases} \varphi(z_1) = \frac{f(z_1)}{g(z_1)} \\ \Phi(z_1) = \frac{z_1}{g(z_1)} \end{cases}$

LA SOLUZIONE COMPLETA LA TROVIAMO SUL LIBRO DI LEZIONI E RIMANE DA FARE PER QUALCUNO VOLENTEROSO CHE VUOL PRENDERE LA LODE, IN TALE CASO DEVE FARE ANCHE QUESTA SOLUZIONE!

Andiamo allora ad affrontare la soluzione con le **piccole aperture di carico**, se la sezione di uscita  $A_2$  è molto piccola rispetto  $A_1$  il fluido esce molto lentamente e quindi si può supporre che:  $\frac{dw_1}{dt} = 0$  da cui  $\frac{d^2z_1}{dt^2} = 0$

Allora otteniamo

$$\left( \frac{dz_1}{dt} \right)^2 = \frac{\Psi(z_1)}{\varphi(z_1)} = \frac{z_1}{\cancel{g(z_1)}} \cdot \frac{\cancel{g(z_1)}}{f(z_1)} = \frac{z_1}{f(z_1)}$$

Cioè  $w_1 = \frac{z_1}{f(z_1)}$

E allora  $\frac{dz_1}{dt} = \sqrt{\frac{z_1}{f(z_1)}}$  e separando le variabili  $\sqrt{f(z_1)} \cdot \frac{dz_1}{\sqrt{z_1}} = Dt$

Quindi la soluzione è semplicemente l'integrale tra istante iniziale e istante finale:

$$t_2 - t_0 = \int_0^2 \sqrt{f(z_1)} \frac{dz_1}{\sqrt{z_1}} = \sqrt{f(z_1)} \left( -\frac{1}{2} + 1 \right) [z^{-1/2+1}]_0^2 = \dots$$

Si ricordi, nell'integrare, che  $f(z_1)$  è in realtà funzione di  $A_1$  e  $A_2$

Così abbiamo legato il tempo con la quota  $z_1$  che diminuisce da  $z_0$  a 0.

PASSIAMO ALLORA AL CAPITOLO 3 "MISURE DI PRESSIONE, TEMPERATURA, PORTATA E VELOCITÀ"

DOVE ABBIANO GIÀ AFFRONTATO LA TEMPERATURA NELLA PARTE DI TERMODINAMICA MENTRE ADESSO AFFRONTIAMO LA PRESSIONE DI UN FLUIDO IN MOTO.

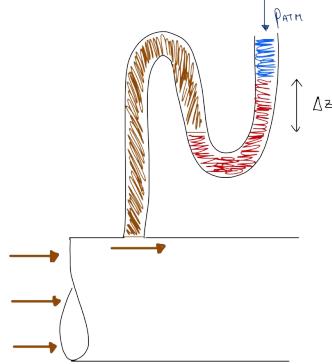
# Misure

## Misura di pressione

Abbiamo già studiato le misure della pressione di un fluido fermo, tramite il barometro e il manometro differenziale con il tubo a U.

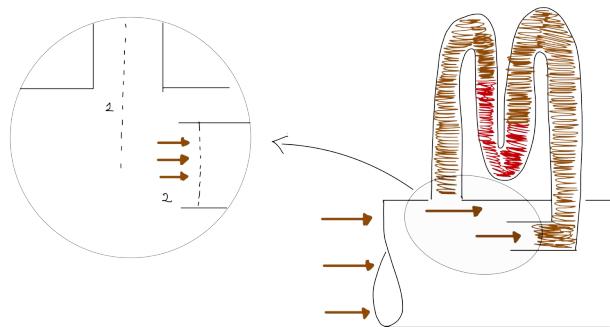
Invece ora ci occupiamo dei fluidi che scorrono in un condotto da sinistra verso destra.

La prima che affrontiamo si chiama **pressione statica** cioè tale che il fluido vada a riempire il condotto di un tubo ad U.



In **rosso** il liquido manometrico (es il mercurio che però è stato bandito) mentre in **azzurro** l'aria atmosferica. In **arancione** il fluido che scorre nel condotto. Il fluido in quanto scorrente ha una certa pressione ma nel tubo ad U il fluido è fermo ed ha una certa pressione, generalmente diversa. Se la pressione statica è maggiore di quella atmosferica il fluido spinge in basso il fluido manometrico e si realizza un  $\Delta z$ .

Allora considerando il peso specifico del liquido manometrico  $\gamma$  si ha la differenza di pressione  $p_s = p_{statica} - p_{atm} = \Delta z \cdot \gamma$ . Cioè la pressione statica è la pressione relativa del fluido rispetto l'atmosfera.



Un altro tipo di misura si realizza con il seguente dispositivo:

Sui due rami del tubo arriva da sinistra la pressione statica del fluido come prima, mentre sul ramo destro agisce la pressione del fluido ma il foro non ha la normale perpendicolare alla direzione del moto bensì parallela alla direzione del moto e il fluido che arriva sbatte con il fluido che sta dentro il condotto e quindi possiamo considerare il fluido fermo nel tubo a U che però riceve l'impulso dovuto all'energia cinetica del fluido che si muove.

Quindi sul ramo sinistro c'è una presa statica mentre sul ramo destro c'è una presa dinamica.

Se facciamo in modo che le due sezioni siano molto vicine è come se avessimo un fluido oche si muove dalla sezione 1 alla sezione 2 e applicando l'equazione di Bernoulli:

- Trascuriamo l'attrito  $z_a$
- $z_f = 0$  poiché non ci sono organi motori
- $z_1 = z_2$  se il condotto è orizzontale

E allora rimane solo la differenza tra il carico cinetico e il carico piezometrico.

$$\frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_1^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma} = 0$$

Essendo inoltre la sezione 2 dentro il ramo di destra del tubo a U è nulla  $w_2 = 0$

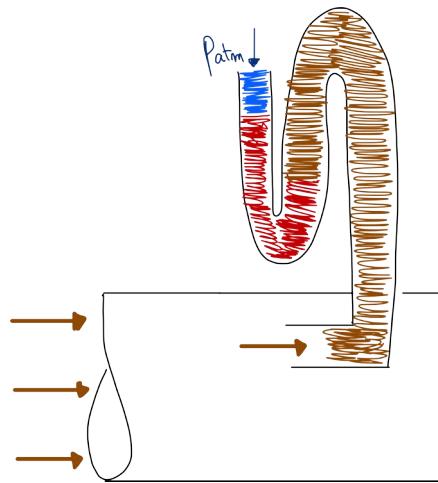
Si ha che la velocità è uguale alla differenza di pressione, cioè  $\frac{w_1^2}{2g} = \frac{p_2 - p_1}{\rho g}$  e quindi  $p_2 - p_1 = \rho \frac{w_1^2}{2}$  prende il nome di **pressione dinamica**.

Si osservi che se il fluido non scorre, cioè se  $w_1 = 0$  i due livelli del liquido manometrico sono uguali, cioè  $\Delta z = 0$ .

Mentre se il fluido scorre e la pressione a dx è maggiore ( $p_2 > p_1$ ) e il dislivello è maggiore a sx ( $\Delta z \neq 0$ ) allora la differenza di pressione è  $p_2 - p_1 = \Delta z \cdot \gamma \Rightarrow \frac{\Delta z \cdot \gamma}{\rho} = \frac{w_1^2}{2}$

Questi ci permette di concludere che con questo strumento possiamo ricavare anche l'energia cinetica del fluido davanti la sezione di presa dinamica.

Infine la **pressione totale** la si analizza con lo strumento che ha il ramo destro come nel misuratore della pressione dinamica mentre il ramo sinistro è collegato all'atmosfera.

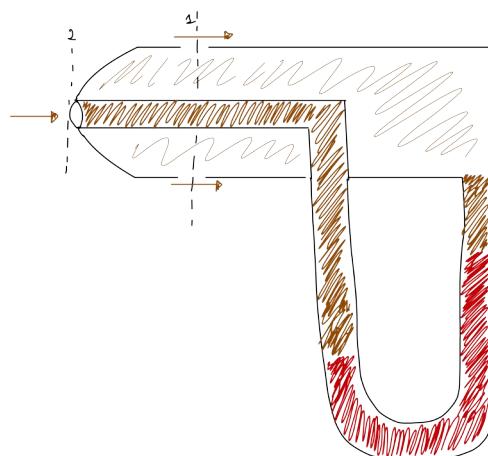


Questa prende il nome di pressione totale  $p_{tot} = (p_2 - p_1) - p_{atm} = \Delta z \cdot \gamma$  ed è come se combinassimo le due pressioni  
L'ESPRESSIONE È DA CONTROLLARE E POTREBBE NON ESSERE CORRETTA!

### *Misura di velocità: tubo di Pitot*

Questo strumento misura la velocità di un fluido in moto sfruttando lo strumento di misura della pressione dinamica. Si considera un tubo con una sezione centrale perpendicolare alla direzione del moto (pressione dinamica) e che poi vi sia saldato un altro tubo in modo da formare una sezione circolare. Sulla superficie laterale del tubo esterno facciamo dei fori che sono paralleli alle direzioni del moto e quindi sono equivalenti ad una presa di pressione statica.

Allora questo strumento messo in un fluido in moto avrà una presa di pressione statica 1 e una presa di pressione dinamica 2 .  
Nel fluido in moto il livello è più basso nel ramo di sinistra con la presa di pressione dinamica.

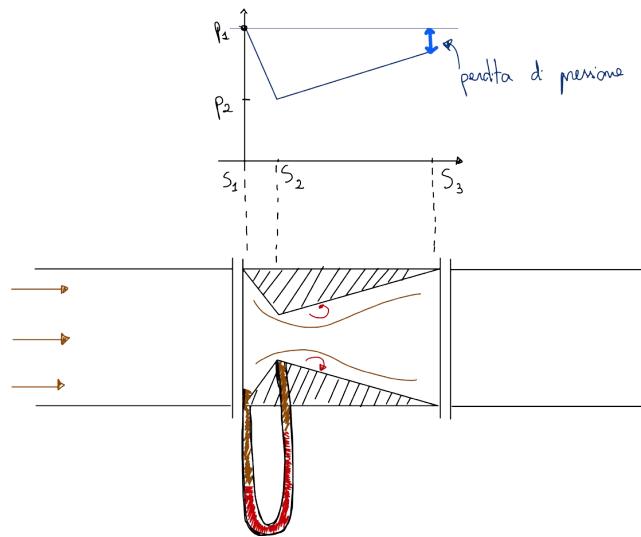


Allora considerando le relazioni delle velocità del fluido si ricava  $p_2 - p_1 = \Delta z \cdot \gamma$  e allora si ricava  $\frac{p_2 - p_1}{\rho} = \frac{w_1^2}{2}$  da cui si può ricavare la velocità del fluido.

Questo strumento è usato ancora oggi e negli aerei si vede sulla sinistra proprio al livello del cockpit del pilota e da fuori si vede semplicemente una L.

## Misura della portata: tubo di venturi

Si immagini un tubo e di inserire uno strumento con un restringimento di sezione. Nel disegno è riportata anche la flangia che permette l'inserimento del dispositivo. Il tubo di venturi presenta prima una diminuzione di sezione (tratto convergente) più corto seguito da un ramo divergente più lungo. Ci sono poi due fori, uno nella sezione di area minima e uno nella sezione di area di ingresso collegati da un tubo con liquido manometrico. Dalla differenza di quota si risale alla differenza di pressione tra le due prese.



Considerando la sezione 1 dove il fluido arriva con pressione  $p_1$  nel convergente la sezione diminuisce e quindi aumenta la velocità che sarà maggiore nella sezione 2 ma applicando Bernoulli la somma del carico cinetico, effettivo e piezometrico è costante e quindi il carico effettivo è nullo ( $z_1 = z_2$ ) si ha che dove è maggiore la velocità e quindi l'energia cinetica allora la pressione sarà minore. Nel divergente riaumenta la sezione e quindi diminuisce la velocità e allora aumenta pressione. Alla fine del tubo ci sarà un perdita di pressione poiché il fluido scorre lungo il condotto dove ci sarà sia una perdita di pressione distribuita sia una perdita di pressione concentrata (vortici).

Supponiamo un fluido incomprimibile  $\rho_1 = \rho_2$  e allora  $w_1S_1 = w_2S_2 = \dot{V}$

$$\text{Cioè } \frac{S_1}{S_2} = \frac{w_2}{w_1}$$

Poiché  $S_2 < S_1$  allora  $w_2 > w_1$

Scrivendo l'equazione di Bernoulli tra le due sezioni dove supponiamo  $z_f = 0$  e  $z_a$  trascurabile e il condotto orizzontale:

$$\frac{w_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{w_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2$$

E per un fluido in moto con  $p_1 - p_2 = \Delta z \cdot \gamma_m$

$$\text{Riprendendo allora l'equazione di Bernoulli } \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{\Delta z \cdot \gamma_m}{\gamma}$$

$$\text{E allora } \left( \frac{\dot{V}^2}{S_s^2} - \frac{\dot{V}^2}{S_1^2} \right) \frac{1}{2g} = \dot{V} \left( \frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right) \frac{1}{2g} = \frac{\Delta z \cdot \gamma_m}{\gamma}, \text{ con } w_i = \frac{\dot{V}}{S_i}$$

$$\text{E allora } \dot{V}^2 = \frac{\gamma_m}{\gamma} \Delta z \cdot 2g \left( \frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right)^{-1}$$

Dove  $\gamma_m$  è il peso specifico del fluido manometrico mentre  $\gamma$  del liquido che misuriamo.  $\Delta z$  si misura e  $S_1, S_2$  sono i parametri fisici

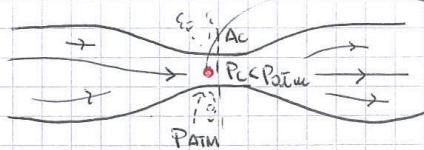
## Misure di viscosità

- Tubo capillare
- Cilindri concentrici
- Viscosimetro ad ago cadente

CONTROLLARE ANCHE GLI ALTRI APPUNTI PRESENTI PER LO SCARICO DI SERBATOIO DOVE SONO FATTI TUTTI I PASSAGGI !

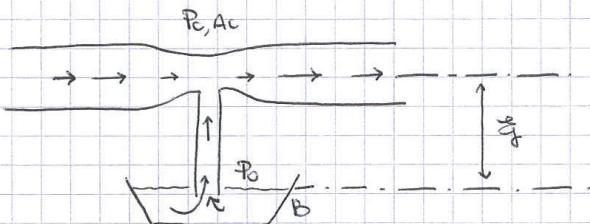
$$P_0 > P_c \text{ se } h \cdot \frac{A_0^2}{A_c^2} - h_c > 0 \rightarrow h_c < h \cdot \frac{A_0^2}{A_c^2}$$

Ricordando che  $P_0$  è la  $P_{ATM}$ , esse in queste condizioni vuol dire che si è in SIFONAGGIO.



Se pratico un foro qui, poiché  $P_c < P_{ATM}$  entra aria invece di uscire acqua.

Se io collego in corrispondenza della sezione contratta un tubo che termina in un serbatoio B alla  $P_{ATM}$ , esso aspirerà fluido da B.



In particolare modo, se:

$$\frac{P_0 - P_c}{\gamma} > \frac{z_f}{r}$$

Allora il  $\Delta p$  è tale da richiamare fluido dal serbatoio fino alle sezioni contratte.

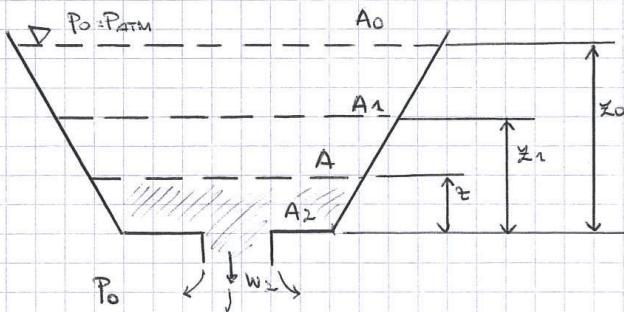
Quanto fluido "migra", dunque, a ricorrere verso destra, unendosi al fluido proveniente dalla sezione di iniezione.

$$\frac{P_0 - P_c}{\gamma} > \frac{z_f}{r} \rightarrow \frac{h \cdot A_0^2}{A_c^2} - h_c > z_f \rightarrow \frac{A_0}{A_c} > \sqrt{\frac{z_f + h_c}{h}}$$

princípio di funzionamento  
di una pompa a getto.

### MOTI NON STATIONARI CAUSATI DA DIFFERENZE DI POTENZIALE

① Spostamento di un serbatoio a rete con fondo fermo. No se



Spostando di trascurare gli strati  $z_1 = 0$   
(perciò non ci sono condotti)

Non ci sono organi in movimento  $z_1 \neq 0$ .

$\Rightarrow$  coordinata di "motamento"

Applichiamo l'eq. di Eulerio tra le sezioni 1 e 2:

$$\frac{w_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + z_1 = \frac{w_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{1}{g} \int_{S_1}^{S_2} \frac{\partial w}{\partial t} ds \rightarrow \text{integrale di Eulerio.}$$

Il termine  $\frac{\partial w}{\partial t} \neq 0$  perciò siamo in regime NON STATIONARIO.

Stiamo considerando uno svuotamento nel tempo: al tempo  $t_1$  il pelo libero è alla quota  $z_1$ , al tempo  $t_2$  è alla quota  $z_2$ .

In entrambi casi la pressione è quella atmosferica  $\rightarrow p_1 = p_2 = p_0$

$$\mathcal{L}_2 = \nabla \cdot \mathbf{F} = 0$$

$$\rightarrow \frac{w_1^2}{2g} + z_1 = \frac{w_2^2}{2g} + \frac{1}{g} \int_{S_1}^{S_2} \frac{\partial w}{\partial t} ds$$

Eq. della conservazione della massa:  $\rho \cdot w_1 A_1 = \rho \cdot A \cdot w = \cancel{\rho A_1 w_1}$ .  $V_L = \rho A_2 \cdot w_2 \cdot \phi$   
tra la sezione 1, la generica sezione  $t$ , e la sezione d'usata 2. ~~del volume~~ con  $\phi = 0,61 \div 0,63$

$$\rightarrow \rho w_1 A_1 = \rho A w = \rho A_2 \phi w_2 \rightarrow w_2 = \frac{w_1 A_1}{\phi A_2}$$

Per poter sviluppare l'integrale di Euler dobbiamo esplicitare  $w$ :  $w = \frac{w_1 A_1}{A}$

$$\rightarrow \int_{S_1}^{S_2} \frac{\partial w}{\partial t} ds = \int_{S_1}^{S_2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{w_1 A_1}{A} \right) ds \quad \text{Aree indipendenti da } t \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{w_1 A_1}{A} \right) = \frac{A}{A} \frac{\partial w_1}{\partial t} = \frac{A_1}{A} \frac{dw_1}{dt}$$

considero che  $\frac{\partial}{\partial t} (w_1 A_1)$  NON dipenda da  $s$ .

$$\rightarrow \int_{S_1}^{S_2} \frac{\partial w}{\partial t} ds = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{w_1 A_1}{A} \right) \int_{S_1}^{S_2} \frac{1}{A} dt = A_1 \cdot \frac{dw_1}{dt} \int_{S_1}^{S_2} \frac{ds}{A}$$

$A$  è la sezione di pelo libero al generico tempo di svuotamento  $t$  e sarà funzione di  $s$  e  $z$  a seconda della forma del catenitore:  $A = A(s, z)$ .

Sostituendo nell'equazione di Euler:

$$\frac{w_1^2}{2g} + z_1 = \frac{w_2^2}{2g} + \frac{1}{g} \cdot A_1 \cdot \frac{dw_1}{dt} \int_{S_1}^{S_2} \frac{ds}{A} \rightarrow \frac{w_1^2}{2g} + z_1 = \frac{1}{2g} \left( \frac{w_1 A_1}{\phi A_2} \right)^2 + \frac{1}{g} A_1 \frac{dw_1}{dt} \int_{S_1}^{S_2} \frac{ds}{A}$$

cerchiamo di isolare  $w_1$

$$\frac{w_1^2}{2g} \left[ 1 - \left( \frac{A_1}{\phi A_2} \right)^2 \right] + z_1 = \frac{1}{g} A_1 \frac{dw_1}{dt} \int_{S_1}^{S_2} \frac{ds}{A}$$

Scriviamo tutto in un'unica variabile del tempo, che è  $z(t)$ , ricordando che:

$$w_1 = - \frac{dz}{dt} \rightarrow \frac{dw_1}{dt} = - \frac{d^2 z}{dt^2}$$

Per semplicità, chiamiamo:

$$\frac{1}{2g} \left[ 1 - \left( \frac{A_1}{\phi A_2} \right)^2 \right] = -f(z) \quad \text{e} \quad \frac{A_1}{g} \int_{S_1}^{S_2} \frac{ds}{A} = g(z)$$

Sostituendo nell'equazione di Bernouilli, si ottiene:

$$-\left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2 \cdot f(z_1) + z_1 = g(z_1) \cdot \frac{d^2 z_1}{dt^2} \rightarrow -\left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2 \cdot \frac{f(z_1)}{g(z_1)} + \frac{z_1}{g(z_1)} + \frac{d^2 z_1}{dt^2} = 0$$

È un'equazione differenziale di secondo grado in  $z_1$ , di <sup>secondo</sup> ordine.

Soluzione semplificata per PICCOLE APERTURE DI SCARICO:

Hp  $\rightarrow \frac{dw_1}{dt} = 0$  Se l'apertura di scarico del serbatoio è molto piccola ( $A_2 \gg A_1$ ), possiamo supporre che questo si sviluppi molto lentamente, a  $w$  costante.

$$\rightarrow \frac{d^2 z_1}{dt^2} = 0$$

L'equazione si semplifica in:  $-\left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2 \cdot f(z_1) + z_1 = 0$

$$\frac{dz_1}{dt} = w_1 \rightarrow w_1 = \sqrt{\frac{z_1}{f(z_1)}} = \sqrt{\frac{z_1 \cdot 2g}{\left[\frac{A_1^2}{\Phi^2 A_2^2} - 1\right]}} \quad \text{per } A_1 \gg A_2 \quad w_1 \approx \sqrt{\frac{2g z_1}{\frac{A_1^2}{\Phi^2 A_2^2}}}$$

$$\rightarrow w_1 = \frac{\Phi A_2}{A_1} \sqrt{2g z_1} = \frac{\Phi A_2}{A_1} (w_2)^{id} \rightarrow \text{legge di Torricelli}$$

Risolvendo l'equazione in funzione di  $z_1$ , otteniamo la legge temporale di svuotamento:

$$\frac{dz_1}{dt} = \sqrt{\frac{z_1}{f(z_1)}} = \frac{\sqrt{z_1}}{\sqrt{\frac{A_1^2}{\Phi^2 A_2^2} - 1}} \cdot \sqrt{2g} \quad \text{se } A_1 \gg A_2 \rightarrow \frac{dz_1}{dt} = \sqrt{z_1} \cdot \sqrt{2g} \cdot \frac{\Phi A_2}{A_1}$$

$$\rightarrow \frac{dz_1}{z_1^{1/2}} = \sqrt{2g} \cdot \frac{\Phi A_2}{A_1} \cdot dt \quad \text{integrandi} \quad \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} \cdot z_1^{-\frac{1}{2}+1} = \sqrt{2g} \frac{\Phi A_2}{A_1} \cdot t + \text{costante}$$

$$2\sqrt{z_1} = \sqrt{2g} \frac{\Phi A_2}{A_1} \cdot t + C \quad \underline{\text{Condizioni al contorno:}} \quad \text{al tempo iniziale il serbatoio è pieno.}$$

$$t=0 \quad z_1(t=0) = z_0$$

$$\rightarrow 2\sqrt{z_0} = \sqrt{2g} \cdot \frac{\Phi A_2}{A_1} \cdot (0) + C \rightarrow C = 2\sqrt{z_0}$$

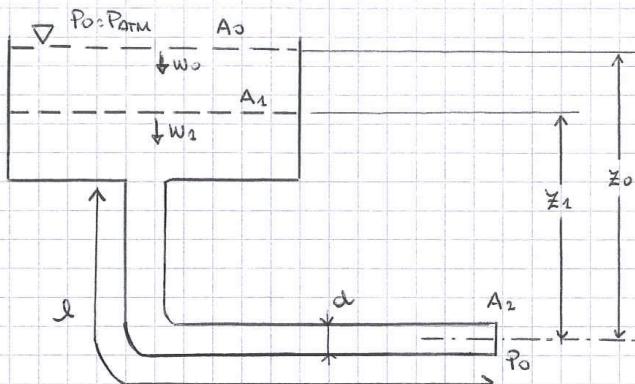
$$\rightarrow 2\sqrt{z_1} = \sqrt{2g} \frac{\Phi A_2}{A_1} \cdot t + 2\sqrt{z_0} \rightarrow \sqrt{2g} \frac{\Phi A_2}{A_1} t = 2(\sqrt{z_1} - \sqrt{z_0})$$

$$\rightarrow t = \frac{2A_1}{\Phi A_2 \sqrt{2g}} (\sqrt{z_0} - \sqrt{z_1})$$

Il serbatoio si svuota completamente:

$$z_1 = 0 \rightarrow t_1 = \frac{2A_2}{\Phi A_2 \sqrt{2g}} \sqrt{z_0}$$

② **Svuotamento di un serbatoio attraverso un condotto.** Si ze



Scarico di fluido in atmosfera.

La presenza del condotto di scarico di lunghezza l implica la presenza di perdite per attrito.

Equazione di Euler

tira la generica legge "1" e quella di scarico "2":

$$\frac{w_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{w_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{1}{g} \int_{S_1}^{S_2} \frac{\partial w}{\partial t} ds + z_0$$

$z_1$  è un pelo libero e lo scarico è in atmosfera  $\Rightarrow p_1 = p_2 = p_0$

$z_2 = z_{rif} = 0$        $A_2 \ll A_1 \rightarrow$  riduci nelle condizioni di pioggia  $\rightarrow \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{dw}{dt} = 0 \Rightarrow$  apertura di scarico

N.B. La velocità è costante nel tempo, ma varia da quota a quota, per il rispetto della conservazione della portata volumetrica!!!.

Per la conservazione della portata:  $w_1 \cdot A_1 = w_2 \cdot A_2 \cdot \Phi$

$$w_1 \propto \frac{A_2}{A_1} \quad A_1 \gg A_2 \rightarrow w_1 \ll w_2 \rightarrow w_1 \rightarrow 0$$

L'eq. di Euler si semplifica in:

$$z_1 = \frac{w_2^2}{2g} + z_0$$

Tuttavia le perdite di carico concentrate e quelle distribuite nel serbatoio,  $z_a$  si riduce alle perdite di carico distribuite nel condotto  $l$ :

$$z_a = \lambda \cdot \frac{w_2^2}{2g \cdot d} \cdot l$$

$$\rightarrow z_1 = \frac{w_2^2}{2g} \left( 1 + \lambda \frac{l}{d} \right) \rightarrow w_2 = \sqrt{2g z_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda \frac{l}{d}}} \quad (1)$$

Per conoscere la legge temporale di svuotamento, dobbiamo esprimere  $w_2$  in funzione di  $t$ .

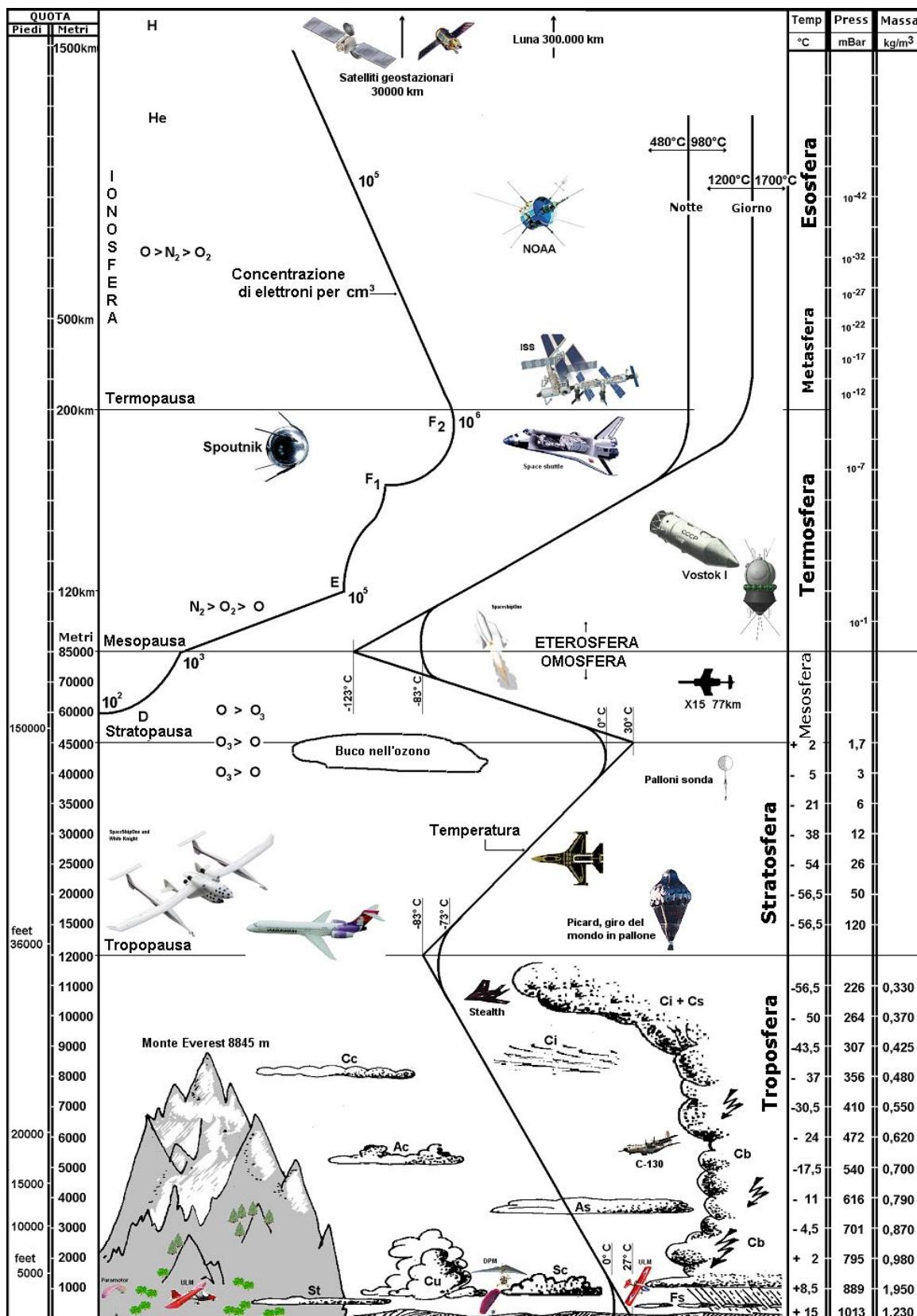
Conservazione dello. massa  $\rightarrow w_1 A_1 = w_2 A_2 \rightarrow w_2 = w_1 \cdot \frac{A_1}{A_2}$

$$\text{ma } w_1 = - \frac{dz_1}{dt} \rightarrow w_2 = - \frac{dz_1}{dt} \cdot \frac{A_1}{A_2}$$

INIZIAMO UN NUOVO CAPITOLO, IL 4 "MOTO DEI FLUIDI CON PROPRIETÀ FISICHE VARIABILI"

Come primi caso analizziamo il caso della distribuzione di temperatura in atmosfera

## Andamento della temperatura nell'atmosfera terrestre



A livello del terreno si assume mediamente  $15^{\circ}\text{C}$  e  $1013 \text{ bar}$ .

Strato di **troposfera** fino a circa 12000m.

Si osservino gli altri strati in figura.

C'è uno stato noto come stratopausa (pausa per la costanza della temperatura) tra la mesosfera e la stratosfera.

C'è la termopausa a circa 200 km e si vede l'altezza della ISS tra i 200 e 400 km.

Oltre c'è la metasfera e l'esosfera nota anche come ionosfera per via degli ioni liberi.

La temperatura dal terreno tra 0°C e 27°C diminuisce continuamente fino a 12 km, cioè nell'atmosfera standard (fino a 11 km). La diminuzione lineare arriva circa a  $-83^{\circ}\text{C} / -73^{\circ}\text{C}$ . Poi nella tropopausa la temperatura è costante e riaumenta nella stratosfera arrivando a  $0 \div 30^{\circ}\text{C}$  per poi diminuire di nuovo nella mesosfera fino ad un range  $-83 \div -123^{\circ}\text{C}$ .

Nella termosfera aumenta linearmente fino ad una temperatura che varia tra  $1200 \div 1700^{\circ}\text{C}$  di giorno e di  $480 \div 900^{\circ}\text{C}$  di notte.

La troposfera è chiamata **atmosfera standard** in cui la temperatura viene assunta mediamente di  $15^{\circ}\text{C}$  per  $z = 0$  e  $-56,5^{\circ}\text{C}$  a **11 Km**.

Quindi possiamo dire che ad una certa quota, essendo lineare, si ha  $T = T_0 - az$ , dove  $T_0 = 15^{\circ}\text{C}$ .

Consideriamo come sistema termodinamico un cilindro alto  $z$  che contiene atmosfera

Supponiamo (ipotesi non verificata e generalmente sbagliata) che l'atmosfera sia **isoterma** e applichiamo Bernoulli:

$$\cancel{dz_a} + \cancel{dz_f} + \frac{dp}{\gamma} + \cancel{\frac{dw}{2g}} + dz = 0$$

Dove non ci sono variazioni di energia cinetica se il fluido è fermo, non ci sono organi motori

$(z_f = 0)$  e supponiamo trascurabile  $z_a$  allora :

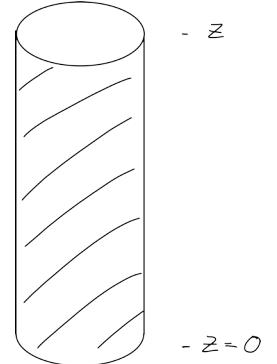
$$\frac{dp}{\rho g} = - dz \rightarrow \frac{dp}{\rho} = - g dz$$

Supponiamo quindi di avere a che fare con un gas perfetto

$$\frac{p}{\rho} = RT \rightarrow \rho = \frac{p}{RT}$$

Sostituiamo ed integriamo:  $\frac{dp}{\rho} RT = - g dz \rightarrow RT \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = - g (z - z_0)$

Allora  $\frac{p}{p_0} = e^{-\frac{gz}{RT}}$  è un esponenziale decrescente.



Questo è il valore di primo tentativo della variazione della pressione nel caso di atmosfera isoterma, che, nonostante parta da un'ipotesi sbagliata, è utile per avere un ordine di grandezza.

Andando a ricavare l'andamento della densità:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{RT\rho}{RT\rho_0} e^{-\frac{gz}{RT}} \text{ e allora } \frac{\rho}{\rho_0} = e^{-\frac{gz}{RT}}, \text{ cioè la variazione di densità è uguale alla variazione di pressione}$$

Adesso però rimuoviamo l'**ipotesi di temperatura isoterma** e consideriamo la **legge (sperimentale)** della temperatura in funzione di  $z$  nella troposfera  $T = T_0 - az$

$$\text{E otteniamo } \frac{dp}{p} RT - g dz \rightarrow \frac{dp}{p} = - \frac{g}{R} \frac{dz}{T_0 - az} = \frac{g}{aR} \frac{d(T_0 - az)}{T_0 - az}$$

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{g}{aR} \ln\left(\frac{T_0 - az}{T_0}\right)$$

$$\text{Allora } \frac{p}{p_0} = \left(\frac{T_0 - az}{T_0}\right)^{\frac{g}{aR}}, \text{ così possiamo correggere l'andamento della pressione}$$

La stessa cosa si può fare con la densità:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{RT\rho}{RT\rho_0} = \left(\frac{T_0 - az}{T_0}\right)^{\frac{g}{aR}}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{T_0}{T} \left(\frac{T_0 - az}{T_0}\right)^{\frac{g}{aR}} = \frac{T_0}{T_0 - az} \left(\frac{T_0 - az}{T_0}\right)^{\frac{g}{aR}} = \left(\frac{T_0 - az}{T_0}\right)^{\frac{g}{aR}-1}$$

$$\text{Allora } \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T_0 - az}{T_0}\right)^{\frac{g}{aR}-1}$$

Cioè abbiamo l'andamento di pressione e densità per un andamento di temperatura assunto lineare.

Facciamo ora l'ipotesi del **sistema adiabatico** ed è ragionevole considerando che ad ogni livello di  $z$  la temperatura è uniforme e quindi non ci sarà scambio per la direzione ortogonale a  $z$

$$\text{Allora torniamo a } \frac{dp}{\rho} = -g dz \rightarrow v dp = -g dz$$

E se supponiamo che il fluido cambia i suoi valori con  $z$  in maniera reversibile e senza scambio di calore varrà

$$pv^k = p_0v_0^k \rightarrow \left(\frac{v}{v_0}\right)^k = \frac{p}{p_0} \rightarrow \frac{v}{v_0} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{k}}$$

Sostituiamo:

$$v_0 \frac{p_0^{1/k}}{p^{1/k}} dp = -g dz$$

$$v_0 p_0^{1/k} \int_{p_0}^p p^{-1/k} dp = v_0 p_0^{1/k} \frac{p^{1-\frac{1}{k}} - p_0^{1-\frac{1}{k}}}{1 - \frac{1}{k}} = -g \int_0^z dz = -gz$$

$$p^{1-\frac{1}{k}} = -\frac{gz}{k/(k-1)v_0 p_0^{1/k}} + p_0^{1-\frac{1}{k}} = -\frac{gz}{k/(k-1)v_0 p_0^{1/k}} + p_0^{1-\frac{1}{k}}$$

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} = 1 - \frac{k-1}{v_0 p_0 \cdot k} \cdot gz \text{ e considerando } p_0 v_0 = RT_0 \text{ otteniamo } \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} = 1 - \frac{k-1}{RT \cdot k} \cdot gz$$

Inoltre per le trasformazioni adiabatiche possiamo scrivere che:

$$\frac{T_0}{p_0^{\frac{k-1}{k}}} = \frac{T_0}{p^{\frac{k-1}{k}}} \rightarrow T = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} \cdot T_0 \rightarrow \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{T}{T_0}$$

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{k-1}{RT_0 \cdot k} \cdot gz \text{ e allora } T = T_0 - \frac{k-1}{Rk} gz$$

Ciò ci conferma che l'andamento è lineare anche nell'ipotesi di trasformazioni adiabatiche salvo che ora sappiamo che la costante è  $a = \frac{k-1}{Rk} g$

Nel caso dell'atmosfera adiabatica abbiamo trovato un risultato simile a quello dell'atmosfera standard ( $T = T_0 - gz$ )

$$T = T_0 - \frac{k-1}{Rk} gz = T_0 - \frac{g}{Rz} + \frac{g}{kR} z$$

Volendo riportare l'altitudine fino a 11 km e la temperatura  $T$  si vede come l'andamento dell'atmosfera standard stanno sulla curva con le x rosse dove il  $k$  è tale che  $k = 1,235$ .

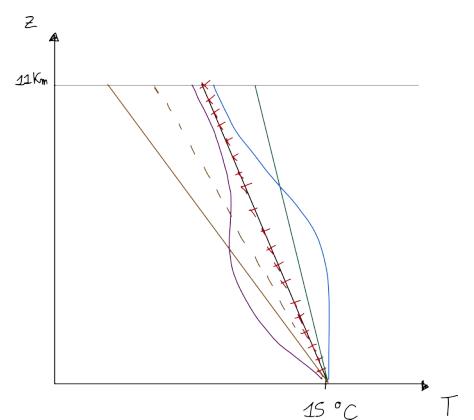
Se invece riporto gli andamenti della temperatura nell'ipotesi di temperatura adiabatica con il  $k$  dell'aria  $k = 1,3 \div 1,4$

Possiamo considerare vari  $k$  e si vede come per 1,4 ottengo il minimo, per 1,2 il massimo e per 1,3 un valore intermedio. Mentre per far coincidere con il valore sperimentale devo prendere  $k = 1,235$

Quindi l'atmosferica adiabatica è una buona approssimazione ma con un  $k$  diverso da quello dell'aria.

Andando sul libro sono riportati vari andamenti di temperatura misurate durante alcuni voli e sono mostrati nella curva viola quelli misurati in inverno e in estate quelli della curva azzurra. A 11 km i valori quasi coincidono.

In conclusione si vede come d'estate la temperatura è superiore dell'atmosfera e quindi l'aria sale. Si può tener conto di questo con l'equazione di Bernoulli.



Considerando una corrente ascensionale di aria nel nostro sistema di riferimento cioè l'aria più calda nel terreno d'estate. Riprendendo Bernoulli nella forma differenziale:

$$w dw + g dz + gdz_a + \frac{dp}{\rho} + gdz_f = 0$$

Dove supponiamo  $dz_f = 0$

E vediamo come integrarla.

Supponiamo che il gas sia perfetto e facciamo il differenziale dell'equazione di stato:

$$pv = RT \rightarrow p dv + v dp = RdT \Rightarrow v dp = RdT - p dv$$

Sostituendo ed otteniamo:

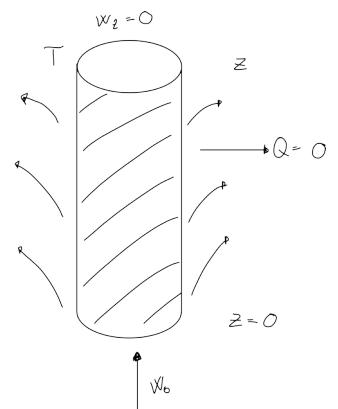
$$RdT = p dv - w dw - g dz - dgz_a$$

$$R(T - T_0) = -g(z - z_0) - gz_a + \int_0^z p dv - \frac{w_z^2 - w_0^2}{2}, \text{ dove considero } w_2 = 0$$

poiché all'altezza  $z$  il fluido si ferma

$$\text{Allora } T = T_0 - \frac{g}{R}z + \frac{1}{R} \int_0^z p dv - gz_a + \frac{w_0^2}{2}$$

Questo ci dà una prima indicazione di come posso aumentare la temperatura, specialmente d'estate.



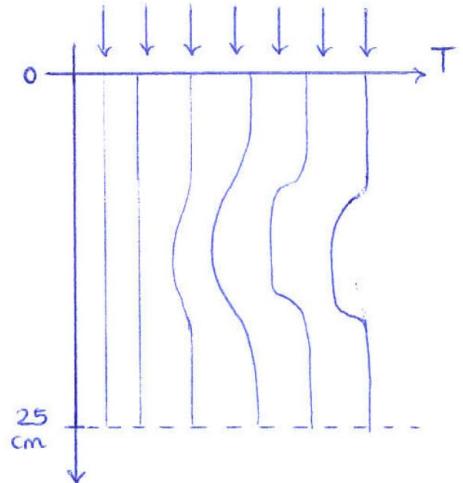
### Esempio: Riscaldamento a microonde del pavimento delle autostrade.

Per poter ripavimentare il manto autostradale si deve prima rimuovere 25 cm di asfalto con delle frese.

Riscaldando il pavimento con le microonde si riesce ad arrivare a sufficiente profondità (ad esempio rispetto all'utilizzo degli infrarossi).

L'andamento delle microonde nello strato di 25 cm di asfalto è quello riportato in figura.

Le microonde quando incontrano l'asfalto lo scaldano, poi l'onda eletromagnetica viene assorbita e si ha una diminuzione di temperatura; infine più a fondo, a causa della presenza dell'acqua si ha di nuovo un aumento della temperatura.



Così CHIUDIAMO IL PARAGRAFO E NELLA PROSSIMA LEZIONE ANDREMO AD AFFRONTARE IL METANODOTTO

giovedì 29 ottobre 2020 - Esercitazione 2

# Esercitazione

Avevamo già impostato questo esercizio.  
Abbiamo capito come disegnare il ciclo inverso.

Dobbiamo quindi ricavare  $p_2 = p_3$  imponendo il rendimento di 0,43

Avevamo detto che:

$$\eta = \frac{q_{2-3}}{|l_m|} = 0,43 \Rightarrow \eta = f(\beta)$$

Dove la fase utile è 2->3 e quindi dobbiamo vedere anche il lavoro netto, somma dei contributi di tutte le reazioni:

$$l_m = l_{1-2} + l_{2-3} + l_{3-4} + l_{4-1}$$

$$q_{2-3} = c_p (T_3 - T_2)$$

Vediamo i vari contributi:

TRASFORMAZIONE 1-2 :

$$l_{1-2} = \int_1^2 P dV$$

OSSERVAZIONE: sistema chiuso  $SL = PdV - TS_{1S}$  e se la traf. è reversibile  $\delta S = 0 \rightarrow SL = PdV$

politropica gas perfetto:  $PV^n = \text{cost} = P_1 V_1^n = P_2 V_2^n \Rightarrow P = \frac{\text{cost}}{V^n}$

$$\text{allora } l_{1-2} = \int_1^2 \text{cost} \frac{dV}{V^n} = \text{cost} \left[ \frac{1}{-n+1} V^{-n+1} \right]_1^2 = \text{cost} \left( \frac{1}{-n+2} \right) \left( V_2^{-n+1} - V_1^{-n+2} \right)$$

Vediamo come questa costante deve moltiplicare sia la situazione 1 che la situazione 2 quindi conviene immaginarla come  $P_1 V_1$  quando moltiplica  $V_2$  e come  $P_1 V_1$  quando moltiplica  $V_1$ .

$$l_{1-2} = \frac{1}{-n+1} \left( P_2 V_2^{-n+1} - P_1 V_1^{-n+2} \right) = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{-n+1} = \frac{R T_2 - R T_1}{-n+1} = \frac{R}{-n+1} (T_2 - T_1)$$

gas perfetti      incognita

Vale anche  $PV^n = \text{cost}$  o  $\underbrace{\frac{T}{P^{\frac{n-1}{n}}}}_{\text{cost}} = \text{cost}$  o  $T V^{m-2} = \text{cost}$

$$\frac{T_2}{P_2^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{T_1}{P_1^{\frac{n-1}{n}}} \Rightarrow T_2 = T_1 \left( \frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{n-1}{n}} = T_1 \beta^{-\frac{n-1}{n}}$$

$$\Rightarrow l_{1-2} = \frac{R}{-n+1} T_1 \left( \beta^{-\frac{n-1}{n}} - 1 \right)$$

Così il lavoro è funzione solo di  $\beta$ 

Passiamo agli altri lavori:

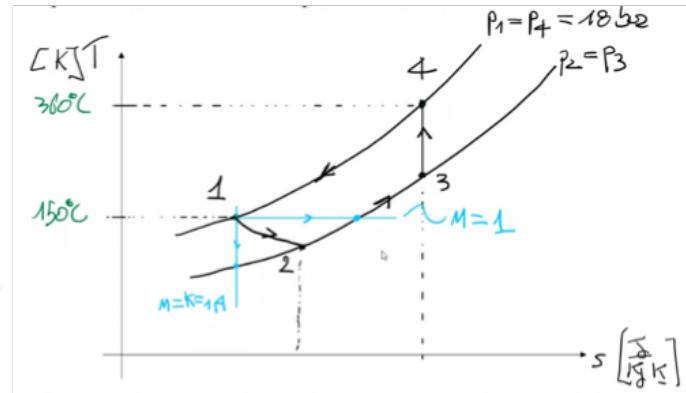
TRASF 2-3 :

$$l_{2-3} = \int_2^3 P dV = P_2 (V_3 - V_2) \xrightarrow{P_2 = P_3} P_3 (V_3 - V_2) = R (T_3 - T_2)$$

$$\text{vole l'isentropica } (3 \rightarrow 4) \text{ e allora } \frac{T_3}{P_3^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{T_4}{P_4^{\frac{n-1}{n}}} \Rightarrow T_3 = T_4 \left( \frac{P_3}{P_4} \right)^{\frac{n-1}{n}} = T_4 \beta^{-\frac{n-1}{n}}$$

$$\Rightarrow l_{2-3} = R (T_4 \beta^{-\frac{n-1}{n}} - T_3 \beta^{-\frac{n-1}{n}})$$

Vediamo ancora gli altri lavori:



TRASF 3-4 Abbiamo una trasformazione isoentropica, e allora:

$$l_{3-4} = \int_3^4 p dV \quad \text{con} \quad pV^k = \text{cost} \implies l_{3-4} = \frac{\overbrace{p_4 V_4}^{RT_4} - \overbrace{p_3 V_3}^{RT_3}}{-k+1} = \frac{R}{-k+1} T_3 \left( \beta^{-\frac{k-1}{k}} - 1 \right)$$

Dovremmo scrivere  $T_3-T_4$ , ma sostituiamo  $T_4$ .

Senza rifare tutti i passaggi si vede come abbiamo lo stesso risultato di prima con  $k$  al posto di  $n$ .

TRASF 4-1 Nuovamente lungo un'isobara e allora il lavoro sarà  $R \cdot \Delta T$

$$l_{4-1} = \int_1^4 p dV = R(T_1 - T_4)$$

$$\text{Inoltre } q_{23} = c_p (T_3 - T_2) + c_p \left( T_4 \beta^{-\frac{k-1}{k}} - T_1 \beta^{-\frac{n-1}{n}} \right)$$

$$\eta = \frac{q_{23}}{|l_{n1}|} = \frac{q_{23}}{-(l_{12} + l_{23} + l_{34} + l_{41})} = 0,43 \quad \text{con} \quad \eta = f(p)$$

Dobbiamo prendere il lavoro netto in modulo e quindi ci va il meno poiché abbiamo un ciclo inverso e mentre il  $q_{23}$  è assorbito e quindi nella convenzione dei segni è positivo il lavoro netto è negativo poiché percorso in senso orario.

Ovviamente il rendimento negativo non avrebbe senso!

NOTA Si osservi che  $l_{n1} \cdot q_m$  è lavoro si poteva scrivere  $\eta = \frac{q_{23}}{|q_m|}$  con  $q_m = q_{32} + q_{23} + q_{34} + q_{41}$

$$q_{12} - l_{12} = \Delta u + u_2 - u_1 = c_v (T_2 - T_1) \quad \leftarrow \text{primo principio per sistemi chiusi}$$

↑  
per gas perfetti

$$\rightarrow q_{12} = l_{12} + c_v (T_2 - T_1)$$

↳ da scrivere sempre con la poltropica come priva

$$q_{23} = c_p (T_3 - T_2)$$

$$q_{34} = 0$$

$$q_{41} = c_p (T_4 - T_1)$$

Si poteva quindi risolvere anche scrivendo i calori scambiati

In ogni caso si arriva ad un'equazione in  $\beta$  e allora facciamo un cambio di variabile  $x=1/\beta$

$$\underline{x = \beta^{-1}}$$

Dalle precedenti:

$$\begin{aligned} l_{1-2} &= \frac{R}{1-n}(T_2 - T_1) = \frac{R}{1-n} T_1 \left( x^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right) & C_1 x^\alpha + C_2 x^{\frac{\alpha}{2}} + C_3 = 0 \\ l_{2-3} &= R(T_3 - T_2) = R \left( T_4 x^{\frac{k-1}{k}} - T_1 x^{\frac{n-1}{n}} \right) & \alpha = \frac{k-1}{k} = 2 \cdot \frac{n-1}{n} \\ l_{3-4} &= \frac{R}{1-k}(T_4 - T_3) = \frac{R}{1-k} T_4 \left( 1 - x^{\frac{k-1}{k}} \right) & C_1 = RT_4 \left[ \eta \left( 1 - \frac{1}{1-k} \right) - \frac{7}{2} \right] = RT_4 \left[ \eta \left( \frac{k}{k-1} \right) - \frac{7}{2} \right] \\ l_{4-1} &= R(T_1 - T_4) & C_2 = RT_1 \left[ \eta \left( \frac{1}{1-n} - 1 \right) + \frac{7}{2} \right] = RT_1 \left[ \eta \left( -\frac{n}{n-1} \right) + \frac{7}{2} \right] \leftarrow \\ q_{23} &= c_p(T_3 - T_2) = \frac{7}{2} R(T_3 - T_2) = \frac{7}{2} R \left( T_4 x^{\frac{k-1}{k}} - T_1 x^{\frac{n-1}{n}} \right) & C_3 = R \eta \left[ T_1 \left( 1 - \frac{1}{1-n} \right) + T_4 \left( \frac{1}{1-k} - 1 \right) \right] = R \eta \left[ T_1 \frac{n}{n-1} - T_4 \frac{k}{k-1} \right] \end{aligned}$$

$$\text{dove } \alpha = \frac{2k}{k+1} \quad n = \frac{k-1}{k} \quad \frac{n-1}{n} = \frac{2k-k-1}{2k} = \frac{1}{2} \quad \frac{k-1}{k} = \frac{\alpha}{2} \quad \text{dove } \alpha = \frac{k-1}{k}$$

$$\underline{x^{\alpha_2} = y}, \quad x^{\alpha} = y^2 \Rightarrow C_1 y^2 + C_2 y + C_3 = 0$$

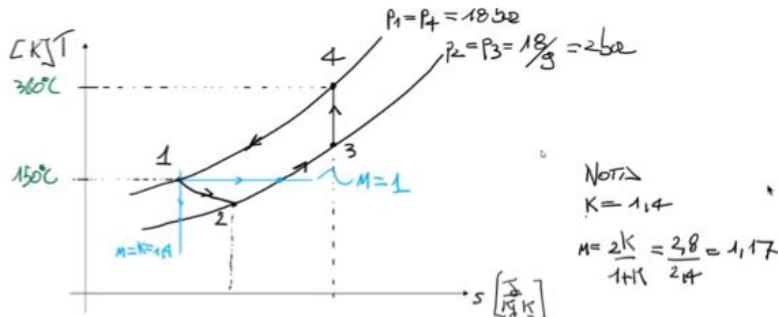
Si ottiene quindi un'equazione di secondo grado e si trovano due possibili valori di  $\beta$ :

$$\begin{aligned} \beta_2 &= 3 \\ \beta_2 &= 1,02 \cdot 10^6 \end{aligned}$$

Sono entrambi ragionevoli ma prendiamone uno e andiamo a riportarlo:

$$\beta = 3$$

$$\text{in quanto } \beta = P_1/P_2 \Rightarrow P_2 = 2 \text{ bar}$$



Adesso manca da ricavare gli stati termodinamici, quindi  $T_2$  e  $T_3$  ma basta sostituire  $\beta$  in quanto:

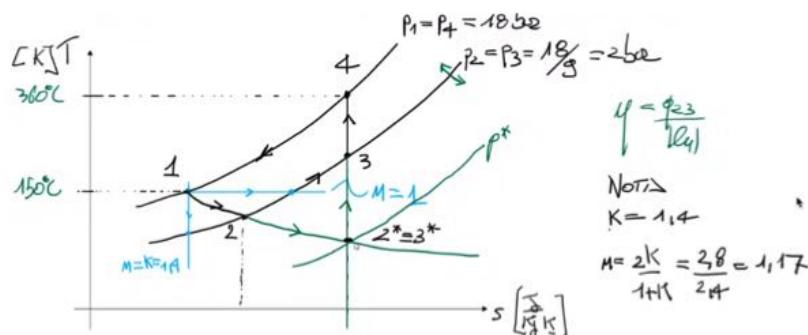
$$T_2 = T_1 \beta^{-\frac{M-1}{M}} \quad \text{e} \quad T_3 = T_4 \beta^{-\frac{M-1}{M}}$$

Il testo chiede ancora di determinare il rapporto di compressione per cui è minimo il rendimento allora potremmo derivare:

$$\eta = f(\beta) \Rightarrow \frac{d\eta}{d\beta} \geq 0 \Rightarrow \beta_{min}$$

Tuttavia otterremo un'eq difficile da risolvere.

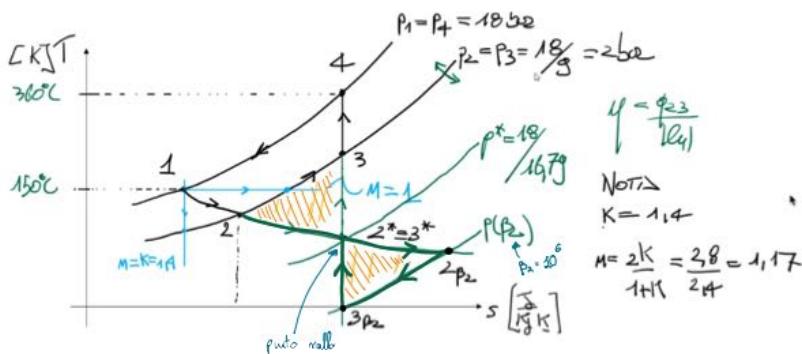
Ragionando sul ciclo si vede come al variare di  $\beta$  e quindi della curva inferiore dobbiamo cercare un minimo. Si vede come il rendimento diminuisce con la curva che scende verso il basso. Prolungando le due curve si ottiene una pressione particolare  $p^*$  dove si verifica che  $2^*$  coincide con  $3^*$  e allora quando si verifica questo il lavoro netto del ciclo è aumentato ma il  $q_{23}$  si riduce a zero e quindi si ha il minimo del rendimento.



$$\text{Allora impongo } q_{2^*3^*} = 0 \quad \text{ovvero} \quad T_{2^*} = T_2 \beta_*^{-\frac{M-1}{M}} = T_{3^*} = T_4 \beta_*^{-\frac{M-1}{M}} \Rightarrow \beta_* = 16.73$$

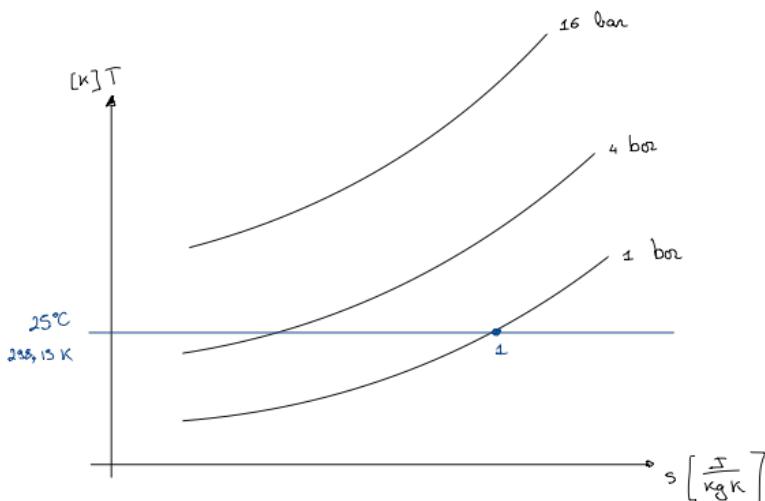
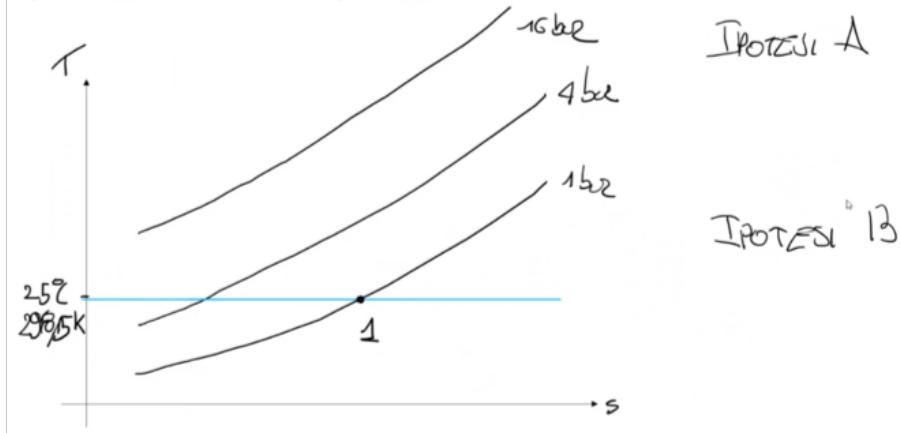
$$\text{e} \quad \beta^* = \frac{18}{16.73}$$

L'altro valore ottenuto per  $\beta$  rappresenta una condizione in cui nel ciclo le due aree in giallo sono uguali e l'aumento di lavoro netto è bilanciato dall'altro. Inoltre il ciclo (andando oltre  $T_2^*=T_3^*$ ) cambia verso di percorrenza e quindi il ciclo sta cedendo calore e perde significato.



Numericamente le cose tornano ma è privo di significato

Si vuole comprimere aria (da considerare gas perfetto) da 1 bar e 25 °C fino alla pressione di 16 bar. Si confronti, in termini di lavoro specifico reale, la possibilità di compiere un'unica compressione, con quella di realizzarne due: una intermedia fino a 4 bar, un successivo raffreddamento isobaro (con variazione di entropia pari a 450 J·kg⁻¹K⁻¹), infine la seconda compressione fino ai richiesti 16 bar. Considerare per ogni compressore un rendimento isoentropico pari a 0.8. Rappresentare qualitativamente le trasformazioni sul diagramma  $T-s$ .



Riportiamo le isobare dove si ricordi che si deve apprezzare come le isobare siano divergenti tra loro per entropie crescenti, ovvero che via via la distanza tra le isobare deve crescere aumentando l'entropia.

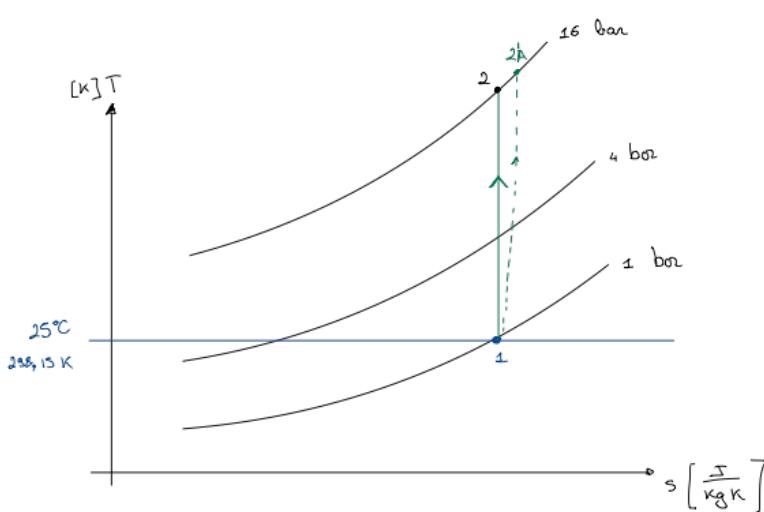
IPOTESI A :

Partiamo dall'ipotesi di una sola compressione, sarà una trasformazione **isoentropica** in quanto in un compressore non ci sono scambi di calore:

OSS. Partendo da  $\delta q - \delta q_f = dh + d\delta f + d\delta c$

+ hp. d' adiabatica  $\xrightarrow{\text{REVERSIBILE}} \xrightarrow{\text{isoentropica}}$   $\xrightarrow{\text{IRREVERSIBILE}} \xrightarrow{\text{ADIABATICA}}$

$$dS = \frac{\delta q}{T} + dS_s > 0$$

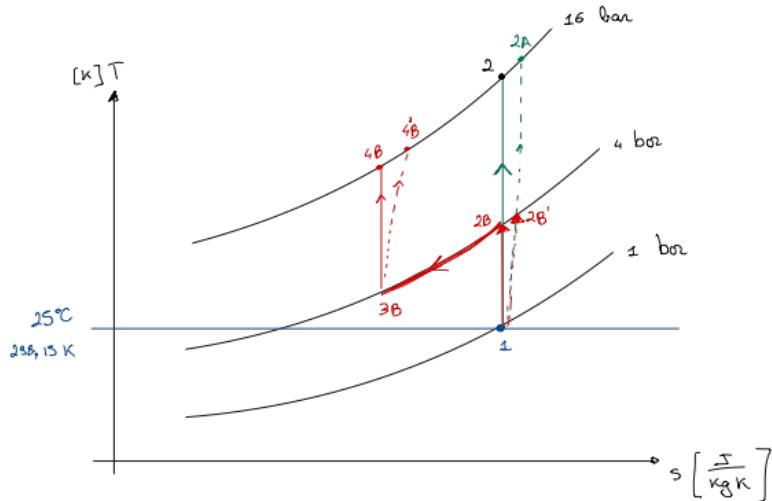


Dove 2 rappresenta la rappresentazione ideale isoentropica.

Tuttavia noi consideriamo un rendimento isoentropico di 0.8 quindi la trasformazione reale si troverà verso destro, 2'A, ad entropia crescente.

Nel compressore la sorgente entropica è proprio la trasformazione di energia con cui si ottiene la differenza di pressione e in questo passaggio c'è l'attrito del fluido nel compressore che si dissipa sottoforma di calore.

Nel caso delle due compressioni invece si ha:



$$l_A = l_{1-2A}$$

$$l_B = l_{B1-2B} - l_{B3B-4B}$$

$$l_A \stackrel{?}{\geq} l_B \quad \leftarrow \text{ci chiediamo quindi quale dei due lavori è più grande}$$

Per l'ipotesi A:  $l_A = l_{1-2A} = - (h_{2A} - h_1) = - c_p (T_{2A} - T_1)$

↑ compresa

gas perfetto  $\Delta h = c_p \Delta T$  DOPPIAMO RICAVARLO

OSS:  $l_{1-2A} = \int_1^{2A} (-v dp - T \delta s) \quad \leftarrow \text{avremmo anche potuto scriverlo così ma sarebbe stato impossibile da utilizzare}$

Con i rendimenti isoentropici per ricavare le condizioni reali si passa sempre da quelle ideali

$$\eta_{sc} = \frac{l_{id}}{l_r} = \frac{-\Delta h_{id}}{-\Delta h_r} = \frac{-(h_{2A} - h_1)}{-(h_{2'A} - h_1)} = \frac{c_p / (T_{2A} - T_1)}{c_p / (T_{2'A} - T_1)} = 0,8$$

↑ vogliamo calcolare  $T_{2'A}$  incognita

Il rendimento di un compressore (o di una turbina) è scritto per venire minore uguale a 1 e quindi al numeratore ci sarà il lavoro ideale. Questo rapporto di lavoro è un rapporto di entalpie

Sfruttiamo il fatto che abbiamo un isoentropica di un gas perfetto tra 1 e 2A e allora:

$$\frac{T_{2A}}{T_{2A}^{\frac{k-1}{k}}} = \frac{T_1}{T_1^{\frac{k-1}{k}}} \longrightarrow T_{2A} = T_1 \left( \frac{P_{2A}}{P_1} \right)^{\frac{1}{k-1}} = (25 + 273,15) \cdot 10 \cdot \left( \frac{16}{1} \right)^{\frac{1}{1.4-1}} = \dots = 658,37 \text{ K}$$

cioè  $T_{2A} = 658,37 \text{ K}$

$$T_{2A} = T_1 + \frac{T_{2A} - T_1}{\eta_{sc}} = 748,42 \text{ K} > T_{2A} \checkmark$$

$$l_A = -c_p (T_{2A} - T_1) = -c_p \frac{(T_{2A} - T_1)}{\eta_{sc}} = -453,4 \text{ kJ/kg}$$

↑ poteva essere scritto anche così senza passare per  $T_{2'A}$

OSS:

$$l_{id} = -c_p (T_{2A} - T_1) = -c_p \Delta T = \int_1^{2A} -v dp = \dots$$

↑ RICAVARE con  $p v^k = \text{cost}$  e  $R = c_p - c_v$  e  $k = c_p/c_v$

Il lavoro ideale (manca quindi il termine entropico) si può calcolare anche con l'integrale e ritorna sempre  $c_p \Delta T$

Per l'ipotesi B:

$$l_{B1} = l_1 \cdot z_B = -c_p(T_{2'B} - T_1)$$

$$\eta_{sc} = 0,8 = \frac{c_p(T_{2B} - T_1)}{c_p(T_{2'B} - T_1)} \Rightarrow T_{2B} = T_1 + \frac{T_{2B} - T_1}{\eta_{sc}}$$

ISOENTROPICA

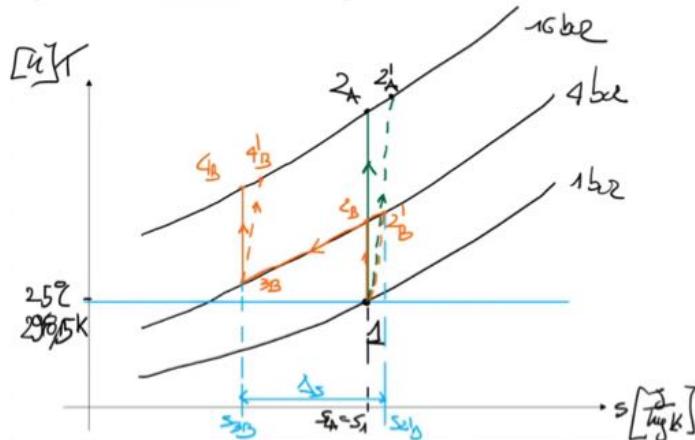
$$\frac{T_{2B}}{T_1} = \left( \frac{P_{2B}}{P_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \Rightarrow T_{2B} = 238,15 \text{ K} \cdot \left( \frac{1,4}{1,2} \right)^{\frac{1,4-1}{1,4}} = 443,05 \text{ K}$$

$$\Rightarrow T_{2B} = 473,27$$

$$\Rightarrow l_{B1} = -182,4 \text{ KJ/kg} \quad <- \text{ otteniamo quindi il lavoro reale}$$

Adesso siamo arrivati in 2'B e avviene un raffreddamento che ci porterà in 3'B.

Dobbiamo però verificare dove si trova 3'B e sappiamo che facciamo un raffreddamento isobaro di cui ci è nota la variazione di entropia (dato del problema).



NOTA :

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} \quad ds = c_v \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v} \quad dS = c_v \frac{dp}{p} + c_p \frac{dv}{v}$$

Dal testo si evince questa differenza di entropia e allora l'incognita è 3B.

Abbiamo quindi un'isobara per gas perfetto esprimibile con le tre relazioni scritte qui sopra e consideriamo la prima:

Oss

$$\Delta S = S_{3B} - S_{2B} = -450 \text{ J/kgK}$$

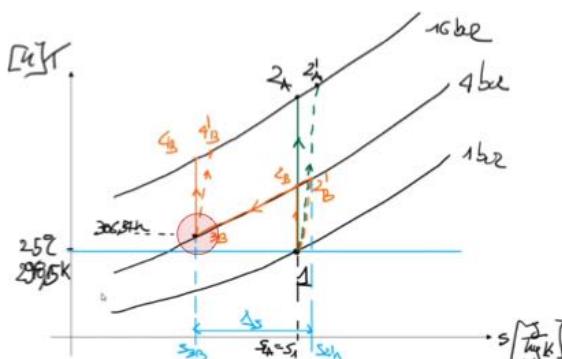
$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} \stackrel{\text{isobara}}{=} c_p \frac{dT}{T} \Rightarrow \int_{2B}^{3B} c_p \frac{dT}{T} = (S_{3B} - S_{2B}) = \Delta S$$

$$c_p \ln \frac{T_{3B}}{T_{2B}} = \Delta S \Rightarrow T_{3B} = T_{2B} e^{\frac{\Delta S}{c_p}} = 306,54 \text{ K}$$

Allora riusciamo ad identificare qualitativamente dove siamo nel grafico.

Si osservi come nell'assegnare il dato c'è stata attenzione affinché si rimanesse sopra la temperatura di 25°C e questo processo della compressione in due step avviene in molti impianti frigoriferi o di liquefazione dove si preferisce fare: compressione → raffreddamento → compressione, ecc

Nel cedere calore questo lo si cede all'ambiente esterno e quindi dobbiamo sempre rimanere sopra questa temperatura (25°C).



Calcoliamo anche l'altro lavoro, mediante il rendimento isoentropico del compressore:

$$l_{B2} = -c_p(T_{4B} - T_{3B}) = -c_p \frac{(T_{4B} - T_{3B})}{\gamma_{Bc}}$$

$$T_{4B} = T_{3B} \cdot \left( \frac{P_{4B}}{P_{3B}} \right)^{\frac{k-1}{k}} = 306,54 \text{ K} \quad \left( \frac{16}{4} \right)^{\frac{1.4-1}{1.4}} = 455,52 \text{ K}$$

$$\Rightarrow l_{B2} = -187,5 \text{ kJ/kg}$$

Possiamo quindi trarre le conclusioni:

IPOTESI A :  $l_A = -453,4 \text{ kJ/kg}$

IPOTESI B :  $l_B = -(184,4 + 187,5) = -371,9 \text{ kJ/kg}$

allora  $|l_B| < |l_A|$

è da preferire l'ipotesi B

Conviene quindi fare una compressione, poi un raffreddamento e poi una seconda compressione.

Gli svantaggi dell'ipotesi B sono che aggiungiamo un componente in più all'impianto

Osserviamo cosa succede nel **diagramma Ts ed hs per alcuni organi aperti notevoli**.

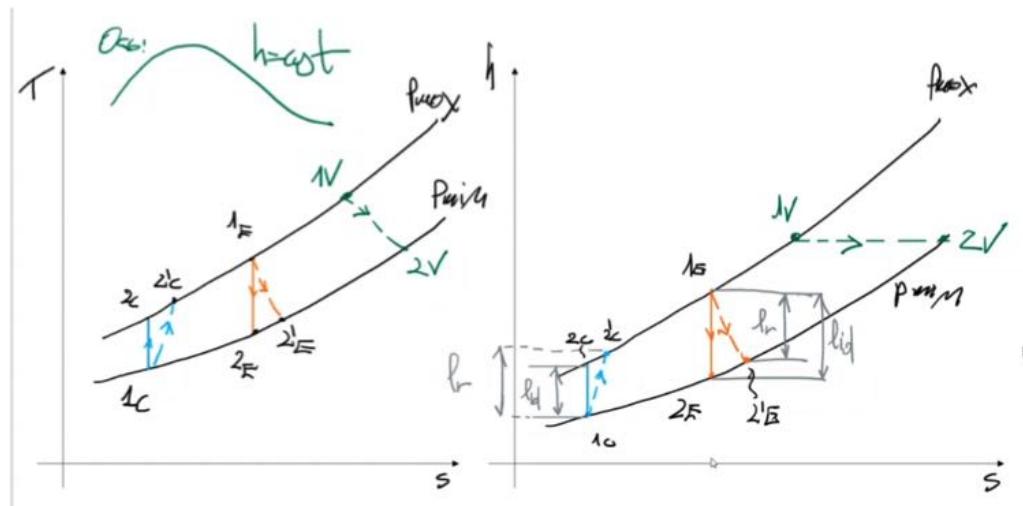
Compressore in azzurro con ingresso 1C che per trasformazione reale c'è un aumento di entropia 2'C. Per una turbina entra da 1E e se reale esce il 2'E anziché 2E.

Per l'entalpia che per un gas perfetto l'isoentalpica assomiglia ad un isoterma mentre per un gas generico entra in una valvola come 1V ed esce in 2V ed è intrinsecamente irreversibile.

Nel piano hs è banale quella ad entalpia costante non isoentalpica 1V → 2V.

Facilmente rappresentabile anche il compressore e la turbina.

Nel diagramma hs si vede bene il lavoro scambiato  $\Delta h$ .





# FISICA TECNICA

## Settimana 7



IL **TRANS ALASKA PIPELINE SYSTEM** (TAPS) È UN OLEODOTTO CHE ATTRAVERSA L'ALASKA.

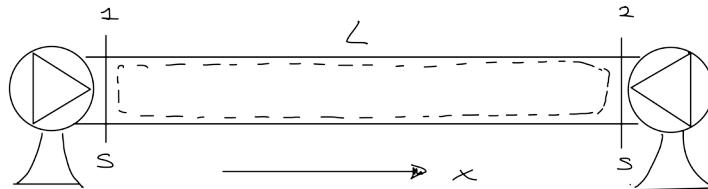
# Indice settimana 7

Indice settimana 7	2
martedì 3 novembre 2020 - Lezione 17	
<i>Metanodotto</i>	3
<i>Tiraggio del caminetto</i>	3
Moto comprimibile e con elevate differenze di pressione	7
mercoledì 4 novembre - Lezione 18	9
<i>Problema del ristagno</i>	10
<i>Misura delle temperatura di un fluido in moto</i>	12
<i>Moto in condotti a sezione variabile con continuità</i>	14
giovedì 5 ottobre - Esercitazione 3	15
<i>Esercitazione</i>	21
	21

## Metanodotto

L'Italia è metanizzata con il gas naturale metano e solitamente utilizziamo questo gas naturale attraverso le condutture che vengono da 2 o 3 metanodotti. Uno viene dall'Algeria-Tunisia, un altro viene dalla Siberia passando per l'Olanda. Il problema è che c'è del gas che scorre in un condotto spesso a sezione circolare e a causa delle perdite di pressione distribuite e concentrate necessita di essere ricompresso dopo una certa distanza.

In figura:



A sx la pompa a monte che dà la prevalenza al fluido necessaria per attraversare il condotto e dopo una distanza L dobbiamo rimettere un altro compressore nella sezione 2, a monte del compressore. Consideriamo una sezione circolare di diametro D e un asse x che va da 0 a L.

Affrontiamo questo problema per approssimazioni successive, cioè partiamo dalle approssimazioni meno corrette che ci permettono di arrivare ad una soluzione veloce (per lo meno per gli ordini di grandezza) per poi affinare le approssimazioni con soluzioni più precise.

Una prima approssimazione è quella di assumere il **moto incomprimibile**, quindi mentre il metano è chiaramente comprimibile vedremo che se le velocità sono abbastanza piccole (molto più piccole di quella del suono) anche il moto di un fluido comprimibile può essere considerato incomprimibile. Ovvero per piccole differenze di pressione si può supporre che corrispondono a variazioni del volume specifico molto piccole e quindi prendiamo volume specifico costante, nonché densità costante.

Si osservi che questo NON è vero nella realtà.

Applichiamo l'equazione di Bernoulli tra 1 e 2:

$$dz_a + \cancel{dz_f} + \frac{dp}{\gamma} + \frac{dw^2}{2g} + \cancel{dz} = 0$$

In cui supponiamo:

- Sezione 1 e 2 alla stessa quota  $dz = 0$
- Assenza di organi meccanici  $dz_f = 0$
- A regime stazionario la portata  $G$  è costante e il moto è incomprimibile, ha la densità  $\rho$  costante e supponiamo la sezione costante, quindi  $G = wS\rho \Rightarrow w = \text{cost} \Rightarrow dw = 0$

Otteniamo:

$$dz_z + \frac{dp}{\gamma} = 0 \text{ e integrando } z_a + \frac{p_2 - p_1}{\gamma} = 0.$$

Cioè  $p_1 - p_2 = \gamma z_a$

La caduta di pressione tra 1 e 2 è uguale al peso specifico del fluido per il carico perso per attrito in cui possiamo considerare sia solo la caduta di pressione distribuita sia perdite concentrate.

E allora troviamo la pressione  $p_2 = p_1 - \gamma z_a$  (noto  $p_1$  e calcolato  $z_a$ )

Questo ci fornisce il valore di prima approssimazione della pressione  $p_2$  nella sezione 2. Questo ci servirà per avere un valore di tentativo da introdurre nelle soluzioni che vedremo nei casi successivi con approssimazioni più corretti.

Adesso invece supponiamo un **moto comprimibile**, in cui il peso specifico può variare, quindi supponiamo la densità non costante anche se la sezione è sempre la stessa la velocità nel condotto varia e quindi  $dw \neq 0, \gamma \neq \text{cost}$

Allora per l'equazione di Bernoulli, otteniamo:

$$z_a + \int_1^2 \frac{dp}{\gamma} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = 0 \text{ cioè } dz_a + \frac{dp}{\gamma} + \frac{dw^2}{2g} = 0$$

Allora supponiamo che ci siano solo perdite distribuite, dal punto di vista ingegneristico si può giustificare nel caso in cui le perdite distribuite siano molto più grandi di quelle concentrate, e quindi  $dz_a = \lambda \frac{w^2}{2g} \frac{dx}{D}$

Inoltre il termine cinetico lo scriviamo come  $\frac{dw^2}{2g} = w \frac{dw}{g}$

Con  $G = wS\rho$  otteniamo  $w = \frac{G}{\rho S} \cdot \frac{g}{g} = \frac{G_p}{\gamma S}$ ,

chiamo  $G_p = gG$  noto come portata in peso e  $\gamma = g\rho$  e allora:

$$dw = -\frac{G_p}{S} \frac{d\gamma}{\gamma}, \text{ con } S = \mathbf{cost} \text{ e } G_p = \mathbf{cost}$$

Riscrivendo allora l'espressione dell'equazione di Bernoulli sostituendo tutti i termini:

$$\frac{\lambda}{2g} \frac{G_p^2}{\gamma^2 S^2} \frac{dx}{D} + \frac{dp}{\gamma} - \frac{G_p}{\gamma S} \frac{1}{g} \frac{G_p}{S} \frac{d\gamma}{\gamma^2} = 0$$

Moltiplichiamo per  $\gamma^2$  e allora:

$$\frac{\lambda}{2g} \frac{G_p^2}{S^2} \frac{dx}{D} + \gamma dp - \frac{G_p}{\gamma S} \frac{1}{g} \frac{G_p}{S} d\gamma = 0$$

Questa è un'espressione in cui 3 termini contengono i 3 differenziali di  $dx$ ,  $dp$  e  $d\gamma$ .

Allora supponiamo nel gas sia un **gas perfetto** e allora  $pV = RT$ , da cui  $p = RT\rho$  allora  $gp = RT\gamma$ , quindi posso scrivere

$$\gamma = \frac{pg}{RT}$$

$$\text{E sostituendo } \frac{\lambda}{2g} \frac{G_p^2}{S^2 D} dx + \frac{pg}{RT} dp - \frac{G_p^2}{S^2} \frac{1}{g} \frac{d\gamma}{\gamma} = 0$$

$$\text{Moltiplicando il tutto per } RT/g \text{ otteniamo } p dp + \underbrace{\frac{\lambda R}{2g^2} \cdot \frac{G_p^2}{S^2 D} \cdot T dx}_{=B} - \underbrace{\frac{R}{g} \cdot \frac{G_p^2}{g S^2} T \frac{d\gamma}{\gamma}}_{=A} = 0$$

$$\text{E allora } p dp + BT dx - AT \frac{d\gamma}{\gamma} = 0$$

$$\text{con } A = \frac{RG_p^2}{g^2 S^2} \text{ e } B = A \frac{\lambda}{2D}$$

Il termine B dipende dai dati geometrici del condotto, dal gas perfetto considerato e dal fattore di attrito  $\lambda$ , si osservi che lo supponiamo costante ma in realtà  $\lambda$  varia a variare del Reynolds. Discorso simile per A ma questo è effettivamente costante.

Questa la posso considerare l'**equazione generale del metanodotto comprimibile** (in cui consideriamo il volume specifico variabile) e si deve integrare sulla base delle trasformazioni che il fluido compie tra 1 e 2.

Suppongo tre ipotesi di trasformazione.

(1) Trasformazione isoterna tra 1 e 2

Ipotesi approssimativa e nella realtà i metanodotti sono interrati con una temperatura più costante ma anche all'esterno con una temperatura più variabile.

Questo però ci permette di integrare facilmente:

$$\frac{p_2^2 - p_1^2}{2} + BTL - AT \ln \left( \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right) = 0, \text{ dove } \ln \left( \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right) = \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right) \text{ poiché } \gamma = \frac{gp}{RT}$$

$$\text{Allora } \frac{p_2^2 - p_1^2}{2} + BTL - AT \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right) = 0$$

Anche se risolve questa equazione nell'incognita  $p_2$  non è molto semplice poiché non si riesce ad esplicitare  $p_2$ . Quindi si risolve per approssimazione successive: si considera un valore e lo si sostituisce in un termine e poi si esplicita l'altro trovando un valore che se risulta diverso lo si rimette nell'altro e si verifica il valore che si ottiene. Si continua finché il valore imposto inizialmente in un termine e quello che viene fuori dall'altro non si differenziano per un valore minore di un certo valore che impostiamo (es possiamo accontentarci di una differenza del 10% tanto siamo già sotto ipotesi abbastanza differenti dal fenomeno reale).

Come valore di primo tentativo possiamo considerare la soluzione di moto incomprimibile, cioè  $p_2 = p_1 - \gamma z_a$ .

(2) Supponiamo una trasformazione adiabatica

Supponendo il metanodotto ben isolato questo non scambia  $q = 0$

$$\text{E allora dall'equazione precedente } \gamma = \rho g = \frac{g}{v} \longrightarrow \frac{d\gamma}{\gamma} = -\frac{dv}{v}$$

$$\text{E allora } \frac{P}{T} dp + B dx + A \frac{dv}{v} = 0$$

Gli ultimi due termini sono integrabili senza problemi e analizzando il primo termine:

Per le trasformazioni adiabatiche abbiamo:

$$\frac{T}{p^{\frac{k-1}{k}}} = \frac{T_1}{p_1^{\frac{k-1}{k}}} \longrightarrow \frac{p dp}{T} = \frac{p}{T_1} p_1^{\frac{k-1}{k}} \frac{dp}{p^{\frac{k-1}{k}}} = \frac{p_1^{\frac{k-1}{k}}}{T_1} p^{1-\frac{1}{k}} dp = \frac{p_1^{\frac{k-1}{k}}}{T_1} p^{\frac{1}{k}} dp$$

$$\text{Allora } \int_1^2 p^{\frac{1}{k}} dp = \frac{1}{\frac{1}{k} + 1} \left[ p^{\frac{1}{k+1}} \right]_1^2 = \frac{1}{\frac{1}{k} + 1} \left[ p_2^{\frac{1}{k+1}} - p_1^{\frac{1}{k+1}} \right]$$

Poi integriamo l'ultimo termine.

$$\text{Abbiamo anche che } p v^k = p_1 v_1^k \text{ e quindi } v^k = \frac{p_1}{p} v_1^k \longrightarrow v = \left( \frac{p_1}{p} \right)^{\frac{1}{k}} v_1$$

$$dv = p_1^{\frac{1}{k}} v_1 \left( -\frac{1}{k} \right) p^{-\frac{1}{k}-1} dp$$

$$\text{Divido per } v \text{ e ottengo: } \frac{dv}{v} = -\frac{1}{k} \cancel{p_1^{\frac{1}{k}}} \cancel{\gamma} p^{-\frac{1}{k}-1} \cdot \frac{p^{\frac{1}{k}}}{\cancel{p_1^{\frac{1}{k}}} \cancel{\gamma}} dp = -\frac{1}{k} \frac{dp}{p}$$

$$\text{Allora } A \int_1^2 \frac{dv}{v} = -\frac{A}{k} \int_1^2 \frac{dp}{p} = -\frac{A}{k} \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right)$$

In definitiva, dall'integrazione dell'equazione di Bernoulli generalizzata per un metanodotto nel caso di trasformazione adiabatica otteniamo:

$$\frac{p_1^{\frac{k-1}{k}}}{T_1} \cdot \frac{k}{k+1} \left[ \cancel{p_2^{\frac{1}{k}+1}} - \cancel{p_1^{\frac{1}{k}+1}} \right] + BL - \frac{A}{k} \ln \left( \frac{\cancel{p_2}}{p_1} \right) = 0$$

nuovamente non è esplicitabile in funzione di  $p_2$  e dobbiamo fare, analogamente al caso precedente, una soluzione per iterazioni successive.

Qui come valore di primo tentativo possiamo prendere quello della soluzione isoterma.

Si osservi che A è una costante mentre B contiene anche il fattore di attrito  $\lambda$  in funzione di Reynolds che a sua volta dipende dalla velocità che dipende dalla pressione e dalla temperatura.

Quindi prendiamo come valore di primo tentativo  $p'_2$  dal caso isoterma e con  $p'_2$  e  $T'_2$  calcoliamo la velocità  $w'_2$ , cioè

$$\text{dall'equazione dell'adiabatica } T'_2 = \frac{T_1}{p_1^{\frac{k-1}{k}}} \cdot p'_2^{\frac{k-1}{k}} \text{ e dal bilancio della portata } G = w'_2 S \rho'_2 = w'_2 S \frac{p'_2}{R T'_2} \text{ da cui possiamo}$$

esplicitare  $w'_2$

$$\text{Possiamo quindi calcolare il numero di Reynolds } Re'_2 = \frac{w'_2 D}{\nu}$$

Da qui possiamo calcolare il fattore di attrito dal diagramma di Moody e quindi poi possiamo calcolare il  $B'$  con cui possiamo calcolare il valore di 2° tentativo della pressione.

(3) caso reale, in cui c'è scambio di calore  $q \neq 0$ .

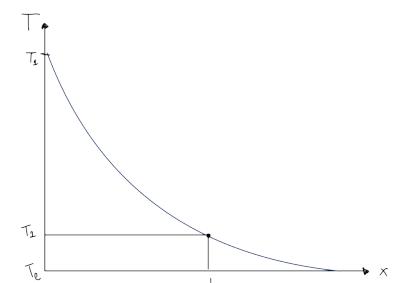
Supponiamo che all'esterno del metanodotto ci sia un temperatura  $T_e$  costante dappertutto e che la temperatura nella sezione 1 sia maggiore,  $T_1 > T_e$

$$T = T_e + (T_1 - T_e) e^{-\alpha x}$$

Questa equazione (vedremo più avanti da dove viene) rappresenta che considerata le

temperature interna  $T_1$  e la temperatura esterna  $T_e$  quella interna tende a portarsi verso la

**termostato** (in quanto  $T_e$  è costante) e  $\alpha$  è un parametro sperimentale.



Tornando all'equazione di Bernoulli:

$$p dp + BT dx - AT \frac{d\gamma}{\gamma} = 0$$

$$\text{Integrando } \frac{p_2^2 - p_1^2}{2} + B \int_1^2 \left[ T_e + (T_1 - T_e) e^{-\alpha x} \right] dx - \int_1^2 AT \frac{d\gamma}{\gamma} = 0$$

Per poter integrare l'ultimo termine esplicitiamo  $d\gamma/\gamma$ :

$$\text{Se } pV = RT \rightarrow gp = RT\gamma \text{ allora } \gamma = \frac{pg}{RT}$$

$$d\gamma = \frac{g}{RT} dp - \frac{pg}{R} \frac{dT}{T^2} \text{ e quindi } \frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{dp}{p} - \frac{dT}{T}$$

$$\text{Sostituendo } -AT \frac{d\gamma}{\gamma} = -AT \frac{dp}{p} + AT \frac{dT}{T} = -AT \frac{dp}{p} + AdT$$

Il secondo termine si integra facilmente mentre il primo termine si può risolvere solo con delle ipotesi semplificate.

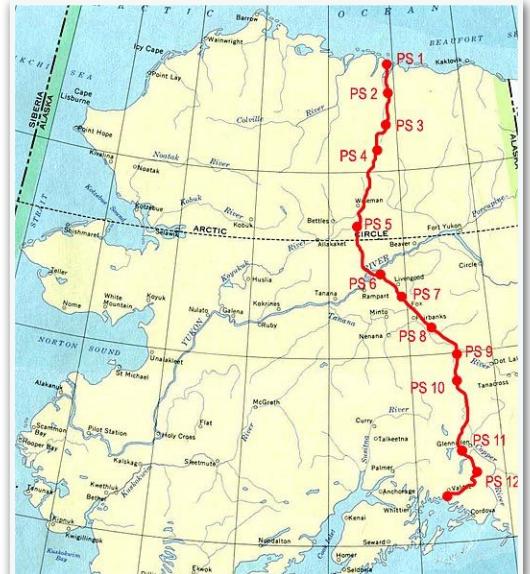
Ipotizzando  $dp/p$  trascurabile rispetto a  $dT/T$  allora il termine non c'è e quindi rimangono solo i tre termini già integrati

$$\frac{p_2^2 - p_1^2}{2} + B \int_1^2 \left[ T_e + (T_1 - T_e) e^{-\alpha x} \right] dx - A(T_2 - T_1) = 0$$

Vedremo però come concettualmente ha senso dire che si può anche considerare una temperatura media  $T_m$  che quindi risulta costante e allora

$$\frac{p_2^2 - p_1^2}{2} + B \int_1^2 \left[ T_e + (T_1 - T_e) e^{-\alpha x} \right] dx - AT_m \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right) + A(T_2 - T_1) = 0$$

$$\text{Dove abbiamo fatto la seguente semplificazione: } \int_1^2 T \frac{dp}{p} \approx T_m \int_1^2 \frac{dp}{p} = T_m \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right)$$



Questo in foto è il monte McKinley, il monte più alto degli stati uniti d'america che si trova in Alaska, dove andava a rilassarsi topolino pescando il salmone. Questo è l'oleodotto trans alaskiano che parte dal mare polare Prudhoe Bay a Valdez.

È un oleodotto ma in concetto è analogo.

C'è un andamento a zig zag per tener conto delle deformazioni estive/invernali. Poggia su un carrello che permette il movimento per le dilatazioni. In figura anche degli strumenti noti come tubi di calore heat pipe che servono per tenere freddo il terreno, cioè il calore viene preso dal terreno e portato fuori poiché se si scongela il terreno crolla tutto il sistema.

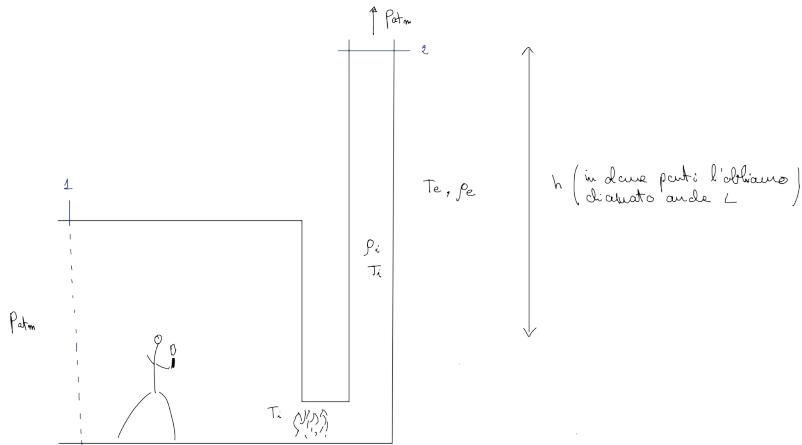
Inoltre ci sono anche delle zone in cui viene interrato poiché fuori è più facile la manutenzione ma è soggetto maggiormente a salti atmosferici (-50 in inverno, +30 in estate) mentre interrato ha una temperatura costante ma sono bloccati i movimenti.

Tuttavia si interra anche perché potrebbe formare una barriera per gli animali che non si sentirebbero sicuri ad attraversarlo solto

## Tiraggio del caminetto

Moto dei fluidi con forti differenze di temperatura.

Consideriamo un omino con fiammifero e un caminetto acceso dove i gas caldi salgono nella canna fumaria per uscire ad una certa altezza  $h$ . Quando si accende il caminetto in inverno la temperatura dei prodotti di combustione è molto superiore a quella esterna e il gas caldo sale perché ha un peso inferiore rispetto la colonna di aria esterna essendo la densità inversamente proporzionale alla temperatura. Questa è la convezione naturale, dove il fluido si muove naturalmente a causa della differenza di densità.



Abbiamo due ipotesi:

La più semplice è quella in cui la temperatura dei combusti sia costante nella canna fumaria (in realtà questo scambia calore con l'esterno).

Ipotesi di **isoterma**,  $T_i \approx \text{cost}$

Scrivendo l'equazione di Bernoulli tra la sezione 1 della stanza e la sezione 2 del comignolo con una differenza di altezza  $h$ , supponiamo che non ci siano ventilatori  $dz_f = 0$  e allora:

$$dz_a + dz_f + dz + \frac{dp}{\gamma_i} + \frac{dw^2}{2g} = 0$$

Osserviamo che se  $\gamma$  è pressoché costante:

$$\gamma = \frac{pg}{RT} = \frac{p_{atm}g}{RT_i} = \text{cost}, \text{ con } T_i = \text{cost} \text{ e } p_{atm} \approx \text{cost}$$

Allora possiamo integrare tra 1 e 2 delimitando il volume di controllo:

$$z_a + z_2 - z_1 + \frac{p_2 - p_1}{\gamma_i} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = 0$$

Se l'ampiezza della stanza è molto maggiore della sezione del camino la velocità  $w_1^2$  è trascurabile rispetto al quadrato della velocità di uscita.

Supponiamo che  $z_a$  si dovuto a perdite di pressione distribuite (non ci sarebbe problema a considerare anche quelle concentrate) e quindi  $z_a = \lambda \frac{w_2^2}{g D} h$

Otteniamo:

$$\lambda \frac{w_2^2}{2g D} h + \frac{w_2^2}{2g} = \frac{p_2 - p_1}{\gamma_i} + z_1 - z_2$$

dove  $p_1 - p_2 = \rho_e g h$ , cioè la differenza di pressione tra la stanza e il comignolo

$$\text{quindi } \underbrace{\frac{w_2^2}{2g} \left( \lambda \frac{h}{D} + 1 \right)}_{\beta} = \frac{\gamma_e h}{\gamma_i} - h$$

Si osservi che nel fattore  $\beta$  possiamo inserire anche tutti i  $\lambda'$ ,  $\lambda''$  per tener conto delle perdite concentrate

$$\text{Allora } \frac{w_2^2}{2g} \beta = h \left( \frac{\gamma_e}{\gamma_i} - 1 \right) = h \left( \frac{T_i}{T_e} - 1 \right) = h \left( \frac{T_i - T_e}{T_e} \right), \text{ con } \beta = \lambda \frac{L}{D} + 1$$

*L o h* SONO LA STESSA COSA, POTREI AVER INVERTITO LE LETTERE!

Questa espressione ci da il senso fisico del problema. Infatti il fluido si muove per convenzione naturale quando accendo il fuoco, altrimenti non si muove niente.

Questa espressione semplificata va bene per dare una prima interpretazione fisica.

$\beta$  è quello che si oppone alla causa effetto.

Considerando la relazione di Ohm  $\Delta V = IR$  potremmo fare un paragone analogo (causa effetto).

In un problema di verifica potrebbe essere che il termine di causa è maggiore del prodotto effetto per resistenza e allora il cammino tira ma potrebbe anche essere che la causa del moto è minore del prodotto per l'effetto della resistenza, quindi il cammino non tira e allora bisogna aumentare il termine di destra con un carico dovuto per esempi ad un ventilatore (tipicamente utilizzato nelle grandi ciminiere).

Passiamo però al **caso reale**, con  $q \neq 0$

Schematizziamo allora il problema considerando direttamente la canna fumaria e ci riconduciamo al problema del metanodotto dove un gas entra a temperatura  $T_0$  e percorre il tubo di altezza  $L$  (o  $h$ ). C'è un salto di temperatura e uno scambio di calore che terrà conto di come è fatta al parete della canna fumaria.

Prendendo allora l'equazione di Bernoulli nel caso del metanodotto che essendo in verticale tiene conto anche del termine  $dz$ . In questo caso lo chiamiamo  $dx$  ed è il quarto termine che quindi tiene conto della differenza di quota:

$$p dp + BT dx - AT \frac{d\gamma}{\gamma} + dx \cdot \frac{gp^2}{RT} = 0$$

Supponiamo nuovamente che la temperatura segua l'andamento esponenziale del problema del termostato, quindi  $T = T_e - (T_0 - T_e) e^{-\alpha x}$

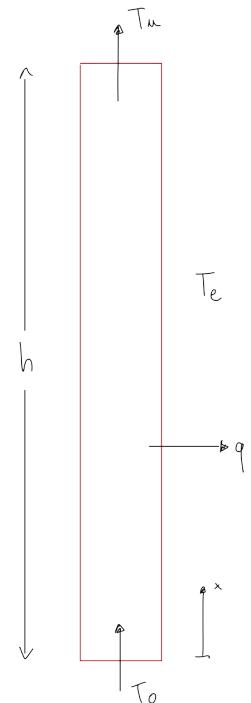
Integrando tutti i termini:

- $\int_0^u p dp = \frac{p_u^2 - p_0^2}{2}$
- $\int_0^u BT dx = B \int_0^u [T - e - (T_0 - T_e) e^{-\alpha x}] dx$ , dove consideriamo  $B = \text{cost}$  nonostante dipenda da  $\lambda$  e quindi dovrà essere verificato per approssimazioni successive

- $\frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{dp}{p} - \frac{dT}{T}$  quindi  $-AT \frac{d\gamma}{\gamma} = -AT \frac{dp}{p} + A dT$  (come nel metanodotto) e quindi  $\int_0^u A dT = A (T_u - T_0)$  e  $\int_0^u AT \frac{dp}{p} = AT_m \ln \left( \frac{p_u}{p_0} \right)$ , questo secondo integrale possiamo considerarlo ingegneristicamente trascurabile poiché la

variazione di altezza  $h$  è relativamente bassa per un caminetto (per ciminiere molto grandi potrebbe non essere trascurabile) altrimenti si considera una temperatura media  $T_m$

- $\int_0^u \frac{gp^2}{RT} dx = \frac{g}{R} p_0^2 \int_0^u \frac{dx}{T} = \frac{gp_0^2}{R} \int_0^u \frac{1}{T_e - (T_0 - T_e) e^{-\alpha x}} dx$ , dove abbiamo supposto che la pressione sia un valore medio  $p_0 = p_{atm} = \text{cost}$

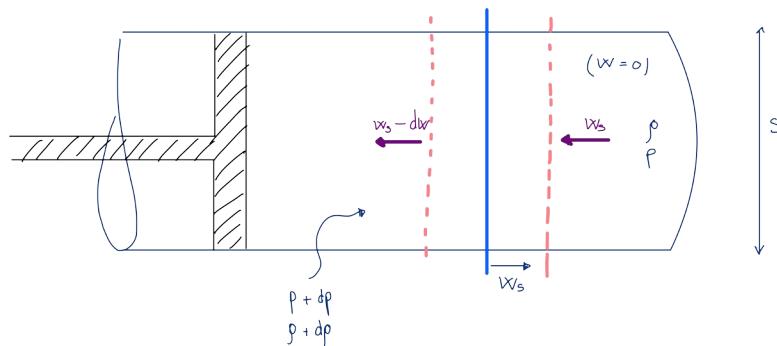


ABBIAMO CONCLUSO IL CAPITOLO "MOTO DEI FLUIDI CON PROPRIETÀ FISICHE VARIABILI" E PASSIAMO AL CAPITOLO SUCCESSIVO "MOTO COMPRIMIBILE E CON ELEVATE DIFFERENZE DI PRESSIONE"

# Moto comprimibile e con elevate differenze di pressione

IN QUESTO CAPITOLO INTRODUCIAMO LA VELOCITÀ DEL SUONO, MOLTO IMPORTANTE PER GLI ING MEDICI IN QUANTO È SUSCETTIBILE DI APPLICAZIONI QUANDO PARLIAMO DI MOTI SUPERSONICI E I PROBLEMI MEDICI INDOTTI NEL CORPO UMANO.

Supponiamo di avere un cilindro come in figura:



Il pistone si muove da sinistra verso destra con velocità  $w_s$  e supponiamo il fluido interno con velocità nulla.

Se il fluido fosse incompressibile il pistone sposterebbe tutto il fluido mentre per un flusso compressibile il moto del pistone produce un'onda (indicata in azzurro) che si muove con la **velocità del suono**, dovuta agli urti tra le singole particelle eccitate da  $w_s$ .

Succede che quindi abbiamo un moto non stazionario in cui un pistone provoca un movimento dell'onda  $w_s$  che quindi si muove da sx verso dx interessando zone del fluido in condizioni iniziali  $w = 0, p$  e  $\rho$

Quindi supponiamo a sinistra le condizioni  $p + dp$  e  $\rho + d\rho$  e a destra  $w = 0, p$  e  $\rho$

Questo è un fenomeno non stazionario ma per studiarlo lo riconduco ad un sistema stazionario quindi lo studio rispetto un sistema che si muove con la stessa velocità  $w_s$  quindi il fluido entra da destra ed esce da sinistra (far riferimento al volume in rosa mettendosi nel riferimento di  $w_s$ ) quindi vedrò questo fluido entrare con proprietà  $w_s, p, \rho$  ed uscire con proprietà  $w_s - dw, p + dp, \rho + d\rho$

Per il principio di conservazione della massa:

$$G_{dx} = G_{sx}$$

$$\rho w_s \delta = (\rho + d\rho) (w_s - dw) \delta$$

$$\cancel{\rho w_s} = \cancel{\rho w_s} - dw \quad p + w_s d\rho - dw d\rho, \text{ dove il differenziale di ordine doppio è trascurabile rispetto agli altri differenziali}$$

$$\text{Allora } \cancel{\rho dw} = w_s d\rho$$

Per la conservazione della quantità di moto:

$$\sum F = \frac{d}{dt} (mw) = \underbrace{\frac{dm}{dt}}_m w + m \cancel{\frac{dw}{dt}}, \text{ dove l'ultimo termine è nullo essendo in un regime stazionario } (w = 0)$$

$$(p + dp) S - pS = \dot{m} w$$

$$p\delta + dp S - p\delta = \dot{m} [w_s - (w_s - dw)]$$

$$dp\delta = \rho w_s \delta (w_s - w_s + dw)$$

$$\text{Allora } \cancel{dp} = \rho w_s dw$$

Mettendo insieme i 2 risultati otteniamo:

$$dp = d\rho w_s^2 \quad \text{quindi } w_s^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad \text{e allora la **velocità del suono** } w_s = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad \text{e si tratta di calcolare questo rapporto in base alle}$$

trasformazioni che si suppone compiano i fluidi

mercoledì 4 novembre - Lezione 18

Vediamo allora come poter calcolare  $w_s = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$  e quindi dobbiamo fare diverse ipotesi.

Consideriamo Hp Gas perfetto:

$$\frac{p}{\rho} RT \longrightarrow p = RT\rho$$

Ipotesi di trasformazione isoterma,  $T = \text{cost}$

$$\frac{dp}{d\rho} = RT \text{ e allora } w_s = \sqrt{RT}$$

questa prima espressione della velocità del suono sembra attribuita a Newton.

Però confrontando la velocità del suono reale con questo vale si osserva che  $\sqrt{RT}$  è più piccola.

Si passa allora all'ipotesi di trasformazione adiabatica reversibile  $ds = 0$

$$ds = c_p \frac{dv}{v} + c_v \frac{dp}{p} = 0, \text{ con } v = \frac{1}{\rho} \longrightarrow \frac{dv}{v} = - \frac{d\rho}{\rho}$$

$$c_v \frac{dp}{p} = c_p \frac{d\rho}{\rho} \longrightarrow \frac{dp}{p} = \frac{c_p}{c_v} \frac{d\rho}{\rho} \longrightarrow \frac{dp}{d\rho} = \frac{c_p}{c_v} \frac{p}{\rho}$$

$$\text{e quindi } \frac{dp}{d\rho} = kRT, \text{ con } k = \frac{c_p}{c_v} \text{ e } \frac{p}{\rho} = RT$$

$$\text{E allora } w_s = \sqrt{kRT}$$

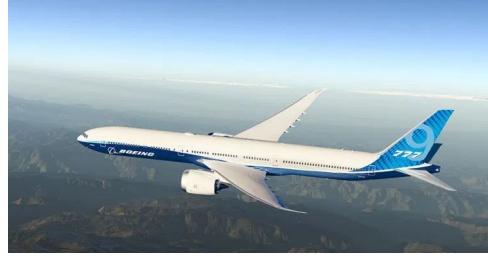
Quindi questa espressione risulta maggiorata rispetto quella precedente con un  $k = 1,4$ .

Si definisce **numero di Mach**  $M = \frac{w}{w_s}$  ovvero il rapporto tra la velocità e la velocità del suono, numero dimensionale.

Indicato con  $M$  o  $Ma$ .

In base al valore possiamo classificare il moto:

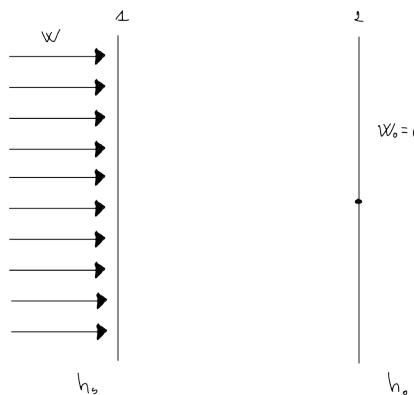
Comprimibilità

$M < 0,3$	Moto incomprimibile	Essendo piccola la velocità saranno piccole le pedite e per questo si può fare ques'approssimazione. Ad esempio un sottomarino	
$0,3 < M < 0,6$	Moto subsonico	Spitfire	
$0,6 < M < 1,2$	Moto transonico	Attraversa la velocità del suono, come il Boeing 777	
$1,2 < M < 5,0$	Moto supersonico	Come il Concorde	
$M > 5,0$	Moto ipersonico	Come i vettori spaziali quando partono	



## Problema del ristagno

Se un fluido viaggia con velocità  $w$  ed entalpia  $h_s$  quando impatta su una superficie ferma il fluido quando aderisce alla superficie 2 avrà una velocità  $w = 0$ . Il fluido passa da una velocità  $w_s$  e  $w = 0$ , ovviamente per noi il ristagno ha come limite l'arresto adiabatico e reversibile, anche se nella realtà sarà irreversibile.



Studiamo allora il bilancio di energia del 1 principio della termodinamica per i sistemi aperti tra la sezione 1 e la sezione .  
Quindi l'equazione di conservazione dell'energia:

$$q - l_f = \Delta h + \frac{\Delta w^2}{2} g \Delta z$$

Dove non abbiamo lavoro scambiato e quindi  $l = 0$ , non c'è scambio di calore  $q = 0$  e supponiamo anche le quote dei due baricentri uguali  $\Delta z = 0$

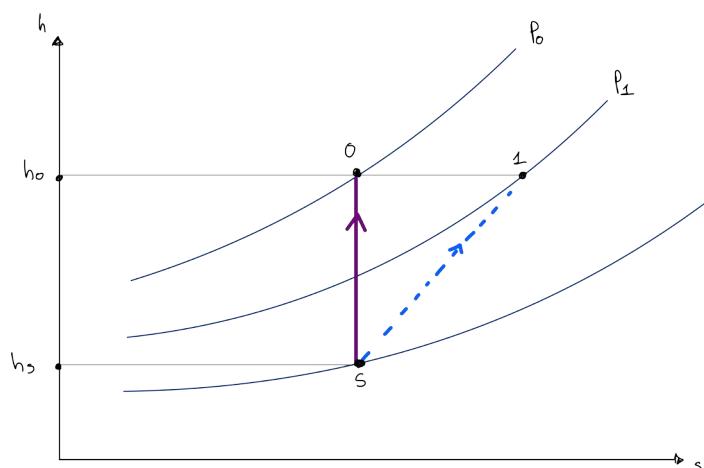
Dove consideriamo il pedice **0** alla sezione 2 e pedice **s** alla sezione 1 per cui  $(h_0 - h_s) + \frac{w_0^2 - w_s^2}{2} = 0$ , inoltre essendo la velocità  $w_o = 0$  si l'**entalpia di ristagno**:  $h_0 = h_s + \frac{w^2}{2}$

Cioè l'entalpia statica più l'energia cinetica (o meglio la differenza di energia cinetica ma una velocità è nulla) quindi è maggiore dell'entalpia statica.

L'entalpia del fluido aumenta.

Se riportiamo la trasformazione in un diagramma hs e supponiamo che la pressione statica fosse  $p_s$  sappiamo che le isobare in questo piano sono esponenziali con concavità in alto e allora se la pressione di ristagno è  $p_0$  ci arriveremo con un entalpia  $h_0$  considerando la trasformazione isoentropica quindi verticale.

Se la trasformazione è adiabatica reale (irreversibile) l'entropia del punto con entalpia  $h_0$  (il punto finale si troverà sempre ad entalpia  $h_0$ ) avrà una differenza di entropia, portandosi in  $s_1$  pari alla sorgenti entropiche che ci sono nella trasformazione irreversibile. (Il tratteggio in figura rappresenta proprio l'irreversibilità).



Andando a cercare  $p_0$  dall'equazione di Bernoulli tra la sezione  $s$  e la sezione **0**, consideriamo trascurabile il carico perso per attrito e nulli sia il carico di lavoro che il  $\Delta z$  e allora:

$$\cancel{\gamma_a} + \cancel{\gamma_f} + \frac{\Delta p}{\gamma} + \frac{\Delta w^2}{2g} + \Delta z = 0 \text{ da cui } \frac{p_0 - p_s}{\gamma} + \frac{w_0^2 - w_s^2}{2g} = 0, \text{ dove } w_0 = 0, \quad w_s = w$$

$$\frac{p_0 - p_s}{\gamma} = \frac{w^2}{2g} \longrightarrow p_0 = p_s + \gamma \cdot \frac{w^2}{2g}$$

$$p_0 = p_s + \rho \frac{w^2}{2} = p_s + p_d, \text{ pressione di ristagno.}$$

Dove abbiamo una pressione statica  $p_s$  e una pressione dinamica  $p_d$

Nel caso reale in cui  $z_a \neq 0$  questo ci porta a dire che

$$z_a + \frac{\Delta p}{\gamma} + \frac{\Delta w^2}{2g} = 0 \text{ e allora } p_1 = p_s + \rho \frac{w^2}{2} - z_a \gamma = p_s + p_d - z_a \cdot g$$

La pressione  $p_1$  è inferiore a  $p_0$  e diminuita di una quantità  $z_a \cdot g$ .

Possiamo poi determinare i rapporti tra 0 ed s in funzione del numero Mach:

$$\text{Si parte da } dh = c_p dT \text{ e si sostituisce il gas perfetto } c_p(T_0 - T_s) = \Delta h = \frac{w^2}{2}$$

$$\text{Da cui } T_0 = T_s + \frac{w^2}{2c_p} \text{ temperatura di ristagno.}$$

Se scriviamo la velocità come  $w = M \cdot w_s$  abbiamo che:

$$T_0 = T_s + \frac{M^2 w_s^2}{2c_p} \text{ ma } w_s^2 = kRT_s \quad \left( \text{sarebbe } w_s \Big|_{s=\text{cost}} \right) \text{ e allora } T_0 = T_s + \frac{M^2 \cdot kRT_s}{2c_p}$$

$$\text{Quindi posso mettere a comune } T_0 = T_s \left[ 1 + M^2 \frac{k}{2} \frac{R}{c_p} \right] \text{ dove } \frac{R}{c_p} = \frac{c_p - c_v}{c_p} = 1 - \frac{c_v}{c_p} = 1 - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k} \quad (\text{si ricordi che } k = c_p/c_v)$$

$$\text{Allora } T_0 = T_s \left[ 1 + M^2 \frac{k-1}{2} \right] = T_s \left[ \frac{2 + (k-1)M^2}{2} \right]$$

Possiamo quindi definire anche la pressione in termini del numero di Mach.

$$\text{Avendo supposto una trasformazione isoentropica } T_0 p_0^{\frac{1-k}{k}} = T_s p_s^{\frac{1-k}{k}} \text{ e allora } \frac{p_0}{p_s} = \left( \frac{T_s}{T_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \left( \frac{T_0}{T_s} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

Cioè abbiamo trovato i due rapporti:

$$\frac{p_0}{p_s} = \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{T_0}{T_s} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2$$

$$\text{Considerando un gas perfetto: } \frac{p_0}{\rho_0} = RT_0 \text{ e } \frac{p_s}{\rho_s} = RT_s \text{ da cui } \frac{p_0}{\rho_0 T_0} = \frac{p_s}{\rho_s T_s} \longrightarrow \frac{\rho_0}{\rho_s} = \left( \frac{p_0}{p_s} \right) \left( \frac{T_s}{T_0} \right)$$

$$\text{E quindi } \frac{\rho_0}{\rho_s} = \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}-1} \text{ allora } \frac{\rho_0}{\rho_s} = \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}$$

Se  $M$  è molto piccolo  $\frac{\rho_0}{\rho_s} \rightarrow 1$  e allora si parla di moto incomprimibile.

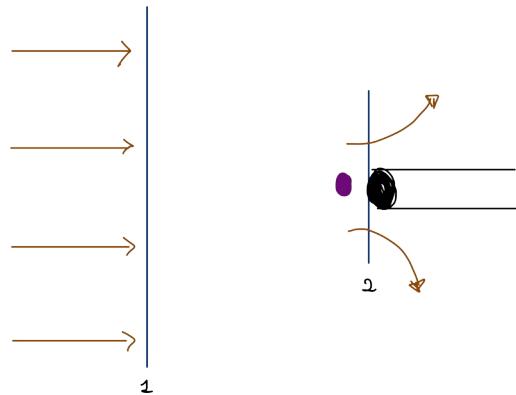
Queste grandezze termodinamiche al ristagno dipendono dal numero di Mach inoltre possiamo calcolare  $\left( \frac{p_0}{p_s} \right)$  e svilupparlo in

$$\text{serie: } p_0 = p_s + \frac{\rho w^2}{2} \left[ 1 + \left( \frac{1}{4} M^2 + \frac{2-k}{4} M^4 + \dots \right) \underbrace{\text{fattore di comprimibilità: } f(M, k)}_{\text{fattore di comprimibilità: } f(M, k)} \right]$$

Quindi se Mach tende a zero il termine chiamato fattore di comprimibilità tende a 0 e quindi il fluido tende a muoversi di moto incomprimibile.

## Misura delle temperature di un fluido in moto

Consideriamo un fluido in moto e supponiamo di volerne misurare la temperatura. Il fluido in modo quando sbatte sul bordo dello strumento si ferma e si ha il ristagno.



$$\text{Quindi con il ragionamento visto poca fa si trova } T_2 = T_1 + \frac{1}{c_p} \frac{w_1^2}{2}$$

Abbiamo supposto che non ci fossero scambi di calore ( $dq = 0$ ) ma questo non è vero per le misure di temperatura in quanto può essere scambio di calore tra fluido e misuratore.

Quindi se la trasformazione è adiabatica posso pensare che ci sia un coefficiente unitario mentre per una trasformazione reale ci va un coefficiente  $r$  che prende il nome di **fattore di recupero del termometro** e quindi:

$$r = \frac{T_r - T_s}{T_0 - T_s} \text{ da cui } T_r = T_s + r (T_0 - T_s) = T_s + r \frac{w_1^2}{2c_p}$$

Sperimentalmente si trova che questo fattore di recupero è pari alla radice del numero di Prandtl  $Pr$ , cioè

$$r = \sqrt{Pr} \text{ con } Pr = \frac{\nu}{\alpha} \text{ dove } \nu = \frac{\mu}{\rho} \text{ e } \alpha \text{ è la diffusività del calore.}$$

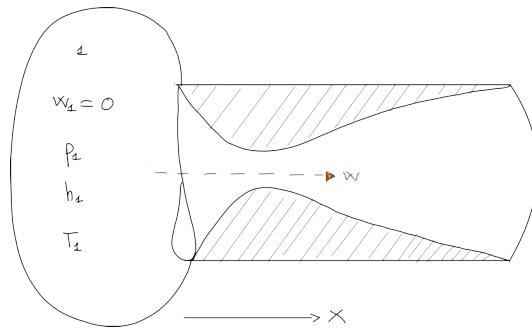
Il numero di Prandtl dipende solo dalle proprietà fisiche del fluido:

- Aria in condizione ambiente:  $Pr = 0,7$  (vicino a 1)
- Olio:  $Pr \gg 1$
- Acqua:  $Pr \approx 4 \div 10$
- Mercurio:  $Pr \ll 1$

---

SEGUENDO IL LIBRO DOPO AVER VISTO LA TEMPERATURA DI UN FLUIDO IN MOTO C'È UNA PARTE INSERITA TRA I FILE COME "18 SUB LEZIONE 4 11 20" DOVE "SUB" FA RIFERIMENTO A SUBORDINATA IN QUANDO QUESTI ARGOMENTI SONO PER LA LODE. SUL LIBRO LO TROVIAMO DOPO LE MISURE DI RISTAGNO OVVERO IL MOTO DI RAYLEIGH, MOTO DI FANNO E MOTO ISOTERMO. NEGLI APPUNTI CI SONO ANCHE DEI CONTI MA SONO SOLO UNA COSA IN PIÙ E VERRANNO CHIESTI SOLO I TRE MOTI APPENA CITATI.

## Moto in condotti a sezione variabile con continuità



Questo tubo serve a convertire in energia cinetica l'energia interna o l'entalpia che il fluido ha. Si consideri ad esempio un contenitore con un fluido fermo a  $p_1, T_1, h_1$  e lo mando in un tubo con prima un convergente e poi un divergente (le sezioni di area minima si chiama **gola**).

Questi ugelli di efflusso sono ancora disegnati empiricamente e i software fluidodinamici non sono in grado di farne un'analisi efficace. Quindi questa superficie mima l'efflusso libero reale di un fluido all'uscita di un serbatoio (in cui per inerzia il flusso si restringe, raggiunge una sezione minima abbastanza vicino l'uscita e poi si riallarga). Ovviamente l'efflusso reale è un moto naturale che quindi avviene con le minore irreversibilità possibili minimizzando le perdite.

La sezione generica è  $S = S(x)$ .

Applichiamo quindi al fluido il bilancio di massa per una generica sezione

$$G = wS\rho$$

E a regime stazionario il differenziale è nullo  $dG = 0 = wSd\rho + w\rho dS + \rho Sdw$

$$\text{Allora dividendo per } G: \frac{dG}{G} = \frac{wSd\rho + w\rho dS + \rho Sdw}{G} = 0$$

$$\text{Da cui } \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dS}{S} + \frac{dw}{w} = 0$$

Applicando l'eq di Bernoulli tra due sezioni distanti  $dx$  si ha

$$\underline{dz_a} + \underline{dz_f} + \frac{dp}{\gamma} + \frac{wdw}{g} + \underline{dz} = 0$$

$$\text{trascuro } \underline{dz} = 0 \quad \underline{dz_a} = 0 \quad \underline{dz_f} = 0 \\ \frac{dp}{g\rho} + \frac{wdw}{g} = 0 \text{ e allora } \frac{dp}{\rho} + w dw = 0$$

Consideriamo la pressione funzione della densità

$$p = p(\rho) \text{ e quindi } dp = \frac{dp}{d\rho} d\rho = w_s^2 d\rho \text{ con } \left( w_s^2 = \frac{dp}{d\rho} \right)$$

$$\text{Allora } w_s^2 + \frac{d\rho}{\rho} + w dw = 0$$

Vogliamo arrivare a considerare come variabili soltanto le variabili di velocità come funzione di variabili di sezione.

E allora, mettendo insieme i 2 risultati, si ottiene:

$$\frac{d\rho}{\rho} = - \frac{dS}{S} - \frac{dw}{w} \rightarrow -w_s^2 \frac{dS}{S} - w_s^2 \frac{dw}{w} = 0$$

$$sw \left( w - \frac{w_s^2}{w} \right) = w_s^2 \frac{dS}{S}$$

$$dw \left( \frac{w}{w_s^2} - \frac{1}{w} \right) = \frac{dS}{S} \rightarrow \frac{dw}{w} \left( \frac{w^2}{w_s^2} - 1 \right) = \frac{dS}{S}$$

Introduciamo allora il Numero di Mach come il rapporto tra la velocità del fluido e la velocità del suono nel fluido  $Ma = \frac{w}{w_s}$ ,

$$\text{quindi: } \frac{dw}{w} (Ma^2 - 1) = \frac{dS}{S} \text{ che prende il nome di } \mathbf{\text{Equazione di Hugoniot}}.$$

Da questa equazione ricaviamo diverse informazioni:

Fino a dora sapevamo quello che succede a regime in cui se la sezione diminuisce aumenta la velocità.

Se  $w < w_s$  e quindi il moto è subsonico:

$$Ma < 1 \text{ allora } (Ma^2 - 1) < 0$$

E  $dw/w$  ha segno negativo mentre  $dS/S$  è positivo e viceversa.

Allora siamo di nuovo nelle condizioni del *tubo di Venturi* e se  $S \uparrow \quad w \downarrow$  e viceversa.

Supponendo un moto supersonico  $w > w_s$  e quindi :

$$Ma > 1 \text{ e quindi } (Ma^2 - 1) > 0$$

$dw/w$  e  $dS/S$  hanno lo stesso segno,

Allora se  $S \uparrow \quad w \uparrow$  e se  $S \downarrow \quad w \downarrow$

Un caso particolare è quando  $w = w_s$ , cioè  $Ma = 1 \rightarrow (Ma^2 - 1) = 0$  si ottiene  $dS/S = 0$  e questo significa che la variazione della sezione con  $x$  ha raggiunto un estremo (massimo minimo o flesso).

Nella prima parte del convergente c'è un moto subsonico che al diminuire della sezione aumenta la velocità, ma considerando che  $S$  diminuisce il primo estremo potrà essere un minimo o un flesso ed è evidente che risulta un minimo.

Quindi il risultato è che se la velocità del fluido raggiunge la velocità del suono, ovvero se  $Ma = 1$  questo avviene nella sezione in cui  $dS = 0$  ovvero nella gola dell'ugello.

Non so se riesco a raggiungere la velocità del suono ma se la raggiungo la raggiungo nella sezione di area minima.

Vediamo però la condizione che ci dice se siamo in grado di raggiungere la velocità del suono e ripartiamo dall'equazione di conservazione dell'energia tra due sezioni generiche 1 e 2:

$$\text{Allora } \cancel{\underline{Q}} + \cancel{\underline{H}} + h_2 - h_1 + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) = 0 \quad \underbrace{= 0}_{\text{trascurabile}} \quad \underbrace{= 0}_{= 0}$$

$$\text{Quindi } \frac{w_2^2}{2} = h_1 - h_2$$

$$\text{Da cui } w_2 = \sqrt{2(h_1 - h_2)}$$

Cioè la velocità che il fluido raggiunge dipende dal salto di entalpia.

Si osservi che:

- Se  $w_2 < w_s$ , il moto è subsonico e non si applica Hugoniot e il fluido si comporta come nel tubo di Venturi
- Se  $w_2 = w_s$ , poiché c'è un salto di entalpia  $(h_1 - h_2)$  sufficiente, allora secondo Hugoniot la velocità del suono si ha nella gola dell'ugello
- Se  $w_2 > w_s$ , poiché  $(h_1 - h_2)$  è molto elevato, allora secondo Hugoniot la velocità è ultrasonica e si ha nel divergente dove  $S \uparrow$  e la velocità può superare la velocità del suono  $w_s$ . Non può però mai superare il valore di  $w_2$ .

Definiamo allora **entalpia critica** l'entalpia  $h_{2c}$  tale che:  $w_2 = \sqrt{2(h_1 - h_{2c})} = w_s$

Un fluido con una certa entalpia avrà un certa temperatura critica e una certa pressione critica.

Vediamo di ricavare la velocità del fluido, cioè ripartiamo dall'espressione  $w_2 = \sqrt{2(h_1 - h_2)}$  e quindi supponiamo che

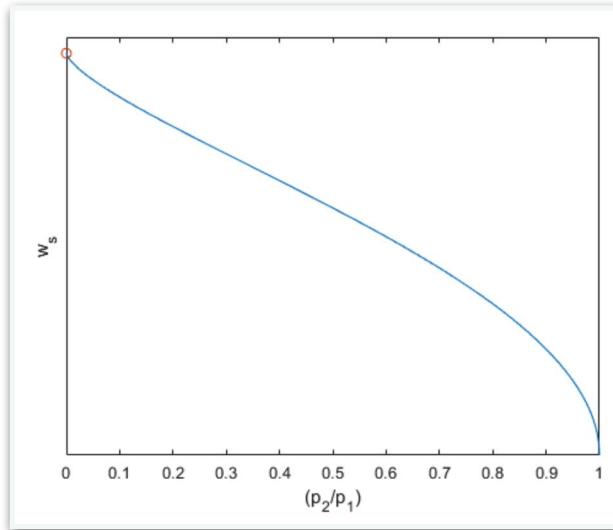
$$\Delta h = c_p \Delta T$$

$$\text{Quindi } w_2 = \sqrt{2c_p(T_1 - T_2)} = \sqrt{2c_p T_2 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)}$$

Supponendo una trasformazione adiabatica (senza scambio di calore) e reversibile allora per la trasformazione isoentropica possiamo mettere in relazione il salto di temperatura con il salto di pressione:  $\frac{T_1}{p_1^\alpha} = \frac{T_2}{p_2^\alpha}$ , con  $\alpha = \frac{k-1}{k}$

$$\text{Allora } w_2 = \sqrt{2c_p T_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^\alpha\right]^{\frac{1}{2}}$$

Facciamo quindi un grafico della velocità  $w_2$  in funzione di  $(p_2/p_1)$



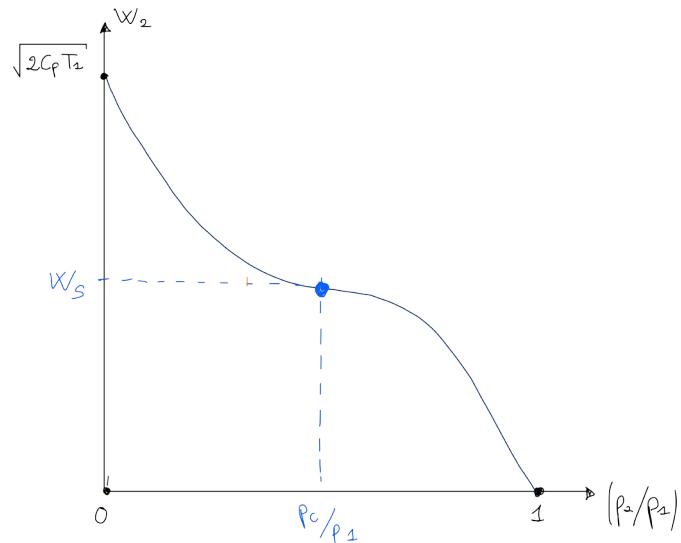
IL VALORE SULLE ORDINATE È OVIAMENTE  $\sqrt{2c_p T_1}$ , PLOTTATO IN  
MATLAB COME UN COEFFICIENTE PARI A 5 E  $k = 1,4$

Fisicamente se  $p_2 = p_1$  vuol dire che il fluido non scorre e quindi non raggiunge quella velocità e rimane fermo, quindi con  $w_2 = 0$ .

Se  $p_2 = 0$ , cioè  $p_2/p_1 = 0$ , cioè se il fluido si espande nel vuoto si ha  $w_2 = w_{\max} = \sqrt{2c_p T_1}$

Per tutti gli altri valori intermedi, l'andamento è quello in figura ed ha un flesso all'incirca in corrispondenza di  $(p_2/p_1) \approx \frac{1}{2}$

È utile partire da destra perché è come se al tubo di efflusso mettessimo una pressione che diminuisce da  $p_2$  a 0 e man mano che diminuiamo la pressione aumenta la velocità del fluido. Quando la pressione raggiunge il valore critico la velocità è quella del suono, diminuendo sotto la pressione critica la velocità aumenta ulteriormente.



Vogliamo anche calcolare (e riportare nel grafico) come è la relazione tra portata e salto di pressione nel tubo, quindi la portata è:

$$G = w_2 \rho_2 S_2 \text{ e considerando un gas perfetto } \left[ \frac{p_2}{\rho_2} = RT_2 \right] \text{ si ottiene } G = w_2 \rho_2 S_2 = \frac{p_2}{RT_2} S_2 \sqrt{2c_p T_1} \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^\alpha \right]^{\frac{1}{2}}$$

Considerando  $T_2$  dall'equazione isoentropica e moltiplicando e dividendo per  $p_1$  si ottiene:

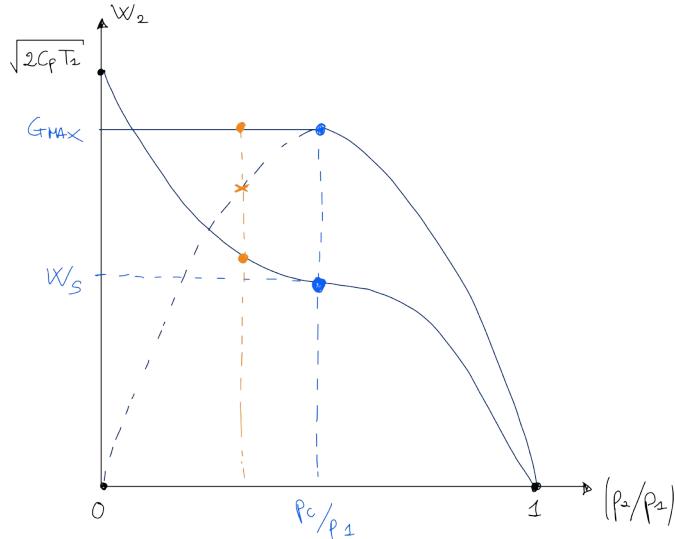
$$\frac{S_2 \sqrt{2c_p T_1}}{R} p_1 \frac{p_2/p_1}{T_1 \left( p_2/p_1 \right)^\alpha} \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^\alpha \right]^{\frac{1}{2}}$$

Allora:

Se i primi termini li consideriamo costanti poiché sono imposti dall'ingresso. Inoltre considero che  $\alpha = 1 - \frac{1}{k} \rightarrow \alpha - 1 = \frac{1}{k}$

$$\text{E allora } G = \text{cost} \cdot \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^\alpha\right]^{\frac{1}{2}}$$

Si vede come  $G$  è nulla sia in  $\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = 0$  che in  $\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = 1$  e se questa funzione ha due zeri per il teorema di Rolle ha certamente un massimo in questo intervallo  $[0; 1]$



Per calcolare questo massimo consideriamo una proporzionalità eliminando la costante  $G \propto x^{\frac{1}{k}} [1 - x^\alpha]^{\frac{1}{2}}$  con  $x = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)$

$$\text{Cioè } \frac{dG}{dx} = 0$$

$$\frac{dG}{dx} = 0 = \frac{1}{k} x^{\frac{1}{k}-1} [1 - x^\alpha]^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{k}} \cdot \frac{1}{2} [1 - x^\alpha]^{\frac{1}{2}} (-\alpha) x^{\alpha-1} \text{ dove } \alpha - 1 = \frac{1}{k}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{k} x^{\frac{1}{k}-1} [1 - k^\alpha] = \frac{x^{\frac{1}{k}-1}}{k} - \frac{1}{k} x^{\frac{1}{k}-x+\frac{1}{k}-\frac{1}{k}} = \frac{x^{\frac{1}{k}-1}}{k} - \frac{1}{k}$$

$$\frac{k-1}{2k} + \frac{1}{k} = \frac{x^{\frac{1}{k}-1}}{k} \text{ quindi } \frac{k-1+2}{2k} = \frac{k+1}{2k} = \frac{x^{\frac{1-k}{k}}}{k}$$

$$\text{Allora } x^{\frac{1-k}{k}} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1-k}{k}} = \frac{k+1}{2}$$

$$\text{E quindi } \frac{2}{k+1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^\alpha, \text{ con } \alpha = \frac{k-1}{k}$$

Questo è quindi il valore di  $\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$  che rende massima la portata  $G$ .

Questo valore dipende soltanto da  $k$  quindi soltanto dal tipo di fluido.

FACCIA MENO PASSAGGI DI QUELLI RIPOTATI SUL LIBRO E POSSIAMO SEMPLICEMENTE CONCLUDERE CHE:

Si dimostra che il punto in cui si ha il massimo della portata corrisponde al punto in cui la velocità è uguale a quella del suono e quindi la pressione uguale a quella critica, per cui

$$\left(\frac{p_C}{p_1}\right) = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

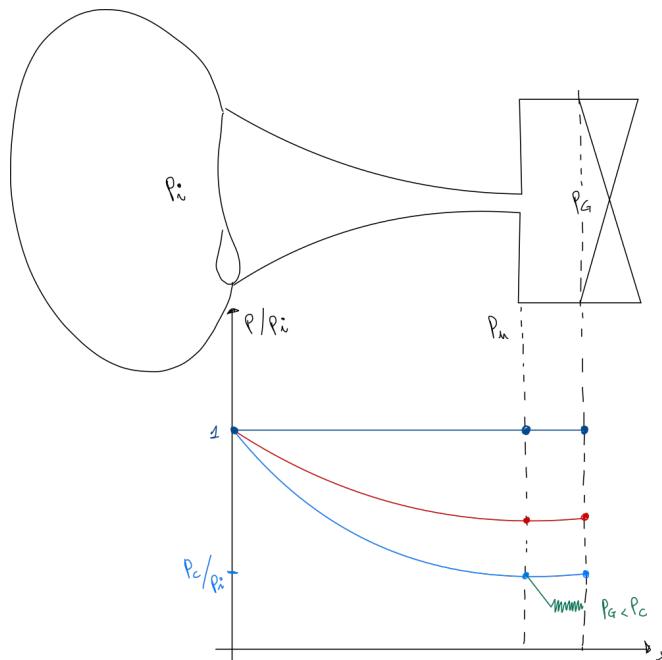
Questo ci dica anche che  $\frac{T_c}{T_1} = \frac{2}{k+1}$  in quanto abbiamo visto che  $\left(p_2/p_1\right)^\alpha = T_2/T_1$

Osservazioni:

- Se  $\frac{p_2}{p_1} = 1$  e quindi le pressioni sono uguali si ha  $w_2 = w_1 = 0$  e  $G = 0$  quindi non c'è flusso.
- Se  $p_2/p_1$  diminuisce, cioè  $p_2$  diminuisce allora si ha che  $w_2 < w_s$  e  $G < G_{\max}$  e al diminuire di  $p_2$  aumentano sia la portata che la velocità
- Se  $p_2/p_1 = p_c/p_1$  cioè  $p_2 = p_c$  e  $w_2 = w_s$  e  $G = G_{\max}$
- Se  $p_2/p_1$  diminuisce ancora (cioè  $p_2 < p_c$ ) si ha che  $w_2 > w_s$  cioè si è a velocità supersonica e al diminuire di  $p_2$  la velocità aumenta. Si osservi che verrebbe da dire che  $G$  diminuisce ma questo è impossibile poiché il tubo è chiuso! quindi nel ramo di sinistra della portata è sbagliato dal punto di vista fisico (quello tratteggiato nel grafico) nonostante sembri corretto analiticamente. Quindi la portata rimane costante e pari a  $G_{\max}$ .

Diamo quindi un **significato fisico**: prendiamo il tubo di efflusso con solo un convergente e un fluido a pressione iniziale  $p_1$  e una pompa a vuoto che ci permette di controllare la pressione nella gola.

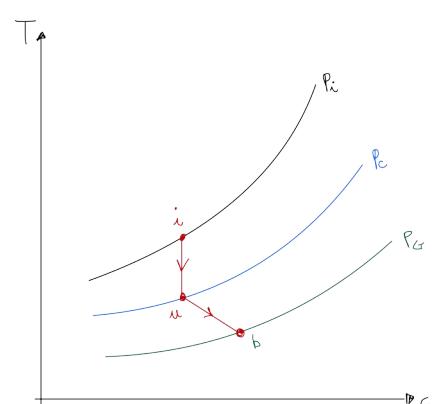
Rappresentiamo la pressione  $\frac{p}{p_i}$  per ogni sezione nel grafico in funzione di  $x$ , distanza dalla sezione di ingresso.



Inizialmente ( $p_u = p_i$ ) non c'è moto del fluido e questa rimane costante mentre diminuendo la pressione la velocità aumenta. Per Bernoulli  $\left[ \frac{p}{\gamma} + \frac{w^2}{2g} = \text{cost} \right]$  quando la velocità aumenta la pressione diminuisce. Finché non arrivo a  $p_u = p_c$  e quindi nella gola raggiungo la velocità del suono dove aumenta sempre la velocità e quindi diminuisce la pressione.

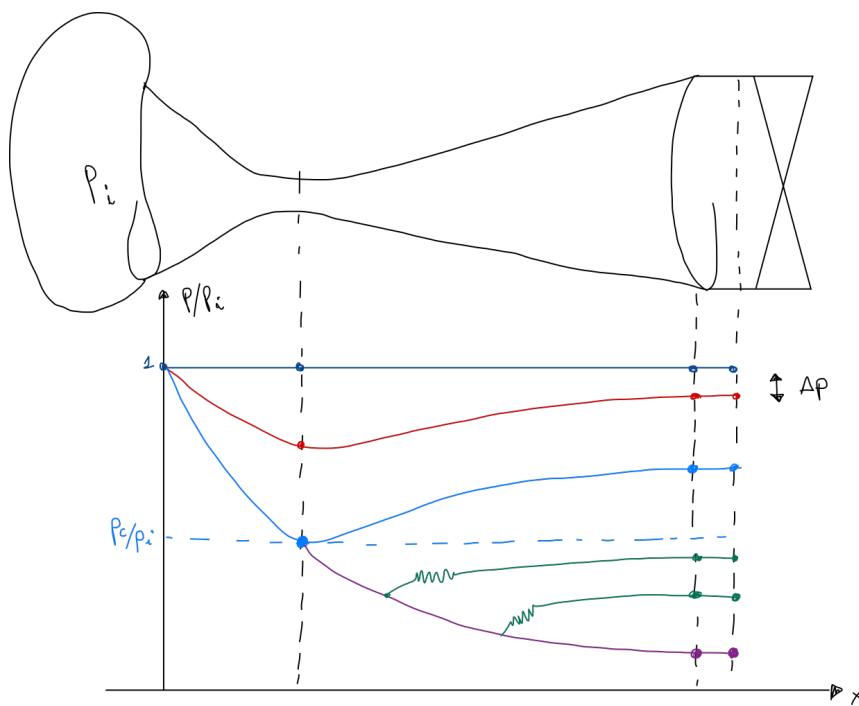
Se invece la sezione dopo la gola viene ad essere minore di quella critica si ha un brusco allargamento di sezione e quindi il fluido subisce delle irreversibilità e la sua pressione diminuisce e avvengono gli **urti**.

Questo dal punto di vista significa che presa le pressione di ingresso e quella di uscita quando quella di uscita è uguale a quella critica avendo un tubo di efflusso progettato empiricamente come un flusso libero posso immaginare un efflusso il più reversibile possibile (si espande naturalmente) e quindi lo assimilo ad un'isoentropica. quando invece scendo sotto ed ho l'allargamento di sezione c'è una produzione di entropia dovuta proprio al brusco allargamento di sezione.



Nel tubo di De Laval, troviamo sempre un tubo convergente divergente che però permette di raggiungere velocità soniche e supersoniche.

Troviamo un convergente con un andamento similare a quello dell'efflusso libero e dopo aver raggiunto la gola la sezione deve aumentare e per evitare irreversibilità dovute a bruschi allargamenti di sezione queste variazioni devono avvenire con angoli molto piccoli altrimenti si hanno i vortici di cui abbiamo parlato.



Facendo lo stesso ragionamento di prima con pressione di ingresso  $p_i$  e uscita  $p_u$  stabilità dalla pompa a vuoto  $p_g$ .

Si stabilisiamo una pressione  $p_g = p_i$  non c'è velocità e non c'è moto mentre se diminuisco la pressione  $p_g$  diminuisce la pressione  $p_u$  in uscita e il fluido inizia a scorrere. All'inizio nel convergente scorrerà di moto subsonico (rosso) e la velocità aumenta e per Bernoulli la pressione diminuisce. Dopo aver raggiunto la sezione minima ed essendo sempre in moto subsonico la sezione aumenta e quindi la velocità diminuisce, allora si recupera la pressione. Questo avviene al diminuire (si immagino altre curve simili a quella rossa sempre più basse).

Arrivando alla pressione critica, ovvero una pressione in uscita tale per cui nella gola c'è la pressione critica (in azzurro). Supponendo però che il salto di entalpia sia tale da raggiungere solo la velocità del suono e non una velocità superiore. Allora il fluido diminuisce la pressione poiché la velocità aumenta e nella gola c'è la velocità del suono ma non potendo raggiungere una velocità superiore ritorna ad una velocità subsonica e allora avrà un comportamento simile al caso precedente in cui diminuisce la velocità e aumenta la pressione.

Se diminuisco la pressione in modo tale che il salto di entalpia sia tale da darmi una velocità superiore a quella del suono questo comporta nel tratto convergente la stessa curva di prima ma nel tratto successivo avendo una velocità del suono sono in moto supersonico e allora se aumenta la sezione aumenta anche la velocità e quindi diminuisce la pressione (in viola).

Arriverà un certo punto in cui raggiungo la massima velocità supersonica possibile e oltre non posso andare (in verde) e per le perdite dovute alle trasformazioni irreversibili il fluido tende a diminuire la propria velocità e a ritornare nel modo subsonico. Nella zona con le oscillazioni avviene l'**urto tra il moto supersonico e il moto subsonico** cioè si ha la compressione per urto.

COSÌ ABBIAMO FINITO LA SECONDA PARTE DEL CORSO DI TERMOFLUIDODINAMICA E DA MARTEDÌ INIZIEREMO LA TERMOCINETICA O TRASMISSIONE DEL CALORE. CON L'ING PETRACCI CI RIVEDREMO A DICEMBRE.

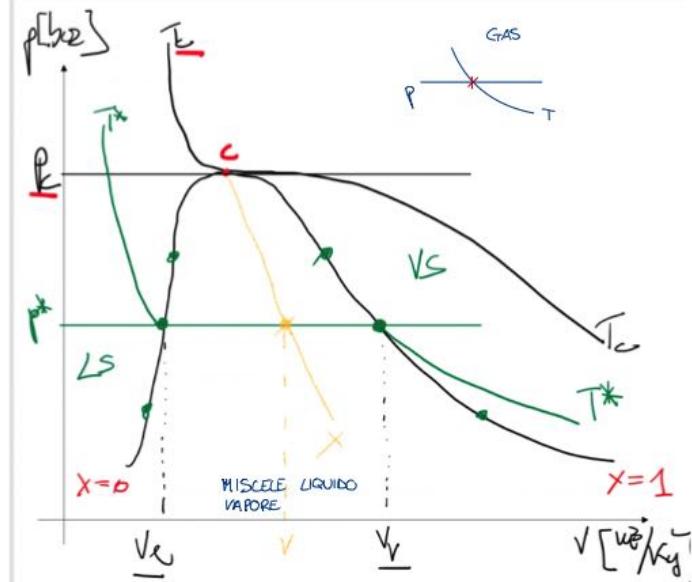
FINO A METÀ DICEMBRE DOVREMBO FINIRE LA PARTE TEORICA E VEDERE DELLE ESERCITAZIONI TEORICHE/APPLICATIVE.

ALL'ESAMI CI SARANNO SOLO DUE ESERCIZI + (FORSE) UNA RELAZIONE SU QUESTE ESERCITAZIONI APPLICATIVE.

**CONTROLLARE ANCHE LA CARTELLA DELLE LEZIONI 18 SUB PER GLI ARGOMENTI INTEGRATIVI PER LA LODE.**

## Esercitazione

Vediamo bene l'utilizzo delle tabelle:



In figura un diagramma pV con l'andamento della campana di Andrews dove si vede il punto critico per cui passano temperatura critica e pressione critica. Abbiamo una curva limite inferiore con il titolo  $x=0$  e una superiore con il titolo  $x=1$ .

Sappiamo come queste dividono il piano in alcune aree particolari: liquidi sottraraffreddati (LS) a sinistra, vapor surriscaldati (VS) sotto la temperatura critica e sopra ci sono i GAS. All'interno della curva di Andrews ci sono le miscele liquido vapore.

Fuori dalla campana una temperatura e una pressione individuano univocamente lo stato termodinamico mentre all'interno della curva una combinazione  $p - T$  da infiniti stati termodinamici per cui vale questa combinazione e allora è necessario conoscere anche il titolo X.

Potremmo avere le tabelle (FAR RIFERIMENTO AL FILE DEI DIAGRAMMI INSERITO NELLE PAGINE SEGUENTI). In alcuni casi al posto del grafico potremmo avere a che fare con le tabelle:

Le tabelle si presentano con almeno due colonne che danno informazioni sia sul vapore saturo che sul liquido saturo. Si entra con la temperatura e si legge lo step di pressione di saturazione corrispondente, ovvero quella del passaggio di stato isotermbico.

Ci sono le colonne del volume specifico che ci danno informazioni sugli estremi (tutto liquido e tutto vapore) e conoscendo il titolo riusciamo a ricavare la situazione intermedia.

Discorso analogo per l'energia interna.

Sull'entalpia ci sono anche le due colonne + una terza che rappresenta il calore latente di evaporazione (o condensazione) che non è nient'altro che la differenza tra le due entalpie:  $h_{fg} = h_g - h_l$ .

Si osservi anche che il volume specifico del liquido saturo è rappresentato moltiplicandolo per  $10^3$ .

**Nel punto critico i valori coincideranno.** Per l'acqua  $T_c = 374,14^\circ\text{C}$  a  $220.9$  bar

### APPENDICE B: PROPRIETÀ DI GAS E VAPORI

**Tabella B.1 -- Vapore saturo dell'acqua (temperatura).**

Temp. °C	Press. bar	Specific Volume $\text{m}^3/\text{kg}$		Internal Energy $\text{kJ/kg}$		Enthalpy $\text{kJ/kg}$		Entropy $\text{kJ/kg} \cdot \text{K}$		Temp. °C
		Sat. Liquid $v_l \times 10^3$	Sat. Vapor $v_g$	Sat. Liquid $u_l$	Sat. Vapor $u_g$	Sat. Liquid $h_l$	Evap. $h_{fg}$	Sat. Vapor $h_g$	Sat. Liquid $s_l$	
.01	0.00611	1.0002	206.136	0.00	2375.3	0.01	2501.3	2501.4	0.0000	9.1562
4	0.00813	1.0001	157.232	16.77	2380.9	16.78	2491.9	2508.7	0.0610	9.0514
5	0.00872	1.0001	147.120	20.97	2382.3	20.98	2489.6	2510.6	0.0761	9.0257
6	0.00935	1.0001	137.734	25.19	2383.6	25.20	2487.2	2512.4	0.0912	9.0003
8	0.01072	1.0002	120.917	33.59	2386.4	33.60	2482.5	2516.1	0.1212	8.9501
10	0.01228	1.0004	106.379	42.00	2389.2	42.01	2477.7	2519.8	0.1510	8.9008
11	0.01312	1.0004	99.857	46.20	2390.5	46.20	2475.4	2521.6	0.1658	8.8765
12	0.01402	1.0005	93.784	50.41	2391.9	50.41	2473.0	2523.4	0.1806	8.8524
13	0.01497	1.0007	88.124	54.60	2393.3	54.60	2470.7	2525.3	0.1953	8.8285
14	0.01598	1.0008	82.848	58.79	2394.7	58.80	2468.3	2527.1	0.2099	8.8048
15	0.01705	1.0009	77.926	62.99	2396.1	62.99	2465.9	2528.9	0.2245	8.7814
16	0.01818	1.0011	73.333	67.18	2397.4	67.19	2463.6	2530.8	0.2390	8.7582
17	0.01938	1.0012	69.044	71.38	2398.8	71.38	2461.2	2532.6	0.2535	8.7351
18	0.02064	1.0014	65.038	75.57	2400.2	75.58	2458.8	2534.4	0.2679	8.7123
19	0.02198	1.0016	61.293	79.76	2401.6	79.77	2456.5	2536.2	0.2823	8.6897
20	0.02339	1.0018	57.791	83.95	2402.9	83.96	2454.1	2538.1	0.2966	8.6672
21	0.02487	1.0020	54.514	88.14	2404.3	88.14	2451.8	2539.9	0.3109	8.6450
22	0.02645	1.0022	51.447	92.32	2405.7	92.33	2449.4	2541.7	0.3251	8.6229
23	0.02810	1.0024	48.574	96.51	2407.0	96.52	2447.0	2543.5	0.3393	8.6011

Per altri diagrammi far riferimento ai file delle tabelle e diagrammi.

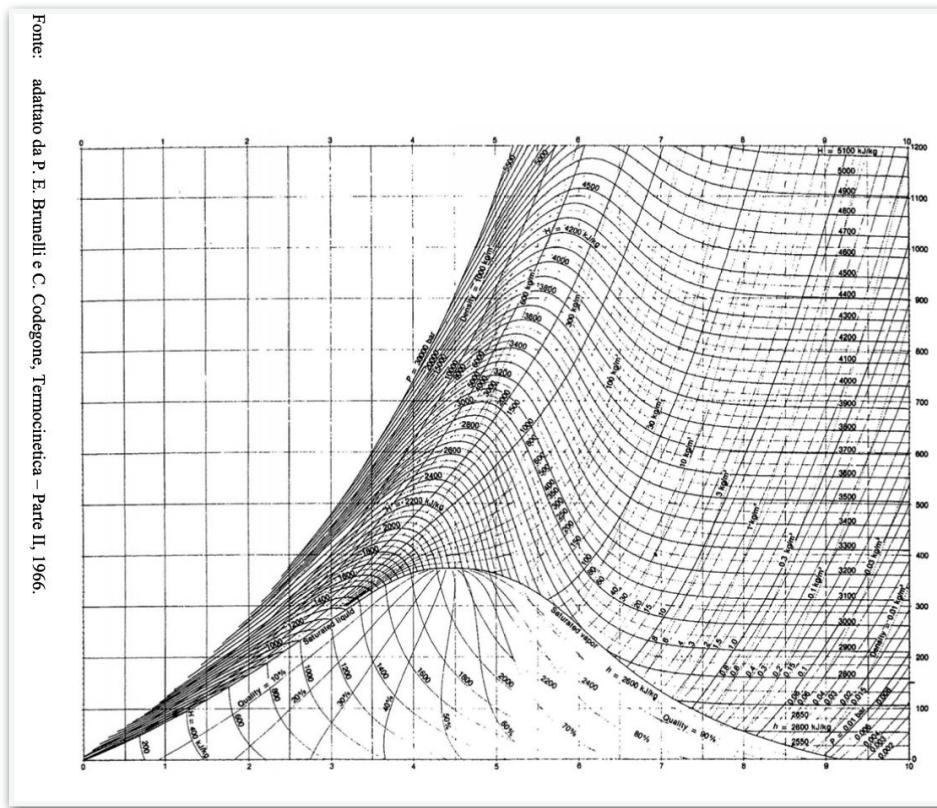


FIGURA 1 - DIAGRAMMA T-S DELL'ACQUA: ENTROPIA IN  $\text{kJ kg}^{-1} \text{K}^{-1}$  E TEMPERATURA IN °C.

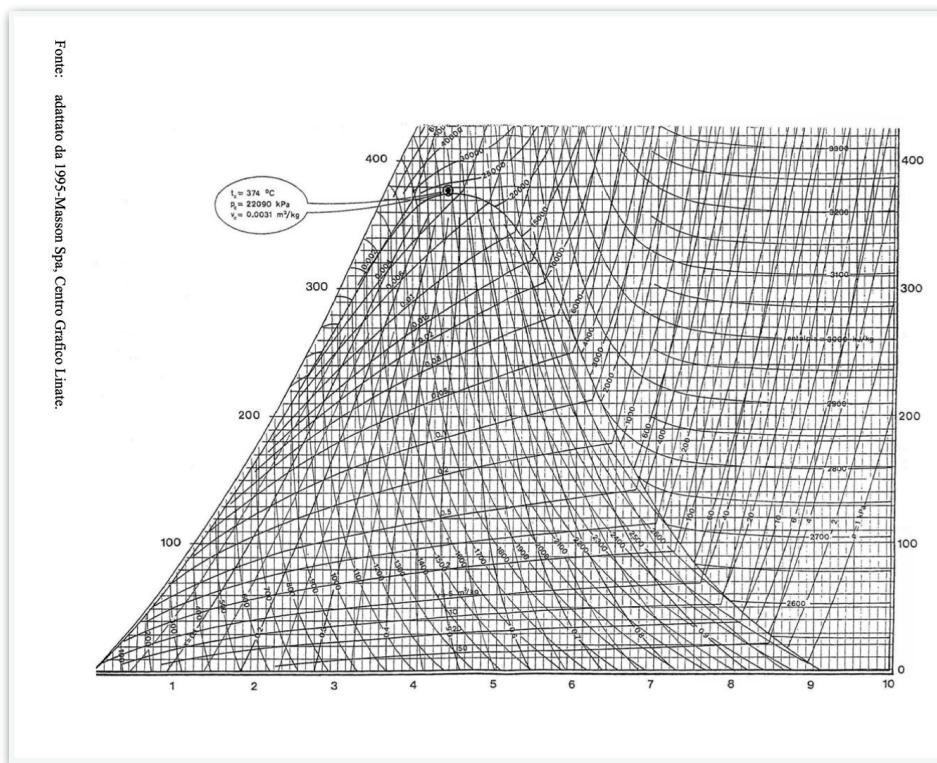


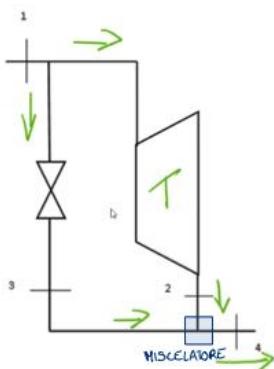
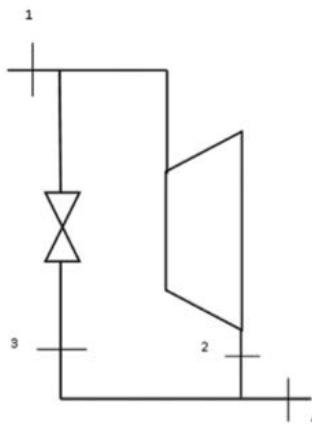
FIGURA 2 - DIAGRAMMA T-S DELL'ACQUA (PARTICOLARE): ENTROPIA IN  $\text{kJ kg}^{-1} \text{K}^{-1}$  E TEMPERATURA IN °C.

Si faccia attenzione alle tabelle del vapore surriscaldato o del liquido sottoraffreddato.

Si osservi che mentre  $p$ ,  $v$  e  $T$  sono variabili di stato  $u$ ,  $h$  e  $S$  sono funzioni di stato che esistono nel relativo stato termodinamico ma non sono misurabili bensì possiamo misurare le loro variazioni. Le tabelle avranno un qualche zero per cui si fissano a zero l'energia interna e l'entropia in modo da calcolare i  $\Delta u$  e  $\Delta S$  rispetto gli altri stati, fornendoci tutti i vari numeretti.

Ovviamente le colonne p, v e T non cambieranno poiché variabili di stato.  
Discorso analogo nei diagrammi in cui è fissato uno stato si riferimento.

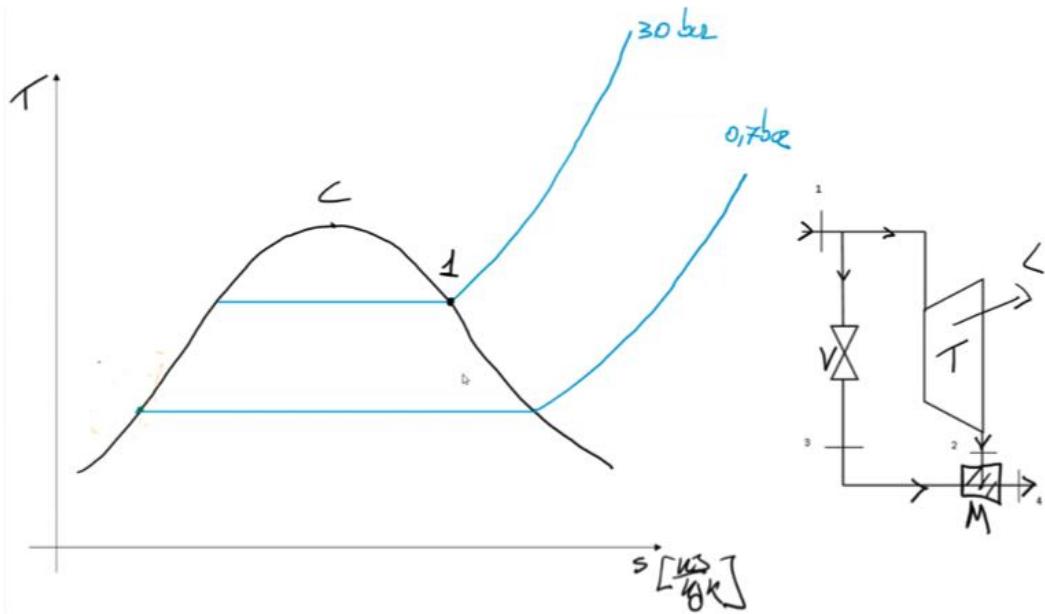
In un ipotetico impianto a vapore, funzionante secondo un ciclo di Carnot tra le pressioni di 0.7 e 30 bar, una valvola di laminazione è utilizzata per la regolazione della potenza della turbina, come rappresentato in figura. Determinare lo stato termodinamico 4, ovvero lo stato dopo la miscelazione dei due flussi, nell'ipotesi che il 15% della portata totale passi per la valvola. Si valuti, inoltre, la temperatura di fine laminazione. Considerare pari a 0.93 il rendimento isoentropico della turbina



Una parte della portata va nella valvola e una parte passa in turbina e il tutto si ricongiunge in uscita.

Turbina  
Valvola di laminazione  
Miscelatore

Tuttavia dobbiamo identificare lo stato termodinamico 1 che ci viene fornito dal professore con il seguente grafico.



Partiamo da quello che ci viene richiesto, lo stato 4 dopo la miscelazione:

## STATO 4, MISCELATORE

Nel caso del miscelatore si fa spesso l'**ipotesi di ritenerlo ADIABATICO**

$\dot{m}_1$  aperto  $\rightarrow$  bilancio di massa (portata, in cond. stazionarie)

$$\dot{m}_3 + \dot{m}_2 = \dot{m}_4$$

Bilancio energia (di potenza):  $\dot{Q} - \dot{W}_p = \dot{H}_4 - (\dot{H}_2 + \dot{H}_3)$

non ci sono organi meccanici

In alcuni casi potrebbe non essere trascurabile come nell'elettore dove ci sono flussi ipersonici e flussi subsonici per cui non è trascurabile tuttavia normalmente lo trascuriamo

Io ritenerlo adiabatico, per cui:

$$\Delta H = 0 \Rightarrow H_{\text{ingresso}} = H_{\text{uscita}} \Rightarrow H_2 + H_3 = H_4$$

potenza = portata  $\times$  entalpia specifica

Cioè:

$$\begin{cases} \dot{m}_2 + \dot{m}_3 = \dot{m}_4 = \dot{m}_1 & \leftarrow \text{conviene scrivere il bilancio con le grandezze estensive} \\ \dot{m}_2 h_2 + \dot{m}_3 h_3 = \dot{m}_4 h_4 & \leftarrow \text{l'entalpia come estensiva la scriviamo come l'entalpia specifica per la portata} \end{cases}$$

$$\text{dividendo per } \dot{m}_1 \rightarrow \frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_1} + \frac{\dot{m}_3}{\dot{m}_1} = 1 \rightarrow 0,85 + 0,15 = 1$$

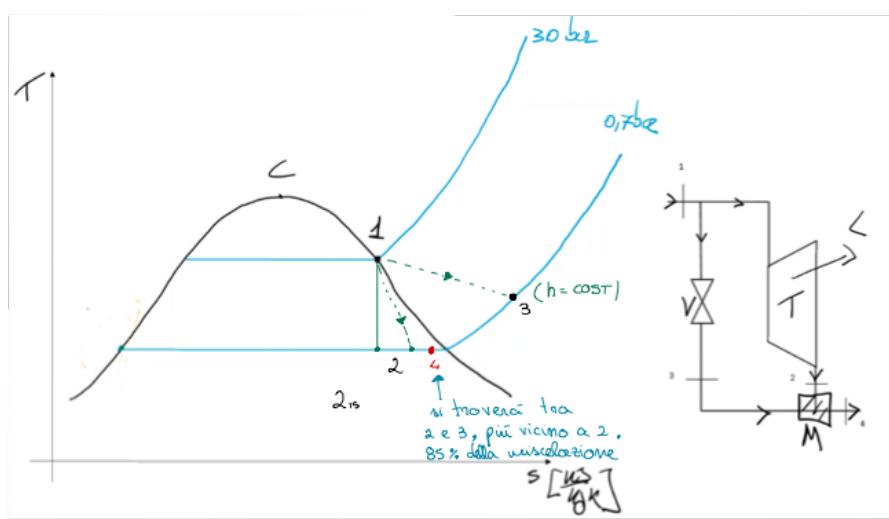
$$\text{e dunque } 0,85 h_2 + 0,15 h_3 = h_4$$

portata nella valvola  
portata in turbina

NOTA: in genere nel miscelatore  $p_2 = p_3 = p_4$   
(se non diversamente specificato)

conosciamo  $p_4 = 0,7 \text{ bar}$       }  $\rightarrow$  STATO 4  
 $h_4$  da calcolare

Allora dobbiamo trovare  $h_2$  e  $h_3$ .



Dobbiamo quindi ricavare l'entalpia di 2 e 3.

Sul diagramma abbiamo la trasformazione reale della turbina 1  $\rightarrow$  2 che però ha un rendimento non unitario, quindi ci sarà una trasformazione reale. La trasformazione ideale è adiabatica reversibile e quindi isoentropica (verticale).

Essendoci però un rendimento isoentropico il 2 reale si troverà più a destra (entropia crescente).

Lo stato 3 invece si troverà alla stessa entalpia di 1 e starà anche sulla stessa isobara  $p=0,7$ .

Le curve a entalpia costante (vedere i grafici) hanno un andamento qualitativamente come quello verde tratteggiato è la trasformazione della valvola intrinsecamente irreversibile. Si osservi che mentre il 2 isoentropico sarà per forza nella campana il 2 reale e il 3 dovremmo verificare dove si trovano.

Lo stato 4 si troverà sempre sull'isobara 0,7 bar tra 2 e 3 e qualitativamente sarà più vicino a essendo l'85% della miscelazione. Dovremmo poi verificare se sarà dentro o fuori la campana.

Cominciamo dallo stato 3 ma per ricavarlo ci servirà lo stato 1:

STATO 1  $\xrightarrow{P_1 = \text{bar}}$   
 $\xrightarrow{1 \text{ è vapore saturo}}$

Press. bar	Temp. °C	Specific Volume m³/kg		Internal Energy kJ/kg		Enthalpy kJ/kg		Entropy kJ/kg · K		Press. bar	
		Sat. Liquid $v_f \times 10^3$	Sat. Vapor $v_g$	Sat. Liquid $u_f$	Sat. Vapor $u_g$	Sat. Liquid $h_f$	Evap. $h_g$	Sat. Vapor $s_f$	Sat. Vapor $s_g$		
0.04	28.96	1.0040	34.800	121.45	2415.2	121.46	2432.9	2554.4	0.4226	8.4746	0.04
0.06	36.16	1.0064	23.739	151.53	2425.0	151.53	2415.9	2567.4	0.5210	8.3304	0.06
0.08	41.51	1.0084	18.103	173.87	2432.2	173.88	2403.1	2577.0	0.5926	8.2287	0.08
0.10	45.81	1.0102	14.674	191.82	2437.9	191.83	2392.8	2584.7	0.6493	8.1502	0.10
0.20	60.06	1.0172	7.649	251.38	2456.7	251.40	2358.3	2609.7	0.8320	7.9085	0.20
0.30	69.10	1.0223	5.229	289.20	2468.4	289.23	2336.1	2625.3	0.9439	7.7686	0.30
0.40	75.87	1.0265	3.993	317.53	2477.0	317.58	2319.2	2636.8	1.0259	7.6700	0.40
0.50	81.33	1.0300	3.240	340.44	2483.9	340.49	2305.4	2645.9	1.0910	7.5939	0.50
0.60	85.94	1.0331	2.732	359.79	2489.6	359.86	2293.6	2653.5	1.1453	7.5320	0.60
0.70	89.95	1.0360	2.365	376.63	2494.5	376.70	2283.3	2660.0	1.1919	7.4797	0.70
0.80	93.50	1.0380	2.087	391.58	2498.8	391.66	2274.1	2665.8	1.2329	7.4346	0.80
0.90	96.71	1.0410	1.869	405.06	2502.6	405.15	2265.7	2670.9	1.2695	7.3949	0.90
1.00	99.63	1.0432	1.694	417.36	2506.1	417.46	2258.0	2675.5	1.3026	7.3594	1.00
1.50	111.4	1.0528	1.159	466.94	2519.7	467.11	2226.5	2693.6	1.4336	7.2233	1.50
2.00	120.2	1.0605	0.8857	504.49	2529.5	504.70	2201.9	2706.7	1.5301	7.1271	2.00
2.50	127.4	1.0672	0.7187	535.10	2537.2	535.37	2181.5	2716.9	1.6072	7.0527	2.50
3.00	133.6	1.0732	0.6058	561.15	2543.6	561.47	2163.8	2725.3	1.6718	6.9919	3.00
3.50	138.9	1.0786	0.5243	583.95	2546.9	584.33	2148.1	2732.4	1.7275	6.9405	3.50
4.00	143.6	1.0836	0.4625	604.31	2553.6	604.74	2133.8	2738.6	1.7766	6.8959	4.00
4.50	147.9	1.0882	0.4140	622.25	2557.6	623.25	2120.7	2743.9	1.8207	6.8565	4.50
5.00	151.9	1.0926	0.3749	639.68	2561.2	640.23	2108.5	2748.7	1.8607	6.8212	5.00
6.00	158.9	1.1006	0.3157	669.90	2567.4	670.56	2086.3	2756.8	1.9312	6.7600	6.00
7.00	165.0	1.1080	0.2729	696.44	2572.5	697.22	2066.3	2763.5	1.9922	6.7080	7.00
8.00	170.4	1.1148	0.2404	720.22	2576.8	721.11	2048.0	2769.1	2.0462	6.6628	8.00
9.00	175.4	1.1212	0.2150	741.83	2580.5	742.83	2031.1	2773.9	2.0946	6.6226	9.00
10.0	179.9	1.1273	0.1944	761.68	2583.6	762.81	2015.3	2778.1	2.1387	6.5863	10.0
15.0	198.3	1.1539	0.1318	843.16	2594.5	844.84	1947.3	2792.2	2.3150	6.4448	15.0
20.0	212.4	1.1767	0.09963	906.44	2600.3	908.79	1890.7	2799.5	2.4474	6.3409	20.0
25.0	224.0	1.1973	0.07998	959.11	2603.1	962.11	1841.0	2803.1	2.5547	6.2575	25.0
30.0	233.9	1.2165	0.06668	1004.8	2604.1	1008.4	1795.7	2804.2	2.6457	6.1869	30.0
35.0	242.6	1.2347	0.05707	1045.4	2603.7	1049.8	1753.7	2803.4	2.7253	6.1253	35.0
40.0	250.4	1.2522	0.04978	1082.3	2602.3	1087.3	1714.1	2801.4	2.7964	6.0701	40.0
45.0	257.5	1.2692	0.04406	1116.2	2600.1	1121.9	1676.4	2798.3	2.8610	6.0199	45.0
50.0	264.0	1.2859	0.03944	1147.8	2597.1	1154.2	1640.1	2794.3	2.9202	5.9734	50.0

$T$ °C	$v$ m³/kg	$u$ kJ/kg	$h$ kJ/kg	$s$ kJ/kg · K
$p = 0.06 \text{ bar} = 0.006 \text{ MPa}$ ( $T_{\text{ref}} = 36.16^\circ\text{C}$ )				
Sat.	23.739	2425.0	2567.4	8.3304
80	27.132	2487.3	2650.1	8.5804
120	30.219	2544.7	2726.0	8.7840
160	33.302	2602.7	2802.5	9.0693
200	36.383	2661.4	2879.7	9.1398
240	39.462	2721.0	2957.8	9.2982
280	42.540	2781.5	3036.8	9.4464
320	45.618	2843.0	3116.7	9.5859
360	48.696	2905.5	3197.7	9.7180
400	51.774	2969.0	3279.6	9.8435
440	54.851	3033.5	3362.6	9.9633
500	59.467	3132.3	3488.1	10.1336
$p = 0.70 \text{ bar} = 0.07 \text{ MPa}$ ( $T_{\text{ref}} = 89.95^\circ\text{C}$ )				
Sat.	2.365	2494.5	2660.0	7.4797
100	2.434	2509.7	2680.0	7.5341
120	2.571	2539.7	2719.6	7.6375
160	2.841	2599.4	2798.2	7.8279
200	3.108	2659.1	2876.7	8.0012
240	3.374	2719.3	2955.5	8.1611
280	3.640	2780.2	3035.0	8.3162
320	3.905	2842.0	3115.3	8.4504
360	4.170	2904.6	3196.5	8.5828
400	4.434	2968.2	3278.6	8.7086
440	4.698	3032.9	3361.8	8.8286
500	5.095	3131.8	3488.5	8.9991

Allora, delle tabelle

$$h_2 = 2804,2 \text{ kJ/kg}$$

$$S_1 = G, 1.263 \text{ kJ/kg}$$

STATO 3

$$P = 0,7 \text{ bar}$$

$$h_3 = h_2 = 2804,2 \text{ kJ/kg} \leftarrow \text{valore di l'urazione a entalpia costante}$$

Per essere sicuri se 3 è dentro o fuori la campana dovremmo vedere i valori di saturazione:

L'entalpia di saturazione è 2600 e quindi 3 è vapore surriscaldato.

Ci rimane l'entalpia di 2 e partiamo allora dal caso ideale e dal rendimento **isoentropico**

$$\text{STATO } 2 \quad P_2 = 0,7 \text{ bar}, \quad f_{P,T} = \frac{l_v}{l_w} = \frac{h_3 - h_2}{h_s - h_{2,d}} = 0,93$$

STATO  $2,d \rightarrow 2$

Per lo stato ideale avremo bisogno del titolo

$$h_{2,d} = h_2 + x_{2,d}(h_2 - h_{2,v})$$

I valori agli estremi li andiamo a leggere dalla tabella e ci manda il titolo. Per ricavarlo possiamo sfruttare la conoscenza della curva isoentropica, ovvero l'entropia di 1

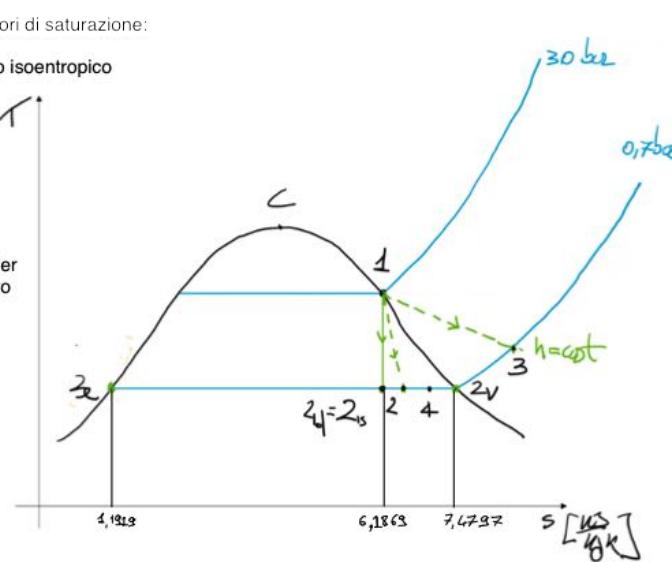
$$S_{2,d} = S_{2,0} + x_{2,d}(S_{2,v} - S_{2,l}) \Rightarrow x_{2,d} = \frac{S_{2,d} - S_{2,0}}{S_{2,v} - S_{2,l}}$$

$$\text{cioè } x_{2,d} = \frac{6.1863 - 4.1243}{7.4737 - 4.1243} = 0,73$$

$$\Rightarrow h_{2,d} = 376,7 + 0,73(2660 - 376,7) = 2181 \text{ kJ/kg}$$

avviate DVE  
entre i valori limite

$$\eta_{\text{isot}} = \frac{h_2 - h_2}{h_2 - h_{2,d}} \Rightarrow h_2 = h_1 + \eta_{\text{isot}} (h_1 - h_{2,d}) = 2224,6 \text{ kJ/kg} \quad ( > h_{2,d} \quad \checkmark )$$



Dobbiamo verificare se è dentro o fuori la campana e quindi deve risultare minore del valore sulla campana 2660:

$$h_2 = 2224,6 \text{ kJ/kg} < 2660 = h_{2v} \Rightarrow 2 \text{ è nella campana}$$

$$x_2 = \frac{h_2 - h_{2l}}{h_{2v} - h_{2l}} = 0,81$$

↑  
NON richiesto  
per l'esercizio

<- possiamo ricavare anche il titolo, non necessario ai fini dell'esercizio

Curva isotitolo in giallo

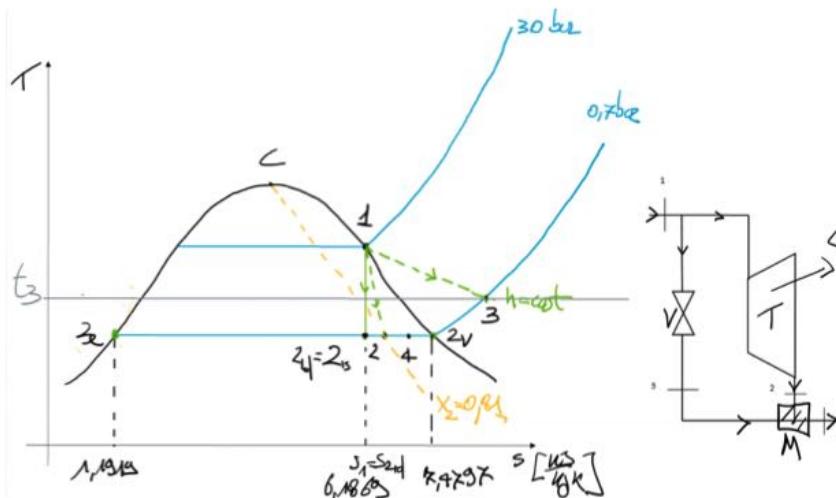
STATO 4 :

$$p_4 = 0,7 \text{ bar}$$

$$h_4 = 0,88 \cdot h_2 + 0,15 \cdot h_3 = 2312 \text{ kJ/kg} < h_{2v} = 2660 \text{ kJ/kg}$$

$\Rightarrow h_4$  è nella campana

$$x_4 = \frac{h_4 - h_{2l}}{h_{2v} - h_{2l}} = 0,85$$



Abbiamo visto che 3 è vapore surriscaldato e quindi stiamo cercando la temperatura t3.

Per trovarla cerchiamo le tabelle del vapore surriscaldato alla pressione di 0,7 bar (in figura)

Nella tabella partiamo nel cercare l'entalpia da cui riusciamo a ricavare la temperatura che sarà compresa tra 160°C e 200°C essendo le tabelle discrete.

Essendo compresa i due valori andiamo a fare un'interpolazione e la più semplice è l'**interpolazione lineare**.

T °C	v m³/kg	u kJ/kg	h kJ/kg	s kJ/kg · K
$p = 0,06 \text{ bar} = 0,006 \text{ MPa}$ ( $T_{st} = 36,16^\circ\text{C}$ )				
Sat.	23.739	2425.0	2567.4	8.3304
80	27.132	2487.3	2650.1	8.5804
120	30.219	2544.7	2726.0	8.7840
160	33.302	2602.7	2802.5	8.9693
200	36.383	2661.4	2879.7	9.1398
240	39.462	2721.0	2957.8	9.2982
280	42.540	2781.5	3036.8	9.4464
320	45.618	2843.0	3116.7	9.5859
360	48.696	2905.5	3197.7	9.7180
400	51.774	2969.0	3279.6	9.8435
440	54.851	3033.5	3362.6	9.9633
500	59.467	3132.3	3489.1	10.1336

Sat.	2365	2494,5	2660,0	7.4797
100	2.434	2509,7	2680,0	7.5341
120	2.571	2539,7	2719,6	7.6375
160	2.841	2599,4	2798,2	7.8279
200	3.108	2659,1	2876,7	8.0012
240	3.374	2719,3	2955,5	8.1611
280	3.640	2780,2	3035,0	8.3162
320	3.905	2842,0	3115,3	8.4504
360	4.170	2904,6	3196,5	8.5828
400	4.434	2968,2	3278,6	8.7086
440	4.698	3032,9	3361,8	8.8286
500	5.095	3131,8	3488,5	8.9991

Dobbiamo quindi fare un'interpolazione lineare.  
Rivediamo il moto uniformemente accelerato:

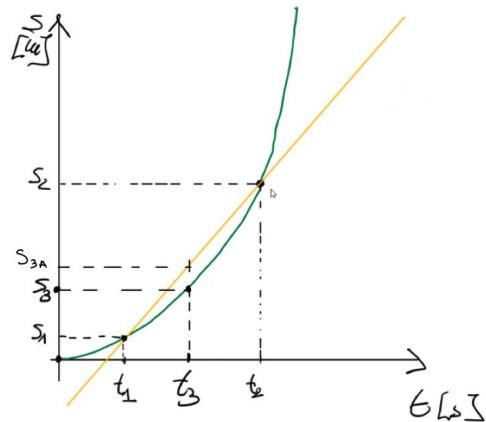
$$S = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow S = S(t)$$

Immaginando di non conoscere la legge verde dello spazio possiamo pensare di ottenerla per punti misurando lo spazio tra diversi istanti.

Volendo conoscere lo spazio in un tempo intermedio (senza conoscere la sua legge matematica) possiamo calcolarne la retta passante per gli estremi su cui leggiamo il valore in corrispondenza di  $t_3$  ottenendo un valore **approssimato**.

Retta passante per due punti:

$$\frac{s_3 - s_1}{t_3 - t_1} = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_1} \implies s_3 = \dots$$



Tornando all'esercizio:

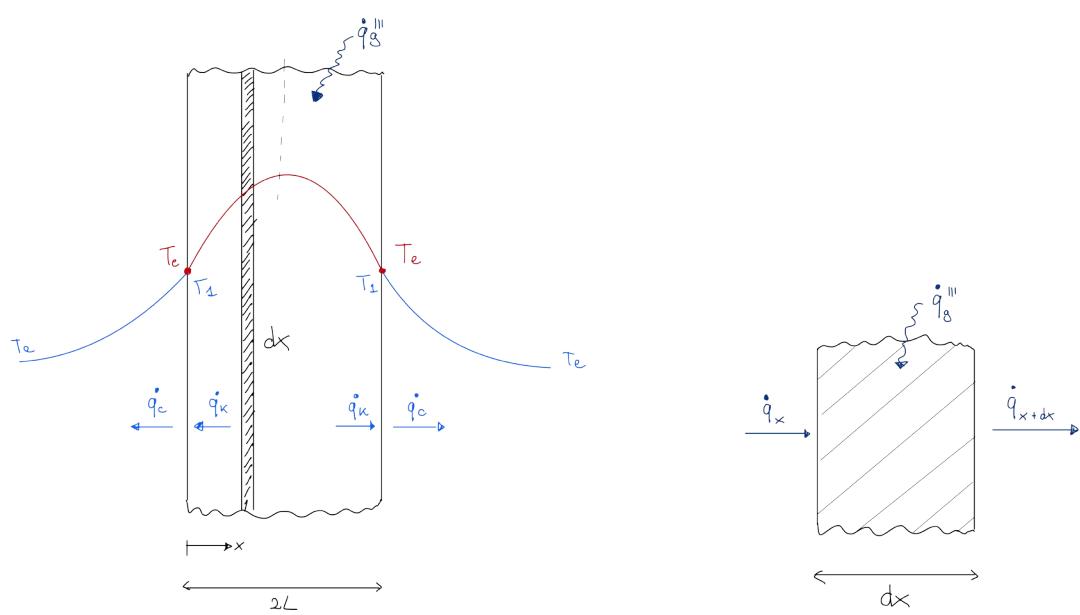
	$t [^{\circ}\text{C}]$	$h [\text{kJ/kg}]$
$i$	160	2798
	$t_3$	$h_3 = h_i = 2804$
$i+1$	200	2877

$$\Rightarrow \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_1} = \frac{h_3 - h_1}{h_2 - h_1} \Rightarrow t_3 = 163^{\circ}\text{C}$$



# FISICA TECNICA

## Settimana 8



# Indice settimana 8

Indice settimana 8	2
martedì 10 novembre 2020 - Ricevimento - Panoramica generale	3
martedì 10 novembre 2020 - Lezione 19	4
Termocinetica	4
Conduzione	4
Irraggiamento termico	4
Convezione	5
Conduzione monodimensionale in geometria piana	5
Conduzione monodimensionale in geometria cilindrica	6
Conduzione monodimensionale in geometria sferica	7
Considerazioni fisiche sull'andamento di $T$ nella geometria piana	8
Geometria piana composta con materiali in serie	8
Geometria cilindrica composta	10
mercoledì 11 novembre - Lezione 20	12
Strutture composte o conduzione in mezzi multifase	12
Isolamento termico	16
Conduzione di calore in parete piana in cui c'è generazione di calore	17
Conduzione di calore in un cilindro pieno in cui c'è generazione di calore	19
Estensione della superficie per disperdere calore	21
giovedì 12 novembre - Lezione 21	23
Equazione generale della conduzione del calore: coordinate cartesiane	23
Equazione generale della conduzione del calore: coordinate cilindriche	24
Problema	24
Convezione forzata di una sfera	26
Problema del radiatore	27
Estensione del problema del radiatore	28
Problema di conduzione transitoria di una parete	30

martedì 10 novembre 2020 - Ricevimento - Panoramica generale

Siamo partiti dalle grandezze fisiche e dalle unità di misura.

Poi siamo passati al modo di misurarle:

- Barometro per la pressione assoluta o meglio quella rispetto la pressione atmosferica
- Manometro differenziale per la pressione relativa
- Fenomeni termoelettrici (anche se cronologicamente li abbiamo fatti dopo)
  - Effetto Seebeck
  - Effetto Peltier
  - Effetto Thompson
- In sospeso la temperatura (al 2° capitolo)
- In aggiunta possiamo inserire il capitolo 3 del libro di lezioni di termodinamica poiché si parla della pressione dei fluidi in moto come pressione assoluta (barometro che si muove insieme al fluido), pressione relativa (con presa statica), pressione dinamica e pressione totale.
- Temperatura, tuttavia manca da vedere gli strumenti per misurarla che vedremo essere il termometro a gas a volume cosante, termometro a resistenza, termocoppia (basata sul principio di Seebeck), termometri a dilatazione di liquido o solido, termometri a radiazione o pirometri (ci servirà la trasmissione del calore per irraggiamento)

Abbiamo poi introdotto la termodinamica classica dove abbiamo visto che siamo interessati agli scambi di lavoro e calore in entrambi i versi. Abbiamo visto sistemi e chiusi.

Importante: vogliamo descrivere questi scambi attraverso lo stato del sistema, dopo aver definito massa e composizione chimiche descriviamo le variabili che caratterizzano il sistema: variabili interne ( $p, v, T$ ) e le variabile esterne ( $w$ ).

Abbiamo definito il sistema in equilibrio e la trasformazione termodinamica con cui intendiamo una variazione dello stato del sistema, dividendola in trasformazioni aperte e cicliche.

Abbiamo introdotto il lavoro e introdotto la convenzione termodinamica per cui il lavoro è positivo se fatto dal sistema verso l'esterno. Poi abbiamo introdotto lavoro interno ed esterno facendo diverse considerazioni.

Abbiamo poi introdotto una definizione termodinamica di lavoro e una definizione operativa che ci permette di considerare anche il lavoro elettrico.

Abbiamo poi parlato di temperatura e visto come il S.I. Assegna il punto fisso del punto triplo dell'acqua assegnando **273,16 K**

Abbiamo poi introdotto il calore e la sorgente di calore. La definizione operativa l'abbiamo data più avanti, dopo avere introdotto il 1 principio della termodinamica.

SI CHIUDE COSÌ IL 2° CAPITO DEL LIBRO.

Abbiamo visto al termodinamica dove studiamo le interazioni forze/calore.  
 Poi la termofluidodinamica dove parliamo dell'integrazione dell'equazione di Bernoulli e di Eulero.  
 Adesso parliamo di:

## Termocinetica

Si suddivide a sua volta in tre modalità di trasmissione di calore:

### Conduzione

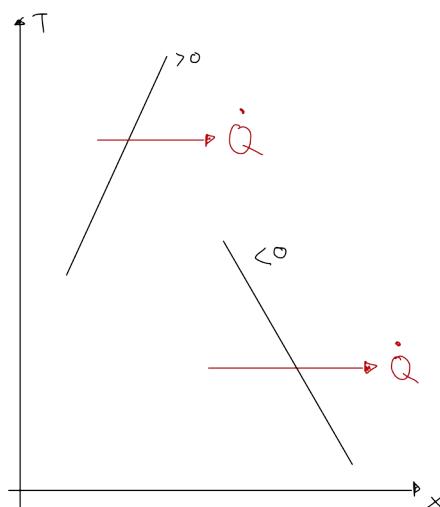
Non ci interessano gli aspetti microscopici (a cui prestano attenzione fisici e chimici) ma l'aspetto macroscopico. La conduzione è un meccanismo che avviene nei corpi in modo microscopico a seguito di una differenza di temperatura. Si osserva che se si prende un corpo soggetto ad una differenza di temperatura dopo un tempo molto grande le varie parti del corpo non presenteranno più differenza di temperatura.

Potremmo dire che c'è stata una trasmissione di calore da una zona a temperatura maggiore a una a temperatura minore.

Dal punto di vista macroscopico utilizziamo leggi microscopiche e la legge fondamentale è la **legge di Fourier** che dice:

$$\dot{Q} = -kS \frac{dT}{dx}$$

Cioè il calore scambiato (per unità di massa) è proporzionale al gradiente di temperatura rispetto la superficie normale alla superficie isoterma, alla superficie di scambio e ad una costante definita dalla legge di Fourier stessa e prende il nome di **conducibilità** (o conduttività) **termica**. Il segno meno rispetta il verso del calore che va dalle zone a temperatura superiore alle zone a temperatura inferiore.



Vediamo come, nel grafico, se  $\frac{dT}{dx} > 0$  il verso di  $\dot{Q}$  è opposto al verso di crescita delle  $x$ .

La legge esprime una legge causa-effetto dove la causa è una differenza di temperatura espressa però tramite il gradiente, cioè la causa vera e propria è il gradiente di temperatura.

Si ha la **conducibilità termica**  $[k] = \frac{W}{mK}$

DAL PUNTO DI VISTA DIDATTICO QUESTA PARTE SEGUE IL LIBRO DI FRANK KREITH - TRASMISSIONE DEL CALORE. SUL LIBRO SONO RIPORTATE ANCHE LE TABELLE DI CONDUCIBILITÀ TERMICA PER I VARI MATERIALI.

I materiali con  $k$  elevatissimo sono i solidi metallici (platino, rame) e poi le leghe metalliche, poi i solidi non metallici, poi i liquidi metallici, poi i liquidi non metallici, poi gli oli, poi l'acqua, poi gli aeriformi fino all'aria.

L'aria è l'isolante con la conduttività termica più piccola.

In realtà esistono gli aereogel con conducibilità ancora più basse ma sono molto più costosi.

### Irraggiamento termico

È la trasmissione di calore nel vuoto.

Un ottimo esempio è il termos. Nel termos le due pareti sono separate dal vuoto e quindi come fa a trasmettersi questo qualcosa (che chiamiamo calore per irraggiamento) attraverso il vuoto. Vedremo che quello che avviene è differente dalle classiche trasmissioni di calore e gli si da un'interpretazione di origine elettromagnetica.

Ad esempio una navicella spaziale a temperatura  $T_1$  nel vuoto dove l'universo è a temperatura  $T_2 \approx 3K$  la navicella si raffredda, però non si raffredda per conduzione poiché non c'è un mezzo interposto ma si raffredda a causa di un meccanismo onda-particella.

Il corpo a temperatura maggiore produce un'onda elettromagnetica di origine termica che tende a disperdere il calore.

Vedremo più avanti meglio.

## Convezione

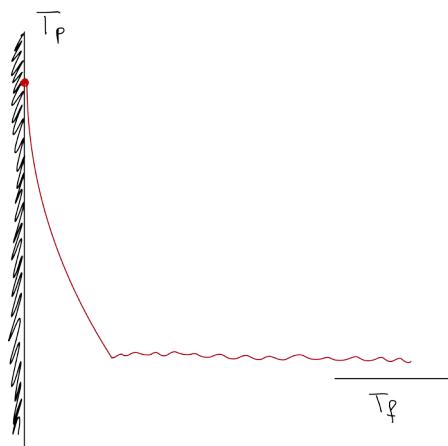
Mentre la conduzione è fondamentale e avviene microscopicamente e l'irraggiamento è di origine elettromagnetica ed uniforma le temperature di due corpi, la convezione non è un meccanismo fondamentale ma si basa sulla conduzione nel fluido, un moto nel fluido, e la conduzione nel solido. Ci può essere anche una parte di trasmissione con le onde elettromagnetiche in fluidi trasparenti.

Dal punto di vista ingegneristico lo consideriamo come un *meccanismo combinato* di trasmissione di calore tra un corpo solido a temperatura  $T_p$  (spesso una parete) e un fluido a temperatura  $T_f$  che si muove a causa di un ventilatore o una pompa (convezione forzata) o convezione naturale. Questo ci permette di dividere la convezione in forzata e naturale.

La legge del raffreddamento proposta da Newton dice che il calore scambiato  $\dot{q} = hS(T_p - T_f)$  è quindi proporzionale alla differenza di temperatura (la causa) a cui si oppone  $hS$ , la superficie di scambio e un coefficiente  $h$  che assume la funzione di una conduttanza (o condutività).

Questa non è una legge fisica ma empirica ( $h$  è un parametro empirico e dipende dalle caratteristiche termofluidodinamiche del moto tra fluido e parete).

L'andamento di temperatura si rappresenta come in figura:



Dove la variazione principale avviene in uno strato di fluido adiacente alla parete che prende il nome di strato limite.

## Conduzione monodimensionale in geometria piana

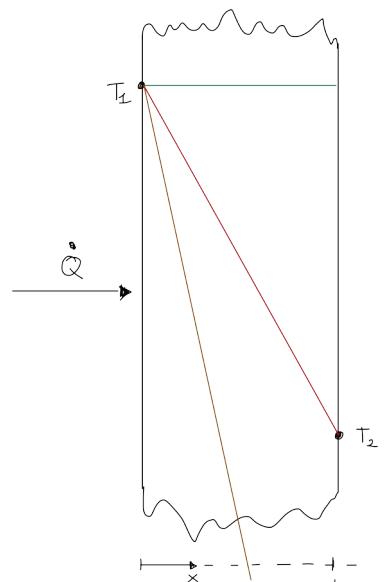
si consideri uno strato di materiale infinitamente esteso e limitato da un'isoterma  $T_1$  in cui  $x = 0$  e da una temperatura  $T_2$  a distanza  $L$ .

Supponiamo regime stazionario e la differenza di temperatura ci darà una trasmissione di calore.

Applico l'equazione di Fourier:

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= -kS \frac{dT}{dx} \rightarrow \dot{Q} dx = -kS dT \\ \int_0^L \dot{Q} dx &= - \int_{T_1}^{T_2} kS dT, \text{ con } \dot{Q} = \text{cost} \text{ e } k = \text{cost} \\ \dot{Q} L &= -kS (T_2 - T_1) \text{ e allora } \dot{Q} = \frac{kS}{L} (T_1 - T_2)\end{aligned}$$

Adesso vogliamo vedere la relazione tra il gradiente di temperatura e la proprietà  $k$  e quindi analizziamo questo  $\dot{Q}$  mettendolo in relazione con vari tipi di materiale. Cioè assegnati:



$S, L$  allora il valore  $k$  è legato al  $\Delta T$  ovvero:

$$\dot{Q} = \frac{kS}{L} (T_2 - T_1) = \frac{k''S}{L} (T_2'' - T_1')$$

Cioè possiamo osservare che è il prodotto di  $k \cdot \Delta T$  a dover essere costante e quindi in conclusione se prendo il rame con  $K$  elevato avrò  $T_1 - T_2$  molto piccolo mentre prendendo un isolante con  $k$  più piccolo avremo un  $\Delta T$  molto più grande.

E infatti integrando per la generica sezione  $x$  si ottiene  $\int_0^x \dot{Q} dx = - \int_{T_1}^T kS dT \rightarrow \dot{Q}x = -kS(T - T_1)$

E allora  $T = T_1 - \frac{\dot{Q}}{kS}x$  e quindi se  $k$  è costante la temperatura diminuisce linearmente lungo  $x$ .

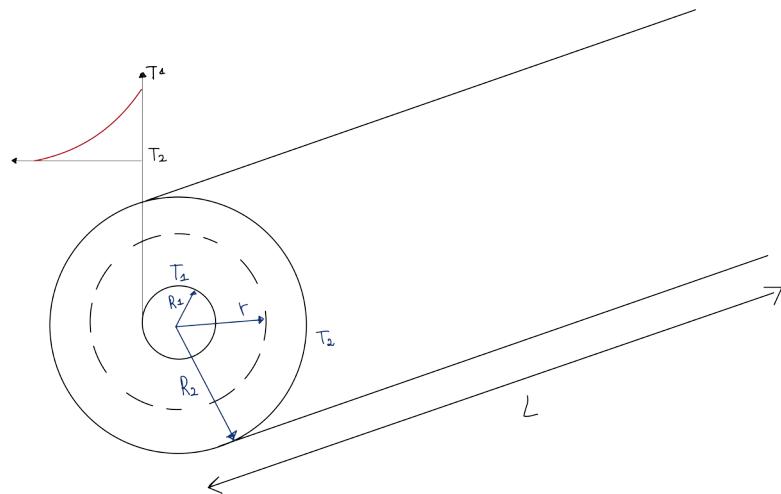
Dalla pendenza dell'andamento della temperatura  $T$  si può subito capire se il materiale è altamente conduttivo o poco conduttivo:

- Se  $k \rightarrow \infty$  (altamente conduttivo) si ha  $\Delta T \rightarrow 0$
- Se  $k \rightarrow 0$  (isolante) si ha  $\Delta T \rightarrow \infty$

### Conduzione monodimensionale in geometria cilindrica

Prendiamo un tubo come quelli che portano l'acqua al radiatore, un tubo di materiale metallico di un certo spessore.

Allora  $\frac{dT}{dr}$  è la normale alla superficie isoterma (superficie del cilindro)



Allora la legge di Fourier ci dice che:  $\dot{Q} = -kS \frac{dT}{dr}$

Integrando:

$$\dot{Q} \frac{dr}{S} = -k dT \rightarrow \dot{Q} \frac{dr}{2\pi r L} = -k dT \rightarrow \dot{Q} \frac{dr}{r} = -2\pi k L dT$$

Qui  $S$  varia con il raggio e allora:

$$\int_{R_1}^{R_2} \dot{Q} \frac{dr}{r} = - \int_{T_1}^{T_2} 2\pi k L dT \rightarrow \dot{Q} \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right) = -2\pi k L (T_2 - T_1)$$

$$\text{Allora } \dot{Q} = \frac{2\pi k L}{\ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)} (T_2 - T_1)$$

C'è nuovamente un legame tra causa ed effetto dove la proporzionalità è data dalla **conduttanza complessiva** attraverso il cilindro, che se ne facciamo il reciproco diventa ala resistenza complessiva al passaggio del calore.

Se facciamo l'integrale fino alla generica superficie cilindrica di raggio  $r$  otteniamo:

$$\dot{Q} \ln \left( \frac{r}{R_1} \right) = 2\pi k L (T_1 - T)$$

Questa volta l'andamento temperatura-raggio è in funzione di logaritmico.

## Conduzione monodimensionale in geometria sferica

Vale lo stesso ragionamento:

$$\dot{Q} = -kS \frac{dT}{dr}$$

Dove separo le variabili ed integro

$$\dot{Q} = -k4\pi r^2 \frac{dT}{dr}$$

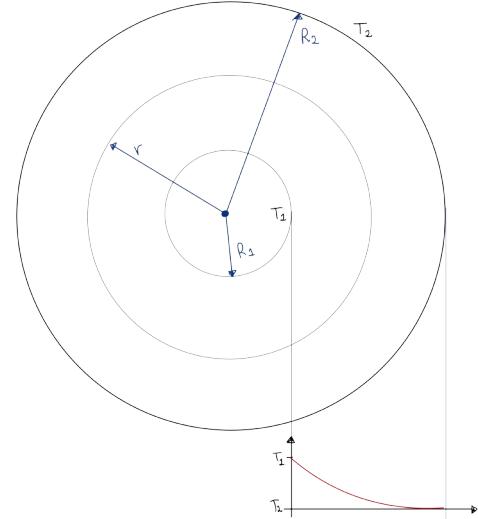
$$\dot{Q} \frac{dr}{r^2} = -4\pi k dT \rightarrow \dot{Q} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{R_1}^{R_2} = 4\pi k (T_1 - T_2)$$

$$\dot{Q} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = 4\pi k (T_1 - T_2)$$

Invece, se integriamo fino alla generica superficie di raggio  $r$  otteniamo:

$$\dot{Q} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right) = 4\pi k (T_1 - T)$$

Allora in questo caso la variazione temperatura-raggio è del tipo  $\frac{1}{r}$



Se invece  $k \neq \text{cost}$

Possiamo esplorare in funzione della temperatura, quindi consideriamo  $k = a + bT$ , con  $b \begin{cases} > 0 & \text{se } k \text{ aumenta con } T \\ < 0 & \text{se } k \text{ diminuisce con } T \end{cases}$

Allora vediamo cosa cambia per i casi precedenti:

Per la **geometria piana**:

$$\int_0^x \dot{Q} dx = - \int_{T_1}^T (a + bT) S dT$$

$$\dot{Q} x = -S \left[ aT + \frac{bT^2}{2} \right]_{T_1}^T \quad \text{cioè un legame del 2° ordine tra } T \text{ ed } x,$$

$$\int_0^L \dot{Q} dx = - \int_{T_1}^{T_2} (a + bT) S dT$$

$$\dot{Q} L = -S \left[ aT + \frac{bT^2}{2} \right]_{T_1}^{T_2} = -S \left[ a(T_2 - T_1) + \frac{b}{2} (T_2^2 - T_1^2) \right] = -S (T_2 - T_1) \underbrace{\left[ a + \frac{b}{2} (T_2 - T_1) \right]}_{=k_m}$$

dove  $k_m$  è proprio  $k$  valutato alla  $T_m = \frac{T_2 + T_1}{2}$

$$\text{Allora } \dot{Q} L = k_m S (T_1 - T_2)$$

Allora abbiamo trovato che la soluzione analitica della conduzione monodimensionale con  $k \neq \text{cost}$  ed è identica a quella in cui si suppone costante, dove come valore costante se ne prende la sua media  $k_m$ .

Si vede che questo vale anche per gli altri due casi monodimensionali:

Per la **geometria cilindrica** rimane lo stesso termine a destra e quindi

$$\dot{Q} \ln \left( \frac{r}{R_1} \right) = 2\pi k_m L (T_1 - T)$$

Per la **geometria sferica** vale lo stesso discorso:

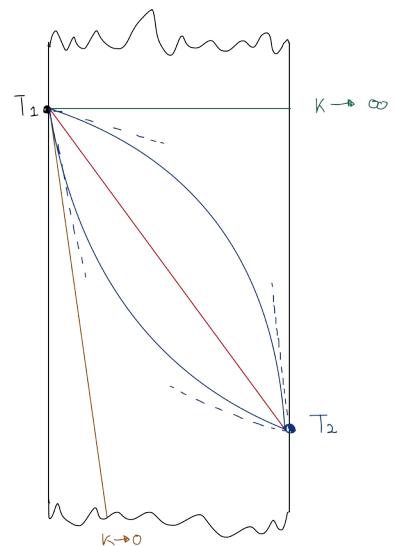
$$\dot{Q} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right) = 4\pi k_m (T_1 - T)$$

## Considerazioni fisiche sull'andamento di $T$ nella geometria piana

Possiamo fare un ragionamento fisico tra l'andamento delle temperature nello stato piano, dove se  $k = \infty$  era orizzontale, se  $k = 0$  era praticamente verticale. Mentre se era finito si aveva l'andamento in rosso.

Abbiamo visto un legame quadratico in questo caso quindi sarà una curva che può stare sopra o sotto la curva lineare. Per vedere questo se  $b > 0$  allora  $k$  cresce con la temperatura e quindi è maggiore dove è maggiore la temperatura e allora il profilo è più orizzontale.

Considerazioni opposte per  $b < 0$ .



### VEDIAMO DELLE CONSIDERAZIONI FISICHE SIMILARI NEL CASO DELLA CONVEZIONE.

Abbiamo visto come la convezione è un meccanismo per il quale un fluido si muove rispetto una parete (la supponiamo a temperatura più elevata  $T_p$ ).

Abbiamo visto che la variazione di temperatura è concentrata nello strato limite dopodiché nel fluido si può considerare costante.

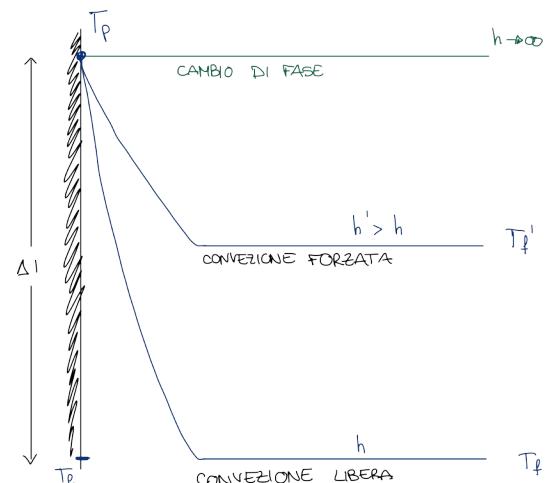
Per la legge di Newton esiste una relazione tra l'effetto  $\dot{Q}$  e la causa ovvero la differenza di temperatura. Cioè  $\dot{Q} = hS(T_p - T_f)$ .

Supponendo una parte di superficie costante posso ottenere lo stesso risultato per varie combinazioni di  $h \cdot \Delta T$ .

Osservando gli estremi se  $h \rightarrow \infty$  allora la differenza di temperatura va a zero e questo avviene quando il fluido cambia di fase

Quando  $h \rightarrow 0$  si ha la convezione libera o naturale.

Nel mezzo si ha la convezione forzata con un  $h' > h$  e quindi un  $\Delta T$  intermedio.



Ad esempio:

Nello studio termofluidodinamico del corpo umano si vede che se una persona è ferma in aria ferma si osserva la semplice convezione naturale (o libera) del fluido, con uno scambio di calore piccolo.

Se invece c'è un ventilatore o c'è vento, si osserva la convezione forzata poiché l'aria che lambisce il corpo è sempre nuova e così aumenta  $h$ .

Invece, ci si avvicina al caso limite in cui  $h \rightarrow \infty$  quando si ha un cambio di fase, cioè vaporizzazione o condensazione.

## Geometria piana composta con materiali in serie

Esempio una parete (mattoni-intonaco) o il corpo umano (pelle-grasso-muscolo).

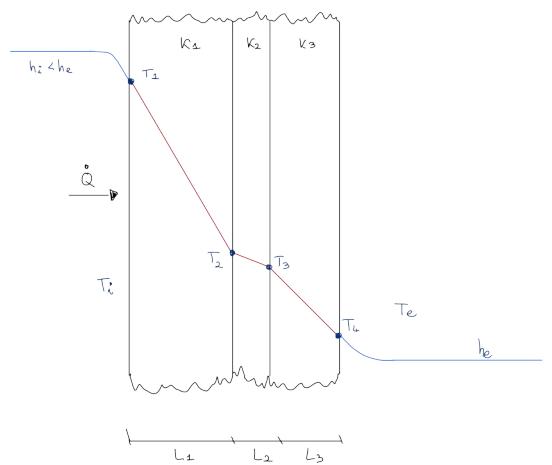
Supponiamo quindi uno strato piano con una temperatura interna  $T_i = 20^\circ$  e all'esterno  $T_e = 0^\circ$ . Un primo strato di materiale di conduttività  $k_1$  e spessore  $L_1$ , poi un secondo strato di conduttività  $k_2$  con spessore  $L_2$  e un terzo strato  $k_3, L_3$ .

Vedendo questa distribuzione di temperatura posso già dire che dalla pendenza dei segmenti  $k_3 > k_2 > k_1$  poiché ci da un  $\Delta T$  più piccolo.

Si osservi che  $k_i$  può essere o il valore medio o il valore costante nell' $i$ -esimo strato. Ad esempio  $k_3$  di pietra con un  $k$  più elevato, poi la malta e poi l'aria avrei potuto costruire questo andamento.

C'è allora un flusso di calore da sinistra verso destra e in regime stazionario questo sarà sempre lo stesso.

In conclusione posso scrivere l'equazione di Newton per il fluido all'interno dell'edificio:



$$\dot{Q} = h_i S (T_i - T_1) \longrightarrow T_i - T_1 = \frac{\dot{Q}}{h_i S}$$

E le equazioni di Fourier:

$$\dot{Q} = \frac{k_1 S}{L_1} (T_1 - T_2) \longrightarrow T_1 - T_2 = \frac{\dot{Q} L_1}{k_1 S}$$

$$\dot{Q} = \frac{k_2 S}{L_2} (T_2 - T_3) \longrightarrow T_2 - T_3 = \frac{\dot{Q} L_2}{k_2 S}$$

$$\dot{Q} = \frac{k_3 S}{L_3} (T_3 - T_4) \longrightarrow T_3 - T_4 = \frac{\dot{Q} L_3}{k_3 S}$$

E Newton all'esterno:

$$\dot{Q} = h_e S (T_4 - T_e) \longrightarrow T_4 - T_e = \frac{\dot{Q}}{h_e S}$$

Allora isolando la causa dagli effetti posso scrivere le relazioni di destra.

Facendo la somma di tutti i termini di sinistra delle temperature rimane  $T_i - T_e$  e  $\frac{\dot{Q}}{S}$  rimane lo stesso per tutti i termini e allora:

$$T_i - T_e = \frac{\dot{Q}}{S} \left( \frac{1}{h_i} + \frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2} + \frac{L_3}{k_3} + \frac{1}{h_e} \right)$$

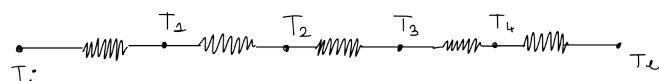
Scrivendo in una forma più semplificata  $\dot{Q} = Su (T_e - T_i)$  dove  $u$  contiene le informazioni di condutività degli strati della parete e del tipo di convezione nei 2 ambienti.

Allora eguagliando le espressioni si trova la **resistenza complessiva di scambio di calore** ovvero:

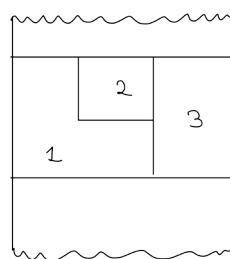
$$\frac{1}{u} = \frac{1}{h_i} + \frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2} + \frac{L_3}{k_3} + \frac{1}{h_e}$$

Dove  $u$  prende il nome di **coefficiente global di scambio termico**, ed è la conduttanza complessiva  $[u] = \frac{W}{m^2 K}$

Per fare l'analogia elettrica possiamo vedere come il legame tra causa ed effetto è la somma di tre termini che si oppongono al legame causa effetto e la somma delle diverse resistenze in serie è l'analogo per un circuito elettrico del circuito termico.



Nella realtà spesso i diversi materiali del muro non sono tutti in serie ma in parte in serie e in parte in parallelo .



## Geometria cilindrica composta

Per le applicazioni meccaniche supponiamo il tubo che porta l'acqua al termosifone ricoperto di isolante, il fluido che scorre all'interno avrà una convezione forzata e un  $h_1$  molto elevato.

Per le applicazioni elettriche supponiamo un cavo di rame ricoperto di isolante (sia elettrico che termiche).

Può anche essere fatto come esempio della dispersione termica in un braccio/gamba in cui si immagina il sangue come il fluido che scorre.

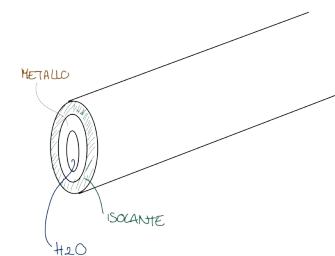
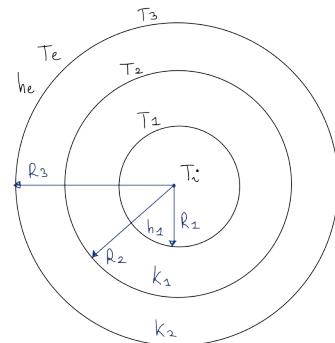
Scrivono le diverse espressioni che assume il calore  $\dot{Q} = \text{cost}$  nei vari strati, con le leggi di Newton e Fourier abbiamo:

$$\dot{Q} = h_1 \cdot 2\pi R_1 L (T_i - T_1) \rightarrow T_i - T_1 = \frac{\dot{Q}}{2\pi R_1 L h_1}$$

$$\dot{Q} = \frac{2\pi L k_1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} (T_1 - T_2) \rightarrow T_1 - T_2 = \frac{\dot{Q} \ln\left(R_2/R_1\right)}{2\pi L k_1}$$

$$\dot{Q} = \frac{2\pi L k_2}{\ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right)} (T_2 - T_3) \rightarrow T_2 - T_3 = \frac{\dot{Q} \ln\left(R_3/R_2\right)}{2\pi L k_2}$$

$$\dot{Q} = h_e \cdot 2\pi R_3 L (T_3 - T_e) \rightarrow T_3 - T_e = \frac{\dot{Q}}{2\pi R_3 L h_e}$$



Esplicitiamo allora le differenze di temperatura in tutte le espressioni scritte, sommando otteniamo:

$$T_i - T_e = \dot{Q} \left( \frac{1}{2\pi R_1 L h_1} + \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi L k_1} + \frac{\ln(R_3/R_2)}{2\pi L k_2} + \frac{1}{2\pi R_3 L h_e} \right)$$

In questo caso vogliamo una relazione tra  $\dot{Q}$  e  $(T_i - T_e)$  del seguente tipo, definita rispetto alla superficie esterna  $S_3$  dell'isolante, ovvero  $\dot{Q} = u S_3 (T_i - T_e)$

$$\text{Quindi otteniamo } \frac{1}{u S_3} = \frac{T_i - T_e}{\dot{Q}} = \left[ \frac{1}{2\pi R_1 L h_1} + \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi L k_1} + \frac{\ln(R_3/R_2)}{2\pi L k_2} + \frac{1}{2\pi R_3 L h_e} \right]$$

Esplicitando la superficie esterna  $S_3 = 2\pi R_3 L$

$$\text{Cioè } \frac{1}{u 2\pi L R_3} = [\cdot]$$

$$\text{Da cui portando a destra: } \frac{1}{u R_3} = [\cdot] \cdot 2\pi L = \left[ \frac{1}{R_1 h_1} + \frac{\ln(R_2/R_1)}{k_1} + \frac{\ln(R_3/R_2)}{k_2} + \frac{1}{R_3 h_e} \right] \text{ funzione di } R_3$$

$$\text{Con anche } \frac{1}{u R_3} = 2\pi L \frac{(T_i - T_e)}{\dot{Q}}$$

Allora si vede come variando  $R_3$  si hanno variazioni opposte dove un termine aumenta e uno diminuisce, questo fisicamente significa che se aumenta la superficie esterna  $S_3$  aumenta il calore scambiato per convezione ma aumenta anche lo spessore dell'isolante e quindi dovrebbe diminuire il calore scambiato.

Possiamo allora studiare i due effetti differenti derivando :

$$\frac{d}{d R_3} f(R_3) = \frac{1}{k_2} \frac{R_2}{R_3} \cdot \frac{1}{R_2} - \frac{1}{h_e} \cdot \frac{1}{R_3^2} \doteq 0 \rightarrow \frac{1}{k_2} = \frac{1}{h_e R_3}$$

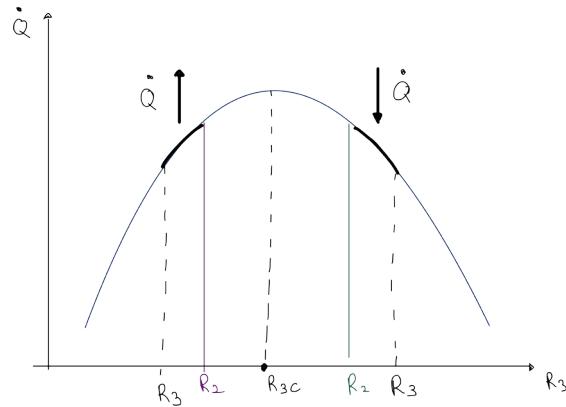
E allora:  $R_{3C} = \frac{k_2}{h_e}$  è il raggio critico dell'isolante che quindi da un estremo a questa funzione.

$$\text{Derivando un'altra volta: } \frac{d^2}{d R_3^2} f(R_3) = -\frac{1}{k_2 R_3^2} + \frac{2}{h_e R_3^3} = -\frac{1}{k_2} + \frac{3}{h_e R_3}$$

E con  $R_3 = R_{3c}$  ottengo  $\frac{d^2}{dR_3^2}f(R_3) = \frac{1}{k_2} > 0$  e allora  $R_{3c}$  è un minimo per  $f(R_3)$

Quindi è un massimo per  $\dot{Q}$ .

Riportando il calore scambiato in funzione di  $R_3$  si ha :



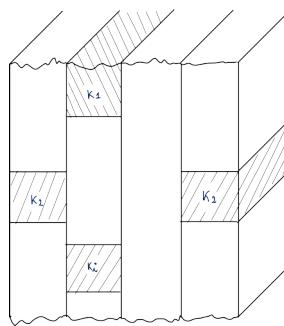
Il valore  $R_{3c}$  si trova essere un valore numerico che fisicamente corrisponde a qualche millimetro ma nella realtà per le applicazioni meccaniche questo valore è più grande perché mettendo l'isolante ci portiamo ad un valore maggiore di quello critico e allora siamo nella zona in cui aumentando lo spessore dell'isolante diminuisce il calore scambiato verso l'esterno.

Per le applicazioni elettriche con piccoli cavi inferiori a pochi millimetri, immaginiamo un cavo  $R_2$  (in viola) e se ci mettiamo un isolante (elettrico e anche termico, sono correlati) aumentiamo il raggio e questo significa che dissipiamo di più poiché stiamo aumentando la superficie esterna.

In conclusione, mentre per le applicazioni meccaniche aumentare l'isolante fa diminuire il calore scambiato (quello che vogliamo) nelle applicazioni elettriche dove vogliamo dissipare il calore aumentare il raggio dell'isolante fa aumentare il calore scambiato e quindi conviene portare l'isolante verso il raggio critico.

## Strutture composte o conduzione in mezzi multifase

In un edificio si pensi ai mattoni piedi, mattoni forati, malta, ecc o al corpo umano dove ossa, grasso, muscolo ecc non sono uniformemente distribuite.



Conduzione bifasica solido-fluido:

Supponiamo di avere un insieme di sfere l'una sull'altra con temperature diverse tra testa e fondo ci sarà una trasmissione di calore dall'alto (più caldo) verso il basso (più freddo) che passa attraverso l'aria nei pori lasciati liberi tra le sfere (particelle impacchettate).

Le particelle possono impacchettarsi, tra le varie disposizioni, in celle cubiche o, per considerazioni di equilibrio, tendono a disporsi l'una nell'incavo creato tra le tre particelle dello strato inferiore con un rapporto tra il volume totale e quello dei vuoti variabile a seconda dell'impacchettamento.

Consideriamo particelle con diametro uguale.

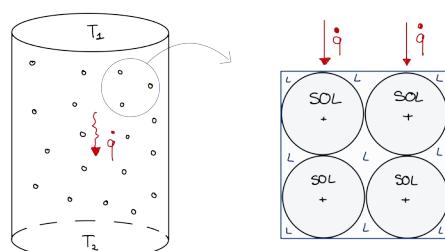
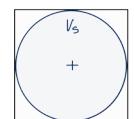
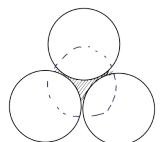
Se fossero una sull'altra potremmo considerare il volume cubico intorno ogni particella e indicando con  $\epsilon$  il rapporto tra volume dei vuoti e quello totale e prende il nome di **porosità**  $\epsilon = \frac{V_v}{V_{tot}}$  e  $1 - \epsilon = \frac{V_s}{V_t}$  dove

con  $V_s$  intendiamo il volume del solido.

$$\text{Quindi avremo che: } \begin{cases} \epsilon_{\max} = 0,46 \text{ sfera nel cubo} \\ \epsilon_{\min} = 0,26 \end{cases},$$

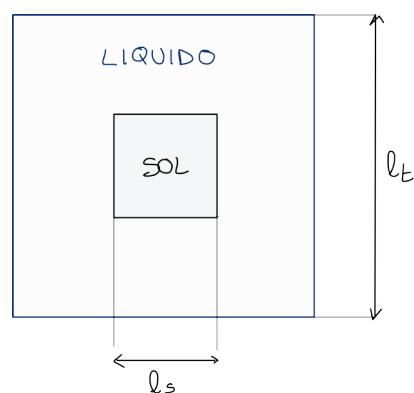
e allora sperimentalmente si vede un valor medio per  $\epsilon_{reale}$  intorno a **0,36**.

Il contatto tra una particella è l'altra è sempre in un punto e il calore scambiato è proporzionale alla superficie.



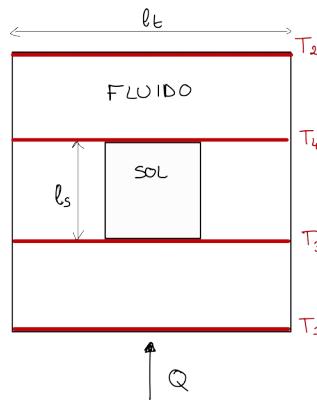
Per ricondurre la  $\epsilon_{reale}$  al caso generico si considera un cubo solido dentro un cubo mettendo in relazione le dimensioni

$$\text{attraverso la porosità } \epsilon = \frac{V_V}{V_t} = 1 - \frac{l_s^3}{l_t^3} = 1 - \frac{1}{\beta^3} \text{ assegnando } \beta = \frac{l_t}{l_s}$$



Allora per risolvere in maniera semplificata questo problema supponiamo di avere una temperatura  $T_2$  sulla faccia superiore e  $T_1 > T_2$  sulla faccia inferiore e quindi per risolverlo in maniera esatta devo supporre che le isoterme siano parallele a quelle estremali, quindi l'ipotesi di isoterme parallele o flussi di calore in serie (1) oppure l'ipotesi di flussi di calore in parallelo (2).

Caso (1):



Quindi la legge di Fourier tra 1 e 3 dice che  $Q_{1 \rightarrow 3} = k_F \cdot l_t^2 \cdot \frac{(T_1 - T_3)}{\frac{l_t - l_s}{2}}$  e analogo tra 4 e 2:  $Q_{4 \rightarrow 2} = k_F \cdot l_t^2 \cdot \frac{(T_2 - T_4)}{\frac{l_t - l_s}{2}}$ .

Per la zona centrale la superficie è il lato del quadrato.

Supponiamo che il calore scambiato sia tra i lati con il fluido sia con il solido sia in totale uguale a  $Q$ .

$$\text{Ovvero } Q = k_F (l_t^2 - l_s^2) \left( \frac{T_3 - T_4}{l_s} \right) + k_s l_s^2 \frac{(T_3 - T_4)}{l_s}$$

$$\Leftrightarrow Q_{3 \rightarrow 4} = (T_3 - T_4) \left[ k_F \frac{(l_t^2 - l_s^2)}{l_s} + k_s \frac{l_s^2}{l_s} \right]$$

Per la stazionarietà  $Q_{4 \rightarrow 3} = Q_{3 \rightarrow 4} = Q_{4 \rightarrow 2} = Q$

Allora

$$\text{Da } Q_{3 \rightarrow 4} \text{ si ha } (T_3 - T_4) = \frac{Q}{k_F \frac{l_t^2 - l_s^2}{l_s} + k_s \frac{l_s^2}{l_s}}$$

$$\text{Da } Q_{1 \rightarrow 3} \text{ si ha: } (T_1 - T_3) = \frac{Q}{k_F l_t^2 \cdot \frac{2}{l_t - l_s}}$$

$$\text{Da } Q_{4 \rightarrow 2} \text{ si ha } (T_4 - T_2) = \frac{Q}{k_F l_t^2 \cdot \frac{2}{l_t - l_s}}$$

$$\text{E sommando membro a membro si ha } (T_1 - T_2) = Q \left[ \frac{1}{k_F l_t^2 \cdot \frac{2}{l_t - l_s}} + \frac{1}{k_F l_t^2 \cdot \frac{2}{l_t - l_s}} + \frac{1}{k_F \frac{l_t^2 - l_s^2}{l_s} + k_s \frac{l_s^2}{l_s}} \right]$$

$$\text{Allora } (T_1 - T_2) = Q \left[ \frac{(l_t - l_s)}{k_F l_t^2} + \frac{1}{k_F \frac{l_t^2 - l_s^2}{l_s} + k_s l_s} \right]$$

$$\text{Allora voglio cercare un } k \text{ effettivo (o equivalente) tale che: } Q = k_{eff_T} \cdot l_t^2 \frac{(T_1 - T_2)}{l_t}$$

Dove il pedice  $T$  ricorda il fatto che è a temperatura costante.

Quindi ottengo:

$$k_{effT} = \frac{k_F}{l_t^2} \cdot \frac{1}{\frac{l_t - l_s}{k_F l_t^2} + \frac{1}{k_F \frac{l_t^2 - l_s^2}{l_s} + k_s l_s}}$$

$$\frac{1}{k_{effT}} = l_t \left[ \frac{(l_t - l_s)}{k_F l_t^2} + \frac{1}{k_F \frac{l_t^2 - l_s^2}{l_s} + k_s l_s} \right] = \frac{(l_t - l_s)}{k_F l_t} + \frac{l_t}{k_F \frac{l_t^2 - l_s^2}{l_s} + k_s l_s}$$

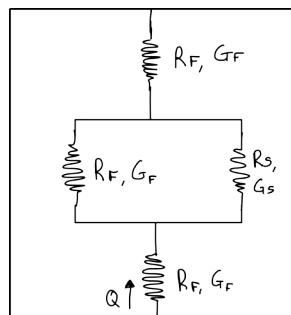
$$\frac{1}{k_{effT}} = \frac{\frac{(l_t - l_s)}{l_s}}{k_F \frac{l_t}{l_s}} + \frac{\frac{l_t}{l_s}}{k_F \frac{1}{l_s} \frac{l_t^2 - l_s^2}{l_s} + k_s} = \frac{\beta - 1}{k_F \beta} + \frac{\beta}{k_F (\beta^2 - 1) + k_s},$$

dove  $\beta = \frac{l_t}{l_s}$  e allora si ottiene  $k_{effT} = f(k_F, k_s, \beta, \epsilon)$  come :

$$\frac{1}{k_{effT}} = \frac{\beta - 1}{k_F \cdot \beta} + \frac{\beta}{k_F (\beta^2 - 1) + k_s}$$

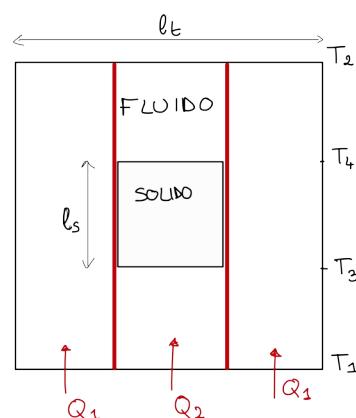
il coefficiente  $k_{effT}$  ha un significato fisico ben preciso: rappresenta il coefficiente di conducibilità termica di un **materiale omogeneo** che produce lo stesso flusso termico del materiale bifasico di partenza, tra le temperature  $T_2$  e  $T_1$ .

Ragionando con l'analogia elettrica possiamo dire che il circuito elettrico equivalente è il seguente:



C'è una resistenza del fluido iniziale, poi un parallelo tra il solido e il fluido e infine nuovamente il fluido.

Adesso passiamo al caso (2) dove ci sono sempre le isoterme  $T_1$  e  $T_2$  ma che ci sono flussi termici paralleli, ovvero un flusso nel fluido a sinistra, uno a destra e uno centrale che passa prima nel fluido, poi nel solido e poi nuovamente nel fluido.



Il calore totale sarà la somma dei due  $Q = Q_1 + Q_2$

$$\text{Allora il calore nel fluido sarà } Q_1 = k_F (l_t^2 - l_s^2) \left( \frac{T_1 - T_2}{l_t} \right)$$

Mentre per il calore  $Q_2$  identificando due temperature intermedie  $T_3$  e  $T_4$  troviamo :

$$Q_2 = k_F l_s^2 \underbrace{\frac{(T_1 - T_3)}{\frac{l_t - l_s}{2}}}_{Q_{1 \rightarrow 3}}, \text{ ma questo per la stazionaria deve essere anche uguale a quello che attraversa il fluido } 3 \rightarrow 4 \text{ e a quello}$$

$$4 \rightarrow 2, \text{ ovvero } Q_2 = k_s \cdot l_s^2 \cdot \underbrace{\frac{(T_3 - T_4)}{l_s}}_{Q_{3 \rightarrow 4}} = k_s \cdot l_s^2 \cdot \underbrace{\frac{(T_4 - T_2)}{l_s}}_{Q_{4 \rightarrow 2}}$$

$$\text{Allora da } Q_1: (T_1 - T_2) = \frac{Q_1}{k_F (l_t^2 - l_s^2) \frac{1}{l_t}}$$

$$\text{Da } Q_{1 \rightarrow 3}: (T_1 - T_3) = \frac{Q_2}{k_F l_s^2} \frac{(l_t - l_s)}{2}$$

$$\text{Da } Q_{3 \rightarrow 4}: (T_3 - T_4) = \frac{Q_2}{k_s l_s^2} l_s$$

$$\text{Da } Q_{4 \rightarrow 2}: (T_4 - T_2) = \frac{Q_2}{k_F l_s^2} \frac{(l_t - l_s)}{2}$$

Sommendo  $(T_1 - T_3)$ ,  $(T_3 - T_4)$ ,  $(T_4 - T_2)$  si ottiene:

$$(T_1 - T_2) = Q_2 \left[ \frac{(l_t - l_s)}{k_F l_s^2} + \frac{l_s}{k_s l_s^2} \right] \text{ e quindi } Q_2 = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{(l_t l_s)}{k_F l_s^2} + \frac{l_s}{k_s l_s^2}}$$

$$\text{Mentre da } Q_1, (T_1 - T_2) \text{ ricavo: } Q_1 = (T_1 - T_2) \left[ k_F \frac{(l_t^2 - l_s^2)}{l_t} \right] = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{l_t}{k_F (l_t^2 - l_s^2)}}$$

$$\text{E ricordando che } Q = Q_1 + Q_2 \text{ otteniamo } Q = (T_1 - T_2) \left[ \frac{1}{\frac{l_t}{k_F (l_t^2 - l_s^2)}} + \frac{1}{\frac{(l_t - l_s)}{k_F l_s^2} + \frac{l_s}{k_s l_s^2}} \right]$$

$$\text{Introduciamo sempre un } k_{effQ} \text{ dove il pedice } Q \text{ indica i flussi termici paralleli tale che } Q = k_{effQ} \cdot l_t^2 \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{l_t}$$

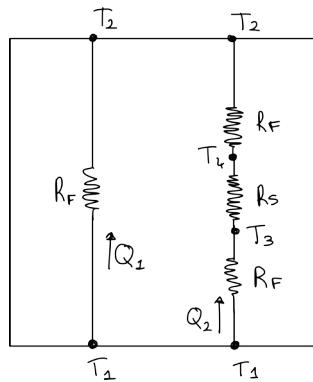
E allora per confronto:

$$k_{effQ} = \frac{l_t}{l_t^2} \left[ \frac{k_F (l_t^2 - l_s^2)}{l_t} + \frac{1}{\frac{(l_t - l_s)}{k_F l_s^2} + \frac{l_s}{k_s l_s^2}} \right] = k_F \left[ 1 - \left( \frac{l_s}{l_t} \right)^2 \right] + \frac{\frac{1}{l_t}}{\frac{l_t - l_s}{k_F l_s^2} + \frac{1}{k_s l_s^2}}$$

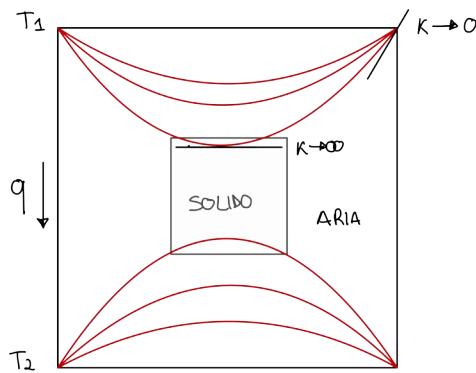
$$\text{se considero } \beta = \frac{l_t}{l_s} \text{ ottengo } k_{effQ} = k_F \left[ 1 - \left( \frac{1}{\beta} \right)^2 \right] + \frac{\frac{1}{\beta}}{\frac{1}{k_F} (\beta - 1) + \frac{1}{k_s}}$$

$$\text{Oppure } k_{effQ} = k_F \left[ 1 - \left( \frac{1}{\beta} \right)^2 \right] + \left[ \frac{\beta^2 - \beta}{k_F} + \frac{\beta}{k_s} \right]^{-1}$$

Per l'analogia elettrica adesso il flusso termico nel fluido è come se fosse una resistenza tra  $T_1$  e  $T_2$  mentre il flusso  $Q_2$  è come una serie di tre resistenze:



Il caso reale del sistema bifasico (si calcola con simulazioni numeriche) è intermedio tra i casi limite di isoterme parallele (conduttività trasversale infinita, caso 1) e di flussi termici paralleli (conduttività trasversale nulla, caso 2).



### Isolamento termico

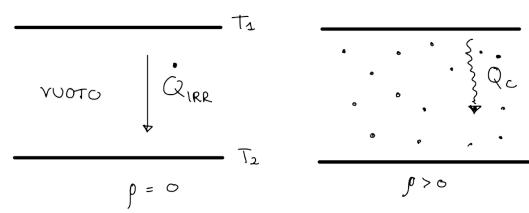
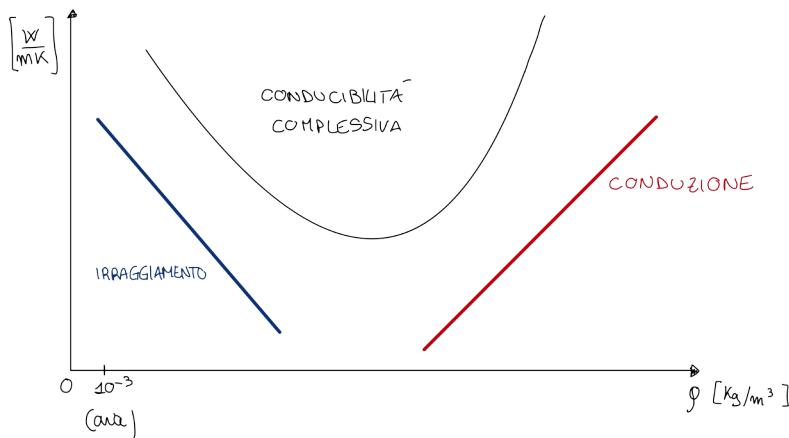
Se abbiamo un materiale molto isolante termicamente come se nel caso precedente immaginiamo aria o una sua rarefazione otteniamo un sistema isolante e quindi non è presente solo la conduzione del calore ma c'è anche l'irraggiamento termico (se non anche la convezione) e il problema diventa il seguente:

INSERISCI GRAFICO

Riportando la conducibilità in funzione della densità troviamo che al crescere della densità cresce la conduzione mentre al diminuire della densità (meno solido) aumenta l'irraggiamento.

VEDREMO MEGLIO QUESTO DISCORSO DOPO AVER FATTO L'IRRAGGIAMENTO.

La combinazione dei due effetti ci dà una conducibilità complessiva che avrà un minimo per un certo valore di densità.

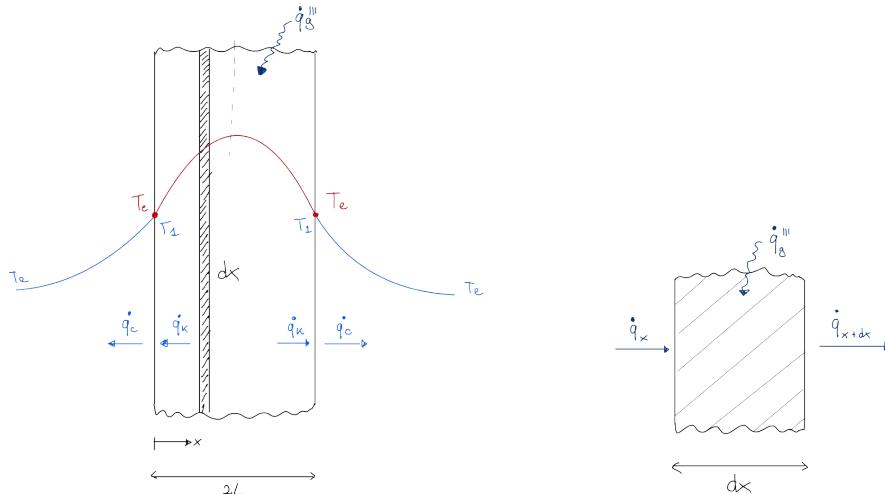


## Conduzione di calore in parete piana in cui c'è generazione di calore

Come nel caso in cui scorre una corrente.

Indichiamo la generazione di calore  $\dot{q}_g'''$  dove il punto indica l'unità di volume mentre l'apice l'unità di lunghezza.

Continuiamo ad usare il metodo induttivo partendo dall'elementino elementare (o concio elementare) di sistema e ne applichiamo i principi di conservazione dell'energia per ricavare l'equazione generale.



Abbiamo quindi lo spessore  $2L$  sulla coordinata  $x$ . Le facce laterali a temperatura  $T_e$ . Supponiamo quindi lo scambio di calore sull'elementino  $dx$  e ci sarà un calore generato  $\dot{q}_g''' \cdot S dx$

Allora il calore che entra sarà pari al calore che esce globalmente  $\dot{q}_x + \dot{q}_g''' S dx = \dot{q}_{x+dx}$

Esplicando il rapporto incrementali tra i due calori scambiato dalle due pareti in  $x$  e  $x+dx$  si ha  $\frac{\dot{q}_x - \dot{q}_{x+dx}}{dx} = -\dot{q}_g'''$

Scriviamo quindi i due calori immaginando una condizione del tipo Fourier:

$$\frac{-kS \frac{dT}{dx} \Big|_x + kS \frac{dT}{dx} \Big|_{x+dx}}{dx} = \frac{d}{dx} \left( kS \frac{dT}{dx} \right) = -\dot{q}_g''' S$$

Se supponiamo un  $k$  medio o di avere  $k$  costante e quindi indipendente da  $x$ , abbiamo che  $kS \frac{d^2T}{dx^2} = -\dot{q}_g''' S$

$$\text{Allora } \frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{\dot{q}_g'''}{k}.$$

Abbiamo trovato l'equazione generale che regge questo fenomeno.

Notiamo che se non abbiamo calore scambiato allora la derivata seconda è nulla e quindi ritorniamo al caso precedente dove  $T$  ha un andamento lineare.

Integriamo 2 volte e otteniamo l'andamento di  $T$ :

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{q}_g'''}{k}x + c_1 \Rightarrow T = -\frac{\dot{q}_g'''}{k} \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

Abbiamo 2 costanti che troviamo con le condizioni al contorno.

### Condizione al contorno 1

Supponiamo che la temperatura sia uguale su entrambe le facce sia pari a  $T_e$ , allora

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow T = T_e \\ x = L \rightarrow T = T_e \end{cases}$$

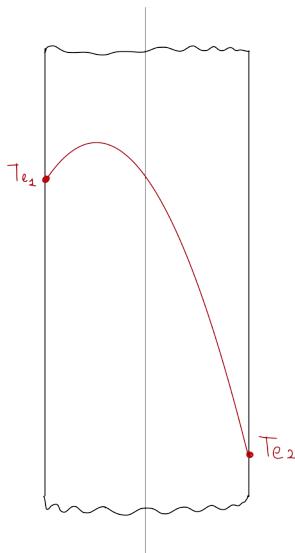
$$\begin{cases} T_e = c_2 \Rightarrow c_2 = T_e \\ T_e = -\frac{\dot{q}_g'''}{2k}L^2 + 2Lc_1 + c_2 \Rightarrow c_1 = \frac{\dot{q}_g'''}{k}L \end{cases}$$

$$\text{E allora } T - T_e = \frac{\dot{q}_g'''}{k} \left( x - \frac{x^2}{2L} \right)$$

Abbiamo trovato un andamento della temperatura  $T$  del 2° ordine in  $x$ , con massimo in  $x = L$  dove  $T - T_e = \frac{\dot{q}_g'''}{k} \frac{L^2}{2}$   
Quindi il massimo si ha nell'asse di simmetria della parete e la parabola è simmetrica.

### Condizione al contorno 2

Supponiamo invece che su entrambe le facce della parete la temperatura sia differente:  $T_{e2} < T_{e1}$



È ragionevole ottenere una parabola non simmetrica con il massimo spostato verso la faccia a temperatura maggiore.

### Condizione al contorno 3

Prendiamo il caso simmetrico e supponiamo di avere convezione  $h_e$  uguale sui due lati .

Il calore che arriva per conduzione per  $x = 2L$  è uguale a quello che va via per convezione:  $\dot{q}_k(2L) = \dot{q}_c$

$$\text{Quindi } -kS \left. \frac{dT}{dx} \right|_{2L} = h_e S (T_{2L} - T_e) \\ \underbrace{\quad \quad \quad}_{<0, \text{ poichè } \frac{dT}{dx} < 0} \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{>0, T_{2L} > T_e}$$

$$-\frac{k}{h_e} \left( -\frac{\dot{q}_g'''}{k} 2L + c_1 \right) = \left( -\frac{\dot{q}_g'''}{k} \frac{4L^2}{2} + 2Lc_1 + c_2 - T_e \right)$$

$$\frac{\dot{q}_g'' \cdot 2L}{h_e} - \frac{kc_1}{h_e} = -\frac{\dot{q}_g'' \cdot 2L^2}{k} + 2Lc_1 + c_2 - T_e$$

Discorso analogo per  $x = 0$ , anche sull'altra faccia il calore che arriva per conduzione è uguale a quello che va via per convezione:  $\dot{q}_k(0) = \dot{q}_c$

Dobbiamo tenere conto dei segni!

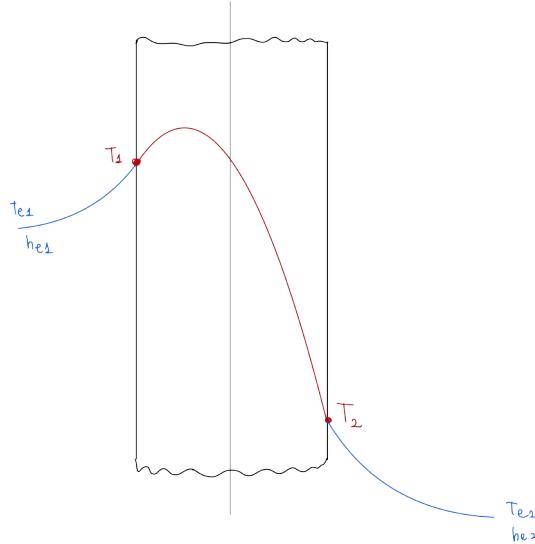
$$\text{Allora, } kS \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = h_e S (T_0 - T_e) \text{ abbiamo messo il '+' perchè il segno del calore è opposto al segno di crescita di } x \\ \underbrace{\quad \quad \quad}_{>0, \frac{dT}{dx} > 0} \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{>0, T_0 > T_e}$$

$$\frac{k}{h_e} c_1 = (c_2 - T_e) \text{ e allora } c_2 = T_e + \frac{k}{h_e} c_1$$

Si osservi come se  $h_e$  è molto elevata le differenze di temperatura diventano molto bassa e  $T_e \rightarrow T_1$

## Condizione al contorno 4

Potremmo impostare anche la temperatura di un fluido all'esterno con il relativo coefficiente di convezione.



Otteniamo sempre una parabola spostata.

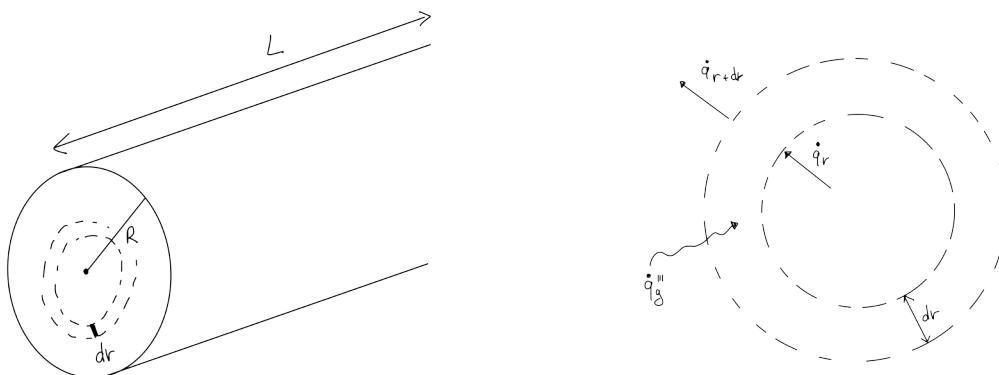
Si può risolvere analiticamente andando a scrivere le condizioni al contorno dei casi precedenti.

### Conduzione di calore in un cilindro pieno in cui c'è generazione di calore

Ad esempio un cavo elettrico dove si genera calore per effetto Joule.

Consideriamo l'elemento infinitesimo di raggio  $dr$  con il calore che va dall'interno verso l'esterno e allora il calore che arriva più quello generato sarà uguale a quello che esce:  $\dot{q}_r + \dot{q}_g''' \cdot 2\pi r dr L = \dot{q}_{r+dr}$

Esplicitiamo il rapporto incrementale tra i due calori scambiati dalla due pareti in  $r$  e  $r + dr$  ovvero:



$$\frac{\dot{q}_r - \dot{q}_{r+dr}}{dr} = -\dot{q}_g''' \cdot 2\pi r L$$

$$-\frac{k S_r \frac{dT}{dr} \Big|_r + k S_{r+dr} \frac{dT}{dr} \Big|_{r+dr}}{dr} = -\dot{q}_g''' 2\pi r L$$

Nell'ipotesi di  $k$  costante otteniamo

$$\text{Considerando che: } k \frac{d}{dr} \left( S_r \frac{dT}{dr} \right) = k \frac{d}{dr} \left( 2\pi r L \frac{dT}{dr} \right) = 2\pi L k \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right)$$

$$\text{Si ha } 2\pi L k \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = -\dot{q}_g''' \cdot 2\pi r L$$

$$\text{E allora } \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{\dot{q}_g'''}{k} r$$

Integriamo 2 volte ed otteniamo l'andamento di  $T$ :

$$r \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}_g'''}{k} \frac{r^2}{2} + c_1 \rightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}_g'''}{k} \frac{r}{2} + \frac{c_1}{r}$$

E allora  $T = -\frac{\dot{q}_g'''}{2k} \frac{r^2}{2} + c_1 \ln(r) + c_2$ , l'andamento di  $T$  è di tipo quadratico e logaritmico.

#### Condizione al contorno 1

Se il cilindro è cavo con un raggio interno  $R_1$  ed un raggio esterno  $R_2$  torniamo ad una soluzione già studiata la scorsa volta

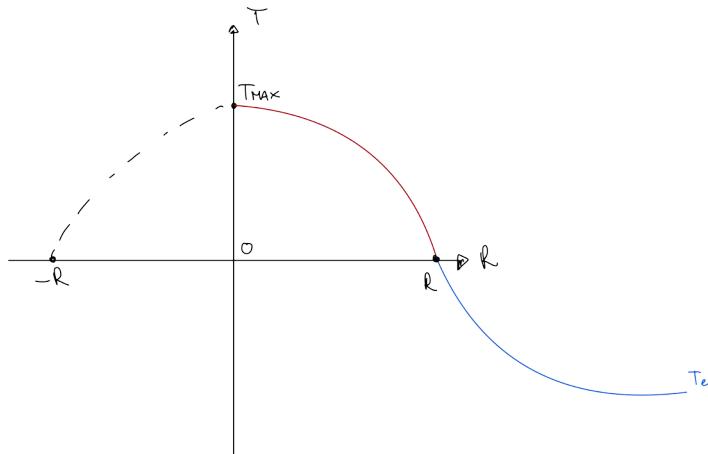
#### Condizione al contorno 2

Nel caso di cilindro pieno, in  $r = 0$  si creano dei problemi matematici per  $\ln(0)$  e quindi dobbiamo tenere una condizione al contorno e l'unica ragionevole è che  $\frac{dT}{dr} = 0$  e allora  $c_1 = 0$ .

Questo può anche prendere il nome di principio di ragion sufficiente, e se  $\frac{dT}{dr}$  non fosse diverso da zero dovrebbe avere una direzione ma perchè dovrebbe avere una relazione specifica se abbiamo imposto condizioni di simmetria circolare?

Immaginiamo che in  $r = R$  sia  $T_R = T_e$  e allora:  $-\frac{\dot{q}_g'''}{k} R^2 + c_2 = T_e \Rightarrow c_2 = T_e + \frac{\dot{q}_g''' R^2}{4k}$

E allora  $T - T_e = \frac{\dot{q}_g'''}{4k} (R^2 - r^2)$  e c'è un andamento quadratico con massimo in  $r = 0$ ,  $T = T_{\max} = \frac{\dot{q}_g'''}{k} R^2$



Allora imponiamo che in  $r = R$  il calore scambiato per conduzione deve essere pari a quello sottratto per convezione dall'esterno, dove immaginiamo una temperatura esterna  $T_e$  e un coefficiente di convezione  $h_e$

Allora  $\dot{q}_k(R) = \dot{q}_c$

$$-kS_R \frac{dT}{dr} \Big|_R = h_e S_R (T_r - T_e)$$

$$\frac{k}{h_e} \frac{\dot{q}_g'''}{2k} R = \left( -\frac{\dot{q}_g'''}{4k} + c_2 - T_e \right) \rightarrow c_2 = T_e + \frac{\dot{q}_g''' R^2}{4k} + \frac{k}{h_e} \frac{\dot{q}_g''' R}{2k}$$

$$\text{Allora } T - T_e = \frac{\dot{q}_g'''}{4k} (R^2 - r^2) + \frac{\dot{q}_g''' R}{2h_e}$$

## Estensione della superficie per disperdere calore

per disperdere più calore partiamo dalla legge di raffreddamento di Newton:  $\dot{Q} = hS(T_p - T_f)$

Possiamo aumentare  $h$ ,  $S$  o  $(T_p - T_f)$ .

Spesso ci troviamo con un  $\Delta T$  fissato.

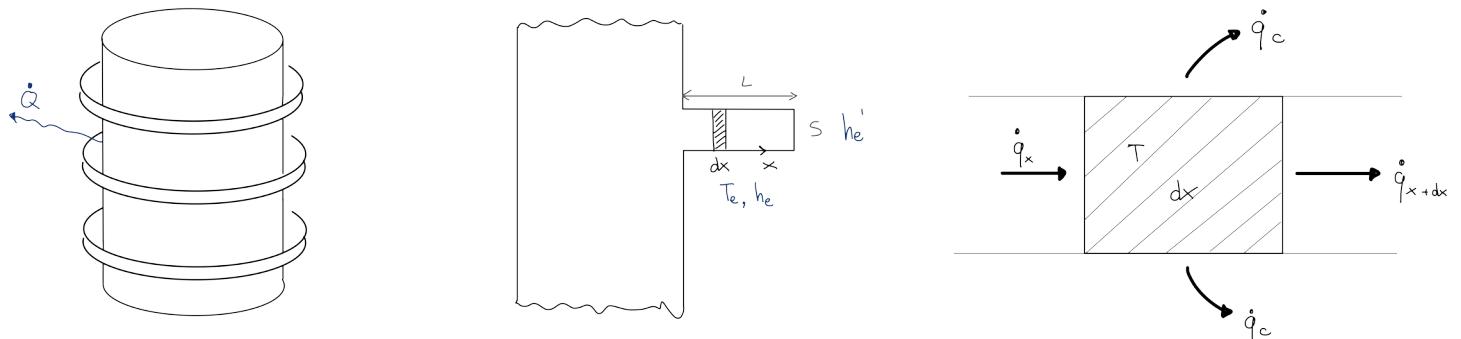
Aumentare  $h$  significa cambiare i coefficienti di convezione (ad esempio aggiungendo un ventilatore per muovere l'aria).

Si aumenta  $\dot{Q}$  anche, e soprattutto, aumentando  $S$ .

Consideriamo il cilindro si mettono delle **alette di raffreddamento**.

Considerando una geometria piana possiamo vedere delle alette a spillo con una certa sezione  $S$  e una lunghezza  $L$  che scambia con un fluido  $T_e$  con un coefficiente di convezione  $h_e$  sul lato e  $h'_e$  sulla sezione.

Considerando l'elementino  $dx$  avrà conduzione su un lato e convezione sugli altri lati.



A regime stazionario:

$$\dot{q}_x = \dot{q}_c + \dot{q}_{x+dx}$$

$$\begin{aligned} -ks \frac{dT}{dx} \Big|_x &= h_e p dx (T - T_e) - ks \frac{dT}{dx} \Big|_{x+dx} \quad (\text{p perimetro}) \\ \frac{kS \frac{dT}{dx} \Big|_{x+dx} - kS \frac{dT}{dx} \Big|_x}{dx} &= h_e p (T - T_e) \end{aligned}$$

$$kS \frac{d^2T}{dx^2} = h_e p (T - T_e)$$

$$\text{Dividendo per } kS \text{ otteniamo } \frac{d^2T}{dx^2} = \frac{ph_e}{kS} (T - T_e) = m^2 (T - T_e)$$

$$\text{Ed essendo } T_e \text{ costante abbiamo } d^2 \left( \frac{T - T_e}{dx^2} \right) = m^2 (T - T_e)$$

Un'equazione differenziale del secondo ordine di tipo  $\ddot{x} = m^2 x$  la cui soluzione è  $T - T_e = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}$

IL LIBRO (KREITH) FA CONSIDERAZIONE DIVERSE PER LE CONDIZIONI AL CONTORNO

Condizioni al contorno 1

La condizione più vera è quella all'estremità della barretta, cioè in  $x = L$ , il calore che arriva per conduzione sulla faccia sinistra è pari al calore che esce per convezione a destra, con  $h_e \neq h'_e$ . Invece in  $x = 0$  la temperatura è imposta dal cilindro:

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow T = T_0 \\ x = L \rightarrow q_k = q_c \end{cases}$$

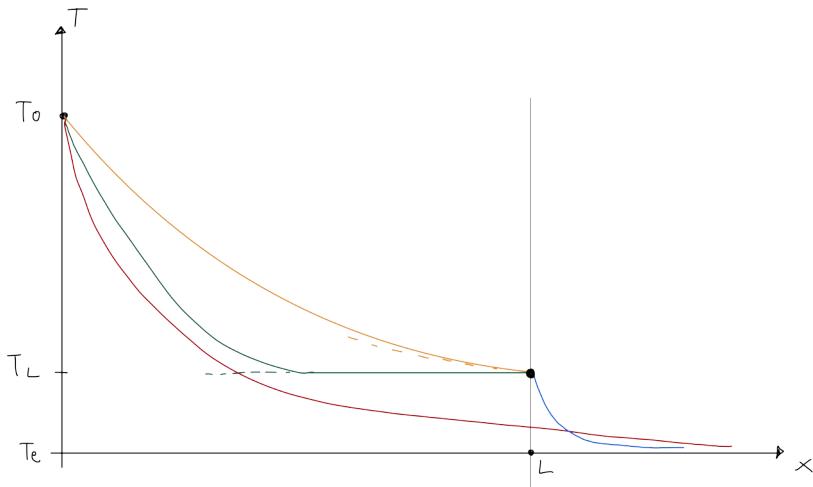
Questo ci restituisce:

$$\begin{cases} T_e + c_1 + c_2 = T_0 \implies T_0 - T_e = c_1 + c_2 \\ -kS \frac{dT}{dx} \Big|_L = h'_e S (T_L - T_e) \implies -k [c_1 m e^{mL} - c_2 m e^{-mL}] = h'_e [c_1 e^{mL} + c_2 e^{-mL}] \end{cases}$$

$$\text{Con } \frac{dT}{dx} = m c_1 e^{mx} - m c_2 e^{-mx}$$

$$\text{E allora, con diversi passaggi, si arriva a } \frac{T - T_e}{T_0 - T_e} = \frac{\cosh[m(L-x)] + \frac{h'_e}{mk} \sinh[m(L-x)]}{\cosh(mL) + \frac{h'_e}{mk} \sinh(mL)}$$

Questa corrisponde ad un andamento di tipo esponenziale (in **arancione**) che poi fuori diminuisce per convezione (**azzurro**).



#### Condizione al contorno 2

Si suppone che il calore scambiato sulla faccia laterale sia trascurabile rispetto il resto quindi che sia nullo e allora possiamo considerare  $h'_e = 0$  ottenendo

$$S \ll L \rightarrow h'_e \approx 0 \Rightarrow \frac{T - T_e}{T_0 - T_e} = \frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)}$$

Adesso l'andamento esponenziale tra  $T_0$  e  $T_L$  arriva ad  $L$  a tangente orizzontale poiché il calore scambiato è nullo (in **verde**) all'esterno c'è sempre il calore scambiato per convenzione che possiamo considerare nullo anche se la temperatura va a calare.

#### Condizione al contorno 3

Supponiamo che  $L$  sia molto grande e quindi che la temperatura alla fine dell'aletta sia proprio  $T_e$  e allora

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow T_0 - T_e = c_1 + c_2 \rightarrow c_2 = T_0 - T_e - c_1 \\ x = L \rightarrow T_L = T_e \rightarrow T_e + c_1 e^{mL} + c_2 e^{-mL} = T_e \end{cases}$$

Poiché  $L \rightarrow \infty$

$$c_1 e^{m\infty} + c_2 e^{-m\infty} = 0 \implies c_1 = 0 \text{ e } c_2 = T_0 - T_e$$

E allora  $T - T_e = (T_0 - T_e) e^{-mx}$

$$\text{Cioè: } \frac{T - T_e}{T_0 - T_e} = e^{-mx}$$

Si ottiene quindi un andamento esponenziale che tende a  $T_e$  per  $x \rightarrow \infty$  (in **rosso**)

## Equazione generale della conduzione del calore: coordinate cartesiane

Finora abbiamo ricavato le equazioni induttivamente applicando le equazioni di conservazione dell'energia ad un elementino infinitesimo  $dx dy dz$ .

Adesso ricaviamo l'equazione generale della conduzione nei casi più generali possibili: tridimensionale, funzione del tempo e con generazione di energia, che poi potrà essere utilizzato per ricavare le equazioni già trovate per i casi specifici: metodo deduttivo, dal generale al particolare.

Partiamo da un generico elementino cubico  $dx dy dz$

Studiamo la conduzione del calore in un corpo (solido o fluido) e applichiamo all'elementino il principio di conservazione dell'energia, ovvero il primo principio della termodinamica:

$$dq - dU = du + d\epsilon_c + d\epsilon_p$$

Utilizziamo la versione per i sistemi chiusi poiché il sistema è fermo e non c'è spostamento di materiale. Consideriamo lavoro scambiato nullo e le variazioni di energia cinetica e potenziale sono nulle.

Allora  $dq = du$

Moltiplichiamo per la massa e consideriamo l'unità di tempo:

$$\frac{dU}{dt} = M\dot{q}$$

La variazione di energia interna totale nel tempo sarà  $\frac{dU}{dt} = \underbrace{\rho dx dy dz}_{M=\rho V} \frac{du}{dt}$  e considerando il volume costante e quindi

$$du = c_v dT \text{ si ha } \frac{dU}{dt} = \rho dx dy dz c_v \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\text{Mentre } M\dot{q} = \dot{q}_x + \dot{q}_y + \dot{q}_z + \dot{q}_g''' dx dy dz - \dot{q}_{x+dx} - \dot{q}_{y+dy} - \dot{q}_{z+dz}$$

Si ricordi che per un sistema termodinamico si considera positivo il calore entrante. Consideriamo anche una generazione di calore  $\dot{q}_g'''$

Considerando poi l'espressione della legge di Fourier:

$$M\dot{q} = -k \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \right]_S + k \frac{\partial T}{\partial x} \left|_{x+dx} \right. - k \frac{\partial T}{\partial y} \left|_y \right. + k \frac{\partial T}{\partial y} \left|_{y+dy} \right. - k \frac{\partial T}{\partial z} \left|_z \right. + k \frac{\partial T}{\partial z} \left|_{z+dz} \right. + \dot{q}_g''' dx dy dz$$

Avendo supposto il materiale **isotropo**, cioè in cui  $k$  è lo stesso in tutte le direzioni:  $k_x = k_y = k_z = k$

Allora riprendendo l'espressione  $\frac{dU}{dt} = M\dot{q}$ , sostituendo le relative espressioni e dividendo per  $dx dy dz$  otteniamo:

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ k \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ k \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ k \frac{\partial T}{\partial z} \right] + \dot{q}_g'''$$

Questa la possiamo considerare l'**equazione generale della conduzione** nella quale si possono ricavare tutti i problemi visti fino ad ora con il metodo induttivo.

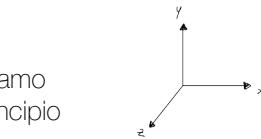
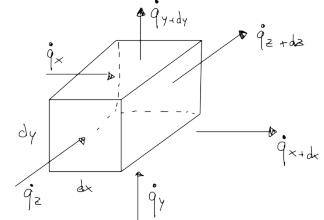
Facciamo un'ipotesi semplificativa, ovvero che  $k$  sia costante, allora dividiamo per  $\rho c$  dove  $c = c_v = c_p$  poiché in un materiale solido  $c_p = c_v$  perché le trasformazioni sono sia isobare che isocore, otteniamo:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{\dot{q}_g'''}{\rho c}$$

Si osservi come considerando fenomeni transitori non c'è solo  $k$  ma il parametro fisico che entra in gioco è la **diffusività**

$$\text{termica: } \alpha = \frac{k}{\rho c}, \text{ con } [\alpha] = \frac{L^2}{T} = \frac{m^2}{s}$$

Si osservi come nella fluido dinamica avevamo introdotto la diffusività di quantità di moto  $\nu$ ,  $[\nu] = L^2/T$  ed esiste quindi un'analogia tra questi due fenomeni catalogati entrambi come **fenomeni di trasporto**. Nel caso termodinamico viene trasportata



la quantità di moto mentre nel caso termico viene trasportata entalpia e quindi si traduce in temperatura. Nel trasporto di massa vedremo il coefficiente di Fick.

In definitiva l'equazione è:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{\dot{q}_g'''}{\rho c}$$

Mentre  $k$  interviene nei fenomeni stazionari  $\alpha$  entra in gioco nei fenomeni transitori.

Un materiale con un certo valore della conduttività termica assume valori diversi di diffusività a seconda di  $\rho c$ .

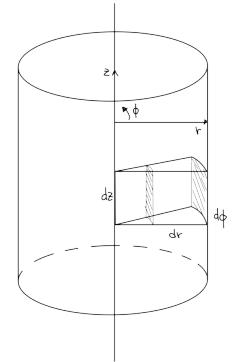
Con un  $\rho c$  molto elevato il calore diffonde molto lentamente.

Si può fare la stessa cosa per

*Equazione generale della conduzione del calore: coordinate cilindriche*

NON CI VERRÀ CHIESTO ALL'ESAME MA POSSIAMO TROVARLO SUL KREITH

$$\text{Si ottiene: } \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left[ \underbrace{\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}}_{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial T}{\partial r})} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{\dot{q}_g'''}{\rho c}$$



SI VEDA COME TORNANDO A FENOMENI STAZIONARI SI RITROVANO LE EQUAZIONI IDENTIFICATE NELLE LEZIONI PRECEDENTI.

### Problema

Stiamo utilizzando il metodo deduttivo e vogliamo analizzare il seguente caso:

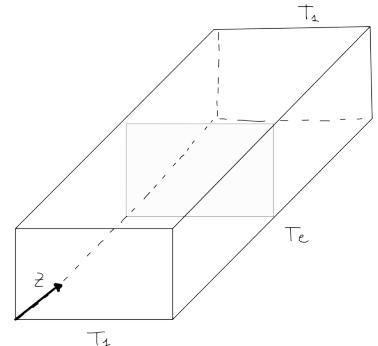
Consideriamo una trave rettangolare incastrata agli estremi con temperature  $T_1$  e ne vogliamo trovare la distribuzione di temperatura nella sezione di mezzeria dove non

$$\text{avremo dipendenza da } z: \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

Allora, nell'ipotesi di stazionario dove non c'è dipendenza del tempo e supponiamo non ci sia generazione di calore.

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= 0 \\ \dot{q}_g''' &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Ci rimane solo l'equazione del laplaciano, ovvero } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$



Questa deve essere integrata e poi dobbiamo considerare delle condizioni al contorno:

Consideriamo le temperature  $T_e$  sulla facce indicate in figura.

Si osservi come l'equazione rimane uguale sia se considero  $T$  che  $T - T_e = \theta$ .

$$\text{E allora abbiamo } \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \text{ con } \theta = 0 \text{ al bordo.}$$

$$\text{Inoltre supponiamo anche che nella faccia superiore } \theta \text{ vari come } \theta = \theta_n \sin \left( \frac{\pi x}{L} \right)$$

Utilizziamo allora il metodo della separazione delle variabili, e supponiamo che la soluzione  $\theta$  sia il prodotto di una funzione solo di  $x$  e una solo di  $y$ , ovvero  $\theta = X(x) \cdot Y(y)$

Allora si ottiene :

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0 \longrightarrow - \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}, \quad \forall x, \forall y$$

Questa uguaglianza deve essere soddisfatta su tutta la faccia e quindi non può essere che il termine a sinistra sia solo funzione di  $x$  e quello di destra solo funzione di  $y$  e allora ambedue devono essere uguali ad una costante  $\lambda^2$

$$\text{Ovvero: } -\frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} = \lambda^2$$

Così ho ottenuto due equazioni:

$$\begin{cases} \frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \\ \frac{d^2Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \rho^2 + \lambda^2 = 0 \\ \rho^2 = \lambda^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho_1 = i\lambda \\ \rho_2 = -i\lambda \\ \rho_3 = \lambda \\ \rho_4 = -\lambda \end{cases}$$

Di conseguenza otteniamo  $X$  e  $Y$ :

$$\begin{cases} X = c'e^{i\lambda x} + c''e^{-i\lambda x} = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x) \\ Y = ce^{-\lambda y} + De^{\lambda y} \end{cases}$$

Quindi abbiamo trovato l'espressione di  $\theta$  che dipende dalle costanti  $A, B, C, D$ , ovvero:

$$\theta = T - T_e = [A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)] (Ce^{-\lambda y} + De^{\lambda y}) = X(x) \cdot Y(y)$$

Da cui posso impostare le condizioni al contorno sui 4 lati:

- $x = 0 \rightarrow \theta = 0 = A(Ce^{-\lambda y} + De^{\lambda y}) \quad \forall y \Rightarrow A = 0$  e allora  $\theta = B \sin(\lambda x) \cdot (Ce^{-\lambda y} + De^{\lambda y})$
- $y = 0 \rightarrow \theta = 0 = B \sin(\lambda x) (Ce^{-\lambda y} + De^{\lambda y}). \quad \forall x \rightarrow C + D = 0 \Rightarrow D = -C$  e allora  $\theta = B \sin(\lambda x) \cdot C [e^{-\lambda y} - e^{\lambda y}]$
- $x = L \rightarrow \theta = 0 = BC \sin(\lambda L) (e^{-\lambda y} - e^{\lambda y}), \quad \forall y \Rightarrow \sin(\lambda L) = 0 \rightarrow \lambda L = n\pi \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{L}$ , con  $n = 1, 2, \dots$  e allora  $\theta = BC \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) (e^{-\frac{n\pi}{L}y} - e^{\frac{n\pi}{L}y})$
- $y = b \rightarrow \theta = \theta_n \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) = BC \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \underbrace{(e^{-\frac{n\pi}{L}b} - e^{\frac{n\pi}{L}b})}_{2 \sinh(\lambda b)} \Rightarrow n = 1 \text{ e } BC = \frac{\theta_n}{2 \sinh(\lambda b)}$

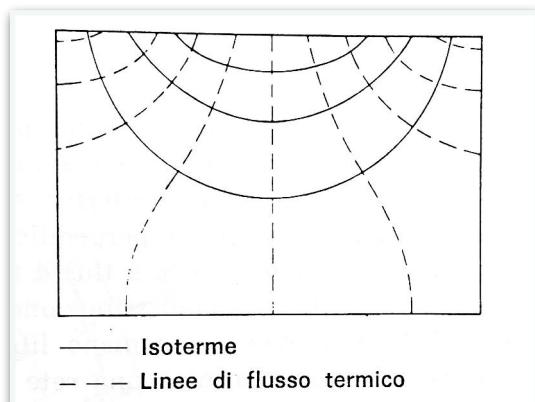
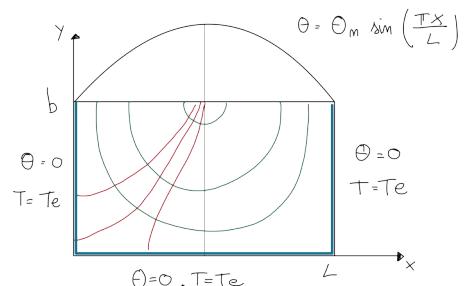
In definitiva la soluzione  $\theta$  è

$$\theta = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cdot \frac{\theta_n \cdot \sinh\left(\pi y/L\right)}{2 \sinh\left(\pi b/L\right)}$$

Per  $\theta = 0$  la soluzione è simmetrica rispetto l'asse di simmetria (in azzurro) e per i diversi valori di  $\theta$  in verde.

Sono disegnate anche le curve del flusso termico (in rosso) sempre perpendicolari all'isoterma  $\theta = \text{cost}$ .

Il diagramma fatto correttamente è:

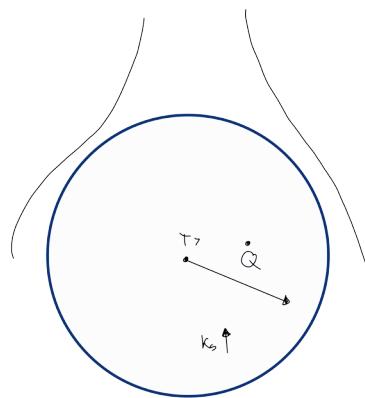


LINEE ISOTERME E LINEE DI FLUSSO TERMICO NELLA PIASTRA  
ADIABATICA RETTANGOLARE. LIBRO: KREITH PG 89

Continuiamo a studiare fenomeni transitori nel tempo affrontando in modo diverso il problema.

### Convezione forzata di una sfera

Si consideri una sfera di materiale conduttore ad una certa temperatura che raffreddiamo per convezione.



Dovremmo quindi applicare l'equazione precedente in condizioni non stazionarie vista precedentemente ma vogliamo affrontare questo problema in un metodo più semplificato noto come metodo a **parametri concentrati** poiché per risolvere un problema come questo necessitiamo di un computer ma noi ora ci accontentiamo di conoscere gli ordini di grandezza affidandoci ai parametri concentrati. Ovvero anziché considerare le temperature funzioni del raggio la consideriamo unica all'interno della sfera e concentrata nel baricentro, quindi funzione sola del tempo.

Per fare questa ipotesi supponiamo che il  $k_s$  del materiale solido con cui è costituita la sfera sia molto elevato così da avere un  $\Delta T$  molto piccola.

Sotto l'ipotesi di parametri concentrati ritorniamo a dover applicare il primo principio della termodinamica:  $dU = dQ$

Moltiplicando per la massa  $dU = dQ$

$$\text{Consideriamo allora la relazione per unità di tempo: } \frac{dU}{dt} = \dot{Q} \longrightarrow \rho V c \frac{dT}{dt} = - h_e S (T - T_e)$$

Dove il calore è scambiato per convezione con un fluido a temperatura  $T_e$  e coefficiente di convezione  $h_e$  e dove  $T$  è la temperatura uniforma in tutta la sfera.

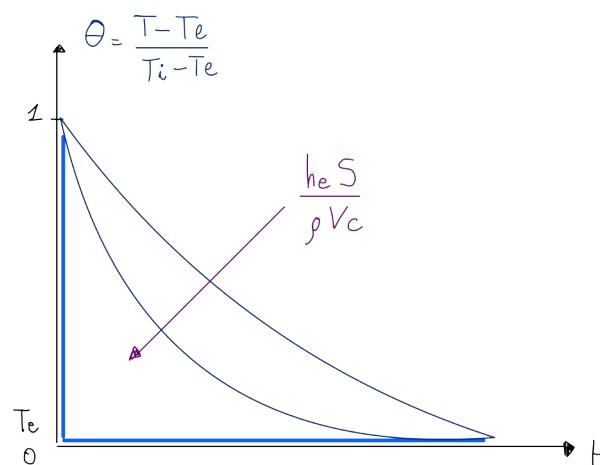
Separiamo le variabili ed integriamo:

$$\frac{dT}{T - T_e} = - \frac{h_e S}{\rho V c} dt \longrightarrow \ln \left( \frac{T - T_e}{T_i - T_e} \right) = - \frac{h_e S}{\rho V c} t$$

$$\text{e allora } \frac{T - T_e}{T_i - T_e} = e^{- \frac{h_e S}{\rho V c} t}$$

Grafichiamo quindi  $\theta = \frac{T - T_e}{T_i - T_e}$  che parte da 1, in funzione di  $t$ :

- per  $t = 0$ ,  $\theta = 1$ , cioè  $T = T_i$
- Per  $t \rightarrow \infty$ ,  $\theta \rightarrow 0$ , cioè  $T \rightarrow T_e$ , curva asintotica verso lo zero



Il **parametro di raffreddamento** è  $\frac{h_e S}{\rho V c}$ .

Maggiore è questo parametro e più rapido è il raffreddamento e se il parametro fosse infinitamente grande l'andamento sarebbe un gradino.

Possiamo dividere tutto per  $S$  ed osserviamo che  $\frac{V}{S}$  è proporzionale ad una lunghezza  $L$

$$\frac{h_e S}{\rho V c} = \frac{h_e}{\rho \left(\frac{V}{S}\right) c} \approx \frac{h_e}{\rho L c}$$

Allora fissati  $h_e, \rho, c$  il parametro di raffreddamento è tanto maggiore quanto più piccolo è  $L$ , ad esempio una sfera più piccola si raffredda più velocemente di una sfera grande.

E riprendendo l'andamento della temperatura esponenziale possiamo dire che:

$$\frac{h_e S}{\rho V c} t \approx \frac{h_e L^2}{\rho L^3 c} t = \left( \frac{h_e L}{k_s} \right) \left( \frac{k_s t}{\rho L^2 c} \right) = B_i \cdot F_o$$

Identifico allora due parametri adimensionali che chiamiamo:

- **Numero di Biot**:  $B_i = \frac{h_e L}{k_s}$

- **Numero di Fourier**:  $F_o = \frac{k_s t}{\rho L^2 c}$

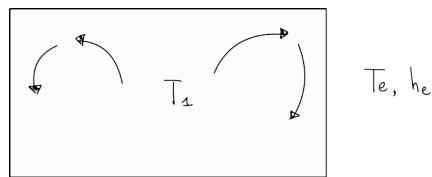
Allora posso dire che l'andamento della temperatura si può riscrivere come: 
$$\frac{T - T_e}{T_i - T_e} = e^{-B_i F_o}$$

Fourier dipende dal tempo mentre il numero di Biot dipende dalle proprietà del materiale, dalla geometria e dal coefficiente di convezione. Con una  $k_s$  molto elevata Biot tende ad essere piccolo e quindi l'ipotesi di parametri concentrati è tanto più vera quanto  $k_s$  è grande e quindi tanto più  $B_i$  è piccolo.

In base a risultati sperimentali l'ipotesi di parametri concentrati è valida solo se  $B_i < 0,1$  così da avere un errore nella distribuzione di temperatura entro il 5 % .

### Problema del radiatore

Consideriamo un contenitore metallico contenente dell'acqua in condizioni iniziali a 100°C e all'esterno un fluido a temperatura inferiore a quella di fusione  $T_e < T_f$ . Ci chiediamo, quanto tempo ci vuole affinché tutto il liquido interno si congeli?



Avendo supposto le pareti di materiale metallico non c'è differenza tra la temperatura dell'acqua interna e delle pareti. Il fluido esterno con temperatura  $T_e$  ha un coefficiente di convezione  $h_e$ .

In questo caso, l'ipotesi di parametri concentrati è chiaramente verificata perché all'interno la convezione naturale favorisce l'uniformità della temperatura interna finché non si forma il solido.

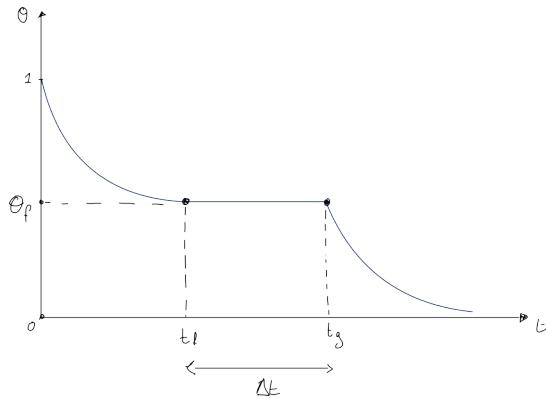
Con lo stesso ragionamento di prima arrivo alla stessa equazione finale:  $\theta = \frac{T - T_e}{T_i - T_e}$ , che parte da 1 e tende a 0

esponenzialmente: 
$$\frac{T - T_e}{T_i - T_e} = e^{-\frac{h_e S}{\rho V c} t}$$

Però quando  $\theta = \theta_f = \frac{T_f - T_e}{T_i - T_e}$  con  $T_f$  : temperatura di fusione, comincia il passaggio di stato e l'acqua comincia a congelare.

Allora, sfruttando la relazione appena scritta e valutata in  $T = T_f$  possiamo determinare il tempo  $t_f$  in cui inizia il congelamento.

Ovvero:  $\frac{T_f - T_e}{T_i - T_e} = e^{\frac{h_e S}{\rho V c} t_f} \implies t_f$



A  $t_f$  inizia il congelamento e il passaggio di fase è isotermo quindi con una temperatura pari a quella di fusione.

Durante questo congelamento devo riscrivere il primo principio della termodinamica  $d\dot{Q} = dU$  ovvero

$$\underbrace{h_e S (T_e - T_f)}_{(1)} = \underbrace{q_L \frac{dM}{dt}}_{(2)}, \text{ con:}$$

1. Calore scambiato con l'esterno con un salto di temperatura fisso perché il corpo ha  $T = T_f$  costante
2. variazione di energia interna con  $q_L$  calore latente di fusione

Allora da  $h_e S (T_e - T_f) \Delta t = q_L M \implies \Delta t$

Trovo l'intervallo di tempo con cui tutto il fluido è passato allo stato solido.

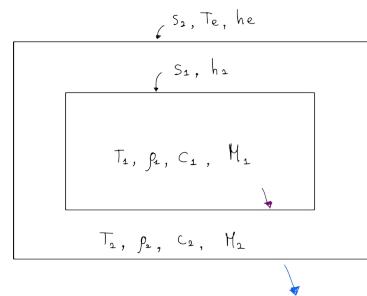
Abbiamo quindi trovato l'andamento di temperatura nel caso del radiatore.

### Estensione del problema del radiatore

(Radiatore con più strati)

Supponiamo che la parete del radiatore sia fatta da un materiale di spessore non trascurabile con una certa capacità termica identificando questo problema come un vaso di terracotta in cui c'è dell'acqua che si raffredda.

VEDREMO (IN UNA ESERCITAZIONE) COME QUESTO PROBLEMA È STATO APPLICATO PER STUDIARE IL RAFFREDDAMENTO DEL CORPO UMANO DURANTE UN'ANESTESIA.



Consideriamo quindi il vaso  $T_2, \rho_2, c_2, M_2$  con al suo interno dell'acqua  $T_1, \rho_1, c_1, M_1$  e all'esterno un fluido a temperatura  $T_e$  con coefficiente di convezione  $h_e$ . Le superfici  $S_2, S_1$  e il coefficiente di convezione tra la parete interna e l'acqua interna  $h_1$ . Se  $T_1 > T_e$  ci sarà uno scambio di calore tra il fluido e la parete per convezione, poi uno scambio all'esterno dovuto al calore che va nella parete.

Applicando il primo principio della termodinamica  $d\dot{u} = d\dot{Q}$  sia all'acqua interna che quella esterna avremmo che:

$$\begin{cases} M_1 c_1 \frac{dT_1}{dt} = h_1 S_1 (T_2 - T_1) \\ M_2 c_2 \frac{dT_2}{dt} = h_1 S_1 (T_1 - T_2) - h_e S_2 (T_2 - T_e) \end{cases}$$

Si osservi che per le pareti facciamo sempre l'ipotesi di parametri concentrati.

Abbiamo quindi due equazioni differenziali in due incognite  $T_1$  e  $T_2$ .

Allora per risolvere dividiamo la prima per  $M_1 c_1$  e la seconda per  $M_2 c_2$  e indichiamo con  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$  i coefficienti che moltiplicano le temperature, ovvero:

$$\begin{cases} \frac{dT_1}{dt} = \frac{h_1 S_1}{M_1 c_1} (T_2 - T_1) = k_1 (T_2 - T_1) \\ \frac{dT_2}{dt} = \frac{h_1 S_1}{M_2 c_2} (T_1 - T_2) - \frac{h_e S_2}{M_2 c_2} (T_2 - T_e) = k_2 (T_1 - T_2) - k_3 (T_2 - T_e) \end{cases}$$

Allora per riuscire a ridurre una delle due equazioni facciamo la derivata rispetto al tempo della prima:

$$\frac{d^2 T_1}{dt^2} = k_1 \frac{dT_2}{dt} - k_1 \frac{T_1}{dt} \text{ e sostituendo la seconda espressione:}$$

$$\frac{d^2 T_1}{dt^2} = k_1 k_2 (T_1 - T_2) - k_1 k_2 (T_2 - T_e) - k_1 \frac{dT_1}{dt}$$

Possiamo allora eliminare il  $T_2$  con la prima equazione, ovvero:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = -k_1 k_2 \underbrace{\frac{1}{k_1} \frac{dT_1}{dt}}_{-(T_2 - T_1)} - k_1 k_2 \left( T_1 + \underbrace{\frac{1}{k_1} \frac{dT_1}{dt}}_{=T_2, \text{ dalla } 1^\circ \text{ eq}} \right) + k_1 k_3 T_e - k_1 \frac{dT_1}{dt}$$

$$\text{E allora } \frac{d^2 T_1}{dt^2} + (k_1 + k_2 + k_3) \frac{dT_1}{dt} + k_1 k_3 T_1 = k_1 k_3 T_e$$

Abbiamo trovato un'equazione del 2° ordine a coefficienti costanti non omogenea, dove l'omogenea associata è  $\rho^2 + (k_1 + k_2 + k_3) \rho + k_1 k_3 = 0 \implies$  si ricavano  $\rho_1$  e  $\rho_2$

Invece la soluzione particolare è  $T_1 = T_e$  e deriva dal considerare  $T_1 = \mathbf{cost}$  nell'equazione.

Quindi in definitiva la soluzione è  $T_1 = A e^{\rho_1 t} + B e^{\rho_2 t} + T_e$

Allora determino le 2 costanti  $A$  e  $B$  imponendo le condizioni al contorno:

- $t = 0 \implies T_{1i} = A + B + T_e$ , cioè impongo il valore iniziale di  $T_1$
- $t = 0 \implies T_1 = T_2$  e dall'equazione vista prima si ha  $\frac{dT_1}{dt} = 0 = A \rho_1 + B \rho_2$ , cioè impongo che nelle condizioni iniziali c'è equilibrio termico tra  $T_1$  e  $T_2$

VEDREMO COME NEL CASO DI UN CORPO UMANO SI ARRIVA AD UN SISTEMA DI 6 EQ IN 6 INCognITE CHE SI PUÒ RISOLVERE RICONDUCENDO UN CORPO UMANO A DIVERSI CILINDRI QUALI: TRONCO CENTRALE, BRACCIA E GAMBE, E SI OTTIENE LA SOLUZIONE.

## Problema di conduzione transitoria di una parete

È il problema del muro che si raffredda.

Parto dall'equazione generale dove considero una parete quindi un caso monodimensionale nella sola variabile  $x$ , non c'è generazione di calore e quindi  $\dot{q}_g''' = 0$  e allora l'equazione generale della

$$\text{conduzione diventa: } \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Devo allora integrare questa equazione per ricavare l'andamento di temperatura funzione di  $x$  e del tempo.

Vedremo soltanto l'impostazione della soluzione:

Utilizziamo sempre la separazione delle variabili, ovvero consideriamo la temperatura come il prodotto di due funzioni, una solo dello spazio e una solo del tempo:  $T(x, t) = X(x) \cdot \theta(t)$

$$\text{Allora dall'equazione di prima: } X \frac{d\theta}{dt} = \alpha \theta \frac{d^2 X}{dx^2}$$

Possiamo sostituire  $\theta$  con il solito rapporto tra le temperature (moltiplicare o dividere per una costante non cambia):  $\Theta = \frac{T - T_e}{T_i - T_e}$

$$\text{Separando le variabili otteniamo } \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{\alpha \theta} \frac{d\theta}{dt}, \quad \forall x, \forall t$$

Dovendo essere uguali tra loro per ogni  $x$  e per ogni istanti di tempo non possono che essere uguali ad una costante  $-\lambda^2$  (vedremo più avanti perché il meno).

Ovvero:  $\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{\alpha \theta} \frac{d\theta}{dt} = -\lambda^2$ , il che corrisponde a due equazioni:

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \\ \frac{d\theta}{dt} + \lambda^2 \alpha \theta = 0 \end{cases}$$

Separando le variabili nella seconda possiamo integrare:

$$\frac{d\theta}{\theta} = -\lambda^2 \alpha dt \rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta} = -\lambda^2 \alpha \int_0^t dt \rightarrow \ln\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right) = -\alpha \lambda^2 t \rightarrow \frac{\theta}{\theta_0} = e^{-\alpha \lambda^2 t}$$

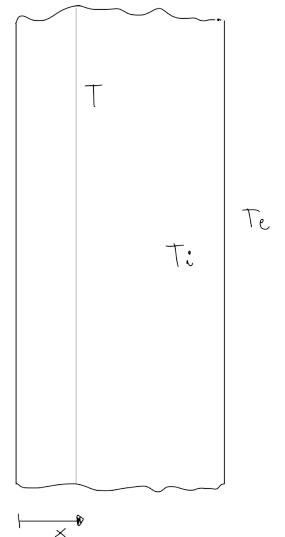
$$\text{E allora } \theta = \theta_0 e^{-\alpha \lambda^2 t}$$

Si vede come è stato necessario inserire il segno '-' insieme alla costante  $(-\lambda^2)$  altrimenti la temperatura sarebbe cresciuta esponenzialmente con il tempo.

Invece dalla prima:

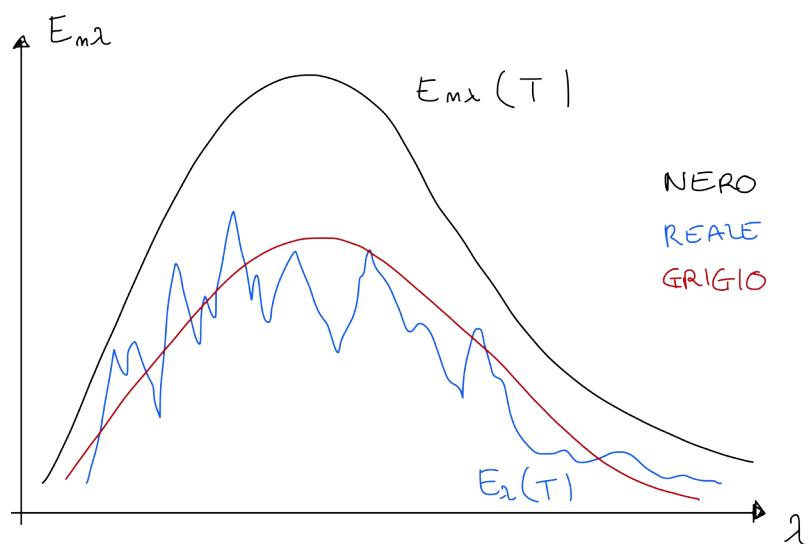
$$\rho^2 = -\lambda^2 \rightarrow \begin{cases} \rho_1 = i\lambda \\ \rho_2 = -i\lambda \end{cases} \text{ e allora } X = A e^{i\lambda x} + B e^{-i\lambda x}$$

In definitiva la temperatura ha la seguente espressione:  $T(x, t) = \theta_0 e^{-\alpha \lambda^2 t} \cdot (A e^{i\lambda x} + B e^{-i\lambda x})$



# FISICA TECNICA

Settimana 9



# Indice settimana 9

Indice settimana 9	2
martedì 17 novembre 2020 - Ricevimento - Panoramica generale	3
martedì 17 novembre 2020 - Lezione 22	5
<i>Corpo semilinfinito</i>	5
<i>Rilascio istantaneo di calore in una certa posizione dello spazio</i>	7
<i>Problema della temperatura interfacciale di due corpi con proprietà diverse</i>	11
Materiali che non obbediscono alla legge di Fourier (non Fourieriani)	14
Congelamento di un liquido	15
<i>Problema di Stefan</i>	15
<i>Problema di Neumann</i>	15
Curva logistica	18
mercoledì 18 novembre 2020 - Lezione 23	20
Irraggiamento termico	20
<i>Corpo nero</i>	21
<i>Legge di Planck</i>	21
<i>Legge di Wien</i>	21
<i>Legge di Stefan-Boltzmann</i>	21
<i>Legge di Lambert o del coseno</i>	22
<i>Realizzazione di un corpo nero in laboratorio</i>	22
<i>Radiazione emessa da un corpo</i>	22
<i>Corpi reali</i>	23
<i>Legge di Kirckhoff</i>	24
<i>Calore scambiato tra 2 corpi per irraggiamento</i>	25
<i>Calcolo del fattore di vista</i>	26
<i>Calcolo della temperatura del sole visto dalla terra</i>	26
giovedì 19 novembre 2020 - Lezione 24	28
<i>Caratteristiche dei fattori di vista</i>	28
<i>Isolanti per irraggiamento</i>	30
<i>Radiazione solare che incide sull'atmosfera</i>	35
<i>Legge di Beer</i>	36
<i>Combinazione tra irraggiamento e convezione</i>	36
Convezione	37

martedì 17 novembre 2020 - Ricevimento - Panoramica generale

Vedremo nelle esercitazioni di approfondimento:

- Termofluidodinamica degli stent
- Termoregolazione del corpo umano, in particolare in corso di anestesia
- Criochirurgia
- Trasporto di massa e sforzo di taglio in arterie e zone particolari del corpo come il circolo di Willis.

QUESTE FARANNO PARTE DELLA DOMANDA TEORICA PRESENTE ALL'ESAME OLTRE I DUE ESERCIZI NUMERICI.

Nella lezione 3 abbiamo visto il primo principio della termodinamica con diverse considerazioni arrivando a vedere come

$Q - L = \Delta E$  dove abbiamo notato che questa energia totale è una funzione di stato e quindi necessita uno stato di riferimento per cui la consideriamo nulla.

Abbiamo visto come si divide in variabili interne che costituiscono un'energia interna e variabili esterne che costituiscono un'energia esterna.

Quella esterna si divide in energia cinetica, legata alla velocità media del baricentro, e energia potenziale, legata alla quota del baricentro.

L'energia interna totale la suddividiamo in legata alle variabili termodinamiche,  $\Delta u$ , e legata alle variabili elettrochimiche come il grado di avanzamento  $x$ ; e il lavoro elettrico  $\ell_e$ , che assumiamo nulla.

Ovvero:  $Q - L = \Delta E = \Delta u + \Delta u_x + \Delta E_C + \Delta E_P$

Abbiamo poi calcolato  $\Delta E_P$  e  $\Delta E_C$ .

Allora per un sistema chiuso, poiché abbiamo considerato una massa  $M$  costante, possiamo considerare le grandezze estensive:

$$q - l = \Delta u + \Delta u_x + \frac{\Delta w^2}{2} + g\Delta z$$

E in termini differenziali:

$$dq - dl = du + du_x + \frac{dw^2}{2} + gdz$$

Abbiamo quindi visto il passaggio dal risultato  $Q = L$  a  $Q - L = \Delta E$  valutando  $\Delta E$ .

Abbiamo poi introdotto le trasformazioni termodinamiche divise in reversibile, rappresentata con una linea continua, e reale (irreversibile) che non dovrei rappresentare poiché i punti non sono in equilibrio e quindi SIMBOLICAMENTE la rappresentiamo con un tratteggio.

Abbiamo allora analizzato i requisiti per avere trasformazioni reversibili in quanto in termodinamica ci basiamo su situazioni limite, ovvero quando una trasformazione reale tende ad essere reversibile, ovvero:

- $p_i = p_e$
- $T_i = T_e$
- Assenza di attriti

Nella realtà, queste saranno sempre diverse.

Abbiamo quindi valutato il caso del palloncino, in cui nella realtà o c'è espansione o compressione, facendo le relative considerazioni.

Abbiamo poi definito le trasformazioni:

- Adiabatiche,  $Q = 0$
- Isocore (lavoro nullo)  $L = 0$
- Isobare  $p = \text{cost}$
- Isoterme  $T = \text{cost}$

Poi siamo passati ai sistemi aperti, con l'ipotesi di regime stazionario

Abbiamo visto come la massa è costante se la portata di ingresso è uguale a quella di uscita.

E il primo principio lo abbiamo esteso come:  $q - l_f = (u_2 + p_2 v_2) - (u_1 + p_1 v_1) + e_{C2} - e_{C1} + e_{P2} - e_{P1}$ , dove consideriamo trascurabile il calore scambiato in ingresso/uscita in quanto non consideriamo metalli liquidi.

Abbiamo allora definito una nuova grandezza termodinamica derivata, nota come entalpia  $h = u + p v$  e il primo principio:

$$dq - dl_f = dh + de_c + de_p$$

Abbiamo poi definito operativamente l'entalpia e quindi come misurarla e abbiamo visto come, sotto opportune ipotesi, si misura come uno scambio di calore e  $dh = du + p dv + dp$ .

La lezione 4 inizia con il 2° principio della termodinamica che per noi coincide con la rivoluzione industriale e con le macchine che utilizzavano il calore, e non più la forza animale.

Abbiamo visto la macchina di Newcomen (1712) con cui si estraeva carbone con il quale si scalava l'acqua che in ebollizione andava a riempire un cilindro/pistone. Mediante una condensazione improvvisa (acqua fredda) il pistone si abbassava provocando la rotazione del bilanciere che faceva sollevare l'acqua, producendo un lavoro positivo.

Si pose quindi il problema del rendimento.

A questa macchina fece seguito la Macchina di Watt (1788), sfruttava sempre il carbone per far bollire l'acqua che spingeva il pistone verso il basso che faceva sollevare l'acqua. Alla fine dell'abbassamento si faceva uscire il vapore che veniva raffreddato e ritornava nella fornace. C'è quindi un sistema termodinamico chiuso che compie trasformazioni cicliche ricevendo e cedendo calore e compiendo lavoro. Questa macchina portò un rendimento più alto.

Poi vennero i ragionamenti di Carnot che definì un limite al rendimento termodinamico, ovvero il rapporto tra ciò che si vuole ottenere e quello che si vuole ottenere. Dimostrò come il limite di questo rendimento è funzione solo del rapporto delle temperature:  $\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ .

Sfruttò il metodo della similitudine facendone un parallelo con un mulino ad acqua.

Concludiamo questo discorso con il fatto che la formulazione del secondo principio della termodinamica basato sui ragionamenti di Carnot non aveva relazione con la formulazione del primo principio della termodinamica.

Parliamo ancora di conduzione di calore transitoria e monodimensionale, affrontiamo allora il discorso di un *Corpo semiinfinito*

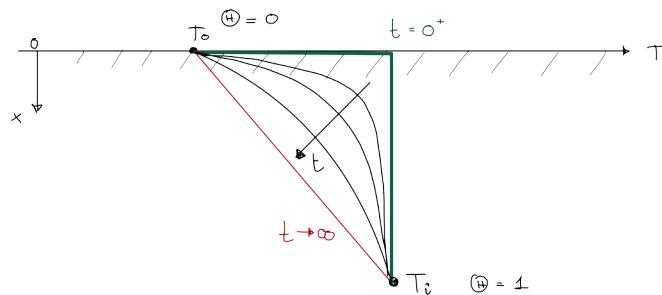
Per fare un parallelo con le problematiche mediche possiamo considerare il raffreddamento del corpo umano a contatto con un corpo freddo immaginando che ad una certa distanza dal corpo freddo la temperatura rimanga a  $T_i$  mentre si raffredda la parte di corpo vicino al corpo freddo.

Nella termocinetica si immagina il corpi semiinfinito il terreno dove si considera ad una temperatura costante di 4°C.

All'istante 0 supponiamo che tutta la temperatura sia uguale a  $T_i$  e immaginiamo che a questo istante la temperatura della superficie a contatto con il corpo venga portata al valore  $T_0$ , inferiore a  $T_i$ .

Allora all'istante  $0^-$  è  $T_i$  mentre all'istante  $0^+$  viene portata a  $T_0$  (in verde).

Con l'andare del tempo si può pensare intuitivamente che la temperatura nelle zone più vicine al corpo freddo si abbassi qualitativamente come queste curve con un limite di  $T_i$ .



Considerando il problema monodimensionale e cui le isoterme sono funzioni solo di  $x$  e del tempo e non c'è generazione di calore:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Possiamo riscriverla indicando con  $\Theta$  il rapporto tra le temperature

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}, \text{ con } \Theta = \frac{T - T_0}{T_i - T_0}$$

Facciamo all'ora l'analisi dimensionale di  $\Theta$  funzione di  $\Theta = \Theta(x, t, \alpha)$  supponendo quindi che sia una funzione di potenze

$$\Theta = \text{cost} \cdot x^a t^b \alpha^c, \text{ dove } \Theta \text{ è adimensionale e quindi}$$

$$0 = L^a T^b \left( \frac{L^2}{T} \right)^c \rightarrow 0 = L^{a+2b} \cdot T^{b-c}$$

$$\text{Da cui: } \begin{cases} 0 = a + 2c \\ 0 = b - c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2c \\ b = c \end{cases}$$

$$\text{Allora } \Theta = \text{cost} \cdot x^{-2c} t^c \alpha^c = \text{cost} \left( \frac{\alpha t}{x^2} \right)^c = \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{\alpha t} \right)^c$$

Queste variabili danno lo stesso valore di  $\Theta$  e introduciamo allora una nuova variabile che chiamiamo **variabile di similarità**

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{\alpha t}}$$

Ovvero l'unica variabile in base alla quale possiamo esprimere  $\Theta$

Tornando all'equazione della conduzione possiamo esprimere la temperatura in funzione di  $\Theta$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \text{ con } T = T_0 + (T_i - T_0) \cdot \Theta[\eta(x, t)]$$

Derivando

$$\frac{\partial T}{\partial t} = (T_i - T_0) \frac{d\Theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$$\text{Con } \frac{d\eta}{dt} = \frac{x}{2\sqrt{\alpha}} \left( -\frac{1}{2} \right) t^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{x}{2\sqrt{\alpha} \cdot 2\sqrt{t} \cdot t} = -\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \cdot \frac{1}{2t} = -\frac{\eta}{2t}$$

$$\in \frac{\partial T}{\partial x} = (T_i - T_0) \frac{d\Theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \text{ con } \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha t}}$$

Quindi

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\eta}{2t} (T_i - T_0) \frac{d\Theta}{d\eta} \\ \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_i - T_0}{2\sqrt{\alpha t}} \frac{d\Theta}{d\eta} \end{cases} \rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \frac{T_i - T_0}{2\sqrt{\alpha t}} \frac{d^2\Theta}{d\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{T_i - T_0}{4\alpha t} \frac{d^2\Theta}{d\eta^2}$$

Allora  $-\frac{\eta}{2t} (T_i - T_0) \frac{d\Theta}{d\eta} = \frac{T_i - T_0}{4\alpha t} \frac{d^2\Theta}{d\eta^2}$

e allora  $\frac{d^2\Theta}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\Theta}{d\eta} = 0$

Questo ci ha permesso di trasformare un'equazione alle derivate parziali in una equazione alle derivate ordinarie.  
Si risolve allora per integrazioni successive:

Introduciamo la variabile di comodo  $\Psi$

$$\Psi = \frac{d\Theta}{d\eta} \rightarrow \frac{d\Psi}{d\eta} + 2\eta \Psi = 0$$

Separiamo le variabili ed integriamo:

$$\frac{d\Psi}{\Psi} - 2\eta d\eta \rightarrow \ln(\Psi) = -\frac{\eta^2}{2} + \text{cost} \Rightarrow \Psi = c_1 \cdot e^{-\eta^2/2}$$

Tornando alla variabile  $\Theta$  possiamo integrare ottenendo così la soluzione:

$$d\Theta = c_1 \cdot e^{-\eta^2/2} d\eta \Rightarrow \Theta = c_1 \int_0^\eta e^{-\beta^2/2} d\beta + c_2$$

Imponiamo le condizioni al contorno:

-  $\ln x = 0$ , cioè  $\eta = 0$  abbiamo  $\Theta = 0 = c_1 \int_0^0 e^{-\beta^2/2} d\beta + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$

-  $\ln x \rightarrow \infty$ , cioè  $\eta \rightarrow \infty$  abbiamo  $\Theta = 1 = c_1 \int_0^\infty e^{-\beta^2/2} d\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$

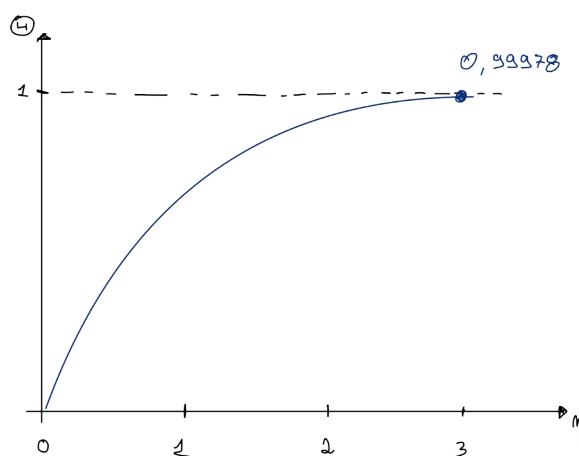
E in definitiva la soluzione è:

$$\Theta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\beta^2} d\beta = \text{erf}(\eta)$$

cove compare una funzione matematica che prende il nome di **funzione di errore**.

Questa funzione si rappresenta crescente con asintoto orizzontale pari ad 1 per  $\eta = 3 \rightarrow \Theta = 0,999978 \approx 1$

Questa funzione per  $\eta$  negativo va a  $-1$  simmetricamente.



Le proprietà della funzione errore sono:

- $\text{erf}(\eta) \xrightarrow[\eta \rightarrow \infty]{} 1$
- $\text{erf}(\eta) \xrightarrow[\eta \rightarrow -\infty]{} -1$
- $\text{erf}(-\eta) = -\text{erf}(\eta)$

Il complemento a 1 della funzione errore è  $\text{erfc}(\eta)$ , ovvero  $\text{erfc}(\eta) = 1 - \text{erf}(\eta)$

Possiamo allora calcolare il calore scambiato al contorno e quindi studiare come varia il flusso termico, ovvero la tangente alle curva in  $x = 0$ :

$$\dot{Q} = kS \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = kS \frac{T_i - T_0}{2\sqrt{\pi t}} \frac{d\Theta}{d\eta} \Big|_{x=0}, \text{ con } \frac{d\Theta}{d\eta} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2}$$

$$\text{Allora } \dot{Q} = kS \frac{T_i - T_0}{\sqrt{\pi \alpha t}} \cdot e^{-\eta^2} \Big|_{x=0, \text{ cioè } \eta=0}$$

E quindi per  $x = 0$  ovvero  $\eta = 0$  si ha  $\dot{Q} = kS \frac{T_i - T_0}{\sqrt{\pi \alpha t}}$

Il flusso termico all'interfaccia tra il corpo e il piano freddo cambia con il tempo per  $t = 0$  allora  $\dot{Q} \rightarrow \infty$  ovvero l'isoterma orizzontale.

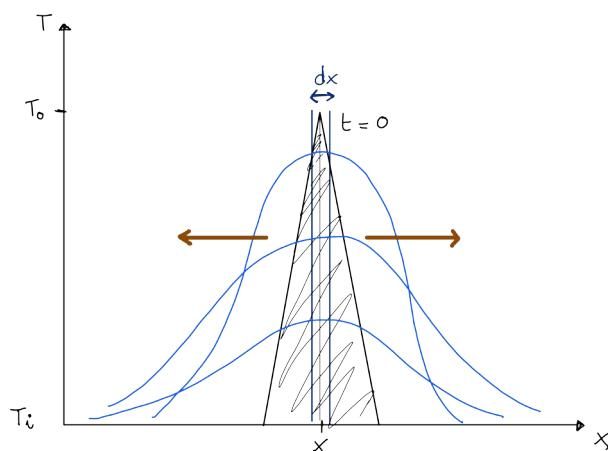
Vediamo come utilizzare questa funzione matematica in un altro problema:

*Rilascio istantaneo di calore in una certa posizione dello spazio*

Si immagini un fascio laser che arriva (es rimozione della cataratta con un laser) che cede calore (con la forma rettangolare in figura) ad un corpo a temperatura  $T_i$ .

All'istante  $0^+$  la temperatura della sezione  $x$  sarà  $T_0$  e varia linearmente fino ad arrivare a  $T_i$  nei punti estremali.

Aumentando il tempo il calore si propaga ( frecce arancioni=flusso di calore) quindi al centro la temperatura diminuirà nel tempo mentre le temperature a destra e sinistra aumentano.



L'equazione di conduzione del calore è sempre la stessa:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Supponiamo che la soluzione sia di tipo esponenziale con coefficiente  $A/\sqrt{t}$  cioè:

$$T(x, t) = \frac{A}{\sqrt{t}} e^{-\eta^2} = \frac{A}{\sqrt{t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2at}}$$

Dove  $\eta$  è la variabile di similarità della funzione **erf**

Dobbiamo mettere in relazione la costante  $A$  con le condizioni iniziali e allora\_

Il flusso termico all'interfaccia tra corpo e piano fermo è la variazione di energia interna:

$$\dot{Q} = du = \int_{-\infty}^{\infty} \rho c S dx (T - T_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho c S \frac{A}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{2at}} dt$$

$$\frac{\dot{Q}}{\rho c S} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{2at}} = \int_{-\infty}^0 \cdot + \int_0^{\infty} \cdot$$

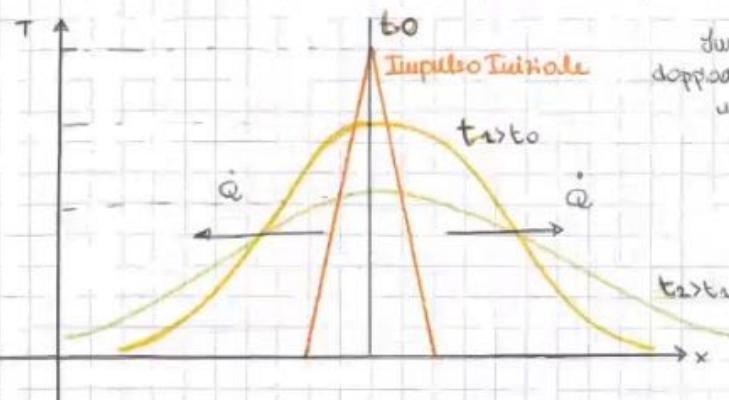
Allora  $\frac{\dot{Q}}{\rho c S} = 2S\sqrt{\pi}\alpha$

Questo mi permette di trovare  $A$  e quindi il calore scambiato.

PER UNA SOLUZIONE ANALOGA SI PUÒ FAR RIFERIMENTO AGLI ALTRI APPUNTI DOVE SONO PRESENTI ANCHE TUTTI I PASSAGGI  
NELLA PAGINA SEGUENTE C'È UNA SCANSIONE CON TUTTI I PASSAGGI

### > PROBLEMA DEL RISCALDAMENTO ISTANTANEO (tipologia).

Si fornisce un  $\Delta T$  INSTANTANEAMENTE, come un impulso alla delta di DIRAC.



Supponiamo di avere un corpo doppio all'infinito e di fornire una certa energia impulsivamente al tempo  $t=0$ .

L'impulso può avere la forma di un delta di Dirac o più larghezza, ecc.

Rispetto alle aree che abbiamo portato in temperatura, le zone limitate del corpo saranno più fredde, e dipartiranno dall'area planitaria verso dentro e verso fuori, per conduzione.

Per trarre appunto, il fuco di  $T$  diminuisce in intensità e il quadrato di  $T$  "diffondono" portando la curva ad allungarsi.

Supponiamo che la temperatura presenti un andamento del tipo  $\exp(\eta)$ :

$$T(\eta) = A \cdot \frac{e^{-\eta^2}}{\Delta t} \quad \text{con } A = \text{cost.} \quad \rightarrow T(x,t) = A \cdot \frac{e^{-x^2/4at}}{\Delta t}$$

Per verificare se la suposizione va bene, bisogna sostituire  $T(x,t)$  in  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

L'unica variabile da determinare è A. Il valore di A dipende da "qualità" energetica totale, sotto forma di  $\dot{Q}$ , abbisognato dal sistema, durante l'impulso.

Unità 1.25

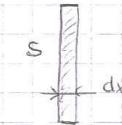
L'immaginiamo che il calore totale fornito, in avuto di fenomeni dissipativi, sia l'energia totale cui il corpo riceve:

$$\dot{Q} = \int_{\text{energia interna}}^M c \cdot (T - T_0) \cdot dm$$

↓  
energia interna  
(e mui)

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} c \cdot S \cdot C \cdot (T - T_0) dx$$

↓  
 $dm = dV \cdot \rho = \rho S dx$



gli estremi di:  
integrazione sono  $+\infty$  e  $-\infty$ ,  
perciò il corpo è di estensione  
indefinita.

To è una temperatura di riferimento che, per semplicità,  
possiamo pari a zero.

$$\Rightarrow \dot{Q} = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho S C T dx \quad \text{ma } T = A \cdot \frac{e^{-\frac{x^2}{4\alpha t}}}{\sqrt{\pi t}}$$

$\frac{x^2}{4\alpha t} = \eta_f^2 = \xi_f^2$  → velle di spente  
cambia nomenclatura  
ad  $\eta_f$ .

CAMBIO DI VARIABILE

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x^2}{4\alpha t} \right) = d\eta_f \cdot 2\xi_f \rightarrow \frac{2x}{4\alpha t} dx = 2\xi_f d\eta_f \quad \text{ma } \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = \xi_f \rightarrow \frac{2 \cdot x}{2\sqrt{\alpha t}} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{\alpha t}} = 2\xi_f d\eta_f$$

$$\rightarrow 2\xi_f d\eta_f \cdot \frac{1}{2\sqrt{\alpha t}} = 2\xi_f d\eta_f \rightarrow dx = 2\sqrt{\alpha t} d\eta_f$$

$$\rightarrow \dot{Q} = \rho S C \cdot \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \frac{e^{-\xi_f^2}}{\sqrt{\pi t}} \cdot 2\sqrt{\alpha t} d\eta_f \rightarrow \frac{\dot{Q}}{\rho S C} = 2A\sqrt{\alpha t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi_f^2} d\eta_f = A \cdot (2\sqrt{\alpha t}) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi_f^2} d\eta_f$$

dall'integrale di Gauss:  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi_f^2} d\eta_f = \sqrt{\pi}$

$$\rightarrow \frac{\dot{Q}}{\rho S C} = A \cdot 2\sqrt{\alpha t} \cdot \sqrt{\pi} \quad ; \quad \boxed{A = \frac{\dot{Q}}{\rho S C} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\alpha t} \cdot \sqrt{\pi}}}$$

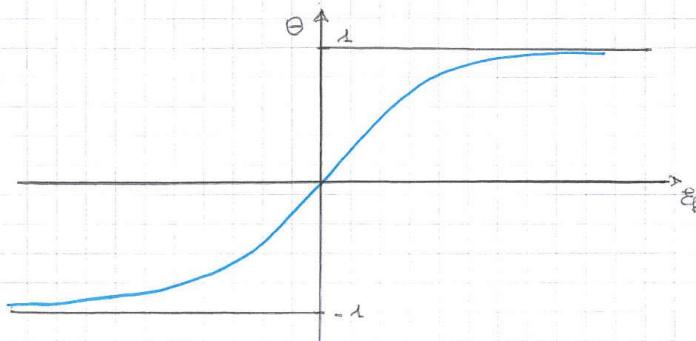
A è una costante che dipende dalle qualità di calore che fornisco al sistema  
al tempo  $t=0$ ,  $\dot{Q}$ .

Ho risolto la distribuzione di temperatura:  $T(x,t) = \frac{\dot{Q}}{\rho S C} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\alpha t}} \cdot \frac{e^{-\frac{x^2}{4\alpha t}}}{\sqrt{\pi t}}$

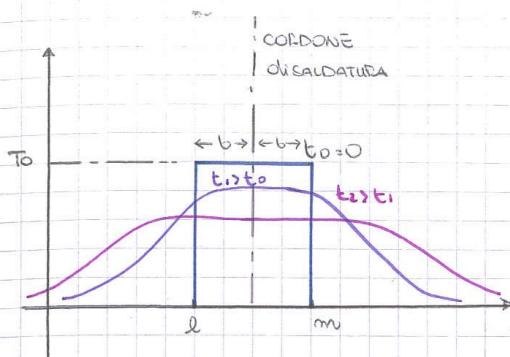
Ad una  $x$  fissata, la  $T$  diminuisce  
col tempo.

Ad un istante fisso, la  $T(x)$   
è un'esponentiale.

A destra si riporta la curva  
della temperatura  
adiametrale  $\Theta$ .  
[esf( $n$ )]



## &gt; PROBLEMA della SALDATURA.



Nella saldatura, appliciamo localmente un calore  $Q$  istantaneamente ad un tempo  $t_0$ , secondo il profilo in viola.

[Larghezza della distribuzione]

Col passare del tempo, il profilo della  $T$  cambia nella maniera illustrata e si ha un flusso conduttivo nel materiale in maniera del tutto analoga al caso precedente.

$$\text{Supponiamo che } \delta T(x,t) \text{ sia tale che: } dT = f(\xi) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha t}} \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha t}} \cdot d\xi$$

$\xi$  è una variabile di comodo lungo  $x$  (tipo un  $x_0$ ).

La  $T(x,t)$  si ottiene integrando il  $dT$  tra  $l$  ed  $m$ :  $\rightarrow$  profilo di temperatura nel cordone di saldatura al vario del tempo

$$T = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha t}} \cdot \int_l^m f(\xi) \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha t}} d\xi$$

$f(\xi)$  è generalmente la funzione che descrive il profilo di temperatura nello spazio.

Perché la distribuzione al tempo  $t=0$ , tra  $l$  ed  $m$  è RETTANGOLARE, allora:  $f(\xi) = T_0$  per  $\xi \in [l,m]$

$$\rightarrow T = \frac{T_0}{2\sqrt{\pi\alpha t}} \cdot \int_l^m e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha t}} d\xi = \frac{T_0}{2\sqrt{\pi\alpha t}} \cdot \left[ \int_l^x e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha t}} d\xi - \int_m^x e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha t}} d\xi \right]$$

$$\rightarrow \frac{T}{T_0} = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{m-x}{2\sqrt{\alpha t}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{l-x}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \right]$$

OPPURE (meglio, lo capisco di più)

$$T = f(l-m) \cdot \frac{e^{-x^2/4\alpha t}}{2\sqrt{\pi\alpha t}}$$

$$\text{Nel cordone di saldatura } T(x,t) = \int_{x-l}^{x-m} \frac{T_0}{2\sqrt{\pi\alpha t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4\alpha t}} dx$$

$$\text{Cambio variabili: } \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = m \Rightarrow dm = \frac{dx}{2\sqrt{\alpha t}} \Rightarrow dx = 2\sqrt{\alpha t} dm \Rightarrow T(x,t) = \int_{m_1}^{m_2} \frac{T_0}{2\sqrt{\pi\alpha t}} \cdot e^{-m^2} dm$$

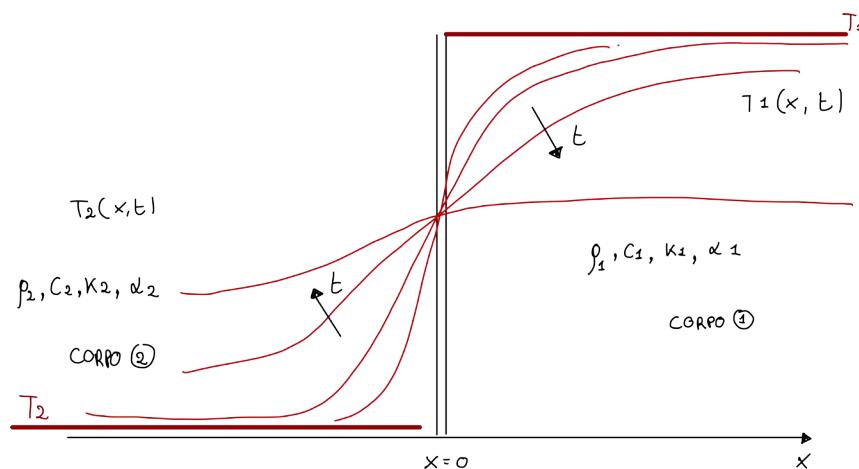
$$\rightarrow T(x,t) = \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \left[ \int_{m_1}^0 e^{-m^2} dm + \int_0^{m_2} e^{-m^2} dm \right] = T_0 \cdot \left[ \frac{1}{2} \operatorname{erf}(m_2) - \frac{1}{2} \operatorname{erf}(m_1) \right]$$

$$T(x,t) = \frac{T_0}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{x-m}{2\sqrt{\alpha t}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{x-l}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \right]$$

## Problema della temperatura interfacciale di due corpi con proprietà diverse

Supponiamo di mettere a contatto un corpo a temperatura  $T_2$  con un corpo a temperatura  $T_1$ .

Se i due corpi fossero fatti dello stesso materiale potremmo dire che il valore all'interfaccia è la media. Mentre vediamo che succede se i due corpi hanno proprietà fisiche diverse.



Combiniamo la temperatura in una differenza, sottraiamo  $T_2$  e quindi per  $t = 0$

$$\text{I. } \begin{cases} t = 0, & x > 0, \quad T = T_1 = T_0 \\ t = 0, & x < 0, \quad T = T_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{II. } \begin{cases} x \rightarrow \infty & T = T_1 \forall t \\ x \rightarrow -\infty & T = T_2 \forall t \end{cases}$$

Inoltre dobbiamo considerare le condizioni al contorno

$$\text{III. } \begin{cases} x = 0 \\ T_1(0, t) = T_2(0, t) \end{cases}$$

E le condizioni sul flusso:

$$\text{IV. } -k_1 S \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = k_2 S \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

Assumo allora che gli andamenti siano di tipo esponenziale come la funzione errore e allora:

$$\text{Corpo 1: } T_1 = A_1 + B_1 \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha_1 t}} \right), \text{ con } \operatorname{erf} \eta = \int_0^\eta e^{-\beta^2} d\beta$$

$$\text{Corpo 2: } T_2 = A_2 + B_2 \left| \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}} \right) \right| = A_2 + B_2 \operatorname{erf} \left( \frac{|x|}{2\sqrt{\alpha_2 t}} \right)$$

Consideriamo l'equazione III e:

$$x = 0, \rightarrow T_1(x = 0) = A_1 + B_1 \operatorname{erf}(0), \text{ ma } \operatorname{erf}(0) = 0$$

$$T_2(x = 0) = A_2 + B_2 \operatorname{erf}(0)$$

$$\text{Se } T_1(x = 0) = T_2(x = 0) \implies A_1 = A_2 \implies \begin{cases} T_1 = A_1 + B_1 \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha_1 t}} \right) \\ T_2 = A_2 + B_2 \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}} \right) \end{cases}$$

Dalla condizione IV:

$$-k_1 S \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = k_2 S \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

Dal primo termine otteniamo

$$\begin{cases} \frac{\partial T_1}{\partial x} = B_1 \frac{\partial}{\partial x} [\operatorname{erf}(\eta_1)] = B_1 \frac{d}{d\eta_1} \operatorname{erf}(\eta_1) \frac{\partial}{\partial x} \eta_1 \\ \frac{d}{d\eta_1} \operatorname{erf}(\eta_1) = e^{-\eta_1^2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial \eta_1}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha_1 t}} \\ \rightarrow \frac{\partial T_1}{\partial x} = B_1 \cdot e^{-\eta_1^2} \frac{2}{\sqrt{\pi t}} \frac{1}{2\sqrt{\alpha_1 t}} = \frac{B_1 \cdot e^{-\eta_1^2}}{\sqrt{\pi \alpha_1 t}} \end{cases}$$

Mentre dal secondo temine

$$\frac{\partial T_2}{\partial x} = \frac{B_2 \cdot e^{-\eta_2^2}}{\sqrt{\pi \alpha_2 t}}$$

Quindi per  $x = 0 \rightarrow \eta_1 = \eta_2 = 0$  e si ha

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial T_1}{\partial x} \right|_{\eta_1=0} = \frac{B_1}{\sqrt{\pi \alpha_1 t}} \\ \left. \frac{\partial T_2}{\partial x} \right|_{\eta_2=0} = \frac{B_2}{\sqrt{\pi \alpha_2 t}} \end{cases}$$

Allora

$$-\frac{k_1 B_1}{\sqrt{\pi t} \cdot \sqrt{\alpha_1}} = \frac{k_2 B_2}{\sqrt{\pi t} \cdot \sqrt{\alpha_2}} \Rightarrow -\frac{k_1 B_1}{\sqrt{\alpha_1}} = \frac{k_2 B_2}{\sqrt{\alpha_2}}$$

Otteniamo così un primo legame tra  $B_1$  e  $B_2$

Devo poi applicare le condizioni II, ovvero per  $x \rightarrow \infty$  per cui  $\eta_1 \rightarrow \infty$  e  $\eta_2 \rightarrow \infty$

Allora

$$\begin{cases} T_0 = A_1 + B_1 \lim_{\eta_1 \rightarrow \infty} \operatorname{erf}(\eta_1) \\ 0 = A_1 + B_2 \lim_{\eta_2 \rightarrow \infty} \operatorname{erf}(\eta_2) \end{cases}$$

e il limite è

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \operatorname{erf} \eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_0^\eta e^{-\beta^2} d\beta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\beta^2} d\beta$$

Ovvero l'integrale di Gauss:

$$\int_0^\infty e^{-\beta^2} d\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \rightarrow \lim_{\eta_2 \rightarrow \infty} \operatorname{erf} \eta = 1$$

Allora si ha

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = T_0 \\ A_1 + B_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B_2 = -A_1 \\ -B_2 + B_1 = T_0 \end{cases}$$

Inoltre, ricordando che

$$-\frac{k_1 B_1}{\sqrt{\alpha_1}} = \frac{k_2 B_2}{\sqrt{\alpha_2}}$$

si ha

$$B_2 = -\frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} B_1$$

Cioè trovo

$$\frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} B_1 + B_2 = T_0$$

da cui ricavo  $B_1$  e  $B_2$

$$B_1 = \frac{T_0}{1 + \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}}$$

$$B_2 = -\frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \frac{T_0}{1 + \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}}$$

E allora da  $A_1 = A_2 = -B_2$  ricavo

$$A_1 = A_2 = \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \frac{T_0}{1 + \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}}$$

Ho trovato allora l'andamento della temperatura interfacciale:

$$T_1 = \frac{T_0}{1 + \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}} \left[ -\frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} + \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha_1 t}} \right) \right]$$

$$T_2 = \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \frac{T_0}{1 + \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}} \right) \right]$$

Posso verificare quindi che le condizioni al contorno siano soddisfatte:

$$T_1(x=0) = \frac{T_0}{1 + \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}} \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \quad \text{e} \quad T_2(x=0) = \frac{T_0}{1 + \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}} \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}$$

Cioè  $T_1|_{x=0} = T_2|_{x=0}$  è verificata!

E posso calcolare il flusso termico:

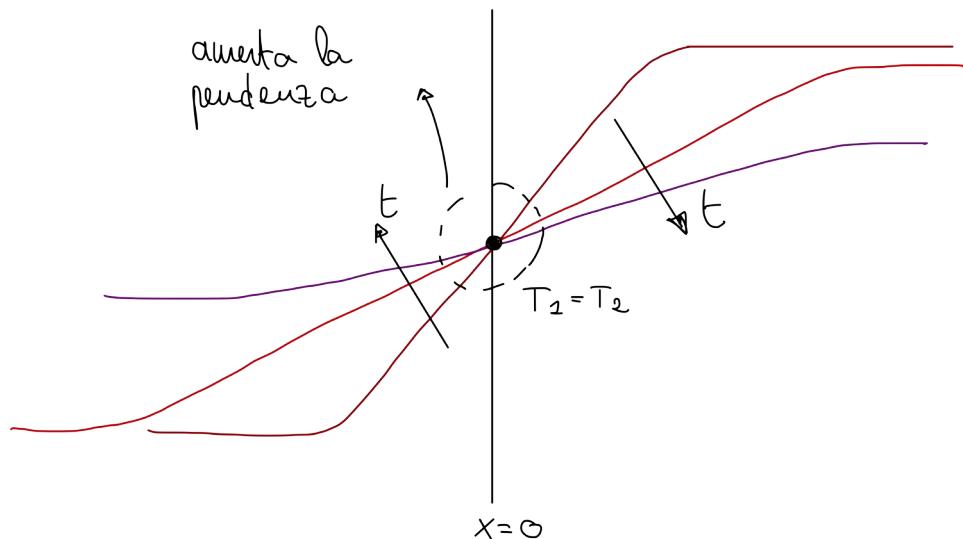
$$\frac{\dot{Q}_1}{S} = k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{B_1}{\sqrt{\pi \alpha_1 t}} = \frac{T_0}{1 + \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}} \frac{1}{\sqrt{\pi \alpha_1 t}}$$

ATTENZIONE ALLA FUNZIONE INIZIALE SE ERA **erf** O **erfc**.

Quindi trovo che a **0** la distribuzione è quella verticale e aumentando il tempo la curva si allarga e la temperatura interfacciale è uguale a  $\frac{T_0}{2}$  se le proprietà del materiale 1 e 2 sono uguali.

Se i due materiali sono diversi allora la temperatura interfacciale dipende dalle caratteristiche  $k$  e  $\alpha$  dei due copri.

Volendo calcolare la temperatura di un corpo a contatto con un altro di temperatura nota dovremmo fare queste considerazioni e se sono uguali la temperatura sarà la media altrimenti sarà legata alle loro proprietà.



# Materiali che non obbediscono alla legge di Fourier (non Fourieriani)

È stato trovato recentemente che il corpo umano può non obbedire alla legge di Fourier.

La legge dei fourier dice che il calore scambiato è proporzionale (il segno meno serve a rispettare la seconda legge della dinamica) al coefficiente di conduzione, per la superficie di scambio e per il gradiente normale alla superficie di scambio ovvero normale all'isoterma (S è la superficie di isoterma T).

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dq}{dt}, \text{ con } x \text{ coordinata normale all'isoterma.}$$

Applicandola al bilancio energetico:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \dot{Q}'' = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \text{ ovvero } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \text{ (apice } \dot{Q}'' \text{ indica per unità di superficie)}$$

Si ottiene 'equazione transitoria monodimensionale.

Nel 1948 un matematico italiano Cattaneo propose che la legge di fourier fosse in realtà  $\dot{Q}'' = -k \frac{\partial T}{\partial x} - t_0 \frac{\partial \dot{Q}''}{\partial t}$  ovvero che questo calore tiene anche conto di un tempo  $t_0$  e del gradiente di Q rispetto a t.

QUESTA EQUAZIONE PRESE DIVERSI NOMI COME LEGGE DI CATTANEO-VERNOT

MOLTI ANNI DOPO LA SPERIMENTAZIONE HA DEMONSTRATO CHE MOLTI FLUIDI (ES. ELIO) PORTATI A TEMPERATURE PROSSIME ALLO ZERO ASSOLUTO, COMPORTANDOSI COME SUPERCONDUTTORI, SCAMBIANO CALORE COME FLUIDI NON FOURIER, SEGUENDO LA LEGGE RIPORTATA.

Ripartiamo allora dal bilancio energetico sotto le ipotesi di Cattnaeo:  $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \dot{Q}''$

$$\text{e deriviamola rispetto al tempo: } \rho c \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \dot{Q}'' \right]$$

$$\text{Supponendo } \rho \text{ e } c \text{ indipendenti da } t \text{ otteniamo: } \rho c \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \dot{Q}'' \right]$$

$$\text{Ma dall'espressione di Cattaneo: } \frac{\partial}{\partial t} \dot{Q}'' = - \frac{k}{t_0} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\dot{Q}''}{t_0}$$

E sostituendo:

$$\rho c \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial x} \left[ -k \frac{\partial T}{\partial x} \pm \frac{\dot{Q}''}{t_0} \right] = \frac{k}{t_0} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{t_0} \frac{\partial \dot{Q}''}{\partial x} \text{ ma dal bilancio energetico } \frac{\partial \dot{Q}''}{\partial x} = - \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\text{e quindi } \rho c \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{k}{t_0} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\rho c}{t_0} \frac{\partial T}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{1}{t_0} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{k}{\rho c} \frac{1}{t_0} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

$$\text{Ricordando che } \frac{k}{\rho c} = \alpha \text{ si ha } \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \frac{1}{t_0} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\alpha}{t_0} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

$$\text{E moltiplicando per } \frac{t_0}{\alpha} \text{ otteniamo } \frac{t_0}{\alpha} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\text{Dove si definisce } \frac{\alpha}{t_0} = c^2 \text{ **seconda velocità del suono**.}$$

Questa ha senso fisico di velocità alla quale una differenza di temperatura provoca uno scambio di calore. Si osservi che, applicando la legge di Fourier, abbiamo implicitamente ipotizzato che la seconda velocità del suono fosse infinita. Per i fluidi alle bassissime temperature ciò non è vero! Per l'olio e i cristalli dielettrici la  $c$  assume valori bassi. Il concetto di  $c$  prelude il fenomeno delle onde termiche.

Ovvero  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ , questa ipotesi di Cattaneo modifica l'espressione finale della temperatura dove viene introdotta anche la derivata seconda rispetto a tempo modificando la sostanza matematica dell'equazione che invece di chiamarsi parabolica soprattutto rispetto allo spazio (come quella di prima  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial x}$ ) in un'equazione iperbolica, che complica notevolmente la soluzione matematica.

Per  $c$  molto grande si torna alla soluzione tradizionale di Fourier.

Si è visto che andando a lavorare allo zero assoluto come l'olio liquido i materiali che diventavano super conduttori e quindi con una resistenza che tende ad essere nullo i fluidi non obbedivano più alla legge di Fourier.

Poi andando a studiare altri fenomeni i è trovato che anche per il corpo umano valgono queste considerazioni.

# Congelamento di un liquido

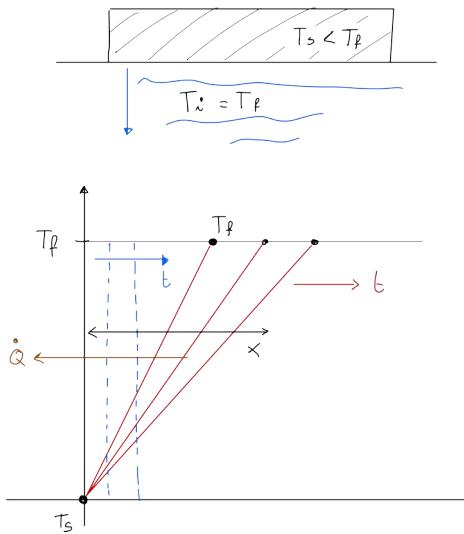
VEDREMO COME SI PRESTA BENE AD APPLICAZIONI COME LA CROCHIRURGIA O LA CRIOTERAPIA.

Il problema diventa di quello con un corpo (consideriamo generalmente acqua) alla temperatura iniziale  $T_i$  sul quale posizioniamo una piastra fredda a temperatura inferiore a quella di fusione. Quindi si formeranno degli strati di ghiaccio che nel tempo si propagano verso il basso.

Dividiamo allora questo discorso in due problemi, il primo si chiama **problema di Stefan**

## Problema di Stefan

Avviene quando si suppone che la temperatura dell'acqua sia alla temperatura  $T_f$  di fusione. ovvero a sinistra abbiamo il corpo a temperatura  $T_s$  e a destra l'acqua.



All'istante  $t = 0$  l'interfaccia è a temperatura  $T_f$

Dietro questo problema di questo ricercatore c'è una storia legata all'interpretazione di dati sperimentali ottenuti dai ghiacci.

Supponiamo che la fenomenologia sia molto rapida e quindi non si tiene conto della capacità termica e supponiamo che l'andamento sia lineare con il flusso di calore che va da  $d\mathbf{x}$  verso  $s\mathbf{x}$ .

Cioè imponiamo:

$$d\dot{Q} = \frac{dU}{dt} \rightarrow k \frac{T_f - T_s}{x} \mathcal{S} = q_L \rho \frac{dV}{dt} = \rho q_L \mathcal{S} \frac{dx}{dt}, \text{ dove ho dovuto sottrarre il calore latente per il volume.}$$

$$k \frac{T_f - T_s}{\rho q_L} dt = x dx \rightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{k(T_f - T_s)}{\rho q_L} t + \text{cost}$$

$$\text{E allora } x = \sqrt{\frac{2k\Delta T}{\rho q_L}} \sqrt{t + \text{cost}}$$

Ovvero abbiamo trovato l'avanzamento del fronte di ghiaccio che avanza con la radice del tempo.

## Problema di Neumann

Supponiamo quindi che la temperatura dell'acqua sia ad una valore superiore alla temperatura di fusione.

Sull'acqua viene sempre poggiata una piastra a temperatura  $T_s$  inferiore a quella di fusione  $T_f$ .

Dall'istante  $0^+$  in poi la temperatura diminuisce verso  $T_s$  arrivando ad avere il valore  $T_f$  per un certo spessore generico al tempo generico  $t$  dove a destra ci sarà del liquido mentre a sinistra ci sarà un andamento esponenziale tra  $T_f$  e  $T_s$ .

Quindi dividiamo il problema in due parti tra la zona liquida:

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = \alpha_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_2^2}$$

$$\text{E nella zona solida } \frac{\partial T_1}{\partial t} = \alpha_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x_1^2}$$

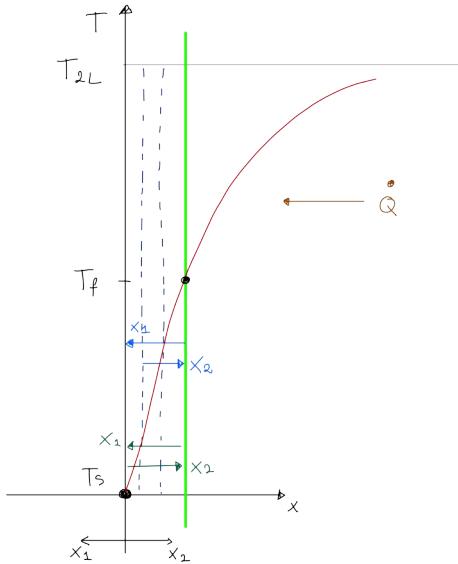
Ciascuna con la sua equazione di conduzione. 1 è la caratteristica del fluido ghiacciato mentre 2 è la caratteristica del fluido nello stato liquido.

Se si ha la solidificazione di una certa quantità di liquido questa quantità passata allo stato solido dipende dal bilancio di massa.

Se ad un certo intervallo di tempo lo spessore del ghiaccio è  $x_2$  allora la massa di liquido passata allo stato di ghiaccio è  $\rho_2 S x_2$

invece la massa di ghiaccia formatasi è  $\rho_1 S x_1$  e allora si ha il rapporto  $\frac{x_1}{x_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ .

Se le due sostanze hanno la stessa densità lo spessore di liquido scomparso è uguale allo spessore di ghiaccio formato



Nel caso dell'acqua però non è così poiché le densità di acqua e ghiaccio sono diverse, e in particolare si ha una differenza di circa il 10% (il ghiaccio ha densità minore), ovvero:  $\frac{X_1}{X_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \approx 1,09 = \beta \implies x_1 > x_2$ ,

Il volume del ghiaccio che si è formato è maggiore di quello dell'acqua che ha cambiato stato.

Supponiamo quindi un andamento a destra come funzione errore mentre a sinistra con la complementare.

$$T_1 - T_f = (T_{1s} - T_f) + A \operatorname{erf}\left(\frac{x_1}{2\sqrt{\alpha_1 t}}\right)$$

$$T_2 - T_f = (T_{2L} - T_f) + B \operatorname{erfc}\left(\frac{x_2}{2\sqrt{\alpha_2 t}}\right)$$

Dove i pedici "s" ed "L" fanno riferimento a liquido e solido.

Imponiamo il bilancio sul fronte solido, dove il flusso di calore che arriva da destra deve essere in grado anche di far cambiare stato al volume considerato:

$$d\dot{Q} = \frac{du}{dt}$$

$$\text{Cioè } -k_2 S \frac{\partial T_2}{\partial x_2} \Big|_{X_2} + k_1 S \frac{\partial T_1}{\partial x_1} \Big|_{X_1} = q_L S \frac{dx_1}{dt} \rho_1$$

$$\text{Può anche essere scritta in funzione di } x_2: -k_2 S \frac{\partial T_2}{\partial x_2} \Big|_{X_2} + k_1 S \frac{\partial T_1}{\partial x_1} \Big|_{X_1} = q_L S \frac{dx_2}{dt} \rho_2$$

Devo quindi determinare  $A$  e  $B$  con le condizioni al contorno:

- In  $x_1 = X_1$  dove  $X_1$  fa riferimento alla posizione del fronte solido, e si ha  $T_1 = T_f$
- In  $x_2 = X_2$  si ha sempre  $T_1 = T_f$

E allora si ha:

$$\begin{cases} 0 = (T_{1s} - T_f) + A \operatorname{erf}\left(\frac{x_1}{2\sqrt{\alpha_1 t}}\right) \rightarrow \operatorname{erf}\left(\frac{x_1}{2\sqrt{\alpha_1 t}}\right) = \frac{T_{1s} - T_f}{A} = \text{cost} \\ 0 = (T_{2L} - T_f) + B \operatorname{erfc}\left(\frac{x_2}{2\sqrt{\alpha_2 t}}\right) \rightarrow \operatorname{erfc}\left(\frac{x_2}{2\sqrt{\alpha_2 t}}\right) = \frac{T_{2L} - T_f}{B} = \text{cost} \end{cases}$$

cioè, per essere costante la variazione di  $X_1$  deve essere proporzionale a  $t$

$$\begin{cases} X_1 \propto \sqrt{t} \\ X_2 \propto \sqrt{t} \end{cases}$$

E allora si scrivono le seguenti espressioni ricordando il legame tra  $X_1$  e  $X_2$  tramite  $\beta$ :

$$X_1 = \beta K \sqrt{t}, \quad X_2 = K \sqrt{t}, \text{ dove } K \text{ è una costante da determinare}$$

Da cui si ricavano:

$$A = \frac{T_f - T_{1S}}{\operatorname{erf}\left(\frac{\beta K}{2\sqrt{\alpha_1}}\right)} \text{ e } B = \frac{T_f - T_{2L}}{\operatorname{erfc}\left(\frac{K}{2\sqrt{\alpha_2}}\right)}$$

Scrivendo il bilancio al fronte solido liquido, abbiamo visto come il flusso che arriva più quello che va via sono uguali al calore latente, e sostituendo:

FAR RIFERIMENTO AGLI APPUNTI FORNITI DAL PROFESSORE PER ULTERIORI CALCOLI

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_1} = A \frac{\partial}{\partial x_1} \operatorname{erf}(\eta_1) \longrightarrow \frac{\partial T_1}{\partial x_1} \Big|_{x=X_1} = \frac{A \cdot e^{-\frac{\beta^2 k^2}{4\alpha_1}}}{\sqrt{\pi\alpha_1 t}}$$

$$\text{E discorso analogo per } \frac{\partial T_2}{\partial x_2} \Big|_{x_2=X_2} = -B \frac{e^{-\frac{k^2}{4\alpha_2}}}{\sqrt{\pi\alpha_2 t}}$$

$$\therefore \frac{\partial X_1}{\partial t} = \frac{dx_1}{dt} = \frac{d}{dt} (Bk \sqrt{t}) = \frac{Bk}{2} \frac{1}{\sqrt{t}} \text{ e } \frac{\partial X_2}{\partial t} = \frac{dx_2}{dt} = \frac{k}{2\sqrt{t}}$$

Allora sostituendo nell'equazione di bilancio dei flussi termici al contorno tra solido e liquido:

$$k_1 B e^{\frac{k^2}{4\alpha_2}} + k_1 A \frac{e^{-\frac{\beta^2 k^2}{4\alpha_1}}}{\sqrt{\pi\alpha_1 t}} = q_L \rho_1 \frac{\beta k}{2} \frac{1}{\sqrt{t}} = q_L \rho_2 \frac{k}{2\sqrt{t}}$$

Si semplifica allora la  $\sqrt{t}$  e rimangono le costanti dei materiali  $k_2, k_1$  che sono note, le temperature di fusione meno quella iniziale che sono note,  $\alpha_1, \alpha_2$  sono noti, e l'unica incognita è  $k$ .

$$k_2 \frac{(T_f - T_{2L})}{\operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{\alpha_2}}\right)} \frac{e^{\frac{k^2}{4\alpha_2}}}{\sqrt{\pi\alpha_2}} + k_1 \frac{(T_f - T_{1S})}{\operatorname{erf}\left(\frac{\beta k}{2\sqrt{\alpha_1}}\right)} \frac{e^{-\frac{\beta^2 k^2}{4\alpha_1}}}{\sqrt{\pi\alpha_1 t}} = q_L \rho_1 \frac{\beta k}{2} = q_L \rho_2 \frac{k}{2}$$

Questa equazione deve essere risolta per iterazioni o approssimazioni successive. Conviene partire da un certo  $k$  e trovare il  $k$  dal membro a destra trovando un valore che userò per le iterazioni successive, e così via.

# Curva logistica

E crescita delle infezioni durante il problema COVID.

Questa curva, nota come curva Maltusiana, fu usata da Maltus per descrivere la crescita della popolazione che suppose come la variazione nel tempo della popolazione sia proporzionale ad un coefficiente  $r$  per la popolazione stessa.

$$\text{Allora } \frac{dP}{dt} = rP$$

La derivata è quindi  $\dot{P} = rP \rightarrow \frac{\dot{P}}{P} = r$  e, questa quantità  $r$  prende il nome di **tasso di crescita**.

questa legge ha tante applicazioni in diversi ambiti.

Posso integrare separando le variabili:

$$\frac{dP}{P} = r dt \rightarrow \ln \frac{P}{P_0} = rt \rightarrow \frac{P}{P_0} = e^{rt}, \text{ crescita esponenziale}$$

Maltus la propose nel 1600 ma nell'800 un altro ricercatore, Verhulst, propose che il tasso di crescita fosse in realtà  $r \left(1 - \frac{P}{k}\right)$

dove il parametro  $k$  è da determinare.

Quindi supponendo questo cambiamento andiamo a vedere cosa succede:

$$\frac{dP}{dt} = r \left(1 - \frac{P}{k}\right) P, \text{ e moltiplicando per } \frac{1}{k}$$

$$\frac{dP}{k} \frac{1}{dt} = r \left(1 - \frac{P}{k}\right) \frac{P}{k} \rightarrow \frac{d\frac{P}{k}}{\frac{P}{k} \left(1 - \frac{P}{k}\right)} = r dt$$

Facendo un cambio di variabili  $x = \frac{P}{k}$  otteniamo:

$$\frac{dx}{x(1-x)} = r dt \rightarrow \frac{1}{x(1-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(1-x)} = \frac{A - Ax + Bx}{x(1-x)} = \frac{(B-A)x + A}{x(1-x)} \rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = A = 1 \end{cases}$$

Ovvero  $\left[ \frac{1}{x} + \frac{1}{(1-x)} dx \right] = r dt$  e integrando  $\ln \frac{x}{x_0} - \ln \frac{(1-x)}{(1-x_0)} = rt$ , allora:

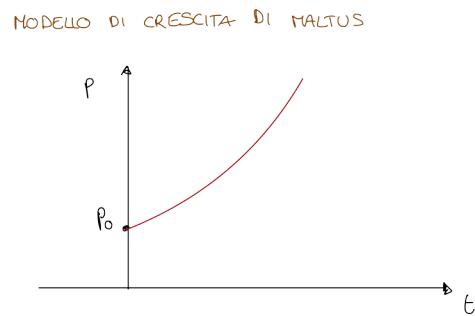
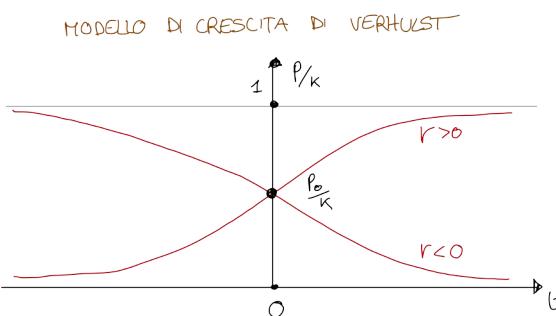
$$\ln \left[ \frac{x}{x_0} \frac{(1-x_0)}{(1-x)} \right] = rt \rightarrow \frac{x}{x_0} \frac{(1-x_0)}{(1-x)} = e^{rt} \rightarrow \frac{x}{x_0} (1-x_0) = e^{rt} - e^{rt} x$$

$$\text{Da cui: } \left[ \frac{(1-x_0)}{x_0} + e^{rt} \right] x = e^{rt} \rightarrow x = \frac{e^{rt}}{\frac{(1-x_0)}{x_0} + e^{rt}} \rightarrow x = \frac{x_0 e^{rt}}{1 + x_0 (e^{rt} - 1)}, \text{ oppure } x = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x_0} - 1\right) e^{-rt}}$$

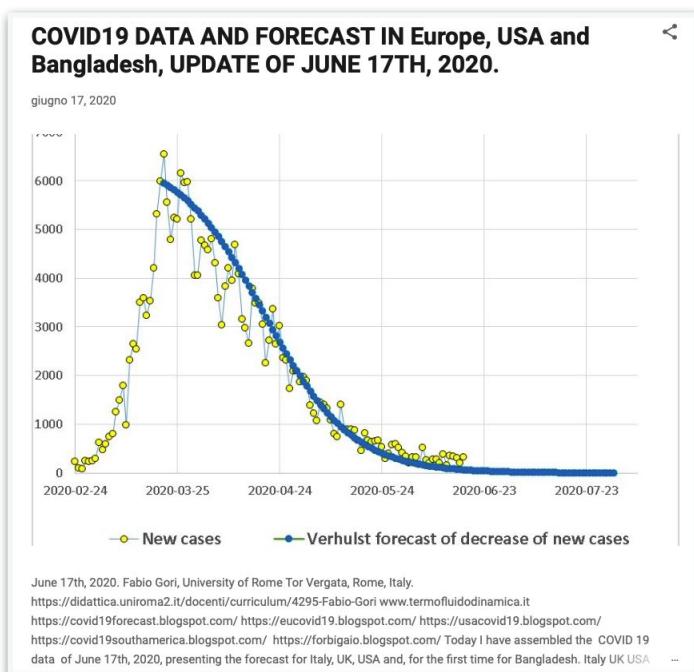
$$\text{Allora } P = \frac{k}{1 + \left(\frac{k}{P_0} - 1\right) e^{-rt}}$$

$$\text{Per } t \rightarrow \infty : \begin{cases} x \rightarrow 1 & \text{se } r > 0 \\ x \rightarrow 0 & \text{se } r < 0 \end{cases} \text{ e per } t \rightarrow -\infty : \begin{cases} x \rightarrow 0 & \text{se } r > 0 \\ x \rightarrow 1 & \text{se } r < 0 \end{cases}$$

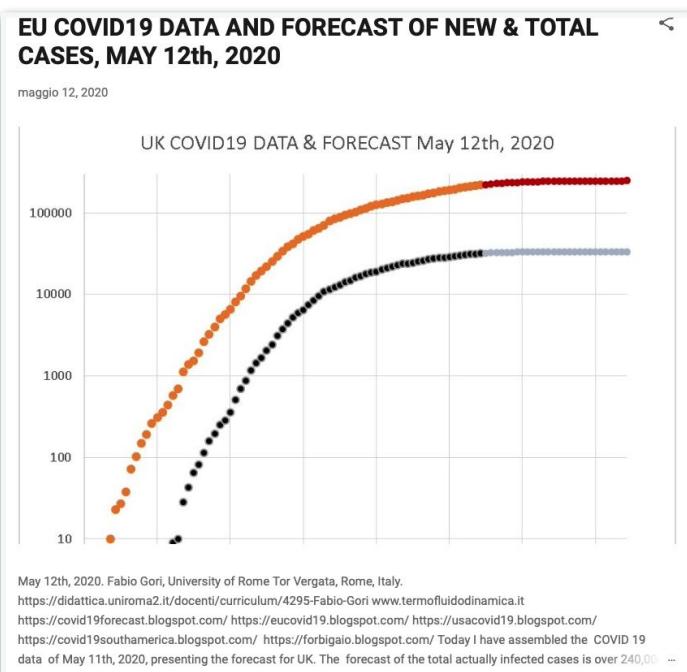
Questo ci rappresenta come la curva nota come modello di crescita di Verhulst che mostra un andamento che tende alla saturazione (speriamo con le infezioni Covid di arrivare a diminuire). Con  $r$  negativo l'andamento si inverte.



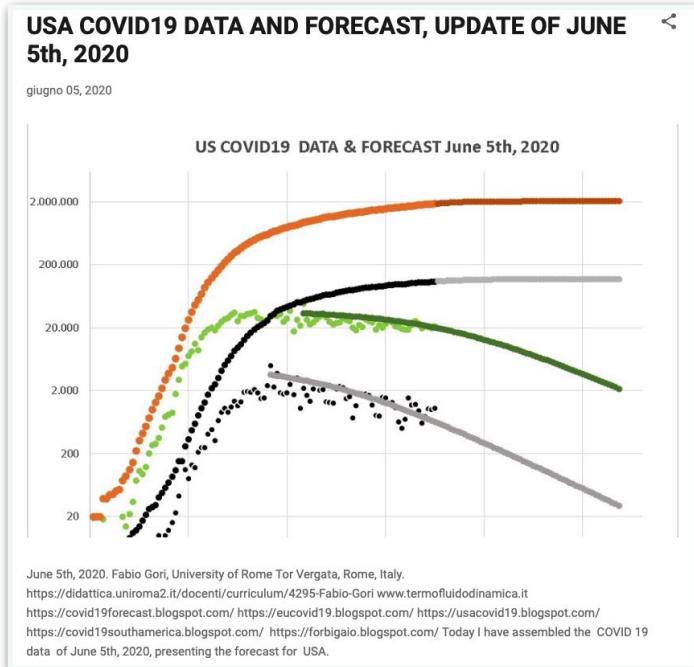
MODELLO SVILUPPATO DAL PROFESSORE DURANTE IL PERIODO EMERGENZIALE COVID:



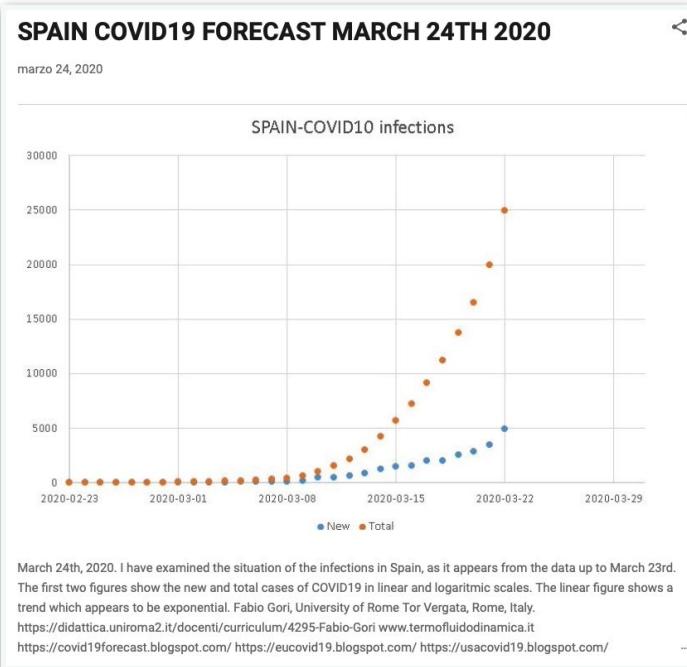
[HTTPS://COVID19FORECAST.BLOGSPOT.COM](https://COVID19FORECAST.BLOGSPOT.COM)



[HTTPS://EUCOVID19.BLOGSPOT.COM](https://EUCOVID19.BLOGSPOT.COM)



[HTTPS://USACOVID19.BLOGSPOT.COM](https://USACOVID19.BLOGSPOT.COM)



[HTTPS://FORBIGAIO.BLOGSPOT.COM](https://FORBIGAIO.BLOGSPOT.COM)

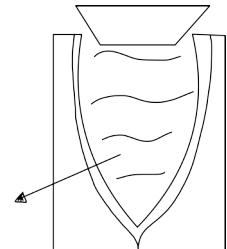
Abbiamo visto come in termocinetica dividiamo tra:

- Conduzione termica, che avviene nei corpi, solidi liquidi o aeriformi in base a meccanismi microscopici di cui non ci occupiamo ma ci focalizziamo sulle leggi macroscopiche.
- Irraggiamento termico, ovvero la modalità di trasmissione del calore che avviene nel vuoto.
- Convezione

## Irraggiamento termico

Consideriamo il termos o vaso Dewar. I termos più vecchi sono costituiti da un materiale vetroso che poggiava sull'esterno metallico (cilindro metallico). Dentro il contenitore vetroso si metteva un liquido e il tappo. Tra il materiale vetroso e l'esterno doveva esserci il vuoto. Mettendo il liquido caldo dentro dopo una giornata il liquido arrivava a temperatura ambiente. È avvenuto uno scambio di calore in quanto il materiale caldo aveva diminuito la propria temperatura ma lo aveva scambiato attraverso un meccanismo di irraggiamento.

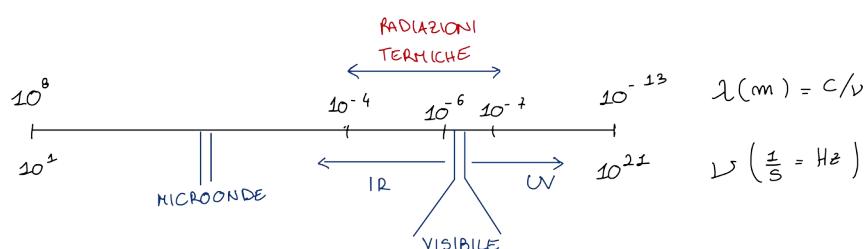
Questo meccanismo è stato spiegato soltanto all'inizio del 900 attraverso le leggi dell'irraggiamento termico.



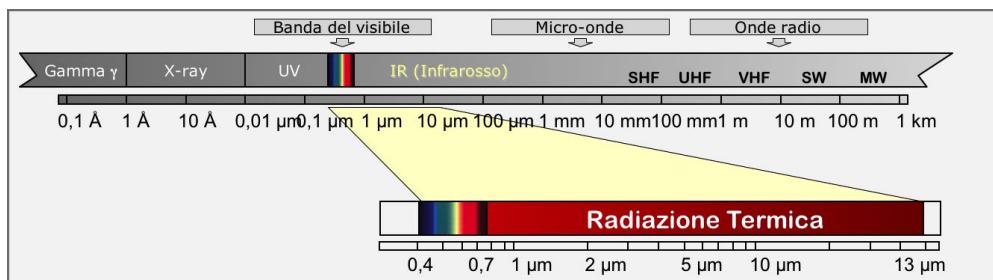
Lo studio dell'irraggiamento si basa sul fatto che ciascun corpo emette una radiazione elettromagnetica con una certa lunghezza d'onda e una certa energia.

Il modo di trasmissione che oggi riteniamo di onde elettromagnetiche con una certa lunghezza d'onda ma con quanti di energia discreta che quindi simulano l'effetto corpuscolare.

Nello spettro delle lunghezze d'onda l'irraggiamento ha soltanto un campo di interesse che vada da lunghezze d'onda di  $10^{-4}$  a  $10^{-7}$ .



- Radiazioni termiche  $\lambda = 10^{-4} \div 10^{-7} \text{ m}$ , sono le radiazioni elettromagnetiche emesse da un corpo che si trova ad una certa temperatura. Tra  $10^{-6}$  e  $10^{-7}$  c'è lo spettro del visibile, preceduto dall'infrarosso e seguito dall'ultravioletto
- Microonde:  $\lambda = 10^{-2} \div 10^{-3} \text{ m}$ , le microonde interferiscono con la molecola polare dell' $\text{H}_2\text{O}$ , che vibrando produce calore e allora le microonde scaldano i corpi in modo passivo.



ATTENZIONE!

L'IMMAGINE È RIBALTATA SULLE LUNGHEZZE D'ONDA RISPETTO AL DISEGNO

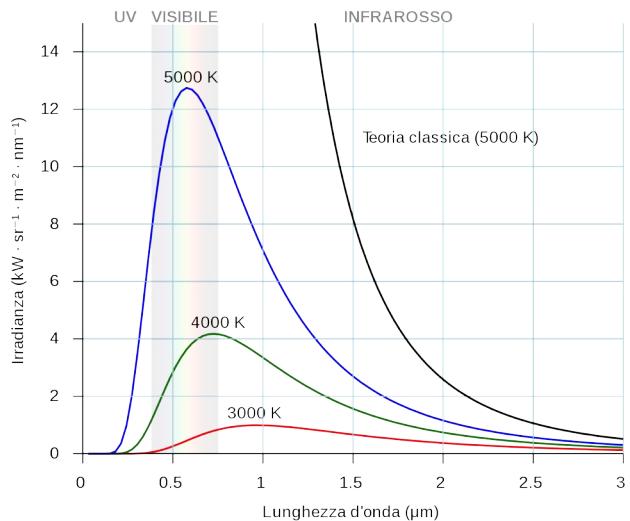
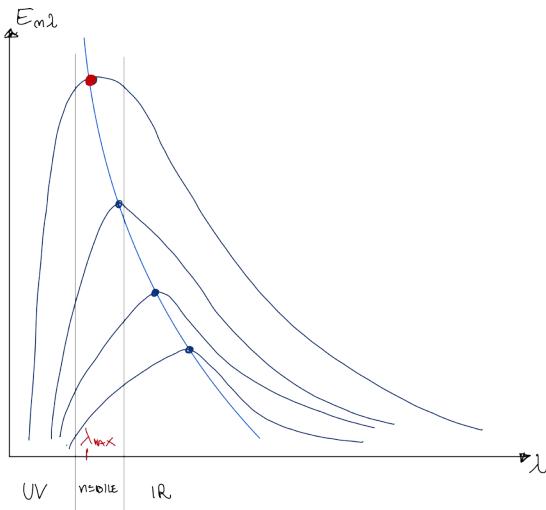
Studiamo allora le 4 leggi alla base dell'irraggiamento, ma prima definiamo il corpo nero.

### Corpo nero

È il limite superiore del comportamento di tutti i corpi, ovvero è un corpo ideale che assorbe tutta la radiazione incidente ed emette la massima radiazione possibile.

L'energia emessa per unità di superficie dal corpo nero si indica con  $E_n$  ed è una potenza termica in  $[E_n] = \frac{W}{m^2}$  che prende il nome di **potere emissivo del corpo nero**. Un flusso termico per unità di superficie.

LE DIZIONI SOLO QUELLE DEL LIBRO KREITH.



Su queste considerazioni posiamo esprimere la:

### Legge di Planck

stabilisce l'andamento del potere emissivo del corpo nero ad ogni lunghezza d'onda, ovvero  $E_{n\lambda}$  espresso per ogni lunghezza d'onda e quindi  $[E_{n\lambda}] = \frac{W}{m^2 m}$ . Prende il nome di **potere emissivo spettrale** o monocromatico.

Disegnando le curve in funzione di  $\lambda$  si parte da una temperatura che prende il nome di temperatura del sole visto dalla terra pari a  $T_{sole} = 5500$  K (o, vedi fine lezione per il calcolo,  $T = 5753$  K), ovvero la temperatura limite naturale.

IN REALTÀ SI RAGGIUNGONO TEMPERATURE PIÙ ELEVATE CON FENOMENI DI FUSIONE MA NOI CONSIDERIAMO QUESTA TEMPERATURA FITTIZIA COME VISTO DALLA TERRA.

Sul libro troviamo anche l'equazione completa di  $E_{n\lambda} = E_{n\lambda}(\lambda, T)$  che presenta un andamento come in figura.  
Ovviamente vediamo solo la parte nel visibile (suddivisione delle ascisse).

Con un andamento crescente dai  $\lambda$  più piccoli raggiungendo un massimo e poi decrescendo nuovamente.

Questa relazione è tale che diminuendo la temperatura  $E_{n\lambda}$  diminuisce, ovvero al diminuire della temperatura si va verso curve che vanno verso il basso.

Al diminuire della temperatura inoltre la curva si sposta verso  $\lambda$  più elevati.

La seconda curva, a 3000 K, ha massimo nell'infrarosso.

Diminuendo ancora la temperatura la curva si sposta sempre più fuori dal visibile.

L'uomo ha un corpo a 37°C che emana calore per irraggiamento che tuttavia non riusciamo a vedere poiché la curva si trova tutta nell'infrarosso (già da circa 600K la curva si trova tutta nell'infrarosso).

Questo discorso costituisce di fatto un'altra legge:

### Legge di Wien

Il prodotto della temperatura per la lunghezza d'onda in cui si ha il massimo di  $E_{n\lambda}$  è costante:  $T \cdot \lambda_{max} = \text{cost}$

Questa costante è un numero fissato ed ha le dimensioni di  $m \cdot K$ .

### Legge di Stefan-Boltzmann

Dal punto di vista del potere emissivo ad ogni  $\lambda$  abbiamo un certo valore ma dal punto di vista ingerestico spesso ci interessa il potere emissivo totale del corpo nero, ovvero l'integrale sotto la curva per tutte le lunghezze d'onda:

$$E_n = \int_0^\infty E_{n\lambda}(\lambda, T) d\lambda = \sigma T^4$$

Dove  $\sigma$  è la costante di Stefan-Boltzmann e  $T$  è la temperatura assoluta del corpo.

## Legge di Lambert o del coseno

L'intensità di radiazione in una direzione non normale è proporzionale al coseno dell'angolo formato tra la direzione in cui vogliamo calcolare l'intensità di radiazione e la normale.

## Realizzazione di un corpo nero in laboratorio

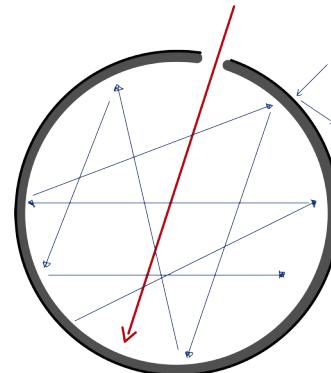
Abbiamo già detto che il corpo nero è il corpo ideale che quindi assorbe tutta la radiazione incidente, differente dai corpi reali che ne riflettono una parte.

In laboratorio si prende una sfera di rame, un materiale molto conduttore (si potrebbe anche prendere il platino), con una parete molto sottile sulla quale si pratica un piccolo foro. Esternamente si copre con della pellicola d'alluminio (domopack) per far sì che la radiazione che arriva esternamente non interferisca con il rame e rifletta la radiazione.

LE COPERTE TERMICHE SONO DEI FOGLI DI ALLUMINIO E CAPIREMO IL PERCHÉ.

Il corpo è nero rispetto alla radiazione che entra dal foro che se il corpo fosse nero verrebbe subito assorbita tuttavia essendo reale una parte viene assorbita e una parte riflessa e questo ad ogni urto (riflessione) successivo. Essendo questa superficie d'ingresso molto piccola rispetto quella del corpo possiamo immaginare che al quantità di energia che riesce ad uscire dal foro è molto più piccola di quella assorbita.

Questo fa sì che a causa di queste riflessioni all'interno del corpo abbiamo una distribuzione uniforme di irraggiamento. Cioè non solo il corpo assorbe tutte le radiazioni incidenti ma possiamo dire anche che in qualsiasi punto si può misurare un irraggiamento termico di corpo nero. Ma se lo sia ha in ogni punto lo si avrà anche dal foro dal quale quindi esce un irraggiamento da corpo nero pari a quello che si ha all'interno del corpo che è quindi dovuto alla sua temperatura.

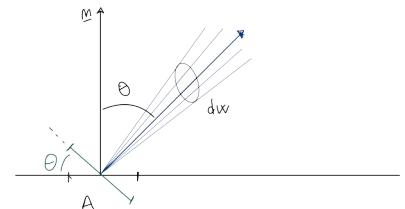


## Radiazione emessa da un corpo

Possiamo quindi considerare l'irraggiamento di questo corpo come l'irraggiamento di corpo nero che possiamo schematizzare come un generico corpo nero piano orizzontale. Questo corpo nero (schematizzazione del foro di prima) emette irraggiamento in tutto il semispazio superiore in una direzione che forma un angolo con la generica normale  $\vec{n}$ . Definiamo l'energia emessa, ovvero il potere emissivo totale per unità di superficie, definendo questo come calore emesso:

$$d\left(\frac{q}{A}\right) = Idw \cos \theta$$

Dove  $I$  è l'intensità della radiazione che attraversa l'angolo solido  $dw$ . Inoltre è proporzionale al  $\cos \theta$  poiché non è emessa in direzione normale.



Inseriamo il  $dw$  poiché consideriamo diversi raggi che emettono energia in questo intervallo.

Cioè questo è come la superficie  $A$  al denominatore portata a destra rappresentasse  $A \cos \theta$  ovvero al superficie proiettata ortogonalmente alla direzione dell'energia raggiante.

Quindi la quantità di energia che attraversa l'angolo solido è  $dq = I dw A \cos \theta$

$$d\left(\frac{q}{A}\right) = \frac{d\left(\frac{q}{A}\right)}{dw \cos \theta}$$

Allora con questa relazione possiamo definire l'**intensità di radiazione**:  $I = \frac{d\left(\frac{q}{A}\right)}{dw \cos \theta}$

Ovvero l'energia radiante emessa per unità di angolo solido e unità di superficie in direzione perpendicolare a quella formata dall'angolo  $\theta$ .

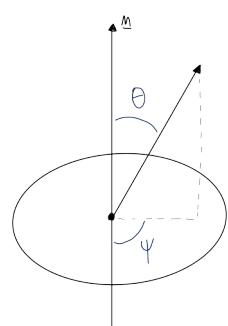
In generale sarà funzione anche dell'angolo  $\psi$  tra la direzione di emissione e una direzione nel piano:

$$I = I(\theta, \phi)$$

Di norma però lo consideriamo trascurabile e quindi  $I = I(\theta)$

Distinguiamo tra:

- Radiazione diffusa in cui  $I = \text{cost}$  per i corpi rugosi
- Radiazione speculare se  $I = I(\theta)$  per i corpi riflessivi



Nel caso della radiazione diffusa la relazione tra l'intensità di radiazione  $I$  e il potere emissivo è che:

$$I = \frac{E_n}{\pi} \quad \text{e per le quantità spettrali (o monocromatiche) } I_\lambda = \frac{E_{n\lambda}}{\pi}$$

PER ORA SALTIAMO LA DEMOSTRAZIONE DI QUESTO FATTO. FORSE LA VEDREMO PIÙ AVANTI, ALTRIMENTI FAR RIFERIMENTO AL KREITH.  
SE NON VERRÀ FATTO NON VERRÀ CHIESTA.

Si osservi come l'espressione dell'intensità di radiazione è la relazione analitica della **legge di Lambert**. La denominazione legge del coseno fa riferimento alla dipendenza dal coseno.

### Corpi reali

Schematizziamo prima il corpo nero che per noi è un corpo tale che se la radiazione eletromagnetica che incide  $G$  viene completamente assorbita e

$$\begin{cases} G = A \\ G_\lambda = A_\lambda \end{cases}$$


Se invece il corpo è reale una parte di radiazione verrà riflessa e una parte assorbita e se trasparente o semitrasparente una parte verrà trasmessa.

Se l'irraggiamento totale  $G$  qualsiasi corpo reale avrà una parte trasmessa, una riflessa e una assorbita

$$\begin{cases} G = R + A + T \\ G_\lambda = R_\lambda + A_\lambda + T_\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 = \rho + \alpha + \tau \\ 1 + \rho_\lambda + \alpha_\lambda + \tau_\lambda \end{cases}$$

Dividendo per  $G$  avremo :

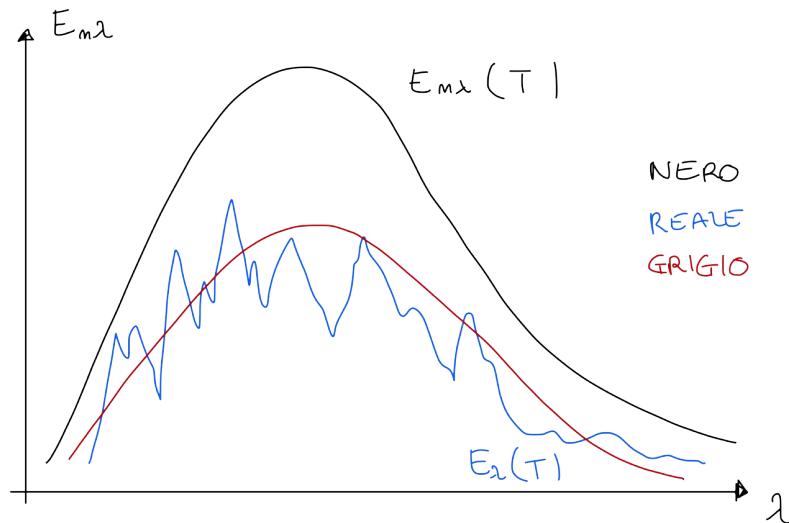
- $\rho_\lambda = \frac{R_\lambda}{G_\lambda}$ , **riflettanza** o coefficiente di riflessione reale (monocromatica o spettrale)
- $\alpha_\lambda = \frac{A_\lambda}{G_\lambda}$ , **assorbenza** (o assorbanza) o coefficiente di assorbimento totale (monocromatica o spettrale)
- $\tau_\lambda = \frac{T_\lambda}{G_\lambda}$ , **trasmittanza** (o trasmittenza) o coefficiente di trasmittività (monocromatica o spettrale)

Questi tre sono caratteristici del corpo reale che riceve l'irraggiamento.

Vediamo come si colloca questo corpo reale nel diagramma del potere emissivo, spettrale o monocromatico.

Se vado a misurare il potere emissivo  $E_\lambda(T)$  troverò un andamento come in figura per il corpo reale.

Si definisce il rapporto  $\epsilon_\lambda = \frac{E_\lambda}{E_{n\lambda}}$  che prende il nome di **emittenza** o coefficiente di emissione spettrale (o monocromatica) che dipende dalla lunghezza d'onda. Inoltre  $1 \leq \epsilon_\lambda \leq 0$



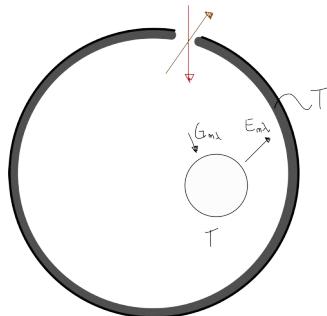
## Legge di Kirckhoff

Vediamo cosa succede per dei corpi messi all'interno della cavità nera.

Abbiamo detto che rispetto le radiazioni che entrano all'interno del corpo posso dire di avere una radiazione elettromagnetica pari a  $G_{n\lambda}$ .

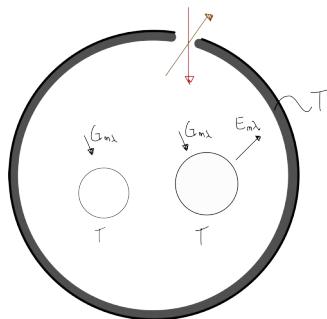
Mettiamo inizialmente all'interno del corpo nero un altro corpo nero a temperatura  $T$  che emetterà una sua radiazione  $E_{n\lambda}$ .

Inoltre su questo secondo corpo, sempre per unità di superficie, ci sarà anche un irraggiamento incidente  $G_{n\lambda}$  dovuto al corpo esterno.



Essendo i due corpi alla stessa temperatura allora il calore scambiato netto è uguale a zero e quindi per il corpo nero interno l'irraggiamento che incide e che lui assorbe tutto in quanto nero deve essere uguale al suo potere emissivo. Ovvero per questo corpo nero  $G_{n\lambda} = E_{n\lambda}$ .

Togliendo il corpo nero e mettendo un corpo non nero:



Inciderà sempre  $G_{n\lambda}$  ma questo corpo non assorbirà tutta la radiazione ma solo una parte:  $A\lambda = G_{n\lambda} \cdot \alpha_\lambda$ .

Inoltre emetterà una radiazione  $E_\lambda$  pari a:  $E_\lambda = \epsilon_\lambda \cdot E_{n\lambda}$

Siccome il corpo non nero è alla stessa temperatura del corpo nero (cavità) allora il calore netto scambiato è nullo e quindi  $A_\lambda = \alpha_\lambda G_{n\lambda} = E_\lambda = \epsilon_\lambda \cdot E_{n\lambda}$

Allora considerando che abbiamo già dimostrato che  $G_{n\lambda} = E_{n\lambda}$  si ha  $\epsilon_\lambda = \alpha_\lambda$ , cioè l'emittenza monocromatica è uguale all'assorbanza monocromatica per ogni corpo reale.

Questa prende il nome di **legge di Kirckhoff**.

Questo significa rispetto le variabili di prima che da 4 incognite sono passato a 3 e ovviamente l'assorbanza e l'emittenza sono uguali. Se il corpo è opaco ovviamente abbiamo  $\tau_\lambda = 0$  e quindi solo due incognite. Altrimenti se parzialmente trasparente abbiamo tutte e tre le incognite.

Per un corpo reale abbiamo visto come  $E_\lambda$  è funzione di  $\lambda$  e  $T$ . Adesso al posto del corpo reale consideriamo un corpo che chiamiamo **grigio** che ha una curva di emissione pari alla media delle oscillazioni del corpo reale (si faccia riferimento al grafico di prima). Fare la media significa farne l'integrale e dividerlo per l'intervallo di interesse.

Cioè invece di considerare un  $E_\lambda$  funzione anche di  $\lambda$  lo considero costante rispetto a  $\lambda$

Si procede allora calcolando  $\epsilon$  totale (non monocromatico) che sarà solo funzione di  $T$ :

$$\epsilon(T) = \frac{E(T)}{E_n(T)} = \frac{\int_0^\infty \epsilon_\lambda E_{n\lambda} d\lambda}{\int_0^\infty E_{n\lambda} d\lambda} = \epsilon_\lambda \text{ e allora } \epsilon_\lambda = \epsilon, \text{ costante rispetto la lunghezza d'onda,}$$

Ovvero divido l'area di un corpo reale per il potere emissivo del corpo nero .

Questa prende il nome di **emissività totale**  $\epsilon(T)$

Sotto l'ipotesi di corpo grigio si ha che il potere emissivo di un corpo reale è uguale al potere emissivo spettrale monocromatico di un corpo grigio.

Ma un corpo nero è un corpo grigio? Sì. Un corpo nero ha un  $\epsilon_\lambda$  costante ed uguale ad 1. Ovviamente però un corpo grigio non è a sua volta un corpo nero.

Facendo lo stesso discorso per l'assorbanza di un corpo che è definita come l'assorbanza del corpo per l'assorbanza del corrispondente corpo nero:

$$\alpha(T) = \frac{A(T)}{A_n(T)} = \frac{\int_0^\infty \alpha_\lambda G_\lambda(\lambda', T') d\lambda}{\int_0^\infty G_\lambda(\lambda', T') d\lambda} = \alpha_\lambda \Rightarrow \alpha_\lambda = \alpha$$

Con  $\lambda'$ ,  $T'$  caratteristiche del corpo emittente e  $\lambda$  del corpo che riceve.

Considerando anche la legge di Kirchhoff  $\epsilon_\lambda = \alpha_\lambda$  otteniamo che in conclusione se il corpo è grigio i 4 parametri  $\alpha$ ,  $\alpha_\lambda$ ,  $\epsilon$ ,  $\epsilon_\lambda$  si riducono ad un solo parametro che dipende solo dalla temperatura:  $\alpha = \alpha_\lambda = \epsilon = \epsilon_\lambda \leq 1$

SUL KREITH AD ESEMPIO ABBIAMO UNA TABELLA CHE RIPROTA L'EMITTENZA IN FUNZIONE DELLA TEMPERATURA DOVE IL VALORE CORRISPONDE A TUTTI E 5 I PARAMETRI.

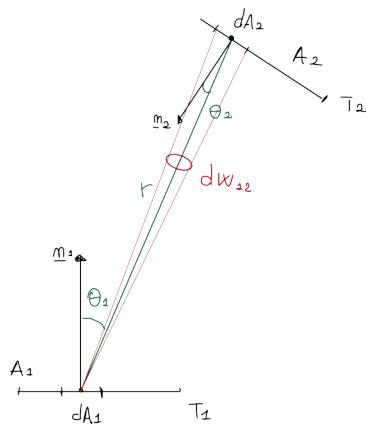
Per i **corpi opachi** si ha che  $\tau = \tau_\lambda = 0 \rightarrow \begin{cases} 1 + \rho + \alpha = \rho + \epsilon \\ 1 + \rho_\lambda + \alpha_\lambda = \rho_\lambda + \epsilon \end{cases}$  e allora  $\rho = \rho_\lambda = 1 - \epsilon$

Per un copro grigio e opaco, noto  $\epsilon$ , si conosce immediatamente anche  $\rho$

SUL LIBRO CI SONO UNA SERIE DI CURVE CHE RAPPRESENTANO GLI ANDAMENTI REALI DEI COEFFICIENTI DI TRASMITTIVITÀ IN FUNZIONE DELLA TEMPERATURA POICHÉ L'IPOTESI DI CORPO GRIGIO NELLA REALTÀ È PIUTTOSTO STRINGENTE MA A NOI SERVIRÀ PER SEMPLIFICARE I CALCOLI.

### Calore scambiato tra 2 corpi per irraggiamento

Supponiamo di avere una superficie  $A_1$  che emette nel semispazio superiore e di tutte le radiazioni solo una parte va a colpire  $A_2$ , quindi il calore scambiato è solo quello che da  $A_1$  va ad  $A_2$ .



Allora consideriamo 2 corpi neri e definiamo tutta l'energia che dal copro 1 colpisce il copro 2 ed è pari a tutta l'energia del copro nero moltiplicata per un fattore di vista  $F_{1-2}$ . Ovvero  $q_{1 \rightarrow 2} = E_{n1} \cdot A_1 \cdot F_{2-1}$

E anche per l'altro verso  $q_{2 \rightarrow 1} = E_{n2} \cdot A_2 \cdot F_{1-2}$

Si osservi come nel fenomeno dell'irraggiamento il calore si considera positivo quando lascia la superficie e negativo quando arriva alla superficie, questo perchè fisicamente è più simile ad un lavoro essendo un'interazione delle onde elettromagnetiche.

Considerando quindi lo scambio di calore complessivo tra il copro  $A_1$  e il copro  $A_2$ , entrambi corpi neri, considero il calore scambiato a regime stazionario è  $q_{12} = q_{1 \rightarrow 2} - q_{2 \rightarrow 1} = E_{n1} A_1 F_{12} - E_{n2} A_2 F_{21} = 0$  se le due temperature sono uguali  $T_1 = T_2$ .

Allora per la legge di Stefan-Boltzmann  $\sigma T_1^4 A_1 F_{12} - \sigma T_1^4 A_2 F_{21} = 0$

E quindi si ha che  $A_1 F_{12} = A_2 F_{21}$ , relazione di reciprocità tra i fattori di vista.

Che non significa altro che come il copro 1 colpisce (o vede) il copro 2 così il copro 2 colpisce (o vede) il copro 1.

In definitiva si ha che il calore complessivamente scambiato tra i 2 corpi neri per irraggiamento è:

$$q_{12} = A_1 F_{12} (E_{n1} - E_{n2}) = A_2 F_{21} (E_{n1} - E_{n2})$$

## Calcolo del fattore di vista

Consideriamo quindi le due superficie  $A_1$  e  $A_2$  e le superfici infinitesimi  $dA_1$  e  $dA_2$  con le normali  $n_1, n_2$ .

Costruisco l'angolo solido con cui il corpo 1 vede  $dA_2$ .

Allora seguendo la legge di Lambert posso scrivere che il calore differenziale da 1 va in 2 è:

$dq_{1 \rightarrow 2} = I_1 dA_1 \cos \theta_1 dw_{12}$ , intensità della direzione che moltiplica la superficie nella direzione data dall'angolo, per l'angolo solido.

L'angolo solido è uguale alla superficie proiettata in direzione perpendicolare  $dw_{12} = \frac{dA_2 \cos \theta_2}{r^2}$

Considerando valida l'ipotesi di radiazione diffusa per cui  $I_1 = \frac{E_{n1}}{\pi}$  si ha

$$dq_{1 \rightarrow 2} = I_1 dA_1 \cos \theta_1 \frac{dA_2 \cos \theta_2}{r^2} = \frac{E_{n1}}{\pi} \frac{dA_1 dA_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{r^2}$$

Allora  $q_{1 \rightarrow 2} = \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{E_{n1}}{\pi} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r^2} dA_1 dA_2$

In modo del tutto analogo possiamo determinare l'energia emessa dal corpo 2 che arriva al corpo 1, ovvero

$$q_{2 \rightarrow 1} = \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{E_{n2}}{\pi} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r^2} dA_1 dA_2$$

Allora, il calore scambiato complessivamente è ancora la differenza tra questi, ovvero:

$$q_{12} = q_{1 \rightarrow 2} - q_{2 \rightarrow 1} = (E_{n1} - E_{n2}) \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2,$$

dove porto fuori  $E_{n1}, E_{n2}$  che dipendono solo dalla temperatura.

Facendo il parallelo tra questa espressione e quella di prima ottengo che  $A_1 F_{12} = A_2 F_{21} = \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2$

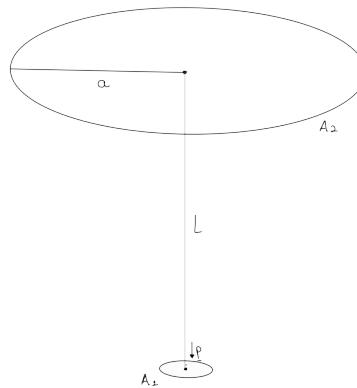
E allora:  $\begin{cases} F_{12} = \frac{1}{A_1} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2 \\ F_{21} = \frac{1}{A_2} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2 \end{cases}$

Abbiamo ottenuto le espressioni dei **fattori di vista**.

## Calcolo della temperatura del sole visto dalla terra

Essendo la distanza molto grande posso considerare due dischi, per il sole di raggio  $a$  e per la retta on un raggio molto più piccolo.

L'ESERCIZIO SI TROVA SVOLTO COMPLETAMENTE SUL KREITH



Dalle formule ricavate per il calcolo dei fattori di vista e integrando si trova che  $A_1 F_{12} = A_2 F_{21} = \frac{A_1 a^2}{a^2 + L^2}$

Devo partire dal fatto che conosco l'irraggiamento termico che arriva sulla terra al di fuori dell'atmosfera  $P = 1353 \frac{W}{m^2}$

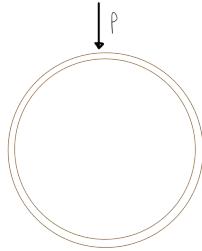
Quindi conosco l'energia totale che arriva sulla terra ed è:

$$Q_{21} = \underline{P} A_1 = \underline{P} \cdot \pi r_T^2 = A_1 F_{12} (E_{n2} - E_{n1}) = A_1 F_{12} \sigma (T_2^4 - T_1^4), \text{ con } A_1 F_{12} \text{ che conosco e } T_2 \text{ la temperatura fittizia del sole visto dalla terra.}$$

$$\text{Quindi } A_1 F_{12} = \frac{A_1 a^2}{a^2 + L^2} = \frac{\pi r_T^2 a^2}{a^2 + L^2}$$

$$\text{cioè abbiamo che } \underline{P} \pi r_T^2 = \frac{\pi r_T^2 a^2}{a^2 + L^2} \sigma (T_2^4 - T_1^4).$$

Allora i raggi della terra  $r_T$  e del sole  $a$  sono noti e considerando la temperatura media della terra  $T_1 \approx 300$  K si trova al temperatura fittizia del sole che arriva alla terra, ovvero  $T_2 = 5753$  K.



62  
BIS

Calcolo della temperatura del Sole visto dalla Terra.

dal Kruith (Fattore di vista)

$$A_1 F_{12} = A_1 \frac{r_s^2}{r_s^2 + D^2} = A_2 F_{21}$$

$$|Q_{21}| = |\underline{P} \pi r_T^2| = |A_1 F_{12} (E_{n1} - E_{n2})| = |A_1 F_{12} G (T_1^4 - T_2^4)|$$

$$= |A_2 F_{21} \sigma (T_2^4 - T_1^4)|$$

$$A_1 F_{12} = \frac{\pi r_T^2 r_s^2}{r_s^2 + D^2} = A_2 F_{21} = \frac{\pi r_s^2 r_T^2}{r_s^2 + D^2}$$

$$G (T_2^4 - T_1^4) = \frac{\underline{P} \pi r_T^2}{\pi r_s^2 r_T^2} = \frac{\underline{P}}{r_s^2 + D^2} =$$

$$= 1353 \left[ 1 + \left( \frac{1.5 \times 10^8}{0.7 \times 10^6} \right)^2 \right] = 6.2 \times 10^7$$

$$|T_2^4 - T_1^4| = \frac{6.2 \times 10^7}{5.67 \times 10^8} = 1.096 \times 10^{-15}$$

$$T_2^4 = 1.096 \times 10^{-15} + 300^4 = 1.096 \times 10^{-15} + 9 \times 10^8 \approx 1.096 \times 10^{-15}$$

$$T_2 = 5753 \text{ K}$$

## Caratteristiche dei fattori di vista

Abbiamo visto la definizione dove il fattore di vista  $F_{12}$  è il rapporto tra l'energia emessa dal corpo 1 che finisce sul corpo 2 diviso tutta l'energia emessa dal corpo 1:  $F_{12} = \frac{E_{n1 \rightarrow 2}}{E_{n1}}$

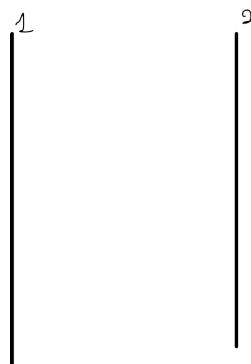
Il fattore di vista  $F_{11}$  rappresenta l'energia emessa da 1 che colpisce 1 stesso.

Se ho due corpi in generale si ha che:  $F_{12} + F_{11} = 1$  tutta l'energia emessa da 1 può colpire o 2 o 1.

Se il corpo è concavo vede se stesso e  $F_{11} \neq 0$  (ad esempio le braccia e le gambe che riflettono calore sul corpo stesso) una frazione di energia emessa dal corpo 1 ricade sul corpo stesso.

Se invece il corpo è convesso  $F_{11} = 0$  e tutta l'energia emessa colpisce il corpo due.

### Caso 1: pareti infinitamente estese

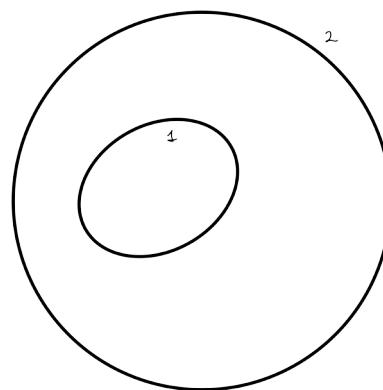


Consideriamo le due pareti e una superficie infinitamente estesa è un corpo convesso e tutta l'energia fa 1 finisce sul corpo 2, allora:

$$F_{11} = 0 \longrightarrow F_{12} = 1$$

$$F_{22} = 0 \longrightarrow F_{21} = 1$$

### Caso 2: corpo convesso in una cavità



Dal punto di vista del corpo 1 è che convesso si ha:

$$F_{11} = 0 \text{ e } F_{12} = 1, \text{ cioè tutta l'energia emessa dal corpo 1 finisce al corpo 2.}$$

Invece il corpo 2 è concavo e quindi una parte dell'energia emessa da 2 ricade su stesso ovvero  $F_{22} \neq 0$

Allora:

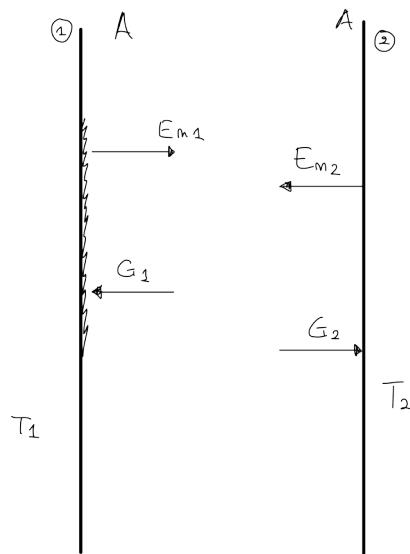
$$F_{21} + F_{22} = 1 \longrightarrow F_{22} = F_{21} - 1$$

Ma esiste la relazione di reciprocità degli  $F$ :  $A_1 F_{12} = A_2 F_{21}$  e allora:

$$F_{21} = \frac{A_1}{A_2} \underbrace{F_{12}}_{=1} = \frac{A_1}{A_2}$$

**Corpi neri:** caso 1

Consideriamo due superfici infinitamente estese di superficie  $A$ .



Il corpo 1 emette energia in base alla legge di Stefan-Boltzmann  $E_{n1} = \sigma T_1^4$  così come il corpo 2 emette  $E_{n2} = \sigma T_2^4$ .

Chiamo allora gli irraggiamenti  $G_1$  che incide sul corpo 1 dovuto al corpo 2 e  $G_2$  che incide sul corpo 2 dovuto al corpo 1.

Facendo il bilancio di energia a regime stazionario per il corpo 1, con  $T_1$  costante nel tempo, ovvero tale che il calore complessivamente scambiato dal corpo 1 sarà:

$$Q_1 = A E_{n1} - A G_1 = A (E_{n1} - G_1)$$

Calore raggiante emesso (positivo se uscente) meno l'irraggiamento che arriva.

Cioè è come se avessimo fatto il bilancio attraverso una piccola superficie attaccata in quanto il corpo emette  $E_{n1}$  per essere alla temperatura  $T_1$  ma l'irraggiamento  $G_1$  dipende dal corpo 2 e quindi è come se fosse fatto sulla superficie staccata di un infinitesimo dalla superficie 1 vera a temperatura  $T_1$ .

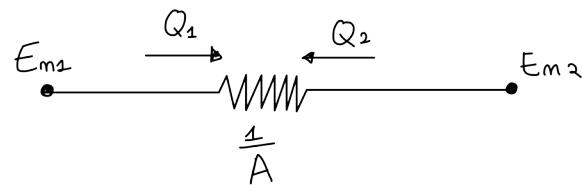
Discorso analogo per il corpo due.

Inoltre il calore raggiante  $G_1$  dipenderà dall'energia emessa dal corpo 2:  $\mathcal{A}G_1 = \mathcal{A}E_{n2} \rightarrow G_1 = E_{n2}$

$$\text{E allora: } Q_1 = A (E_{n1} - E_{n2}) = A \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

Allora per questa espressione possiamo fare il ragionamento tra causa ed effetto per cui essendo presente una differenza di potenziale di irraggiamento questo provoca un flusso di calore  $Q_1$  attraverso una resistenza  $\frac{1}{A}$ . Posso allora fare lo schema

$$\text{elettrico analogo: } (E_{n1} - E_{n2}) = \frac{1}{A} Q_1 \rightarrow \Delta V = RI$$



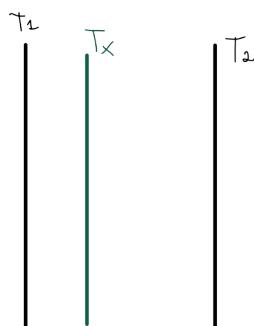
Chiaramente se volessimo calcolare il calore scambiato dal corpo 2, otterremo un circuito elettrico analogo dove la corrente  $Q_2$  è uguale e contraria alla corrente  $Q_1$  e quindi:

$$Q_2 = Q_1$$

Quindi questo è il primo esempio odi calcolo di un bilancio termico tra il corpo 1 e il corpo 2.

## Isolanti per irraggiamento

Se il calore scambiato è troppo elevato come posso fare per diminuirlo? Metto uno schermo radiante a regime stazionario a temperatura incognita  $T_x$ . Se la temperatura è incognita e considero il regime stazionario avrò che il corpo a  $T_1$  scambia calore con lo schermo radiante che a sua volta scambia calore con  $T_2$  ma essendo a regime stazionario se  $T_1 > T_2$  il calore che da 1 va ad x sarà uguale al calore che da x va a due.



Calore tra il corpo 1 e x:  $Q_{1x} = A\sigma(T_1^4 - T_x^4)$  e questo calore sarà uguale a quello tra x e 2, ovvero:  $Q_{x2} = A\sigma(T_x^4 - T_2^4)$

Uguagliando si ottiene  $A\sigma(T_1^4 - T_x^4) = A\sigma(T_x^4 - T_2^4) \rightarrow 2T_x^4 = T_1^4 + T_2^4$

$$\text{Ovvero } T_x^4 = \frac{T_1^4 + T_2^4}{2}$$

E allora il calore scambiato dal corpo 1 diventa:

$$Q_{1x} = A\sigma\left(T_1^4 - \frac{T_1^4 + T_2^4}{2}\right) = A\sigma \frac{T_1^4 - T_2^4}{2} \Rightarrow Q_{1x} = \frac{Q_1}{2}, \text{ questo calore diventa la metà quando metto lo schermo.}$$

Ripetendo lo stesso esercizio aggiungendo un altro schermo a temperatura  $T_y$  si trova che il calore perso cambia, con  $N$  schermi si dimostra che il calore si riduce a  $Q'_1 = \frac{Q_1}{N+1}$ , cioè aumentando il numero di schermi il calore si riduce ma si riduce sempre meno.

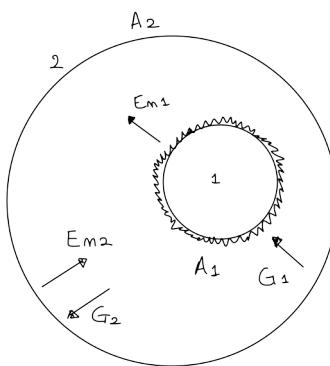
Per ridurre il calore scambiato si utilizzano materiali costituiti da numerosi strati (ad esempio quelli utilizzati per ridurre il calore perso da sistemi in criogenia). Chiamati **isolanti raggianti**.

### Corpi neri: caso 2

Consideriamo un corpo nero convesso all'interno di una cavità nera, con  $A_1 < A_2$ .

Il corpo 1 emette l'energia  $E_{n1} = \sigma T_1^4$  e il corpo 2 emette l'energia  $E_{n2} = \sigma T_2^4$ .

Sul corpo 1 incide un irraggiamento  $G_1$  dovuto al corpo 2 mentre sul corpo 2 incide un irraggiamento  $G_2$  dovuto al corpo 1.



Al regime stazionario, il calore scambiato dal corpo 1 è dato ancora dal bilancio sul corpo 1:

$$Q_1 = A_1 E_{n1} - A_1 G_1 = A_1 (E_{n1} - G_1)$$

Inoltre calcolando il calore raggiante che incide sul corpo 1 è  $A_1 G_1$  che dipende dal corpo 2, dalla sua superficie e dal suo potere emissivo  $E_{n2}$  attraverso la frazione  $F_{21}$ , ovvero:

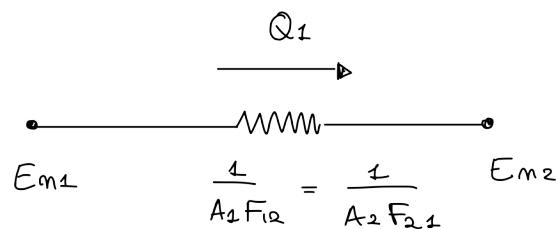
$$A_1 G_1 = A_2 E_{n2} F_{21} \text{ e per la relazione di reciprocità } (A_2 F_{21} = A_1 F_{12}) \text{ si ha che } A_1 G_1 = A_1 F_{12} E_{n2}$$

$$\text{E allora } Q_1 = A_1 E_{n1} - A_1 F_{12} E_{n2} = A_1 F_{12} (E_{n1} - E_{n2})$$

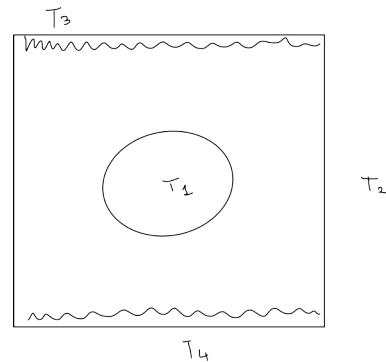
A questo punto quindi il circuito equivalente presenta una resistenza differente:

$$(E_{n1} - E_{n2}) = \frac{1}{A_1 F_{12}} Q_1 = \frac{1}{A_2 F_{21}} Q_1$$

ovvero:

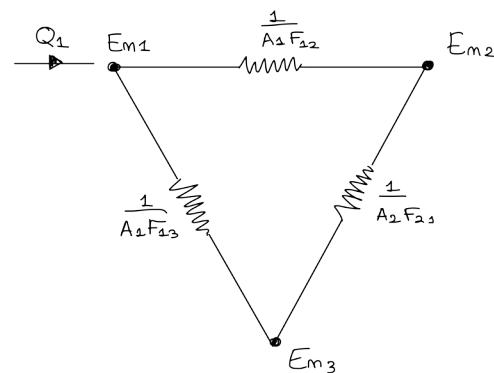


Si osservi come se invece di due corpi soli avessimo più corpi come ad esempio il pollo allo spiedo nel forno. Il pollo a temperatura  $T_1$  le resistenze superiore  $T_3$  e inferiore  $T_4$  e la parte a temperatura  $T_2$ .

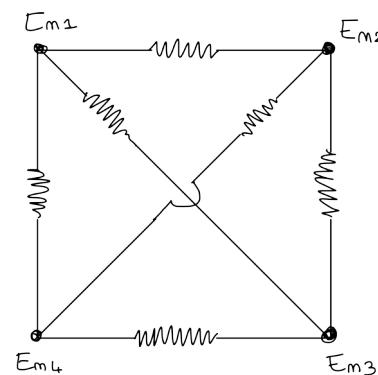


Se le due resistenze sono uguali allora il problema si rifà analogo ad un triangolo elettrico:

Conosciuta la temperatura  $T_3$  abbiamo  $E_{n3}$ . Conoscendo anche la temperatura laterale possiamo risolvere questo problema con l'ipotesi che la temperatura  $T_1$  deve essere uguale ad un certo valore trovando il calore  $Q_1$  necessario a cuocere il pollo è dato dalla corrente risultante dal circuito elettrico.



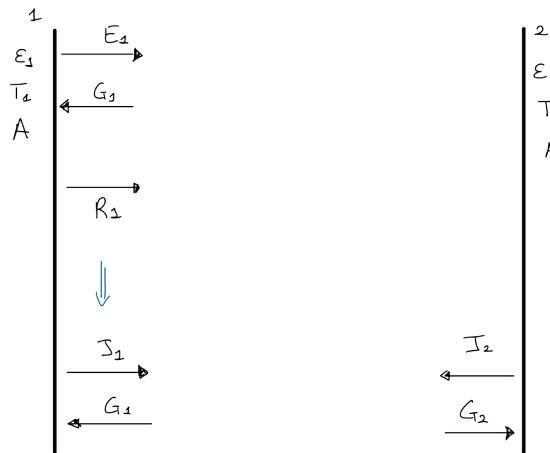
Considerando invece due temperature diverse  $T_3$  e  $T_4$  abbiamo un circuito elettrico più complesso:



## Corpi grigi: caso 1

PRIMA SAREBBE DA CONSIDERARE SENZA IL CORPO INTERMEDIO.

Studiamo quindi cosa succede tra un corpo grigio 1 e un corpo grigio 2, senza lo schermo.

Il corpo 1 avrà temperatura  $T_1$  e un potere emissivo  $E_1 = \epsilon_1 E_{n1}$  e il corpo 2 con emittenza  $\epsilon_2$ .

Se i corpi sono opachi possiamo dire che  $\tau_1 = 0$  e  $\tau_2 = 0$  quindi  $\rho_1 = 1 - \frac{\epsilon_1}{\alpha_1}$  e  $\rho_2 = 1 - \frac{\epsilon_2}{\alpha_2}$

Il corpo 1 emette la radiazione  $E_1 = \epsilon_1 E_{n1}$  e vi arriva un irraggiamento  $G_1$  dovuto al corpo 2 e produrrà (essendo il corpo non nero) una riflessione  $R_1 = \rho_1 G_1$

Quindi abbiamo un flusso che arriva  $G_1$  e due flussi che lasciano il corpo  $E_1$ , emissione, e  $R_1$  dovuto alla riflessione dell'irraggiamento  $G_1$ . Diventa più semplice la trattazione considerando un nuovo parametro, la **radiosità** del corpo 1 pari a  $R_1 = \rho_1 G_1$

Ovvero rappresenta l'energia raggiante che esce dal corpo 1 dovuta sia all'energia emessa dal corpo alla temperatura  $T_1$  che all'energia riflessa.

Facendo il bilancio a regime stazionario il calore complessivamente scambiato dal corpo 1 è

$$Q_1 = -AJ_1 - AG_1 = A(J_1 - G_1)$$

Inoltre nel caso delle due superfici affacciate abbiamo che  $AG_1 = AJ_2$

E allora  $Q_1 = A(J_1 - J_2)$ , così abbiamo espresso il calore scambiato dal corpo 1 in funzione delle differenze tra le radiosità

Possiamo però riscrivere  $Q_1$  sfruttando la definizione di radiosità:

$$E_1 + \rho_1 G_1 = J_1 \rightarrow G_1 = \frac{J_1 - E_1}{\rho_1} = \frac{J_1 - \epsilon_1 E_{n1}}{1 - \epsilon_1}$$

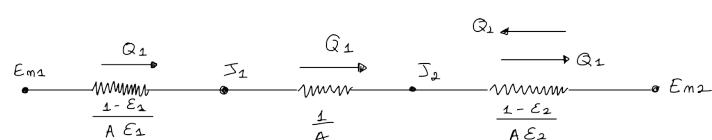
$$\text{Allora } Q_1 = A(J_1 - G_1) = A \left( J_1 - \frac{J_1 - \epsilon_1 E_{n1}}{1 - \epsilon_1} \right) = \frac{A}{1 - \epsilon_1} (J_1 - \epsilon_1 J_1 - J_1 + \epsilon_1 E_{n1}) = \frac{A \epsilon_1}{1 - \epsilon_1} (E_{n1} - J_1)$$

Abbiamo espresso  $Q_1$  anche in funzione di  $E_{n1} - J_1$ , ovvero della differenza del potere emissivo del corpo nero equivalente alla stessa temperatura meno  $J_1$ .

Facendo la stessa cosa per il corpo due trovo che  $Q_2 = \frac{A \epsilon_2}{1 - \epsilon_2} (E_{n1} - J_2)$  e naturalmente  $Q_2 = -Q_1$

Allora posso fare la seguente analogia elettrica, in cui esiste un punto a potenziale  $E_{n1}$  e uno a  $J_1$  legati da una resistenza  $\frac{1 - \epsilon_1}{A \epsilon_1}$

e posso considerare sia  $J_1, J_2$  rispetto  $E_{n1}, E_{n2}$  che i punti a potenziale  $J_1$  rispetto  $J_2$  dove passa il calore  $Q_1$ .

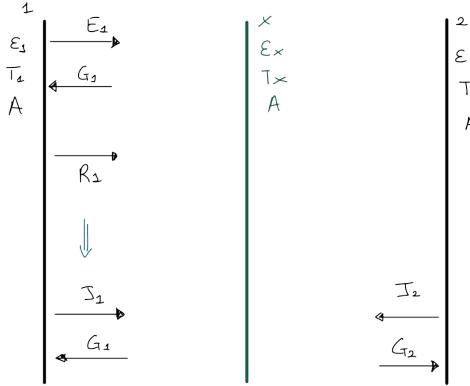


Posso osservare come nel caso di due corpi affacciati grigi ci sono tre resistenze ma supponendo che in realtà il corpo sia nero questa resistenza diventa zero e quindi si riduce correttamente al caso corpo nero e i potenziali  $E_{ni}$  coincidono con  $J_i$

Allora nel caso di due corpi grigi affacciati  $Q_1$  è uguale alla differenza di potenziale diviso la resistenza complessiva:

$$Q_1 = \frac{E_{n1} - E_{n2}}{R_s} = \frac{E_{n1} - E_{n2}}{\frac{1 - \varepsilon_1}{A\varepsilon_1} + \frac{1}{A} + \frac{1 - \varepsilon_2}{A\varepsilon_2}} = \frac{A(E_{n1} - E_{n2})}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} = \frac{A\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

Stessa cosa vale per gli **isolanti per irraggiamento**:



Se metto un isolante (schermo radiante) a una temperatura  $T_x$  incognita.

Utilizzando le analogie elettriche si trova il calore scambiato  $Q_{1x} = \frac{A\sigma(T_1^4 - T_x^4)}{\frac{1}{\varepsilon_x} + \frac{1}{\varepsilon_1} - 1}$  ed essendo a regime stazionario sarà uguale

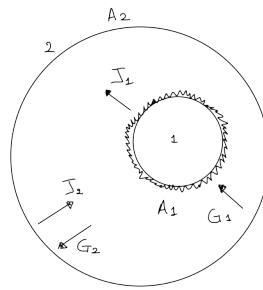
$$\text{al calore } Q_{2x} = \frac{A\sigma(T_x^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_x} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

$$\text{Da cui si ottiene } (T_1^4 - T_x^4) = \frac{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_x} - 1}{\frac{1}{\varepsilon_x} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} (T_x^4 - T_2^4) \rightarrow T_x^4 = \dots \Rightarrow Q_{1x} = f(Q_1)$$

### Corpi grigi: caso 2

Consideriamo un corpo grigio convesso all'interno di una cavità grigia, con  $A_1 \ll A_2$ .

I corpi emettono una certa radiosità  $J_1 = E_1 + \rho_1 G_1$  e  $J_2 = E_2 + \rho_2 G_2$  e ricevono un irraggiamento  $G_1$  e  $G_2$ .



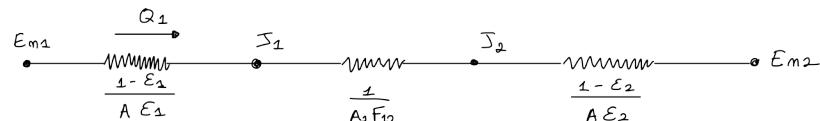
A regime stazionario il bilancio sul corpo 1 impone:  $Q_1 = A_1 J_1 - A_1 G_1 = A_1 (J_1 - G_1)$

Inoltre l'energia raggiante sul corpo 1 proviene solo dal corpo 2 che però scambia energia anche con se stesso poiché concavo:

$$A_1 G_1 = A_2 J_2 F_{21} = A_1 F_{12} J_2$$

$$\text{Allora } Q_1 = A_1 J_1 - \underbrace{A_1 J_2}_{=1} F_{12} = A_1 F_{12} (J_1 - J_2)$$

Abbiamo sempre l'analogia con un circuito elettrico:



$$\text{Valgono anche le relazioni di prima in quanto si ha: } Q_1 = \frac{A_1 \epsilon_1}{1 - \epsilon_1} (E_{n1} - J_1) = -\frac{A_2 \epsilon_2}{1 - \epsilon_2} (E_{n2} - J_2)$$

Allora da questo circuito elettrico equivalente possiamo scrivere  $Q_1$  in funzione di  $(E_{n1} - E_{n2})$ , ovvero:

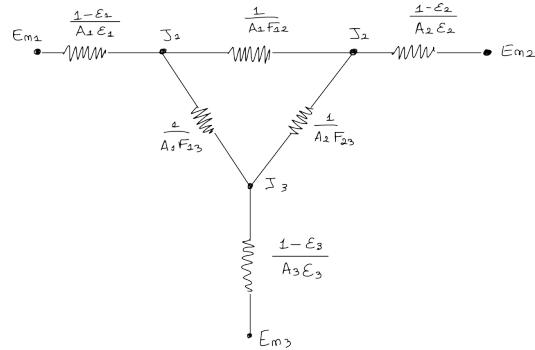
$$Q_1 = \frac{E_{n1} - E_{n2}}{R_s} = \frac{E_{n1} - E_{n2}}{\frac{1 - \epsilon_1}{A_1 \epsilon_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{1 - \epsilon_2}{A_2 \epsilon_2}} = \frac{A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1} + \frac{1}{F_{12}} + \frac{A - 1}{A_2} + \frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2}}$$

Immaginiamo che il copro 1 sia il corpo umano di superficie  $A_1$  circa  $2\text{m}^2$  messo all'interno di un ambiente come le pareti di una stanza

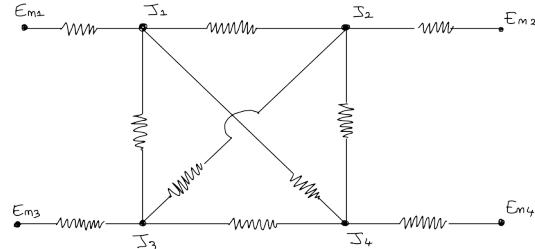
$$\text{Cioè se } A_1 \ll A_2 \rightarrow \frac{A_1}{A_2} \ll 1$$

$$\text{E si ha } Q_1 \simeq \frac{A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} - \cancel{A_1} + \cancel{F_{12}}} = \epsilon_1 A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

Tornando al problema a più corpi se sono corpi grigi si avrà l'analogia elettrica:



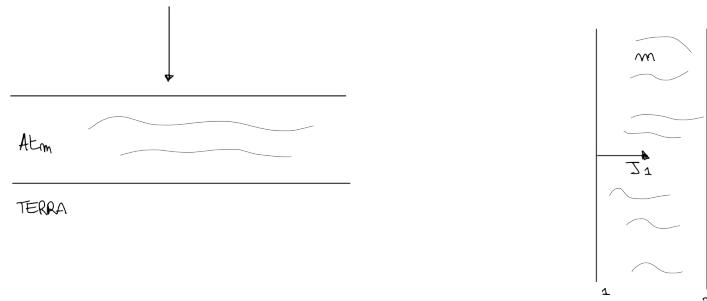
Invece con 4 corpi:



il circuito elettrico prevede, rispetto al caso precedente, anche le 4 resistenze considerabili come le resistenze interne al corpo grigio ( tra  $J_i$  ed  $E_{ni}$  )

## Radiazione solare che incide sull'atmosfera

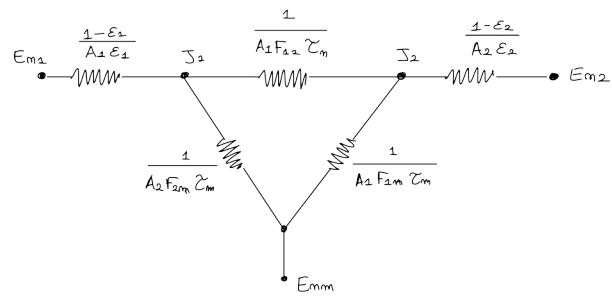
Consideriamo la superficie terrestre e l'atmosfera di 10km allora l'energia raggiante che viene dal sole per arrivare sulla terra deve attraversare l'atmosfera e se la supponiamo assente facciamo il caso semplice in cui i due corpi si scambiano calore ma se consideriamo che l'atmosfera costituisce un corpo che a sua volta assorbe parzialmente la radiazione abbiamo un problema a tre corpi, sole terra e un corpo intermedio con delle caratteristiche medie in quanto è un gas ("m" da *medium*).



Supponendo che l'atmosfera non riflette la radiazione (ovvero assorbe e trasmette) si ha  $1 = \rho_m + \epsilon_m + \tau m$  con  $\alpha_m = \epsilon_m = 0$

Questo significa che l'atmosfera a temperatura  $T_m$  avrà una radiosità  $J_m = E_m + \rho_m \cancel{E_m} = E_m = \epsilon_m E_{nm}$

Allora tornando al circuito elettrico con cui possiamo fare l'analogia abbiamo la radiazione del sole (1) che emette una radiazione che viene parzialmente assorbita dall'atmosfera (m) e parzialmente arriva sulla terra (2), cioè:



I calori scambiati saranno:

$Q_{1-2} = Q_{1 \rightarrow 2} - Q_{2 \rightarrow 1} = A_1 J_1 F_{12} \tau_m - A_2 J_2 F_{21} \tau_m = A_1 F_{12} \tau_m (J_1 - J_2)$ , dove le frazioni di calore che vanno da un corpo all'altro devono essere moltiplicate per il coefficiente di trasmissione  $\tau_m$ .

Cioè la resistenza tra i due corpi è  $R_{J_1-J_2} = \frac{1}{A_1 F_{12} \tau_m}$

Il calore scambiato tra il corpo 1 e il corpo m è:

$Q_{1-m} = Q_{1 \rightarrow m} - Q_{m \rightarrow 1} = A_1 J_1 F_{1m} \epsilon_m - A_m E_{nm} \epsilon_m F_{m1} = A_1 F_{1m} \epsilon_m (J_1 - E_{nm})$ , dove il corpo m assorbe soltanto una frazione di energia  $\alpha_m = \epsilon_m$ .

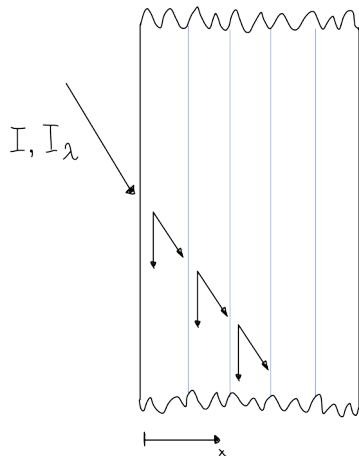
Cioè con una resistenza  $R_{J_1-m} = \frac{1}{A_1 F_{1m} \epsilon_m}$  e  $R_{J_2-m} = \frac{1}{A_2 F_{2m} \epsilon_m}$

Sì può quindi determinare in prima approssimazione il calore che arriva sulla terra, è un calcolo molto semplificato che fornisce un ordine di grandezza.

Questo approccio delle radiosità viene anche utilizzato per calcolare i calori persi per irraggiamento dai satelliti dalle stazioni spaziali.

## Legge di Beer

Consideriamo un corpo parzialmente assorbente, come un vetro, investito da un'intensità di radiazione solare  $I$  (in forma spettrale  $I_\lambda$ ). Considero che in un elementino  $dx$  interno una parte di intensità viene assorbita e una parte trasmessa allora:



Se la quantità di energia che lo attraversa è proporzionale all'intensità di energia stessa:  $dI = -kIdx \circ dI_\lambda = -k_\lambda I_\lambda dx$

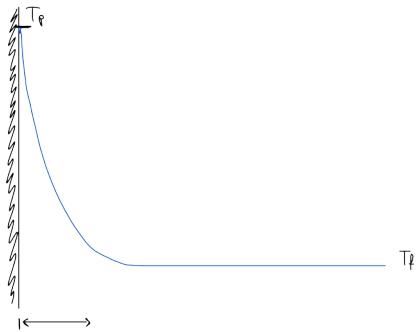
Facendo il bilancio o per le quantità totali o per le quantità spettrali trovo che:  $\ln\left(\frac{I_\lambda}{I_{\lambda_0}}\right) = -k_\lambda x$  da cui:  $\frac{I_\lambda}{I_{\lambda_0}} = e^{-k_\lambda x}$ , allora:

$I_\lambda = I_{\lambda,0}e^{-k_\lambda x}$  che prende il nome di **Legge di Beer** e ci dice come diminuisce l'intensità di radiazione (esponenzialmente).

SUL LIBRO SI TROVANO MOLTE ALTRE INFORMAZIONI TRA CUI LA CURVA DI ASSORBIMENTO DELL'ANIDRIDE CARBONICA.

## Combinazione tra irraggiamento e convezione

Consideriamo una parete a temperatura  $T_p$  e un gas o liquido trasparente che scambia calore con al parete sia per convezione che per irraggiamento.



- Lo scambio di calore per convezione  $Q_c = h_c S (T_p - T_f)$  considerando la solita distribuzione di temperatura (in azzurro) data dalla legge di raffreddamento.
- Lo scambio di calore per irraggiamento è dato da  $Q_I = \mathcal{F}_{pf} S (T_p^4 - T_f^4)$ , dove  $\mathcal{F}_{pf}$  è dato da  $\sigma$  e dalla sommatoria delle resistenze se i corpi sono grigi.

È chiaro che non posso sommare e mettere insieme queste due relazioni essendo differenze di potenze diverse allora si scomponete le differenze delle quarte potenze a seconda le legame algebrico:

$$Q_I = \mathcal{F}_{pf} S \underbrace{(T_p^2 + T_f^2)}_{\approx 2T_p^2} \underbrace{(T_p + T_f)}_{\approx 2T_p} (T_p - T_f) \approx \mathcal{F}_{pf} \cdot 4T_p^3 S (T_p - T_f) = h_I S (T_p - T_f)$$

Dove i due termini sottolineati se assimilano rispettivamente pari a  $2T_p^2$  e  $2T_p$ , dove differenze di qualche grado diventano trascurabili sommando le temperature assolute o i loro quadrati. Identifico quindi un termine di irraggiamento  $h_I$ .

Allora posso in prima approssimazione considerare che il calore totale è dato dalla somma del calore di convezione più il calore di irraggiamento:  $Q_{tot} = Q_c + Q_I = (h_c + h_I) S (T_p - T_f)$ .

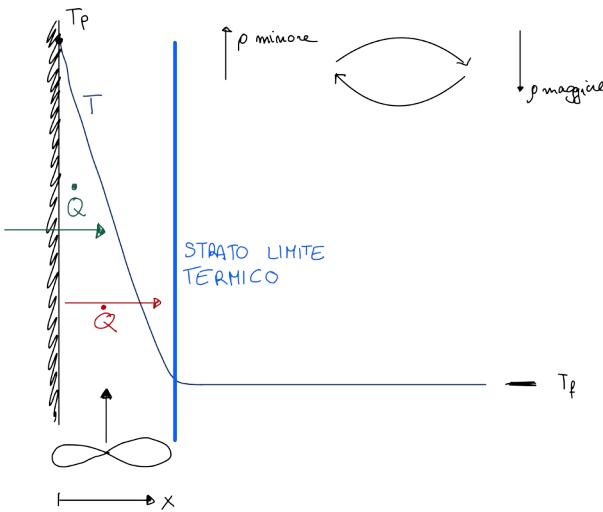
SUL KREITH SI TROVANO DIVERSI APPROFONDIMENTI SU QUESTO DISCORSO.

SI TROVA ANCHE IL CALCOLO DELL'IRRAGGIAMENTO SOLARE, UTILE PER CALCOLARE IL CALORE CHE ARRIVA SU UN'APPLICAZIONE ORIZZONTALE (ES. PANNELLI SOLARI).

# Convezione

È il meccanismo in cui si considera un fluido a temperatura  $T_f$  in movimento rispetto una parete a temperatura  $T_p$ . Se la convezione è indotta da un ventilatore o una pompa si parla di convezione forzata. Se invece il fluido si muove per differenza di densità si chiama convezione naturale o libera.

La distribuzione di temperatura è qualitativamente quella in figura, dove si immagina che quasi tutta al variazione di temperatura avvenga in un piccolo strato di fluido noto come strato limite termico mentre nel resto del fluido la temperatura è costante. La presenza di questo gradiente fa sì che ci sia un flusso di calore tra la parete, considerata a temperatura superiore, e il fluido.



La legge che descrive questo è la legge di Newton che ci dice che il calore scambiato è proporzionale alla differenza di temperatura e alla superficie attraverso il coefficiente di convezione  $h$ , ovvero  $\dot{Q} = h S (T_p - T_f)$ .

È un meccanismo combinato tra la conduzione del calore (eventualmente anche l'irraggiamento che noi non considereremo) e il moto dei fluidi.

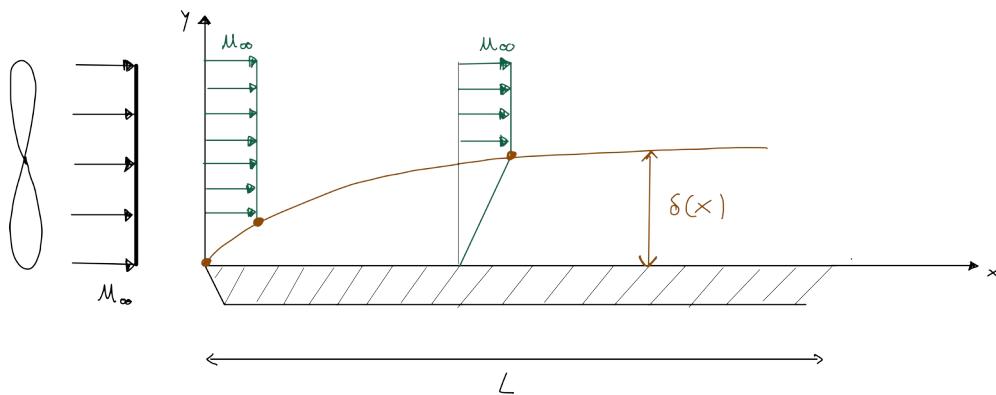
Lo strato limite termico viene definito in vari modi come ad esempio lo strato in cui la temperatura arriva al 90% e si va a combinare allo strato limite dinamico in cui la velocità va da un valore nullo sulla parete ad un valore indisturbato.

Supponiamo quindi di avere un fluido messo in moto da un ventilatore che va a toccare una parete. Prima che il fluido incide sulla parete abbiamo un profilo piatto di velocità  $u_\infty$  mentre quando tocca la parete facciamo l'ipotesi di aderenza del fluido ad una parete a velocità nulla quindi  $u = 0$ . Da lì la velocità dovrà raccordarsi alla velocità  $u_\infty$  a grande distanza.

Considerando un asse  $x$  nella direzione del moto del fluido e un asse  $y$  perpendicolare, ci sarà una variazione di velocità su  $y$  da 0 a  $u_\infty$ .

Chiamiamo allora  $\delta(x)$  l'altezza su  $y$  per cui la velocità va da 0 ad un valore prefissato di  $u_\infty$  (può essere sia  $u_\infty$  o ad esempio 99%  $u_\infty$ , o 95%  $u_\infty$  o 90%  $u_\infty$ ). Questo prende il nome di strato limite dinamico e segna la variazione di velocità.

Supponiamo un andamento come in figura.



NELLA PROSSIMA SETTIMANA CONTINUEREMO QUESTO DISCORSO A PARTIRE DEL NUMERO DI NUSSELT.



# FISICA TECNICA

Settimana 10



# Indice settimana 10

Indice settimana 10	2
martedì 24 novembre - Ricevimento - Panoramica generale	3
martedì 24 novembre 2020 - Lezione 25	5
Convezione	5
<i>Determinazione di in convezione forzata: 1° metodo</i>	5
<i>Convezione forzata: 2° metodo</i>	7
Convezione naturale	10
mercoledì 25 novembre 2020 - Lezione 26	12
<i>Determinazione di Nu in convezione naturale</i>	12
Termostato (scambiatori di calori)	13
Scambiatori di calore: condensatore e vaporizzatore	14
giovedì 26 novembre 2020 - Lezione 27	20
Convezione forzata su lastra piana	20
Soluzione di Blasius	21

martedì 24 novembre - Ricevimento - Panoramica generale

Siamo arrivati al ragionamento di Carnot.

Poi abbiamo generalizzato il 2° principio della termodinamica arrivando alla conclusione che non si possono invertire certi fenomeni fisici.

Avendo abbiam formulato Planck che ci dice che è impossibile che l'unico risultato di una cessione di calore ad un sistema chiuso sia la sola produzione di un lavoro.

E la formulazione di Clausius, dimostrando poi l'equivalenza tra i due principi.

Abbiamo poi visto l'espressione analitica del 2° principio, attribuita a Clausius  $\oint \frac{dQ}{T} \leq 0$ .

Abbiamo verificato come questo avviene in tutti i cicli motore.

Poi siamo passati alla definizione di una grandezza di stato, l'entropia  $ds = \frac{dq}{T}$  e quando l'integrale è minore di 0 questo implica

che ci sia un termine di sorgente entropiche  $\frac{dq}{T} = ds - ds_s, \quad ds_s \geq 0$ .

Abbiamo poi definito la variazione di entropia lungo una qualsiasi trasformazione.

Poi abbiamo ripreso il primo principio della termodinamica andando a calcolare il  $d\mathbf{u} = Tds - pdv$  che vale sia per trasformazioni reversibili che irreversibili che collegano due punti, poiché la variazione di questa grandezza di stato è la stessa qualsiasi sia la trasformazione.

Abbiamo poi introdotto l'entalpia definendola, analiticamente,  $dh = Tds - vdp$

Abbiamo espresso il teorema dell'aumento di entropia, ovvero che l'entropia del sistema reale isolato cresce!

Si introduce la traccia termodinamica:  $\tau = -\oint \frac{dq}{T} \geq 0$  (integrale di Clausius cambiato di segno per avere una quantità positiva)

E si definiscono le sorgenti entropiche di prima specie, legate a pressioni, temperature e agli attriti, e di seconda specie, legati ai fenomeni elettrochimici.

Poi passando alla lezione 5 siamo andati a vedere il calcolo del lavoro meccanico ponendoci il problema di cosa succede per trasformazioni irreversibili andando a dividere il lavoro meccanico e il lavoro elettrico.

Poi abbiamo vista la stessa cosa per i sistemi aperti.

Arrivando a trovare come il rendimento termodinamico diminuisce con le reversibilità.

Abbiamo poi introdotto il ciclo di Carnot che deve essere reversibile, con due sorgenti, una superiore da cui prende calore e una inferiore a cui cede calore. Le trasformazioni da  $T_1$  a  $T_2$  devono essere reversibili e senza altre sorgenti quindi per forza delle isoentropiche.

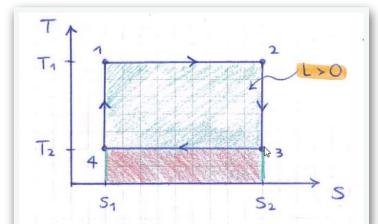
Dovendo poi da 4 a 1 essere adiabatica il diagramma di Carnot è un rettangolo.

Siamo arrivati a vedere come il rendimento massimo non è 1 ma  $\eta_{max} = \eta_C = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ , per i

fenomeni teromemecanici.

Ovvero è il rendimento di Carnot

(il rendimento è 1 solo per i fenomeni elettromecanici)



Abbiamo poi considerato il ciclo inverso diviso in:

- Ciclo frigorifero, per sottrarre il calore  $Q_2$  dalla sorgente inferiore
- Pompa di calore, per cedere il calore  $Q_1$  alla sorgente superiore

Che ovviamente richiede un lavoro.

Si dimostra come in rendimento termodinamico diventa funzione del rendimento limite (dipende solo dalle temperature) e un altro termine che dipende dalla traccia termodinamica, ovvero della reversibilità.

$$\eta_F = \frac{T_2}{T_1 - T_2} - \frac{\tau}{L} \cdot \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2}$$

Il rendimento massimo ( $\tau = 0$ ) può essere maggiore di 1 ed è  $\eta_F = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$ .

All'incirca 14 per il frigorifero di casa.

Per la pompa di calore si arriva ad un rendimento  $\eta_{PC} = \frac{T_1}{T_1 - T_s} - \frac{\tau}{L} \cdot \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2}$  e in rendimento massimo per le trasformazioni

reversibili ( $\tau = 0$ ) si arriva ad un rendimento massimo  $\eta_{PC} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}$

Per il riscaldamento di casa in inverno si ha un rendimento di **3,73**

Poi siamo passati ai sistemi aperti dove il discorso diventa molto più ampio passando da 2 possibilità (nei sistemi chiusi) a 8 possibilità. Ovvero 4 sistemi con la presenza o meno di reazioni chimiche.

Poi abbiamo iniziato a parlare dei vari sistemi aperti.

Espansore, un sistema aperto che produce lavoro verso l'esterno, come il motore di un aereo. Arrivando a trovare  $l_f = h_1 - h_2$ .

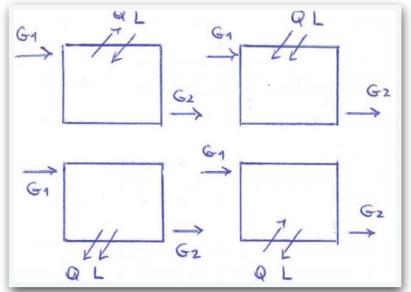
Con una potenza meccanica  $P = l_f G_1 = G (h_1 - h_2) > 0$

Si definisce il rendimento dell'espansore (il cui limite è 1)  $\rho_e = \frac{l_{reale}}{l_{ideale}} = \frac{(h_1 - h_2)}{(h_1 - h_2)_S} \leq 1$ .

Per il compressore il discorso si inverse:  $l_f = h_1 - h_2 < 0$ .

Con un rendimento  $\rho_c = \frac{l_{ideale}}{l_{reale}} = \frac{(h_1 - h_2)_S}{(h_1 - h_2)} \leq 1$ , sempre con limite superiore unitario.

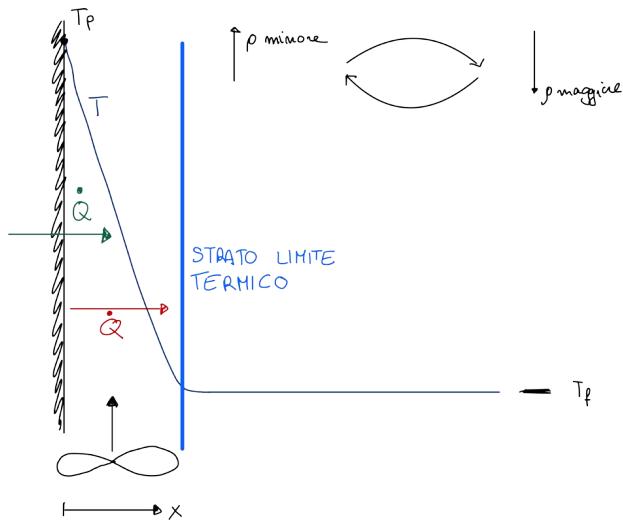
Poi abbiamo visto il tubo di efflusso.



# Convezione

Definiamo quindi il numero adimensionale che lega i coefficienti di convezione.

Supponiamo lo strato limite termodinamico dove è situata la maggiore parte della differenza di temperatura e questo calore lo posso esprimere sia con la legge di Newton che come gradiente di temperatura alla parete.



Per questo eguagliamo il calore scambiato secondo la legge del raffreddamento e il gradiente alla parete dove si ha uno scambio di calore nel fluido per conduzione (trascurando l'irraggiamento).

Uguagliando questi due

$$hS(T_p - T_f) = -k_f S \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0}$$

Divido allora per un parametro  $L$  (una lunghezza) che dovrò definire più avanti ed ottengo:

$$\frac{hL}{k_f} = \frac{\left| \frac{dT}{dx} \right|_{x=0}}{\frac{T_p - T_f}{L}} = Nu, \text{ noto come numero di Nusselt.}$$

Il parametro  $L$  può essere lo spessore dello strato limite termodinamico o qualunque altra lunghezza come ad esempio il diametro del tubo, definito a convenienza.

Si osservi come abbiamo già visto un numero adimensionale simile, ovvero il numero di Biot al cui denominatore c'era il  $k$  del solido (e non del fluido).

Quindi il numero di Nusselt serve ad adimensionalizzare il coefficiente di convezione.

## Determinazione di $Nu$ in convezione forzata: 1° metodo

Esprimiamo  $Nu$  e quindi  $h$  in base all'analisi dimensionale. E mentre la legge di Fourier è fisica e facendo le misure sul fluido troviamo  $k_f$  facendo le misure sul moto del fluido che si muove rispetto la parte non trovo  $h$  indipendentemente dalle condizioni di moto ma c'è una forte dipendenza dalle condizioni di moto. Quindi la legge di Newton è fenomenologia e non fisica e  $h$  deve essere determinato in altro modo.

Per valutarlo applichiamo l'analisi dimensionale che ci dice che volendo trovare il flusso di calore alla parete  $\frac{dT}{dx} \Big|_{x=0}$  posso

immaginare che dipenda dalle condizioni di moto come velocità del fluido  $w$ , densità  $\rho$  e viscosità  $\mu$ , un parametro di lunghezza  $L$ . Inoltre ci sono anche i fenomeni termici e considero anche la differenza di temperatura  $\Delta T$  e la diffusività termica  $\alpha$  (per l'esperienza si deduce che  $\alpha$  è più appropriato di  $k$ )

$$\frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = f(w, \rho, \mu, L, \Delta T, \alpha) = \sum \text{cost} \cdot w^a \cdot \rho^b \cdot \mu^c \cdot L^d \cdot \Delta T^e \cdot \alpha^f$$

E immagino che questa funzione sia la sommatoria del prodotto di una costante per le variabili elevate ad un certo esponente. Allora le dimensioni del termine di sinistra deve essere uguale a quello a destra, e:

$$\frac{\theta}{L} = \left(\frac{L}{T}\right)^a \left(\frac{M}{L^3}\right)^b \left(\frac{M}{LT}\right)^c L^d \theta^e \left(\frac{L^2}{T}\right)^f$$

$$\begin{cases} -1 = a - 3b - c + d + 2f \\ 0 = b + c \\ 0 = -a - c - f \\ 1 = e \end{cases}$$

Poiché abbiamo ottenuto un sistema di 4 equazioni in 6 variabili esistono  $\infty^2$  soluzioni e allora ricaviamo 4 delle 6 variabili in funzione delle altre due.

La scelta delle due variabili non influenza il risultato.

Solitamente si scelgono come variabili indipendenti l'esponente di  $\mu$  e di  $\alpha$  e otteniamo:

$$\begin{cases} d = -1 + c + f - 3c + c - 2f = -1 - c - f \\ b = -c \\ a = -c - f \\ e = 1 \end{cases}$$

$$\text{Allora } \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = \mathbf{cost} \cdot w^{-c-f} \cdot \rho^{-c} \cdot L^{-1-c-f} \cdot \Delta T \cdot \alpha^f = \mathbf{cost} \cdot \frac{\Delta T}{L} \left(\frac{\mu}{w\rho L}\right)^c \left(\frac{\alpha}{wL}\right)^f$$

Da cui:

$$\begin{aligned} -\frac{\mu}{w\rho L} &= \frac{\nu}{wL} = \frac{1}{Re}, \text{ con } Re = \frac{wL}{\nu} \\ -\frac{\alpha}{wL} \cdot Re &= \frac{\alpha}{wL} \frac{wL}{\nu} = \frac{\alpha}{\nu} = \frac{1}{Pr}, \text{ con } Pr = \frac{\nu}{\alpha} \text{ noto come } \mathbf{numero di Prandtl}. \end{aligned}$$

Questo numero è molto importante poiché dipende solo dalle proprietà fisiche del fluido. È dell'ordine di 1 per i gas, decine per i liquidi, centinaia per gli oli e minore di 1 per i metalli liquidi.

$$\text{Allora abbiamo che } \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = \mathbf{cost} \cdot \frac{\Delta T}{L} Re^x Pr^y$$

De in conclusione possiamo determinar il **numero di Nusselt in convezione forzata**:

$$Nu = \frac{hL}{k_f} := \frac{\frac{dT}{dx} \Big|_{x=0}}{\Delta T/L} = \mathbf{cost} \cdot Re^x \cdot Pr^y$$

Per determinare il valore della costante e di  $x$  e di  $y$  devo fare degli esperimenti e metterli in relazione con il fenomeno.

AD ESEMPIO SUL KREITH C'È RIPORTATO LO STESSO METODO CON DEGLI ESPERIMENTI DOVE VIENE MESSO IN RELAZIONE  $\frac{Nu}{Pr^{0,3}} = 0,82 Re^{0,4}$  IN RELAZIONE A REYNOLDS.

VENGONO PRESI DEI CILINDRI ORTOGONALI AL FLUIDO CHE SCORRE. UTILIZZATO ACQUA, OLIO E ARIA. METTENDO IN RELAZIONE NUSSELT CON REYNOLDS E PRANDTL SI TROVA  $Nu = 0,82 \cdot Re^{0,4} \cdot Pr^{0,3}$

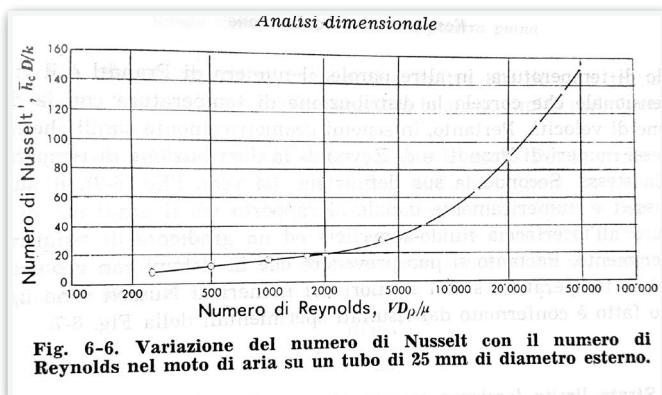


FIG.6-6. PG 325. VARIAZIONE DEL NUMERO DI NUSSELT CON IL NUMERO DI REYNOLDS NEL MOTO DI ARIA SU UN TUBO DI 25MM DI DIAMETRO ESTERNO

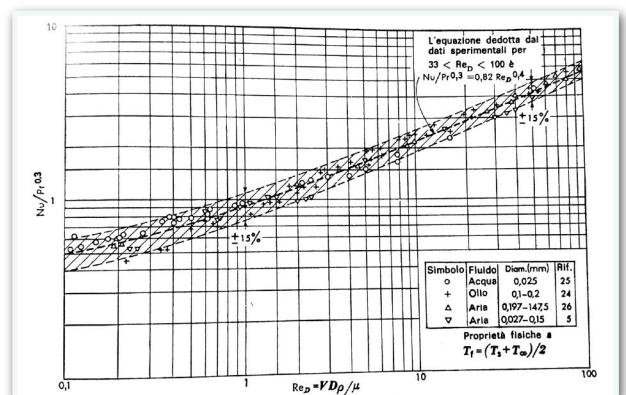
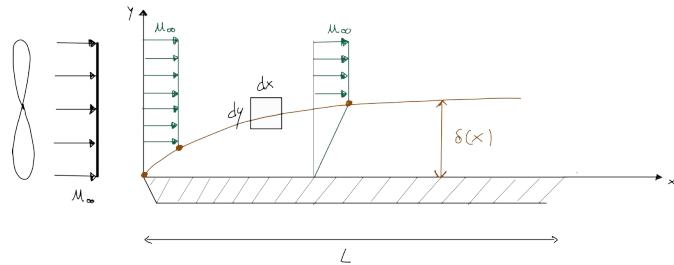


FIG 6-7. PG 325. CORRELAZIONE DI DATI SPERIMENTALI DI SCAMBIO TERMICO PER DIVERSI FLUIDI CE INVESTONO ORTOGONALMENTE CILINDRI DI DIVERSI DIAMETRI.

## Convezione forzata: 2° metodo

Questo metodo "esatto" è basato sull'integrazione delle equazioni e lo andiamo a studiare per il caso bidimensionale in figura:



Immaginiamo la lastra orizzontale con il fluido con il profilo come in figura con lo strato limite.

Vediamo che succede in un volume infinitesimo di dimensione  $dx$  in orizzontale,  $dy$  in verticale e  $dz$  nella direzione di estensione di questa piastra.

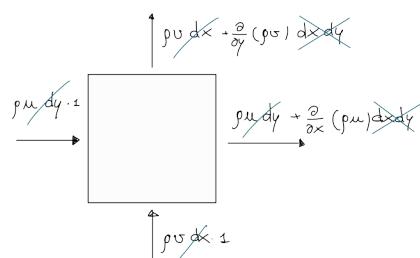
Partiamo da questo elementino applicando i principi fondamentali, conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia ricavando le equazioni alla base del fenomeno.

Equazione di conservazione della massa o equazione di continuità per un fluido senza reazioni chimiche e a regime stazionario.

Consideriamo  $dz = 1$  per considerare un caso bidimensionale.

Considerando la portata come la velocità normale alla superficie  $S$  e la densità:  $\mathbf{G} = \rho v S$ . A destra consideriamo i termini sviluppati in serie:

Otteniamo:



$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) = 0$$

Nell'ipotesi di moto incomprimibile (ovvero non che il fluido sia incomprimibile ma anche un fluido comprimibile che si muove con velocità molto piccola rispetto a quella del suono, ovvero  $Ma \ll 1$ ) e quindi  $\rho = \text{cost}$

$$\text{E allora (1)} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Conservazione della quantità di moto:

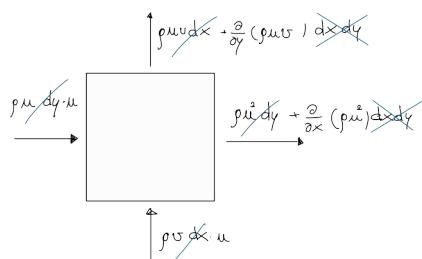
$$\text{La seconda legge della dinamica} \quad \sum \mathbf{F} = \frac{d}{dt} (m \bar{u})$$

E in direzione x si ha:

$$\sum F_x = \frac{d}{dt} (mu) = \frac{dm}{dt} \cdot u + m \cancel{\frac{du}{dt}} = \dot{m}u, \text{ in quanto abbiamo che } u = \text{cost} \text{ in regime stazionario.}$$

Vado allora ad analizzare a sinistra la derivata dell'impulso e a destra le forze, quindi:

2° membro, considero che nel bilancio della quantità di moto si impone sempre la quantità entrante meno quella uscente e



avendo diviso per  $dx dy$  rimane:

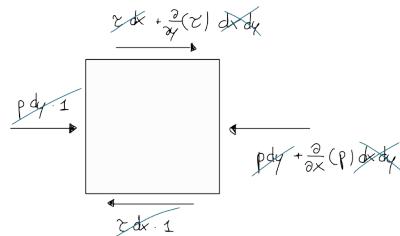
$$\dot{m}u = \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv)$$

Avendo già considerato  $\rho = \text{cost}$  abbiamo  $\dot{m}u = \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right)$

Dove per l'equazione di continuità possiamo considerare i due termini a cui somma è nulla

E allora  $\dot{m}u = \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right)$

Quindi sommiamo le forze considerando sempre l'elementino e considerando le forze di pressione sulla facce considerando sulle faccia di destra e superiore lo sviluppo in serie.



Allora:

$$\sum F_x = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Dove abbiamo supposto l'equazione costituita del fluido newtoniano:  $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ , con  $\mu = \text{cost}$

Allora (2)  $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ , con  $v = \frac{\mu}{\rho}$

In direzione  $y$ , dove dovrei considerare queste quantità moltiplicate per la  $v$ , ottengo:

$$(3) u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Oss: Mentre la direzione del moto la vediamo dai termini  $u$  e  $v$  le variazioni sono accoppiate ai termini  $\frac{\partial \cdot}{\partial x} \circ \frac{\partial \cdot}{\partial y}$ .

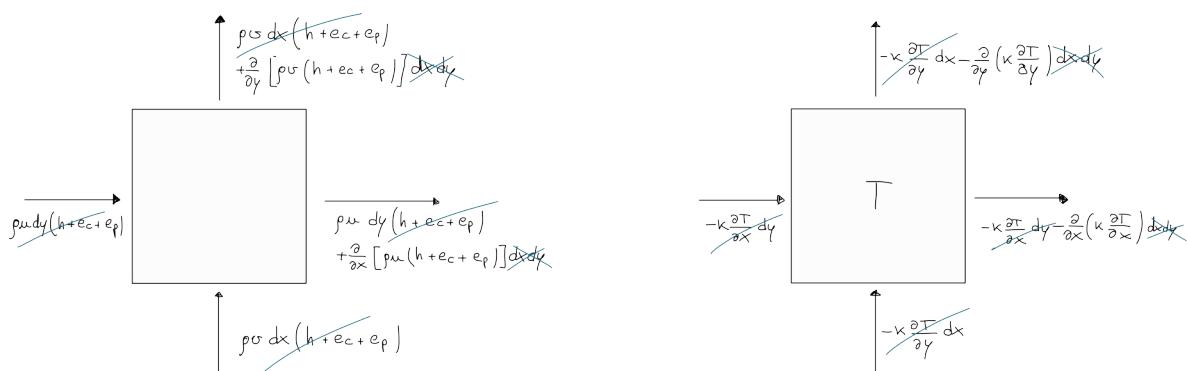
Per la conservazione dell'energia scriviamo quindi il 1° principio della termodinamica per sistemi aperti:

Owero  $dq - dl_f = dh + de_c + de_p = d(h + e_c + e_p)$

Owero :  $d\dot{Q} - d\dot{L}_f = Gd(h + e_c + e_p)$

Dove facciamo la stessa cosa di prima scrivendo a destra i termini che solitamente si scrivono a sinistra e viceversa.

Quindi partendo dal secondo membro vediamo cosa possiamo dire sugli elementini, dove consideriamo lo sviluppo in serie sulle



facce dove le quantità sono uscenti:

Allora  $\frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho u (h + e_c + e_p) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \rho v (h + e_c + e_p) \right]$  e con  $\rho = \text{cost}$  si ha:

$\rho \left\{ u \frac{\partial}{\partial x} (h + e_c + e_p) + \cancel{(h + e_c + e_p)} \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} (h + e_c + e_p) + \cancel{(h + e_c + e_p)} \frac{\partial v}{\partial y} \right\}$ , dove possiamo semplificare i due termini la cui somma è nulla dall'equazione di continuità

E allora:  $\rho \left\{ u \frac{\partial (h + e_c + e_p)}{\partial x} + v \frac{\partial (h + e_c + e_p)}{\partial y} \right\}$

Per il primo membro invece  $d\dot{Q}$  immaginiamo che il volume di controllo abbiamo una temperatura  $T$  uniforme e quindi il flusso che passa per conduzione nella faccia  $dydz$  sarà  $\dot{Q} = -kS \frac{dT}{dn}$  dove  $n$  è la normale alla superficie  $S$ .

Si suppone il fluido isotropo, ovvero con lo stesso  $k$  in tutte le direzioni.

Ovviamente si fa sempre calore entrante positivo meno calore uscente negativo, da cui rimangono i termini dello sviluppo da cui possiamo semplificare  $dxdy$  e alla fine rimane:

$$d\dot{Q} = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

Allora dobbiamo ricavare il lavoro  $d\dot{L}_f$  dovuto solo alle forze di taglio trascurando quello dovuto alle forze di pressione poiché la pressione è normale alla superficie.

Allora se il lavoro fatto è la forza  $\tau dx$  per lo spostamento  $u$  otteniamo che

$$d\dot{L}_f = -\frac{\partial}{\partial y} (u\tau) = -\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \text{ con } \mu = \text{cost} \text{ e } \tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \text{ ovvero un fluido newtoniano.}$$

Quindi abbiamo che (4)  $\rho \left\{ u \frac{\partial (h + e_c + e_p)}{\partial x} + v \frac{\partial (h + e_c + e_p)}{\partial y} \right\} = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

Dobbiamo ulteriormente semplificare questa espressione:

- Si trascura l'energia potenziale  $e_p \approx 0$

- Nell'espressione del differenziale  $dh$  si trascura la variazione di pressione  $dh = c_p dT - \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p d\dot{p} \rightarrow dh = c_p dT$

- L'energia cinetica  $e_c = \frac{(u^2 + v^2)}{2}$  è trascurabile rispetto ad  $h$  se  $Ma$  è molto piccolo,  $e_c \approx 0$

E allora al 1° membro  $\rho \left( u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right)$  dove considerando  $c_p = \text{cost}$  e quindi  $\rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right)$

Inoltre:

- Per moti con  $Ma$  molto piccolo, l'ultimo termine legato all'irreversibilità di attrito è trascurabile:  $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx 0$

- Il termine  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$  comporta una complicazione matematica notevole poiché richiederebbe di imporre le condizioni di Neumann su

tutto il contorno fisico. Questo termine è il calore che va in direzione  $x$  e il termine  $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$  è il calore che va in direzione  $y$ . Se il

fluido è un metallo liquido  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$  non è trascurabile, invece se il fluido non è un metallo liquido si può trascurare:  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx 0$

E quindi il 2° membro:  $= k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$

E allora (4)  $u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ , con  $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$

Ritornando all'equazione (3) e considerando la quantità di moto in direzione  $y$  si può dimostrare con l'analisi dimensionale che alcuni termini sono trascurabili rispetto a  $\frac{\partial p}{\partial y}$  e quindi abbiamo che (3)  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ .

Ovvero abbiamo che la pressione non dipende da  $y$  e che quindi la pressione varia soprattutto lungo  $x$  e che quindi posso esprimere con la derivata totale.

$$\text{Ovvero possiamo scrivere l'equazione (2) come (2)} \quad u \frac{\partial y}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + v \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$$

ADESSO ANDREMO A INTEGRARE QUESTA EQUAZIONE NEI CASI IN CUI:

- $\frac{dp}{dx} = 0$ , ARRIVANDO ALLA SOLUZIONE DI BLASIUS
- $\frac{dp}{dx} \neq 0$ , ARRIVANDO ALLA SOLUZIONE DI VON KARMAN-POLHAUSEN

POI ACCOPPIEREMO LA SOLUZIONE DI BLASIUS E LA SOLUZIONE (4) E TROVEREMO LA SOLUZIONE DI POLHAUSEN.

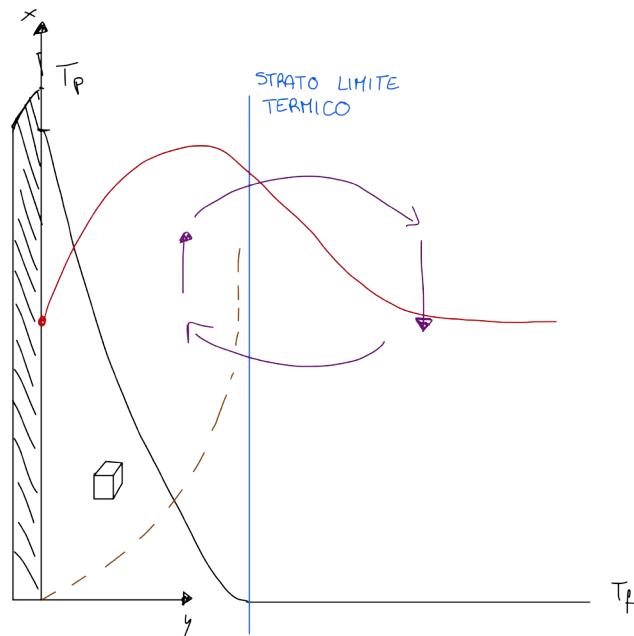
QUESTI SONO I 3 PROBLEMI DI INTEGRAZIONE ESATTA DELLE EQUAZIONI DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA, DELLA QUANTITÀ DI MOTO E DELL'ENERGIA.

Qui abbiamo visto la convezione forzata dove un ventilatore imprimeva un profilo di velocità al fluido che scorre sulla parete. Oltre questo impostiamo la soluzione per la

## Convezione naturale

Abbiamo sempre una parrete verticale a temperatura  $T_p$  con un fluido a temperatura  $T_f$  dove il fluido si scalda in vicinanza alla parete e quindi essendo maggiore la temperatura è minore la densità e il peso del fluido nella zona più fredda è maggiore della zona calda e questo determina un sollevamento del fluido vicino la zona calda e un abbassamento nella zona fredda e si crea questo moto rotatorio.

MOTIVO PER CUI I RADIATORI DEVONO ESSERE POSIZIONATI VICINO LA FINESTRA E NON NEL LATO CALDO DELLA STANZA.



Quindi considerando il profilo di velocità questa sarà nulla sulla parete raggiungendo un valore di massimo nello strato limite e poi sarà nullo a grande distanza nel fluido fermo (andamento qualitativo in rosso).

Consideriamo quello che avviene lungo la parete considerando un asse  $x$  lungo la parete e un asse  $y$  verticale e consideriamo  $\rho = \text{cost}$  nello strato limite.

E allora per la conservazione della massa o equazione di continuità otteniamo lo stesso risultato della convezione forzata:

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

Questa ipotesi la faccio **solo** per questa equazione.

Mentre per la conservazione della quantità di moto facendo un ragionamento analogo al caso precedente ottengo un risultato analogo al primo membro:  $\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right)$

Mentre cambia il termine al 2° membro che oltre a essere dovuto a forze di pressione e di taglio (analogamente alla convezione forzata) terrà conto anche della forza peso.

$$= -\rho g - \frac{dp}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Supponiamo che il gradiente di pressione nello strato limite sia pari al gradiente di pressione del fluido indisturbato (in equilibrio) che essendo ferma a  $T_f$  è proprio pari al gradiente idrostatico secondo cui la pressione diminuisce con  $x$  ovvero:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp_e}{dx} = -\rho_e g$$

CIOÈ È COME SE CONSIDERASSIMO IL CARICO PIEZOMETRICO NELLO STRATO LIMITE UGUALE AL CARICO PIEZOMETRICO MEDIO NELLA ZONA DI EQUILIBRIO. NON È ESATTAMENTE VERO MA È UN'IPOTESI CHE CI PERMETTE DI OTTENERE LA SOLUZIONE ANALITICA.

$$\text{E allora il } 2^\circ \text{ membro: } = (\rho_e - \rho) g + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

È importante osservare che  $(\rho_e - \rho)$  è la causa della convezione naturale!

$$\text{Allora andiamo ad esprimere } \beta = \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial T} = -\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial p}{\partial T} \longrightarrow \beta \rho_e \Delta T = -\Delta \rho = \rho_e - \rho$$

$$\text{Allora } (\rho_e - \rho) = \beta \rho_e (T - T_e)$$

$$\text{E allora il } 2^\circ \text{ membro diventa } = \rho_e g \beta (T - T_e) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

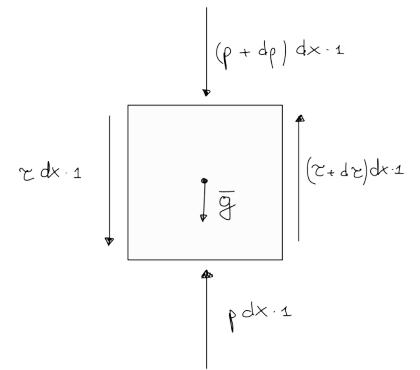
E in conclusione l'equazione che regola il moto della convezione naturale è:

$$(2) \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho_e g \beta (T - T_e) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

A sinistra i soliti termini e a destra la causa del moto.

In conclusione c'è convezione naturale quando:

- C'è una differenza di temperatura  $\exists \Delta T = T - T_e$
- $\beta \neq 0$ , cioè se il fluido ha una variazione di densità con la temperatura  $(\partial p / \partial T \neq 0)$
- Siamo in un campo gravitazionale  $\bar{g}$ . In assenza di  $\bar{g}$  non c'è convezione naturale. Una candela sulla terra assume la classica fiamma dove la reazione chimica esotermica scalda i prodotti che salgono mentre l'aria fresca sale e continua a bruciare. In assenza o microgravità si forma una sfera e il fuoco si spegne subito poiché bruciati l'aria e il combustibile non rientra il comburente e quindi il fuoco soffoca.



## Determinazione di $Nu$ in convezione naturale

Mentre nella convezione forzata è presente un rottore meccanico (pompa o ventilatore) che spinge il fluido contro la parete determinato lo strato limite dinamico e termico, nel caso della convezione naturale la velocità è dovuta al parametro  $\rho g \beta$  ovvero legato alla densità  $\rho$  e all'accelerazione di gravità del sistema di riferimento  $g$ .

Cambiano quindi i parametri di dipendenza:

$$\frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = f(\rho g \beta, \rho, \mu, L, \Delta T, \alpha) = \sum \text{cost} \cdot (\rho g \beta)^a \cdot \rho^b \cdot \mu^c \cdot L^d \cdot \Delta T^e \cdot \alpha^f$$

E ponendo l'uguaglianza dimensionale:

$$\frac{\theta}{L} = \left( \frac{M}{L^3} \frac{L}{T^3} \frac{1}{\theta} \right)^a \left( \frac{M}{L^3} \right)^b \left( \frac{M}{LT} \right)^c L^d \theta^e \left( \frac{L^2}{T} \right)^f$$

otteniamo

$$\begin{cases} -1 = -2a - 3b - c + d + 2f \\ 0 = a + b + c \\ 0 = -a - c - f \\ 1 = -a + e \end{cases}$$

Solitamente si scelgono come variabili indipendenti l'esponente di  $\mu$  e di  $\alpha$ , ovvero  $c$  e  $f$  e quindi otteniamo:

$$\begin{cases} d = -1 + 2a + 3b + c - 2f = -1 - \cancel{a} - f - \frac{3c}{2} + \cancel{c} - 2f = -1 - \frac{3c}{2} - \frac{3f}{2} \\ b = -a - c = \frac{c}{2} + \frac{f}{2} - c = -\frac{c}{2} + \frac{f}{2} \\ a = -\frac{c}{2} - \frac{f}{2} \end{cases}$$

ovvero

$$\frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = \text{cost} \cdot (\rho g \beta)^{-\frac{c}{2} - \frac{f}{2}} \cdot \rho^{-\frac{c}{2} + \frac{f}{2}} \cdot \mu^c \cdot L^{-1 - \frac{3c}{2} - \frac{3f}{2}} \cdot \Delta T^{-1 \frac{c}{2} - \frac{f}{2}} \cdot \alpha^f = \text{cost} \cdot \frac{\Delta T}{L} \cdot \left( \frac{\mu^2}{(\rho g \beta) \rho L^3 \Delta T} \right)^{c/2} \left( \frac{\rho \alpha^2}{(\rho g \beta) L^3 \Delta T} \right)^{f/2}$$

Si definisce allora  $\frac{\Delta T \rho^2 g \beta L^3}{\mu^2} = G_R$  noto come **numero di Grashof**.

$$\text{E quindi } \frac{\rho \mu^2}{\mu \rho^2} = \frac{\rho \alpha^2}{\rho g \beta L^3 \Delta T} = \frac{\alpha^2 \rho^2}{\mu^2} \frac{\mu^2}{\Delta T \rho^2 g \beta L^3} = \frac{\alpha^2}{\nu^2} \frac{1}{Gr} = \frac{1}{Pr^2} \cdot \frac{1}{Gr}$$

E allora si ha che:

$$\frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = \text{cost} \cdot \frac{\Delta T}{L} \cdot G_R^{x'} \cdot Pr^{y'}$$

e allora possiamo determinare il **numero di Nusselt in convezione naturale** come:

$$Nu = \frac{hL}{k_f} = \frac{dT/dx \Big|_{x=0}}{\Delta T/L} = \text{cost} \cdot Gr^{x'} \cdot Pr^{y'}$$

Dove  $x'$  e  $y'$  e la costante possono essere determinati solo sperimentalmente.

Il numero adimensionale che compare è la causa del moto:

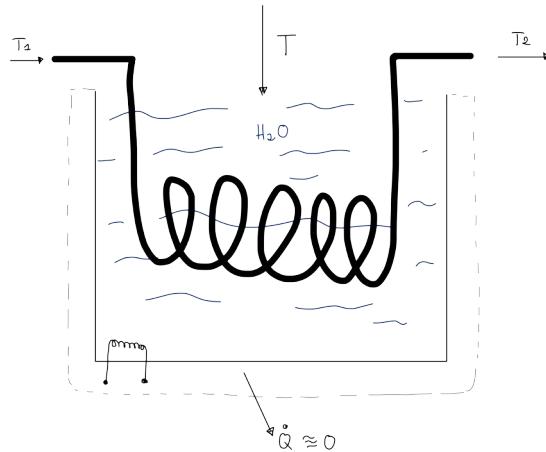
- **$Re$**  nel caso di convezione forzata, poiché il fluido aveva velocità  $w$
  - **$Gr$**  nel caso di convezione naturale, poiché contiene  $\Delta T, \rho, g, \beta$  che determinano il movimento del fluido.
- Quindi il primo parametro è legato al *tipo di moto*.

Il secondo parametro è  **$Pr$**  in entrambi i casi poiché tiene conto del fatto che fluidi con caratteristiche diverse si comportano diversamente.

ANDANDO SUL LIBRO KREITH ALLA FIGURA 7.4 SI OSSERVA COME PER CONVENZIONE LIBERA DA LASTRE E CILINDRI VERTICALI IL GRAFICO RIPORTA NUSSELT IN FUNZIONE DEL PRODOTTO  $(G_R)^x \cdot (Pr)^y$  E SI TROVA CHE X E Y SONO UGUALI.

# Termostato (scambiatori di calore)

Consideriamo un recipiente isolato termicamente che quindi viene ricoperto da un isolante in modo tale da considerare trascurabile gli scambi di calore.



Nel recipiente c'è  $H_2O$  distillata e in essa è immerso un tubicino con una serpentina in cui scorre il fluido che vogliamo mantenere alla temperatura desiderata, inoltre è presente un misuratore di temperatura  $T$ .

Mettiamo una piccola resistenza comandata dal misuratore di temperatura che appena la temperatura cala apre un circuito con cui si riscalda nuovamente l'acqua che ritorna alla temperatura desiderata. In gergo "dente di sega" in quanto sale e scende rimanendo in media alla temperatura desiderata.

$T_1$  e  $T_2$  sono le due temperature di entrata e uscita del tubicino.

Facciamo quindi il bilancio per il tubo applicando il 1° principio della termodinamica all'elemento  $dx$ :

$$dq - d\chi_f = dh + d\epsilon_c + d\epsilon_p \quad \{ \cdot G$$

Cioè  $dQ = G dh$

Si ricordi che all'interno del tubicino c'è convezione forzata mentre all'esterno nell'acqua c'è convezione naturale.

Per i coefficienti di convezione si considerino i valori dal Kreith.

Ricordiamo che lo scambio di calore in geometria cilindrica dove all'esterno c'è un coefficiente di convezione  $h_e$  e all'interno  $h_i$  convezione forzata (quindi con un  $h$  molto più elevato). E dove di fatto il tubo è fatto di un materiale con un certo  $k$  e un certo spessore, consideriamo quindi il coefficiente di scambio in geometria cilindrica  $U$ . La superficie di scambio di calore tra il fluido interno ed esterno è  $p dx$  e allora consideriamo la differenza di temperatura come assorbita così da essere un valore positivo e poi la variazione di entalpia  $dh$ .

$$U p dx \cdot (T_e - T) = G c_p dT,$$

dove  $U$  è il coefficiente globale di scambio,  $p$  è il perimetro

Si vede come in riscaldamento, quando  $T_i > T_e$  il calore va verso l'esterno mentre al contrario il calore entra a il  $dT$  cresce (il fluido si scalda)

Separando le variabili e integrando:

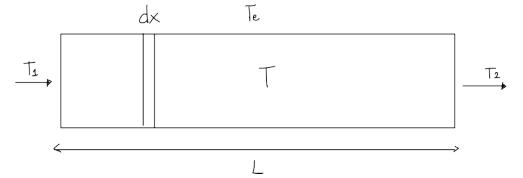
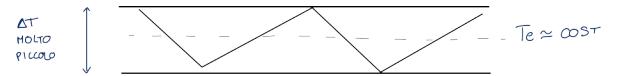
$$\frac{dT}{T - T_e} = - \frac{G c_p}{U p} \rightarrow \ln \left( \frac{T - T_e}{T_1 - T_e} \right) = - \frac{G c_p}{U p} x$$

$$\text{Allora } \frac{T - T_e}{T_1 - T_e} = e^{-\frac{G c_p}{U p} x}$$

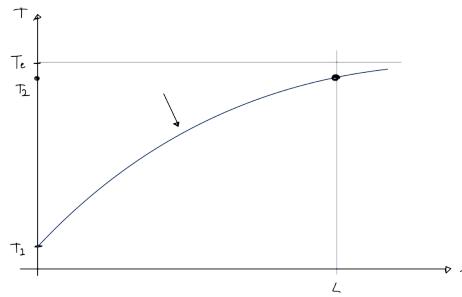
LA STESSA ESPRESSIONE CHE AVEVAMO TROVATO NEL METANODOTTO E NEL CAMINO.

IMPORTANTE: FATTE QUESTE CONSIDERAZIONI ADESSO PER IL METANODOTTO E IL CAMINO DOBBIAMO AVER CHIARO PERCHÉ L'ANDAMENTO È PROPRIO L'ESPONENZIALE COME L'ABBIAMO CONSIDERATO E SOPRATTUTTO QUANDO CI VERRÀ CHIESTO IN SEDE D'ESAME DOVREMMO SAPERLO DA DOVE VIENE QUESTO TERMINE ESPONENZIALE.

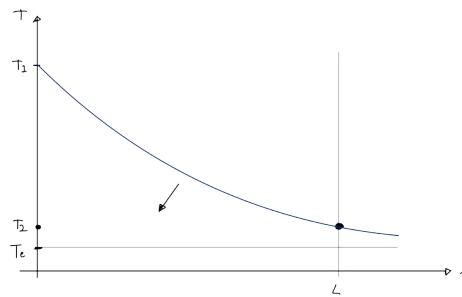
Allora posso avere due tipi di andamento esponenziale in funzione di  $x$  e quindi distinguiamo due casi:



- Se  $T_e > T_1$ , per tendere asintoticamente a  $T_e$   $T_1$  cresce esponenzialmente e dopo la lunghezza  $L$  vale  $T_2$ , che al limite è proprio pari a  $T_e$

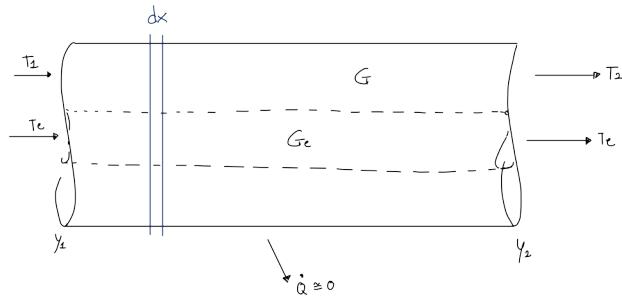


- Se  $T_e < T_1$ ,  $T_1$  diminuisce esponenzialmente per tendere asintoticamente a  $T_e$  e dopo la lunghezza  $L$  vale  $T_2$ , che al limite è proprio pari a  $T_e$ .



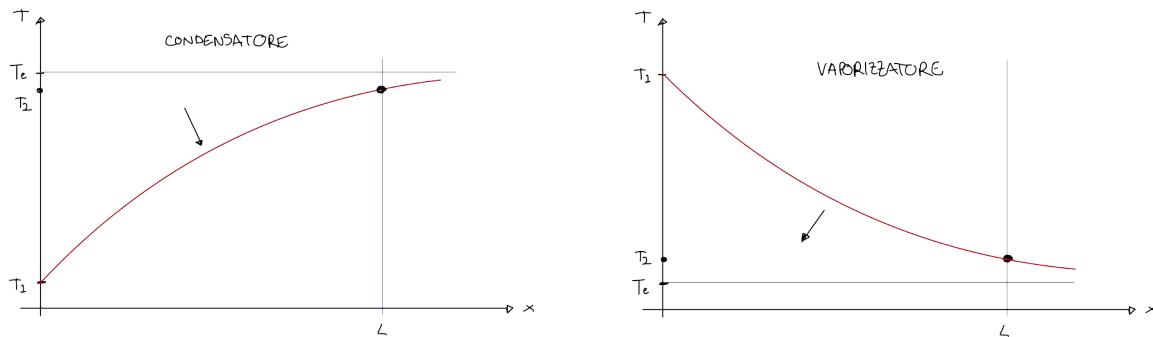
## Scambiatori di calore: condensatore e vaporizzatore

(Tubo in tubo)



Supponiamo di aver due tubi concentrici e di immettere nel tubo interno un fluido che cambia di stato (vaporizza o condensa) e all'esterno il fluido che varia la temperatura. Per il fluido interno che cambia di stato rimane alla temperatura costante  $T_e$  mentre il fluido nella corona cambia temperatura da  $T_1$  a  $T_2$ .

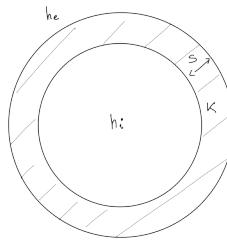
Volendo graficare l'andamento delle temperature posso ritornare ai grafici di prima:



Allora facciamo il bilancio sul fluido che cambia di stato e rimane alla temperatura  $T_e$  per l'elementino:

$$Updx (T_e - T) = q_{lat} \cdot G_e \cdot dy$$

questo calore non serve per variare la temperatura ma per farlo cambiare di stato e infatti è uguale al calore latente per la portata e per la variazione del titolo.



Si osservi come a sinistra le temperature del fluido che cambia è regolata dall'equazione precedente, ovvero:

$$\frac{T - T_e}{T_1 - T_e} = e^{-\frac{Gc_p}{Up}x}$$

Dal bilancio imposto dal primo principio della termodinamica:

$$dQ = Up dx (T - T_e)$$

Cioè con  $T$  funzione di  $x$  e possiamo integrare mentre al termine di destra ha  $y$  che varia tra ingresso e uscita, quindi:

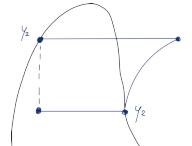
$$q_{lat} G_e (y_2 - y_1) = \left[ T_e + (T_1 - T_e) e^{-\frac{Gc_p}{Up} L} - T_1 \right] Up \text{ con } T_1 = T(x = L)$$

Quindi per avere la vaporizzazione completa o la condensazione completa abbiamo che  $y_1 = 0$  e  $y_2 = 1$  e quindi rimangono incognite  $G$  e la lunghezza  $L$ .

Discorso analogo per il termostato di prima dove si vede dai diagrammi che a seconda della temperatura esterna e della temperatura di riscaldamento si vede come al variare della lunghezza varierà la temperatura.

Questa era una delle problematiche della progettazione termodinamica del frigorifero dove per la condensazione si partiva da destra arrivando a  $y_1$  mentre nella vaporizzazione si partiva da un titolo non nullo di vapore per arrivare a 1 in  $y_2$ .

Con questo esempio dello scambiatore tubo in tubo abbiamo già un'idea di cosa significa progettare questo scambiatore arrivando ad ottenere una lunghezza.



Quindi abbiamo visto per gli **scambiatori di calore tubo in tubo**:

Se uno dei due fluidi cambia di stato e durante il cambiamento di stato la sua temperatura è costante e per noi è indifferente se il fluido a temperatura costante  $T_c$  vada verso destra o verso sinistra.

Invece il fluido più freddo che cambia temperatura da  $T_{fi}$  a  $T_{fu}$  lo supponiamo da sinistra verso destra.

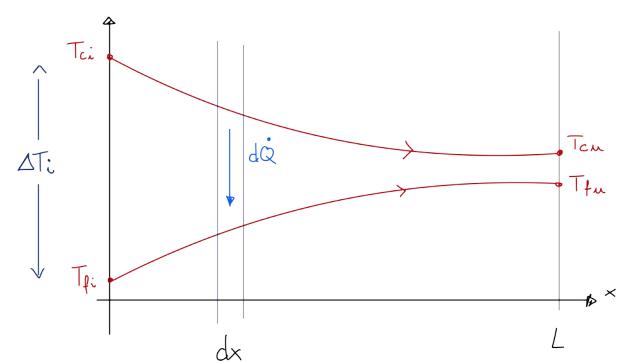
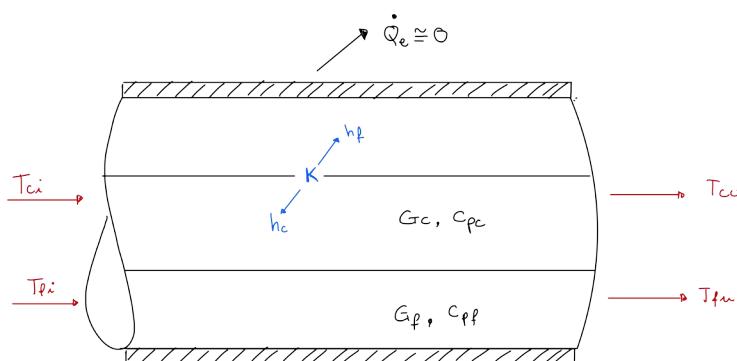
Quando i due versi sono uguali lo chiamiamo **equicorrente** mentre opposti lo chiamiamo **controcorrente**.

In questi casi è indifferente avere un caso equicorrente o controcorrente.

Vediamo invece cosa succede quando ambedue le temperature dei fluidi cambiano.

Sopponiamo di avere equicorrente e il fluido caldo rosso interno e il fluido caldo nella corona circolare a temperatura  $T_{fi}$ .

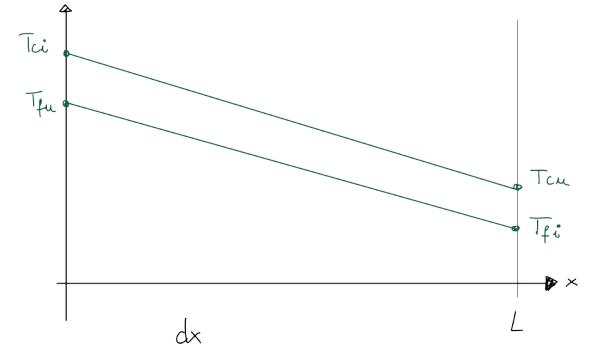
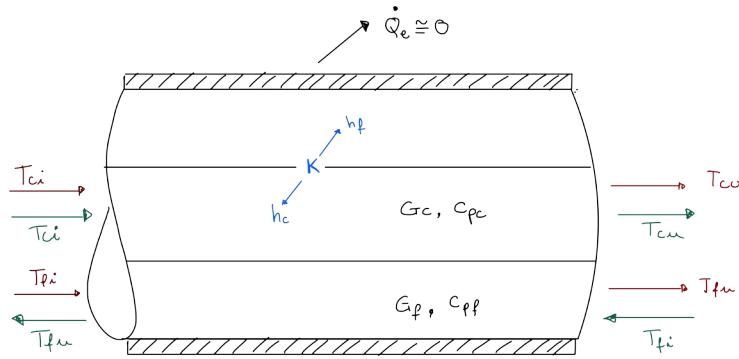
Nel caso equicorrente abbiamo le seguenti condizioni uscita:



Dove il fluido caldo si raffredda asintoticamente verso il valore  $T_{cu}$  mentre il fluido freddo si scalda con una temperatura di uscita  $T_{fu}$  a cui tenderà esponenzialmente.

Possiamo dire che per  $x = 0$ , all'inizio, c'è un  $\Delta T_i = T_{ci} - T_{fi}$  e le due temperature tendono ad avvicinarsi lungo il tubo

Per il caso controcorrente approssimiamo le temperature con due rette (anche se le due curve hanno una certa curvatura) dove il fluido caldo si raffredda e il fluido freddo si scalda.



Qualitativamente la differenza più grande è che si può avere  $T_{fu}$  maggiore di  $T_{cu}$  e già da questo possiamo ipotizzare che il controcorrente è più efficiente dell'equicorrente.

Possiamo considerare portata e calore specifico dei due fluidi.

Inoltre consideriamo un caso limite di dispersioni verso l'esterno nulle (ovvero il caso ideale).

*Saltiamo la trattazione completa e facciamo analiticamente il caso dell'equicorrente.*

Consideriamo i calori scambiati per convezione tra le pareti della corona circolare dovuto alla convezione nel fluido caldo ( $h_c$ ), alla conduzione nel materiale del tubo interno ( $k$ ) e alla convezione nel fluido freddo ( $h_f$ ), che raggruppiamo nel coefficiente globale di scambio  $U$

Imponendo il bilancio del primo principio della termodinamica:

$$dq - d\dot{Q}_f = dh + d\dot{Q}_c + d\dot{Q}_p \longrightarrow dq = dh \quad \{ \cdot G$$

E allora  $d\dot{Q} = G dh$

Quindi lo scambio di calore:  $d\dot{Q} = Up dx (T_c - T_f)$

Allora possiamo avere sia il bilancio per il fluido caldo che per il fluido freddo:

$$|G dh| = |G_c c_{pc} dT_c| = |C_c dT_c|, \text{ considerando } C_c \text{ come fosse una capacità termica.}$$

$$G dh = G_f c_{pf} dT_f = C_f dT_f$$

Questa differenza nasce dal fatto che se  $d\dot{Q} > 0$  per il fluido freddo si ha una temperatura crescente mentre per il fluido caldo con il calore perso la temperatura diminuisce.

Andando quindi a studiare il bilancio del fluido freddo e separiamo le variabili:

$$Up dx (T_c - T_f) = C_f dT_f$$

$$\frac{dT_f}{T_c - T_f} = \frac{Up}{C_f} dx$$

Dove però  $T_c - T_f$  dipende da  $x$  e quindi non sono realmente separate le variabili e quindi devo trovare un legame tra queste variabili.

Il legame lo trovo considerando che la variazione di entalpia del fluido caldo è uguale alla variazione di entalpia del fluido freddo dalla sezione di ingresso alla sezione generica  $x$ , ovvero.

$$\Delta h_c = \Delta h_f \text{ e allora, tenendo conto del segno: } C_c (T_{ci} - T_c) = C_f (T_f - T_{fi})$$

E quindi posso esprimere  $T_c$  funzione di  $T_f$  e sostituirlo nell'equazione precedente riuscendola ad integrare.

$$\text{Quindi: } T_c = T_{ci} - \frac{C_f}{C_c} (T_f - T_{fi})$$

$$\text{E allora } \frac{dT_f}{T_c - T_f} = \frac{dT_f}{T_{ci} - \frac{C_f}{C_c} (T_f - T_{fi})} = \frac{dT_f}{T_{ci} + \frac{C_f}{C_c} T_{fi} - \frac{C_f}{C_c} T_f - T_f} = \frac{dT_f}{T_{ci} + \frac{C_f}{C_i} T_{fi} - T_f \left(1 + \frac{C_f}{C_c}\right)}$$

$$\text{Allora } \frac{dT_f}{T_{ci} + \frac{C_f}{C_i} T_{fi} - T_f \left(1 + \frac{C_f}{C_c}\right)} = \frac{Up}{C_f} dx$$

Poi per scrivere il differenziale di  $dT_f$  nella stessa quantità in cui compare  $T_f$  moltiplichiamo e dividiamo per  $- \left(1 + \frac{C_f}{C_c}\right)$ , ovvero

$$\frac{-dT_f \left(1 + \frac{C_f}{C_c}\right)}{T_{ci} + \frac{C_f}{C_i} T_{fi} - T_f \left(1 + \frac{C_f}{C_c}\right)} = -\frac{Up}{C_f} dx \left(1 + \frac{C_f}{C_c}\right)$$

E quindi ora possiamo integrare:

$$\text{A } 1^\circ \text{ membro: } = \ln \left[ \frac{T_{ci} + \frac{C_f}{C_c} T_{fi} - T_{fu} \left(1 + \frac{C_f}{C_c}\right)}{T_{ci} + \cancel{\frac{C_f}{C_i} T_{fi}} - T_{fi} \left(1 + \cancel{\frac{C_f}{C_c}}\right)} \right] = \ln \left( \frac{T_{cu} - T_{fu}}{T_{ci} - T_{fi}} \right), \text{ con } T_{cu} = T_{ci} - \frac{C_f}{C_c} (T_{fu} - T_{fi}), \text{ dal bilancio dell'entalpia in uscita.}$$

$$\text{A } 2^\circ \text{ membro: } = - \left(1 + \frac{C_f}{C_c}\right) \frac{Up}{C_f} \int_0^L dx = - \left(1 + \frac{C_f}{C_c}\right) \frac{Up}{C_f} L, \text{ poiché considero } C_f, C_c \text{ costanti una volta fissate le portate } G_f, G_c \text{ e i calori specifici medi } c_c, c_f$$

$$\text{Owero } \ln \left( \frac{T_{cu} - T_{fu}}{T_{ci} - T_{fi}} \right) = - \left(1 + \frac{C_f}{C_c}\right) \frac{U}{C_f} S = - \left( \frac{1}{C_f} + \frac{1}{C_c} \right) US, \text{ con } S = pL \text{ superficie di scambio}$$

Allora dal bilancio avevamo ottenuto che il calore totale scambiato è pari alla variazione di entalpia del fluido caldo e del fluido freddo:

$$\dot{Q} = C_c (T_{ci} - T_{cu}) = C_f (T_{fu} - T_{fi})$$

$$\text{Da cui } \frac{1}{C_c} = \frac{T_{ci} - T_{cu}}{\dot{Q}} \text{ e } \frac{1}{C_f} = \frac{T_{fu} - T_{fi}}{\dot{Q}}$$

$$\text{E in conclusione } \ln \left( \frac{T_{cu} - T_{fu}}{T_{ci} - T_{fi}} \right) = - US \left( \frac{T_{fu} - T_{fi}}{\dot{Q}} + \frac{T_{ci} - T_{cu}}{\dot{Q}} \right) = \frac{US}{\dot{Q}} \left[ (T_{cu} - T_{fu}) - (T_{ci} - T_{fi}) \right]$$

$$\text{Cioè } \dot{Q} = US \frac{(T_{cu} - T_{fu}) - (T_{ci} - T_{fi})}{\ln \left( \frac{T_{cu} - T_{fu}}{T_{ci} - T_{fi}} \right)}$$

$$\text{E allora } \dot{Q} = US \frac{\Delta T_u - \Delta T_i}{\ln \left( \frac{\Delta T_u}{\Delta T_c} \right)} = US (DTML), \text{ dove il rapporto prende il nome di } \textcolor{red}{\text{differenza di temperatura media logaritmica (DTML)}}$$

Con  $\Delta T_u = T_{cu} - T_{fu}$  e  $\Delta T_i = T_{ci} - T_{fi}$

Abbiamo espresso il  $\dot{Q}$  in funzione della DTML e quindi dobbiamo calcolare le temperature in ingresso e uscita e dobbiamo farlo facendo i bilanci termici.

Tuttavia esiste un modo diverso di esprimere il calore scambiato ovvero attraverso l'**efficienza degli scambiatori**, ovvero il rapporto tra il calore reale scambiato nello scambiatore rispetto al massimo calore di scambio che si avrebbe se fosse controcorrente e con una superficie di scambio infinitamente grande.

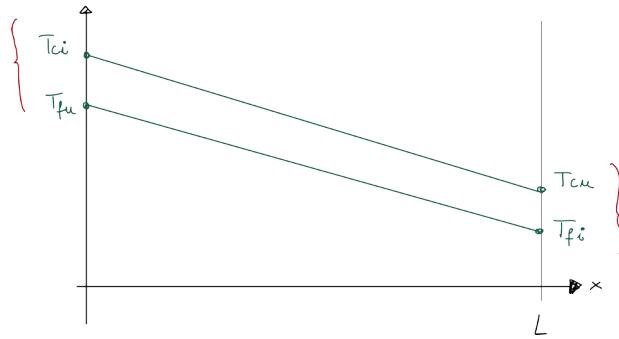
$$\epsilon = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{\max} (\text{controcorrente}, S \rightarrow 0)}$$

Se ho un copro caldo un cuna capacità termica più grande di quello freddo  $C_c > C_f$  si ha che la temperatura di quello freddo

tende a quello caldo  $T_{fu} \rightarrow T_{ci}$ . Ovvero  $\epsilon = \frac{C_c (T_{ci} - T_{cu})}{C_f \left( \frac{T_{ci} - T_{fi}}{\frac{T_{cu} - T_{fu}}{2}} \right)}$

Se invece  $C_f > C_c$  è la temperatura di uscita del fluido caldo che tende a quella di ingresso del fluido freddo:  $T_{cu} \rightarrow T_{fi}$ . Ovvero

$$\epsilon = \frac{C_f (T_{fu} - T_{fi})}{C_c \left( \frac{T_{ci} - T_{fi}}{\frac{T_{cu} - T_{fu}}{2}} \right)}$$



In conclusione osservando che il denominatore può essere assunto lo stesso se come capacità termica si prende la minima tra  $C_f$  e  $C_c$  si ha che il calore massimo è  $\dot{Q}_{\max} = C_{\min} (T_{ci} - T_{fi})$

E allora  $\dot{Q} = \epsilon \dot{Q}_{\max} = \epsilon C_{\min} (T_{ci} - T_{fi})$ , abbiamo espresso il  $\dot{Q}$  solo in funzione delle temperature di ingresso.

Osservazioni:

- Se  $C_{\min} = C_c$  si ha che  $T_{cu} \rightarrow T_{fi}$  e quindi che l'efficienza è  $\epsilon = \frac{C_c (T_{ci} - T_{fi})}{C_{\min} (T_{ci} - T_{fi})} = 1$
- Se  $C_{\min} = C_f$  si ha che  $T_{fu} \rightarrow T_{ci}$  e quindi che l'efficienza  $\epsilon = \frac{C_f (T_{ci} - T_{fi})}{C_{\min} (T_{ci} - T_{fi})} = 1$

Allora per trovare l'espressione dell'efficienza  $\epsilon$  riprendiamo una delle relazioni intermedie che aviamo scritto durante l'integrazione

del bilancio dello scambiatore e ci andiamo a sostituire al posto di  $\frac{T_{fu} - T_{fi}}{T_{ci} - T_{fi}} \leftrightarrow \epsilon \frac{C_{\min}}{C_f}$  poiché  $\epsilon = \frac{C_f (T_{fu} - T_{fi})}{C_{\min} (T_{ci} - T_{fi})}$ .

Ottengo quindi le due espressioni per primo e secondo membro che poi andrò ad uguagliare.

Partendo da  $\ln \left[ \frac{T_{ci} + \frac{C_f}{C_c} T_{fi} - T_{fu} \left( 1 + \frac{C_f}{C_c} \right) + T_{fi}}{T_{ci} - T_{fi}} \right] = -US \left( \frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f} \right)$

Per il 1° membro:

$$\ln \left[ \frac{\left( 1 + \frac{C_f}{C_c} \right) (T_{fi} - T_{fu}) + T_{ci} - T_{fi}}{T_{ci} - T_{fi}} \right] = \ln \left[ 1 - \left( 1 + \frac{C_f}{C_c} \right) \underbrace{\frac{T_{fu} - T_{fi}}{T_{ci} - T_{fi}}}_{= \frac{\epsilon C_{\min}}{C_f}} \right] = \ln \left[ 1 - \left( \frac{1}{C_f} + \frac{1}{C_c} \right) C_{\min} \epsilon \right] = \ln \left[ 1 - \left( \frac{C_{\min}}{C_f} + \frac{C_{\min}}{C_c} \right) \epsilon \right]$$

Questo poiché  $\epsilon = \frac{C_f (T_{fu} - T_{fi})}{C_{\min} (T_{ci} - T_{fi})}$

A 2° membro invece:  $-US \left( \frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f} \right) \frac{C_{\min}}{C_{\min}} = -\frac{US}{C_{\min}} \left( \frac{C_{\min}}{C_c} + \frac{C_{\min}}{C_f} \right)$

Allora uguagliando abbiamo che:

$$\begin{aligned} \ln \left[ 1 - \left( \frac{C_{\min}}{C_f} + \frac{C_{\min}}{C_c} \right) \epsilon \right] &= -\frac{US}{C_{\min}} \left( \frac{C_{\min}}{C_c} + \frac{C_{\min}}{C_f} \right) \\ 1 - \epsilon \left( \frac{C_{\min}}{C_c} + \frac{C_{\min}}{C_f} \right) &= \exp \left[ -\frac{US}{C_{\min}} \left( \frac{C_{\min}}{C_c} + \frac{C_{\min}}{C_f} \right) \right] \\ \epsilon &= \frac{1 - \exp \left[ -\frac{US}{C_{\min}} \left( \frac{C_{\min}}{C_c} + \frac{C_{\min}}{C_f} \right) \right]}{\frac{C_{\min}}{C_c} + \frac{C_{\min}}{C_f}} = \frac{1 - \exp \left[ -\frac{US}{C_{\min}} \left( 1 + \frac{C_{\min}}{C_{\max}} \right) \right]}{1 + \frac{C_{\min}}{C_{\max}}} = \frac{1 - \exp \left[ -NUT \left( 1 + \frac{C_{\min}}{C_{\max}} \right) \right]}{1 + \frac{C_{\min}}{C_{\max}}} \end{aligned}$$

Cioè  $\epsilon = \frac{1 - \exp \left[ -NUT \left( 1 + \frac{C_{\min}}{C_{\max}} \right) \right]}{1 + \frac{C_{\min}}{C_{\max}}}$ , con  $\frac{US}{C_{\min}} = NUT$ , numero di unità di trasporto (adimensionale)

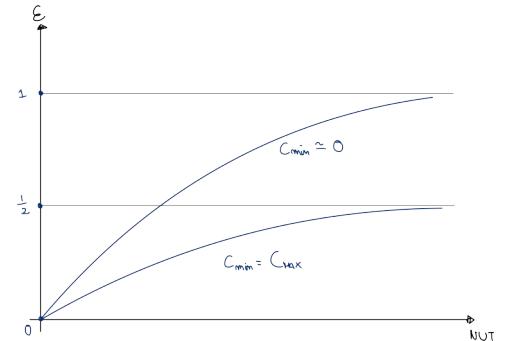
In conclusione abbiamo trovato l'efficienza di uno scambiatore che ci serve per calcolare il calore scambiato da

$$\dot{Q} = \epsilon C_{\min} (T_{ci} - T_{fi})$$

Per vedere l'efficienza in funzione della superficie facciamo il diagramma di  $\epsilon$  in funzione di  $NUT$  nel caso equicorrente (da sx verso dx)

E allora:

- Se  $C_{\min} \ll C_{\max} \rightarrow \epsilon = 1 - e^{-NUT}$ . Quindi se  $NUT = 0 \rightarrow \epsilon = 0$   
e se  $NUT \rightarrow \infty \rightarrow \epsilon \rightarrow 1$
- Se  $C_{\min} = C_{\max} \rightarrow \epsilon = \frac{1 - e^{-2NUT}}{2}$ . Quindi se  $NUT = 0 \rightarrow \epsilon = 0$   
e se  $NUT \rightarrow \infty \rightarrow \epsilon \rightarrow \frac{1}{2}$



DOMANI VEDREMO (FORSE) LA PRIMA ESERCITAZIONE CHE RIGUARDA: FUNZIONAMENTO DELLA TERMOFLUIDODINAMICA CON GLI STENT NELLE ARTERIE E LA MAGNETO FLUIDO DINAMICA. COMMENTEREMO INSIEME DUE ARTICOLI IN INGLESE COMPRENDENDO LE BASI DEL LAVORO SENZA EQUAZIONI E NOZIONI NUOVE MA SEMPLICEMENTE VEDENDO COME APPLICANDO I CONCETTI DELLA FLUIDO DINAMICA E TERMOCINETICA GLI AUTORI SONO RIUSCITI AD OTTENERE DEI RISULTATI PUBBLICATI SU RIVISTE INTERNAZIONALI.

# Convezione forzata su lastra piana

Si possono ricavare queste tre equazioni a partire dalle equazioni di Navier-Stokes, ovvero

1. Conservazione della massa nell'ipotesi di moto stazionario, moto bidimensionale  $\left( \frac{\partial \cdot}{\partial z} = 0 \right)$  e incompressibile  $\rho = \text{cost}$

2. Conservazione della quantità di moto nella direzione  $x$  ( $u$  è la velocità lungo  $x$ )

3. Conservazione della quantità di moto nella direzione  $y$

con una generalizzazione in quanto  $\tau$  dipenda sia dal  $\frac{du}{dy}$  che dalla variazione lungo  $x$

Ovvero:

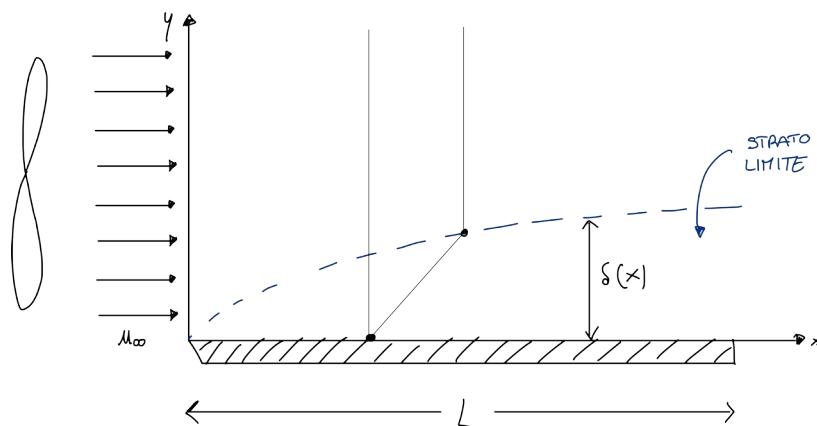
1.  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

2.  $\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$

3.  $\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$

Vediamo allora quali termini sono di un ordine di grandezza diverso dagli altri.

Riduciamo le quantità a quantità adimensionali considerando un ventilatore che imprime una velocità  $u_\infty$ . Al contatto con la parete ci sarà lo strato limite dinamico  $\delta(x)$  dove la velocità varia da  $0$  a  $u_\infty$ .



Quindi, adimensionalizziamo le grandezze rispetto a  $L$ :  $x' = \frac{x}{L}$  e  $y' = \frac{y}{L}$ , e le velocità rispetto  $u_\infty$ , ovvero:  $u' = \frac{u}{u_\infty}$  e  $v' = \frac{v}{u_\infty}$ . E per la pressione:  $p' = \frac{p}{\rho u_\infty^2}$ . E  $Re = \frac{u_\infty L}{\nu}$

Così otteniamo la versione adimensionale delle equazioni:

1.  $\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0$

2.  $u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = - \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} \right)$

3.  $u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} = - \frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right)$

Abbiamo allora che  $u' = \frac{u}{u_\infty} = \mathcal{O}(1)$  poiché  $u$  dovendo essere una quantità finita, ha certamente lo stesso ordine di grandezza di  $u_\infty$

Discorso analogo per  $x' = \frac{x}{L} = \mathcal{O}(1)$ , poiché la variabile  $x$  è dello stesso ordine di grandezza dell'orizzontale.

Per la coordinata ortogonale posso considerare che  $y = \mathcal{O}(\delta)$ , cioè che  $y$  ha lo stesso ordine di grandezza di  $\delta$  ma  $\delta \ll L$  e allora  $y' = \frac{y}{L} = \mathcal{O}(\delta')$ , con  $\delta' = \frac{\delta}{L} \ll 1$ . Questo perchè  $y$  è dell'ordine dello spessore  $\delta$  dello strato limite e quindi  $y'$  è di ordine molto inferiore ad 1.

Allora dalle equazioni posso dedurre che:

1.  $\frac{\mathcal{O}(1)}{\mathcal{O}(1)} = \frac{\partial v'}{\partial y'} \rightarrow \partial v' = \mathcal{O}(1) \cdot \mathcal{O}(\delta') \Rightarrow v' = \mathcal{O}(\delta')$
2.  $\mathcal{O}(1) \frac{\mathcal{O}(1)}{\mathcal{O}(1)} + \mathcal{O}(\delta') \frac{\mathcal{O}(1)}{\mathcal{O}(\delta')} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Re} \frac{\mathcal{O}(1)}{\mathcal{O}(\delta')^2} + \frac{1}{Re} \frac{\mathcal{O}(1)}{\mathcal{O}(1)^2}$ , cioè  
 $\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1) = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \mathcal{O}(1) + \cancel{\mathcal{O}(\delta')^2}$  con  $Re = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\delta'^2}\right)$ . E allora  $\frac{\partial p'}{\partial x'} = \mathcal{O}(1)$ , per non essere trascurato.
3.  $\mathcal{O}(1) \frac{\mathcal{O}(\delta')}{\mathcal{O}(1)} + \mathcal{O}(\delta') \frac{\mathcal{O}(\delta')}{\mathcal{O}(\delta')} = -\frac{\cancel{\partial p'}}{\cancel{\partial y'}} + \mathcal{O}(\delta^2) \frac{\mathcal{O}(\delta')}{\mathcal{O}(1)} + \mathcal{O}(\delta^2) \frac{\mathcal{O}(\delta')}{\mathcal{O}(\delta^2)}$ . Cioè  
 $\mathcal{O}(\delta') + \mathcal{O}(\delta') = -\frac{\partial p'}{\partial y'} + \cancel{\mathcal{O}(\delta^3)} + \mathcal{O}(\delta') \Rightarrow \frac{\partial p'}{\partial y'} = \mathcal{O}(\delta')$

Ovvero abbiamo ottenuto che la variazione di pressione lungo  $x$  è di un ordine di grandezza maggiore rispetto a  $y$ , nello strato limite quindi possiamo ritenere  $\frac{\partial p}{\partial y} \simeq 0$ , ovvero trascurabile rispetto alla variazione lungo  $x$ .

Allora:

$$(3) \quad \frac{\partial p}{\partial y} \simeq 0$$

$$(2) \quad \Rightarrow u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \underbrace{\frac{dp}{dx}}_{\text{derivata tot}} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

## Soluzione di Blasius

Blasius risolse l'equazione precedente considerando  $\frac{\partial p}{\partial x} \simeq 0$ .

Questa ipotesi nel caso dell'equazione di conservazione della quantità di moto (2) se vado ad applicarla fuori dallo strato limite ho  $u_\infty$ , la velocità del fluido indisturbata, in direzione  $y$  considero nulla la velocità nello strato limite e quindi ottengo

$$u_\infty \frac{\partial u_\infty}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}.$$

Ovvero troviamo che la variazione di pressione è legata alla variazione di  $u_\infty$  lungo  $x$ .

Questo vuol dire che assumere  $\frac{\partial p}{\partial x} \simeq 0$  equivale a dire che la velocità non varia lungo  $x$ .

Ad esempio è ragionevole assumerlo su un'ala di un aereo.

Quindi integriamo (1)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\int_0^y \frac{\partial v}{\partial y} dy = v(y) - \underbrace{v(0)}_{=0} = - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy, \text{ dove } v(0) = 0 \text{ poiché la lastra è ferma.}$$

Integriamo (2)

$$\int_0^y u \frac{\partial u}{\partial x} dy + \underbrace{\int_0^y v \frac{\partial u}{\partial y} dy}_{=0} = \nu \int_0^y \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dy, \text{ con } \frac{\mu}{\rho} = \nu = \text{cost}$$

Quindi per il secondo termine (ricordando che  $d(uv) = u dv + v du$ ) sarà:

$$\underline{\underline{u}} = \int_0^y v \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int_0^y d(uv) - \int_0^y u \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{-\partial u / \partial x (1)} dy = [uv]_0^y + \int_0^y u \frac{\partial u}{\partial x} dy = uv + \int_0^y u \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

Allora  $2 \int_0^y u \frac{\partial u}{\partial x} dy + uv = \nu \int_0^y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy$

Calcoliamo gli integrali tra  $0$  e  $\delta$  ovvero in tutto lo strato limite:

$$2 \int_0^\delta u \frac{\partial u}{\partial x} dy + (uv) \Big|_s = \nu \int_0^\delta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy$$

Dove il secondo termine  $\underline{\underline{u}} = u(\delta)v(\delta)$ , con  $u(\delta) = 0,99 u_\infty$  (per convenzione, dalla trattazione di Blasius) e  $v(\delta) = - \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy$  dall'integrazione di (1).

$$\text{Cioè si ottiene } 2 \int_0^\delta u \frac{\partial u}{\partial x} dy - 0,99 u_\infty \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy = \nu \int_0^\delta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy$$

Ora immaginiamo di scegliere che  $\frac{u}{u_\infty}$  sia una funzione  $g\left(\frac{y}{\delta}\right)$ , dove ricordiamo che  $\delta$  è funzione di  $x$ , quindi  $g(y, x)$ , cioè

$$\frac{u}{u_\infty} = g\left(\frac{y}{\delta}\right), \text{ con } \delta = \delta(x) \text{ e } u = u_\infty \cdot g$$

Allora calcoliamo  $\frac{\partial u}{\partial x}$  e  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  per sostituirle:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_\infty \frac{dg}{dx} = u_\infty g' \left( -\frac{y}{\delta^2} \right) \frac{d\delta}{dx}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u_\infty g' \frac{1}{\delta} \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_\infty}{\delta} g'' \frac{1}{\delta}$$

E allora

$$\bullet -2 \int_0^\delta u_\infty g \cdot u_\infty g' \frac{y}{\delta^2} \frac{d\delta}{dx} dy + 0,99 u_\infty \int_0^\delta u_\infty g' \frac{y}{\delta^2} \frac{ds}{dx} dy = - \underbrace{2 u_\infty^2}_{=B} \underbrace{\left[ \int_0^{1=\frac{y}{\delta}}_{y=\delta} gg' \frac{y}{\delta} \frac{dy}{\delta} \right]}_{=B} \frac{d\delta}{dx} + \underbrace{0,999 u_\infty^2}_{=A} \underbrace{\left[ \int_0^1 g' \frac{y}{\delta} \frac{dy}{\delta} \right]}_{=A} \frac{d\delta}{dx}$$

**OSS :** Quindi scegliamo una funzione di  $g$  come un'espressione analitica nota del tipo

$$\frac{u}{u_\infty} = g\left(\frac{y}{\delta}\right) = a + b \frac{y}{\delta} + c \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + \dots \text{ e i 2 integrali tra le quadre sono calcolabili, per cui introduciamo le due costanti } A \text{ e } B.$$

$$\text{Ovvero abbiamo } = A u_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} - B u_\infty^2 \frac{d\delta}{dx}$$

Abbiamo così ottenuto i due termini di sinistra.

Invece il termine di destra:

$$\bullet \int_0^\delta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = \nu \int_0^\delta \frac{u_\infty}{\delta} g'' \frac{1}{\delta} dy = \nu \frac{u_\infty}{\delta} \underbrace{\int_0^1 g'' \frac{dy}{\delta}}_{=C} = \nu \frac{u_\infty}{\delta} \underbrace{[g'(1) - g'(0)]}_{=C}$$

$$\text{Allora possiamo dire che in conclusione: } A u_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} - B u_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} = \nu \frac{u_\infty}{\delta} C$$

$$(A - B) u_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} = \nu \frac{u_\infty}{\delta} C$$

Separiamo le variabili ed integriamo:

$$\delta d\delta = \frac{\nu C}{u_\infty(A-B)} dx \longrightarrow \frac{\delta^2}{2} = \frac{\nu C}{u_\infty(A-B)} x$$

i termini costanti possono essere considerati parte della funzione  $g$  e quindi ci interessa solo la proporzionalità:

$$\delta^2 \propto \frac{\nu x}{u_\infty} \text{ e allora } \delta \propto \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}$$

Allora, avendo trovato che  $\delta$  è proporzionale a  $\sqrt{\nu x / u_\infty}$ , possiamo riscrivere la variabile della funzione  $g$ , cioè la **variabile di similarità**, ovvero  $\eta := \frac{y}{\delta} = \frac{u \sqrt{u_\infty}}{\sqrt{\nu x}}$

Così abbiamo determinato qual è la variabile di similarità  $\eta$  con la quale posso studiare il problema:

$$\frac{u}{u_\infty} = g\left(\frac{y}{\delta}\right) = g(\eta)$$

TUTTA QUESTA PROCEDURA SUL KREITH NON VIENE FATTA MA SI PARTE DIRETTAMENTE DALLA DEFINIZIONE DI  $\eta$ .

Ora per risolvere le equazioni abbiamo bisogno di introdurre una nuova variabile  $\psi$  nota come **funzione di corrente** e tale che  $\frac{\partial \psi}{\partial y} = u$  e  $-\frac{\partial \psi}{\partial x} = v$

Allora, l'equazione di conservazione della massa diventa

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0 \longrightarrow 0 = 0$$

Questo immaginando di poter invertire l'ordine delle derivate parziali, la conservazione della massa risulta sempre soddisfatta e non c'è bisogno di integrarla.

Allora riprendiamo l'equazione di conservazione della quantità di moto (2) e applicando la definizione della funzione di corrente possiamo dire che  $\frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$

Allora ripartiamo dalla definizione della funzione di corrente e integriamo l'espressione:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \longrightarrow \psi(y) - \underbrace{\psi(0)}_{=0} = \int_0^y u dy \text{ con } u = u_\infty g(\eta)$$

$$\psi(y) = \int_0^y u_\infty g(\eta) d\eta \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} = \sqrt{u_\infty \nu x} \int_0^\eta g d\eta = \sqrt{u_\infty \nu x} \cdot \underbrace{f(\eta)}_{=dy, \text{ con } y = \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \eta}$$

$$\text{con } f(\eta) = \int_0^\eta d\eta \longrightarrow \frac{df}{d\eta} = f' = g = \frac{u}{u_\infty}$$

Ora, determinata la funzione di corrente  $\psi(y) = \sqrt{u_\infty \nu x} \cdot f(\eta)$ , possiamo calcolarne le derivate per sostituirle in (2):

- $\frac{\partial \psi}{\partial y} = \sqrt{u_\infty \nu x} \cdot f' \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} = u_\infty f'$
- $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = u_\infty f'' \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}$
- $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^3} = u_\infty \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} f''' \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} = \frac{u_\infty^2}{\nu x} f'''$
- $\frac{\partial \psi}{\partial x} = \sqrt{u_\infty \nu} f \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} + \sqrt{u_\infty \nu x} f' y \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{u_\infty \nu}{x}} f - \frac{1}{2} \sqrt{u_\infty \nu x} y \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} \frac{1}{x} f' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{u_\infty \nu}{x}} f - \frac{1}{2} \frac{u_\infty y}{x} f'$
- $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = u_\infty f'' y \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{1}{2}-1}$

Calcoliamo separatamente i termini di (2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= -u_\infty f' \frac{1}{2} u_\infty f'' u \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{x} = -\frac{u_\infty^2}{2} f' f'' \frac{\eta}{x} \\ &\stackrel{=\eta}{=} \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= -u_\infty f'' \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{u_\infty \nu}{x}} f - \frac{1}{2} \frac{u_\infty y}{x} f' \right) = -\frac{1}{2} u_\infty f'' \frac{u_\infty}{x} f + \frac{1}{2} u_\infty f'' \sqrt{\frac{u_\infty y}{x}} f' \\ \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} &= \nu \frac{u_\infty^2}{\nu x} f''' = \frac{u_\infty^2}{x} f''' \end{aligned}$$

$$\text{Allora } -\frac{u_\infty^2}{2} f' f'' \frac{\eta}{x} - \frac{1}{2} u_\infty f'' \frac{u_\infty}{x} f + \frac{1}{2} u_\infty^2 f' f'' \frac{\eta}{x} = \frac{u_\infty^2}{x} f''' \\ -\frac{1}{2} \frac{u_\infty^2}{x} f'' f = \frac{u_\infty^2}{x} f'''$$

Quindi si arriva a  $f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0$  che prende il nome di **Equazione di Blasius**.

In sostanza siamo passati da un sistema di due equazioni alle derivate parziali (conservazioni della massa e conservazione della quantità di moto) attraverso la funzione di corrente e con la sua sostituzione nell'equazione di conservazione dell'energia arrivando ad un'equazione alle derivate ordinarie.

Vediamo come si può risolvere questa equazione.

$$\text{Abbiamo } f''' + \frac{1}{2} f'' f = 0, \text{ con } f(\eta) = \int_0^\eta g d\eta, \text{ con } g = \frac{u}{u_\infty} = f'$$

La soluzione numerica scelta da Blasius nel 1908 consiste nel prendere  $f(\eta)$  come una serie di potenze di  $\eta$  fino all'11<sup>ma</sup> potenza.

$$f(\eta) = A_0 + A_1 \eta + A_2 \frac{\eta^2}{2!} + A_3 \frac{\eta^3}{3!} + A_4 \frac{\eta^4}{4!} + A_5 \frac{\eta^5}{5!} + A_6 \frac{\eta^6}{6!} + A_7 \frac{\eta^7}{7!} + A_8 \frac{\eta^8}{8!} + A_9 \frac{\eta^9}{9!} + A_{10} \frac{\eta^{10}}{10!} + A_{11} \frac{\eta^{11}}{11!}$$

VEDI PIÙ AVANTI PERCHÉ ALCUNI TERMINI SONO CANCELLATI.

Abbiamo condizioni al contorno:

- Per  $\eta = 0$  si ha  $f(0) = \int_0^0 g d\eta = 0 \implies A_0 = 0$
- Per  $\eta = 0$  si ha  $u = 0 \implies g = 0 \implies f'(0) = 0 \implies A_1 = 0$  con  

$$f'(\eta) = A_2 + A_3 \eta + A_4 \frac{\eta^2}{2!} + A_5 \frac{\eta^3}{3!} + A_6 \frac{\eta^4}{4!} + A_7 \frac{\eta^5}{5!} + A_8 \frac{\eta^6}{6!} + A_9 \frac{\eta^7}{7!} + A_{10} \frac{\eta^8}{8!} + A_{11} \frac{\eta^9}{9!} + A_{12} \frac{\eta^{10}}{10!}$$

Calcoliamo le altre derivate di  $f(\eta)$  per poterle sostituire nell'equazione di Blasius:

$$f''(\eta) = A_2 + A_3 \eta + A_4 \frac{\eta^2}{2!} + A_5 \frac{\eta^3}{3!} + A_6 \frac{\eta^4}{4!} + A_7 \frac{\eta^5}{5!} + A_8 \frac{\eta^6}{6!} + A_9 \frac{\eta^7}{7!} + A_{10} \frac{\eta^8}{8!} + A_{11} \frac{\eta^9}{9!}$$

$$f'''(\eta) = A_3 + A_4 \eta + A_5 \frac{\eta^2}{2!} + A_6 \frac{\eta^3}{3!} + A_7 \frac{\eta^4}{4!} + A_8 \frac{\eta^5}{5!} + A_9 \frac{\eta^6}{6!} + A_{10} \frac{\eta^7}{7!} + A_{11} \frac{\eta^8}{8!}$$

Ora sostituendo le espressioni di  $f(\eta)$ ,  $f''(\eta)$  e  $f'''(\eta)$  nell'equazione di Blasius, si ottiene un'espressione data da una costante più la somma di potenze successive  $\eta$  moltiplicate per diverse costanti, il tutto pari a 0:

$$[\cdot] + [\cdot] \eta + [\cdot] \eta^2 + [\cdot] \eta^3 + \dots = 0, \forall \eta$$

Dovendo questa espressione partire a 0 per ogni  $\eta$ , questo è possibile solo se tutti i termini tra le parentesi  $[\cdot]$  sono nulli:  
Imponendo questa condizione:

- (**cost**)  $A_3 = 0$
- $(\eta) A_4 = 0$

- $(\eta^2) \frac{A_5}{2!} + \frac{1}{2} A_2 \frac{A_2}{2!} = 0 \implies A_5 + \frac{A_2^2}{2} = 0 \implies A_5 = -\frac{1}{2} A_2^2$
- $(\eta^3) \frac{A_6}{3!} = 0 \implies A_6 = 0$
- $(\eta^4) \frac{A_7}{4!} = 0 \implies A_7 = 0$
- $(\eta^5) \frac{A_8}{5!} + \frac{1}{2} \left( \frac{A_2}{2!} \frac{A_5}{3!} + A_2 \frac{A_5}{5!} \right) = 0, \text{ cioè}$   
 $\frac{A_8}{5!} = -\frac{A_2 A_5}{2} \left( \frac{1}{12} + \frac{1}{120} \right) = -A_2 A_5 \frac{11}{240} = -\frac{11}{240} A_2 \left( -\frac{1}{2} A_2^2 \right) = \frac{11}{480} A_2^3 \implies A_8 = \frac{11}{4} A_2^3$
- $(\eta^6) \frac{A_9}{6!} = 0 \implies A_9 = 0$
- $(\eta^7) \frac{A_{10}}{7!} = 0 \implies A_{10} = 0$
- $(\eta^8) \frac{A_{11}}{8!} + \frac{1}{2} \left( \frac{A_2 A_8}{8!} + \frac{A_5^2}{3! 5!} + \frac{A_2 A_8}{2! 6!} \right) = 0 \implies A_{11} = -\frac{375}{8} A_2^4$

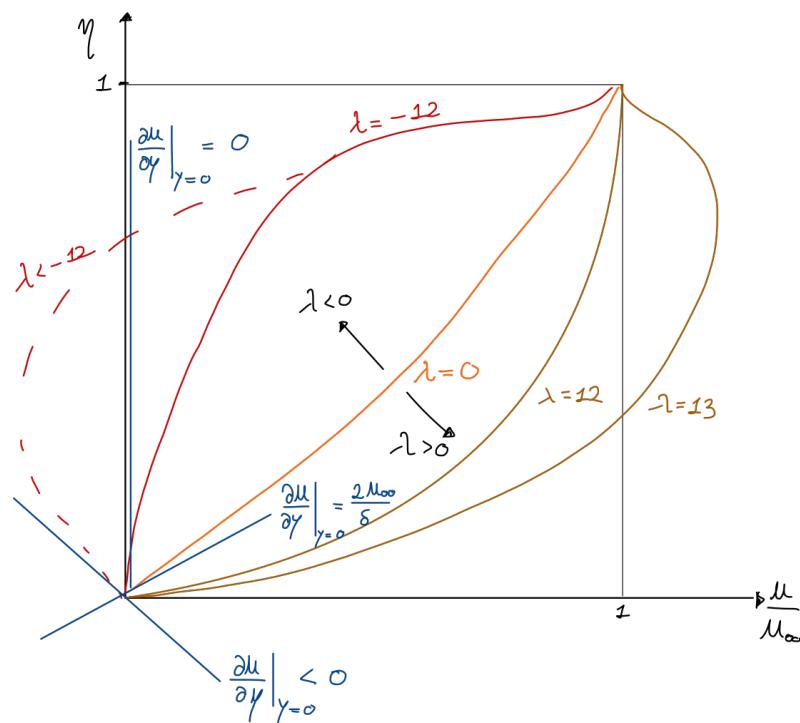
E allora  $f(\eta) = A_2 \frac{\eta^2}{2!} + A_5 \frac{\eta^5}{5!} + A_8 \frac{\eta^8}{8!} + A_{11} \frac{\eta^{11}}{11!}$

CONTINUEREMO IL DISCORSO NELLA PROSSIMA LEZIONE



# FISICA TECNICA

## Settimana 11



SOLUZIONE DI VON KARMAN - POLHAUSEN

# Indice settimana 11

Indice settimana 11	2
martedì 1 dicembre 2020 - Ricevimento	3
martedì 1 dicembre 2020 - Lezione 28	4
Problema termodinamico: soluzione di Polhausen	6
Soluzione di Von Karman - Polhausen	9
Convezione naturale	11
mercoledì 2 dicembre 2020 - Lezione 29	14
<i>Modello di Lorenz</i>	14
Fenomeni di trasporto	21
<i>Trasporto della quantità di moto</i>	21
<i>Trasporto del calore</i>	21
<i>Trasporto di massa</i>	21
giovedì 3 dicembre 2020 - Lezione 30	23
Criochirurgia	23

martedì 1 dicembre 2020 - Ricevimento 4

Eraamo rimasti ai sistemi aperti con regime non stazionario facendo quindi la generalizzazione nel caso in cui si scrivere l'equazione di conservazione della massa e il 1° principio della termodinamica per i sistemi considerati.

Abbiamo poi visto le rappresentazioni delle trasformazioni dei diagrammi termodinamici.

Poi siamo passati a vedere le proprietà delle sostanze.

Abbiamo definito il calore specifico dividendone l'analisi tra sistemi chiusi e sistemi aperti.

Si arriva alle 4 equazioni di Maxwell che permettono di trovare un'espressione analitica per il  $c_c$  e  $c_d$ , non avendo più bisogno di misurarli. Si arriva a concludere per le espressioni più generali possibile per  $dq$ ,  $du$  e  $ds$  sia per sistemi chiusi che aperti, dove è sufficiente conoscere  $c_p$ ,  $c_v$  e l'equazione di stato del sistema termodinamico considerato.

Abbiamo poi completato il discorso sui diagrammi.

Abbiamo poi visto le relazioni tra  $c_p$  e  $c_v$  attraverso la costante dei gas e l'esponente della isoentropica.

Abbiamo poi visto la relazione con il volume specifico e la pressione arrivando a delle espressioni nel caso dei gas perfetti,

Abbiamo poi visto le esperienze che confermano o meno questi risultati matematici (storicamente è stato il contrario).

- Esperienza di Joule
- Esperienza di Joule-Thompson
- Teorema di Guoj-Stodola

Siamo passati a definire l'exergia .

Abbiamo visto come ricavare le espressioni delle isoentropiche per i gas perfetti.

Abbiamo visto l'esperienza di Andrews.

Abbiamo visto il diagramma pVT e il diagramma di Andrews nel piano hs e Ts.

Qui abbiamo concluso le miscele di aria umida e siamo passati ad i gas reali.

Nella lezione 9 siamo partiti con i gas reali dall'equazione del viriale.

martedì 1 dicembre 2020 - Lezione 28

Abbiamo ricavato l'equazione alle derivate ordinarie nota come equazione di Blasius:

$$f''' + \frac{1}{2} f'' f = 0, \text{ con } f = f(\eta) = \int_0^\eta g d\eta, \text{ con } g = \frac{u}{u_\infty} = f'$$

Abbiamo poi scelto come  $f(\eta)$  una serie di potenze fino alle 11ma.

ABBIAMO DERIVATO FINO ALLA TERZA E SOSTITUITO I PRODOTTI.

FARLO ALMENO UNA VOLTA NELLA VITA

Alla fine abbiamo ottenuto una serie di potenze dove possiamo raccogliere i vari termini che moltiplicano le potenze di  $\eta$ .

$$[\cdot] + [\cdot]\eta + [\cdot]\eta^2 + [\cdot]\eta^3 + \dots = 0 \quad \forall \eta$$

Dovendo quest'espressione essere valida  $\forall \eta$  devono essere nulli tutti i termini tra parentesi, e allora si trova (lo abbiamo già visto alla lezione precedente) che:

- $A_3 = 0$
- $A_4 = 0$
- $A_5 = -\frac{1}{2}A_2^2$
- $A_6 = 0$
- $A_7 = 0$
- $A_8 = \frac{11}{4}A_2^3$
- $A_9 = 0$
- $A_{10} = 0$
- $A_{11} = -\frac{375}{8}A_2^4$

$$\text{In conclusione } f(\eta) = A_2 \frac{\eta^2}{2!} + A_5 \frac{\eta^5}{5!} + A_8 \frac{\eta^8}{8!} + A_{11} \frac{\eta^{11}}{11!}$$

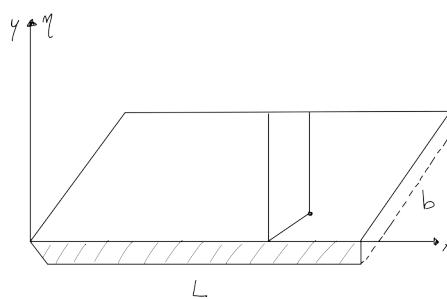
Quindi la soluzione  $f(\eta)$  si può scrivere in maniera più compatta nel seguente modo, tramite la variabile ausiliaria  $\xi$

$$f(\eta) = A_2^{1/3} \cdot F(\xi), \text{ con } F(\xi) = \frac{\xi^2}{2!} - \frac{1}{2} \frac{\xi^5}{5!} + \frac{11}{4} \frac{\xi^8}{8!} - \frac{375}{8} \frac{\xi^{11}}{11!}, \text{ con } \xi = A_2^{1/3} \eta$$

Allora dobbiamo trovare  $A_2$  e lo si fa scrivendo l'ultima condizione al contorno:  $\eta > \delta \rightarrow \infty \implies u = u_\infty$  poiché siamo nel moto indisturbato. Allora  $g = 1$  e quindi  $f'(\eta \rightarrow \infty) = 1$

Calcolando  $f'$  imponiamo questa condizione:

$$f' = \frac{df}{d\eta} = A_2^{1/3} \frac{dF}{d\xi} \frac{d\xi}{d\eta} = A_2^{2/3} \cdot F'(\xi) = 1$$

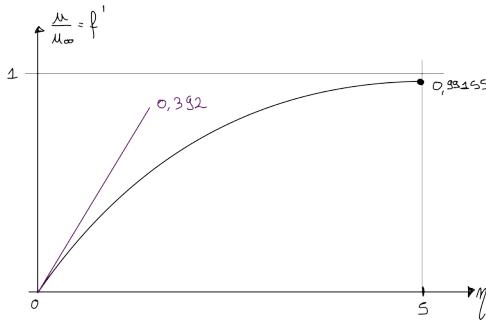


Allora se  $\eta \rightarrow \infty$  cioè  $\xi \rightarrow \infty$ , si ha  $f' = A_2^{2/3} \cdot F'(\xi) = 1$  e allora:

$$A_2^{2/3} = \frac{2}{\lim_{\xi \rightarrow \infty} F'(\xi)} \implies A_2 = \left[ \frac{1}{\lim_{\xi \rightarrow \infty} F'(\xi)} \right]^{3/2}$$

Allora la soluzione  $f(\eta)$  diventa:

$$f(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\lim_{\xi \rightarrow \infty} F'(\xi)}} \cdot F(\xi) \circ f'(\eta) = \frac{F'(\xi)}{\lim_{\xi \rightarrow \infty} F'(\xi)}$$



Graficando trovo l'andamento di tipo esponenziale della variazione della velocità da  $0$  ad un limite  $u = 0,99155 \cdot u_\infty$  in cui si definisce lo strato limite come il 99%.

Quindi per  $\eta = 5 \implies y = \delta$

In questo modo abbiamo trovato la variabile di similarità che in base alla soluzione di Blasius indica quando siamo sullo strato limite.

Per  $\eta = 5 \quad y = \delta \implies \eta = y \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}$  diventa  $5 = \delta \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}$

$$\text{E allora } \delta = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} = \frac{5}{\sqrt{Re_x}} x, \text{ con } Re_x = \frac{u_\infty x}{\nu}$$

Abbiamo trovato una relazione tra lo spessore dello strato limite e  $x$ , poiché fin dall'inizio sapevamo che  $\delta$  era funzione di  $x$ .

Inoltre numericamente si vede come la pendenza della curva  $f'$ , cioè  $f''$  in  $\eta = 0$  è  $0,332$ .

Ovvero  $f''(\eta = 0) = 0,332$ .

Adesso vogliamo calcolare lo sforzo di taglio.

$$\text{Fluido newtoniano } \tau_w(x) = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad \text{con } u = u_\infty g = u_\infty \frac{df}{d\eta}$$

$$\text{Quindi sostituendo ottengo: } \tau_w(x) = \mu u_\infty \frac{d^2 f}{d\eta^2} \Big|_{\eta=0} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \mu u_\infty \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \Big|_{\eta=0} = 0,332 \mu u_\infty \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}, \text{ dove abbiamo}$$

appena visto il valore numerico della derivata seconda di  $f$

Definiamo allora il coefficiente di attrito  $C_{fx}$  in funzione di  $x$  pari a  $\tau$  diviso l'energia cinetica:

$$C_{fx} = \frac{\tau_w(x)}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2} = 2 \frac{u}{\rho} \frac{u_\infty}{u_\infty^2} \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} 0,332 = 0,664 \frac{\nu}{u_\infty} \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} = 0,664 \sqrt{\frac{\nu}{u_\infty x}} = 0,664 \cdot \frac{1}{\sqrt{Re_x}}$$

Poi calcoliamo lo sforzo di taglio medio su tutta la lunghezza  $L$ , considerando una larghezza  $b$ , otteniamo:

$$\tau_w(L) = \frac{1}{bL} \int_0^L \tau_w(x) dx = \frac{1}{L} \int_0^L 0,332 \mu u_\infty \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} dx = \frac{1}{L} 0,332 \mu u_\infty \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{0,664}{L} \mu u_\infty \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} L^{1/2} = 0,664 \cdot \mu u_\infty \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu L}}$$

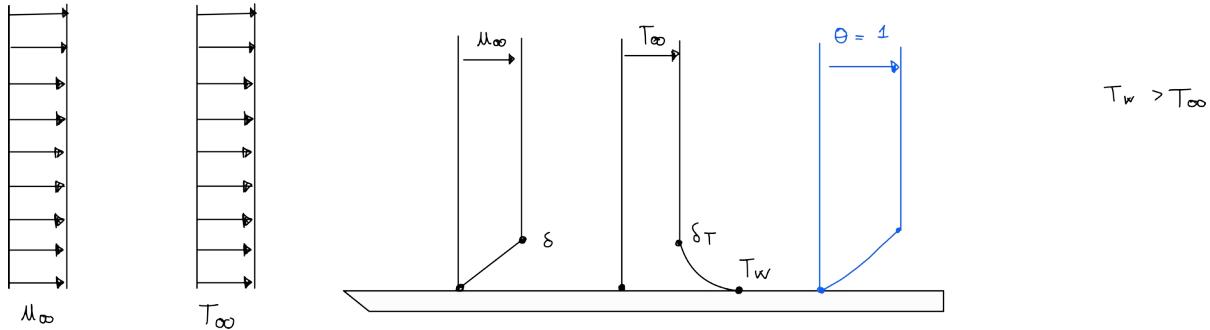
Allora possiamo calcolare il coefficiente d'attrito medio su tutta la lunghezza  $L$ , ovvero:

$$C_{fL} = \frac{\tau_w(L)}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2} = \frac{0,664 \mu u_\infty \sqrt{\frac{u_\infty \rho}{\mu L}}}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2} = 1,328 \sqrt{\frac{\mu}{u_\infty \rho L}} = 1,328 \cdot \frac{1}{\sqrt{Re_L}}, \text{ con } Re_L = \frac{u_\infty L}{\nu}$$

Abbiamo trovato analiticamente che il coefficiente di attrito è proporzionale a  $Re^{-1/2}$

## Problema termodinamico: soluzione di Polhausen

Aggiungiamo al problema fluidodinamico anche il problema termico. Consideriamo una temperatura indisturbata prima dell'attacco sull'ala. L'ala con una temperatura  $T_w$  che va a diminuire nello strato limite termico.



Cerchiamo di trasformare il profilo di temperatura simile al profilo di velocità e lo facciamo definendo  $\theta = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w}$  che varia da 0 (sulla parete) a 1 (indisturbato).

Dalle equazioni di conservazione dell'energia e l'equazione di Blasius della conservazione della quantità di moto abbiamo che :

$$(4) u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \rightarrow u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

$$(2) u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \text{ dove a sinistraabbiamo i termini convettivi mentre a destra i termini diffusivi}$$

Notiamo che se  $\alpha$  fosse uguale a  $\nu$  le due equazioni sarebbero identiche con lo stesso profilo e con lo spessore termico uguale allo spessore  $\delta$ .

Questo significa che se  $\alpha = \nu \implies Pr = 1$ , approssimazione lecita per l'aria e per tutti i gas che hanno  $Pr \approx 0,7$ .

Quindi per l'aria in prima approssimazione posso dire che il profilo di  $\theta$  ovvero dello strato limite termico è uguale allo strato limite dinamico risolto già con l'analisi di Blasius.

Per risolvere l'equazione  $u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$  (4) e quindi il **problema di Polhausen** (problema termico della convezione forzata) consideriamo quanto già visto per Blasius:

$$u = u_\infty f' \text{ e } v = \frac{u_\infty}{2} \sqrt{\frac{\nu}{u_\infty x}} (\eta f' - f)$$

Inoltre, data la similarità dei due problemi supponiamo che anche  $\theta$  sia funzione di  $\eta$

$$\theta = \theta(\eta), \text{ con } \eta = y \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}$$

Calcoliamo allora le derivate di  $\theta$  per sostituirle in (4)

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \theta' \frac{\partial \eta}{\partial x} = \theta' \left( -\frac{1}{2} \right) y \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2} \theta' y \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \frac{1}{x} = -\frac{\theta' \eta}{2x}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \theta' \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \theta'' \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} = \theta'' \frac{u_\infty}{\nu x}$$

Allora sostituendo:

$$-u_\infty f' \cdot \frac{\theta' \eta}{2x} + \theta' \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \frac{u_\infty}{2} \sqrt{\frac{\nu}{u_\infty x}} (\eta f' - f) = \alpha \theta'' \frac{u_\infty}{\nu x}, \text{ cioè:}$$

$$-\frac{u_\infty f' \theta' \eta}{2x} + \theta' \frac{u_\infty \eta f'}{2x} - \theta' \frac{u_\infty}{2x} f = \alpha \theta'' \frac{u_\infty}{\nu x}$$

$$-\frac{1}{2} \theta' f = \frac{\alpha}{\nu} \theta'' = \frac{1}{Pr} \theta''$$

E allora  $\theta''' + \frac{Pr}{2} f \theta' = 0$ , equazione di conservazione dell'energia nel caso di convezione forzata sotto le ipotesi di Blasius.

Si osserva come:

- L'equazione di Blasius  $f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0$  si poteva scrivere come  $\frac{f'''}{f''} = -\frac{f}{2}$
- Anche questa equazione  $\theta''' + \frac{Pr}{2} f \theta' = 0$  si può scrivere come  $\frac{\theta''}{\theta' Pr} = -\frac{f}{2}$

$$\text{E allora } \frac{\theta''}{\theta' Pr} = \frac{g''}{f''} \rightarrow Pr \frac{f'''}{f''} = \frac{\theta''}{\theta'}$$

Quindi abbiamo trovato una equazione con le derivate ordinarie che può essere integrata con l'introduzione di 2 funzioni ausiliarie  $\theta' = \phi$  e  $F = f''$

$$\text{Allora } Pr \frac{F'}{F} = \frac{\phi'}{\phi}$$

Integrandi:

$$Pr \cdot \ln(F) = \ln(\phi) \rightarrow (F)^{Pr} = \phi = \theta'$$

$$\text{Allora } \theta = c_1 \int_0^\eta F^{Pr} d\eta + c_2 = c_1 \int_0^\eta (f'')^{Pr} d\eta + c_2, \text{ quindi la soluzione } f \text{ di Blasius è necessaria per calcolare } \theta$$

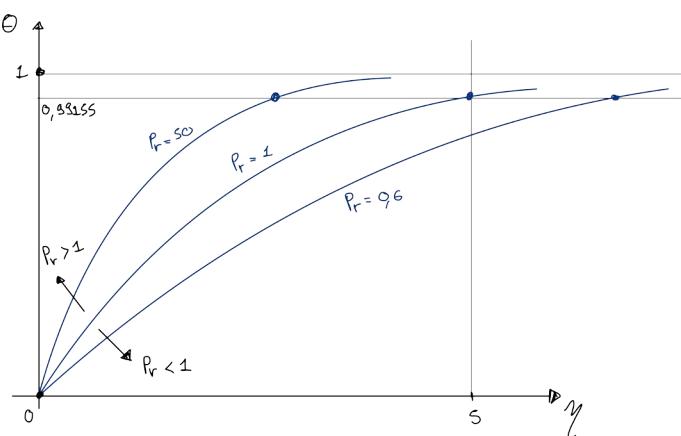
Imponendo le 2 condizioni al contorno:

- Per  $y = 0$ , cioè  $\eta = 0$  si ha  $\theta = 0 = c_2$  e allora  $c_2 = 0$

- Per  $y \rightarrow \infty$ , cioè nella zona indisturbata per  $\eta$  molto grande si ha  $\theta = 1 = c_1 \int_0^\infty (f'')^{Pr} d\eta$  e allora  $c_1 = \frac{1}{\int_0^\infty (f'')^{Pr} d\eta}$

E allora la soluzione  $\theta$  è  $\theta = \frac{\int_0^\eta (f'')^{Pr} d\eta}{\int_0^\infty (f'')^{Pr} d\eta}$  e quindi la soluzione di Polhausen si basa sulla soluzione di Blasius per la  $f''$

Al variare di  $Pr$  si trovano dei risultati diversi, nel grafico rappresentiamo  $1 - \theta$  o  $\theta$ .



Nel caso di  $\theta$  e  $Pr = 1$  ritroviamo lo stesso andamento della velocità (Blasius) mentre per  $Pr > 1$  troviamo la curva a sinistra e per  $Pr < 1$  la curva sta a destra.

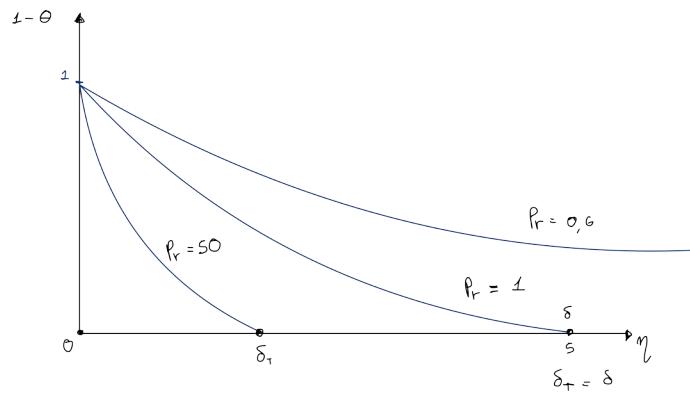
Quindi per  $Pr = 1$  lo strato limite termico è uguale allo strato limite dinamico.

Per  $Pr > 1$  come l'acqua o olio lo strato limite termico è più piccolo dello strato limite dinamico  $\eta < 5$ .

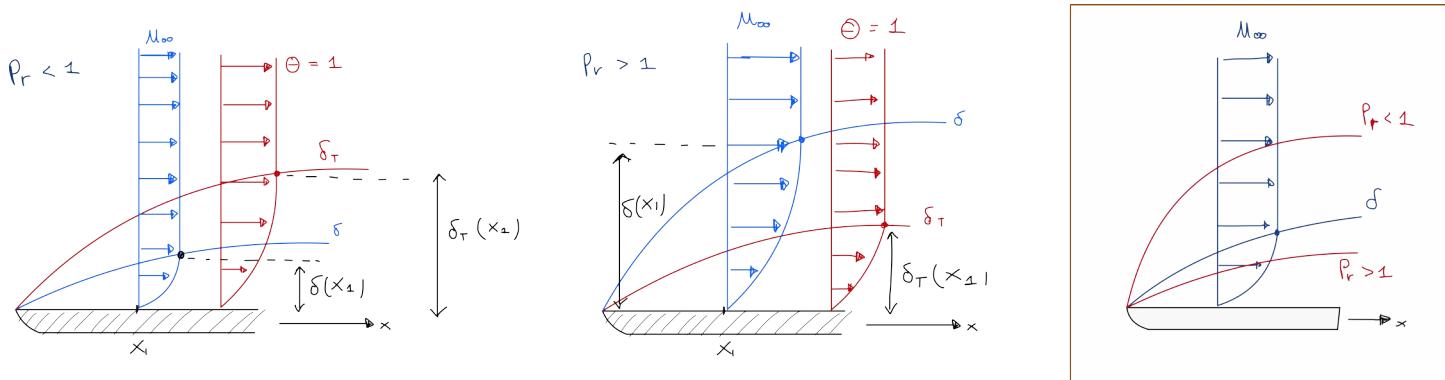
Viceversa per  $Pr < 1$  come per i metalli liquidi lo strato limite termico è più grande.

Invece rappresentando  $1 - \theta$  rappresenta lo stesso concetto:

$$\text{Cioè } 1 - \theta = 1 - \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} = \frac{T_\infty - T_w - T + T_w}{T_\infty - T_w} = \frac{T_\infty - T}{T_\infty - T_w}$$



- $\ln \eta = 0$ , cioè sulla parete,  $Y = t_w \rightarrow \theta = 0 \Rightarrow 1 - \theta = 1$
- $\ln \eta = 5$ , cioè sullo strato limite,  $T = T_\infty \rightarrow \theta = 1 \Rightarrow 1 - \theta = 0$ , questo è vero se  $Pr \approx 1$ , e quindi il profilo di temperatura è pari al profilo di velocità



Possiamo allora calcolare anche il flusso di calore alla parete ovvero  $k \frac{\partial T}{\partial y}$  ed essendo nota la distribuzione di temperatura :

$$\left| \frac{\dot{Q}}{S} \right| = \left| \dot{Q}'' \right| = k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = k (T_\infty - T_w) \cdot \theta' \Big|_{\eta=0} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}}_{=\frac{\partial \theta}{\partial y}}$$

Dove è stato calcolato numericamente che:

$$\theta' \Big|_{\eta=0} = \begin{cases} 0,564 Pr^{1/3} & \text{se } Pr \ll 1 \\ 0,332 Pr^{1/3} & \text{se } Pr = 0,6 \div 15 \text{ (aria e H}_2\text{O)} \\ 0,339 Pr^{1/3} & \text{se } Pr \gg 1 \end{cases}$$

Allora il coefficiente  $h_x$  è dato da:  $|h_x| = \frac{|\dot{Q}''|}{T_\infty - T_w} = 0,332 k Pr^{1/3} \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}$

E il numero di Nusselt:  $Nu_x = \frac{h_x x}{k} = 0,332 Pr^{1/3} \sqrt{\frac{u_\infty x}{\nu}} = 0,332 Pr^{1/3} Re^{1/2}$

Questo risultato di Polhausen ci dice che nel caso di convezione forzata laminare su lastra piana. Conferma anche i risultati trovati con l'analisi dimensionale  $Nu = \text{cost} \cdot Pr^{1/3} \cdot Re^{1/2}$

Inoltre per il numero di Nusselt medio su tutta la lunghezza si trova  $Nu = 0,664 Pr^{1/3} Re_L^{1/2}$

# Soluzione di Von Karman - Polhausen

Considerando anche il problema della convezione formata su lastra piana, per il quale avevamo trovato le seguenti espressioni per la conservazione della massa e dell'energia:

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$(2) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Ora, a differenza di Blasius, imponiamo che  $\frac{dp}{dx} \neq 0$ .

Se applichiamo la conservazione della quantità di moto al di fuori dello strato limite otteniamo:

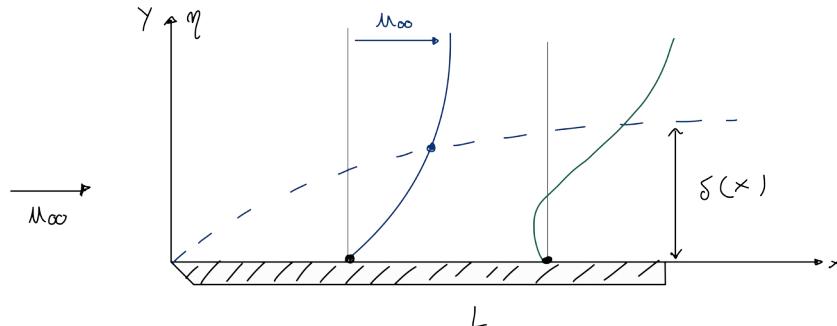
$$u_\infty \frac{\partial u_\infty}{\partial x} = - \frac{dp}{dx} \neq 0 \quad (*)$$

Il problema è stato risolto prendendo un profilo polinomiale di velocità del seguente tipo:

$$\frac{u}{u_\infty} = \alpha + b\eta + c\eta^2 + d\eta^3 + e\eta^4, \text{ con } \eta = \frac{y}{\delta(x)}$$

Con  $u_\infty$  velocità indisturbata e  $u$  generica velocità dentro lo strato limite.

Dove assumiamo che per  $y = \delta \Rightarrow u = u_\infty$  (100 %)



Le condizioni al contorno di questo problema sono:

1. Se  $y = 0$  cioè  $\eta = 0 \rightarrow u = 0$
2. Sullo strato limite, se  $y = \delta$  cioè  $\eta = 1 \rightarrow u = u_\infty$  (100%)
3. Nella zona di profilo indisturbato, se  $y \geq \delta$  cioè  $\eta \geq 1 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
4. Sempre per  $y \geq \delta$  cioè  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
5. Se  $y = 0$  cioè  $\eta = 0 \rightarrow (2) \frac{dp}{dx} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv -u_\infty \frac{\partial u_\infty}{\partial x}$  con  $\frac{\partial u_\infty}{\partial x}$  nota una volta imposto il problema.

Imponendo le condizioni al contorno otteniamo:

$$1. \quad a = 0$$

$$2. \quad 1 = b + c + d + e$$

$$3. \quad \frac{\partial u}{\partial u} = u_\infty \left( \frac{b}{\delta} + \frac{2c\eta}{\delta} + \frac{3d\eta^2}{\delta} + \frac{4e\eta^3}{\delta} \right) = 0 \text{ per } \eta = 1 \text{ e } 0 = b + 2c + 3d + 4e$$

$$4. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_\infty \left( \frac{2c}{\delta^2} + \frac{3d \cdot 2\eta}{\delta^2} + \frac{4e \cdot 3\eta^2}{\delta} \right) = 0 \text{ per } \eta = 1 \text{ e } 0 = 2c + 6d + 12e$$

$$5. \quad n \frac{u_\infty}{\delta^2} (2c + 6d\eta + 12e\eta^2) = -u_\infty \frac{\partial u_\infty}{\partial x} \text{ per } \eta = 0 \frac{\nu \cdot 2c}{\delta^2} = -\frac{\partial u_\infty}{\partial x} \rightarrow 2c = -\frac{\delta^2}{\nu} \frac{\partial u_\infty}{\partial x} = \frac{\delta^2}{u_\infty \nu} \frac{dp}{dx} = -\lambda$$

e così possiamo legare il coefficiente incognito  $c$  con  $dp/dx$ , cioè con  $\frac{\partial u_\infty}{\partial x}$  che sono dei dati di ingresso che vanno imposti. Cioè  $\lambda = -2c$ , con  $\lambda = \frac{\delta^2}{u_\infty \nu} \frac{dp}{dx}$

E allora mettiamo a sistema le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} c = -\frac{\lambda}{2} \\ b + c + d + e = 1 \\ b + 2c + 3d + 4e = 0 \\ 2c + 6d + 12e = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\lambda + 6d + 12e = 0 \\ -\lambda + b + 3d + 4e = 0 \\ -\frac{\lambda}{2} + b + d + e = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = \frac{\lambda}{6} - 2e \\ -\lambda + b + \frac{\lambda}{2} - 6e + 4e = 0 \\ -\frac{\lambda}{2} + n + \frac{\lambda}{5} - 2e + 3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = \frac{\lambda}{6} - 2e \\ b - 2e - \frac{\lambda}{2} = 0 \\ b - e - \frac{\lambda}{3} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = \frac{\lambda}{6} - 2e \\ b = 2e + \frac{\lambda}{2} \\ 2e + \frac{\lambda}{2} - e - \frac{\lambda}{3} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e = 1 - \frac{\lambda}{6} \\ d = \frac{\lambda}{6} - 2 + \frac{\lambda}{3} = \frac{\lambda}{2} - 2 \\ b = 2 - \frac{\lambda}{3} + \frac{\lambda}{2} = 2 + \frac{\lambda}{6} \end{cases}$$

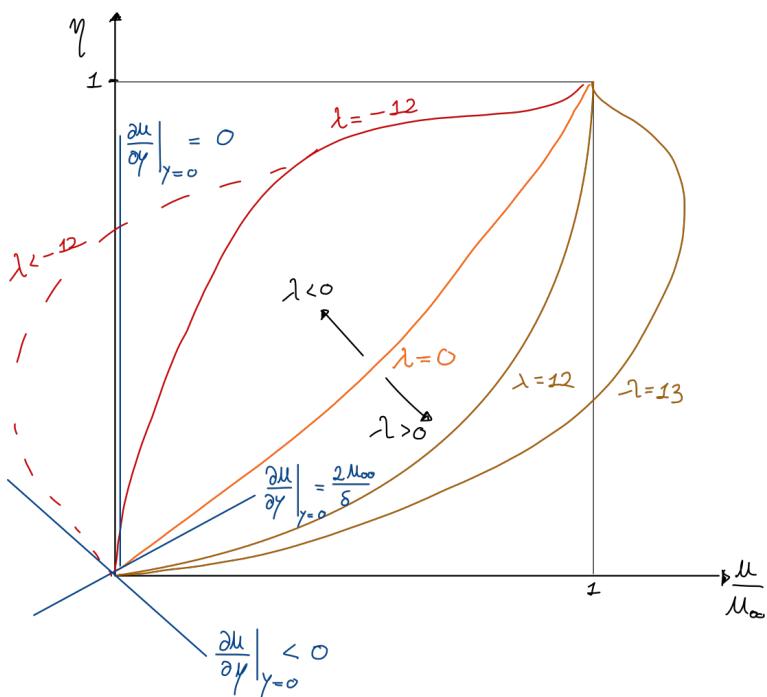
E allora la funzione profilo di velocità è

$$\frac{u}{u_\infty} = \left(2 + \frac{\lambda}{6}\right)\eta + \left(-\frac{\lambda}{2}\right)\eta^2 + \left(\frac{\lambda}{2} - 2\right)\eta^3 + \left(1 - \frac{\lambda}{6}\right)\eta^4 = [2\eta - 2\eta^3 + \eta^4] + \lambda \frac{\eta}{6} \underbrace{[1 - e\eta + 3\eta^2 - \eta^3]}_{(1-\eta)^3}$$

Quindi  $\frac{u}{u_\infty} = F(\eta) + \lambda G(\eta)$ , con  $\begin{cases} F(\eta) = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4 \\ G(\eta) = \frac{\eta}{6}(1-\eta)^3 \end{cases}$  e  $\lambda = \frac{\partial u_\infty}{\partial x} \frac{\delta^2}{\nu}$

Per  $\lambda = 0$  otteniamo nuovamente la soluzione di Blasius (in arancione).

Si osservi che nel grafico si ha  $\eta$  sulla ordinata e  $\frac{u}{u_\infty}$  sulle ascisse.



Per  $\lambda > 12$  si trova  $u > u_\infty$ , cosa impossibile e quindi  $\lambda < 12$ .

Per  $\lambda < 0$  il profilo sta a sinistra di quello per  $\lambda = 0$ , si trova che per  $\lambda = -12$  se valutiamo la pendenza della curva al bordo di attacco si trova

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{u=0} = \frac{du}{d\eta} \Big|_{\eta=0} = \frac{u_\infty}{6\delta} (\lambda + 12)$$

quindi tale derivata è nulla e il profilo è tangente (in blu)

Quindi per  $\lambda < -12$  si trova un profilo a sinistra, quindi con  $u < 0$  che risulta nuovamente impossibile.

Allora abbiamo identificato i limiti di  $-12 \leq \lambda \leq 12$

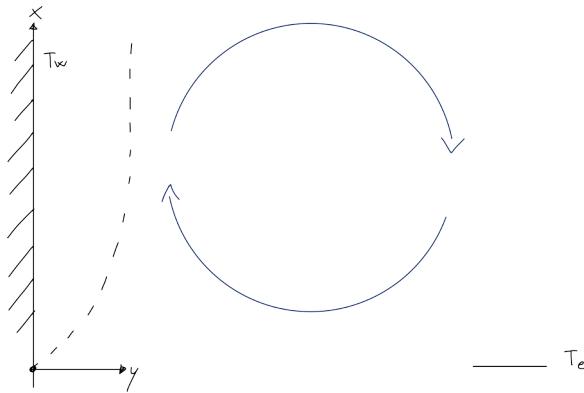
# Convezione naturale

Ricordiamo le equazioni introdotte nel caso della convezione naturale:

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$(2) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g\beta (T - T_e) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$(4) \quad u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$



Consideriamo quindi il piano del foglio  $xy$  con la parete verticale a temperatura  $T_w$  e il fluido a temperatura  $T_e < T_w$  a grande distanza. Abbiamo visto lo strato termico limite con la temperatura che diminuisce fino a tendere a  $T_e$  a grande distanza.

Il fluido più caldo sale e si forma questo movimento per convezione naturale.

Continuiamo a supporre  $\rho = \text{cost}$ , cioè che considero sempre un moto abbastanza piccolo da considerare il moto incomprimibile (anche se il fluido è comprimibile). La differenza di densità si vede nel termine che provoca il moto del fluido  $g\beta(T - T_e)$ .

Gli altri termini sono gli stessi che avevamo in Blasius e nel problema di Polhausen.

Le prime due equazioni di Blasius erano soltanto funzioni di  $u$  e  $v$  ma non della temperatura e infatti per Polhausen abbiamo supposto di risolvere prima le prime due con Blasius e poi la terza. Adesso non sono più separabili in due gruppi in quanto anche la seconda ha l'incognita  $T$  come la terza.

Introduciamo al solita  $\theta = \frac{T - T_e}{T_w - T_e}$  riscrivendo la conservazione dell'energia come con Polhausen.

$$(4) \quad u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

Riscriviamo anche la conservazione della quantità di moto

$$(2) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g\beta\theta(T_w - T_e) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

per la conservazione della massa la eliminiamo introducendo la funzione di corrente  $\psi$  che ne tiene automaticamente conto

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ e } v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Inoltre ho supposto che il profilo di velocità sia funzione di una variabile di similarità  $\eta$  che deve essere definita:  $\frac{u}{u_\infty} = f(\eta)$

Avendo introdotto la  $\psi$  la conservazione della massa è sempre soddisfatta mentre la (4) e (2) diventano:

$$(4) \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

$$(2) \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \left[ g\beta(T_w - T_e) \right] \theta + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$$

A questo punto Polhausen ha proposto di prendere una variabile di similarità  $\eta$  nel seguente modo (diversa dal caso di Blasius)

$$\eta = c \frac{y}{x^{1/4}} \text{ con la costante } c = \left[ \frac{g\beta(T_w - T_e)}{4\nu^2} \right]^{\frac{1}{4}}$$

E la funzione di corrente:

$$\psi(x, y) = 4\nu cx^{3/4} \cdot f(\eta)$$

$$\text{Allora si definisce anche } \frac{u}{u_\infty} = g = g(\eta) = g\left(c \frac{y}{x^{1/4}}\right)$$

Applichiamo  $\psi$  alla conservazione della quantità di moto

$$u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g\beta(T - T_e) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = g\beta\theta(T_w - T_e) + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \star$$

$$- \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [4\nu x^{3/4} f(\eta)] = 4\nu cx^{3/4} \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 4\nu c^2 x^{1/2} f'$$

$$\text{Dove } \begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{c}{x^{1/4}} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{yc}{4x^{5/4}} \end{cases}$$

$$- \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 4\nu c^2 x^{1/2} f'' \frac{\partial \eta}{\partial y} = 4\nu c^3 x^{1/4} f''$$

$$- \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{3}{4} f 4\nu cx^{-1/4} + 4\nu cx^{3/4} f' \frac{\partial \eta}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{3}{4} \cancel{4\nu c f x^{-1/4}} + \cancel{4\nu c x^{3/4}} \left( -\frac{yc}{4x^{5/4}} \right) f' = 3\nu c f x^{-1/4} - yc^2 \nu x^{-1/2} f'$$

$$- \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 2\nu c^2 f' x^{-1/2} - 4\nu c^2 x^{1/2} f'' \frac{yc}{4x^{5/4}} = 2\nu c^2 f' x^{-1/2} - \nu c^3 u x^{-3/4} f''$$

$$- \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = 4\nu c^3 x^{1/4} f''' \frac{c}{x^{1/4}} = 4\nu c^4 f'''$$

$$- g\beta(T_w - T_e) \theta = c^4 4\nu^2 \theta, \text{ dalla definizione di } c$$

E quindi sostituendo tutto in  $\star$  si ottiene:

$$(4\nu c^2 x^{1/2} f') \cdot (2\nu c^2 f' x^{-1/2} - \nu c^3 y x^{-3/4} f'') - (3\nu c f x^{-1/4} - yc^2 \nu x^{-1/2}) (4\nu c^3 x^{1/4} f'') = g\beta(T_w - T_e) + \nu 4\nu c^4 f'''$$

$$8\nu^2 c^4 f' f' - 4\nu c^5 y x^{-1/4} f' f'' - 12\nu^2 c^4 x^0 f'' f + 4yc^6 \nu^2 x^{-1/4} f' f'' = g\beta(T_w - T_e) + 4\nu^2 c^4 f'''$$

$$8\nu^2 c^4 f' f' - 12\nu^2 c^4 f f'' = 4c^4 \nu^2 \theta + 4c^4 \nu^2 f'''$$

$$2(f')^3 - 3(f f'') = \theta + f''', \text{ cioè } \frac{d^3 f}{d\eta^3} + 3f \frac{d^2 f}{d\eta^2} - 2 \left( \frac{df}{d\eta} \right)^2 + \theta = 0$$

Stessa cosa per l'equazione dell'energia:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \text{ con } \begin{cases} \partial T \rightarrow \partial \theta \\ u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{si trova } \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \frac{\partial \theta}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \\ v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

$$\text{Scrivendo } \theta \text{ come funzione della variabile } \eta \rightarrow \theta = \theta(\eta) \text{ e ricordando che } \begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{yc}{4x^{5/4}} \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{c}{x^{1/4}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} - \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{d\theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = cx^{-1/4} \theta' \\ - \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\theta' yc \frac{1}{4} x^{-5/4} \\ - \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} &= cx^{-1/4} \theta'' cx^{-1/4} = c^2 \theta'' x^{-1/2} \end{aligned}$$

Sostituendo:

$$4\nu c^2 x^{1/2} f' \left( -yc \frac{1}{4} x^{-5/4} \right) \theta' - (3\nu c f x^{-1/4} - yc^2 \nu x^{-1/2} f') cx^{-1/4} \theta' = \alpha c^2 x^{-1/2} \theta''$$

$$\begin{aligned} -\nu c^3 y x^{-3/4} f' \theta' - 3c^2 \nu f x^{-1/2} \theta' + y c^3 \nu x^{-3/4} f' \theta' &= \alpha c^2 x^{-1/2} \theta'' \\ -3\cancel{\epsilon}^2 \nu f x^{-1/2} \theta' &= \alpha \cancel{\epsilon}^2 x^{-1/2} \theta'' \xrightarrow{\frac{\nu}{\alpha} = Pr} \theta'' + 3 Pr f \theta' = 0 \end{aligned}$$

Dove si trova alla fine  $\frac{d^2\theta}{d\eta^2} + 3 Pr f(\eta) \left( \frac{d\theta}{d\eta} \right) = 0$

In conclusione si arriva a queste due equazioni:

$$\begin{cases} f''' + 3f \cdot f'' - 2(f')^2 + \theta = 0 \\ \theta'' + 3 Pr f \cdot \theta' = 0 \end{cases}$$

E si esprimono le condizioni al contorno, cioè:

—> aderenza alla parete:

$$\begin{cases} I \quad x = y = o \rightarrow \eta = 0, u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 = 4\nu c^2 x^{1/2} f' \rightarrow I \quad \begin{cases} \eta = 0 \\ \frac{df}{d\eta} \Big|_{\eta=0} = 0 \end{cases} \\ II \quad x = y = 0 \rightarrow \eta = 0, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 = 3\nu c f x^{-1/4} \rightarrow II \quad \begin{cases} \eta = 0 \\ f \Big|_{\eta=0} = 0 \end{cases} \\ III \quad \eta = 0 \quad T = T_w \rightarrow \begin{cases} \eta = \\ \theta \Big|_{\eta=0} = 1 \end{cases} \end{cases}$$

—> condizione di strato limite:

$$IV \quad \eta \rightarrow \infty, u \rightarrow 0, \frac{\partial \psi}{\partial u} = 4\nu c^2 x^{1/2} f' \rightarrow 0 \rightarrow \begin{cases} \eta \rightarrow \infty \\ \frac{df}{d\eta} \Big|_{\eta \rightarrow \infty} = 0 \end{cases}$$

—> condizione di equilibrio idrostatico  $V \quad \eta \rightarrow \infty, \quad T = T_e \rightarrow \begin{cases} \eta \rightarrow \infty \\ \theta \Big|_{\eta \rightarrow \infty} = 0 \end{cases}$

E SI ARRIVA AI RISULTATI CHE COMMENTEREMO ALLA PROSSIMA LEZIONE.

mercoledì 2 dicembre 2020 - Lezione 29

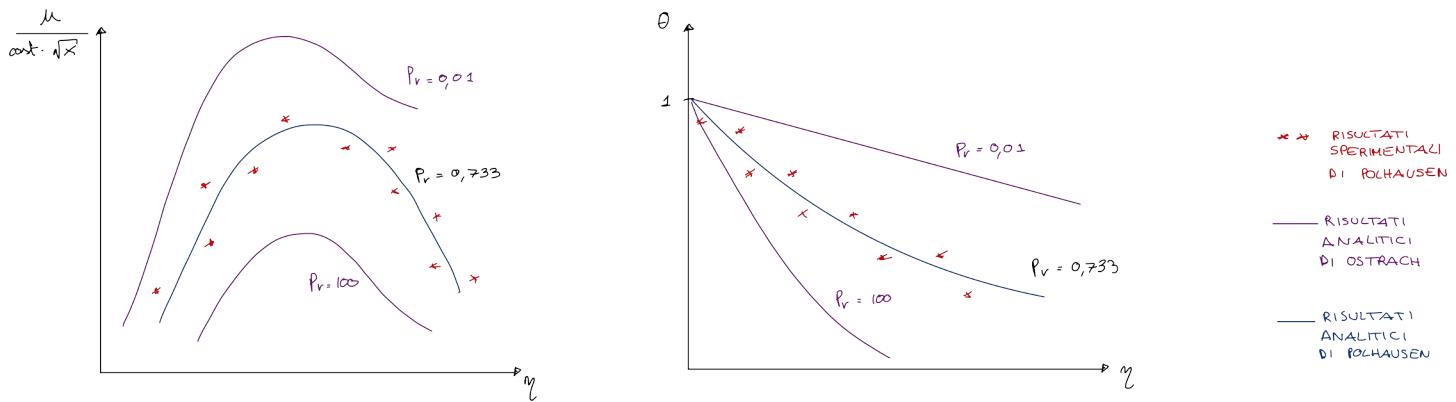
Riprendendo il discorso della lezione precedente per la soluzione di Polhausen.

Eravamo arrivati all'equazione della conservazione della quantità di moto  $\frac{d^3f}{d\eta^3} + 3 \cdot f \frac{d^2f}{d\eta^2} - 2 \left( \frac{df}{d\eta} \right)^2 + \theta = 0$ .

E per la conservazione dell'energia arrivando a  $\frac{d^2\theta}{d\eta^2} + 3 \cdot Pr \cdot f(\eta) \left( \frac{d\theta}{d\eta} \right) = 0$

Su queste dobbiamo considerare le condizioni al contorno.

Facendo una soluzione numerica e riportando i grafici delle velocità adimensionali rispetto  $\sqrt{x}$  in funzione di  $\eta$  e di  $\theta$  in funzione di  $\eta$  abbiamo che:



Polhausen ricavò la soluzione nera negli anni 30 per l'aria, quindi con  $Pr = 0,733$  e la confrontò con dei dati sperimentali. Successivamente Ostrach estese ad altri valori di  $Pr$ .

Facendo l'analisi della convezione forzata è stato introdotto il numero di Rayleigh  $Gr_x = Gr_x \cdot Pr_x$ .

$$Gr_x = \frac{\beta g \Delta T x^3}{\nu^2} \text{ e } c = \left[ \frac{g \beta (T_w - T_e)}{4 \nu^2} \right]^{1/4} \rightarrow c^4 = \frac{g \beta \Delta T}{4 \nu^2} = \underbrace{\frac{1}{\nu^2}}_{Gr_x} \frac{1}{4x^3}$$

$$c^4 = \frac{Gr_x}{4x^3} \rightarrow c = \left( \frac{Gr_x}{4x^3} \right)^{1/4} \rightarrow \eta = c \frac{y}{x^{1/4}} = \frac{y}{x} \left( \frac{Gr_x}{4} \right)^{1/4}$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 4\nu c^2 x^{1/2} f' = 4\nu \sqrt{\frac{Gr_x}{4x^3}} = \sqrt{x} \cdot f' = 4\nu \sqrt{\frac{\beta g \Delta T x^3}{4 \nu^2} \frac{x}{x^3}} \cdot f'$$

$$f' = \frac{u}{2\sqrt{\beta g \Delta T x}} = \frac{u}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{\beta g \Delta T}} = \frac{u}{\left( 2\sqrt{\beta g \Delta T} \right) \sqrt{x}}$$

Ecco perchè nel grafico è riportato in ordinata la quantità  $\frac{u}{\text{cost} \cdot \sqrt{x}}$  ed in ascissa  $\eta \propto x^{-1/4}$

GLI APPUNTI SEGUENTI CONTENENTI LA DICITURA "LORENZ" SONO FACOLTATIVI PER CHI VUOLE APPROFONDIRE.

L'ULTIMO ARGOMENTO DEL CORSO SONO I FENOMENI DI TRASPORTO E I TRASPORTI DI MASSA QUINDI CON LA LEGGE DI FICK.

LA PARTE DI LORENZ CHE SEGUVE È FACOLTATIVA MA È CULTURA GENERALE E ADESSO CI VERRÀ ILLUSTRATA.

## Modello di Lorenz

Tutto nasce con Lorenz, un meteorologo del Massachusetts Institute of Technology, che nel 1963 pubblicò un lavoro su un giornale sconosciuto che rimase sconosciuto per diversi anni. Diventò famoso all'inizio degli anni 70 e su questo ci "ricavarono" tantissimo diverse persone.

Lorenz è partito dalle equazioni (7.3.1) ovvero l'eq di conservazione della massa, (7.3.2) conservazione quantità di moto e (7.3.3) conservazione dell'energia. C'è anche la dipendenza del tempo.

Si parla di convezione naturale con  $\rho = \text{cost}$  (moto incomprimibile).

Sono 4 equazioni in 4 incognite  $u, w, p$  e  $T$ , problema determinato ma impossibile da risolvere analiticamente.

Si possono risolvere numericamente.

Negli 60 c'erano i primi calcolatori tra cui al MIT.

Introdotta la funzione di corrente (7.3.4) e le condizioni al contorno (7.3.5).

VOLENDO CONSIDERARE L'ARGOMENTO FACOLTATIVO NON È NECESSARIO SAPERE TUTTI I PASSAGGI.

Poi si riscrivere la conservazione della quantità di moto () e la conservazione dell'energia () .

Si arriva alla fine alla conservazione dell'energia con il numero di Rayleigh () .

In conclusione rielaborando le tre equazioni: sostituendo (7.3.23) in (7.3.11) e (7.3.12) si arriva alle equazioni di Lorenz:

$$\dot{X} = -\sigma X + \sigma Y$$

$$\dot{Y} = rX - Y - XZ$$

$$\dot{Z} = -bZ + XY$$

Equazioni in tre variabili legate alle velocità lungo  $x$  e  $z$  e alla temperatura di parametri  $\sigma = Pr$  (numero di Prandtl) e  $r = Ra$  (numero di Rayleigh) e un parametro geometrico  $b$  legato alle celle di convezione (e quindi alla temperatura).

Lorenz le ha risolte numericamente con il linguaggio di allora (Fortran) trovando la soluzione in Fig 5.2.1. Questo è il diagramma delle fasi.

Se la soluzione avesse portato ad una soluzione unica stazionaria partendo da un punto avremmo ottenuto un'unica curva con inizio e fine.

Invece la curva trovata da Lorenz ha una forma particolare per cui se soluzioni continuano a variare con il tempo che si vede bene nella figura 5.2.2 che mostra tutte le oscillazioni della variabile  $X$  nel tempo.

Questo è in sintesi quello che significa avere una soluzione caotica.

Da qui viene fuori la teoria del Caos che per certe problematiche pur conoscendo le condizioni iniziali non si conoscono le condizioni finali ma continuano a variare.

Lorenz disse che questa problematica equivaleva al fatto che delle instabilità in un luogo (battito delle ali di una farfalla all'equatore) poteva provocare delle instabilità che si amplificano fino ad arrivare all'uragano all'equatore.

Questo comportamento caotico di Lorenz è stato trovato esplicitamente per  $Ra = 38$ ,  $Pr = 10$  e  $b = 8/3$ , per valori diversi non c'è questo andamento ma la soluzione è molto precisa.

Mentre per l'aria  $Pr \approx 0.7$  per l'acqua abbiamo  $Pr \approx 10$ , quindi lui ha trovato il caos per l'acqua e non per l'aria. Ha fatto questo errore perchè era un fisico e non aveva studiato fisica tecnica quindi il battito delle ali della farfalla nell'aria non può essere verificato.

È stata costruita tutta la scienza del caos adesso ma le premesse dovevano essere che il caos avviene in acqua e non in aria.

### 7.3 Lorenz model

Barry Saltzman reduced the three-dimensional convection problem to a two-dimensional one (Saltzman, 1962) by assuming that the Bénard cells in the  $x, z$ -plane evolve independently of the  $y$ -coordinate direction, i.e. that the roll pattern remains constant respectively homogeneous in the  $y$ -direction (fig. 7.0.2). Formally, this means that the velocity component in the  $y$ -direction and all derivatives  $\partial/\partial y$  vanish. With this assumption, the basic hydrodynamic equations, equ. (7.2.2) to (7.2.4), are simplified considerably. Setting

$$x = x_1, \quad z = x_3, \quad u = v_1, \quad w = v_3$$

we establish for the two-dimensional convection problem the following basic equations in component notation

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (7.3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \quad (7.3.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\rho}{\rho_0} g - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w \quad (7.3.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \chi \nabla^2 T \quad (7.3.3)$$

For this two-dimensional case, the introduction of a stream function  $\psi(x, z, t)$  suggests itself and yields the velocities

$$u = - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (7.3.4)$$

The two-dimensional continuity condition, equ. (7.3.1), is thus automatically satisfied. Starting from the boundary conditions for the temperature

$$\begin{aligned} T(x, z, t)|_{z=0} &= T_0 + \Delta T \\ T(x, z, t)|_{z=h} &= T_0 \end{aligned} \quad (7.3.5)$$

we postulate a deviation  $\theta(x, z, t)$  from a linear temperature profile. This leads to the following expression for the temperature field  $T(x, z, t)$

$$T(x, z, t) = T_0 + \Delta T \left( 1 - \frac{z}{h} \right) + \theta(x, z, t) \quad (7.3.6)$$

Substitution of equs. (7.2.1) and (7.3.6) in equs. (7.3.8) and (7.3.3) yields the basic equations of the convection model

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi) - \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2\psi) + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}(\nabla^2\psi) - g\alpha\frac{\partial\theta}{\partial x} - \nu\nabla^4\psi = 0 \quad (7.3.9)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\left(\frac{\partial\theta}{\partial z} - \frac{\Delta T}{h}\right) - \chi\nabla^2\theta = 0 \quad (7.3.10)$$

Equations (7.3.9) and (7.3.10) can be further simplified if we express the non-linear convective terms in the form of the Jacobi operator

$$\frac{\partial(a, b)}{\partial(x, z)} = \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial b}{\partial x}$$

In this way, we obtain the initial equations which E. N. Lorenz used for his numerical experiments and which led him to the revolutionary realisation that deterministic equations can indeed exhibit irregular motion behaviour (Saltzman, 1962; Lorenz, 1963). The final expressions are

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi = -\frac{\partial(\psi, \nabla^2\psi)}{\partial(x, z)} + \nu\nabla^4\psi + g\alpha\frac{\partial\theta}{\partial x} \quad (7.3.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta = -\frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(x, z)} + \frac{\Delta T}{h}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \chi\nabla^2\theta \quad (7.3.12)$$

Using the following dimensionless quantities marked with an asterisk \*

$$\begin{aligned} x &= hx^* & \nabla^2 &= \left(\frac{1}{h^2}\right)\nabla^{*2} \\ z &= hz^* & \psi &= \chi\psi^* \\ t &= \frac{h^2}{\chi}t^* & \theta &= \left(\frac{\chi\nu}{g\alpha h^3}\right)\theta^* \end{aligned} \quad (7.3.13)$$

we obtain from equs. (7.3.11) and (7.3.12) the following relations for the stream function  $\psi^*$  and the temperature deviation  $\theta^*$

$$\frac{\partial}{\partial t^*}\nabla^{*2}\psi^* = -\frac{\partial(\psi^*, \nabla^{*2}\psi^*)}{\partial(x^*, z^*)} + \sigma\frac{\partial\theta^*}{\partial x^*} + \sigma\nabla^{*4}\psi^* \quad (7.3.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t^*}\theta^* = -\frac{\partial(\psi^*, \theta^*)}{\partial(x^*, z^*)} + Ra\frac{\partial\psi^*}{\partial x^*} + \nabla^{*2}\theta^* \quad (7.3.15)$$

In the last two equations, two new dimensionless quantities emerge

$$\sigma = \frac{\nu}{\chi}, \quad \text{the Prandtl number,} \quad (7.3.16)$$

which plays a subordinate role in this case, and

$$Ra = \frac{g\alpha h^3 \Delta T}{\chi \nu} , \quad \text{the Rayleigh number} \quad (7.3.17)$$

The Rayleigh number, which depends on the material characteristics  $\alpha, \chi$  and  $\nu$ , the geometry  $h$  and the prescribed external temperature difference  $\Delta T$ , plays the role of a control parameter in the Bénard problem.

If we substitute equ. (7.3.23) in the initial relations equs. (7.3.11) and (7.3.12), then, after algebraic transformations and the introduction of appropriate scaled quantities, we obtain the so-called Lorenz equations

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -\sigma X + \sigma Y \\ \dot{Y} &= r X - Y - X Z \\ \dot{Z} &= -b Z + X Y\end{aligned}$$

## 5.2 Strange attractor: Lorenz attractor

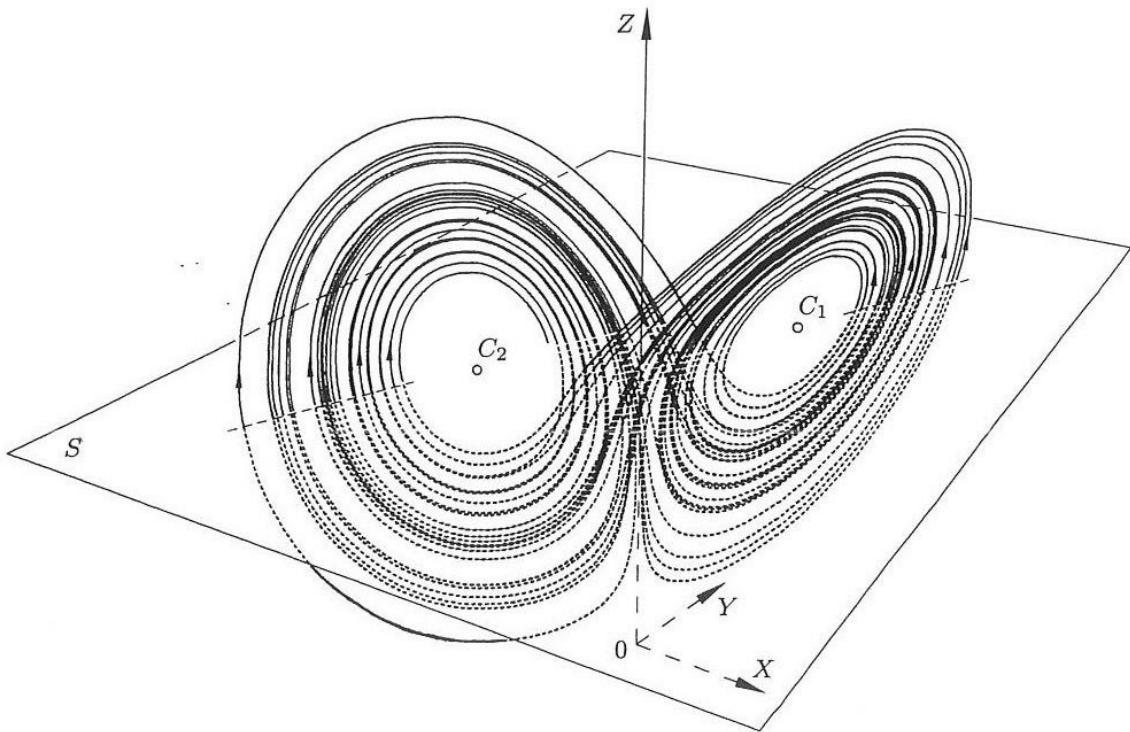
In this section, we discuss the manifestation of the strange attractor respectively chaotic determinism, using the now famous Lorenz attractor as an example. The concept “strange” attractor was coined by Ruelle and Takens (1971) in their paper “On the Nature of Turbulence” in which they expounded the reasons why the “Landau scenario” is false as an interpretation of the onset of turbulence. It was their intention to describe turbulence not as the superposition of an infinite number of modes but as a “strange” attractor. The word “strange” is intended to make it clear that this attractor is neither a fixed point, a limit cycle nor a torus and that it does not form a manifold. What does define it? We shall attempt to explain this using the example of the Lorenz attractor.

Relying on prior work of Saltzman (Saltzman, 1962), Lorenz, a meteorologist working on weather models, reduced (Lorenz, 1963) the Navier-Stokes equations in the Boussinesq approximation for a plane fluid model heated from below (for a detailed description, see sections 7.3, 7.4) to a set of three ordinary non-linear differential equations representing the temporal change of three essential modes, one velocity and two temperature distributions. The equations are

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -\sigma X + \sigma Y \\ \dot{Y} &= r X - Y - X Z \\ \dot{Z} &= -b Z + X Y \quad \text{for } \sigma, r, b > 0\end{aligned} \quad (5.2.1)$$

They contain three parameters: the Prandtl number  $\sigma$ , the relative Rayleigh number  $r$  proportional to the applied temperature difference  $\Delta T$  and the geometrical measure  $b$ , derived from the geometry of the convection cells.

Lorenz selected for the Prandtl number  $\sigma = 10$  and for  $b = 8/3$ . For these values, the exponential factor of the volume reduction is  $e^{-41/3} \sim 10^{-6}$  per unit time. The Lorenz system is hence strongly dissipative.



**Fig. 5.2.1** Lorenz attractor for  $r = 28$ ,  $\sigma = 10$  and  $b = 8/3$ .  
The trajectory range behind the plane  $Z = r - 1 = 27$  is dotted  
(Lanford, 1977)

Lorenz attributed the generation of an instability of the stationary convection flow to a sub-critical Hopf bifurcation (see section 7.4) which arises at  $r_{cr} = 470/19 \approx 24.7368$ . For the numerical integration of the set of equations (5.2.1), he selected a somewhat higher value, namely  $r = 28$ . If we follow a trajectory starting almost at the origin with the initial condition ( $X = 0.001, Y = 0.001, Z = 0.001$ ), the strange geometrical figure which emerges for  $t \rightarrow \infty$  in the phase space spanned by the coordinates  $X, Y, Z$  is the so-called Lorenz attractor (see fig. 5.2.1 as well as colour plates Va and Vb, p. 401). At first, it sounds astonishing to assert that a configuration which is so structured and bounded in the phase space should reflect chaotic, non-predictable motions.

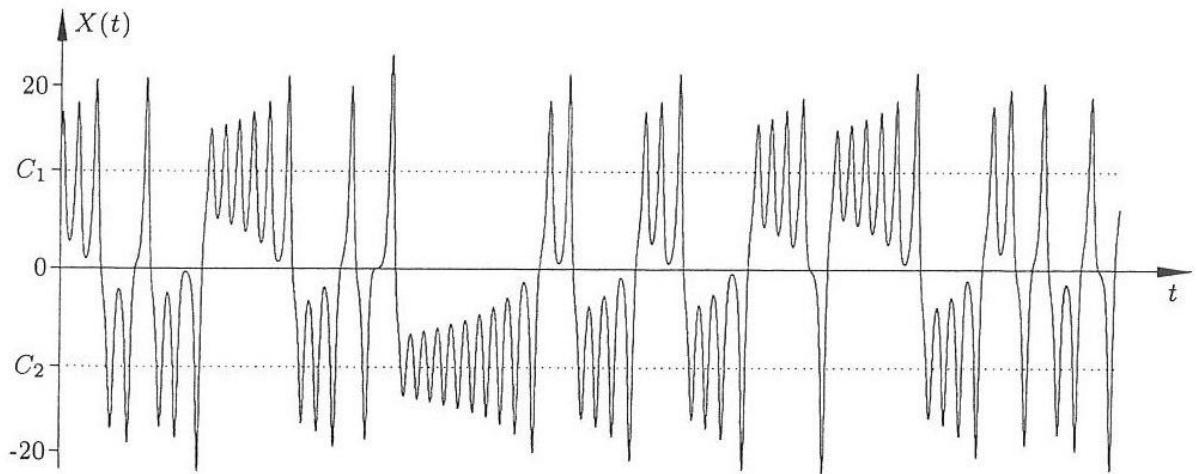


Fig. 5.2.2 Transient response of  $X$  for  $r = 28$ ,  $\sigma = 10$  and  $b = 8/3$

If we choose another form of representation, e.g. the temporal evolution of the independent variables  $X(t)$ , the chaotic character of the Lorenz system is more readily recognisable. Figure 5.2.2 shows the transient response of  $X$  over a finite period of observation for  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$  and  $b = 8/3$ . Within this limited period up to  $t = 200$ , we observe no periodicity and see that the change from  $C_1$  to  $C_2$  is of a random, stochastic nature. If we differentiate between spatial-chaotic and temporal-chaotic patterns, the Lorenz system demonstrates chaotic behaviour in time while the spatial pattern in the phase space is globally ordered. Figure 5.2.1 as well as colour plates Va and Vb, p. 401, make it clear that the trajectory starting close to the origin immediately jumps to the hemisphere of the unstable fixed point respectively saddle focus  $C_2$ , remains there for a while, circling round  $C_2$ , and then suddenly and unpredictably returns to the sphere of influence of  $C_1$ . The pull of  $C_1$ , however, proves insufficient to entrap the trajectory for ever; in fact, it stays there only for a limited period and then escapes once more into the domain of attraction of  $C_2$ . This bouncing to and fro from left to right and from right to left is repeated irregularly. Colour plate Vb, p. 401, illustrates this; to clarify matters, the colour of the trajectory is changed following each jump.

# Fenomeni di trasporto

I tre fenomeni di trasporto sono:

- Trasporto di massa (scalare)
- Trasporto di calore (scalare)
- Trasporto della quantità di moto (vettoriale)

## Trasporto della quantità di moto

È legato alla legge di Newton dei fluidi newtoniani:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \rho \frac{\mu}{l} \frac{du}{dy} \Rightarrow \tau = \nu \frac{d}{dy} (\rho u)$$

Dove  $\nu$  è il legame di proporzionalità tra la causa (gradiente di velocità) e l'effetto (sforzo di taglio). Prende il nome di **diffusività di quantità di moto**  $[L^2 T^{-1}]$ .

## Trasporto del calore

(O di energia).

Legato alla legge di Fourier:  $|\dot{Q}''| = \left| k \frac{dT}{dy} \right| = \left| \rho c_p \frac{k}{\rho c_p} \frac{dT}{dy} \right| = \left| \alpha \frac{d}{dy} \underbrace{\rho c_p T}_h \right|$

Allora  $\dot{Q}'' = \alpha \frac{d}{dy} (h'')$

$\alpha$  è la **diffusività termica**.

Si nota una certa somiglianza, entrambi per unità di superficie con un parametro (diffusività)

## Trasporto di massa

Legato al gradiente di concentrazione dalla legge di Fick che ci dice che il numero di moli della sostanza scambiato per unità di tempo e unità di superficie è:

$$\dot{N}_A'' = - D_V \frac{dc_A}{dy}$$

Dove  $D_V$  è il legame di proporzionalità tra la causa (gradiente di concentrazione) e l'effetto (flusso di massa).

$D_V$  è il **coefficiente di diffusività di massa**.

Questo ci dice che questi 3 fenomeni di trasporto sono moto simili e si può studiare un fenomeno assimilandolo ad un altro.

Negli scambi di calore si misura  $T$  mentre nel trasporto di massa la concentrazione: ad esempio volendo studiare gli scambi di calore nelle turbine dove non si può misurare la temperatura si studia non il trasporto di calore ma il trasporto di massa mettendo uno strato di naftalina sopra le turbine che passa da solido ad aeriforme e quindi ci si manda contro il raffreddante che maggiore è il trasporto di massa più è elevata la naftalina che viene vaporizzata. Si fanno poi diversi ragionamenti in cui si legano i fenomeni di scambio di massa e scambio di calore traendone fuori il numero di Nusselt.

Questo discorso è però vero fino ad un certo punto.

Ad esempio è vero per concentrazione di A molto piccole rispetto all'ambiente esterno (scalare passivo) dove l'analogia è quasi completa.

Tuttavia non è sempre vero. Vediamo il seguente esempio in cui si vede un fenomeno di trasporto di massa assente nello scambio di calore (per il livello di analisi termodinamica che facciamo noi).

Supponiamo di avere una stanza con una finestra e una stufa a gas. Aprendo il gas (senza fare fuoco) la concentrazione di gas sarà elevata sopra la stufa mentre sarà molto bassa vicino la finestra. Essendo un gas (metano) possiamo parlare direttamente di pressione parziale  $c_A \propto p_A$ .

Questo determina un gradiente di pressione che provoca un movimento (trasporto di massa).

Nella stanza c'è quindi sia aria che metano dove si presume la pressione atmosferica costante e la pressione totale è

$$p_t = p_{atm} = p_A + p_B = \text{cost}$$

Derivando:  $\frac{dp_{atm}}{dy} = 0 \rightarrow \frac{dp_A}{dy} + \frac{dp_B}{dy} = 0 \rightarrow \frac{dp_B}{dy} = - \frac{dp_A}{dy}$

Un gradiente in un verso (metano) deve essere bilanciato da un gradiente in verso opposto (aria).

Questo prende il nome di controdiffusione molecolare.

In conclusione per le analogie:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \implies Sc = \frac{\nu}{D_v}$$

$$Nu = \frac{hL}{k} = \frac{hL/\rho c}{K/\rho c} = \frac{hL/\rho c}{\alpha} \implies Sh = \frac{h_m L/\rho c}{D_v}$$

dove  $h_m$  è il coefficiente di convessione di massa (diffusività di massa)

$$Nu = \mathbf{cost} \cdot Re^x \cdot Pr^y \implies Sh = \mathbf{cost} \cdot Re^x \cdot Sc^y$$

giovedì 3 dicembre 2020 - Lezione 30

Esercitazione 1:

## Criochirurgia

Su questi argomenti sono stati fatte più o meno pubblicazioni del professore o di alcuni tesisti.  
In questo caso, per la criochirurgia, è una tesi di master.

Si osservi come il ghiaccio avendo un volume maggiore esercita una forza maggiore sulla parete cellulare (sia come sforzo normale che di taglio).

FARE RIFERIMENTO AI FILE DELLE ESERCITAZIONI.

Vedremo anche altre esercitazioni e per alcune di queste più moderne lasceremo parlare anche lo studente che ha sviluppato la tesi, fuori dall'orario della lezione.

Oltre lo studio e il discorso di Neumann tenere a mente (e riportare) del calore generato nel tessuto vivente e come vale il calore generato dalla perfusione sanguigna.



# FISICA TECNICA

## Settimana 12

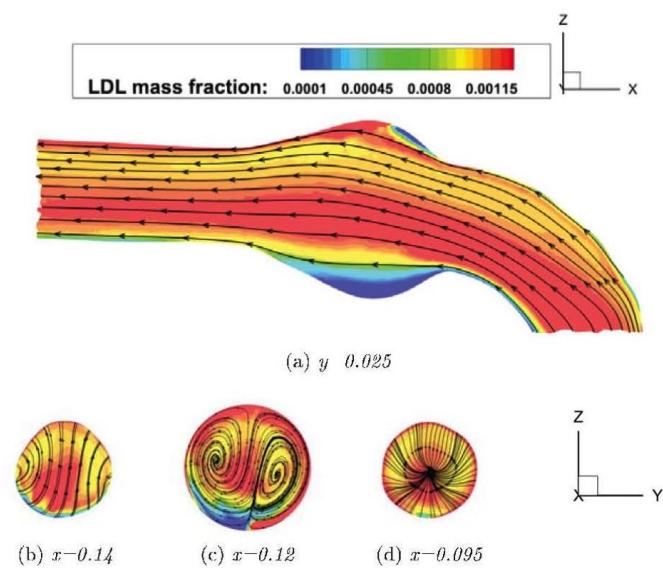


Figura 5.27: concentrazione di LDL nell'aneurisma, nel caso di flusso nullo a parete; sopra è rappresentata una sezione sul piano sagittale (**xz**), e sotto tre sezioni sul piano trasversale (**yz**).

# Indice settimana 12

Indice settimana 12	2
mercoledì 9 dicembre 2020 - Lezione 31	3
Termoregolazione in anestesia	3
giovedì 10 dicembre 2020 - Lezione 32	4
Aneurisma dell'aorta	4

mercoledì 9 dicembre 2020 - Lezione 31

Queste prime due esercitazioni sono del secolo scorso, con grafici bidimensionali ottenuti programmando in Fortran (programma ancora utilizzato per la simulazione numerica diretta, il più avanzato strumento per l'analisi termofluidodinamica).

Quindi questo sono due esercitazioni del tipo grafico bidimensionale dove i grafici sono ottenuti prima con la soluzione analitica e poi numerica di una certa equazione.

Esercitazione 2:

## Termoregolazione in anestesia

FARE RIFERIMENTO AI FILE DELLE ESERCITAZIONI.

giovedì 10 dicembre 2020 - Lezione 32

Esercitazione 3:

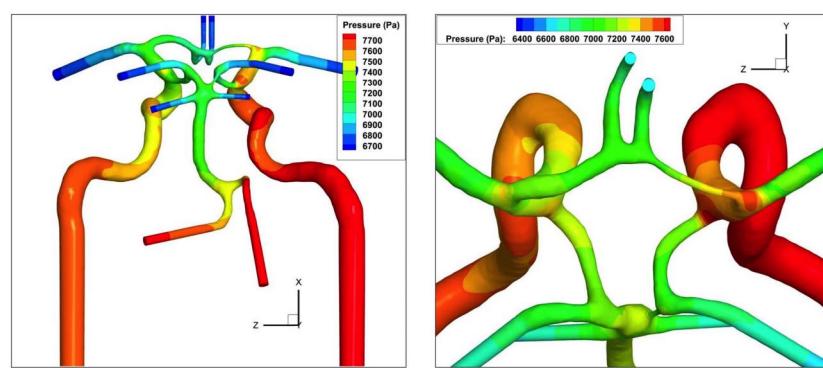
## Aneurisma dell'aorta

Affrontando sia la fluidodinamica che il trasporto di massa.

FARE RIFERIMENTO AI FILE DELLE ESERCITAZIONI.

# FISICA TECNICA

Settimana 13



# Indice settimana 13

Indice settimana 13	2
martedì 15 dicembre 2020 - Ricevimento panoramica generale	3
martedì 15 dicembre 2020 - Lezione 33	5
Fluidodinamica e trasporto di massa nel circolo di Willis	5
mercoledì 16 dicembre 2020 - Lezione 34	6
Acustics problems in cardiac fluid dynamics.	6
giovedì 17 dicembre 2020 - Esercitazione 4	7
<b>Aria umida</b>	<b>7</b>
<i>Psicrometro</i>	9
<i>Diagramma Ashrae</i>	10
<i>Riscaldamento isotitolo</i>	12
<i>Raffreddamento isotitolo</i>	13

martedì 15 dicembre 2020 - Ricevimento panoramica generale

### Lezione 9.

Abbiamo esteso le leggi dei gas perfetti ad una serie di potenze di  $p$  e di  $\frac{1}{v}$  che hanno come limite, per  $p \rightarrow 0, v \rightarrow \infty$ , le leggi dei gas perfetti.

Siamo arrivati a scrivere un'equazione generalizzata del viriale identificando i coefficienti.

Abbiamo visto l'equazione degli stati corrispondenti partendo dalla definizione del fattore di comprimibilità  $z = \frac{pv}{RT}$ .

Abbiamo introdotto il rapporto con i vari critici cercando di arrivare ad una relazione generale tra queste variabili ridotte  $f(p_r, T_r, v_r) = 0$ .

Abbiamo visto come questa relazione vale al punto critico ma non alle basse pressioni.

Abbiamo poi visto un'equazione che possiamo utilizzare per alcuni gas reali: equazione di Van der Waals

$$(\tilde{v} - b) \left( p + \frac{a}{\tilde{v}^2} \right) = R_u T \text{ osservando il legame tra le costanti e le caratteristiche del gas al punto critico.}$$

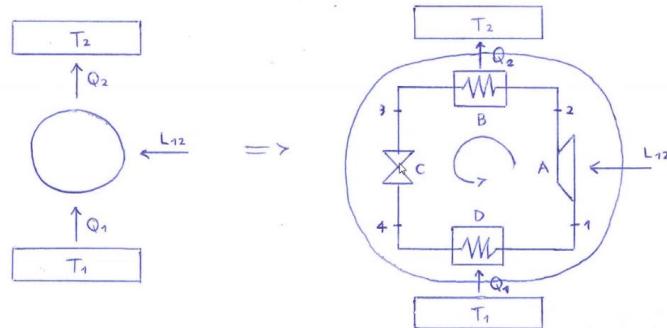
Abbiamo mostrato che la legge di Van der Waals è esprimibile come equazione del viriale.

Poi abbiamo visto l'espressione del Dieterici che è un'espansione esponenziale della legge di Van der Waals e la legge di Berthelot e infine l'equazione di Beattie-Bridgeman.

Poi abbiamo visto come rappresenta per un gas non essere perfetto mediante l'esperienza di Joule e Joule-Thompson.

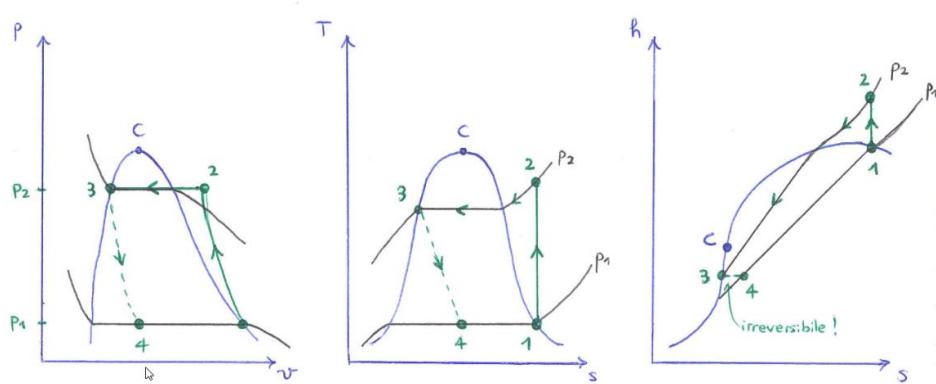
### Lezione 10.

Il frigorifero a compressione di vapore è genericamente una macchina del tipo:



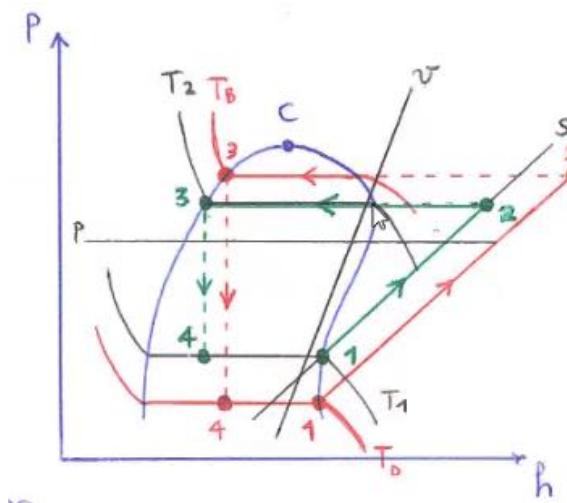
Con una valvola di laminazione (espansione del fluido mantenendo la stessa entalpia con una trasformazione irreversibile), vaporizzatore (scambiatore di calore), compressore (viene fornito lavoro) e un condensatore.

Lo abbiamo poi rappresentato sui diagrammi:



LE DUE CURVE DEL  $p v$  DEVONO AVERE CONCAVITÀ VERSO L'ALTO.

Per i cicli frigoriferi abbiamo anche introdotto il diagramma  $ph$  utile per la progettazione e abbiamo fatto un esempio di progettazione.



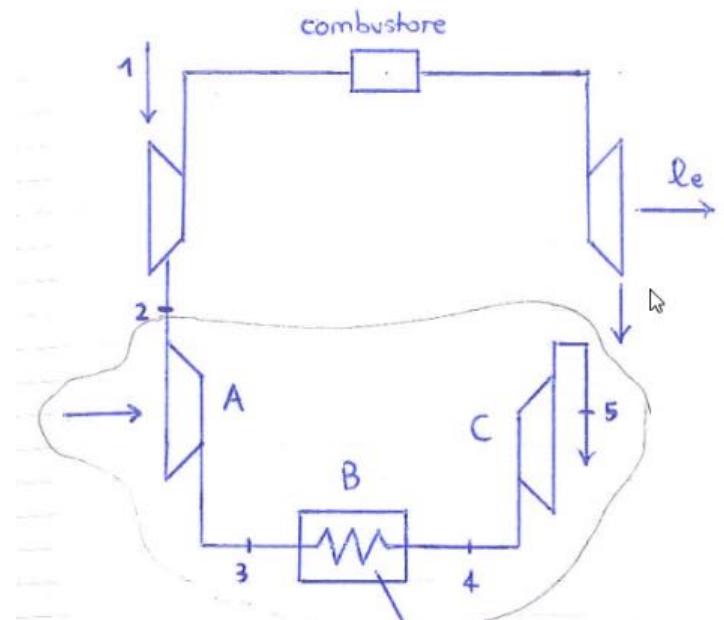
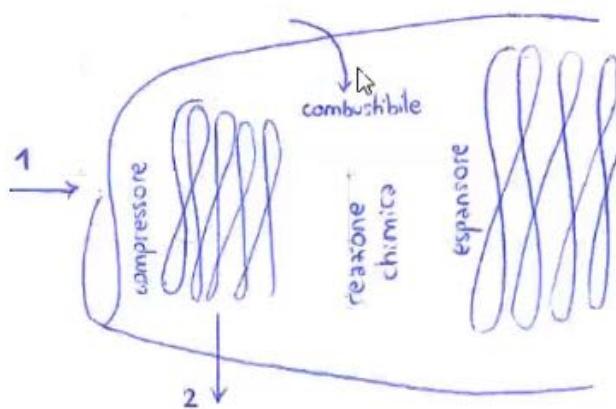
IL CICLO VERO È QUELLO IN ROSSO

Abbiamo poi esteso il ciclo frigorifero alla presenza di una camera di separazione, quindi con due espansioni separate. Poi abbiamo visto l'impianto frigorifero ad  $H_2O$  con elettore.

#### Lezione 11.

Abbiamo visto il frigorifero ad aria.

Poi un impianto di aria condizionata per aerei.



martedì 15 dicembre 2020 - Lezione 33

Esercitazione 4:

# Fluidodinamica e trasporto di massa nel circolo di Willis

È UNA TESI MAGISTRALE.

FARE RIFERIMENTO AI FILE DELLE ESERCITAZIONI.

mercoledì 16 dicembre 2020 - Lezione 34

Esercitazione 5:

## Acustics problems in cardiac fluid dynamics.

QUESTA TESI SEGUO' UN'ALTRA TESI DOVE SONO GIÀ STATI AFFRONTATI I PROBLEMI DI ACUSTICA NELLA FLUIDODINAMICA E CHE SI OCCUPAVA DEL RUMORE PROVOCATO DALLE PALE EOLICHE. E TUTTA LA PROBLEMATICA DI ACUSTICA E DEI DANNI CORRELATI ALL'ACUSTICA E AI DANNI FISICI E PSICOLOGICI.  
UN COLLEGA DI QUESTO PRIMO STUDENTE SI È OCCUPATO DEI PROBLEMI DI ACUSTICA NEI PROBLEMI CARDIACI.

È UNA TESI MAGISTRALE.

## Aria umida

È una miscela di vapore d'acqua e aria secca.

Questo sotto le ipotesi (per entrambi) di gas perfetti che non interagiscono tra loro.

L'ipotesi di gas perfetto è accettabile poiché stiamo considerando miscele di azoto e ossigeno che stanno bene al di sopra della temperatura critica (stiamo facendo considerazioni a temperatura ambiente) mentre per il vapore d'acqua l'ipotesi si basa sul fatto che è molto raro.

Per l'aria secca abbiamo un peso molecolare  $pm_{as} = 28,9 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$

Peso molecolare per il vapore  $pm_v = 18 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$

Temperatura critica acqua **647 K**

Supponiamo valida la Legge di Dalton (per miscele di gas, la pressione parziale di gas è quella che avrebbe il gas se fosse solo nel contenitore) e ci mettiamo nelle condizioni di stazionarietà. Allora questo porta a individuare un volume  $V$  e una temperatura  $T$  che sono gli stessi per vapore e aria secca.

$$p_{as}V = N_{as}R_uT \implies N_{as} = \frac{p_{as}V}{R_uT}, \text{ moli di aria secca.}$$

$$p_vV = N_vR_uT \implies N_v = \frac{p_vV}{R_uT}, \text{ moli di vapore.}$$

E sommando membro a membro  $(p_{as} + p_v)V = (N_{as} + N_v)R_uT$  possiamo riscrivere come  $p_tV = N_tR_uT$ .

$$\text{Allora } N_t = p_t \frac{V}{R_uT}.$$

Cioè valgono le relazioni:

- $\frac{N_{as}}{N_t} = \frac{p_{as}}{p_t}$
- $\frac{N_v}{N_t} = \frac{p_v}{p_t}$

Allora una quantità utile per descrivere la miscela è la **frazione molare**:

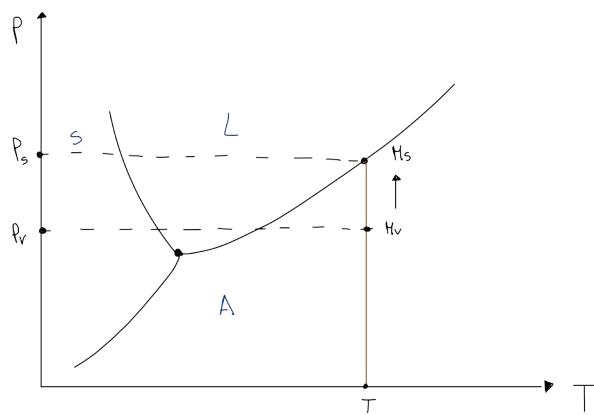
$$Y_i = \frac{N_i}{N_t} \longrightarrow \begin{cases} Y_{as} = \frac{N_{as}}{N_t} = \frac{p_{as}}{p_t} \\ Y_v = \frac{N_v}{N_t} = \frac{p_v}{p_t} \end{cases}$$

C'è anche il grado di **saturazione** e **umidità relativa**.

$$\varphi = \frac{N_v(T)}{N_{vs}(T)} = \frac{p_v(T)}{p_s(T)} \text{ con } \varphi \in [0; 1] \text{ oppure indicato come } \Phi \in [0; 100\%]$$

Numero di moli presenti nella miscela fratto il numero di moli presenti nella saturazione, ovvero il massimo valore.

Per capirlo meglio consideriamo il diagramma pT dell'acqua (caratteristico per la pendenza contraria):

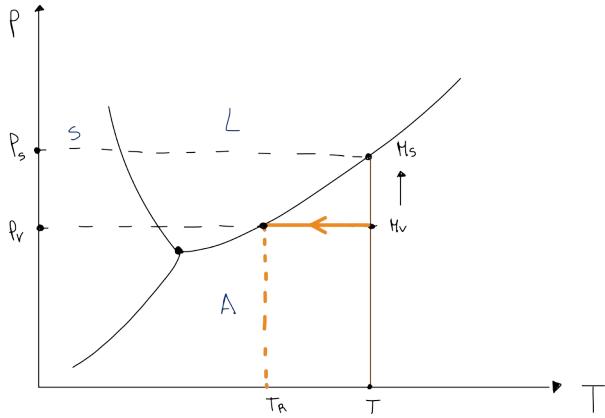


Ovvero siamo nelle condizioni  $T$  in cui si ha un certo numero di moli del vapore a cui corrisponde una certa pressione parziale  $p_v(T)$ .

Per identificare il numero massimo di moli di vapore a questa temperatura ci muoviamo lungo la verticale fino al limite per il quale avremo il numero di moli di vapore alla saturazione con una certa pressione. Nelle tabelle, scelta una temperatura troviamo proprio questo valore di saturazione.

Aggiungendo un'altra mole, si passerebbe allo stato liquido e quindi si separa e non fa più parte della miscela aria umida che stiamo considerando (due sostanze diverse nello stesso stato di aggregazione).

Si definisce anche la **temperatura di rugiada**  $T_R$  è quella che si ottiene a seguito di un raffreddamento isobaro.



Si osservi che raffreddando oltre la temperatura di rugiada una parte del vapore diventa liquido e la curva prosegue lungo la curva del cambiamento di stato.

Un altro parametro molto importante è il **titolo** o umidità specifica (o assoluta)  $x = \frac{M_v}{M_{as}}$

Si osservi che non è una massa rispetto la massa totale ma la massa di vapore rispetto la massa di aria secca!

$$\text{Quindi } x = \frac{M_v}{M_{as}} = \frac{N_V \cdot pm_V}{N_{as} \cdot pm_{as}} = 0,662 \frac{N_v}{N_{as}} = 0,662 \frac{p_v}{p_{as}} = 0,662 \frac{p_v}{p_t - p_v}$$

Oss1:  $p_t = p_{as} - p_v$

Vediamo come collegare questa quantità con il grado di saturazione:  $\varphi = \frac{p_v}{p_s} \rightarrow p_v(T) = \varphi \cdot p_s(T)$  e allora

$$x = 0,662 \frac{\varphi \cdot p_s}{p_t - \varphi \cdot p_s}$$

Per identificare lo stato di una miscela abbiamo bisogno di tre quantità e una di questa è quasi sempre la pressione totale che spesso è proprio quella atmosferica.

### Entalpia

Per l'energie i bilanci si fanno con le grandezze estensive e qualora fosse possibile si passa alle grandezze specifiche.

Abbiamo detto che le due sostanze non interagiscono tra loro e quindi per l'entalpia deve valere l'additività e possiamo legarla con le masse delle sostanze :  $H = H_{as} + H_v = M_{as}h_{as} + M_vh_v$   
ù

Dividendo per la massa di aria secca:  $h = \frac{H}{m_{as}} = \frac{M_{as}h_{as}}{m_{as}} + \frac{M_vh_v}{M_{as}} \rightarrow h = h_{as} + x h_v$  o meglio

$h(T) = h_{as}(T) + xh_v(T)$ , dove  $h$  è l'entalpia della miscela tutta riferita alla massa di aria secca ( $J/kg$  di aria secca).

Per assegnare un valore all'entalpia occorre definire uno stato termodinamico di riferimento per cui si definisce

$$h_{as}(T) = h_{as0}(T_0) + c_{pas}(T - T_0)$$

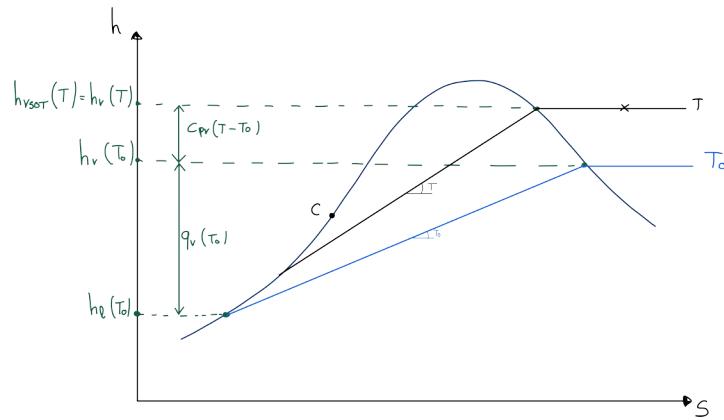
Per il vapore si parte dal liquido saturo e dal calore latente di vaporizzazione a cui si somma il termine con il  $c_p$ , ovvero:

$$h_v(T) = h_{l_0}(T_0) + q_v(T_0) + c_{pv}(T - T_0)$$

$\overbrace{h_v(T_0)}$

$$= h_{v_{sat}}(T)$$

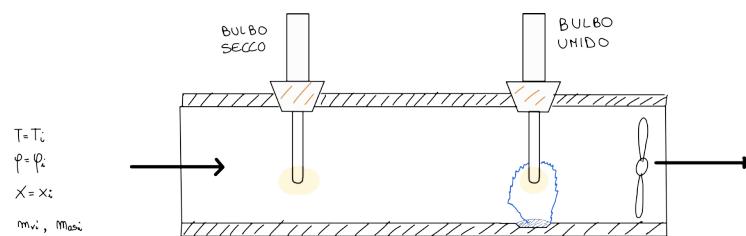
Proviamo a graficare questa relazione. Prendiamo il diagramma hs dell'acqua con la campana di Andrews su cui riportiamo la miscela ad una temperatura  $T$ . Siamo a basse pressioni con il vapore estremamente rarefatto e quindi appena fuori la campana la curva diventa orizzontale (isoterme uguali alle isoentalpiche per un gas perfetto).



## Psicrometro

(Adiabatico)

È un condotto con una sezione di ingresso e una di uscita che presenta due termometri con un bulbo (parte sensibile del termometro) secco ed un bulbo umido.



Il bulbo umido ha intorno una garza imbevuta d'acqua.

Ci permette di capire lo stato della miscela.

La miscela ha uno stato incognito  $T, x, \varphi, h$

Un piccola quantità di aria passa nello strumento (non modifica la miscela).

Nella sezione di ingresso abbiamo le condizioni della stanza in cui è posizionato il dispositivo  $T = T_i, \varphi = \varphi_i, x = x_i$

All'uscita potremmo avere dei cambiamenti per via del bulbo umido dove la miscela tende a saturare (a meno che non è già al 100% quando entra) quindi in un uscita si tende ad avere una portata di aria umida satura.  $\varphi \approx 1 \geq \varphi_i$

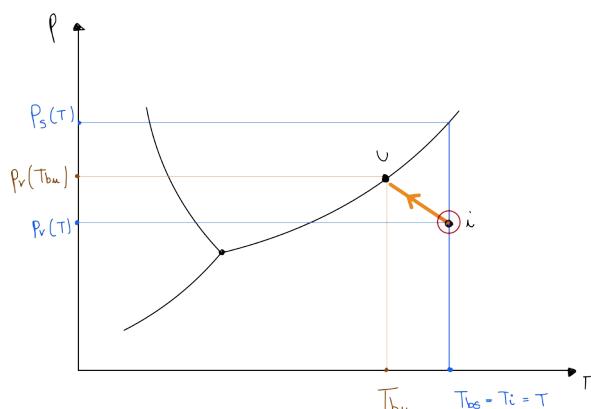
La massa di aria secca in uscita è la stessa che entra mentre quella di vapore sarà aumentata  $m_{as_u} = m_{as_i}$ ;  $m_{v_u} \geq m_{v_i}$  e quindi discorso analogo per il titolo  $x_u \geq x_i$ .

Per le temperature  $T_u = T_{bu} \leq T_{bs} = T_i$ , l'acqua che evapora ha bisogno di calore e lo prende dalla miscela (essendo il dispositivo adiabatico) e quindi in uscita la temperatura è generalmente minore a quella di bulbo secco

Questo strumento quindi misura due temperature:  $\begin{cases} T_{bs} = T_i = T \\ T_{bu} = T_u \end{cases}$

C'è poi un ventilatore di tipo aspirante e non premette poiché a causa dell'attrito ci sarebbe una piccola dissipazione che farebbe riscaldare l'aria.

Graficando queste quantità:



Nota la temperatura di bulbo secco leggiamo sicuramente il valore di pressione di saturazione (dalle tabelle).

Vedremo che c'è un'entalpia di ingresso e una di uscita  $h_u \approx h_i$  (vedremo più avanti perchè).

Nella temperatura di bulbo umido c'è quindi una trasformazione isoentalpica e possiamo leggere l'altra pressione di saturazione allora possiamo ricavare  $\phi$  e quindi tutte le altre quantità.

$$\left. \begin{array}{l} T_{bs} \rightarrow p_s(T) \\ T_{bu} \rightarrow p_v(T) \end{array} \right| \Rightarrow \phi$$

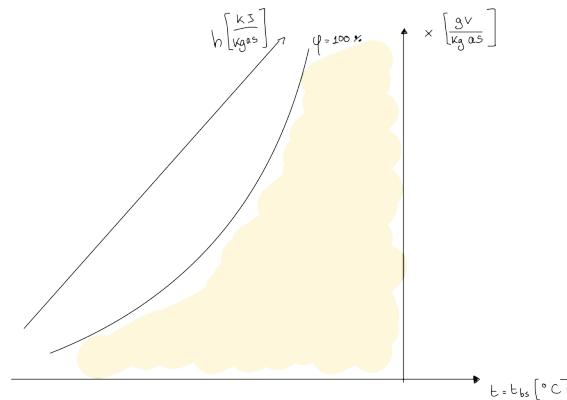
Riportiamo questi valori sul diagramma psicometrico o

### Diagramma Ashrae

Sull'ascisse le temperature e riportiamo l'asse delle ordinate sulla temperatura di bulbo secco a cui si trova la miscela e quindi riportiamo il titolo riportato come  $x \left[ \frac{\text{grammi di vapore}}{\text{kg d'aria secca}} \right]$  da moltiplicare per  $10^{-3}$ .

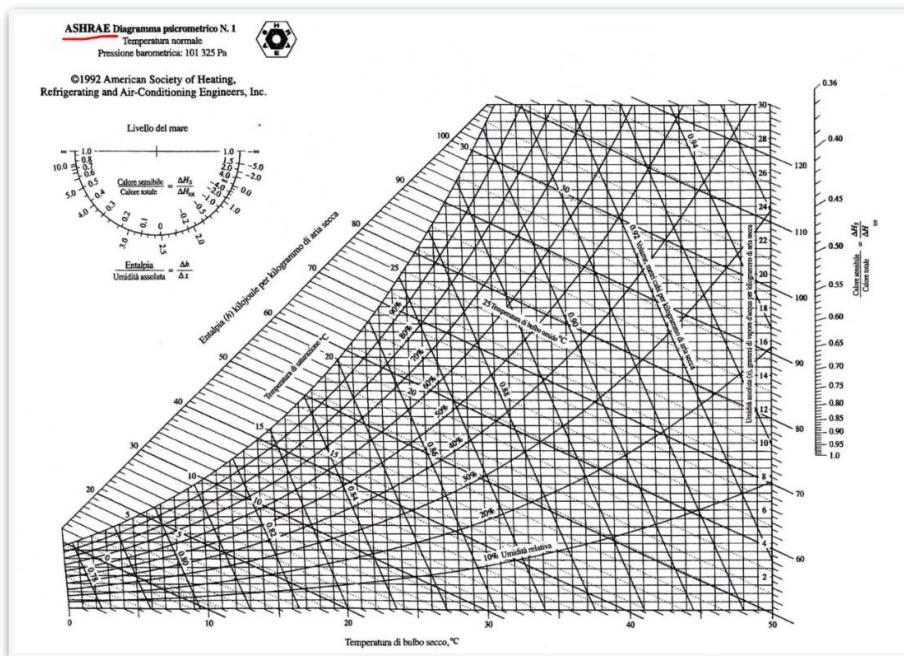
Un'altra curva notevole è la curva di saturazione  $\phi = 100\%$ .

In giallo il campo di esistenza degli stati termodinamici della miscela.



C'è anche il riferimento dell'entalpia che cresce lungo la freccia, in kJ della miscela tutta riferita a kg di aria secca.

Vedendo un esempio di questo diagramma:



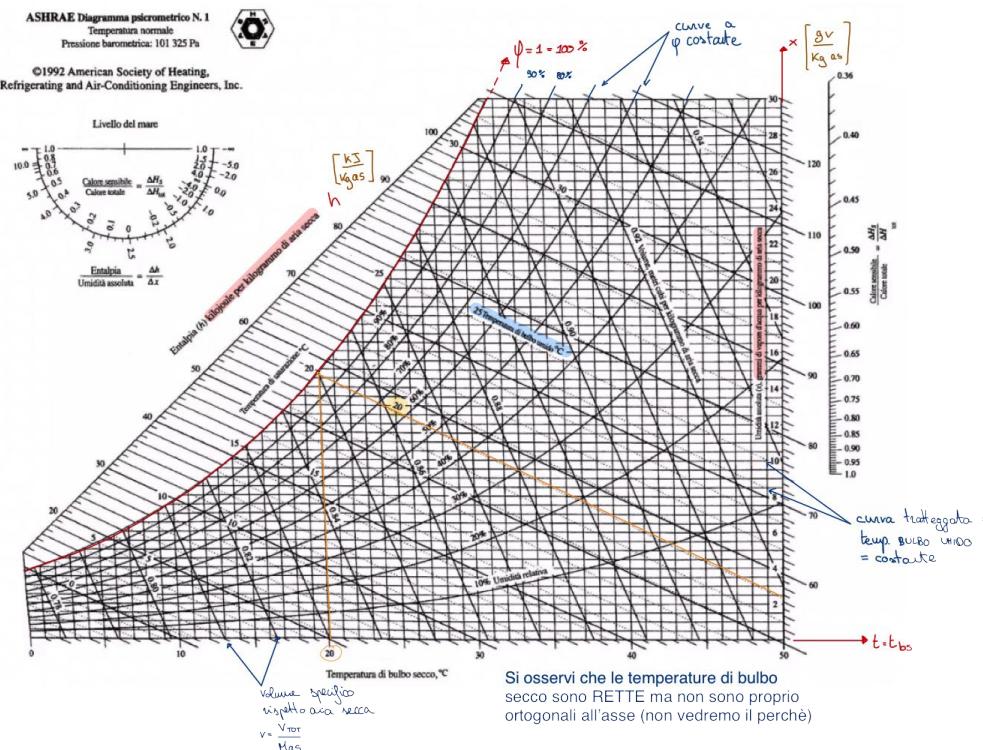
Su questo diagramma possiamo identificare diversi valori notevoli:  
(Vedi pg seguente)

Le curve di bulbo umido e di bulbo secco coincidono nella condizione in cui la miscela che entra è già satura (cioè alla saturazione).

Ad esempio, per il caso a 20°C di bulbo secco arrivando fino alla saturazione vediamo come parte la temperatura di bulbo umido a 20°C (in giallo).

Cioè per disegnare curve a temperatura di bulbo umido costante possiamo anche fare in questo modo, prendiamo la temperatura di bulbo secco corrispondente andiamo alla saturazione e da lì disegniamo una curva più o meno a entalpia costante.

Nel diagramma T bulbo umido costanti tratteggiate mentre quelle a entalpia costante in nero (più o meno stessa pendenza). In diagonale ci sono anche le curve del volume specifico della miscela tutta.



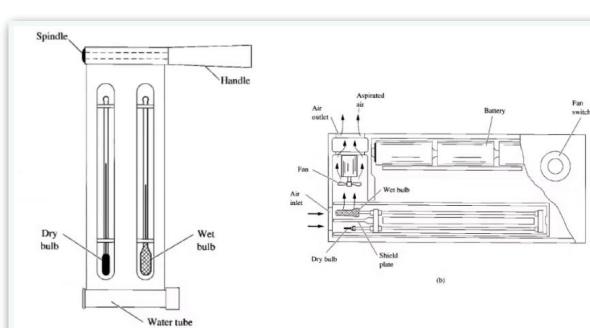
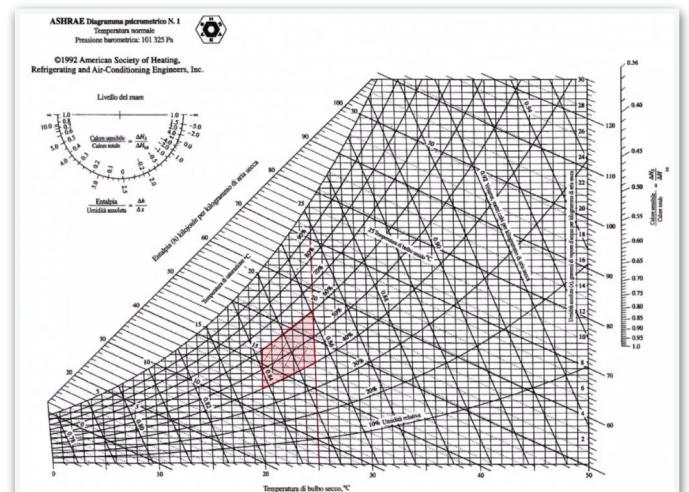
Adesso andiamo a vedere le trasformazioni che possiamo far fare all'aria umida.

Troviamo l'aria umida ovunque, è la miscela nella quale viviamo.

In generale si parla di benessere termoigrometrico all'interno degli ambienti attribuendo un benessere sia al valore di temperatura che ad un valore di umidità che risulta più o meno (semplificando molto la realtà) tra  $T = 20 \div 25^\circ\text{C}$  e un'umidità relativa  $40 \div 60\%$  che identifica una particolare zona di confort anche nel diagramma igrometrico.

Nelle situazioni ambientali ci troviamo lontani da queste condizioni ideali e si provvede a sistemi di raffreddamento/riscaldamento e quindi il problema di trasformare l'aria umida dalle condizioni esterne a quelle desiderate.

Ci sono poi tutte le richieste di natura industriale come essiccatore (temperatura e umidità molto bassa), camere operatorie (temperatura sotto i 20°C, umidità controllata e sovrappressione rispetto l'esterno), ecc.

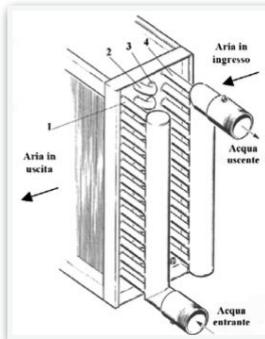
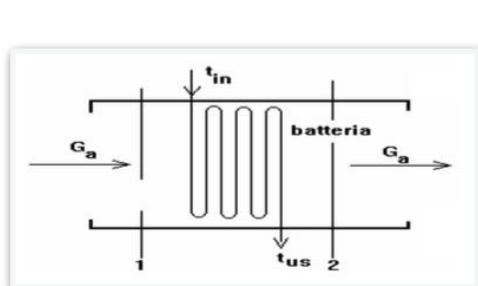


A SINISTRA PSICROMETRO A FONDA CHE SI FA RUOTARE INTORNO INTORNO IL PERNÒ E A DESTRA UNO PSICROMETRO SIMILE ALL'ESEMPIO.



## Riscaldamento isotitolo

Potremmo avere la necessità di riscaldare la miscela. Il riscaldamento avviene all'interno di uno scambiatore di calore e generalmente avviene attraverso un fluido che scambia calore. Ad esempio una batteria di riscaldamento costituita da tubi in cui scorre acqua calda che cede calore all'aria che passa tra ingresso ed uscita.



L'ipotesi di fondo è sempre la stazionarietà, valida per tutti questi discorsi.

Facciamo il bilancio di massa e di energia per sistemi aperti.

$$\text{Bilancio di massa per l'aria: } G_1 = G_2 = \begin{cases} G_{as-1} = G_{as-2} \\ G_{v-1} = G_{v-2} \end{cases} \text{ con il titolo } x_i = \frac{G_{v-i}}{G_{as-i}} \rightarrow x_1 G_{as-1} = x_2 G_{as-2}$$

Vedremo che conviene quasi sempre scrivere rispetto alla portata di aria secca poiché questa rimane quasi sempre costante (tranne che nella miscelazione).

$$\text{Per il bilancio di energia } \dot{Q} - \dot{V}_f = \Delta \dot{H} + \Delta \dot{E}_p + \Delta \dot{E}_c$$

$$\text{Ovvero } \dot{H}_1 + \dot{Q}_{1-2} = \dot{H}_2$$

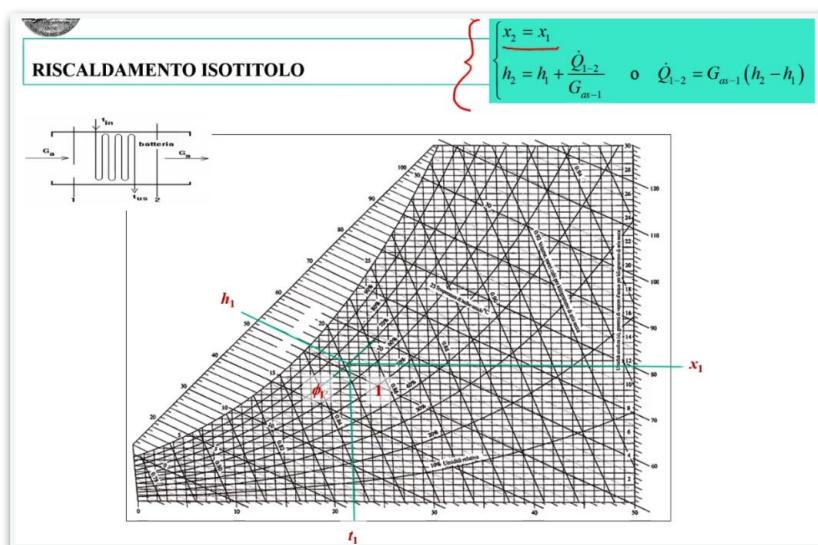
$$\text{Cioè } G_{as-1} h_1 + \dot{Q}_{1-2} = G_{as-2} h_2$$

$$\text{Allora } \begin{cases} x_2 = x_1 \\ h_2 = h_1 + \frac{\dot{Q}_{1-2}}{G_{as-1}} \end{cases} \circ \dot{Q}_{1-2} = G_{as-1} (h_2 - h_1)$$

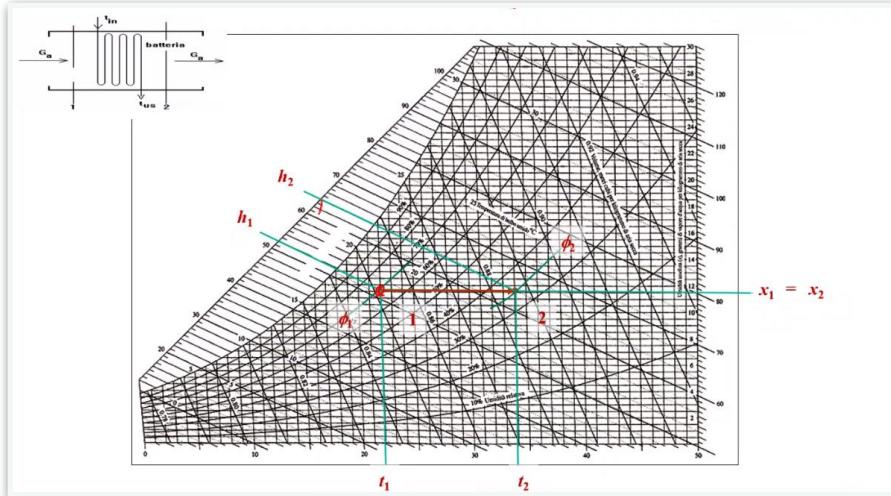
Cioè fissata una potenza termica ci chiediamo l'entalpia o fissata una certa entalpia ci chiediamo quanta è potenza termica necessaria.

Allora:

Sul grafico riportiamo lo stato termodinamico 1 fornito da una coppia di valori (note due informazioni determiniamo univocamente lo stato termodinamico) cioè :



Ed essendo isotitolo ci sposteremo su una curva isotitolo ( $x_2=x_1$ ) andando ad identificare lo stato 2:



Leggendo il  $\Delta h$ ,  $h_2 = 62$   $h_1 = 52$  sulla retta.

### Raffreddamento isotitolo

È analogo a quanto appena visto per il riscaldamento, avviene sempre in uno scambiatore sotto l'ipotesi di stazionarietà.

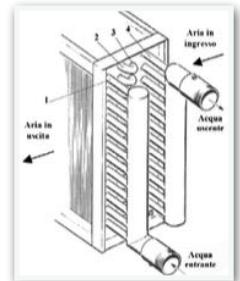
La portata di ingresso uguale a quella di uscita

L'acqua che entra ha una temperatura inferiore all'aria poiché deve raffreddarla.

Per il bilancio di massa:

$$G_1 = G_2 \implies \begin{cases} G_{as-1} = G_{as-2} \\ G_{v-1} = G_{v-2} \end{cases}$$

$$\text{Con } x_1 = \frac{G_{v-i}}{G_{as-i}} \implies x_1 G_{as-1} = x_2 G_{as-2}$$



Per il bilancio energetico stiamo raffreddando e quindi sottraiamo potenza termica:

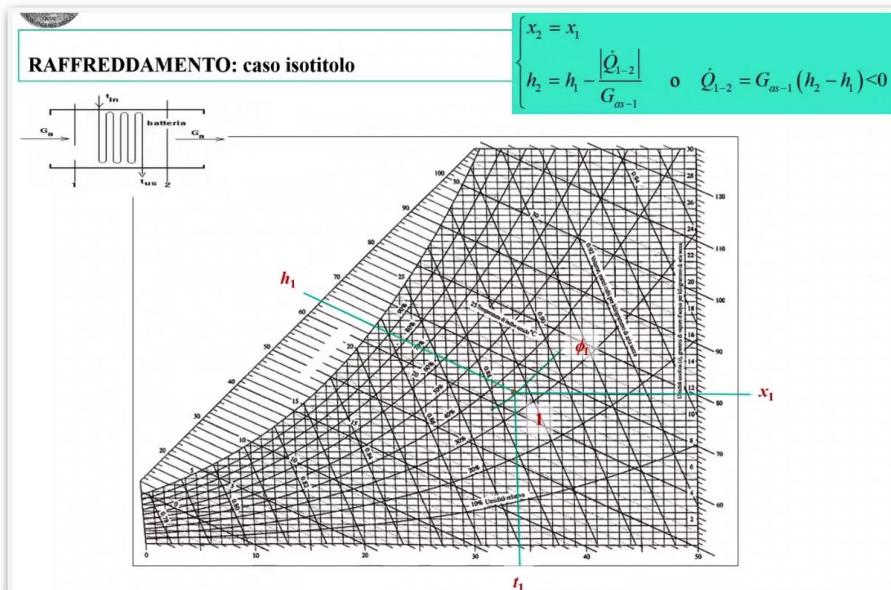
$$\dot{H}_1 - |\dot{Q}_{12}| = \dot{H}_2$$

$$G_{as-1} h_1 - |\dot{Q}_{1-2}| = G_{as-2} h_2$$

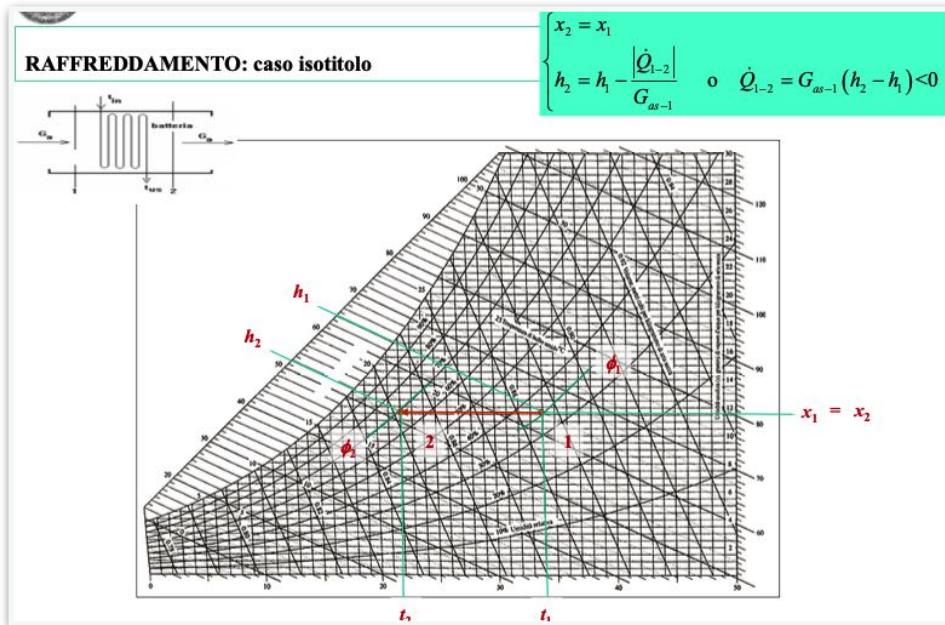
$$\begin{cases} x_2 = x_1 \\ h_2 = h_1 - \frac{|\dot{Q}_{1-2}|}{G_{as-1}} \end{cases} \text{ oppure } \dot{Q}_{1-2} = G_{as-1} (h_2 - h_1) \leq 0$$

E dalle precedenti si ottiene che

Per la rappresentazione partiamo dallo stato iniziale:



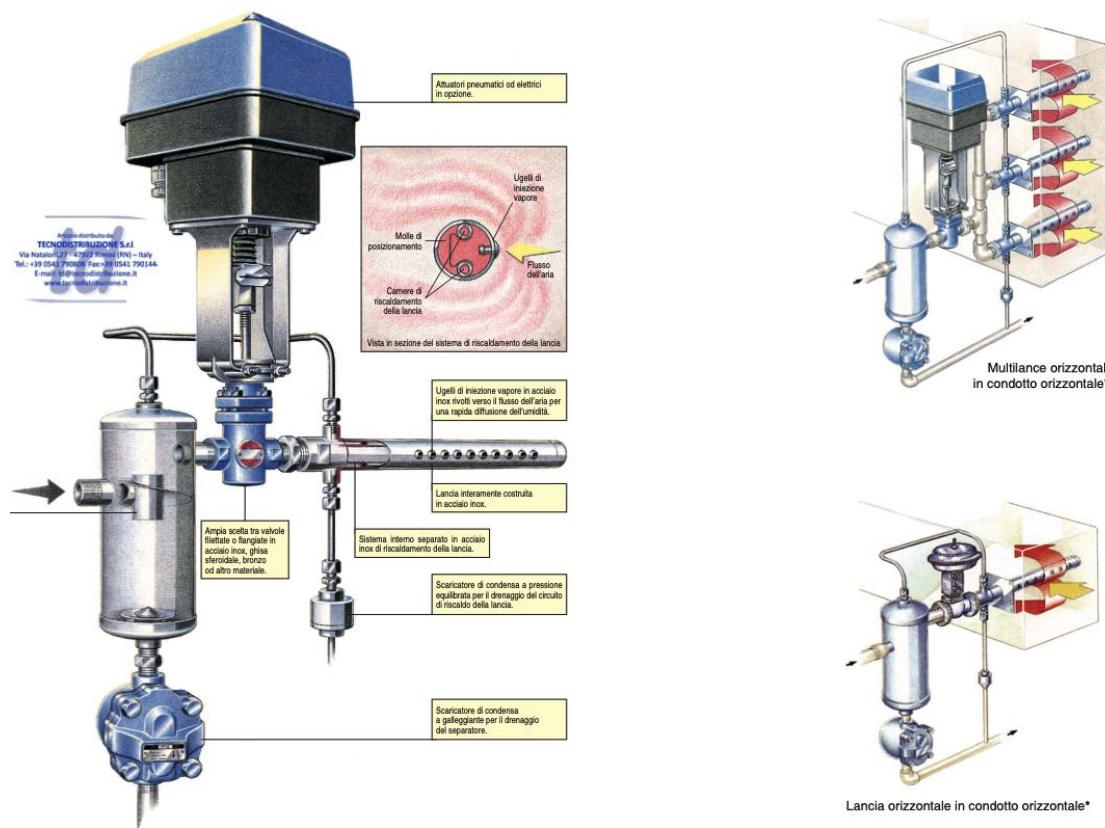
E consideriamo la condizione isotitolo  $x_1 = x_2$  ottenendo la condizione finale:



Il limite della trasformazione è  $\varphi = 100\%$  in cui arriviamo alla temperatura di rugiada (siamo arrivati alla saturazione).

# FISICA TECNICA

## Settimana 14



# Indice settimana 14

Indice settimana 14	2
martedì 22 dicembre 2020 - Ricevimento panoramica generale	3
martedì 22 dicembre 2020 - Esercitazione 5	4
<i>Miscelazione</i>	4
<i>Esercizio 1</i>	6
<i>Raffreddamento e deumidificazione</i>	8
<i>Esercizio 2</i>	9
<i>Umidificazione adiabatica</i>	12
<i>Umidificazione isoterna</i>	13
<i>Esercizio 3</i>	15

martedì 22 dicembre 2020 - Ricevimento panoramica generale

Abbiamo visto diversi impianti di liquefazione dei gas.

Il primo che abbiamo visto è quello di Pictet fatto da varie serie di impianti frigoriferi a compressione di vapore (con 4 riuscì a liquefare l'aria).

Poi abbiamo visto il ciclo Linde.

Poi abbiamo visto Dewar che liquefece l'idrogeno e Kamarling-Omnes che liquefece l'elio e scoprì la supercondutività.

Successivamente abbiamo visto il ciclo Claude, una modifica del ciclo Linde che al posto di una valvola di laminazione ha un espansore.

Abbiamo poi visto l'impianto inverso ad assorbimento dove si sostituisce un compressore con un sistema compresso basato sull'assorbimento e il desorbimento dell'ammoniaca in acqua. Una parte del ciclo è identica al frigorifero a compressione di vapore ma per passare dal vapore al resto si utilizzano le caratteristiche di assorbimento dell'ammoniaca nell'acqua e la compressione avviene con una pompa con un risparmio di  $10^3$  rispetto al compressore.

Poi siamo andati a valutare i rendimenti limiti termodinamici.

Questo frigorifero ad assorbimento è stato brevettato dall'Electrolux.

RISPETTO ALLO SCHEMA CHE AVEVAMO VISTO NELLA ZONA CERCHIATA DOVEVA ESSERCICI UNO SCAMBIATORE DI CALORE. A 30 UN'ULTERIORE DESCRIZIONE DEL FUNZIONAMENTO DI QUESTO FRIGORIFERO CON ALCUNE CORREZIONI.

Abbiamo ripetuto velocemente i fenomeni termoelettrici con effetto Seebeck, Peltier e Thomson.

Abbiamo poi visto come fare un ciclo frigorifero sfruttando l'effetto Peltier, nelle due funzioni, e l'effetto Seebeck, nella forza elettromotrice che con una pila fa circolare corrente nella giunzione provocando l'effetto Peltier.

martedì 22 dicembre 2020 - Esercitazione 5

Abbiamo visto il diagramma psicometrico e alcune possibili trasformazioni come il riscaldamento isotitolo e il raffreddamento isotitolo.

## Miscelazione

È particolare poiché è l'unica che vedremo in cui la portata di aria secca cambia tra ingresso ed uscita.  
Abbiamo due correnti 1 e 2 che miscelate danno vita alla corrente di uscita 3.



Siamo sempre nell'ipotesi di stazionarietà.

Per il bilancio di massa tutta la portata di entrata va in uscita

$$G_1 + G_2 = G_3$$

Dividiamo il contributo rispetto il bilancio tra aria secca e vapore

$$\begin{cases} G_{as-1} + G_{as-2} = G_{as-3} \\ G_{v-1} + G_{v-2} = G_{v-3} \end{cases}$$

Riscriviamo allora le portate in vapore mediante la definizione di titolo  $x_i = \frac{G_{v-i}}{G_{as-1}}$  e il bilancio diventa:

$$x_1 G_{as-1} + x_2 G_{as-2} = x_3 G_{as-3}$$

Per il bilancio di energia:  $\dot{Q} - \dot{L}_f = \Delta \dot{H} + \cancel{\Delta \dot{E}_p} + \cancel{\Delta \dot{E}_c}$

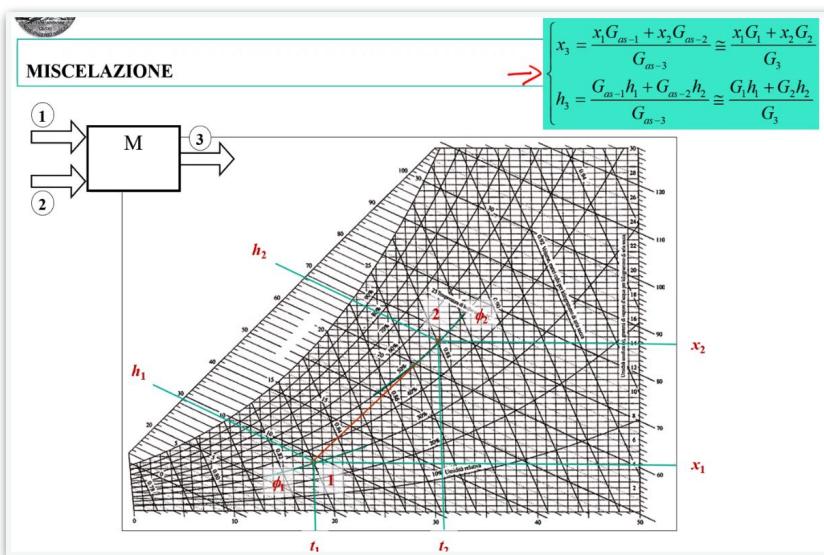
$$\text{E quindi } G_{as-1} h_1 + G_{as-2} h_2 = G_{as-3} h_3$$

Da queste due condizioni ci ricaviamo le condizioni di fine miscelazione:

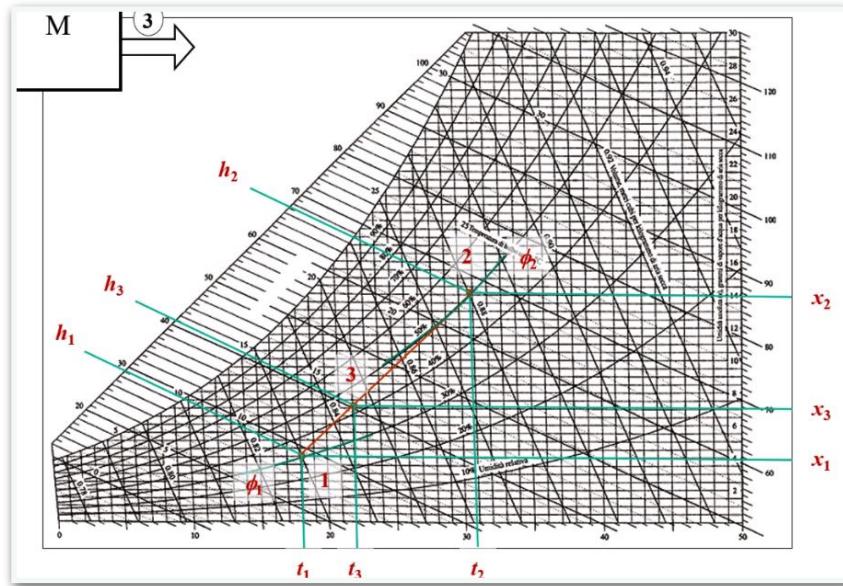
$$\begin{cases} x_3 = \frac{x_1 G_{as-1} + x_2 G_{as-2}}{G_{as-3}} \approx \frac{x_1 G_1 + x_2 G_2}{G_3} \\ h_3 = \frac{G_{as-1} h_1 + G_{as-2} h_2}{G_{as-3}} \approx \frac{G_1 h_1 + G_2 h_2}{G_3} \end{cases}$$

Si vede come si ottengono le medie pesate dei valori di ingresso i cui pesi sono le portate. La stessa relazione si scrive considerando la portata totale.

La condizione di fine miscelazione si trova lungo la congiunte tra 1 e 2.



Ovviamente lo stato termodinamico 3 sarà più vicino a quello con la portata maggiore.  
(In questo caso la portata in 1 è maggiore di quella in 2).

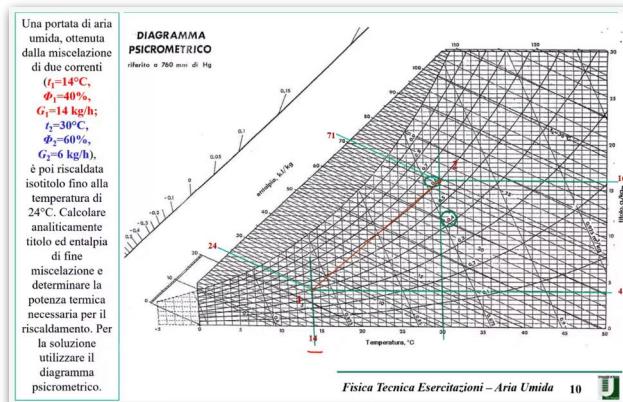


## Esercizio 1

Una portata di aria umida, ottenuta dalla miscelazione di due correnti ( $t_1=14^\circ\text{C}$ ,  $\Phi_1=40\%$ ,  $G_1=14 \text{ kg/h}$ ;  $t_2=30^\circ\text{C}$ ,  $\Phi_2=60\%$ ,  $G_2=6 \text{ kg/h}$ ), è poi riscaldata isotitolo fino alla temperatura di  $24^\circ\text{C}$ . Calcolare analiticamente titolo ed entalpia di fine miscelazione e determinare la potenza termica necessaria per il riscaldamento. Per la soluzione utilizzare il diagramma psicrometrico.

Prendere un diagramma (anche disegnandolo qualitativamente) e disegnare gli stati di interesse.

Per calcolare lo stato di fine miscelazione dobbiamo avere sia i titoli che le entalpie. Li andiamo a leggere dal grafico.



Per il titolo dovremmo moltiplicare per  $10^{-3}$  essendo espresso in g vapore.

Lo andiamo a calcolare con le portate totali e non quelle di aria secca.

Dal diagramma psicrometrico si possono leggere i seguenti valori:

$$\begin{aligned} h_1 &= 24 \text{ kJ kg}_{\text{as}}^{-1} & x_1 &= 4 \text{ g}_v \text{ kg}_{\text{as}}^{-1} \\ h_2 &= 71 \text{ kJ kg}_{\text{as}}^{-1} & x_2 &= 16 \text{ g}_v \text{ kg}_{\text{as}}^{-1} \end{aligned}$$

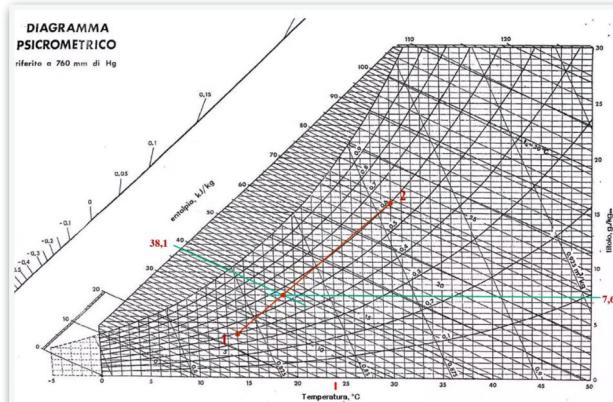
Detto "3" lo stato di fine miscelazione, valgono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} h_3 &= \frac{G_{\text{as}1} \cdot h_1 + G_{\text{as}2} \cdot h_2}{G_{\text{as}1} + G_{\text{as}2}} \cong \frac{G_1 \cdot h_1 + G_2 \cdot h_2}{G_1 + G_2} = 38.1 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}_{\text{as}}} \\ x_3 &= \frac{G_{\text{as}1} \cdot x_1 + G_{\text{as}2} \cdot x_2}{G_{\text{as}1} + G_{\text{as}2}} \cong \frac{G_1 \cdot x_1 + G_2 \cdot x_2}{G_1 + G_2} = 7.6 \frac{\text{g}_v}{\text{kg}_{\text{as}}} \end{aligned}$$

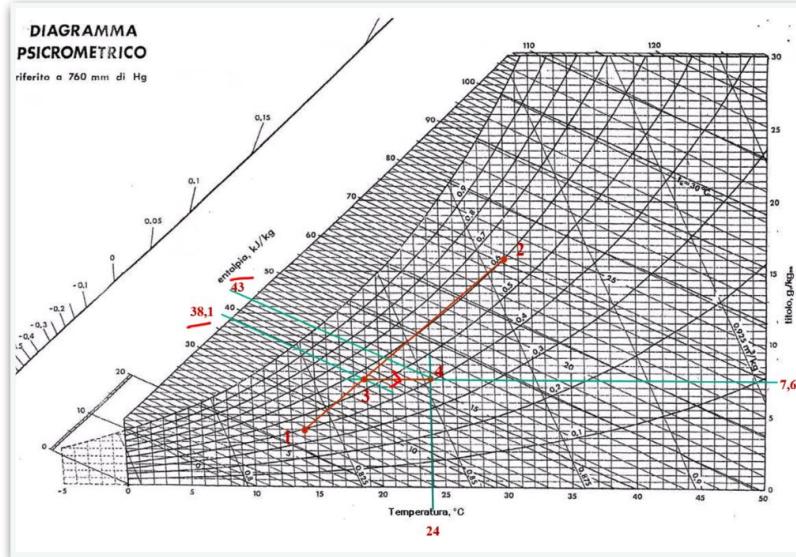
Considerando che

$$G_{\text{as}3} \cong G_3 = 20 \frac{\text{kg}}{\text{h}}$$

Riportiamo allora questo valore sul grafico e verifichiamo che cade sulla congiuntene come aspettato.



Adesso procedendo come indicato dal testo identifichiamo lo stato a 24°



la potenza termica assorbita nel riscaldamento isotitolo vale  
 $\dot{Q}_{3-4} = G_{m3} \cdot (h_4 - h_3) \geq G_3 \cdot (h_4 - h_3) = 20 \frac{\text{kg}}{\text{h}} (43 - 38.1) \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = 27.2 \text{W}$

#### Osservazione

$$G_3 = G_{m3} + G_{v3} = G_{m3} + x_3 G_{m3} = G_{m3}(1+x_3)$$

Quindi

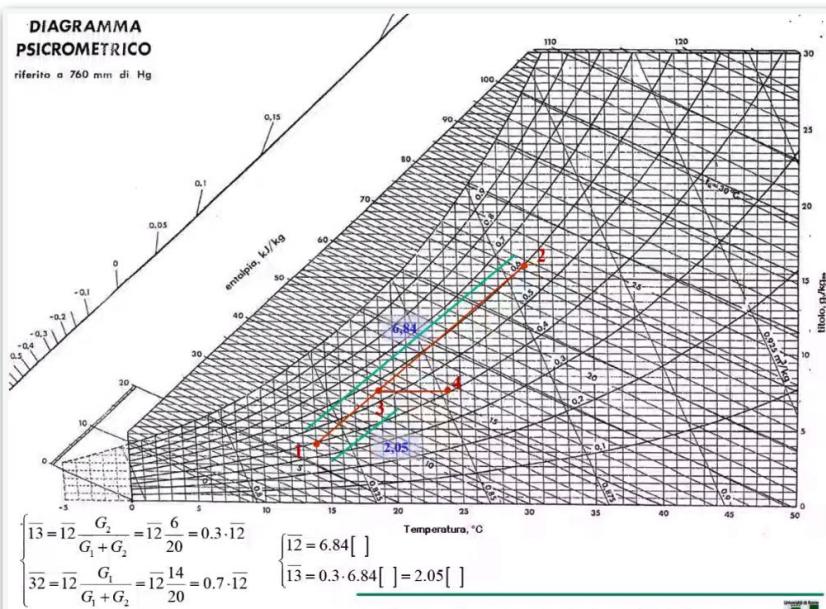
$$G_{m3} = \frac{G_3}{(1+x_3)} = \frac{20}{1+0.0076} \frac{\text{kg}}{\text{h}} = 19.85 \frac{\text{kg}}{\text{h}} \geq G_3$$



Trattandosi di miscelazione avremmo anche potuto fare riferimento ad aspetti geometrici o una semplice regola della leva:

Il segmento  $\overline{13}$  può essere identificato come in figura:

Cioè ci disegniamo gli stati termodinamici 1 e 2 e la congiungente e leggiamo la lunghezza della linea disegnata (es 6,84 cm) che moltiplichiamo per il rapporto delle portate.



Abbiamo visto già il raffreddamento isotitolo dove il bilancio di massa è tale che le portate rimangono uguali tra ingresso e uscita (solo nel caso isotitolo!). Avviene attraversi una batteria di raffreddamento.

È evidente come con il raffreddamento isotitolo possiamo arrivare massimo fino alla saturazione, ovvero alla *temperatura di rugiada* (questa si ottiene per un raffreddamento isobaro ma essendo il rapporto tra le pressioni equivalenti a quello del numero di moli qui siamo in una condizione isotitolo e quindi è anche isobara).

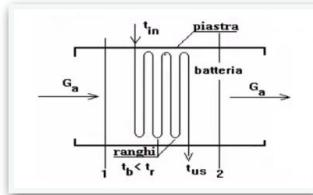
Cosa accade proseguendo?

L'unica possibilità è che la trasformazione prosegua a  $\phi$  costante (non può andare ancora a sinistra non essendoci più neanche il grafico delle trasformazioni).

Mentre raffreddiamo diminuisce il titolo poiché parte del vapore acqueo condensa.

### Raffreddamento e deumidificazione

Nei ranghi si arriva ad una temperatura inferiore a quella di rugiada.



Per la portata di aria secca non cambia nulla ma per la portata di vapore ci riscriviamo il bilancio di massa come:

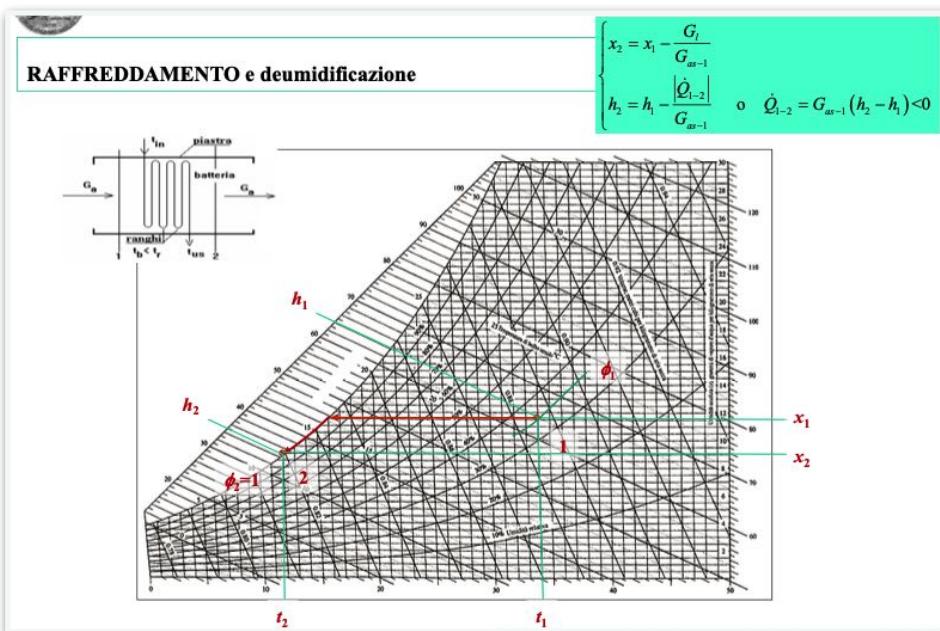
$$G_2 = G_1 - G_l \implies \begin{cases} G_{as-2} = G_{as-1} \\ G_{v-2} = G_{v-1} - G_l \end{cases}$$

Con  $x_i = \frac{G_{v-i}}{G_{as-i}}$  e allora  $x_2 G_{as-2} = x_1 G_{as-1} - G_l$

Per il bilancio di energia  $G_{as-1} h_1 - |\dot{Q}_{1-2}| = G_{as-2} h_2$

E allora dalle precedenti si ottiene:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 - \frac{G_l}{G_{as-1}} \\ h_2 = h_1 - \frac{|\dot{Q}_{1-2}|}{G_{as-1}} \quad \text{o} \quad \dot{Q}_{1-2} = G_{as-1} (h_2 - h_1) < 0 \end{cases}$$



## Esercizio 2

Svolgiamo questo esercizio senza il diagramma psicometrico ma sfruttando le correlazioni che esistono per l'aria umida.

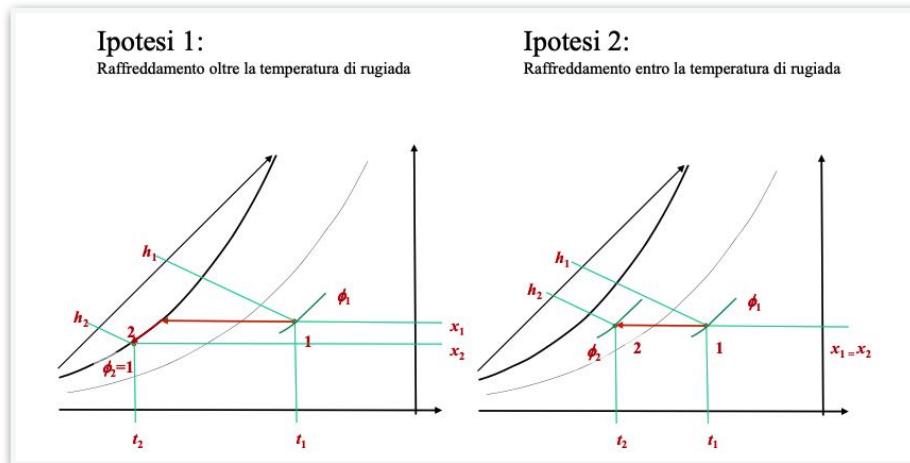
Ad una portata di aria umida ( $t_1=26^\circ\text{C}$ ,  $\Phi_1=0.5$ ,  $G_1=55 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ ) è inizialmente sottratta una potenza termica di 1550 kW, in seguito è riscaldata con 800 kW. Sulla base delle trasformazioni conosciute, determinare la temperatura finale della miscela. Sia il calore latente di evaporazione dell'acqua pari a  $2500 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ , le entalpie di riferimento di acqua liquida satura ed aria secca nulle alla temperatura di  $0^\circ\text{C}$ , i calori specifici pari a  $c_{p,a} = 1 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\text{K}^{-1}$  e  $c_{p,v} = 1.8 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ . Considerare nella stanza una pressione totale di  $10^5 \text{ Pa}$ , sapendo che temperatura e pressione del vapore in condizioni di saturazione sono legate dalla relazione  $p_s = 130t_s - 33$  (pressione in pascal e temperatura in celsius).

Riportare le trasformazioni su un diagramma psicrometrico.

Non abbiamo il diagramma ma delle grandezze che ci permettono di ricavare gli stati termodinamici e abbiamo la sola informazione sulla potenza termica prima del raffreddamento e poi dal riscaldamento.

Partiamo provando a disegnare lo stato 1 su un diagramma psicometrico che disegniamo noi.  
Si osservi che non è noto  $x_1$ .

Nel raffreddamento possono accadere due cose diverse, ovvero il raffreddamento può andare oltre o meno la temperatura di rugiada.



Nel caso vale l'ipotesi 1 il riscaldamento avverrà su un titolo  $x_2$  minore di quello di partenza.

In ogni caso il riscaldamento finale si troverà sulla curva isotitolo di  $x_2$  in un range di temperature compreso tra  $t_2$  e  $t_1$ .

Possiamo sempre ricavare  $h_2$  per lo stato 2 ma non sapremo quale ipotesi vale.

Allora sceglieremo un'ipotesi e poi l'andremo a verificare. Se vale l'ipotesi 1 conosciamo  $h_2$  (lo calcoleremo) e  $\varphi_2 = 1$  e quindi andiamo a verificare che  $t_2$  sia inferiore alla temperatura di rugiada (da determinare). Un'altra verifica da poter fare è che  $x_2 \leq x_1$ , c'è anche l'uguale poiché esiste un punto in cui le ipotesi sono contemporaneamente vere.

Se invece fosse valida l'ipotesi 2 avremmo lo stesso  $h_2$  ma questa ipotesi implica che la trasformazione sia isotitolo  $x_2 = x_1$ . Quindi potremmo verificare che  $\varphi_2 \leq 1$ .

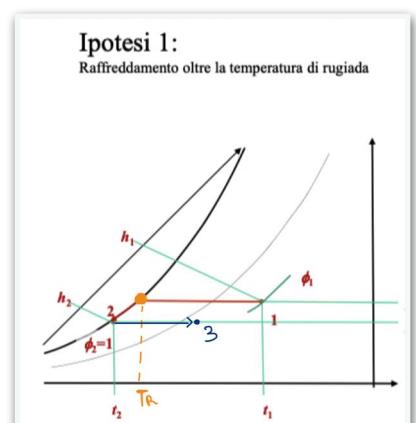
Se non è vera un'ipotesi si devono RIFARE I CALCOLI e verificare l'altra.

Partiamo dall'ipotesi 1 (quella più interessante).

Cioè partiamo ricavando  $h_2$  dal bilancio del raffreddamento:  $|\dot{Q}_{1-2}| = G_{as,1} (h_1 - h_2)$ .

Per calcolare questo ci serve  $h_1$  che possiamo ricavare dallo stato termodinamico 1.

Si ricordi che non abbiamo il diagramma e quindi andiamo a sfruttare la relazione che ci dice che l'entalpia della miscela è pari all'entalpia dell'aria secca alla stessa temperatura più  $x$  volte quella del vapore, cioè  $h_1(T_1) = h_{as}(T_1) + x_1 h_v(T_1)$ .



Di questa ultima relazione citata non conosciamo la  $x$  e la ricaviamo ricordando che  $x = 0,622 \cdot \frac{\varphi \cdot p_s}{p_t - \varphi \cdot p_s}$

Dove sono note  $\varphi_1$  e la pressione totale ma dobbiamo trovare la pressione di saturazione alla temperatura  $T_1$  che andiamo a cercare sulle tabelle del vapore saturo (entriamo nella tabella del vapore saturo con  $26^\circ\text{C}$ ).

Nell'esercizio utilizziamo una correlazione semplificata che va bene per risolvere questo esercizio ma non è sempre vera! I valori corretti sono quelli delle tabelle.

Allora svolgendo i calcoli:

**Per lo stato termodinamico "1" si calcola**

$$p_s(t_1) = 130t_1 - 33 = (130 \cdot 26 - 33) \text{ Pa} = 3347 \text{ Pa}$$

$$x_1 = 0,622 \frac{\varphi_1 \cdot p_s(t_1)}{p_t - \varphi_1 \cdot p_s(t_1)} = 0,622 \frac{0,5 \cdot 3347}{10^5 - 0,5 \cdot 3347} = 0,0106$$

$$G_{av,1} = \frac{G_1}{(1+x_1)} = 54,42 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \square G_1;$$

$$h_1 = h_{s,0} + c_{p,a}(T_1 - T_0) + x_1 [h_{f,0} + c_{p,v}(T_1 - T_0) + q_v] = c_{p,a}t_1 + x_1(c_{p,v}t_1 + q_v) = 52,96 \text{ kJkg}^{-1}$$

**Indicata con "2" la condizione di fine raffreddamento, per qualsiasi ipotesi, si scrive**

$$|\dot{Q}_{1-2}| = G_{av,1}(h_1 - h_2)$$

dalla quale

$$h_2 = h_1 - \frac{|\dot{Q}_{1-2}|}{G_{av,1}} = 24,48 \text{ kJkg}^{-1}$$

Si osservi come il testo del problema ci dice di prendere l'entalpia di riferimento nulla a  $0^\circ\text{C}$ .

Si osservi che si ha  $T_1 - T_0 = t_1 - t_0$  e ci conviene scriverlo in Celsius così da avere  $t_0 = 0$  ma bisogna stare attenti a

$\overbrace{\text{Kelvin}}$        $\overbrace{\text{Celsius}}$

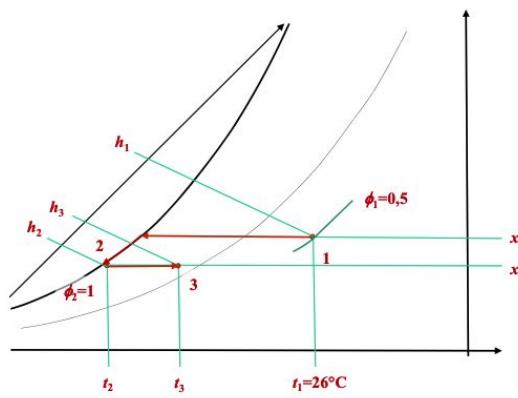
trasformare anche gli altri valori (se prendiamo  $T_1$  in Kelvin allora dobbiamo considerare  $T_0 = 273,15 \text{ K}$  e non  $0^\circ\text{C}$ ).

**SI FACCIA ATTENZIONE SE ESCONO FUORI VALORI DI ENTALPIA SUPERIORI A 100 kJ/kg E SI CONTROLLINO I CALCOLI, TIPICAMENTE NOI CI TROVEREMO A LAVORARE CON VALORI SEMPRE INFERIORI.**

Adesso è nota  $h_2$  e sceglieremo l'ipotesi 1, portando avanti i calcoli.

Supponendo di scegliere l'**ipotesi 1**, valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} h_2 = c_{p,a}t_2 + x_2(c_{p,v}t_2 + q_v) \\ \varphi_2 = \frac{P_v}{p_s(t_2)} = 1 \\ p_s(t_2) = 130t_2 - 33 \\ x_2 = 0,622 \frac{\varphi_2 \cdot p_s(t_2)}{p_t - \varphi_2 \cdot p_s(t_2)} \end{cases}$$



Facendo ulteriori sostituzioni ci viene un'equazione in  $t_2$ .

Abbiamo quindi 3 equazioni in tre incognite: pressione di saturazione,  $x_2$  e la temperatura  $t_2$ .

Viene fuori un'equazione di secondo grado (grazie all'espressione scelta all'inizio per l'espressione di saturazione).

Si ottengono allora due soluzioni di cui una è chiaramente improponibile e quindi la temperatura di fine raffreddamento è  $t_{2,1} = 8,19^\circ\text{C}$  (vedi pg seguente per i calcoli).

Adesso dobbiamo verificare che  $x_2 < x_1$ .

Quindi consideriamo lo stato due e facciamo la verifica:

Dopo opportune sostituzioni si ottiene una equazione di secondo grado in  $t_2$  del tipo:

$$a \cdot t_2^2 + b \cdot t_2 + c = 0$$

dove

$$\begin{cases} a = (0.622 \cdot 130 \cdot c_{p,v} - 130 \cdot c_{p,a}) \\ b = [0.622 \cdot 130 \cdot q_v - 0.622 \cdot 33 \cdot c_{p,v} + c_{p,a} \cdot (p_r + 33) + 130 \cdot h_2] \\ c = [-0.622 \cdot 33 \cdot q_v - h_2 \cdot (p_r + 33)] \end{cases}$$

Da cui si ricavano come soluzioni

$$\begin{cases} t_{2,1} = 8.19 \text{ } ^\circ\text{C} \\ t_{2,2} = -19646 \text{ } ^\circ\text{C} \end{cases}$$

Lo stato finale, dunque, dovrebbe essere individuato dalla coppia di variabili

$$\begin{cases} t_2 = 8.19 \text{ } ^\circ\text{C} \\ h_2 = 24.48 \text{ kJkg}^{-1} \end{cases}$$

Occorre verificare l'ipotesi fatta:

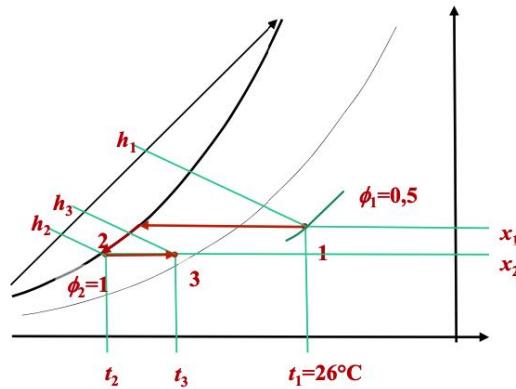
$$\begin{cases} p_s(t_2) = 130t_2 - 33 = 1031 \text{ Pa} \\ x_2 = \frac{h_2 - c_{p,a}t_2}{c_{p,v}t_2 + q_v} = 6.48 \cdot 10^{-3} < x_1 = 10.6 \cdot 10^{-3} \text{ c.v.d.} \end{cases}$$

Definito con "3" lo stato di fine riscaldamento, valgono le seguenti

$$\begin{cases} x_3 = x_2 = 6.48 \cdot 10^{-3} \\ h_3 = h_2 + \frac{\dot{Q}_{2-3}}{G_{a,1}} = 39.18 \text{ kJkg}^{-1} \end{cases}$$

Per la temperatura si scrive la relazione

$$t_3 = \frac{h_3 - x_3 \cdot q_v}{c_{p,a} + x_3 \cdot c_{p,v}} = 22.72 \text{ } ^\circ\text{C}$$



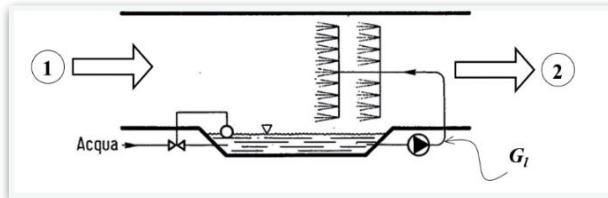
Seguendo l'altra ipotesi alla fine dei calcoli si arriverà ad un assurdo che rappresenta proprio il fatto che l'ipotesi non è corretta.

Allora eseguiamo il riscaldamento e ricaviamo la temperatura  $t_3 = 22,72^\circ\text{C}$ .

## Umidificazione adiabatica

### (Saturatore adiabatico)

Potrebbe essere utile aumentare l'umidificazione.



Quanto accade è esattamente ciò che abbiamo visto nel bulbo umido dello psicrometro e questa trattazione giustifica alcune assunzioni fatte nella descrizione delle psicrometri.

Arriva l'aria umida nella condizione 1 e incontra delle doccette che spruzzano acqua nebulizzata e se la miscela in 1 non è satura in uscita avremmo una miscela che tende ad essere satura.

Per il bilancio di massa abbiamo in uscita la somma della portata di ingresso e quella che evapora,  $G_2 = G_1 + G_l$

$$\text{E quindi } \begin{cases} G_{as-2} = G_{as-1} \\ G_{v-2} = G_{v-1} + G_l \end{cases}$$

$$\text{Con } x_i = \frac{G_{v-i}}{G_{as-i}} \text{ si ottiene } x_2 G_{as-2} = x_1 G_{as-1} + G_l$$

Per la portata di aria secca non cambia nulla.

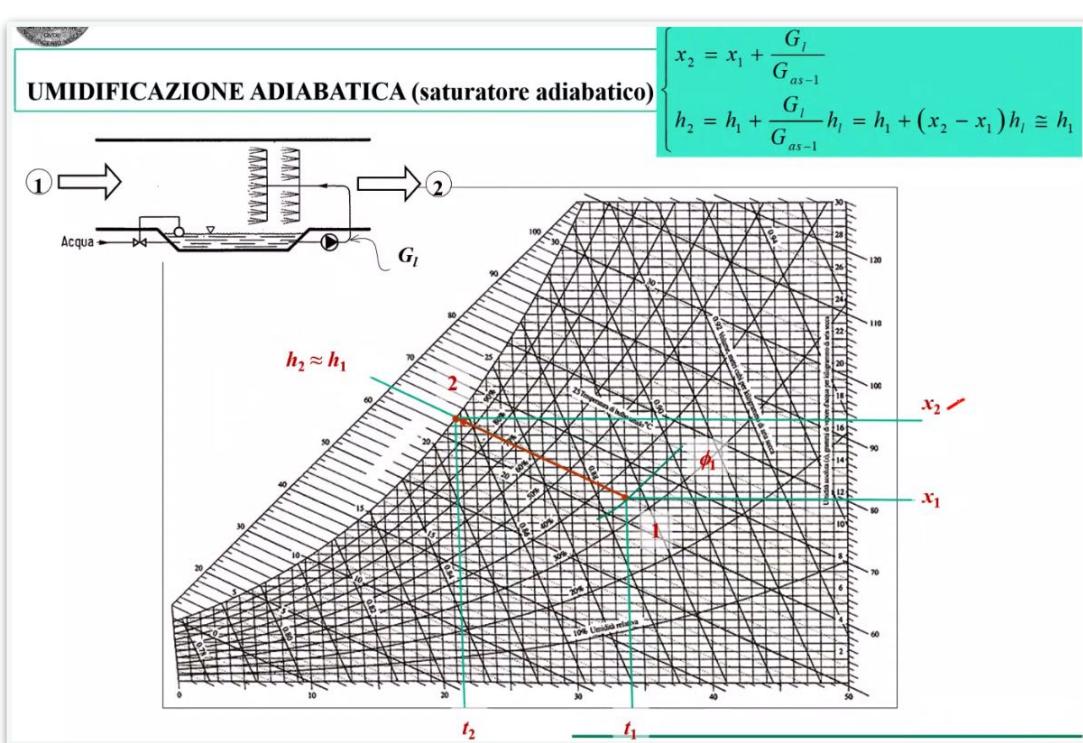
Per il bilancio di energia:

$$G_{as-1} h_1 + G_l h_l = G_{as-2} h_2$$

$$\text{E dalle precedenti: } \begin{cases} G_l = G_{as-1} (x_2 - x_1) \rightarrow \frac{G_l}{G_{as-1}} = (x_2 - x_1) \\ h_2 = h_1 + \frac{G_l}{G_{as-1}} h_l = h_1 + (x_2 - x_1) h_l \approx h_1 \end{cases}$$

Quindi lo riteniamo ad entalpia costante.

Per rappresentarlo sul diagramma psicometrico:

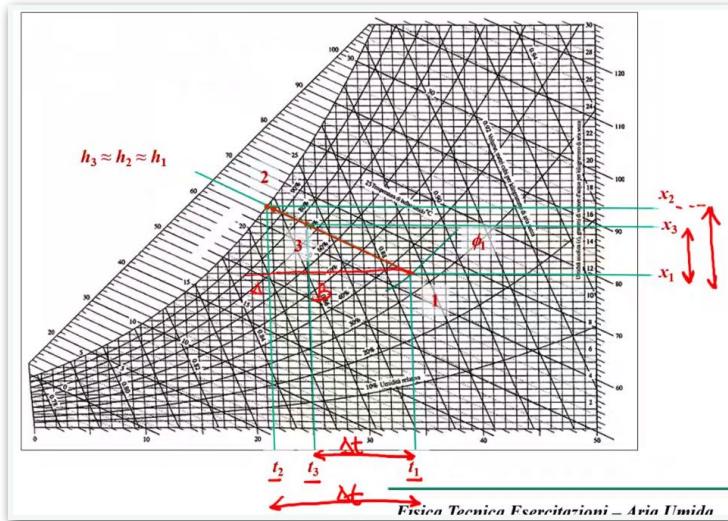


Questo è il saturatore adiabatico ideale dove immaginiamo che questo componente sia in grado di portare alla completa saturazione ma questo nella realtà non è possibile e non riusciamo mai ad arrivare alla completa saturazione ma siamo costretti terminare prima dello stato 2.

Rimarremo sempre sullo stato ad entalpia costante.

$$\text{Questo discorso si porta dietro l'efficienza del saturatore adiabatico } \epsilon = \frac{t_1 - t_3}{t_1 - t_2} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{13}{12}$$

Cioè graficamente:

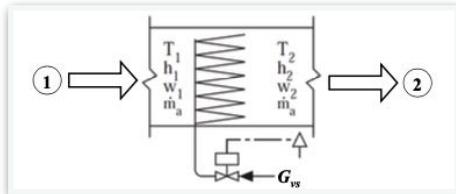


L'efficienza viene espressa in termini percentuali dove 100% è il saturatore ideale.

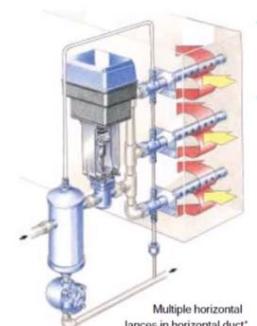
Si osservi che l'efficienza non c'entra nulla con la saturazione, cioè se l'efficienza è inferiore al 100% una certa percentuale di efficienza non rappresenta la percentuale di saturazione id uscita! NON CONFONDERE LE DUE COSE.

### Umidificazione isoterma

(Iniezione diretta di vapore saturo)



Viene spruzzato direttamente vapore surriscaldato all'interno della miscela.



Per il bilancio di massa consideriamo il valore di vapore che di fatto finisce nella miscela ( $G_{vs}$ ) e quindi:

$$G_2 = G_1 + G_{vs} \Rightarrow \begin{cases} G_{as-2} = G_{as-1} \\ G_{v-2} = G_{v-1} + G_{vs} \end{cases}$$

$$\text{Con } x_i = \frac{G_{v-i}}{G_{as-i}} \text{ si ottiene } x_2 G_{as-2} = x_1 G_{as-1} + G_{vs}$$

Per il bilancio di energia abbiamo l'aria umida che entra e il vapore in iniettato in ingresso e la portata di uscita:

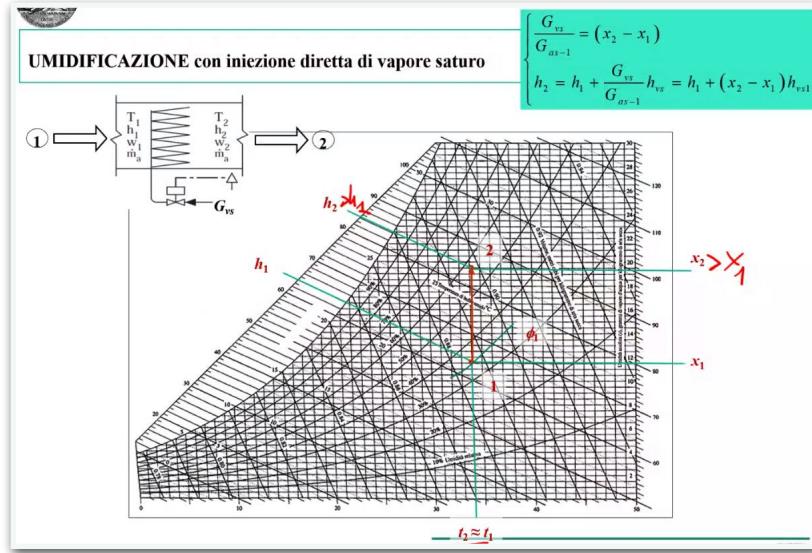
$$G_{as-1} h_1 + G_{vs} h_{vs} = G_{as-2} h_2$$

$$\text{Dalle precedenti possiamo ricavare: } \begin{cases} \frac{G_{vs}}{G_{as-1}} = (x_2 - x_1) \\ h_2 = h_1 + \frac{G_{vs}}{G_{as-1}} h_{vs} = h_1 + (x_2 - x_1) h_{vs} \neq h_1 \end{cases}$$

Attenzione che qui c'è una differenza di titoli molto bassa ma l'entalpia è quella del vapore molto più grande di quella del liquido quindi questa volta c'è una differenza marcata di entalpia  $h_2 > h_1$

Inoltre definiamo questa trasformazione all'incirca isotermica poiché introduciamo si vapore surriscaldato (oltre i 100°C) ma ne introduciamo una piccola quantità e la temperatura cambia di poco (differenze di  $0,5 \div 1^\circ$ ).

Sul diagramma:



Prendendo come volume di controllo lo scambiatore non vado a considerare eventuali organi meccanici come la pompa del vapore che risulta esterna al volume di controllo.

Questi compariranno nel bilancio complessivo dell'impianto di climatizzazione in cui ci sarà del lavoro speso per mettere in movimento il fluido.

Abbiamo visto due umidificazioni con vantaggi e svantaggi diversi.

Nell'iniezione diretta di vapore avremmo bisogno anche di una caldaia (oltre la pompa) e quindi di un impianto più costoso ma abbiamo una regolazione più immediata.

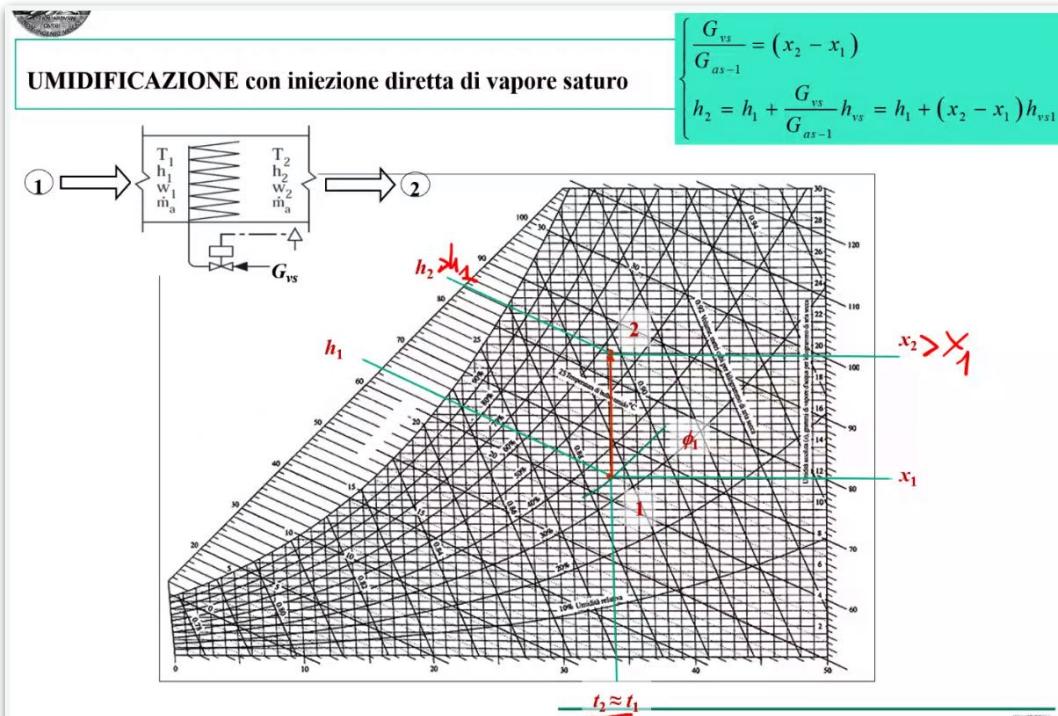
La differenza fondamentale è che nel caso di saturatore adiabatico abbiamo l'acqua a bassa temperatura che ristagna (temperatura ambiente) e questo è pericolo per la proliferazione dei batteri e in alcune applicazioni si evita (come negli impianti di climatizzazione degli ospedali).

In generale si cerca di andare sempre più verso la direzione dell'iniezione di vapore.

## Esercizio 3

Per la climatizzazione di un locale è necessario introdurre, alle temperature di bulbo secco ed umido rispettivamente di  $30^{\circ}\text{C}$  e  $18^{\circ}\text{C}$ , una portata di aria umida di  $0.5 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ , prelevata dall'esterno alla temperatura di  $7^{\circ}\text{C}$  con titolo pari a  $2\cdot10^{-3}$ . Rappresentare sul diagramma psicrometrico allegato le possibili trasformazioni necessarie per portare l'aria umida dalle condizioni esterne a quelle di immissione, supponendo per il saturatore adiabatico dapprima una efficienza unitaria e poi pari a 80%. Determinare in entrambe le configurazioni la temperatura di uscita dal saturatore e calcolare la potenza termica complessivamente scambiata tra il fluido e l'unità di trattamento

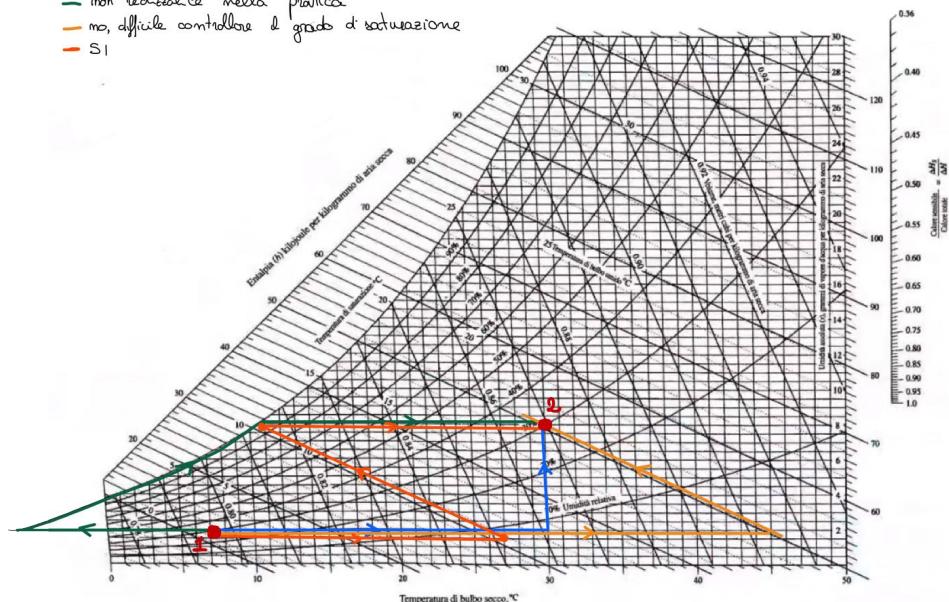
Abbiamo quindi necessità di climatizzare introducendo l'aria alla temperatura e umidità richiesta. Rappresentiamo prima gli stati termodinamici e poi ci chiediamo come arrivare dalle condizioni esterne a quelle desiderate.



Vogliamo andare da 1 a 2.

Quando è stato pensato l'esercizio non era in programma l'iniezione di vapore e quindi la strada per andare da 1 a 2 era una sola.

- iniezione di vapore (possibile)
- non realizzabile nella pratica
- no, difficile controllare il grado di saturazione
- Sì



Si potrebbero utilizzare quindi queste due trasformazioni.

La trasformazione in verde non è fattibile in una comune applicazioni poiché non riusciamo a controllare il vapore necessario cioè non possiamo controllare le singole molte di vapore nelle applicazioni pratiche (potrebbe essere fattibile in laboratorio ma non ci interessa).

Per far ricorso al saturatore siamo ad entalpia costante e quindi considero la relativa curva in 2 (non in 1 altrimenti arriverei comunque in una situazione non realizzabile nella pratica) e poi con un isotitolo arrivo sulla curva ad entalpia costante (in giallo).

Dal punto di vista teorico sarebbe più che fattibile ma per uscire in 2 dovremmo poter avere il controllo dell'uscita del saturatore che nella realtà non abbiamo poiché nel saturatore andiamo a saturare tutto e a seconda dell'efficienza valutiamo se fermarci prima. Quindi anche questa opzione va scartata dal punto di vista pratico.

Allora andiamo a fare un altro percorso in cui immaginiamo un saturatore con efficienza massima e la rappresentiamo al contrario: da 2 andiamo alla  $\varphi = 100\%$ , poi la trasformazione a entalpia costante e poi consideriamo l'ingresso nel saturatore (in arancione). Cioè un preriscaldamento in ingresso al saturatore, saturazione completa tale che il titolo di uscita sia il titolo della condizione finale e quindi basterà un riscaldamento isotitolo.

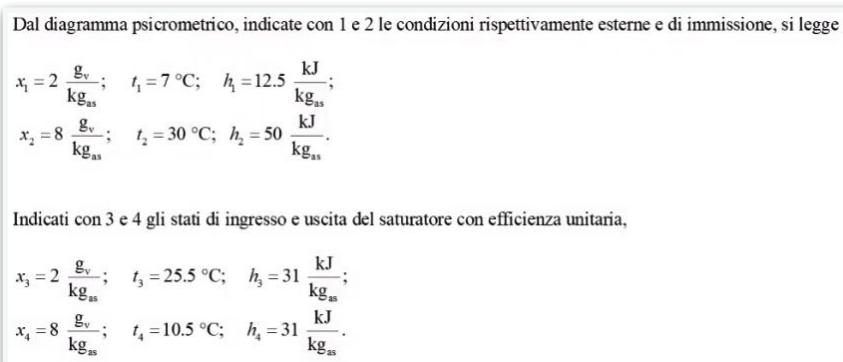
La cosa fondamentale era capire come entrare nel saturatore.

Vedremo anche come considerare un'efficienza differente da 1.

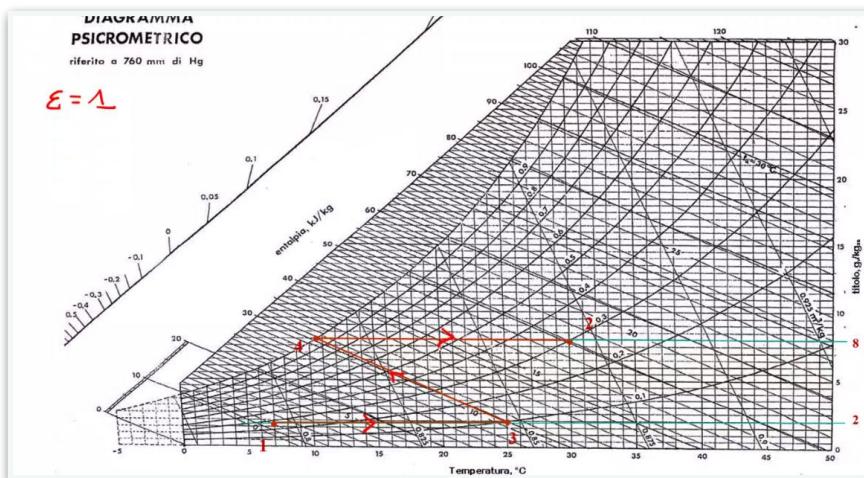
Possiamo eseguire o quella in azzurro o quella arancione (saturatore adiabatico).

Abbiamo capito che andiamo da 1 a 2 con il saturatore adiabatico considerandolo ad efficienza unitaria.

Riportiamo allora i valori che andremo a leggere dal grafico



Cioè riportiamo 1 e 2 e con  $\varepsilon=1$  disegniamo la trasformazione partendo da 2 e verso 1, cioè la trasformazione sarà 1->3->4->2

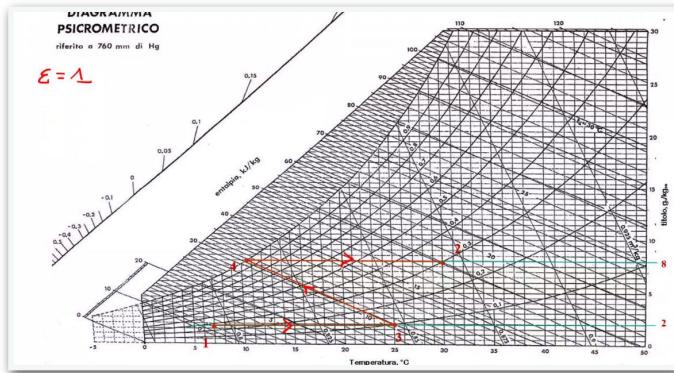


Disegnarla sempre al contrario per tracciare correttamente l'isotitolo  $x_4 = x_2 \wedge x_3 = x_1$  e considerare la curva ad entalpia costante  $h_3 = h_4$ .

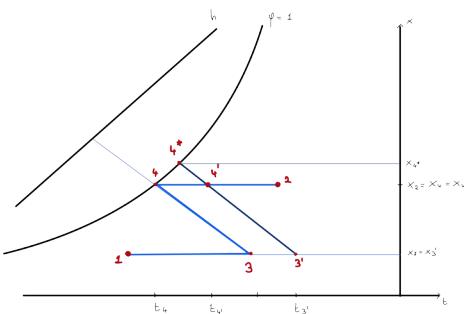
Allora possiamo leggere i valori di interesse.

Dobbiamo però considerare un saturatore reale che in questo caso ha un'efficienza del 80%.

Se operassimo considerando un'efficienza ideale e un'entrata nello stato 3 l'uscita sarebbe nella curva 0,8 da cui possiamo varare il post riscaldamento che però sarebbe nello stato termodinamico con un titolo diverso.



Allora dobbiamo cambiare l'ingresso al saturatore in maniera tale che l'uscita reale abbia il titolo di 2 e sia pari all'80 del segmento che avremmo avuto con la completa saturazione.



Riportiamo allora i valori 3', 4' e 4\*. Dove 34 è il caso del saturatore ideale con il titolo di 4 uguale a quello di due. Essendo l'efficienza però dell'80% dobbiamo spostarci verso destra in modo da avere un'efficienza del 100% pari al 3'4\* ma ci fermiamo prima (80%) tale che 3'4' sia pari a 34 in modo da avere in 4' lo stesso titolo di 2.

Cioè

$$\overline{34} = 27 \text{ cm}$$

$$\overline{3'4'} = 27 \text{ cm} = 0,8 \cdot \overline{3'4^*} = \overline{34}$$

$$\overline{3'4^*} = \frac{27}{0,8} \approx 34 \text{ cm}$$

$$\text{L'efficienza invece è } \varepsilon = \frac{t_{3'} - t_{4'}}{t_{3'} - t_{4^*}} = \frac{x_{4'} - x_{3'}}{x_{4^*} - x_{3'}} = \frac{\overline{3'4'}}{\overline{3'4^*}}$$

Cioè calcolando questi valori:

Nell'ipotesi di funzionamento del saturatore con efficienza pari a 0,8, siano 3' e 4' i nuovi stati di ingresso e uscita del saturatore, mentre con 4\* si indichi la condizione di saturazione completa nell'ipotesi di ingresso nelle condizioni 3'.

Dalla definizione di efficienza risulta:

$$\varepsilon = \frac{t_{3'} - t_{4^*}}{t_{3'} - t_{4^*}} = \frac{x_{4^*} - x_{3'}}{x_{4^*} - x_{3'}}$$

Dalla quale

$$x_{4^*} = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{\varepsilon} = \left( 2 + \frac{8-2}{0,8} \right) \frac{g_v}{kg_{as}} = 9,5 \frac{g_v}{kg_{as}}$$

Dal diagramma psicrometrico, individuato lo stato 4\* ( $x_{4^*} = 9,5 \cdot 10^{-3}$ ;  $\phi_{4^*} = 1$ ), è possibile tracciare la curva ad entalpia costante e determinare i punti 3' e 4'. Risulta quindi:

$$x_{3'} = 2 \frac{g_v}{kg_{as}}; \quad t_{3'} = 31,5 \text{ °C}; \quad h_{3'} = 37 \frac{kJ}{kg_{as}}$$

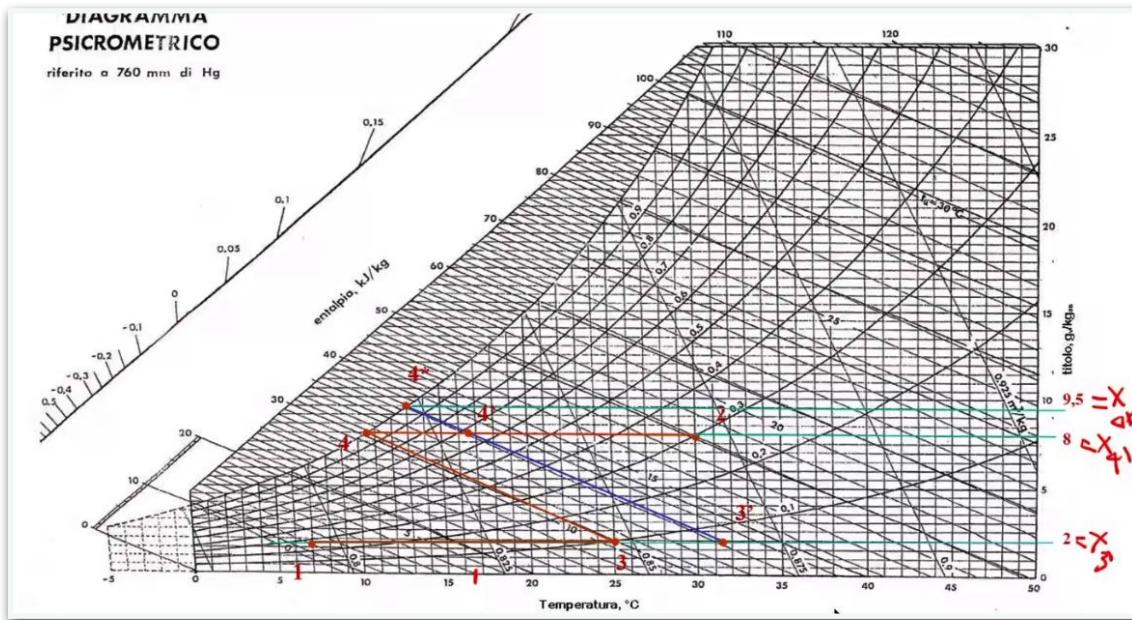
$$x_{4'} = 8 \frac{g_v}{kg_{as}}; \quad t_{4'} = 16,5 \text{ °C}; \quad h_{4'} = 37 \frac{kJ}{kg_{as}}$$

Riguardo la potenza termica scambiata, trattandosi di due riscaldamenti, indipendentemente dall'efficienza del saturatore, si ha

$$\dot{Q}_{1-2} = G_{as1} \cdot (h_2 - h_1) \cong G_1 \cdot (h_2 - h_1) = 0,5 \frac{kg}{s} (50 - 12,5) \frac{kJ}{kg} = 18,75 \text{ kW}$$

Allora ci possiamo disegnare l'effettiva trasformazione:

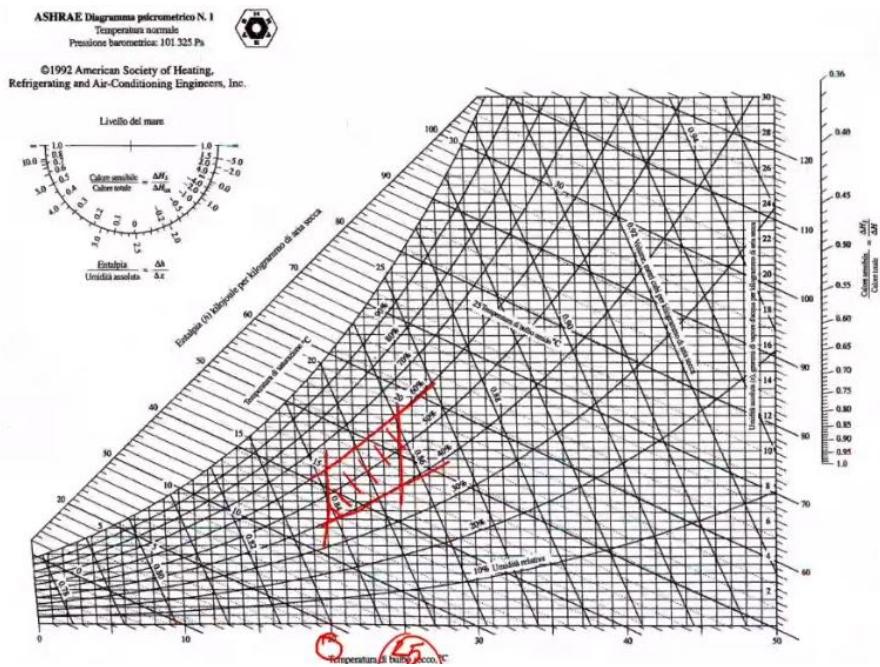
Abbiamo ricavato i titoli e riportiamo le trasformazioni:



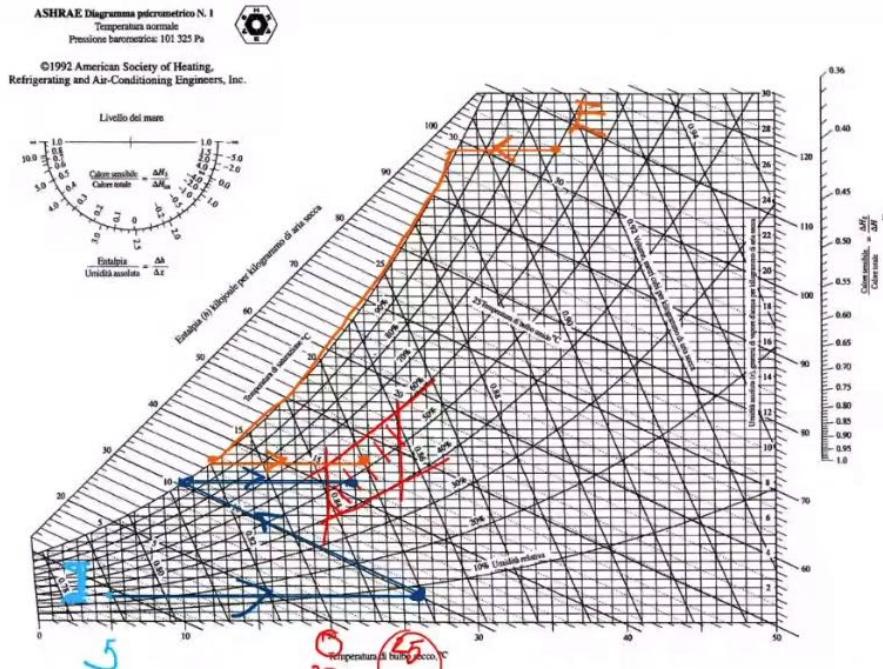
Abbiamo allora graficato la trasformazione reale.

La potenza termica scambiata è sempre la stessa poiché le trasformazioni sono a entalpia costante, cambia solo come si distribuisce tra pre e post riscaldamento tra il caso e  $\epsilon = 1$  e il caso reale.

Si ricordi che ci occupiamo di aria umida poiché è l'ambiente in cui viviamo che presenta un ottimo tra il 40 ÷ 60 % di umidità e 20 – 25°C con specifiche richieste civili e/o industriali.



L'aria esterna è in condizioni differenti da quelle richieste, ad esempio nel caso di aria invernale (**I**) una possibile soluzione è quella del saturatore adiabatico (preriscaldo → saturatore → post-riscaldo).



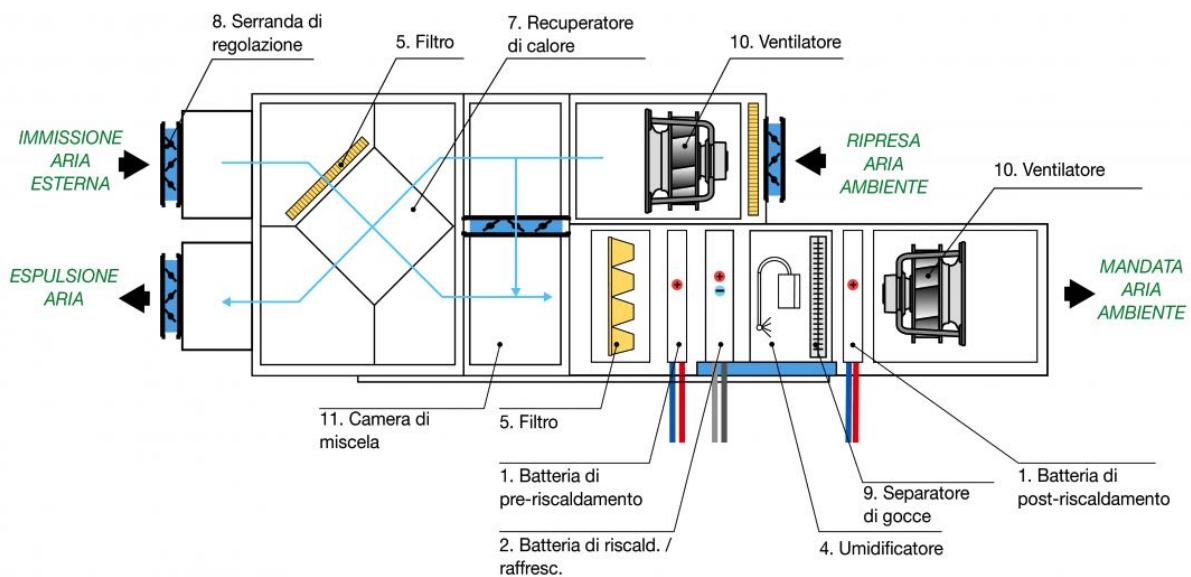
Oppure nel caso di raffreddamento con umidificazione di un caso estivo (**E**) in cui diminuiamo la temperatura con una trasformazione isotitolo fino alla temperatura di rugiada e poi a  $\varphi$  costante.

Dopo le vacanze natalizie ci occuperemo di capire le condizioni di immissione dell'aria in relazione all'ambiente in cui ci troviamo per completare lo studio degli impianti di climatizzazione.



# FISICA TECNICA

Settimana 15



# Indice settimana 15

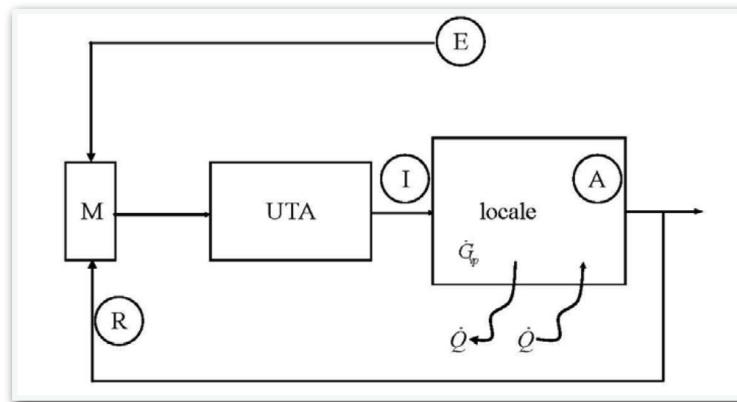
Indice settimana 15	2
giovedì 7 gennaio 2021 - Esercitazione 6	3
Impianti di climatizzazione	3
<i>Climatizzazione</i>	3
<i>Esercizio 1</i>	8
<i>Esercizio 2</i>	15

# Impianti di climatizzazione

Ci occuperemo di vedere le trasformazioni generali dividendo caso estivo/invernale senza però soffermarci troppo su questi due aggettivi ma concentrandoci sul bilancio tra il luogo da climatizzare e l'esterno.

## Climatizzazione

Dobbiamo garantire il controllo di temperatura e umidità in un locale, ovvero il benessere termoigometrico per le persone che vivono in quel locale.



Andiamo a considerare i bilanci sia in termini di scambi di massa che di energia.

Consideriamo impianti tutta aria quindi avremo aria umida in ingresso e in uscita, eventuali generazioni di vapore, scambi di calori ed eventuali calori generati  $\dot{Q}_g$ .

Il locale è immerso nell'ambiente esterno ed eventuali pareti direttamente affacciate con l'esterno il locale tende a scambiare calore. Ovviamente nel caso estivo in cui la temperatura esterna è maggiore di quella interna il calore sarà entrante mentre nel caso invernale ci sarà il caso opposto.

All'interno del locale potremmo avere una potenza termica generata  $\dot{Q}_g$  come ad esempio dalle luci che tendono a scaldare o eventuali macchinari che potrebbero contribuire alla generazione di calore. Poi in locali speciali (es. cucine) c'è un calore di processo dovuto alle finalità del locale stesso. È bene anche considerare le persone che si trovano nel locale che generano un certo calore.

Potrebbero esserci delle infiltrazioni d'aria dall'esterno.

Per i contributi della portanza generalmente viene generato vapore.

Considerando questi contributi si fa riferimento al **fabbisogno termico del locale** per portarlo alle condizioni desiderate (A). In genere l'aria non può essere immessa direttamente nelle condizioni di (A) ma verrà immessa in una condizione diversa che, tenendo conto degli scambi termici, porterà alla temperatura desiderata.

Quindi nella climatizzazione tutto sta ad individuare le condizioni di immissione (I) una volta noti i carichi termici.

Non andremo a vedere le singole componenti impiantistiche ma vedremo le trasformazioni. Sappiamo già quali trasformazioni ma vedremo come utilizzarle per ottenere le condizioni di immissione desiderate.

(M) è un miscelatore poiché in genere l'aria di uscita viene in parte recuperata (o ripresa) in (R) e viene miscelata con l'aria dell'ambiente esterno.

Poi tutto finisce nell'UTA ovvero nell'unità di trattamento dell'aria che al suo interno ha gli scambiatori di calore (batterie di raffreddamento/riscaldamento), l'umidificatore, il deumidificatore e le varie componenti di cui abbiamo già discusso affrontando le varie trasformazioni.

Dal punto di vista termodinamico partiamo dai bilanci essendo un sistema aperto ovvero bilancio di massa e bilancio di energia. Per il bilancio di energia (terza eq) si osservi come la condizione di uscita è proprio la condizione del locale.

A sinistra la condizione di uscita e a destra la condizione ingresso, il calore a destra è un calore assorbito.

Il calore viene sempre considerato positivo se assorbito e quindi negativo se ceduto. Il calore generato all'interno è sicuramente positivo mentre il calore scambiato con l'ambiente esterno può essere sia positivo che negativo (e considerato a primo o secondo membro a seconda che sia entrante o uscente).

Per il bilancio di massa (prime due eq) abbiamo la stessa portata e per il vapore abbiamo la somma del vapore di ingresso e di quello generato che vanno in uscita.

$$\begin{cases} G_{as-A} = G_{as-I} \\ x_A G_{as-A} = x_I G_{as-I} + G_{av} \\ h_A G_{as-A} = h_I G_{as-I} + \dot{Q}_{TOT} \end{cases}$$

Allora ricaviamo le condizioni di immissione:

$$\begin{cases} x_I = x_A - \frac{G_{vp}}{G_{as-A}} \\ h_I = h_A - \frac{\dot{Q}_{TOT}}{G_{as-A}} \end{cases}$$

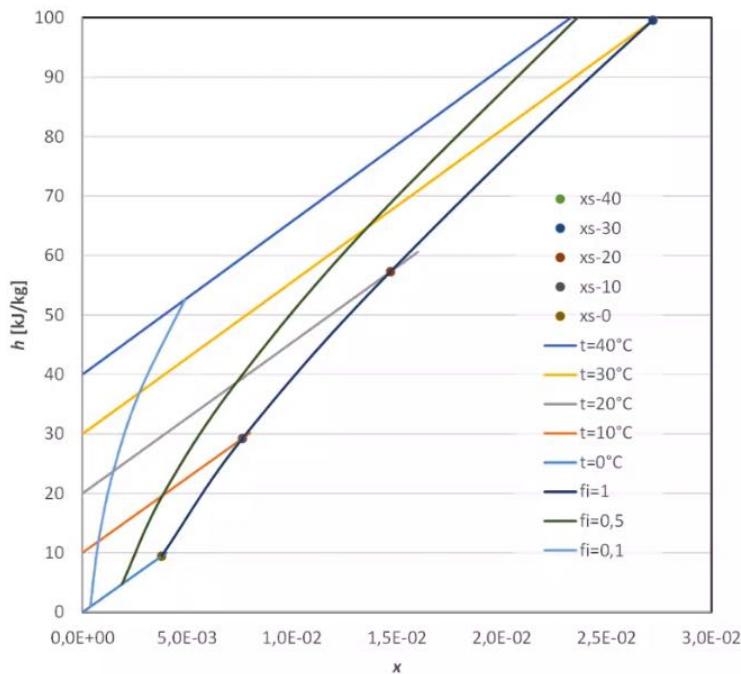
Il calore totale è la somma del  $\dot{Q}_{SENS}$  dovuto a quanto considerato prima (calore scambiato con ambiente esterno, eventuali potenze termiche generate all'interno da luci, persone, macchinari, ecc., calore dovuto alle infiltrazioni) mentre il  $\dot{Q}_{LAT}$  è dovuto alla generazione del vapore che ha una sua entalpia calcolata come l'entalpia del vapore saturo alla temperatura a cui viene generato (che poi assumiamo pari al calore latente, tipicamente **2500 kJ/kg**)

$$\begin{cases} \dot{Q}_{TOT} = \dot{Q}_{SENS} + \dot{Q}_{LAT} \\ \dot{Q}_{SENS} = G_{as-A} \cdot c_{p-as} (t_A - t_I) \\ \dot{Q}_{LAT} = G_{vp} \cdot h_{vp} (t_{vp}) = G_{vp} \cdot q_v \end{cases}$$

Generalmente per il  $\dot{Q}_{SENS}$  non consideriamo questa relazione ma la somma dei vari contribuiti come il calore scambiato con l'esterno, eventuali sorgenti termiche ed eventuali scambi dovuti alle infiltrazioni.

Esiste una retta di lavoro su cui si riportano le condizioni di immissione:

in figura il diagramma di Mollier, cioè un diagramma entalpia-titolo dove le isoterme sono delle rette e questo si dimostra per costruzione (non vedremo come).



Allora andiamoci a calcolare il rapporto tra  $Q_{TOT}$  e la portata di vapore, cioè  $\dot{Q}_{TOT} = \dot{Q}_{SENS} + \dot{Q}_{LAT} = (h_A - h_I) G_{as-A}$  e  $G_{vp} = G_{as} \cdot (x_A - x_I)$ .

Allora facendo il rapporto si ricava  $P = \frac{\dot{Q}_{TOT}}{\dot{G}_{vp}} = \frac{h_A - h_I}{x_A - x_I} = \frac{\Delta h}{\Delta x}$ , questa è un'isoterma che quindi è una rettale nel diagramma di Mollier.

Inoltre considerando

$$R = \frac{\dot{Q}_{SENS}}{\dot{Q}_{TOT}} = \frac{G_{as-A} \cdot c_{p-as} (t_A - t_I)}{G_{as-A} \cdot (h_A - h_I)} = \frac{c_{p-as} (t_A - t_I)}{h_A - h_I} = \frac{\dot{Q}_{TOT} - \dot{Q}_{LAT}}{\dot{Q}_{TOT}} = 1 - \frac{G_{vp} \cdot q_v}{G_{vp} \cdot P} = 1 - \frac{q_v}{P},$$

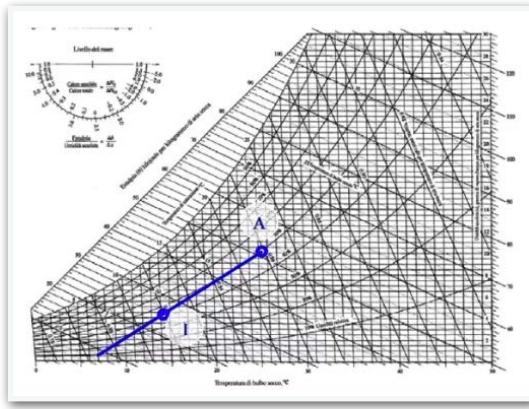
e otteniamo nuovamente una retta nel diagramma psicometrico.

Questo ci porta a dire che il punto di immissione si sposta su una retta detta **retta di immissione** o **retta di lavoro**.

Facciamo un esempio per il **caso estivo**:

$$\begin{cases} x_I = x_A - \frac{G_v}{G_{as}} \\ h_I = h_A - \frac{\dot{Q}_{TOT}}{G_{as}} \end{cases}$$

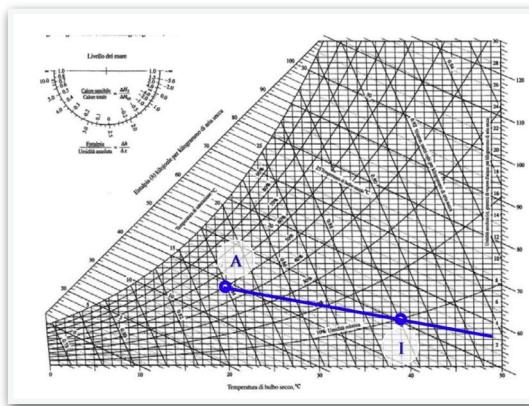
In estate generalmente abbiamo un  $\dot{Q}_{TOT} > 0$  poiché viene assorbito essendo l'esterno più caldo (ci sono poi anche i contributi di calori interni come luci, persone, ecc). E abbiamo anche  $G_{vp} > 0 \implies x_I \leq x_A$  e dalla condizione sul calore totale si ottiene che  $h_I \leq h_A$  allora il punti di immissione non può che trovarsi a basso a sinistra rispetto l'ambiente. La retta è inoltre rappresentata dalla pendenza  $R$ .



Nel **caso invernale** le relazioni sono le stesse ma si ha generalmente  $\dot{Q}_{TOT} \leq 0 \implies h_I \geq h_A$ , prevale il calore ceduto  $G_{vp} \geq 0 \implies x_I \leq x_A$

verso l'esterno sempre che all'interno non abbiamo elevate generazioni di calore.

Allora l'entalpia deve crescere e il titolo continua ad essere inferiore allora ci troveremo in basso a destra.



Non fare questo discorso ma partire sempre dell'equazione di bilancio e procedere un ragionamento analogo.

**NOTA 1.** Abbiamo aria presa dall'esterno e un'eventuale ripresa ma concentriamoci sull'aria esterna poiché la ripresa è legata anche al discorso di salubrità dell'aria dove bisogna controllare la presenza di monossido, azoto e altre sostanze. Questo è regolato dalle normative che obbligano in ogni caso a rinnovare l'aria dei locali. Quindi  $G_{asI} \geq G_{asRINN}$ , cioè l'aria secca da immettere è comunque maggiore di quella di rinnovo calcolata come

$$G_{asRIN} = \frac{VN}{v_{as-A}} = \frac{[\text{volume del locale}] \cdot [\text{numero di ricambi orari}]}{[\text{volume specifico dell'aria}]} \left[ \frac{\text{kg}}{\text{s}} \right].$$

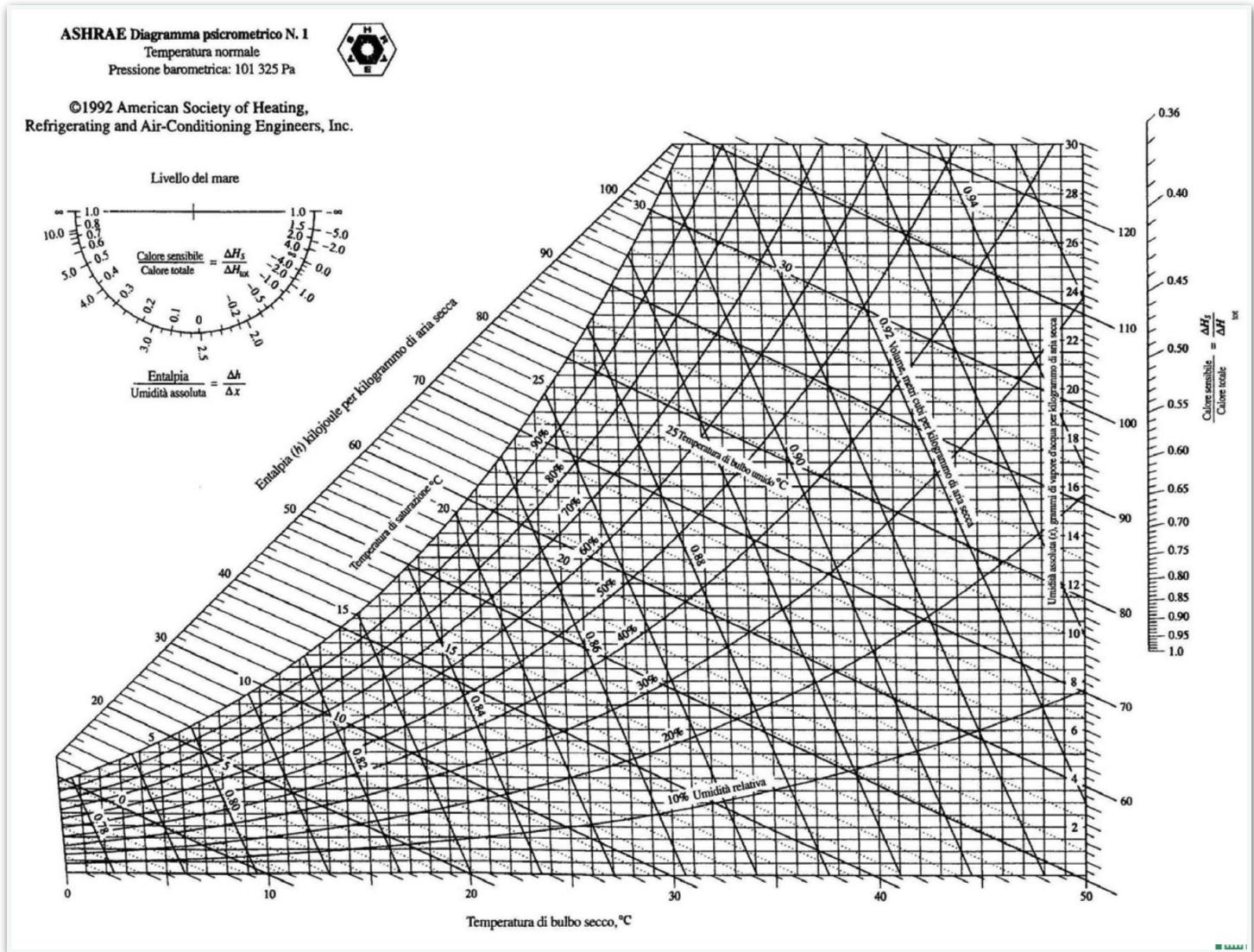
**NOTA 2.** L'aria viene immessa dalle tipiche bocchette di immissione e sarà caratterizzata da uno stato di immissione diverso da quella desiderata ambientale e potrebbero verificarsi situazioni spiacevoli nella vicinanza della bocchetta di immissione. Quindi si utilizza generalmente un  $\Delta T$  massimo di circa 15°C in riscaldamento e di 10°C in raffreddamento. Questi valori però vengono stabiliti di volta in volta con maggiore attenzione.

Per ovviare a questo si agisce variando la portata di aria secca da immettere (cioè ci stiamo muovendo sulla retta di lavoro da **I** verso **A**). Aumentando la portata aumentiamo il titolo.

Più aumento la portata più ho costi maggiori di elaborazione ed avendo calcolato con l'aria di rinnovo potrebbe essere tale da avere un  $\Delta T$  troppo grande e allora andiamo ad aumentare la portata. Prendendo tutta la portata in più dall'esterno avremmo delle condizioni molto distanti da quelle di immissione e allora andiamo a prendere la portata in più da quella dell'ambiente già alle condizioni desiderate (la condizione della legge di rinnovo rimane rispettata nel numero di ricambi orari).

TABELLA RIASSUNTIVA DEI PARAMETRI SIGNIFICATI PER TIPO DI DESTINAZIONE D'USO		PRESSIONE AMBIENTE RISPETTO AI LOCALI LIMITROFI / ESTERNO	RINNOVI ARIA ESTERNA	CLASSIFICAZIONE AMBIENTALE ISO 14644 - 1	RICIRCOLO LOCALE	UMIDITA' RELATIVA	TEMPERATURA INTERNA
	Destinazione d'uso	P- Positiva [Pa] N - Negativa [Pa]	[volt/h]	[ISO N]		[%]	[°C]
1	<b>Emodinamica</b>	P 15-20 Pa	$\geq 15$	ISO 5 (AT REST) <sup>1</sup>	Necessario	SI VEDA UNI 11425	SI VEDA UNI 11425
2	<b>Ambulatorio endoscopico - endoscopia diagnostica</b>	N 15-20 Pa	$\geq 6 \div 10$	ISO 7(OPERATION AL)	Vietato	40-55%	20°C inverno 24°C estate
3	<b>Broncoscopia</b>	N 20 Pa	$\geq 6$	ISO 7(OPERATION AL)	Necessario	40-55%	20°C inverno 24°C estate
4	<b>Degenza per Infettivi</b>	N 15-20 Pa	$\geq 3$	ISO 7(OPERATION AL)	Consigliato	40-55%	20°C inverno 26°C estate
5	<b>Degenza per Immunodepressi / ematologia</b>	P 15-20 Pa	$\geq 5$	ISO 4 (AT REST)	Necessario	50% $\pm$ 5%	24°C inverno 26°C estate
6	<b>Degenza per ustionati</b>	P 15-20 Pa	$\geq 5$	ISO 5 (OPERATION AL) <sup>4</sup>	Necessario	60-70%	26°C inverno 28°C estate
7	<b>Sala operatoria d'urgenza</b>	P <sup>5</sup>	$\geq 15$	ISO 5 (OPERATION AL) <sup>6</sup>	Necessario	SI VEDA UNI 11425	SI VEDA UNI 11425
8	<b>Terapia Intensiva- Rianimazione- Comatosi<sup>22</sup></b>	P 15-20 Pa	$\geq 10$	ISO 6 (AT REST) <sup>7</sup>	Consigliato	40-55%	24°C inverno/estate
9	<b>UTIN (Unità Terapia Intensiva Neonatale)</b>	P 15-20 Pa	$\geq 10$	ISO 6 (AT REST)	---		22°C inverno 26°C estate
10	<b>Reparto Neonatale</b>	P 15-20 Pa	$\geq 6$	ISO 6 (AT REST)	---	40-55%	22°C inverno 26°C estate
11	<b>Sala Parto / intervento cesareo</b>	P 15-20 Pa	$\geq 15$	ISO 5 (AT REST) <sup>8</sup>	Necessario	40-55%	22 $\pm$ 2°C

Riprendendo il diagramma psicrometrico si faccia attenzione alla lunetta che rappresenta il rapporto tra calore sensibile e calore totale che per noi è proprio  $R = 1 - \frac{q_v}{p}$  con  $p = \frac{\Delta h}{\Delta x}$ . Quindi ci fornisce direttamente la pendenza della retta.



## Esercizio 1

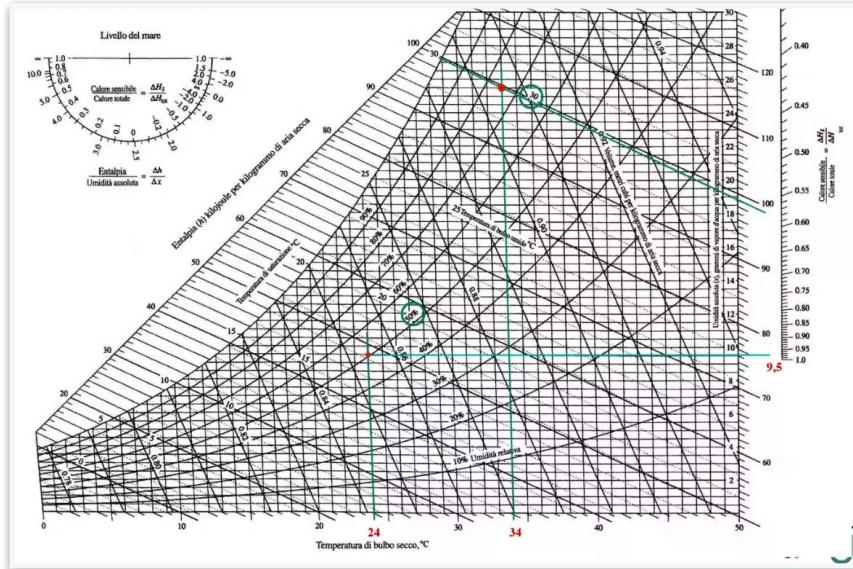
Un impianto a tutta aria deve garantire in un locale (alto 4 m, con pianta rettangolare 12x8 m<sup>2</sup>) una temperatura di  $24^{\circ}\text{C}$  e un'umidità relativa del  $50\%$ . Il locale presenta un carico termico totale di 2 kW ed un carico di umidità di 1,2 kg./h. In estate l'aria è prelevata all'esterno ( $34^{\circ}\text{C}$  di bulbo secco e  $30^{\circ}\text{C}$  di bulbo umido) ed il volume del locale deve essere rinnovato 0.75 volte in un'ora (0.75 ricambi orari). Sapendo che il salto di temperatura tra l'aria all'interno del locale e quella immessa non deve essere superiore a  $10^{\circ}\text{C}$ , verificare se è necessario dover ricorso ad una portata di ricircolo. Determinare, inoltre, le potenze scambiate nelle batterie di raffreddamento e post riscaldamento. Considerare un fattore di by-pass del 5% e sia di  $2^{\circ}\text{C}$  l'aumento di temperatura, dopo l'eventuale miscelazione, dovuto alla presenza del ventilatore.

$$\text{Quindi condizioni } A \rightarrow \begin{cases} \varphi = 50\% \\ t = 24^{\circ}\text{C} \end{cases}$$

L'aria esterna è chiaro che dovrà essere raffreddata e inoltre essendoci calore assorbito dall'esterno e calore generato le condizioni di immissione saranno inferiori alle condizioni ambiente.

Dobbiamo scrivere il bilancio nel locale e quindi abbiamo bisogno di ricavare la  $x_A$  e la  $h_A$  dalle condizioni ambiente.

Prendiamo il diagramma psicrometrico riportato gli stati notevoli interno ed esterno.



Sappiamo che generalmente raffreddo isotitolo e poi deumidifico fino al titolo di A dove faccio un postriscaldamento ma questo senza tener conto del fabbisogno energetico del locale che in questo caso dovremmo invece considerare.

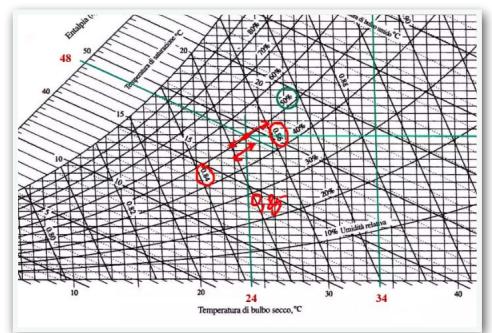
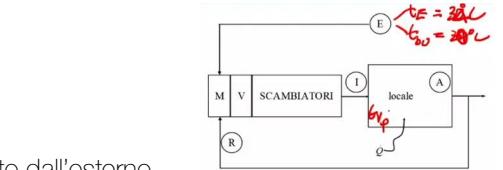
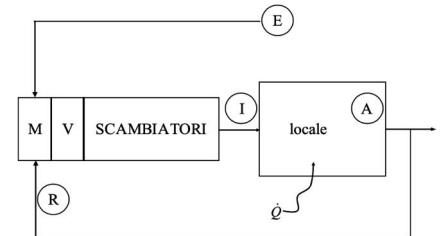
Leggiamo i valori da questo grafico, ovvero entalpie e titoli da cui dovremmo arrivare alle condizioni di immissione.

Si osservi come il calore  $\dot{Q}_{TOTALE}$  è positivo **+2**, assorbito.

Ci serve la portata di aria secca che otteniamo dai rinnovi del locale della normativa, cioè per i ricambi **orari**  $\dot{m}_{as} = \frac{V \cdot NR}{v \cdot 3600}$  e il volume specifico lo si legge delle condizioni ambiente.

In questo caso le condizioni sono quelle cerchiate con cui si fa un'interpolazione grafica prendendo la distanza tra le rette note e facendone un rapporto.

Cioè considerando i calcoli otteniamo le condizioni di immissione della pagina seguente.



RAPPORTO DELLA DISTANZA TRA LE DUE RETTE DI VOLUME SPECIFICO 0,86 E 0,85 CHE RIUTA ESSERE  $\frac{6}{14}$ .

**ESERCIZIO CASO ESTIVO**

Indicato con “E” lo stato termodinamico esterno, dal diagramma si legge

$$h_E = 100 \text{ kJkg}^{-1}; \quad x_E = 0.0255$$

Per le condizioni ambiente “A” si legge

$$h_A = 48 \text{ kJkg}^{-1}; \quad x_A = 0.0095$$

Interpolando graficamente, dal diagramma si ha

$$v_{ar} = v_{ar-A} = 0.85 + \frac{6}{14}(0.85 - 0.86) \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} = 0.853 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

$$\text{Il volume del locale è pari a } V = (4 \cdot 8 \cdot 12) \text{ m}^3 = 384 \text{ m}^3.$$

La portata di aria “fresca” da introdurre, tenuto conto dei ricambi orari, è

$$\dot{m}_{ar} = \frac{V \cdot NR}{v \cdot 3600} = \frac{384 \cdot 0.75}{0.853 \cdot 3600} \frac{\text{kg}}{\text{s}} = 0.094 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Dalle equazioni di bilancio nel locale si trovano le condizioni di immissione “I”

$$\left\{ \begin{array}{l} h_I = h_A - \frac{\dot{Q}_{TOTALE}}{\dot{m}_{ar}} = \left( 48 - \frac{2.0}{0.094} \right) \text{ kJkg}^{-1} = 26.68 \text{ kJkg}^{-1} \\ x_I = x_A - \frac{\dot{m}_{vp}}{\dot{m}_{ar}} = 0.0095 - \frac{1.2}{3600} = 0.00595 \end{array} \right.$$

Dal diagramma

$$t_I = 13^\circ\text{C}$$

La differenza tra temperatura ambiente e quella di immissione è  
 $t_A - t_I = 11^\circ\text{C} > 10^\circ\text{C}$

La nuova condizione di immissione I\* è quindi definita da

$$t_{I^*} = t_A - 10^\circ\text{C} = 24^\circ\text{C}$$

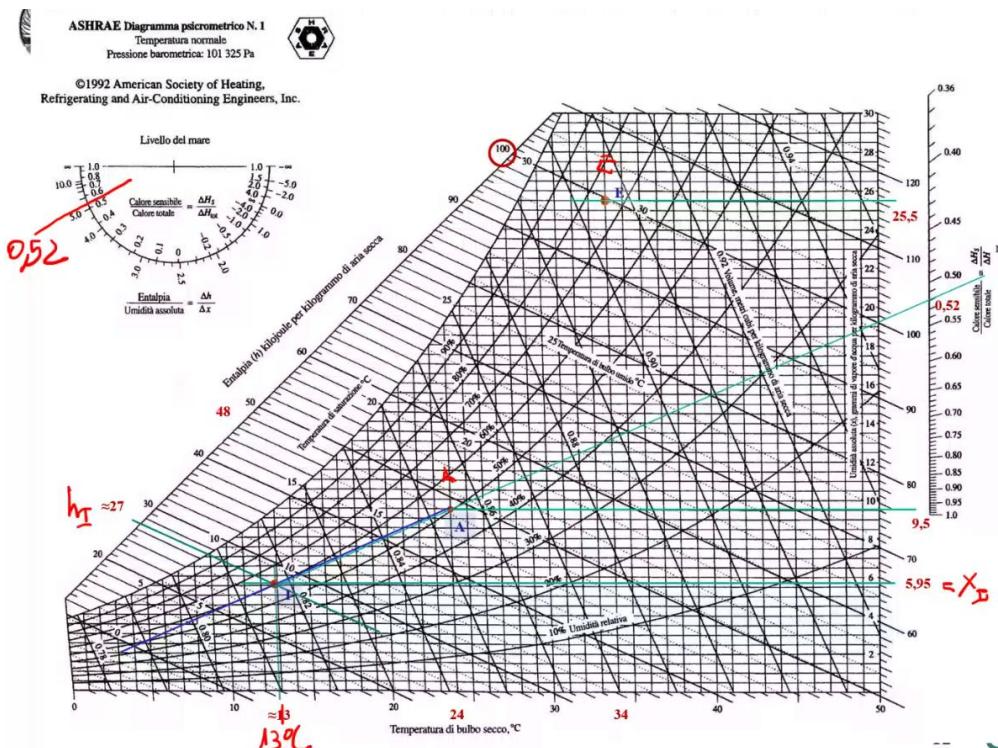
Per il titolo e l’entalpia, sapendo che sta sulla retta di immissione,

$$x_{I^*} = 0.0060; \quad h_{I^*} = 30 \text{ kJkg}^{-1}$$

Per ottenere la nuova portata di immissione si scrive

$$\dot{m}_{I^*} = \frac{\dot{Q}_{TOTALE}}{h_A - h_{I^*}} = 0.111 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Allora riportiamo i calcoli sul diagramma psicometrico:



A questo punto si deve leggere la temperatura di **I** e verificare che il  $\Delta T$  sia inferiore a quanto richiesto. In questo caso esce fuori un  $\Delta$  troppo elevato e quindi non può essere accettato.

Inoltre si può ricavare la pendenza dalla lunetta.

Allora non possiamo lavorare con questo punto di immissione ma ci dobbiamo spostare verso **A**, muovendoci sulla retta di immissione. È chiaro che ci andremo a mettere proprio dove è soddisfatto il limite sul  $\Delta T$ , cioè in questo caso

$$20^\circ\text{C} - \underline{10^\circ\text{C}} = 14^\circ\text{C}$$

poiché spostandoci di più aumentiamo la portata è aumentano i costi e quindi è inutile spostarci ancora,

$\Delta T$   
oltre lo stretto necessario.

Cioè si ricava la condizione di immissione **I\*** definita da  $t_{I^*} = t_A - 10^\circ\text{C} = 14^\circ$  (**ATTENZIONE!** Nella slide c'è un errore è  $14^\circ\text{C}$  non  $24^\circ\text{C}$ .

Allora si ripete la condizione di bilancio dove l'incognita diventa la portata di aria secca da immettere ma il punto di immissione è noto.

Allora questa porta risulta essere  $\dot{m}_{I^*} = 0,111$  kg/s maggiore di quella calcolata precedentemente.

Il testo non impedisce la ripresa e quindi questa portata aggiuntiva conviene prenderla direttamente dal locale mentre  $\dot{m}_{as} = 0,094$  kg/s è sempre garantita dall'esterno.

#### Fisica Tecnica (9 CFU) – Impianti di Climatizzazione

##### ESERCIZIO CASO ESTIVO

Indicato con “E” lo stato termodinamico esterno, dal diagramma si legge

$$h_E = 100 \text{ kJkg}^{-1}; \quad x_E = 0.0255$$

Per le condizioni ambiente “A” si legge

$$h_A = 48 \text{ kJkg}^{-1}; \quad x_A = 0.0095$$

Interpolando graficamente, dal diagramma si ha

$$v_{as} = v_{as-A} = 0.85 + \frac{6}{14}(0.85 - 0.86) \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} = 0.853 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

Il volume del locale è pari a  $V = (4 \cdot 8 \cdot 12) \text{ m}^3 = 384 \text{ m}^3$ .

La portata di aria “fresca” da introdurre, tenuto conto dei ricambi orari, è

$$\dot{m}_{as} = \frac{V \cdot NR}{v \cdot 3600} = \frac{384 \cdot 0.75}{0.853 \cdot 3600} \frac{\text{kg}}{\text{s}} = 0.094 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Dalle equazioni di bilancio nel locale si trovano le condizioni di immissione “T”

$$\left\{ \begin{array}{l} h_I = h_A - \frac{\dot{Q}_{TOTALE}}{\dot{m}_{as}} = \left( 48 - \frac{2.0}{0.094} \right) \text{ kJkg}^{-1} = 26.68 \text{ kJkg}^{-1} \\ x_I = x_A - \frac{\dot{m}_{vp}}{\dot{m}_{as}} = 0.0095 - \frac{1.2}{3600} = 0.00595 \end{array} \right.$$

Dal diagramma

$$t_I \approx 13^\circ\text{C}$$

La differenza tra temperatura ambiente e quella di immissione è

$$t_A - t_I = 11^\circ\text{C} > 10^\circ\text{C}$$

La nuova condizione di immissione I\* è quindi definita da

$$t_{I^*} = t_A - 10^\circ\text{C} = 24^\circ\text{C}$$

Per il titolo e l'entalpia, sapendo che sta sulla retta di immissione,

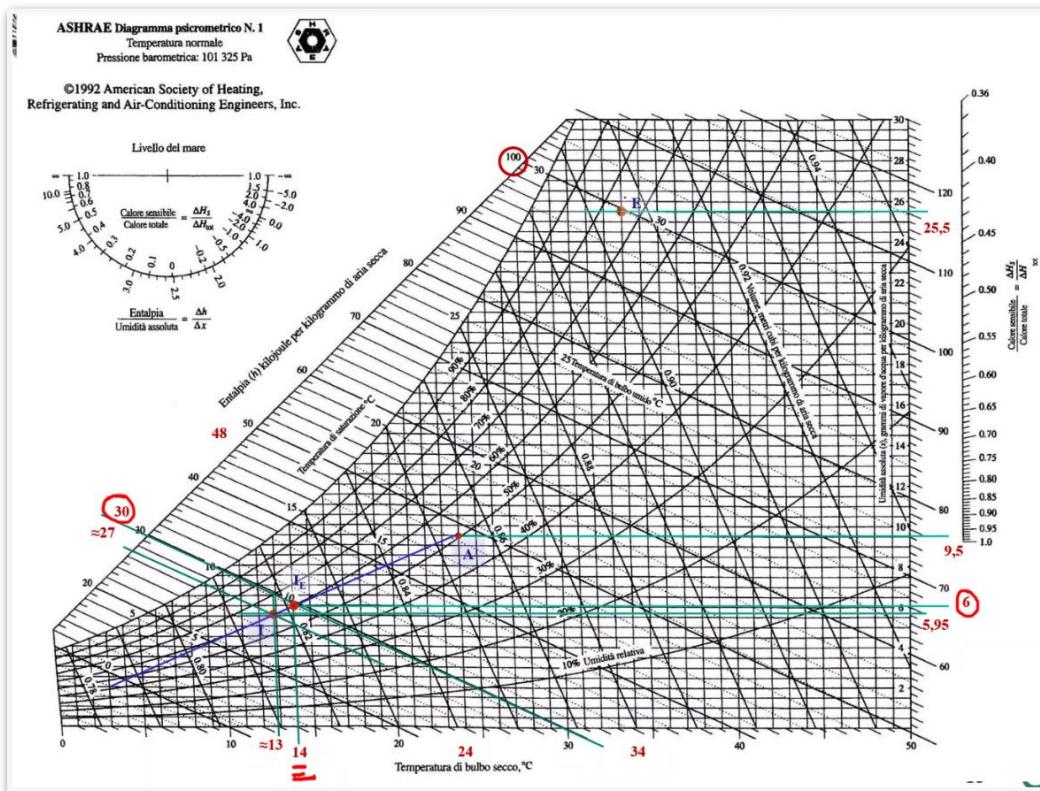
$$x_{I^*} = 0.0060; \quad h_{I^*} = 30 \text{ kJkg}^{-1}$$

Per ottenere la nuova portata di immissione si scrive

$$\dot{m}_{I^*} = \frac{\dot{Q}_{TOTALE}}{h_A - h_{I^*}} = 0.111 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Allora abbiamo identificato il nuovo punto dove dobbiamo arrivare (VEDI GRAFICO A PAGINA SEGUENTE)

Quindi facciamo una miscelazione tra una parte di aria alle condizioni di A e una parte alle condizioni di E.



Cioè:

La portata di aria in più rispetto a quella di ventilazione è quella di ricircolo dall'ambiente stesso del locale:

$$\dot{m}_R = \dot{m}_{I^*} - \dot{m}_R = (0.111 - 0.094) \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} = 0.017 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

Quindi:

$$\frac{\dot{m}_R}{\dot{m}_{I^*}} = \frac{0.017}{0.111} = 15.6\%$$

La miscelazione "M" tra condizioni esterne e quelle ambiente fornisce

$$\begin{cases} x_M \approx \frac{\dot{m}_E x_E + \dot{m}_R x_A}{\dot{m}_{I^*}} = 0.023 \\ h_M \approx \frac{\dot{m}_E h_E + \dot{m}_R h_A}{\dot{m}_{I^*}} = 92 \text{ kJkg}^{-1} \end{cases}$$

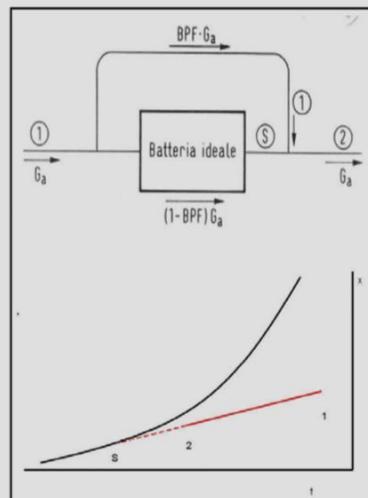
Considerando il riscaldamento ( $\Delta t = 2^\circ\text{C}$ ) dovuto al passaggio nel ventilatore, per lo stato M' si ha

$$\begin{cases} t_{M'} = t_M + \Delta t = (32.5 + 2)^\circ\text{C} = 34.5^\circ\text{C} \\ x_{M'} = x_M = 0.023 \\ h_{M'} = 94 \text{ kJkg}^{-1} \end{cases}$$

#### Fisica Tecnica (9 CFU) – Impianti di Climatizzazione

##### OSS: fattore di bypass per batteria di raffreddamento

Siano 1 l'ingresso nello scambiatore, 2 l'uscita desiderata ed S lo stato alla saturazione, alla temperatura a cui si trova la superficie dello scambiatore alettato.



Vale la relazione

$$BPF = \frac{\overline{2S}}{\overline{1S}} = \frac{h_2 - h_S}{h_1 - h_S} = \frac{x_2 - x_S}{x_1 - x_S}$$

Sappiamo come per una miscelazione la condizione finale è sulla congiungente, nel punto **M'**.

Poi dopo il miscelatore c'è il ventilatore con un riscaldamento isotitolo di  $2^\circ\text{C}$  arrivando allo stato **M'**

Da qui dobbiamo arrivare in **I<sub>E</sub>** facendo un raffreddamento isotitolo fino a  $\varphi = 100\%$ , raffreddamento con deumidificazione fino al titolo di E e poi postriscaldamento.

A questo punto si inserisce il fattore di bypass: abbiamo visto che il raffreddamento avviene in una batteria di raffreddamento c'è il contatto tra un'alettatura dei tubi tra i quali passa l'aria che si raffredda. Tuttavia accade che l'aria umida a contatto con la parete fredda inizia subito a condensare (prima del  $\varphi = 100\%$ ) e si verifica una diminuzione del titolo e poi non tutta l'aria riesce a raffreddarsi poiché parte dell'aria non arriva a contatto con la batteria di raffreddamento e quindi con il fattore di bypass intendiamo che una frazione di aria non subisce raffreddamento ma rimane alle condizioni iniziali. È come se avvenisse una miscelazione tra la percentuale che ha partecipato al raffreddamento e una percentuale che ha bypassato il raffreddamento.

Cioè si vede come dalla condizione di ingresso 1 vogliamo arrivare a fine raffreddamento al punto di immissione e quindi dobbiamo raffreddare maggiormente!

Quindi possiamo considerare questo con le regole della miscelazione.

La portata di aria in più rispetto a quella di ventilazione è quella di ricircolo dall'ambiente stesso del locale:

$$\dot{m}_R = \dot{m}_{I^*} - \dot{m}_E = (0.111 - 0.094) \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} = 0.017 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

Quindi:

$$\frac{\dot{m}_R}{\dot{m}_{I^*}} = \frac{0.017}{0.111} = 15.6\%$$

La miscelazione "M" tra condizioni esterne e quelle ambiente fornisce

$$\begin{cases} x_M \approx \frac{\dot{m}_E x_E + \dot{m}_R x_A}{\dot{m}_{I^*}} = 0.023 \\ h_M \approx \frac{\dot{m}_E h_E + \dot{m}_R h_A}{\dot{m}_{I^*}} = 92 \text{ kJkg}^{-1} \end{cases}$$

Considerando il riscaldamento ( $\Delta t = 2^\circ\text{C}$ ) dovuto al passaggio nel ventilatore, per lo stato M' si ha

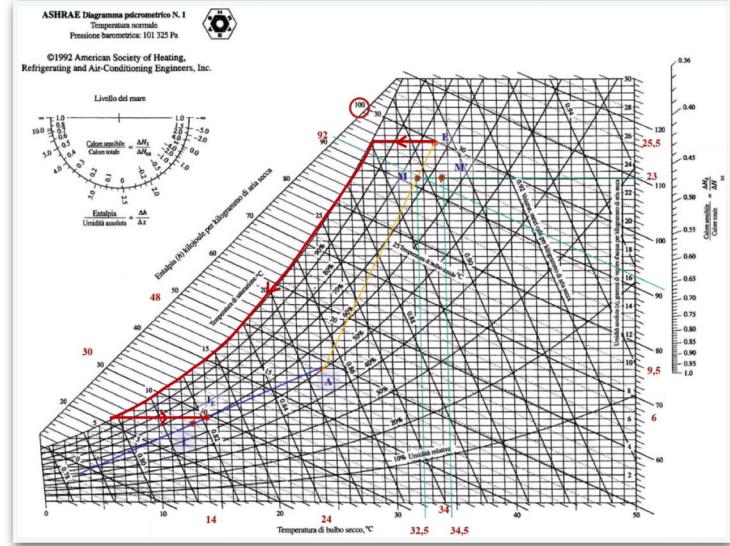
$$\begin{cases} t_{M'} = t_M + \Delta t = (32.5 + 2)^\circ\text{C} = 34.5^\circ\text{C} \\ x_{M'} = x_M = 0.023 \\ h_{M'} = 94 \text{ kJkg}^{-1} \end{cases}$$

Allora ricaviamo bilancio come  $x_2 = \frac{(1 - BPF) \cdot x_s + BPF \cdot x_1}{1}$  ma nel nostro caso 2 è la condizione desiderata cioè indicata

come  $x_{I^*} = x_{I_E} = (1 - BPF) \cdot x_s + BPF \cdot x_1 \Rightarrow x_s = \frac{x_{I^*} - x_{M^*} \cdot BPF}{1 - BPF} = 0,0048$ . Allora si ricava l'incognita fin dove devo riscaldare, cioè  $x_s$ .

Si ricordi che  $M' \equiv 1$  e  $I_E$  ha il titolo di 2.

Per i calcoli vedi pagina seguente:

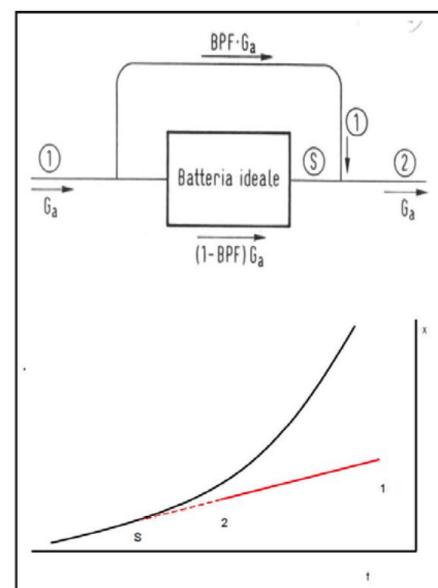


TRASFORMAZIONE TEORICA (SENZA IL FATTORE DI BYPASS) PER ARRIVARE IN  $I_E$  FACENDO UN RAFFREDDAMENTO ISOTITOLO FINO A  $\varphi = 100\%$ , RAFFREDDAMENTO CON DEUMIDIFICAZIONE FINO AL TITOLO DI E E POI POSTRISCALDAMENTO.

#### Fisica Tecnica (9 CFU) – Impianti di Climatizzazione

OSS: fattore di bypass per batteria di raffreddamento

Siano 1 l'ingresso nello scambiatore, 2 l'uscita desiderata ed S lo stato alla saturazione, alla temperatura a cui si trova la superficie dello scambiatore alettato.



Vale la relazione

$$BPF = \frac{\overline{S}}{\overline{S} - S} = \frac{h_2 - h_S}{h_1 - h_S} = \frac{x_2 - x_S}{x_1 - x_S}$$

378

Tornando al caso specifico dell'esercizio, vale

$$\text{BPF} = \frac{x_2 - x_s}{x_1 - x_s} = \frac{x_{I^*} - x_s}{x_{M'} - x_s} = 0.05$$

Dalla precedente si ricava lo stato S

$$x_s = \frac{x_{I^*} - x_{M'} \cdot \text{BPF}}{1 - \text{BPF}} = 0.0048$$

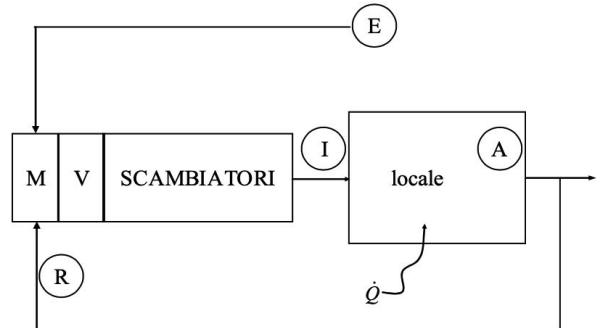
Determinato S è possibile ora tracciare la trasformazione di raffreddamento che porta dallo stato M' allo stato C:

$$\begin{cases} x_c = 0.006 \\ h_c = 21 \text{ kJkg}^{-1} \end{cases}$$

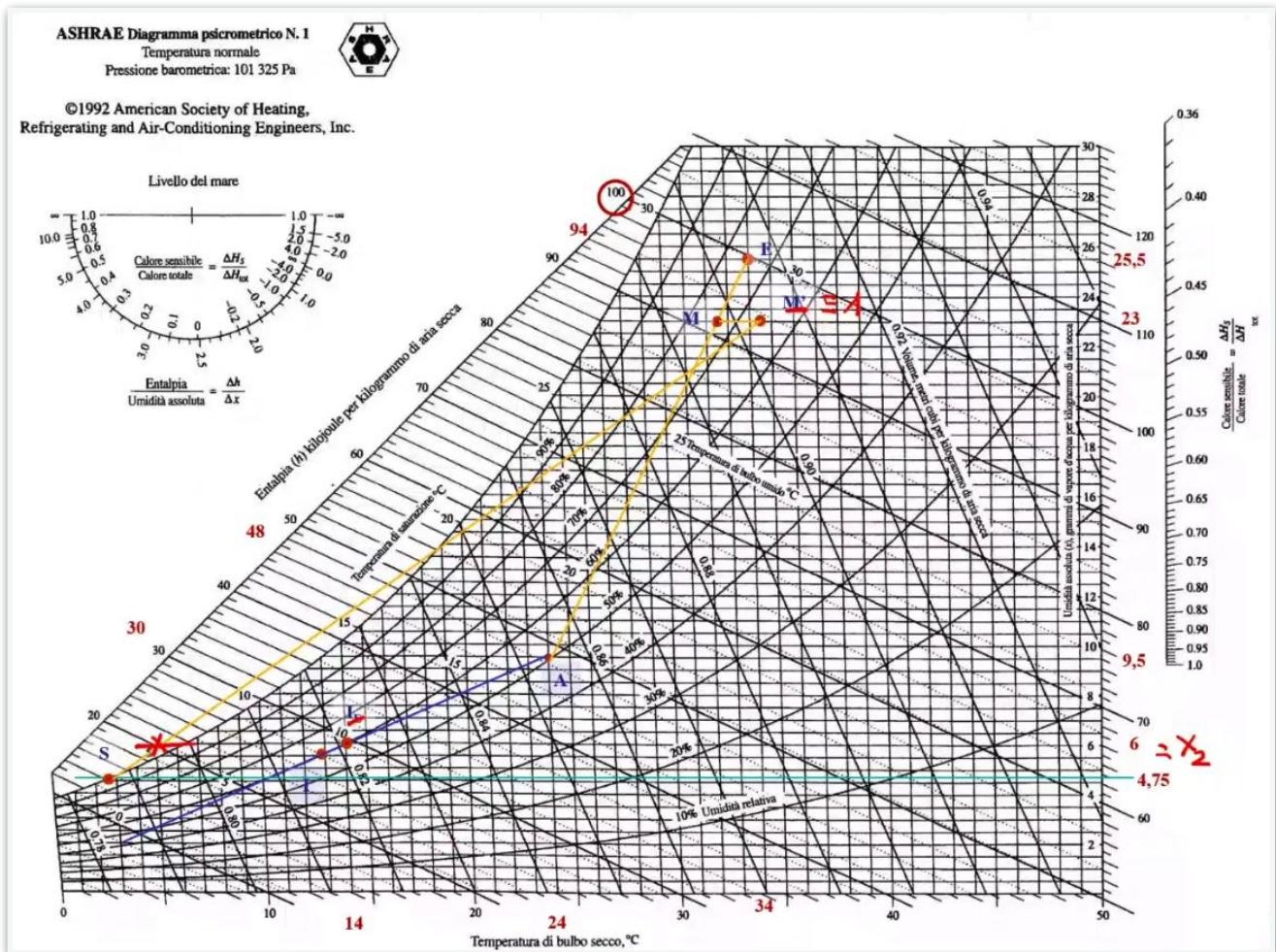
Le potenze termiche complessivamente scambiate sono

$$\dot{Q}_{\text{ref}} = G_{\text{as-M'}} \cdot (h_{M'} - h_c) = 0.111 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} (94 - 21) \text{ kJkg}^{-1} = 8.11 \text{ kW}$$

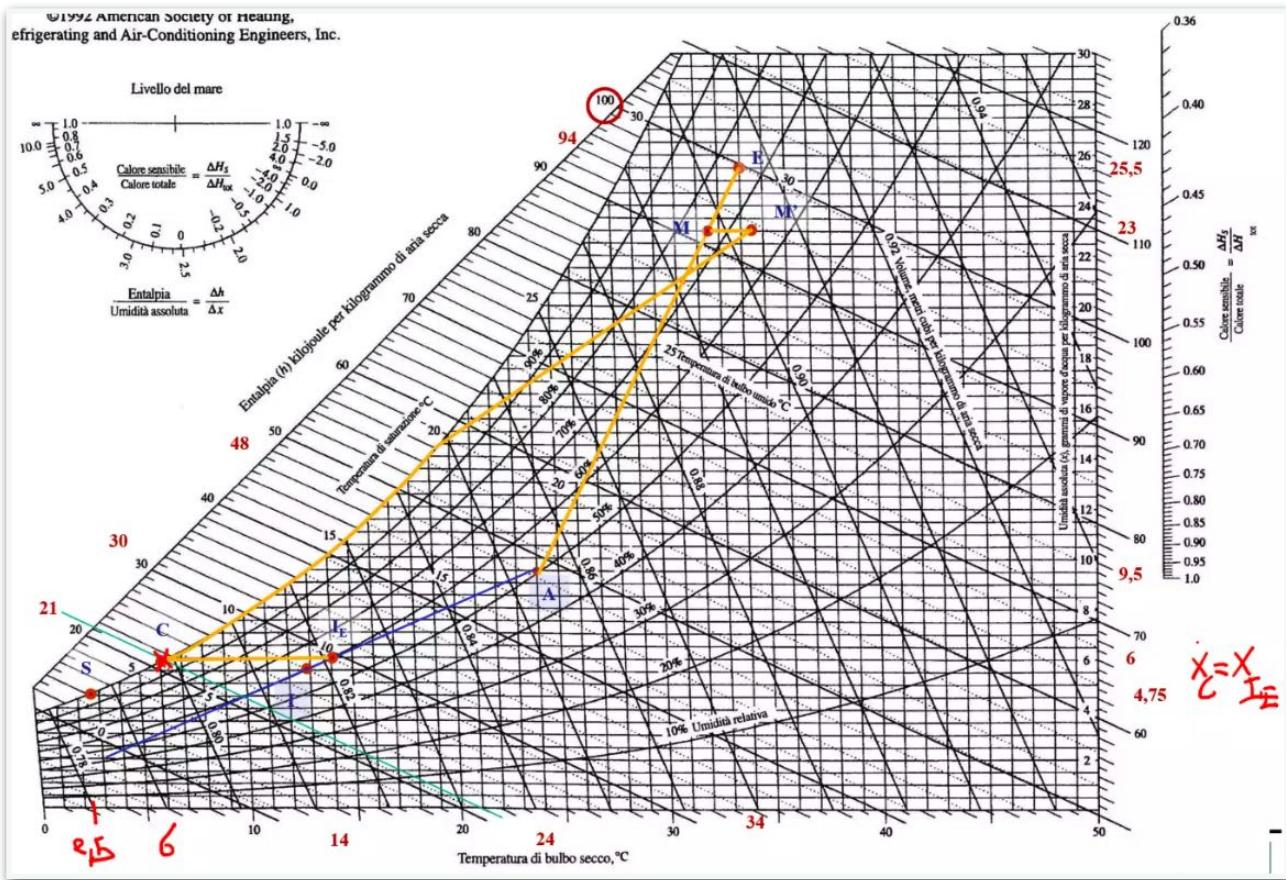
$$\dot{Q}_{\text{risc}} = G_{\text{as-M'}} \cdot (h_{I^*} - h_c) = 0.111 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} (30 - 21) \text{ kJkg}^{-1} = 1 \text{ kW}$$



Cioè dobbiamo raffreddare prima al titolo di **S** e considerando il fattore di bypass avremmo un titolo equivalente ad quelli di **I<sub>E</sub>**.



È chiaro che questa curva non esiste e non può andare oltre l'isotitolo per cui prosegue chiaramente su  $\varphi = 100\%$  per arrivare a  $C$  da cui poi possiamo arrivare ad  $I_E$

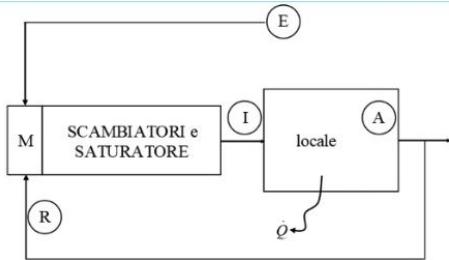


È chiaro che il raffreddamento deve avvenire fino ad  $S$  cioè a  $2,5^{\circ}\text{C}$ .

(Si osservi che il fluido di raffreddamento che passa nei tubi della batteria di raffreddamento sarà a temperature ancora più basse di  $2,5^{\circ}\text{C}$ ).

## Esercizio 2

Un impianto a tutta aria deve garantire in un locale (alto 3 m, con pianta rettangolare 9x12 m<sup>2</sup>) una temperatura di 20°C e un'umidità relativa del 50%. Il locale perde un carico termico sensibile pari a 3,8 kW e presenta un carico di umidità di 1,2 kg/h (vapore da considerarsi alla temperatura ambiente). Il volume del locale deve essere rinnovato 1.3 volte in un'ora con aria prelevata all'esterno (10 °C ed umidità relativa del 20%). Sapendo che il salto di temperatura tra l'aria immessa e quella all'interno del locale non deve essere superiore a 20°C, verificare se è necessario dover far ricorso ad una portata di ricircolo. Determinare, inoltre, le potenze termiche scambiate e la temperatura di uscita dal saturatore, sapendo che questo ha un'efficienza del 69%.



Cioè lo stato  $A \rightarrow \begin{cases} t_A = 20^\circ\text{C} \Rightarrow h_A \\ \varphi_A = 50\% \Rightarrow x_A \end{cases}$

Al bilancio dovremmo trovare  $h_A$  e  $x_A$ .

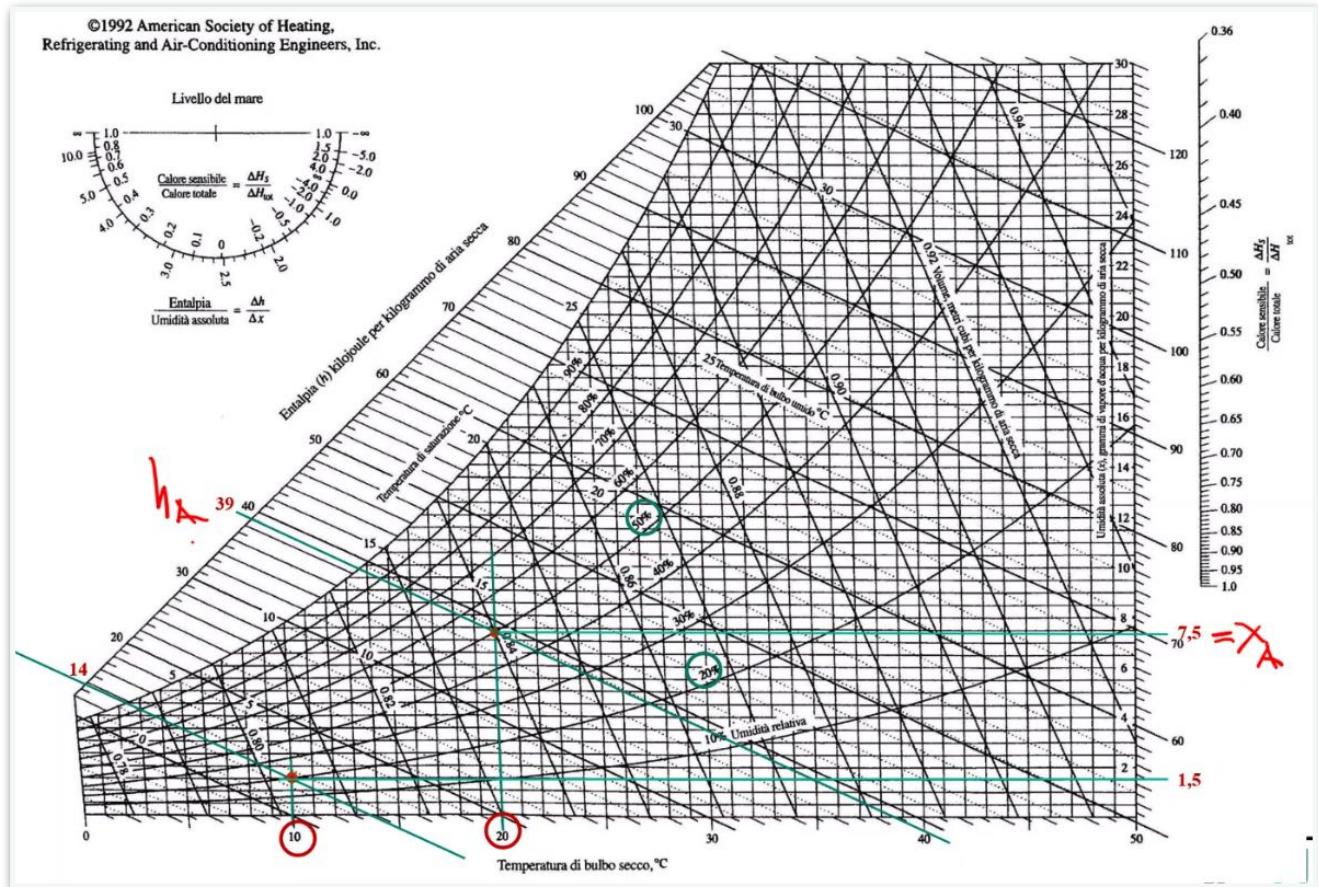
Il locale perde una carico termico sensibile che ci viene fornito e presenta un certo carico di umidità. Viene specificato che il calore fornito è soltanto quello sensibile al quale dovremmo sommare algebricamente il vapore prodotto che ha una sua entalpia.

L'aria viene prelevata dall'esterno  $\rightarrow \begin{cases} t_E = 10^\circ\text{C} \\ \varphi_E = 10\% \end{cases}$  e il locale deve essere rinnovato un certo numero di volte ed è imposto un

$\Delta T$  tra aria immessa e locale da rispettare.

Inoltre dobbiamo utilizzare un saturatore adiabatico con un efficienza del 69%.

Partiamo riportando gli stati notevoli,



Sappiamo di dover fare preriscaldamento  $\rightarrow$  saturatore adiabatico con efficienza nota  $\rightarrow$  postriscaldamento.

Tuttavia ci sono altri contributi come vapore prodotto e calore sensibile scambiato per cui dobbiamo considerare il fabbisogno del locale.

Consideriamo l'equazione di bilancio dove il volume specifico lo leggiamo direttamente (senza interpolazioni). Consideriamo quindi la portata d'aria che dobbiamo necessariamente prelevare dall'esterno ed immettere nel locale.

Possiamo scrivere i bilancio trovando  $\begin{cases} h_I \\ x_I \end{cases}$

Consideriamo che il  $\dot{Q}$  sensibile è perduto (uscente) ed è di  $-3,8$  a cui dobbiamo sommare il calore latente pari alla portata del vapore saturo per l'entalpia (presa dalla tabelle).  $\dot{Q}_{LAT} = G_{vp} \cdot h_{vp}(20^\circ C)$ .

Poi sommeremo algebricamente i due calori, considerando ciò che entra (stesso segno della portata di immissione) e ciò che esce.

Cioè numericamente:

#### Fisica Tecnica (9 CFU) – Impianti di Climatizzazione

#### ESERCIZIO CASO INVERNALE

Indicato con "E" lo stato esterno, dal diagramma si legge

$$h_E = 14 \text{ kJkg}^{-1}; \quad x_E = 0.0015$$

Per le condizioni ambiente "A" si legge

$$h_A = 39 \text{ kJkg}^{-1}; \quad x_A = 0.0075$$

Dal diagramma si legge direttamente

$$v_{as} = v_{as-A} = 0.84 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

Il volume del locale è pari a  $V = (3 \cdot 9 \cdot 12) \text{ m}^3 = 324 \text{ m}^3$ .

La portata di aria "fresca" da introdurre, tenuto conto dei ricambi orari, è

$$\dot{m}_{as} = \frac{V \cdot NR}{v \cdot 3600} = \frac{324 \cdot 1.3}{0.84 \cdot 3600} \frac{\text{kg}}{\text{s}} = 0.139 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Per valutare il carico termico totale occorre calcolare quello dovuto al calore latente per la presenza del vapore.

Dalle tabelle del vapore saturo, alla temperatura dell'ambiente,

$$\dot{Q}_{LAT} = G_{vp} \cdot h_{vp}(20^\circ C) = 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{h}} \cdot 2538 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = 0.846 \text{ kW}$$

Dunque il carico totale vale

$$\dot{Q}_{TOT} = \dot{Q}_{SENS} + \dot{Q}_{LAT} = (-3.8 + 0.846) \text{ kW} = -2.95 \text{ kW}$$

Dalle equazioni di bilancio nel locale si trovano le condizioni di immissione "I"

$$\begin{cases} h_I = h_A - \frac{\dot{Q}_{TOTALE}}{\dot{m}_{as}} = \left( 39 - \frac{-2.95}{0.139} \right) \text{ kJkg}^{-1} = 60.21 \text{ kJkg}^{-1} \\ x_I = x_A - \frac{\dot{m}_{vp}}{\dot{m}_{as}} = 0.0075 - \frac{3600}{0.139} = 0.00511 \end{cases}$$

Dal diagramma

$$t_I \approx 47^\circ C$$

La differenza tra temperatura ambiente e quella di immissione è

$$t_I - t_A = 27^\circ C > 20^\circ C$$

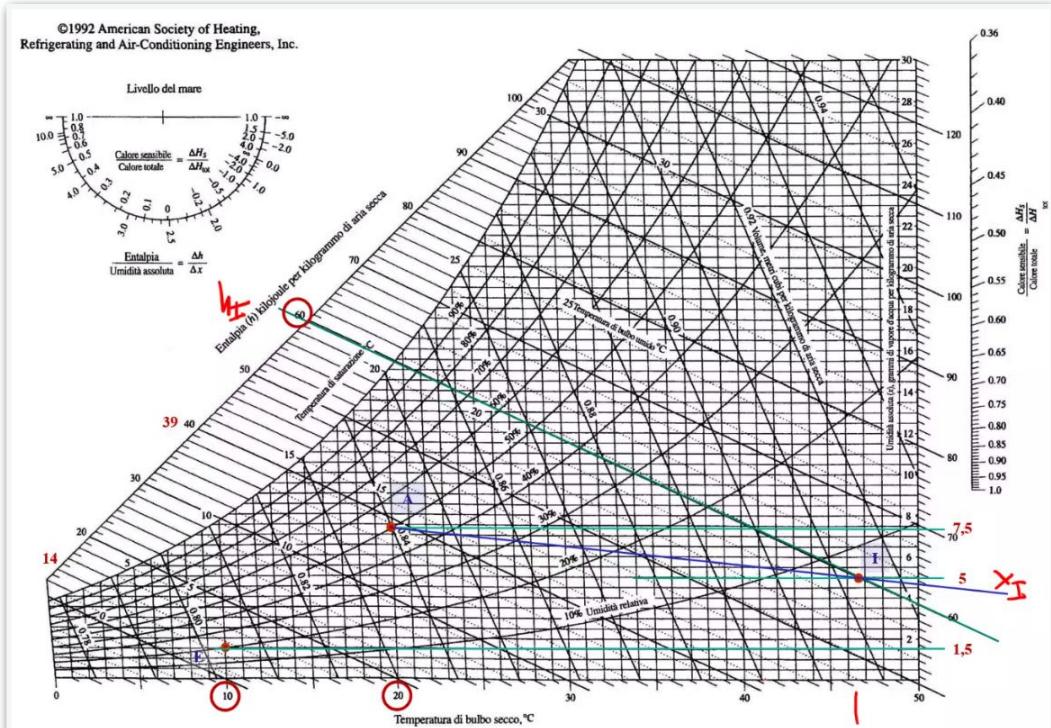
La nuova condizione di immissione I\* è quindi definita da

$$t_{I^*} = t_A + 20^\circ C = 40^\circ C$$

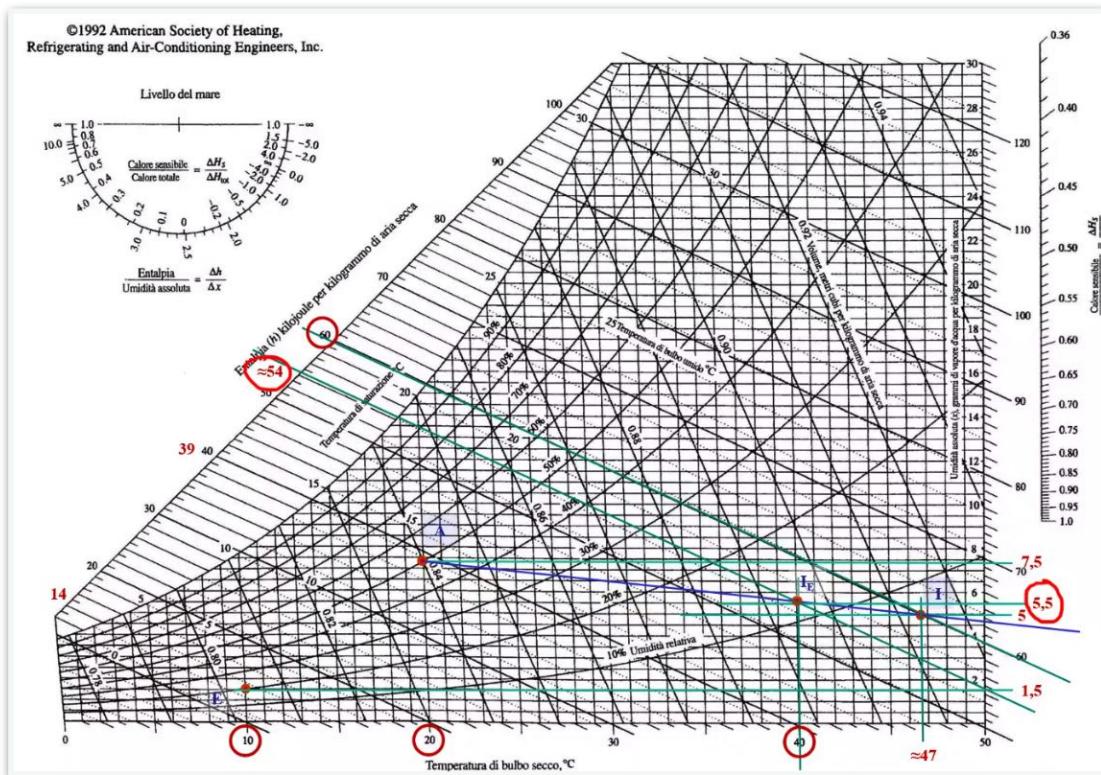
Per il titolo e l'entalpia, sapendo che sta sulla retta di immissione,

$$x_{I^*} = 0.0055; \quad h_{I^*} = 54 \text{ kJkg}^{-1}$$

Riportiamo allora questi valori sul diagramma, unendo A con il punto di immissione identificando la retta di lavoro.



La prima cosa da verificare è il  $\Delta T$  in questo caso di  $26^\circ C > 20^\circ C$  e allora dobbiamo spostarci andando a selezionare un nuovo punto di immissione tale da garantire un  $\Delta T = 20^\circ C$ , identificando il punto  $I_E$ .



È variata la portata ma ora sono note le condizioni di ingresso e quindi riprendo l'equazione di bilancio dove però saranno note le condizioni di ingresso e calcolo la portata.

Cioè numericamente:

### ESERCIZIO CASO INVERNALE

Indicato con "E" lo stato esterno, dal diagramma si legge

$$h_E = 14 \text{ kJkg}^{-1}; \quad x_E = 0.0015$$

Per le condizioni ambiente "A" si legge

$$h_A = 39 \text{ kJkg}^{-1}; \quad x_A = 0.0075$$

Dal diagramma si legge direttamente

$$v_{as} = v_{as-A} = 0.84 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

$$\text{Il volume del locale è pari a } V = (3 \cdot 9 \cdot 12) \text{ m}^3 = 324 \text{ m}^3.$$

La portata di aria "fresca" da introdurre, tenuto conto dei ricambi orari, è

$$\dot{m}_{as} = \frac{V \cdot NR}{v \cdot 3600} = \frac{324 \cdot 1.3}{0.84 \cdot 3600} \frac{\text{kg}}{\text{s}} = 0.139 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Per valutare il carico termico totale occorre calcolare quello dovuto al calore latente per la presenza del vapore.

Dalle tabelle del vapore saturo, alla temperatura dell'ambiente,

$$\dot{Q}_{LAT} = G_{vp} \cdot h_{vp}(20^\circ C) = 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{h}} \cdot 2538 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = 0.846 \text{ kW}$$

Dunque il carico totale vale

$$\dot{Q}_{TOT} = \dot{Q}_{SENS} + \dot{Q}_{LAT} = (-3.8 + 0.846) \text{ kW} = -2.95 \text{ kW}$$

Dalle equazioni di bilancio nel locale si trovano le condizioni di immissione "I"

$$\left\{ \begin{array}{l} h_I = h_A - \frac{\dot{Q}_{TOTALE}}{\dot{m}_{as}} = \left( 39 - \frac{-2.95}{0.139} \right) \text{ kJkg}^{-1} = 60.21 \text{ kJkg}^{-1} \\ x_I = x_A - \frac{\dot{m}_{vp}}{\dot{m}_{as}} = 0.0075 - \frac{1.3}{0.139} = 0.00511 \end{array} \right.$$

Dal diagramma

$$t_I \approx 47^\circ C$$

La differenza tra temperatura ambiente e quella di immissione è

$$t_I - t_A = 27^\circ C > 20^\circ C$$

La nuova condizione di immissione  $I^*$  è quindi definita da

$$t_{I^*} = t_A + 20^\circ C = 40^\circ C$$

Per il titolo e l'entalpia, sapendo che sta sulla retta di immissione,

$$x_{I^*} = 0.0055; \quad h_{I^*} = 54 \text{ kJkg}^{-1}$$

Si calcola allora la nuova portata e andiamo a prendere la differenza dal ricircolo, cioè dal locale stesso.

Facciamo quindi la miscelazione tra l'ambiente esterno dal quale prendiamo NECESSARIAMENTE  $0,139 \text{ kg s}^{-1}$  e l'ambiente interno da cui prendiamo il restante  $0,058 \text{ kg s}^{-1}$ .

Per ottenere la nuova portata di immissione si scrive

$$\dot{m}_{I^*} = \frac{\dot{Q}_{\text{TOTALE}}}{h_A - h_{I^*}} = 0.197 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

La portata di aria in più rispetto a quella di ventilazione è quella di ricircolo dall'ambiente stesso del locale:

$$\dot{m}_R = \dot{m}_{I^*} - \dot{m}_E = (0.197 - 0.139) \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} = 0.058 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

Quindi:

$$\frac{\dot{m}_R}{\dot{m}_{I^*}} = \frac{0.017}{0.1111} = 29.3\%$$

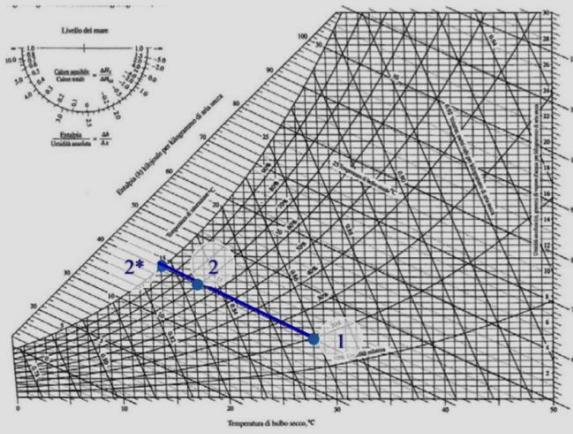
La miscelazione "M" tra condizioni esterne e quelle ambiente fornisce

$$\begin{cases} x_M \approx \frac{\dot{m}_E x_E + \dot{m}_R x_A}{\dot{m}_{I^*}} = 0.0033 \\ h_M = \frac{\dot{m}_E h_E + \dot{m}_R h_A}{\dot{m}_{I^*}} = 21.32 \text{ kJkg}^{-1} \end{cases}$$

Non si consideri l'eventuale riscaldamento dovuto al passaggio nel ventilatore.

### OSS: efficienza del saturatore adiabatico

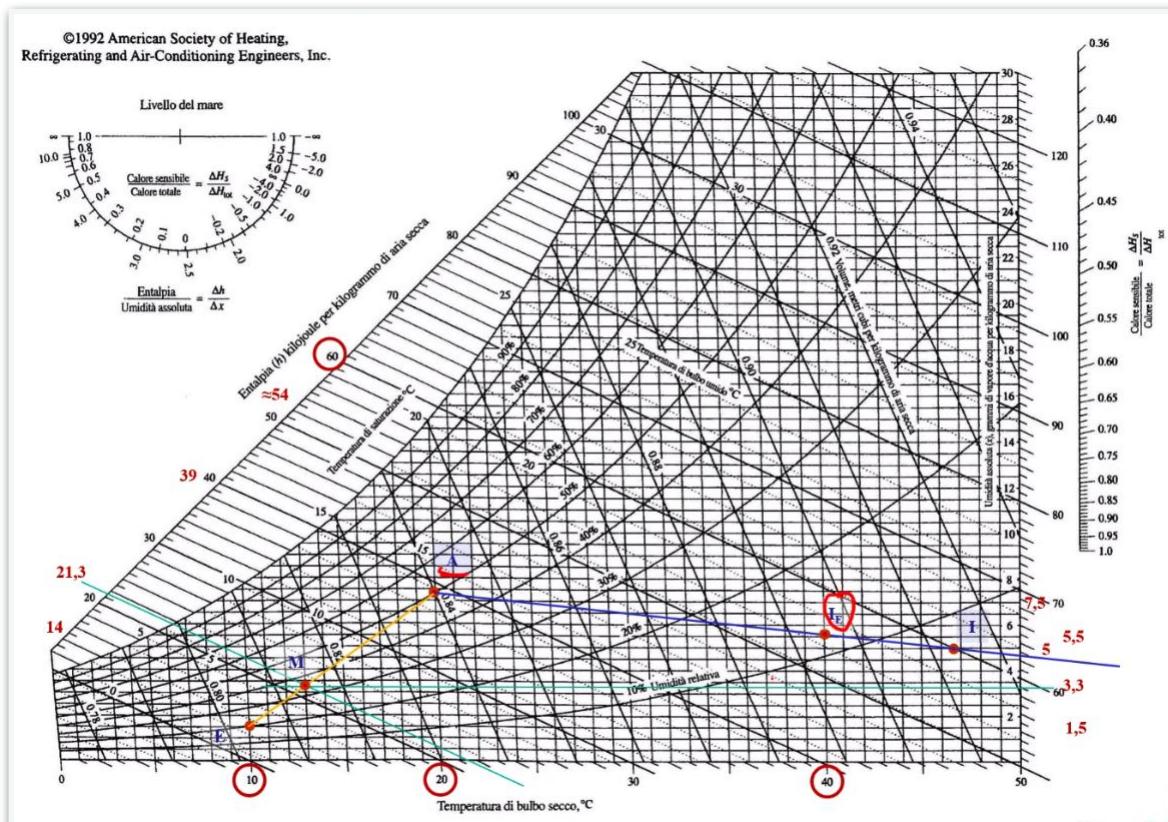
Sia 1 l'ingresso nello saturatore, 2 l'uscita reale, e 2\* quella ideale nella condizione di miscela completamente satura.



Vale la relazione

$$\varepsilon = \frac{\overline{12}}{12^*} = \frac{t_1 - t_2}{t_1 - t_{2^*}} = \frac{x_2 - x_1}{x_{2^*} - x_1}$$

Allora dobbiamo andare dai punti di fine miscelazione  $M$  alle condizioni di immissione  $I_E$ .



Potremmo fare un riscaldamento isotitolo e un'un'iniezione di vapore ma il testo ci chiede di usare un saturatore adiabatico con una data efficienza.

Si considera allora prima il saturatore ideale (identificato nella figura precedente) e poi ne consideriamo l'efficienza.

Ci conviene lavorare con i titoli poiché sono tutti noti.

Allora si identificano  $x_C$  cioè la condizione di ingresso allo stesso titolo di fine miscelazione  $x_1 = x_C = x_M = 3,3 \cdot 10^{-3}$  e  $x_D$  cioè la condizione di ingresso  $x_2 = x_D = x_{I_E} = x_{I^*} = 5,5 \cdot 10^{-5}$

Cioè ci ricaviamo  $x_{2^*} = x_S = \dots = 6,5 \cdot 10^{-3}$ .

Ovvero:

Tornando al caso specifico dell'esercizio, vale

$$\varepsilon = \frac{x_2 - x_1}{x_{2^*} - x_1} = \frac{x_D - x_C}{x_S - x_C} = 0.69$$

Dalla precedente si ricava lo stato S

$$x_S = x_C + \frac{x_D - x_C}{\varepsilon} = 0.0065$$

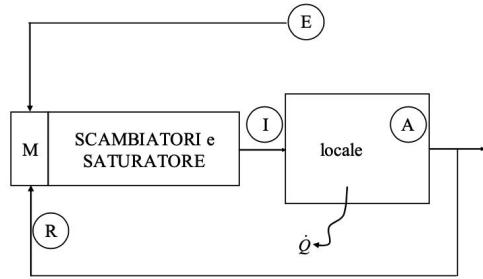
Determinato S è possibile ora tracciare la trasformazione di preriscalo e saturazione adiabatica che porta dallo stato M allo stato C:

$$\begin{cases} x_C = 0.0055 \\ h_C = 24 \text{ kJkg}^{-1} \end{cases}$$

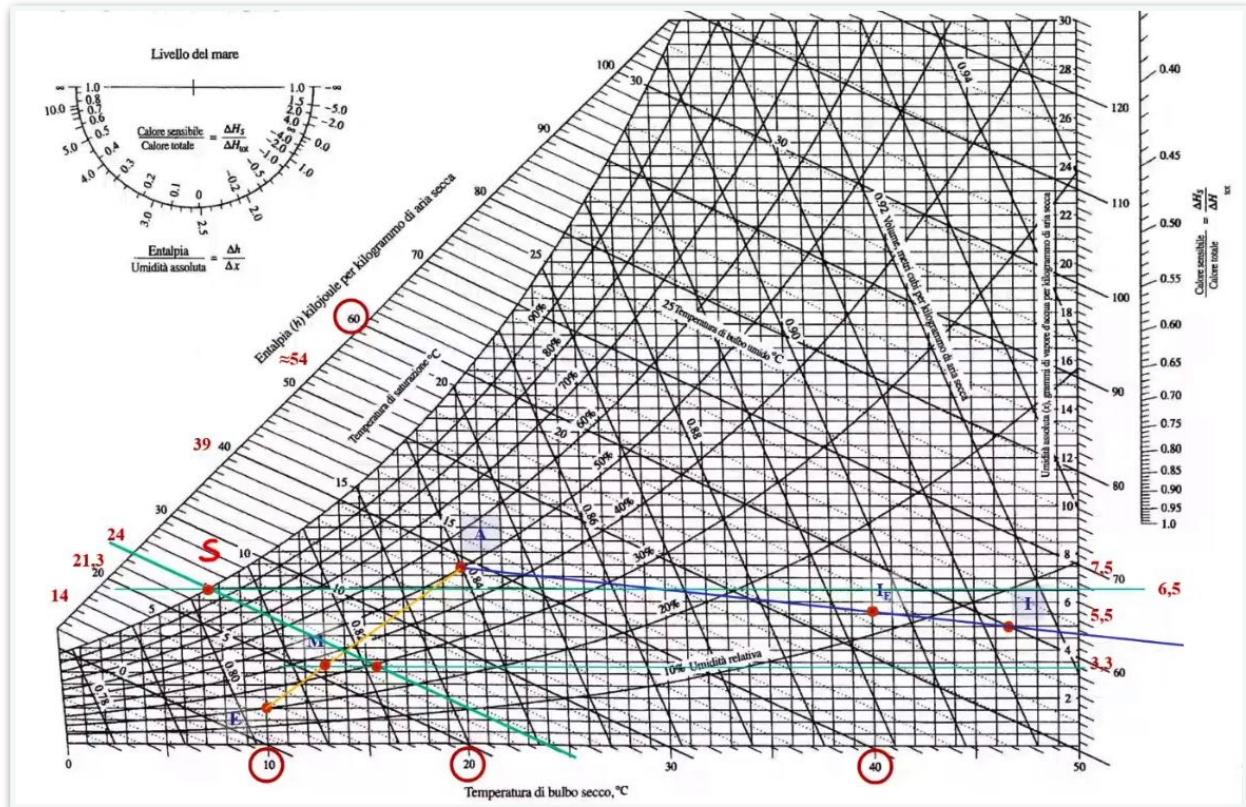
Le potenze termiche complessivamente scambiate sono

$$\dot{Q}_{\text{pre-risc}} = G_{\text{as-M}} \cdot (h_C - h_M) = 0.197 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} (24 - 21.3) \text{ kJkg}^{-1} = 0.53 \text{ kW}$$

$$\dot{Q}_{\text{post-risc}} = G_{\text{as-M}} \cdot (h_{I^*} - h_C) = 0.197 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} (54 - 24) \text{ kJkg}^{-1} = 5.91 \text{ kW}$$

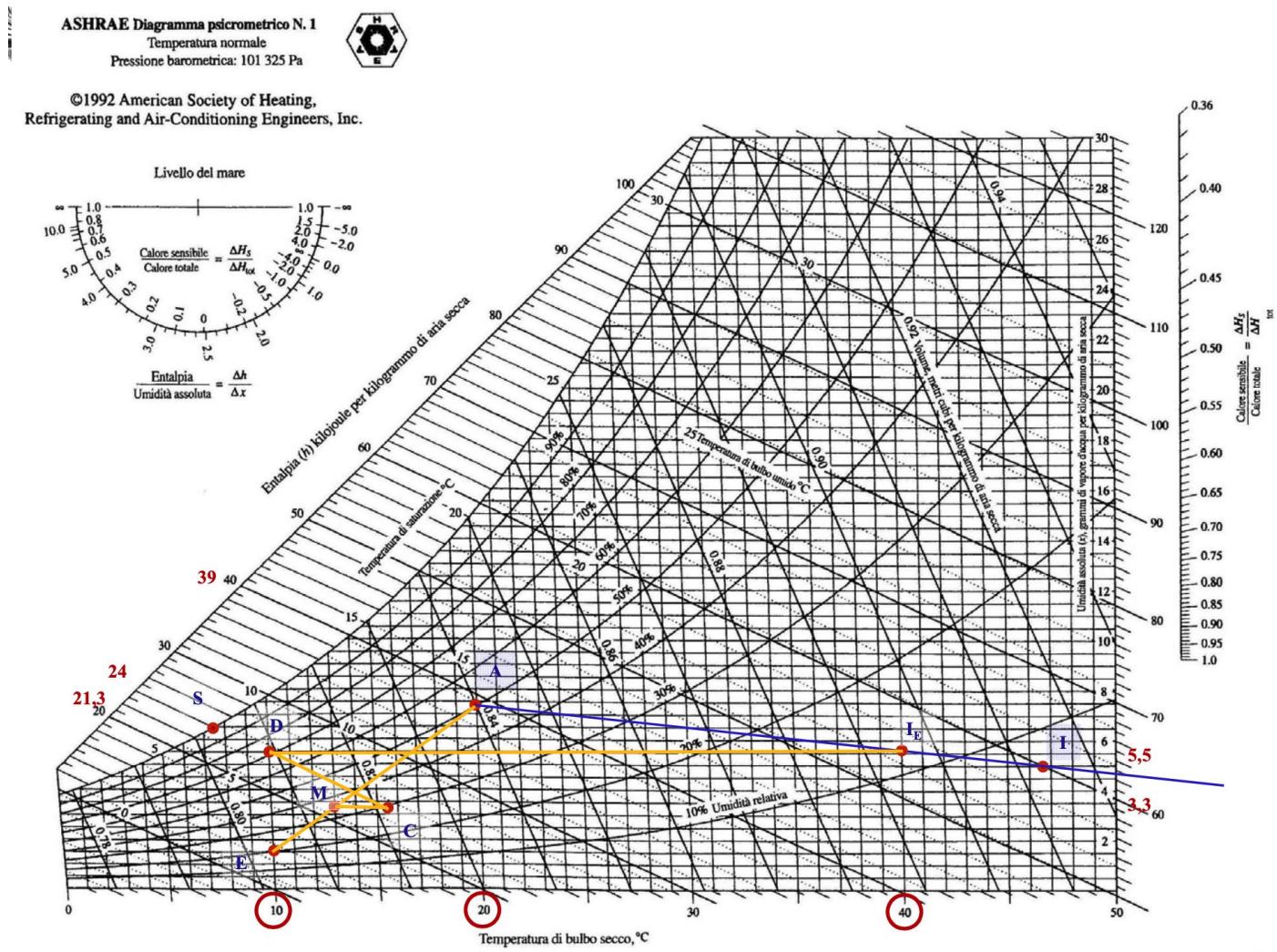


Identifichiamo quindi lo stato S.



Siamo nello stato **M** da qui facciamo passare una curva ad entalpia costante da S finché non interseca l'isotitolo in M ottenendo il punto di ingresso nel saturatore.

Se il saturatore avesse efficienza del 100% finiremmo in S ma avendo un'efficienza minore ci fermiamo prima e proprio al titolo desiderato di 5,5. Da qui tiriamo l'isotitolo che passa per I<sub>E</sub> ottenendo un altro punto. Indichiamo i valori con i punti C e D.

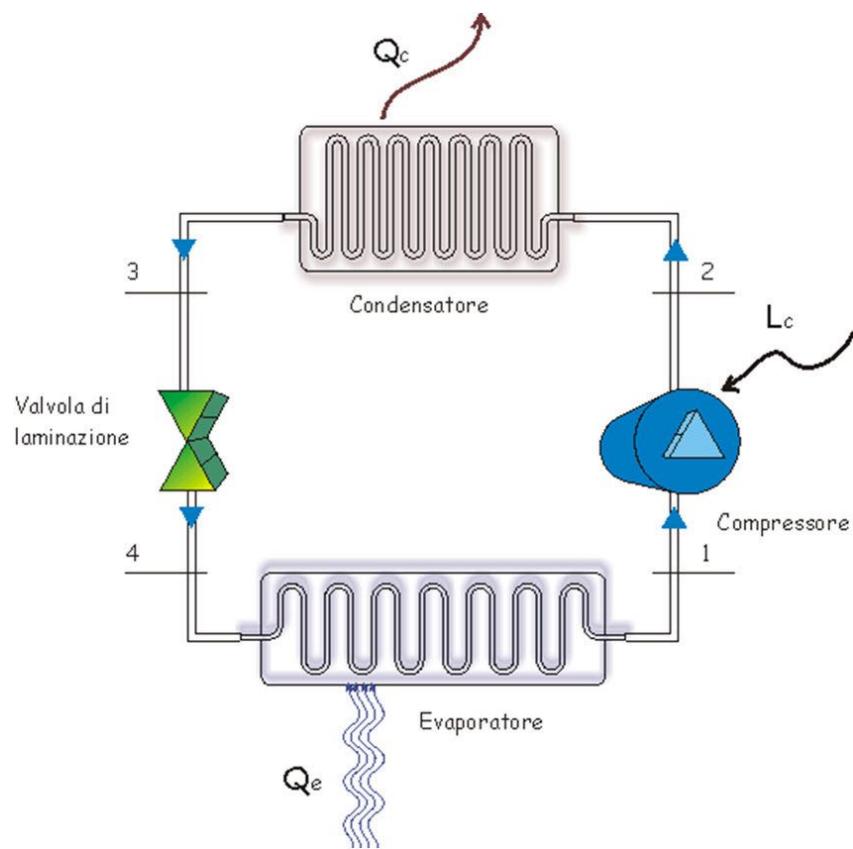


Allora la trasformazione fa una miscelazione da I<sub>E</sub> che ci porta in M dove facciamo un preriscalo per entrare in C, ovvero condizione di ingresso al saturatore reale che a quindi uscita D (e non S come quello ideale). Se abbiamo fatto bene i calcoli D deve avere lo stesso titolo di I<sub>E</sub> e quindi basta fare un postriscaldamento isotitolo che ci porta da D alle condizioni di immissione.

NON FOCALIZZARSI SULLA **DISTINZIONE ESTIVO/INVERNNALE** MA FARE SEMPRE IL BILANCIO CON IL RINNOVO DEL LOCALE E I VINCOLI SUL  $\Delta T$  RICAVANDO DI VOLTA IN VOLTA LA RETTA DI IMMISSIONE FACENDO LE OPPORTUNE CONSIDERAZIONI.

# FISICA TECNICA

Settimana 16



# Indice settimana 16

Indice settimana 16	2
martedì 12 gennaio 2021 - Esercitazione 7	3
Impianti frigoriferi	3
<i>Esercizio 1</i>	3
<i>Esercizio 2</i>	11
<i>Esercizio 3</i>	17
mercoledì 13 gennaio 2021 - Esercitazione 8	19
<i>Esercizio 1</i>	19
<i>Impianto ad aria</i>	28
<i>Esercizio 2</i>	29
giovedì 14 gennaio 2021 - Esercitazione 9	34
<i>Impianti di liquefazione</i>	34
<i>Esercizio 1</i>	35
<i>Esercizio 2 - Climatizzazione</i>	39

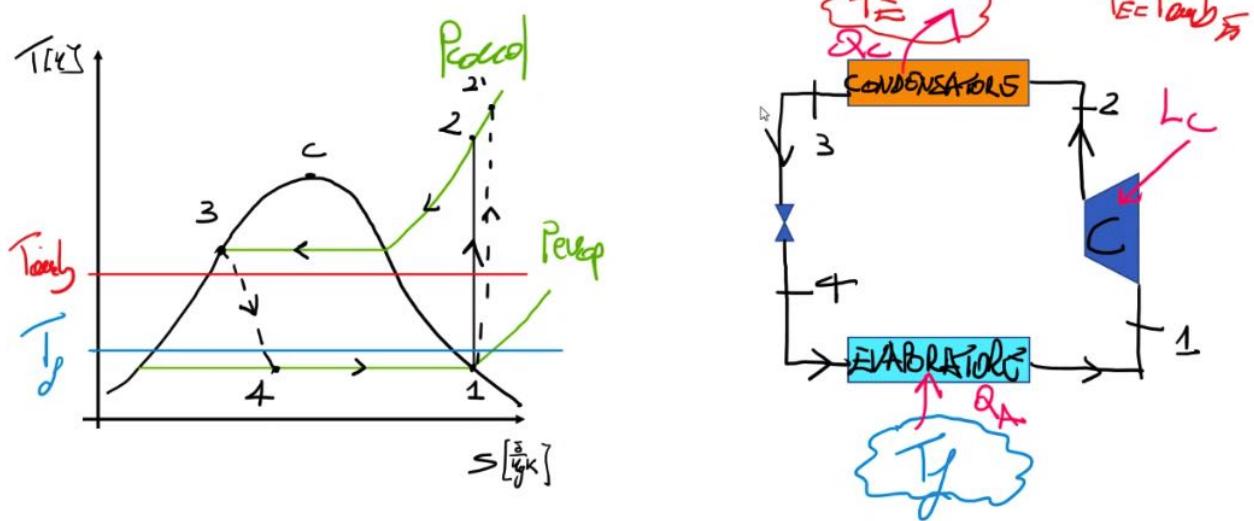
# Impianti frigoriferi

Partiamo dall'impiego frigorifero base.

Oggi ci occupiamo di impianti frigoriferi a compressione di vapore con il ciclo base e qualche modifica sulla linea di compressione.

## Esercizio 1

Un ipotetico impianto frigorifero a compressione di vapore (R134a) funziona secondo ciclo di Carnot ed opera tra le pressioni di 1.4 e 12 bar. Valutare se un impianto reale che opera tra le stesse pressioni, con vapore saturo in ingresso al compressore ideale e liquido saturo in uscita dal condensatore, sia in grado di sottrarre una potenza termica specifica all'evaporatore pari al 120% di quella del ciclo di Carnot. In caso contrario, ricorrere ad un impianto con rigeneratore che permetta lo scambio termico tra flusso uscente dal condensatore e quello uscente dall'evaporatore. Determinare gli stadi termodinamici del ciclo che soddisfa la richiesta ed, in seguito, il suo rendimento. Per l'eventuale rigeneratore, calcolare le temperature di ingresso ed uscita dei fluidi. Sia  $c_{p\text{-R134a-liquido}}(12 \text{ bar}) = 1.5 \text{ kJkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ . Riportare gli schemi d'impianto e le trasformazioni nei diagrammi  $T-s$  e  $p-h$ .



Abbiamo un ipotetico impianto frigorifero a compressione di vapore, quindi con il fluido R134A, che funziona secondo un ciclo di Carnot ed opera con le pressioni di 1.4 e 12 bar. (Vediamo un ciclo ideale che di fatto non è realizzabile). Si osservi che c'è vapore saturo in ingresso al compressore e liquido saturo in uscita a condensatore.

Nella figura di destra l'impiego frigorifero classico: nell'evaporatore il calore è assorbito (fase utile frigorifera dell'impiego) mentre nel condensatore cediamo calore e per farlo dobbiamo fornire lavoro al compressore che fa aumentare pressione e temperatura al fluido. Si ritorna alla condizione di partenza con una valvola di laminazione.

Riportando nel piano  $T-s$  (compressione di vapore quindi riportiamo la campana di Andrews del fluido refrigerante).

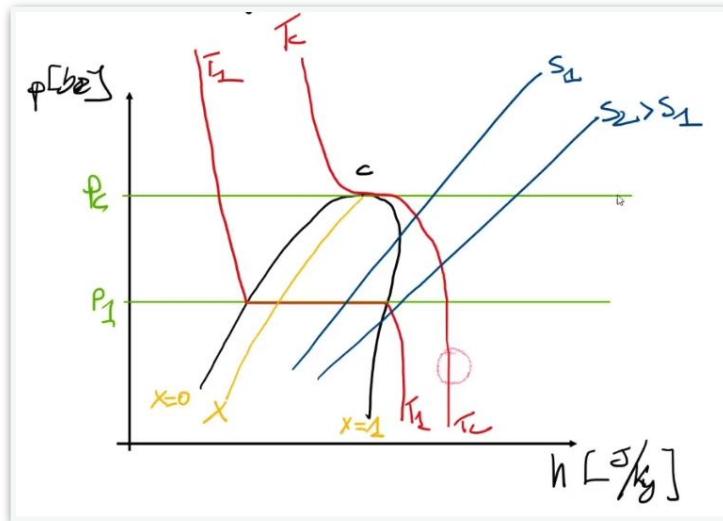
Si riportano i due livelli di pressione di condensatore ed evaporatore e quindi si riporta il ciclo.

Il testo specifica che il vapore saturo è in ingresso al compressore e questo ci indica dove segnare 1. Allora 1 $\rightarrow$ 2 è la trasformazione ideale mentre la 1 $\rightarrow$ 2' la dobbiamo ignorare essendo in questo caso un ciclo ideale.

Nel testo è riportato anche il liquido saturo in uscita al condensatore e quindi riportiamo 3.

Sono riportate anche le temperature dei due ambienti:  $T_{amb}$  quella ambientale e  $T_f$  quella frigo ovvero dell'ambiente da raffreddare. Si osservi come la temperatura frigo **deve** essere necessariamente sopra di quella dell'evaporatore che deve assorbire il calore e discorso opposto per la  $T$  ambiente che deve essere sotto quella di condensazione.

Si ricordi un generico **diagramma ph**.



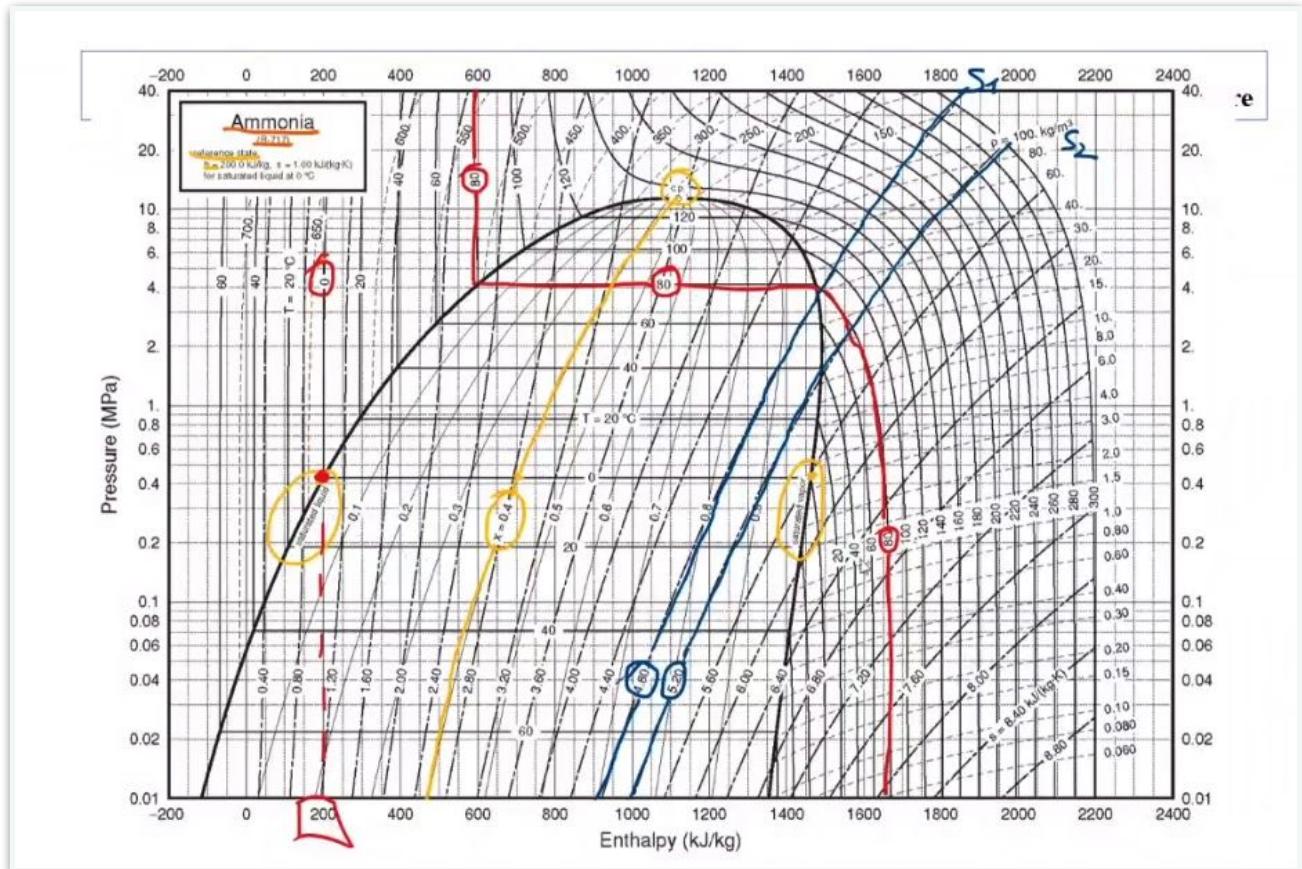
In nero la campana di Andrews con il punto di critico sulla sommità poiché in un diagramma ph le isobare sono tangenti alla campana e orizzontali.

Le isoterme nella zona finale (cerchiata) diventano delle isoentalpiche.

C'è la isotitolo  $x = 0$  della curva limite inferiore e quella  $x = 1$  della curva limite superiore. In mezzo ci sono le varie curve a titolo costante che partono sempre dal punto critico.

Abbiamo anche le curve a entropia costante dove l'entropia cresce lungo un'isobara all'aumentare dell'entalpia. Generalmente le isoentropiche tendono a divergere tra di loro (come in figura, in blu).

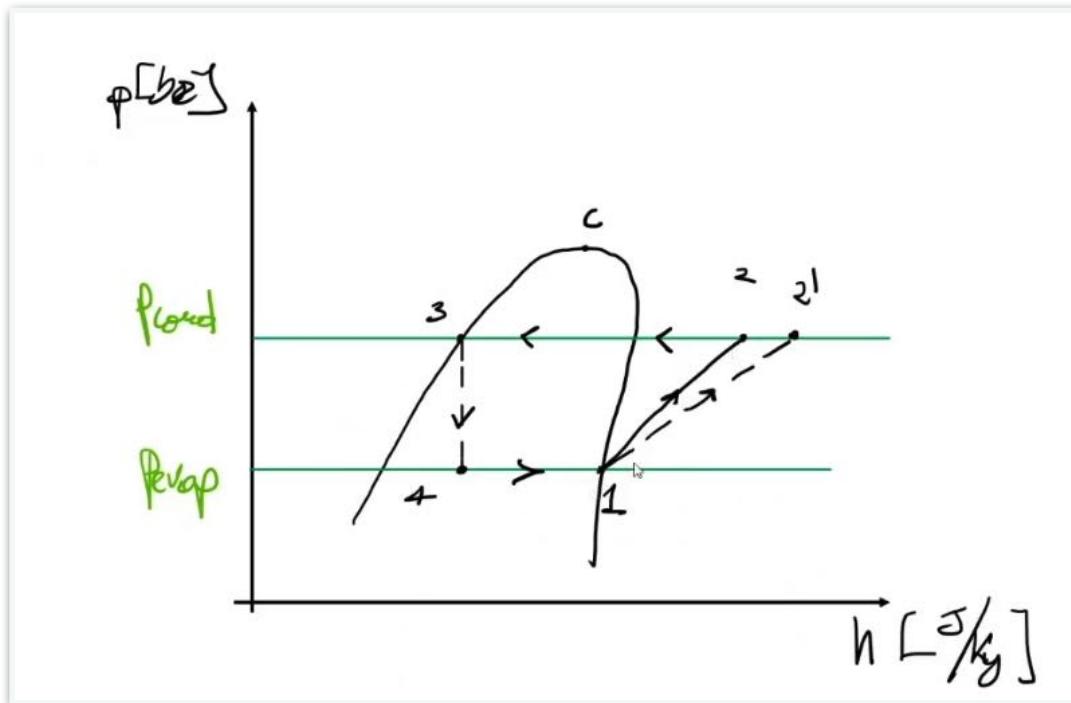
In figura il diagramma isoentropico per l'ammoniaca:



In figura sono evidenziati anche gli stati di riferimento (in alto). Si ricordi che mentre  $p$ ,  $v$  e  $T$  sono variabili di stato, entalpia, entropia, energia interna sono funzioni di stato e quindi richiedono la definizione di un valore di riferimento. In questo diagramma c'è il *reference state* che assegna all'entalpia il valore di 200 e all'entropia il valore unitario nelle condizioni di liquido saturo a zero gradi.

Si osservi come nelle tabelle i valori potrebbero essere diversi proprio perché cambiano i valori di riferimento.

Rappresentiamo quindi lo stesso ciclo nel diagramma ph:



Isoentropica ideale 1→2 o reale 1→2'.

Trasformazione 3→4 a entalpia costante ma non isoentalpica che in questo diagramma si vede molto bene.  
Riportate anche la T frigo e la T ambiente.

Allegato all'esercizio ci sono le tabelle del fluido refrigerante R134a.

R134a

Press. bar	Temp. °C	Specific Volume m³/kg		Internal Energy kJ/kg		Enthalpy kJ/kg		Entropy kJ/kg · K		Press. bar
		Sat. Liquid $v_t \times 10^3$	Sat. Vapor $v_g$	Sat. Liquid $u_t$	Sat. Vapor $u_g$	Sat. Liquid $h_t$	Evap. $h_g$	Sat. Vapor $s_t$	Sat. Vapor $s_g$	
0.6	-37.07	0.7097	0.3100	3.41	206.12	3.46	221.27	224.72	0.0147	0.9520
0.8	-31.21	0.7184	0.2366	10.41	209.46	10.47	217.92	228.39	0.0440	0.9447
1.0	-26.43	0.7258	0.1917	16.22	212.18	16.29	215.06	231.35	0.0678	0.9395
1.2	-22.36	0.7323	0.1614	21.23	214.50	21.32	212.54	233.86	0.0879	0.9354
1.4	-18.80	0.7381	0.1395	25.66	216.52	25.77	210.27	236.04	0.1055	0.9322
1.6	-15.62	0.7435	0.1229	29.66	218.32	29.78	208.19	237.97	0.1211	0.9295
1.8	-12.73	0.7485	0.1098	33.31	219.94	33.45	206.26	239.71	0.1352	0.9273
2.0	-10.09	0.7532	0.0993	36.69	221.43	36.84	204.46	241.30	0.1481	0.9253
2.4	-5.37	0.7618	0.0834	42.77	224.07	42.95	201.14	244.09	0.1710	0.9222
2.8	-1.23	0.7697	0.0719	48.18	226.38	48.39	198.13	246.52	0.1911	0.9197
3.2	2.48	0.7770	0.0632	53.06	228.43	53.31	195.35	248.66	0.2089	0.9177
3.6	5.84	0.7839	0.0564	57.54	230.28	57.82	192.76	250.58	0.2251	0.9160
4.0	8.93	0.7904	0.0509	61.69	231.97	62.00	190.32	252.32	0.2399	0.9145
5.0	15.74	0.8056	0.0409	70.93	235.64	71.33	184.74	256.07	0.2723	0.9117
6.0	21.58	0.8196	0.0341	78.99	238.74	79.48	179.71	259.19	0.2999	0.9097
7.0	26.72	0.8328	0.0292	86.19	241.42	86.78	175.07	261.85	0.3242	0.9080
8.0	31.33	0.8454	0.0255	92.75	243.78	93.42	170.73	264.15	0.3459	0.9066
9.0	35.53	0.8576	0.0226	98.79	245.88	99.56	166.62	266.18	0.3656	0.9054
10.0	39.39	0.8695	0.0202	104.42	247.77	105.29	162.68	267.97	0.3838	0.9043
12.0	46.32	0.8928	0.0166	114.69	251.03	115.76	155.23	270.99	0.4164	0.9023

Tabelle del vapore surriscaldato del fluido R134a

Per le entalpie dei vapori surriscaldati a 1.4 ed 12 bar valgono le correlazioni

$$h_{1,4\text{ bar}}(s) = A + Bs + Cs^2 \quad \text{con } A = 151 \text{ kJ/kg}, \quad B = -69 \text{ K}, \quad C = 172 \text{ kgk}^{-1}\text{K}^2$$

$$h_{1,12\text{ bar}}(s) = D + Es + Fs^2$$

$$\text{con } D = 126 \text{ kJ/kg}, \quad E = 7 \text{ K}, \quad F = 170 \text{ kgk}^{-1}\text{K}^2$$

$p = 1.4 \text{ bar}$

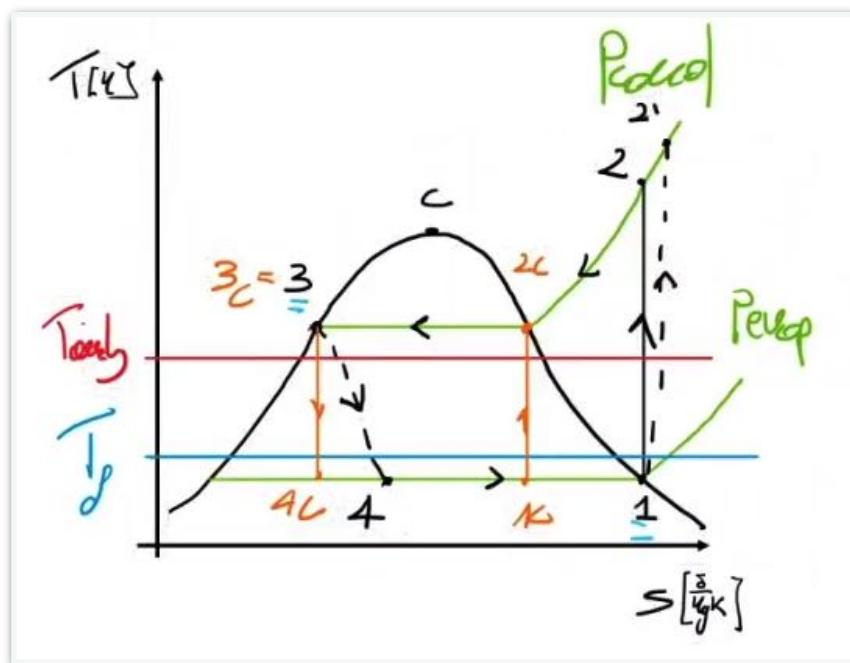
$t [^{\circ}\text{C}]$	-18,80	-10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$s [\text{kJkg}^{-1}\text{K}^{-1}]$	0,9322	0,9606	0,9922	1,023	1,0532	1,0828	1,112	1,1407	1,169	1,1969	1,2244	1,2516	1,2785

$p = 12 \text{ bar}$

$t [^{\circ}\text{C}]$	46,32	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160
$s [\text{kJkg}^{-1}\text{K}^{-1}]$	0,9023	0,9164	0,9527	0,9868	1,0192	1,0503	1,0804	1,1096	1,1381	1,166	1,1933	1,2201	1,2465

Tornando al problema, innanzitutto dobbiamo verificare se il ciclo base  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$  è maggiore o minore (in questo caso se è il 120%) di quello di Carnot equivalente.

Rappresentando il Carnot per questo ciclo lo rappresentiamo dentro la campana (due isoterme e due isoentropiche). Cioè in arancione:



Dobbiamo quindi confrontare il calore assorbito (ammessa la portata uguale).

Nel ciclo base il calore assorbito è pari alla differenza di entalpia:  $q_{a_{base}} = h_1 - h_4$

Mentre per Carnot  $q_{a_{carnot}} = h_{1c} - h_{4c}$ .

Dobbiamo quindi trovare queste due differenze.

Partiamo dal ciclo di Carnot, e quindi cerchiamo di ricavare  $h_{1c} - h_{4c}$ .

Possiamo osservare come in 4C abbiamo la stessa entropia di 3 e con questo possiamo ricavare il titolo. Essendo liquido saturo allora possiamo ricavare l'entropia di 3 come quella di 3C.

Cioè ci muoviamo tra 12 e 1,4 bar:

Lo stato 3C coincide con 3 con  $x = 0$  e  $p = 12 \text{ bar}$  allora dalle tabelle leggiamo l'entropia del liquido saturo pari  
 $s_{3c} = 0,4164 \text{ kJ/kg K}$

Per lo stato 2C abbiamo  $x = 1$  e  $p = 12 \text{ bar}$  e allora  
 $s_{2c} = 0,9023 \text{ kJ/kg K}$ .

Dobbiamo quindi ricavare il titolo in 4C e in 1C, cioè abbiamo bisogno dell'entropia andando a ricavare i valori in 1v e 1l ovvero vapore e liquido saturo (vedi figura a pg seguente).

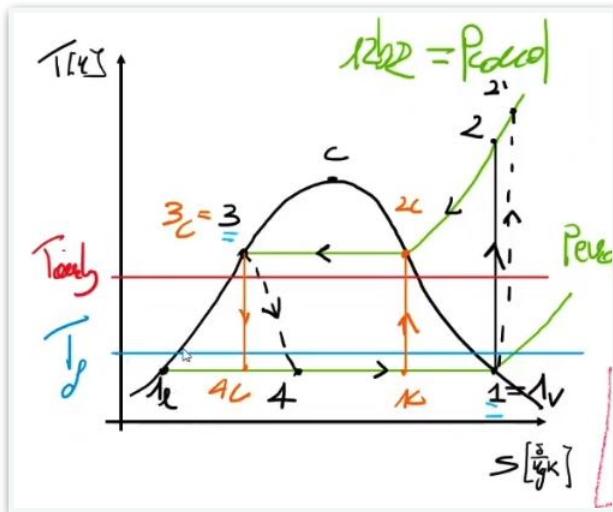
Press. bar	Temp. °C	Specific Volume m³/kg		Internal Energy kJ/kg		Enthalpy kJ/kg		Entropy kJ/kg · K		Press. bar
		Sat. Liquid $v_l \times 10^3$	Sat. Vapor $v_g$	Sat. Liquid $u_l$	Sat. Vapor $u_g$	Sat. Liquid $h_l$	Evap. $h_{lg}$	Sat. Vapor $h_g$	Sat. Liquid $s_l$	
0.6	-37.07	0.7097	0.3100	3.41	206.12	3.46	221.27	224.72	0.0147	0.9520
0.8	-31.21	0.7184	0.2366	10.41	209.46	10.47	217.92	228.39	0.0440	0.9447
1.0	-26.43	0.7258	0.1917	16.22	212.18	16.29	215.06	231.35	0.0678	0.9395
1.2	-22.36	0.7323	0.1614	21.23	214.50	21.32	212.54	233.86	0.0879	0.9354
1.4	-18.80	0.7381	0.1395	25.66	216.52	25.77	210.27	236.04	0.1055	0.9322
1.6	-15.62	0.7435	0.1229	29.66	218.32	29.78	208.19	237.97	0.1211	0.9295
1.8	-12.73	0.7485	0.1098	33.31	219.94	33.45	206.26	239.71	0.1352	0.9273
2.0	-10.09	0.7532	0.0993	36.69	221.43	36.84	204.46	241.30	0.1481	0.9253
2.4	-5.37	0.7618	0.0834	42.77	224.07	42.95	201.14	244.09	0.1710	0.9222
2.8	-1.23	0.7697	0.0719	48.18	226.38	48.39	198.13	246.52	0.1911	0.9197
3.2	2.48	0.7770	0.0632	53.06	228.43	53.31	195.35	248.66	0.2089	0.9177
3.6	5.84	0.7839	0.0564	57.54	230.28	57.82	192.76	250.58	0.2251	0.9160
4.0	8.93	0.7904	0.0509	61.69	231.97	62.00	190.32	252.32	0.2399	0.9145
5.0	15.74	0.8056	0.0409	70.93	235.64	71.33	184.74	256.07	0.2723	0.9117
6.0	21.58	0.8196	0.0341	78.99	238.74	79.48	179.71	259.19	0.2999	0.9097
7.0	26.72	0.8328	0.0292	86.19	241.42	86.78	175.07	261.85	0.3242	0.9080
8.0	31.33	0.8454	0.0255	92.75	243.78	93.42	170.73	264.15	0.3459	0.9066
9.0	35.53	0.8576	0.0226	98.79	245.88	99.56	166.62	266.18	0.3656	0.9054
10.0	39.39	0.8695	0.0202	104.42	247.77	105.29	162.68	267.97	0.3838	0.9043
12.0	46.32	0.8928	0.0166	114.69	251.03	115.76	155.23	270.99	0.4164	0.9023

Essendo  $p = 1,4 \text{ bar}$  cerchiamo dalla tabella entropia ed entalpia.

Allora  $h_{1v} = h_1 = 236,4 \text{ kJ/kg}$  e  $s_{1v} = s_1 = 0,9322 \text{ kJ/kg K}$ .  $h_{1l} = 25,77 \text{ kJ/kg}$  e  $s_{1l} = 0,1055 \text{ kJ/kg K}$

Allora vale la relazione per il titolo calcolata con le entropie. Vogliamo conoscere il titolo di 4C, cioè  $x_{4C} = \frac{s_{4C} - s_{1l}}{s_{1v} - s_{1l}} = \frac{s_{3C} - s_{1l}}{s_{1v} - s_{1l}}$

$$\text{e } x_{1C} = \frac{s_{1C} - s_{1l}}{s_{1v} - s_{1l}} = \frac{s_{2C} - s_{1l}}{s_{1v} - s_{1l}}$$



Cioè si ricava  $x_{4c} = 0,38$  e  $x_{1c} = 0,96$

Allora siamo in grado di ricavare anche l'entalpia:

$$h_{4C} = h_{1l} + x_{4C}(h_{1V} - h_{1l}) = 104,85 \text{ kJ/kg}$$

$$h_{2C} = h_{1l} + x_{2C}(h_{1v} - h_{1l}) = 228,43 \text{ kJ/kg}$$

Si controlli che siano sempre intermedie tra il liquido e il vapore.

Allora possiamo scriverci il calore assorbito dal Carnot:

$$q_{a_{Carnot}} = h_{1C} - h_{4C} = (228,43 - 104,85) \text{ kJ/kg}$$

Ma dobbiamo anche ricavare il calore assorbito dal ciclo base ( $h_1 - h_4$ ) dove abbiamo  $h_1$  (letto) e  $h_4$  lo prendiamo dalla trasformazione a entalpia costante (anche se non isoentalpica) 3→4 dove quella di 3 già la conosciamo dalle tabelle  $h_3 = 115,86 \text{ kJ/kg}$

$$q_{a_{base}} = h_1 - h_4 = (236,04 - 115,86) \text{ kJ/kg}$$

$$\text{Allora possiamo ricavare } \frac{q_{a_{base}}}{q_{a_{Carnot}}} = \frac{\Delta h_{evap}}{\Delta h_{evap_C}} \approx \frac{121}{123,6} \approx 0,97 < 1,2$$

### Osservazione:

Il rendimento del ciclo base è  $\eta_{base} = \epsilon = COP$ , dove COP sta per *coefficient of performance*.

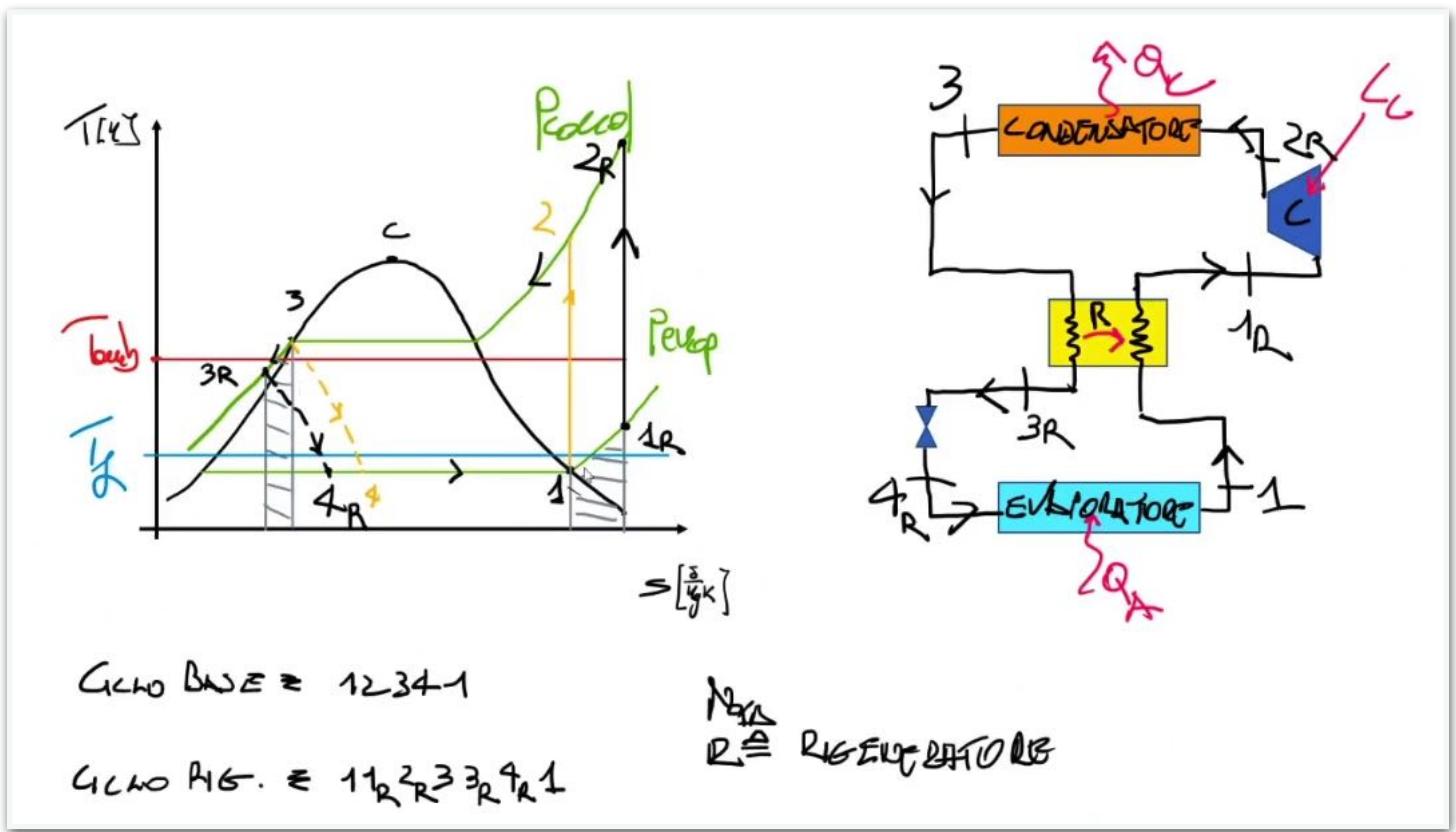
$$\dot{\epsilon} \eta_{base} = \frac{Q_A}{|L_C|} = \frac{q_a}{\ell_c} = \frac{h_1 - h_4}{h_2 - h_1} \text{ con il lavoro del compressore preso in modulo.}$$

Mentre per il Carnot:  $\eta_{Carnot} = \frac{Q_A}{|L_C|} = \frac{q_a}{\ell_c} = \frac{h_{1C} - h_{4C}}{h_{2C} - h_{1C}} = \frac{T_{min}}{T_{max} - T_{min}}$ , che per il nostro esercizio

$$\eta_{Carnot} = \frac{(-18,8 + 273,15)}{(46,32 + 273,16) - (-18,8 + 273,15)}.$$

Adesso vediamo la modifica che viene proposta all'impianto nel caso in cui non soddisfa il requisito di essere il 120% del Carnot.

Dobbiamo ricorrere ad un impianto con *rigeneratore* ovvero uno scambiatore intermedio nell'impianto:



In figura abbiamo il ciclo base  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$  con la modifica andiamo a mettere uno scambiatore tra il fluido che esce dal condensatore, ovvero il fluido in 3, con il fluido che esce dall'evaporatore, in 1. Il fluido in 3 è più caldo del fluido in 1 e quindi nel rigeneratore il fluido caldo cede calore al fluido freddo (scambio termico in direzione della freccia). Usciamo quindi da questo scambiatore in 1R dove è variato l'ingresso nel compressore e quindi varierà anche la sua uscita 2R. Cambia anche l'ingresso nella valvola di laminazione che sarà 3R con un'uscita 4R, spostata verso sinistra (vantaggioso).

Il rigeneratore è sempre uno scambiatore dove lo scambio termico è interno all'impianto stesso, cioè non scambia con l'esterno.

Quindi il ciclo rigenerato è  $1 \rightarrow 1R \rightarrow 2R \rightarrow 3 \rightarrow 3R \rightarrow 4R \rightarrow 1$ .

Con questa modifica il vantaggio è che il punto 4, uscita della valvola nonchè ingresso nell'evaporatore, si è spostato verso sinistra e quindi è aumentato il salto entalpico all'evaporatore. Quindi siamo in grado di sottrarre una potenza maggiore all'evaporatore.

Si ricordi che per gli impianti frigoriferi i **parametri di valutazione** sono:

- Rendimento,  $\eta = \epsilon = cop$
- Potenza frigorifera, i.e. capacità di sottrarre calore alla sorgente fredda nonchè la potenza termica sottratta alla sorgente fredda

A parità di portata nell'impianto di fatto abbiamo aumentato la potenza frigorifera.

Nel rigeneratore dobbiamo considerare un bilancio dove il calore ceduto da un fluido è quelli acquisito dall'altro, ovvero:

$$\begin{cases} \dot{m}_3 (h_3 - h_{3R}) = \dot{m}_1 (h_{1R} - h_1) \\ \dot{m}_3 = \dot{m}_1 \end{cases}, \text{ dove c'è l'eguaglianza tra le portate in quanto il sistema è chiuso.}$$

Essendo un calore scambiato questo nel Ts lo vediamo bene, c'è un'area sottesa alla trasformazione 3-3R e 1-1R che devono essere uguali essendo il calore scambiato mutuamente.

$$\text{Allora in rendimento del ciclo rigenerato sarà } \eta_{rig} = \frac{Q_a}{|L_C|} = \frac{q_a}{\ell_C} = \frac{h_1 - h_{4R}}{h_{2R} - h_{1R}}$$

Inoltre si osservi che  $(h_1 - h_{4R}) > (h_1 - h_4)$  quindi rispetto il ciclo base la potenza termica sottratta è maggiore ma in generale è vero anche che  $(h_{2R} - h_{1R}) > (h_2 - h_1)$  cioè è aumentato anche il lavoro del compressore e quindi il rendimento potrebbe essere maggiore, minore o uguale rispetto quello base  $\eta_{RIG} \leq o \geq \eta_{base}$ .

Allora dobbiamo determinare gli stati termodinamici del ciclo che soddisfa la richiesta.  
Quindi ci servono gli stati 3R e 1R.

Conosciamo le pressioni vediamo come ricavare le altre quantità.

Si ricordi che vogliamo avere un calore sottratto pari al 120% di quello di Carnot e per trovare 3R ci serve 4R (avranno la stessa entalpia). Allora all'evaporatore del ciclo rigenerato dobbiamo soddisfare

$$h_1 - h_{4R} = 1,2 (h_{1C} - h_{4C}) \Rightarrow h_{4R} = 87,73 \text{ kJ/kg}$$

Allora per 3R conosciamo pressione  $p = 12 \text{ bar}$  ed entalpia, ed essendo liquido sottoraffreddato, sappiamo che  $h_{3R} = h_{4R}$

Per ricavare lo stato 1R abbiamo  $p = 1,4 \text{ bar}$  e utilizziamo il bilancio del rigeneratori e quindi:

$$\dot{m}_3 (h_3 - h_{3R}) = \dot{m}_1 (h_{1R} - h_1) \Rightarrow h_{1R} = 264,07 \text{ kJ/kg}$$

Per la parte sulle temperature bisogna utilizzare le informazioni sul vapore surriscaldato ed è da COMPLETARE facendo riferimento ai file degli esercizi.

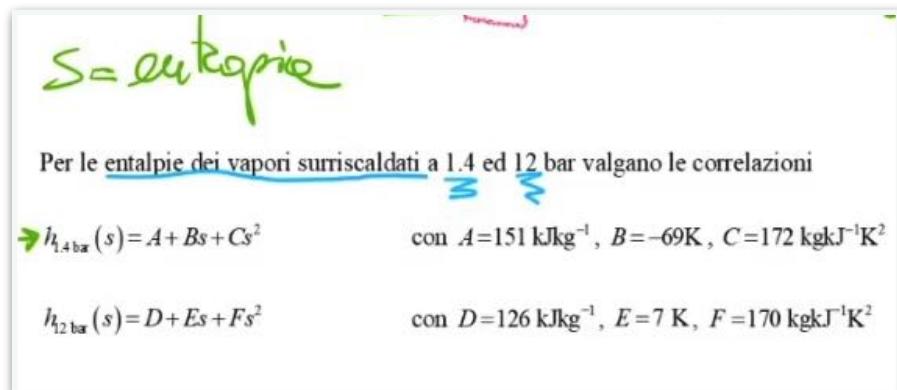
### Ricavare le temperature di 3R e 1R.

Si osservi come dalle relazioni abbiamo l'entalpia in funzione dell'entropia, cioè

$$h \left[ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right], \quad s \left[ \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right]$$

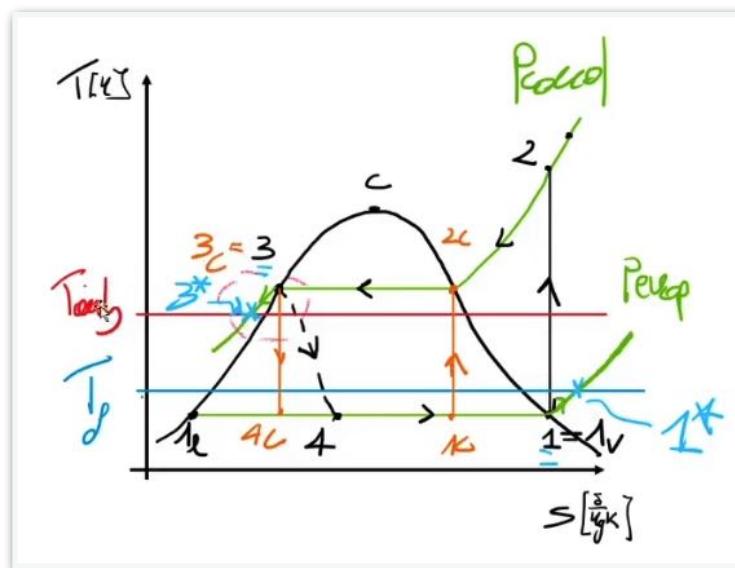
Queste due relazioni ci servono per ricavare  $T_{1R}$  dalla prima e l'entalpia dall'uscita al compressore per la seconda.

Questo ci servirà anche per calcolare il rendimento (come lo abbiamo già scritto prima).



### OSSERVAZIONE:

Riprendendo il testo questo ha specificato che in ingresso al compressore c'era vapore saturo, quindi lo stato 1, e che 3 fosse liquido saturo. Questa precisazione è necessaria poiché completando le isobare nel grafico (in figura il disegno è molto esagerato nella parte cerchiata per far capire il concetto ma nella realtà le isobare sono vicine alla curva limite) si vede come potremmo raffreddare ulteriormente alla stessa pressione. Oppure in uscita all'evaporatore potremmo continuare con la trasformazione in cui assorbiamo calore anche oltre il punto 1, ovvero tra 1 e un limite teorico rappresentato da 1\*, in quanto oltre non possiamo più sottrarre calore. Discorso analogo per 3\*, ovvero la condizione limite di uscita dal condensatore.

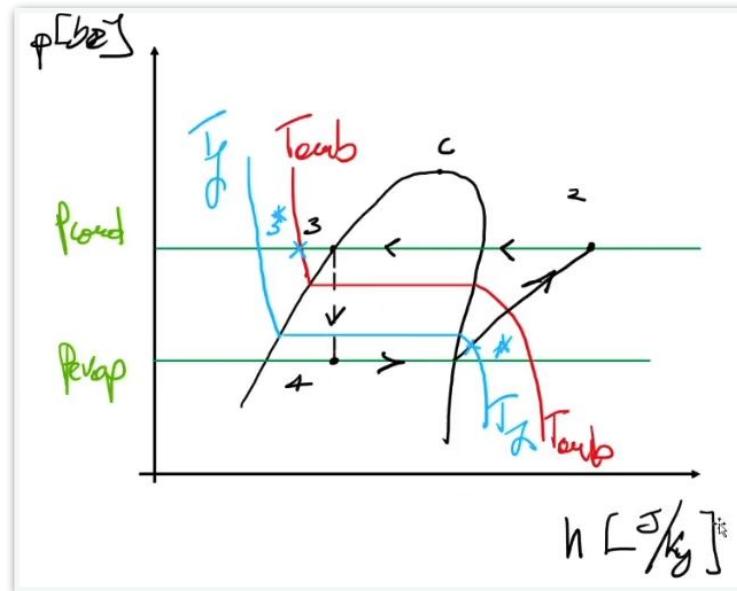


Questo perchè negli impianti si cerca di avere il sottoraffreddamento, cioè di procedere il più possibile con il raffreddamento oltre la curva limite inferiore, cioè tra 3 e 3\*.

Questo ci dà il vantaggio di poter spostare il punto di ingresso della valvola nonché quello di uscita dalla stessa, cioè di spostare verso sinistra l'ingresso all'evaporatore.

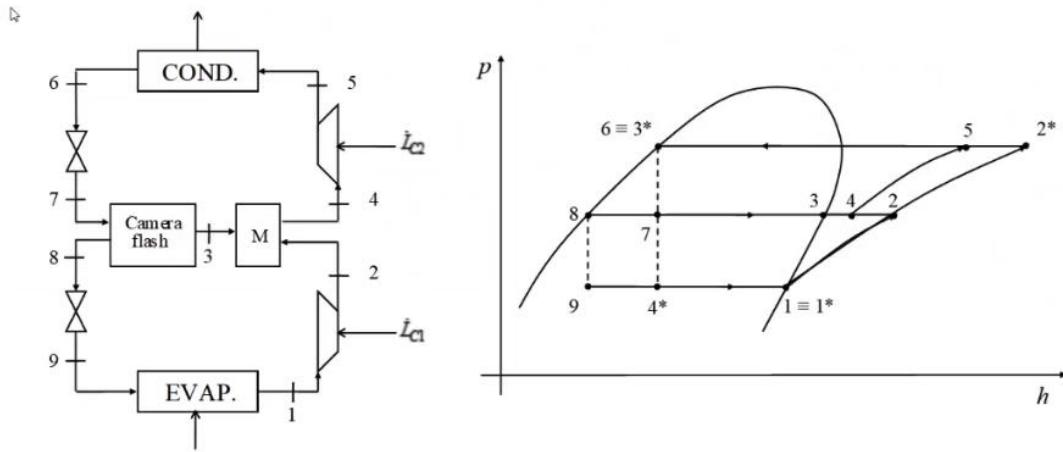
Se nel testo non c'è scritto che 1 è vapore saturo e 3 liquido saturo, **ATTENZIONE** che 3 potrebbe essere liquido sottoraffreddato e 1 vapore surriscaldato.

Discorso analogo per il diagramma ph:



## Esercizio 2

Si consideri un impianto frigorifero a compressione di vapore con camera di separazione liquido-vapore e miscelatore. Le pressioni dell'evaporatore e della camera siano rispettivamente 1.5 e 5 bar. Il fluido frigorifero esce liquido saturo dal condensatore e vapore saturo dall'evaporatore. Sapendo che la potenza termica ceduta al condensatore è di 27 kW e che il lavoro specifico del compressore dopo il miscelatore è il 20% in più di quello dopo l'evaporatore, determinare i titoli degli stati termodinamici di fine laminazione, il rendimento dell'impianto e la pressione al condensatore. Siano unitari i rendimenti isoentropici di ciascun compressore e la portata di refrigerante (R22) all'evaporatore sia di  $0.10 \text{ kg s}^{-1}$ . Riportare lo schema completo d'impianto e le trasformazioni del ciclo nei piani  $T-s$  e  $p-h$ . (Cfr. Figura e Allegati)



Vediamo una prima modifica all'impianto a compressione di vapore: andiamo ad utilizzare la camera flash ovvero il separatore con affiancato miscelatore.

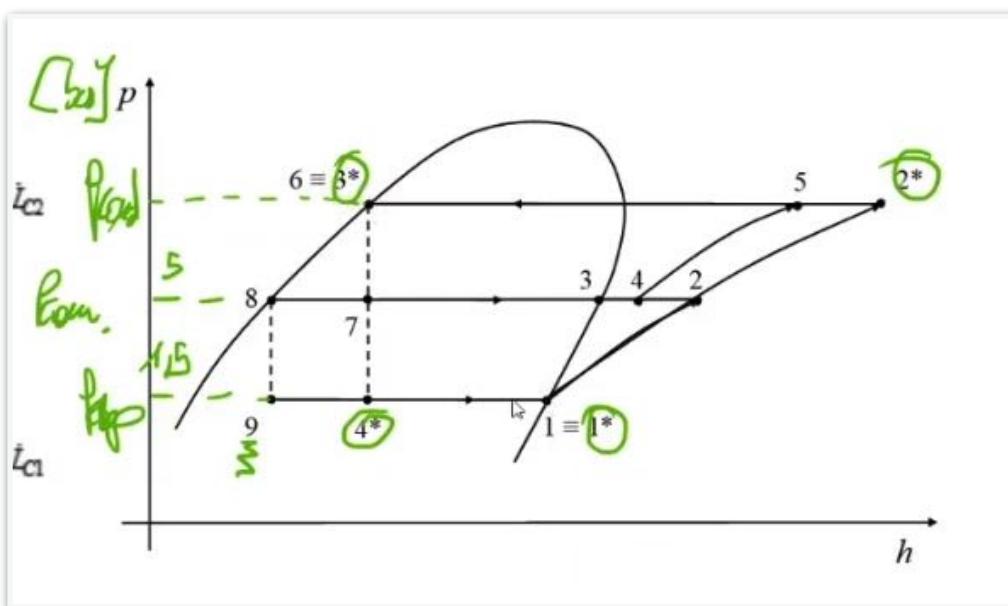
Questo ci porta a modificare la parte della compressione.

L'impianto evolve tra due livelli di pressione, quella all'evaporatore  $p_{evap}$  e quella al condensatore  $p_{cond}$ .

Con gli asterischi "\*" è rappresentato il ciclo base.

Con la camera flash + miscelatore si modifica la compressione che diventa  $1 \rightarrow 2 + 4 \rightarrow 5$  e questo diminuisce il lavoro di compressione poiché ci spostiamo con un seguito di raffreddamento e le isobare sono divergenti tra di loro quindi spendiamo complessivamente un lavoro inferiore.

Inoltre c'è un altro vantaggio dovuto al punto 9 il cui stato termodinamico ha un titolo più basso di  $4^*$  che ci fornisce nell'evaporatore un salto entalpico maggiore, cioè non più da  $4^*$  a 1 ma da 9 a 1.



Tornando all'esercizio conosciamo le due pressioni.

Conosciamo la potenza termica ceduta al condensatore, ovvero  $|\dot{Q}_{cond}| = \dot{m}_{cond} (h_5 - h_6)$ , scritta in modulo altrimenti dovrebbe essere stato finale meno iniziale e sarebbe negativa.

Mentre il lavoro del compressore è  $|\ell_{C_{4-5}}| = 1,2 \cdot |\ell_{C_{1-2}}|$ .

Le laminazioni sono due, 6->7 e 8->9, e quindi vogliamo ricavarci:

- $x_7 = ?$
- $x_9 = ?$
- $\eta = ?$
- $p_{cond} = ?$

È nota anche la portata all'evaporatore  $\dot{m}_{evap} = 0,1 \text{ kg/s}$

In allegato ci viene fornito per R22 le tabelle del vapore saturo e le tabelle del vapore surriscaldato a 5 bar.

### Allegati EX. 02

Tabelle vapore saturo e surriscaldato del fluido R22

Press. bar	Temp. °C	Specific Volume $\text{m}^3/\text{kg}$		Internal Energy $\text{kJ/kg}$		Enthalpy $\text{kJ/kg}$		Entropy $\text{kJ/kg} \cdot \text{K}$		Press. bar	
		Sat. Liquid $v_t \times 10^3$	Sat. Vapor $v_g$	Sat. Liquid $h_t$	Sat. Vapor $h_g$	Sat. Liquid $h_t$	Evap. $h_g$	Sat. Vapor $h_t$	Sat. Vapor $h_g$		
0.40	-58.86	0.6847	0.5056	-20.36	204.13	-20.34	244.69	224.36	-0.0907	1.0512	0.40
0.50	-54.83	0.6901	0.4107	-16.07	205.76	-16.03	242.33	226.30	-0.0709	1.0391	0.50
0.60	-51.40	0.6947	0.3466	-12.39	207.14	-12.35	240.28	227.93	-0.0542	1.0294	0.60
0.70	-48.40	0.6989	0.3002	-9.17	208.34	-9.12	238.47	229.35	-0.0397	1.0213	0.70
0.80	-45.73	0.7026	0.2650	-6.28	209.41	-6.23	236.84	230.61	-0.0270	1.0144	0.80
0.90	-43.30	0.7061	0.2374	-3.66	210.37	-3.60	235.34	231.74	-0.0155	1.0084	0.90
1.00	-41.09	0.7093	0.2152	-1.26	211.25	-1.19	233.95	232.77	-0.0051	1.0031	1.00
1.25	-36.23	0.7166	0.1746	4.04	213.16	4.13	230.86	234.99	0.0175	0.9919	1.25
1.50	-32.08	0.7230	0.1472	8.60	214.77	8.70	228.15	236.86	0.0366	0.9830	1.50
1.75	-28.44	0.7287	0.1274	12.61	216.18	12.74	225.73	238.47	0.0531	0.9755	1.75
2.00	-25.18	0.7340	0.1123	16.22	217.42	16.37	223.52	239.88	0.0678	0.9691	2.00
2.25	-22.22	0.7389	0.1005	19.51	218.53	19.67	221.47	241.15	0.0809	0.9636	2.25
2.50	-19.51	0.7436	0.0910	22.54	219.55	22.72	219.57	242.29	0.0930	0.9586	2.50
2.75	-17.00	0.7479	0.0831	25.36	220.48	25.56	217.77	243.33	0.1040	0.9542	2.75
3.00	-14.66	0.7521	0.0765	27.99	221.34	28.22	216.07	244.29	0.1143	0.9502	3.00
3.25	-12.46	0.7561	0.0709	30.47	222.13	30.72	214.46	245.18	0.1238	0.9465	3.25
3.50	-10.39	0.7599	0.0661	32.82	222.88	33.09	212.91	246.00	0.1328	0.9431	3.50
3.75	-8.43	0.7636	0.0618	35.06	223.58	35.34	211.42	246.77	0.1413	0.9399	3.75
4.00	-6.56	0.7672	0.0581	37.18	224.24	37.49	209.99	247.48	0.1493	0.9370	4.00
4.25	-4.78	0.7706	0.0548	39.22	224.86	39.55	208.61	248.16	0.1569	0.9342	4.25
4.50	-3.08	0.7740	0.0519	41.17	225.45	41.52	207.27	248.80	0.1642	0.9316	4.50
4.75	-1.45	0.7773	0.0492	43.05	226.00	43.42	205.98	249.40	0.1711	0.9292	4.75
5.00	0.12	0.7805	0.0469	44.86	226.54	45.25	204.71	249.97	0.1777	0.9269	5.00
5.25	1.63	0.7836	0.0447	46.61	227.04	47.02	203.48	250.51	0.1841	0.9247	5.25
5.50	3.08	0.7867	0.0427	48.30	227.53	48.74	202.28	251.02	0.1903	0.9226	5.50
5.75	4.49	0.7897	0.0409	49.94	227.99	50.40	201.11	251.51	0.1962	0.9206	5.75
6.00	5.85	0.7927	0.0392	51.53	228.44	52.01	199.97	251.98	0.2019	0.9186	6.00
7.00	10.91	0.8041	0.0337	57.48	230.04	58.04	195.60	253.64	0.2231	0.9117	7.00
8.00	15.45	0.8149	0.0295	62.88	231.43	63.53	191.52	255.05	0.2419	0.9056	8.00
9.00	19.59	0.8252	0.0262	67.84	232.64	68.59	187.67	256.25	0.2591	0.9001	9.00
10.00	23.40	0.8352	0.0236	72.46	233.71	73.30	183.99	257.28	0.2748	0.8952	10.00
12.00	30.25	0.8546	0.0195	80.87	235.48	81.90	177.04	258.94	0.3029	0.8864	12.00
14.00	36.29	0.8734	0.0166	88.45	236.89	89.68	170.49	260.16	0.3277	0.8786	14.00
16.00	41.73	0.8919	0.0144	95.41	238.00	96.83	164.21	261.04	0.3500	0.8715	16.00
18.00	46.69	0.9104	0.0127	101.87	238.86	103.51	158.13	261.64	0.3705	0.8649	18.00
20.00	51.26	0.9291	0.0112	107.95	239.51	109.81	152.17	261.98	0.3895	0.8586	20.00
24.00	59.46	0.9677	0.0091	119.24	240.22	121.56	140.43	261.99	0.4241	0.8463	24.00

$T$ °C	$v$ $\text{m}^3/\text{kg}$	$u$ $\text{kJ/kg}$	$h$ $\text{kJ/kg}$	$s$ $\text{kJ/kg} \cdot \text{K}$
$p = 5.0 \text{ bar} = 0.50 \text{ MPa}$ ( $T_{sat} = 0.12^\circ\text{C}$ )				
0	0.04686	226.54	249.97	0.9269
5	0.04810	229.52	253.57	0.9399
10	0.04934	232.55	257.22	0.9530
15	0.05056	235.57	260.85	0.9657
20	0.05175	238.59	264.47	0.9781
25	0.05293	241.61	268.07	0.9903
30	0.05409	244.63	271.68	1.0023
35	0.05523	247.66	275.28	1.0141
40	0.05636	250.70	278.89	1.0257
45	0.05748	253.76	282.50	1.0371
50	0.05859	256.82	286.12	1.0484
55	0.05969	259.90	289.75	1.0595

A partire dallo schema d'impianto ci siamo disegnati un ciclo termodinamico, impensabile svolgere esercizi sui cicli senza rappresentarli.

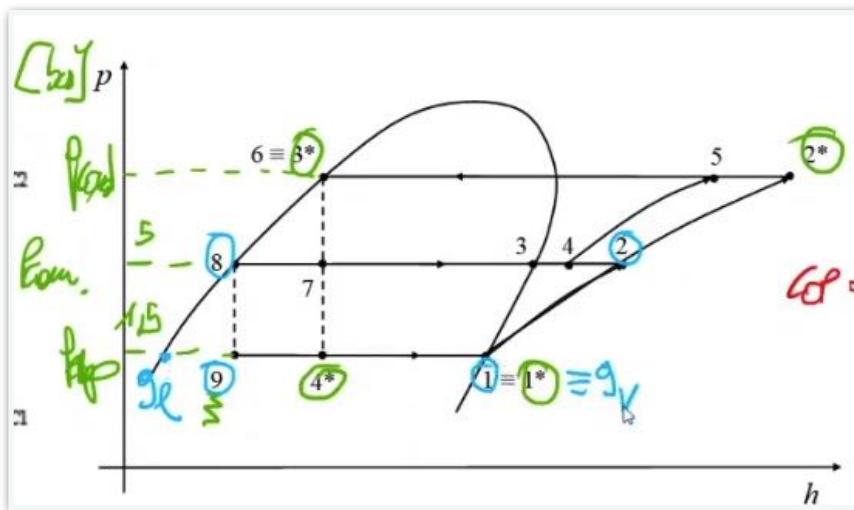
Tra le domande del problema possiamo trovare facilmente gli stati di 8 e 1, da cui 9, e anche lo stato 2, sapendo che 1→2 è isoentropica e per 2 abbiamo le tabelle del vapore saturo.

Quindi dovremmo poter trovare facilmente il titolo di 9.

Quindi per lo stato 8 è liquido saturo con  $p_8 = 5$  bar da cui entriamo nella tabella e leggiamo l'entalpia, nonché l'entalpia del liquido saturo,  $h_8 = h_l = 45,25$  kJ/kg.

Per lo stato 9 conosciamo la sua pressione  $p_9 = 1,5$  bar e la sua entalpia che è la stessa in entrata alla valvola di laminazione, cioè  $h_9 = h_8 = 45,25$  kJ/kg.

Allora possiamo ricavare il titolo:  $h_9 = h_l + x_9 (h_{9v} - h_{9l})$ , con gli stati di liquido saturo 9l e vapore saturo 9v come indicati in figura che leggiamo dalla tabella a 1,5 bar:



$$\text{Allora ricaviamo } x_9 = \frac{h_9 - h_{9l}}{h_{9v} - h_{9l}} = \frac{45,25 - 8,7}{236,86 - 8,7} = 0,16$$

Abbiamo lo stato 9 e lo stato 1 e la portata all'evaporatore quindi possiamo calcolare facilmente la potenza termica sottratta all'evaporatore.

Per il rendimento abbiamo la fase utile nell'evaporatore a spese del lavoro tra i compressori, cioè

$$COP = \eta = \frac{\dot{Q}_{evap}}{|\dot{L}_{c_1}| + |\dot{L}_{c_2}|} = \frac{\dot{m}_{evap} (h_1 - h_9)}{\dot{m}_{evap} (h_2 - h_1) + \dot{m}_{cond} (h_5 - h_4)}, \text{ dove nel compressore 1 transita la portata}$$

all'evaporatore mentre nel secondo c'è il salto entalpico 4→5 ma con la portata del condensatore. Di questa espressione conosciamo il numeratore, riusciamo a ricavare facilmente  $h_2$  mentre  $h_5 - h_4$  è un dato del problema essendo noto che  $|\dot{L}_{c_{4-5}}| = 1,2 |\dot{L}_{c_{1-2}}| \Rightarrow (h_4 - h_5) = 1,2 (h_2 - h_1)$ . Allora l'unica incognita è la portata al condensatore  $\dot{m}_{cond}$ .

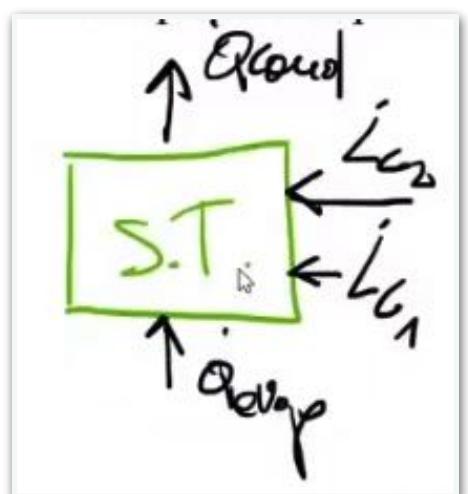
Ci viene allora in mente di riscrivere questo rendimento del sistema frigorifero come un sistema termodinamico che scambia con l'esterno un  $\dot{Q}_{evap}$ ,  $\dot{Q}_{cond}$  e un  $\dot{L}_{c_2}$ ,  $\dot{L}_{c_1}$  e allora queste potenze (o energie se moltiplichiamo per un intervallo di tempo) sono legate dalla seguente relazione, ovvero dal primo principio di un sistema chiuso che lavora in ciclo, cioè:

$$Q = L$$

Che presi con i loro segni:

$$|\dot{Q}_{evap}| - |\dot{Q}_{cond}| = - |\dot{L}_{c_1}| - |\dot{L}_{c_2}|$$

$$\text{Allora il rendimento } \eta = \frac{|\dot{Q}_{evap}|}{|\dot{Q}_{cond}| - |\dot{Q}_{evap}|}$$



Con questa espressione sappiamo calcolare il  $\dot{Q}_{evap}$  mentre il  $\dot{Q}_{cond} = 27 \text{ kW}$  è un dato del problema.

Allora calcoliamo il rendimento e uguagliando con la forma precedente riusciamo a calcolare anche la portata al condensatore  $\dot{m}_{cond}$ .

Vediamo quindi come ricavare lo stato termodinamico 2 del quale conosciamo la pressione e anche l'entropia in quanto 1->2 è la trasformazione di un compressore che quindi è adiabatico reversibile ovvero isoentropica, cioè  $s_2 = s_1$  che leggiamo dalle tabelle del vapore surriscaldato.

Vap. SURR.				
T °C	v m <sup>3</sup> /kg	u kJ/kg	h kJ/kg	s kJ/kg · K
$p = 5.0 \text{ bar} = 0.50 \text{ MPa}$ ( $T_{sat} = 0.12^\circ\text{C}$ )				
Sat.	0.04686	226.54	249.97	0.9269
0	0.04810	229.52	253.57	0.9399
5	0.04934	232.55	257.22	0.9530
10	0.05056	235.57	260.85	0.9657
15	0.05175	238.59	264.47	0.9781
20	0.05293	241.61	268.07	0.9903
25	0.05409	244.63	271.68	1.0023
30	0.05523	247.66	275.28	1.0141
35	0.05636	250.70	278.89	1.0257
40	0.05748	253.76	282.50	1.0371
45	0.05859	256.82	286.12	1.0484
50	0.05969	259.90	289.75	1.0595

Cioè  $s_2 = s_1 = 0,9830 \text{ kJ/kg K}$ .

Per il rendimento abbiamo che:

$$\dot{Q}_{evap} = \dot{m}_{evap} (h_1 - h_2) = 19,16 \text{ kW}$$

$$COP = \frac{\dot{Q}_{evap}}{|\dot{Q}_{cond}| - |\dot{Q}_{evap}|} = \frac{19,16}{27,00 - 19,16} = 2,44, \text{ maggiore di 1 e generalmente negli impianti frigoriferi si cerca}$$

maggiore di 2, ovvero tipicamente tra 2 e 3.

Allora abbiamo che

$$|\dot{Q}_{cond}| - |\dot{Q}_{evap}| = |\dot{L}_{c_1}| + |\dot{L}_{c_2}| = (27 - 19,16) \text{ kW} = \dot{m}_{evap} (h_2 - h_1) + \dot{m}_{cond} (h_5 - h_4) = \dot{m}_{evap} (h_2 - h_1) + \dot{m}_{cond} \cdot 1,2 \cdot (h_2 - h_1)$$

e allora ricaviamo  $\dot{m}_{cond}$  una volta nota l'entalpia di 2.

Per lo stato 2 abbiamo visto  $p_2 = 5 \text{ bar}$  e  $s_2 = s_1 = 0,9830 \text{ kJ/kg K}$  e allora dalle tabella ricaviamo l'entalpia tra i due valori  $h_2 = 264,47 \div 268,07$  che quindi ricaviamo con un'interpolazione lineare, cioè  $h_2 = 265,92 \text{ kJ/kg}$ .

Dalle tabelle del vapore surriscaldato a 5 bar, interpolando, si calcola

	h [kJkg <sup>-1</sup> ]	s [kJkg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]
i-1	264.47	0.987
i	<b>265.92</b>	0.983
i+1	268.07	0.9903

quindi

$$h_2 = 265.92 \text{ kJkg}^{-1}$$

Questo ci consente di calcolare la portata al condensatore  $\dot{m}_{cond} = 0,14 \text{ kg/s}$

Sono ancora incogniti gli stati 6, 5 e 4.

Possiamo utilizzare due strade, provare a partire da un bilancio sulla camera flash che ci dovrebbe aiutare a ricavare lo stato 7 e quindi il titolo in 7.

Di 6 sappiamo che è liquido saturo quindi per ricavare la pressione al condensatore dovremmo conoscere la temperatura oppure più facilmente l'entalpia in quanto  $h_6 = h_7$ .

Quindi se lo stato 7 è l'ingresso della camera flash in essa abbiamo le condizioni di uscita 8 e 3, entrambi facilmente ricavabili.

Scriviamo quindi i bilanci, di massa e di energia, per la camera flash.

Abbiamo che arriva la portata di 7 che nella camera di separazione separiamo il vapore saturo in 3 dal liquido saturo in 8, avviene facilmente in quanto il liquido meno leggero si ritroverà in basso. Cioè:  $\dot{m}_7 = \dot{m}_8 + \dot{m}_3$

Dove la portata di 8 va all'evaporatore mentre la portata di 7 viene dal condensatore, cioè le conosciamo e riusciamo a ricavare la portata di 3, ovvero la frazione di vapore.

$$\dot{m}_{cond} = \dot{m}_{evap} + \dot{m}_3$$

Allora per la definizione stessa di titolo abbiamo che  $x = \frac{\dot{m}_l}{\dot{m}_l + \dot{m}_v} = \frac{\dot{m}_l}{\dot{m}_{tot}}$

Cioè  $\begin{cases} \dot{m}_3 = x_7 \cdot \dot{m}_{tot} = x_7 \cdot \dot{m}_{cond} \\ \dot{m}_8 = (1 - x_7) \dot{m}_{tot} \end{cases}$

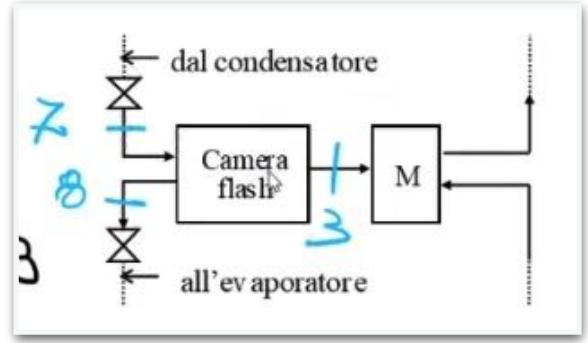
Allora ricaviamo  $\dot{m}_{cond} = \dot{m}_{evap} + x_7 \dot{m}_{cond} \Rightarrow x_7 = \frac{\dot{m}_{cond} - \dot{m}_{evap}}{\dot{m}_{cond}} = 0,28$

Avendo il titolo in 7 leggiamo l'entalpia di 8 e di 3 dalle tabelle del vapore saturo e riusciamo a ricavarci anche l'entalpia di 7, cioè  $h_7 = h_l + x_7 (h_{7v} - h_{7l}) = h_8 + x_7 (h_3 - h_8) = 45,25 + 0,28 (249,97 - 45,27) = 105,28 \text{ kJ/kg}$

Questi valori li abbiamo letti dalla tabella del vapore a 5 bar.

Allora per conoscere la pressione in 6 basterà andare a vedere la pressione corrispondente all'entalpia di 6 che non è altro che l'entalpia di 7. Cioè per lo stato termodinamico 6 sappiamo che  $h_6 = h_7$  e che  $x_6 = 0$  e allora  $h_6 = h_{\text{liquido saturo}}$ .

Cerchiamo in tabella nelle entalpia del liquido saturo compreso tra due valori:



Press. bar	Temp. °C	Specific Volume m³/kg		Internal Energy kJ/kg		Enthalpy kJ/kg		Entropy kJ/kg · K		Press. bar	
		Sat. Liquid $v_L \times 10^3$	Sat. Vapor $v_g$	Sat. Liquid $h_L$	Sat. Vapor $h_g$	Sat. Liquid $h_L$	Evap. $h_E$	Sat. Vapor $h_T$	Sat. Liquid $s_L$		
0.40	-58.86	0.6847	0.5056	-20.36	204.13	-20.34	244.69	224.36	-0.0907	1.0512	0.40
0.50	-54.83	0.6901	0.4107	-16.07	205.76	-16.03	242.33	226.30	-0.0709	1.0391	0.50
0.60	-51.40	0.6947	0.3466	-12.39	207.14	-12.35	240.28	227.93	-0.0542	1.0294	0.60
0.70	-48.40	0.6989	0.3002	-9.17	208.34	-9.12	238.47	229.35	-0.0397	1.0213	0.70
0.80	-45.73	0.7026	0.2650	-6.28	209.41	-6.23	236.84	230.61	-0.0270	1.0144	0.80
0.90	-43.30	0.7061	0.2374	-3.66	210.37	-3.60	235.34	231.74	-0.0155	1.0084	0.90
1.00	-41.09	0.7093	0.2152	-1.26	211.25	-1.19	233.95	232.77	-0.0051	1.0031	1.00
1.25	-36.23	0.7166	0.1746	4.04	213.16	4.13	230.86	234.99	0.0175	0.9919	1.25
1.50	-32.08	0.7230	0.1472	8.60	214.77	8.70	228.15	236.86	0.0366	0.9830	1.50
1.75	-28.44	0.7287	0.1274	12.61	216.18	12.74	225.73	238.47	0.0531	0.9755	1.75
2.00	-25.18	0.7340	0.1123	16.22	217.42	16.37	223.52	239.88	0.0678	0.9691	2.00
2.25	-22.22	0.7389	0.1005	19.51	218.53	19.67	221.47	241.15	0.0809	0.9636	2.25
2.50	-19.51	0.7436	0.0910	22.54	219.55	22.72	219.57	242.29	0.0930	0.9586	2.50
2.75	-17.00	0.7479	0.0831	25.36	220.48	25.56	217.77	243.33	0.1040	0.9542	2.75
3.00	-14.66	0.7521	0.0765	27.99	221.34	28.22	216.07	244.29	0.1143	0.9502	3.00
3.25	-12.46	0.7561	0.0709	30.47	222.13	30.72	214.46	245.18	0.1238	0.9465	3.25
3.50	-10.39	0.7599	0.0661	32.82	222.88	33.09	212.91	246.00	0.1328	0.9431	3.50
3.75	-8.43	0.7636	0.0618	35.06	223.58	35.34	211.42	246.77	0.1413	0.9399	3.75
4.00	-6.56	0.7672	0.0581	37.18	224.24	37.49	209.99	247.48	0.1493	0.9370	4.00
4.25	-4.78	0.7706	0.0548	39.22	224.86	39.55	208.61	248.16	0.1569	0.9342	4.25
4.50	-3.08	0.7740	0.0519	41.17	225.45	41.52	207.27	248.80	0.1642	0.9316	4.50
4.75	-1.45	0.7773	0.0492	43.05	226.00	43.42	205.98	249.40	0.1711	0.9292	4.75
5.00	0.12	0.7805	0.0469	44.86	226.54	45.25	204.71	249.97	0.1777	0.9269	5.00
5.25	1.63	0.7836	0.0447	46.61	227.04	47.02	203.48	250.51	0.1841	0.9247	5.25
5.50	3.08	0.7867	0.0427	48.30	227.53	48.74	202.28	251.02	0.1903	0.9226	5.50
5.75	4.49	0.7897	0.0409	49.94	227.99	50.40	201.11	251.51	0.1962	0.9206	5.75
6.00	5.85	0.7927	0.0392	51.53	228.44	52.01	199.97	251.98	0.2019	0.9186	6.00
7.00	10.91	0.8041	0.0337	57.48	230.04	58.04	195.60	253.64	0.2231	0.9117	7.00
8.00	15.45	0.8149	0.0295	62.88	231.43	63.53	191.52	255.05	0.2419	0.9056	8.00
9.00	19.59	0.8252	0.0262	67.84	232.64	68.59	187.67	256.25	0.2591	0.9001	9.00
10.00	23.40	0.8352	0.0236	72.46	233.71	73.30	183.99	257.28	0.2748	0.8952	10.00
12.00	30.25	0.8546	0.0195	80.87	235.48	81.90	177.04	258.94	0.3029	0.8864	12.00
14.00	36.29	0.8734	0.0166	88.45	236.89	89.68	170.49	260.16	0.3277	0.8786	14.00
16.00	41.73	0.8919	0.0144	95.41	238.00	96.83	164.21	261.04	0.3500	0.8715	16.00
18.00	46.69	0.9104	0.0127	101.87	238.86	103.51	158.13	261.64	0.3705	0.8649	18.00
20.00	51.26	0.9291	0.0112	107.95	239.51	109.81	152.17	261.98	0.3895	0.8586	20.00
24.00	59.46	0.9677	0.0091	119.24	240.22	121.56	140.43	261.99	0.4241	0.8463	24.00

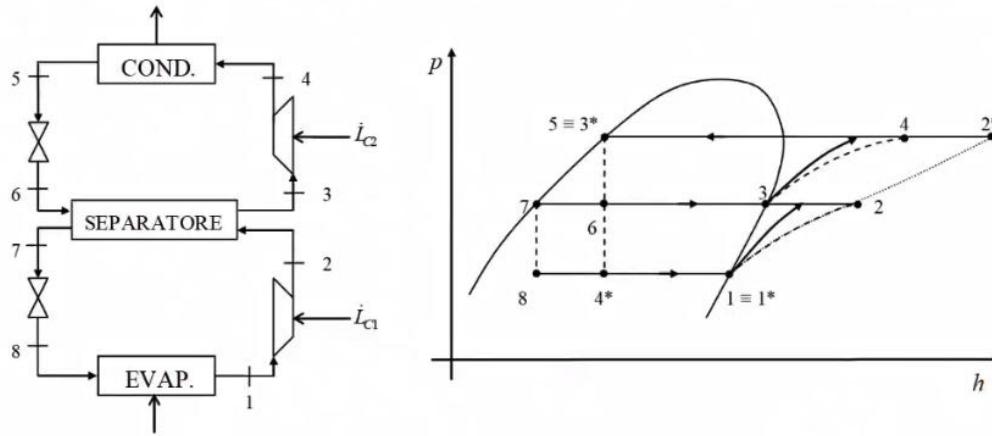
Allora andiamo ad interpolare ricavando  $p_6 = 18,65$  bar.

	$p$ [bar]	$h$ [ $\text{kJkg}^{-1}$ ]
$i-1$	18	103.51
$i$	<b>18.56</b>	105.28
$i+1$	20	109.91

## Esercizio 3

LO TROVIAMO SVOLTO INTERAMENTE ANCHE SUL LIBRO DI ESERCIZI.

Si consideri un impianto frigorifero a compressione di vapore con camera di separazione liquido-vapore. Le pressioni minima e massima sono di 1.4 e 12 bar, mentre la camera lavora a 4 bar. Il fluido frigorifero esce come liquido saturo dal condensatore ed entra vapore saturo nei due compressori. Determinare la potenza termica sottratta nell'evaporatore ed il rendimento, sia per l'impianto con separatore che per quello senza camera, che opera tra le due stesse pressioni massima e minima con la stessa portata al condensatore. Sia pari a 0.81 il rendimento isoentropico di ciascun compressore. La portata di refrigerante (R134a) al condensatore è di 0.10 kgs<sup>-1</sup>. Per la soluzione, si utilizzino le tabelle allegate.



A lezione teorica abbiamo visto con il separatore solo l'impianto con camera flash e miscelatore ma esistono anche impianti con **solo il separatore**. In casi del genere ci verrà indicato anche se c'è o meno il miscelatore.

Ci muoviamo sempre secondo la stessa idea di fondo, cioè di spezzare la compressione in due parti, e possibilmente di avere in 8 un titolo inferiore.

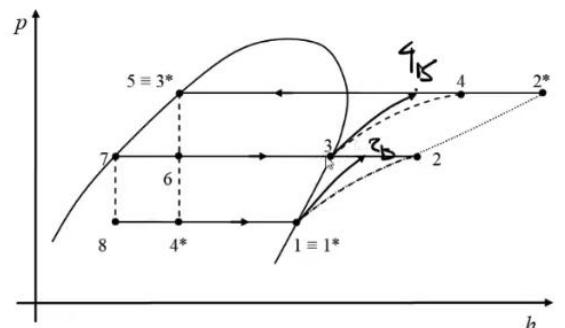
Avere il separatore con o senza miscelatore è legato al tipo di fluido che si utilizza.

In figura lo stato 2 è sbagliato, correttamente sarebbe:

Abbiamo la compressione 1→2, poi dopo il primo compressore, il fluido entra nel separatore ed esce il vapore saturo in 3. Soltanto il vapore saturo viene poi compresso e portato nella parte superiore del ciclo (4 isoentropico e 4) e poi in 5 abbiamo l'uscita del condensatore.

Poi laminiamo fino a 6 dove entriamo nel separatore dal quale usciamo con il liquido saturo dall'altra parte, ovvero in 7.

In ingresso al separatore c'è 2 e 6 mentre in uscita 3 e 7.

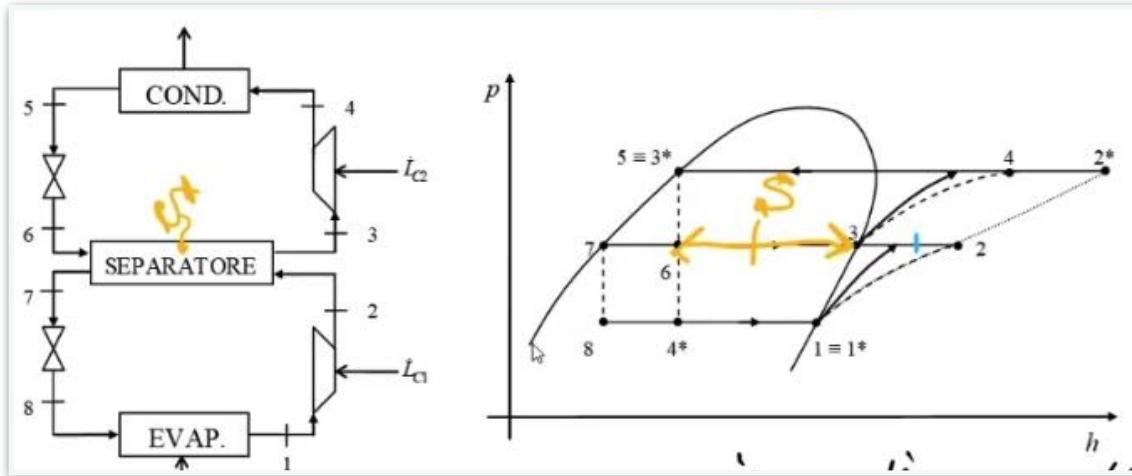


Di questo impianto:

- Potenza termica di raffreddamento  $\dot{Q}_{raff} = \dot{Q}_{evap} = \dot{m}_{evap} (h_1 - h_8)$
- $COP = \eta = \epsilon = \frac{\dot{Q}_{evap}}{|\dot{L}_{c1}| + |\dot{L}_{c2}|} = \frac{\dot{m}_{evap} (h_2 - h_1)}{\dot{m}_{evap} (h_2 - h_1) + \dot{m}_{cond} (h_4 - h_3)} = \frac{\dot{Q}_{evap}}{|\dot{Q}_{cond}| - |\dot{Q}_{evap}|}$
- Bilancio al separatore (massa ed energia), cioè:
 
$$\begin{cases} \dot{m}_2 + \dot{m}_6 = \dot{m}_3 + \dot{m}_7 & \text{massa} \\ \dot{Q} - \dot{V}_f = \Delta H + \Delta \dot{E}_p + \Delta \dot{E}_c & \text{energia} \end{cases} \rightarrow \Delta H = 0 \Rightarrow \dot{H}_{ingr} = \dot{H}_{uscita} \rightarrow \dot{m}_2 h_2 + \dot{m}_6 h_6 = \dot{m}_3 h_3 + \dot{m}_7 h_7$$
 dove  $\dot{m}_2 = \dot{m}_7 = \dot{m}_{evap}$  e  $\dot{m}_3 = \dot{m}_6 = \dot{m}_{cond}$  e il bilancio di energia ci ricorda un miscelatore o uno scambiatore dove avviene anche una miscelazione.

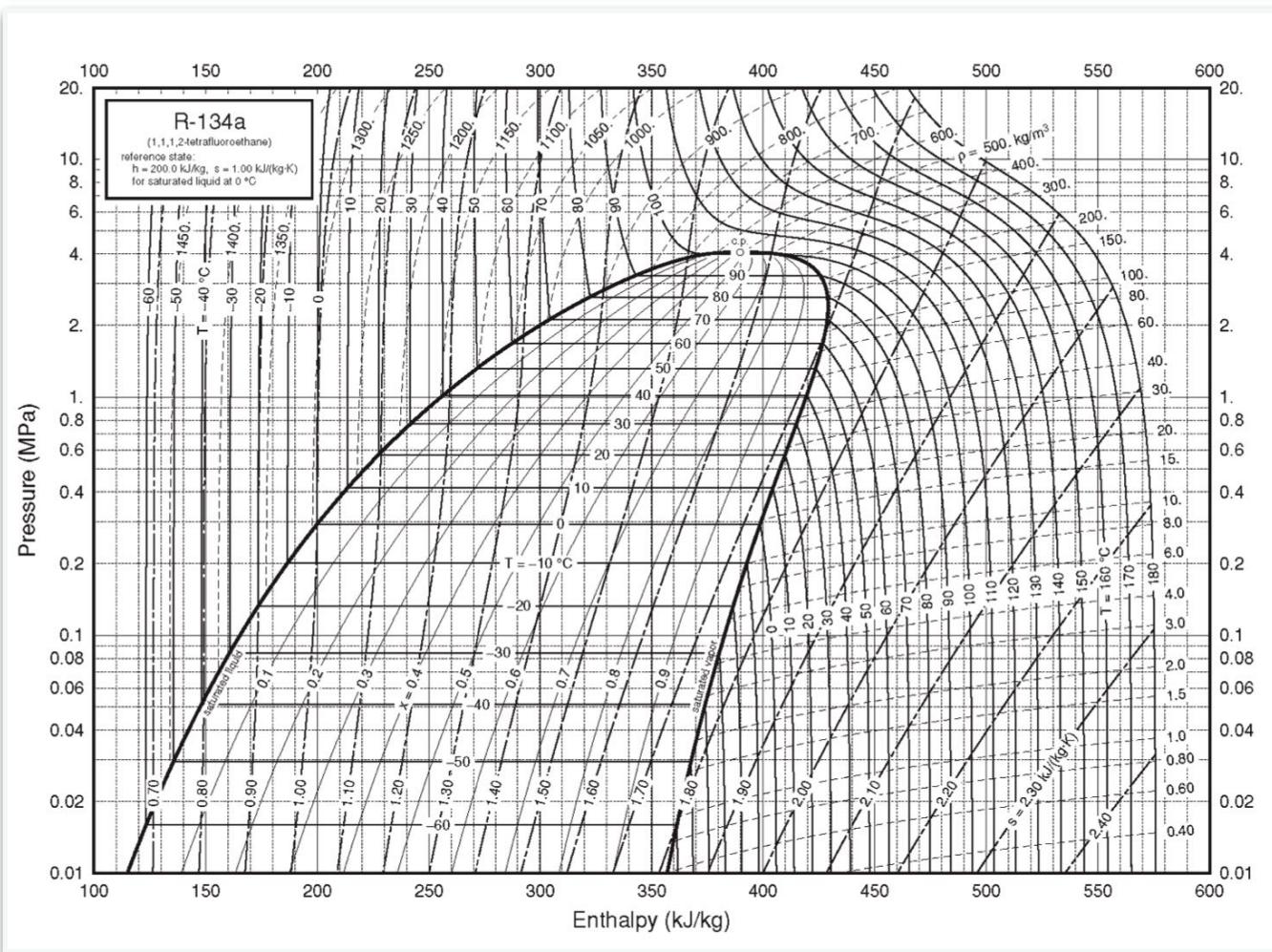
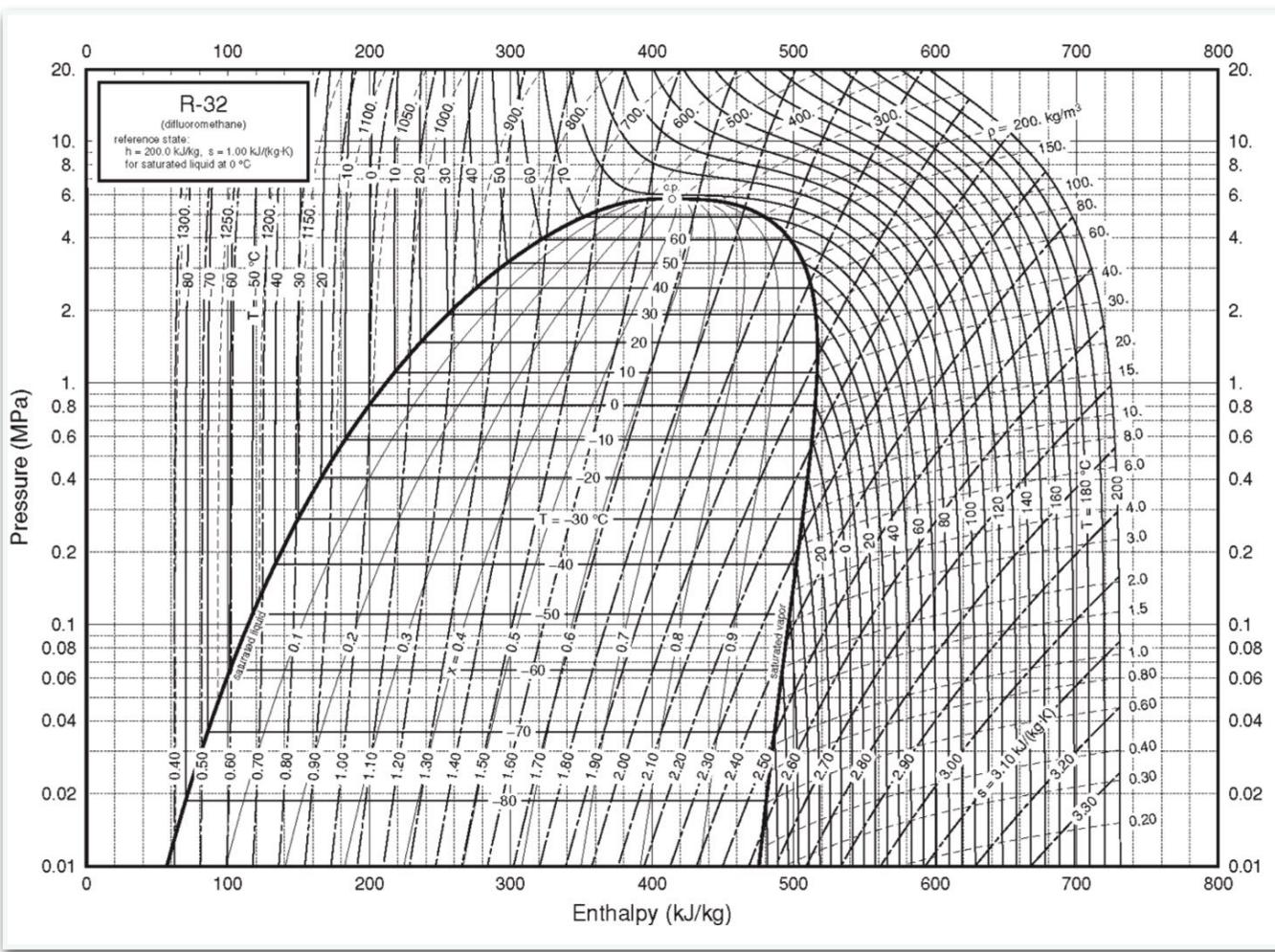
Da questo possiamo ricavare  $\dot{m}_{evap} (h_2 - h_7) = \dot{m}_{cond} (h_3 - h_6)$  legando le due portate, parte superiore del condensatore e parte inferiore dell'evaporatore.

Lo **stato termodinamico del separatore** che indichiamo con S si troverà sicuramente tra 2 e 6, conosciamo infatti  $p_s$  sull'isobara del separatore, sappiamo anche che deve stare tra 7 e 3. Quindi S si deve trovare tra 6 e 3, intermedio tra l'ingresso e l'uscita di vapore saturo.



ULTERIORI CONSIDERAZIONI SI TROVANO NEI FILE FORNITI SU DIDATTICA WEB.

FILE EX-06..

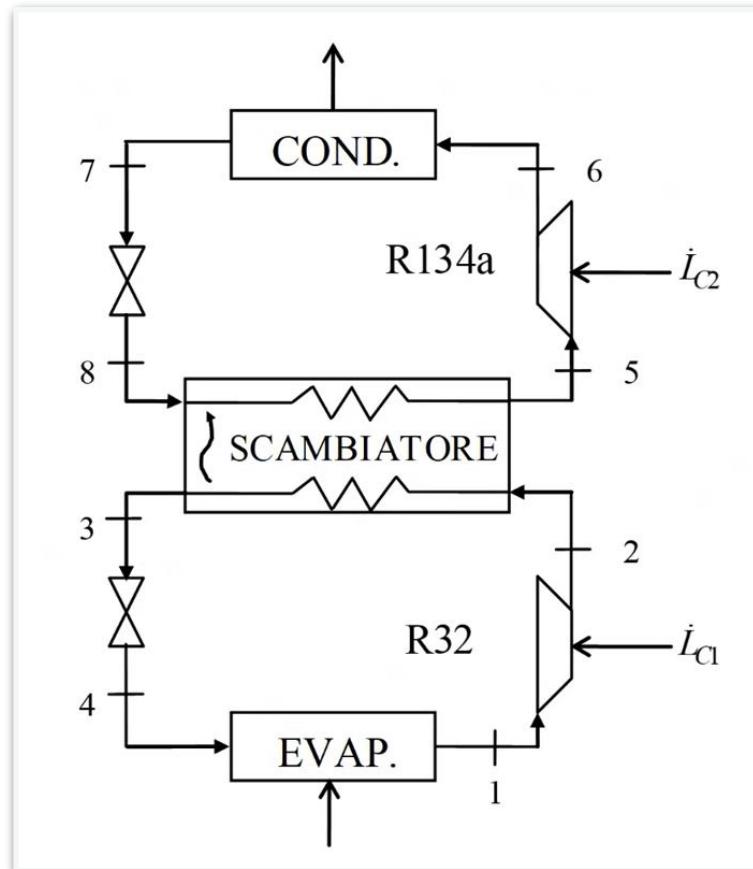


## Esercizio 1

Si consideri un ciclo frigorifero a compressione di vapore in cascata. Il fluido che lavora a bassa temperatura è R32 e serve a raffreddare una portata di  $0.6 \text{ kgs}^{-1}$  di aria dalla temperatura esterna di  $30^\circ\text{C}$  fino a quella finale di  $-40^\circ\text{C}$ . Il condensatore del fluido R32 si trova alla temperatura di saturazione di  $-10^\circ\text{C}$  e cede calore all'evaporatore del fluido R134a, il cui condensatore scambia con l'aria alla temperatura esterna. In tutti gli impianti supporre liquido saturo all'uscita dei condensatori e vapore saturo in ingresso ai compressori, questi ultimi con rendimenti isentropici pari a 0.75. In tutti gli scambiatori di calore considerare un  $\Delta T_{\minimo} \geq 10^\circ\text{C}$  tra i due fluidi caldo e freddo. Calcolare le portate dei due fluidi refrigeranti ed il rendimento (o COP) complessivo dell'impianto. Riportare correttamente i cicli termodinamici sui diagrammi allegati.

Si osservi come è segnalato che c'è liquido saturo in uscita ai condensatori e vapore saturo in ingresso ai compressori.

Per **impianto in cascata** si intende la seguente configurazione:



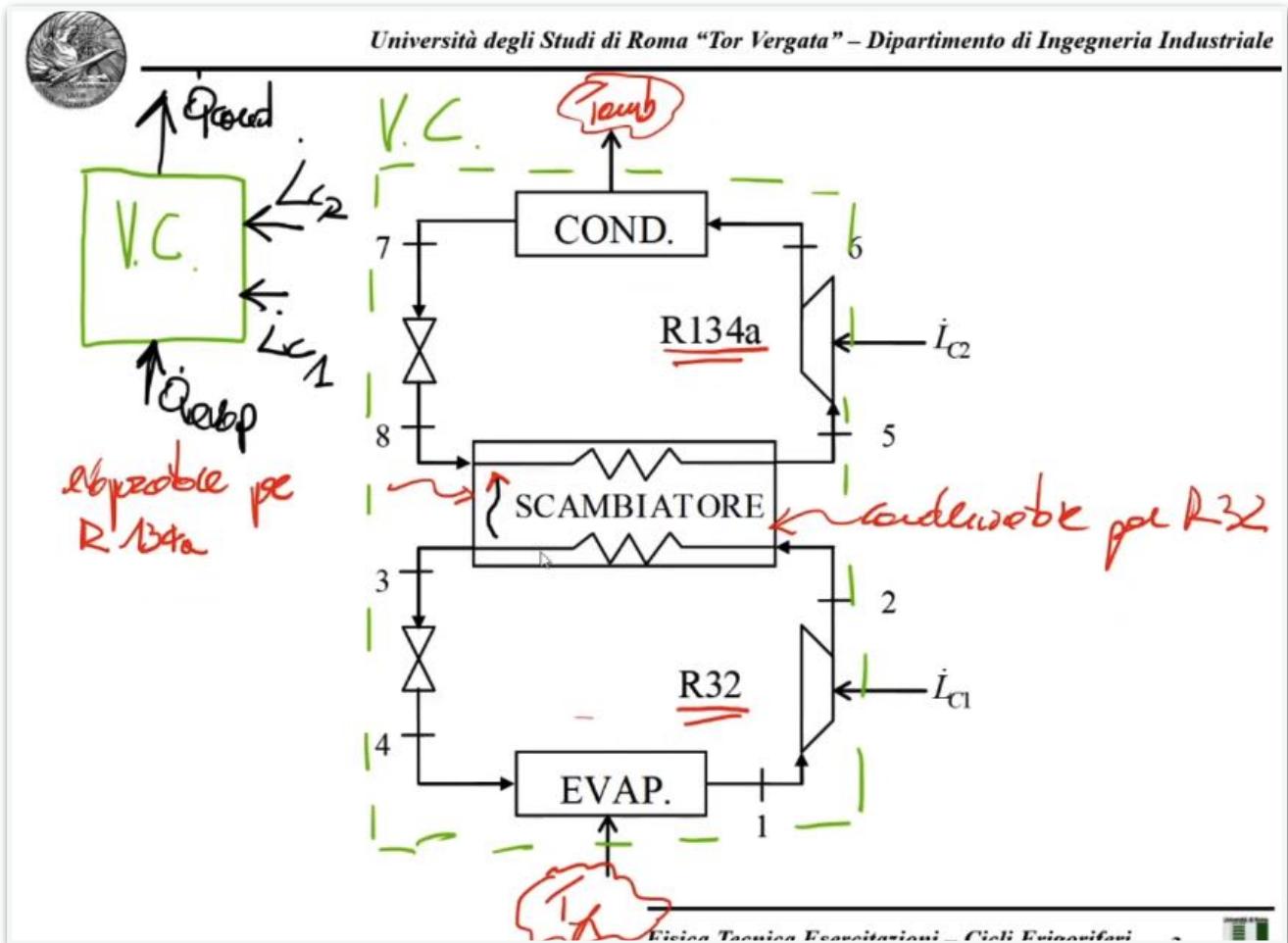
Dove in basso c'è l'ambiente frigo da raffreddare mentre in alto il condensatore che scambia con l'ambiente esterno ( $T_{\text{ambiente}}$ ). L'impianto anziché avere una sola fase di compressione ne presenta due, nella parte inferiore abbiamo un fluido mentre in quella superiore un altro.

Le due parti sono accoppiate attraverso uno scambiatore con lo scambio termico come indicato dalla freccia, cioè R32 cede calore al R134a. Il condensatore diventa condensatore per R32 ed evaporatore per R134a.

Questo serve a sfruttare meglio le proprietà dei due fluidi.

La fase utile dell'impianto avviene chiaramente nell'evaporatore.

Prendiamo un certo volume di controllo, gli scambi con l'esterno li abbiamo all'evaporatore e condensatore e nei lavori dei due compressori. Lo scambio di calore è interno al volume di controllo.



Il rendimento dell'impianto, o COP,  $\eta = \frac{\dot{Q}_{evap}}{|\dot{L}_{c_1}| + |\dot{L}_{c_2}|}$ , scrivere sempre con le grandezze estensive poiché non solo abbiamo due fluidi differenti ma abbiamo anche portate differenti, al compressore 1 passerà la portata di R32 mentre nell'altro compressore R134a mentre nell'evaporatore nuovamente R32.

La portata all'evaporatore  $\dot{Q}_{evap} = \dot{m}_{R32} (h_1 - h_4)$

La portata al condensatore  $\dot{Q}_{cond} = \dot{m}_{R134a} (h_6 - h_7)$

I due lavori dei compressori  $|\dot{L}_{c_1}| = \dot{m}_{R32} (h_2 - h_1)$  e  $|\dot{L}_{c_2}| = \dot{m}_{R134a} (h_6 - h_7)$

Dovremmo quindi calcolare anche le due portate, sia di R134a che di R32. Per ricavare le due portate ci servono dei bilanci che potremmo ricavare dal primo principio scritto sullo scambiatore, cioè potremmo scrivere un bilancio sullo scambiatore e prendere l'informazione dal testo che l'evaporatore prende una certa portata di aria portandola da una temperatura ad un'altra.

Vediamo meglio l'esercizio:

Essendo due fluidi dovremmo riportare i cicli su due differenti diagrammi con le campane di Andrews per i due differenti fluidi (allegati al testo a pagina seguente).

Per R32 conosciamo la temperatura di saturazione del condensatore esterno. Quindi sappiamo (dal testo) la temperatura dello scambiatore in cascata dal lato dove R32 condensa ovvero  $-10^{\circ}\text{C}$ .

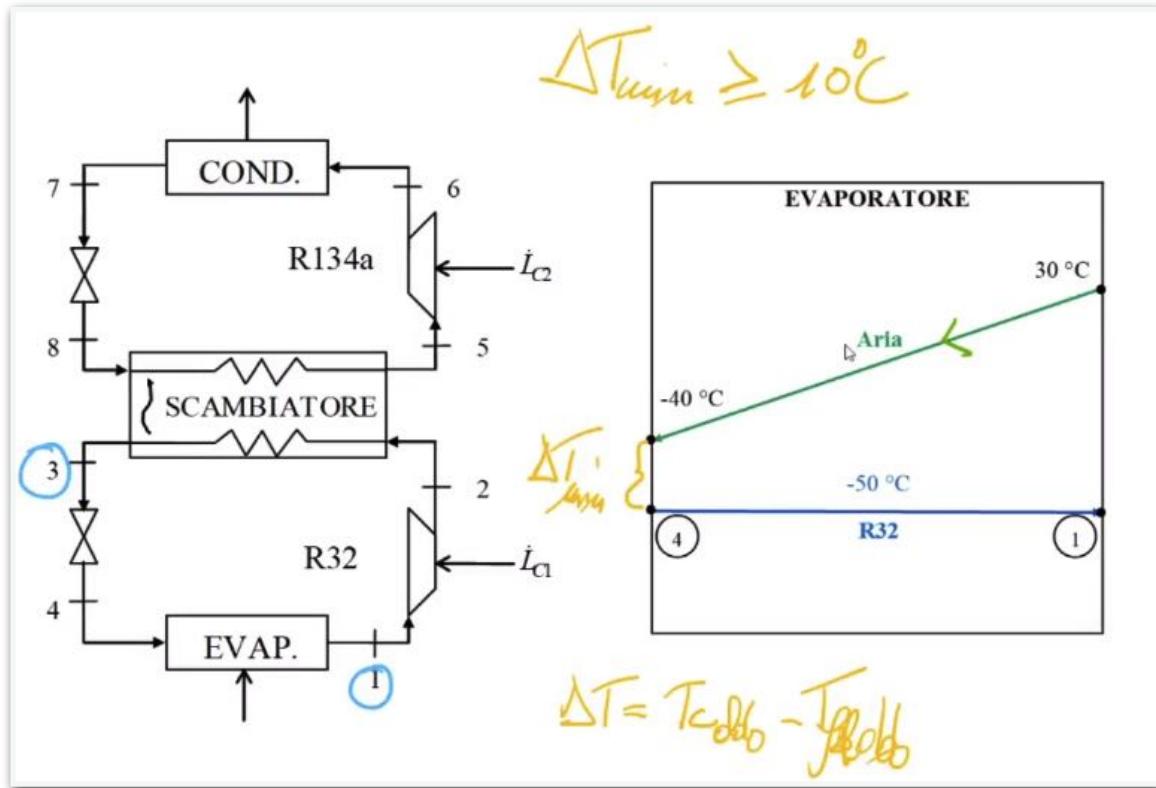
Quindi per R32 abbiamo un grado di libertà, cioè mentre la pressione superiore è stabilita ed è di 0,6 Mpa, dobbiamo scegliere noi la pressione o temperatura inferiore. Il testo ci dice anche di garantire in tutti gli scambiatori un  $\Delta T_{minimo} \geq -10^{\circ}\text{C}$  quindi prendendo R32 che raffredda aria esterna da  $30^{\circ}\text{C}$  a  $-40^{\circ}\text{C}$  questo dovrà trovarsi nell'evaporatore almeno a  $-50^{\circ}\text{C}$ .

Cioè sappiamo che dal condensatore esce liquido saturo nello stato 3 a una temperatura di  $-10^{\circ}\text{C}$  e il grado di libertà che abbiamo ci consente di fissare il  $\Delta T$  nell'evaporatore.

Per l'evaporatore il fluido caldo è l'aria che entra a 30°C e fuoriesce a -40°C che sarà quindi più caldo del R32, ovvero il fluido freddo.

Per lo scambiatore in cascata il fluido caldo sarà R32 che deve condensare e cedere calore al fluido freddo ovvero R134a.

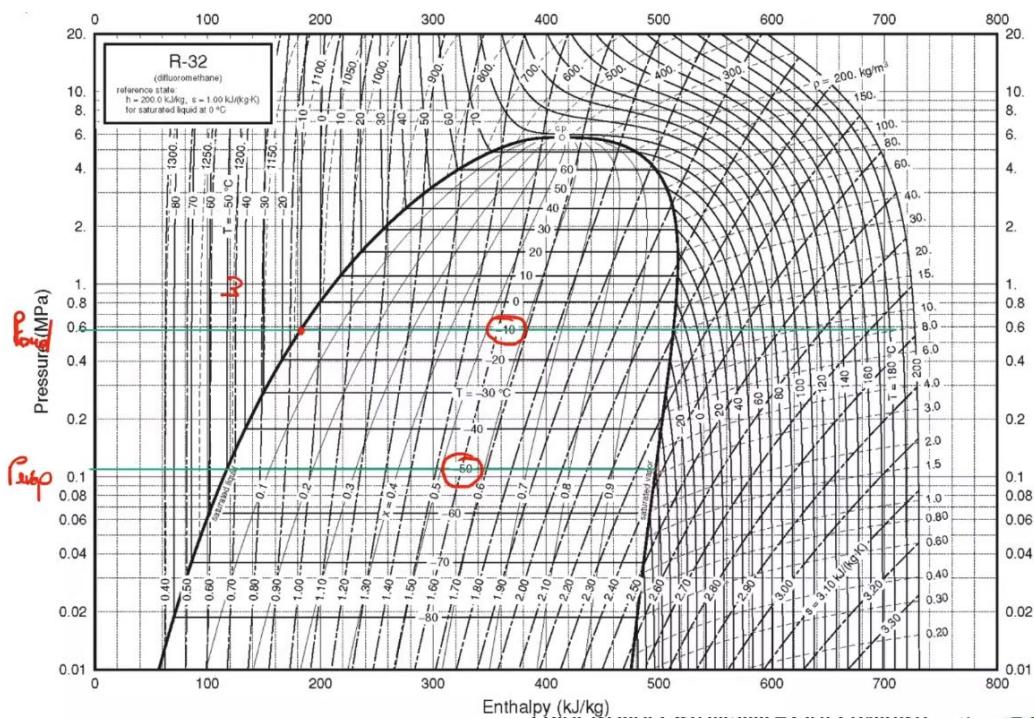
Per il condensatore il fluido caldo è R134a e il fluido freddo è l'aria esterna.



Quindi se nell'evaporatore 3 è liquido saturo e 1 vapore saturo allora 4 sarà nella campana e tutta la trasformazione 4→1 è nella campana e deve avere un andamento costante. Abbiamo scelto -50°C poiché nello scambiatore il  $\Delta T_{min}$  si verifica dove i due profili di temperatura sono più vicini. Dove  $\Delta T_{min} = T_{caldo} - T_{freddo}$

Allora proviamo a rappresentare il ciclo conoscendo le temperature di condensatore ed evaporatore.

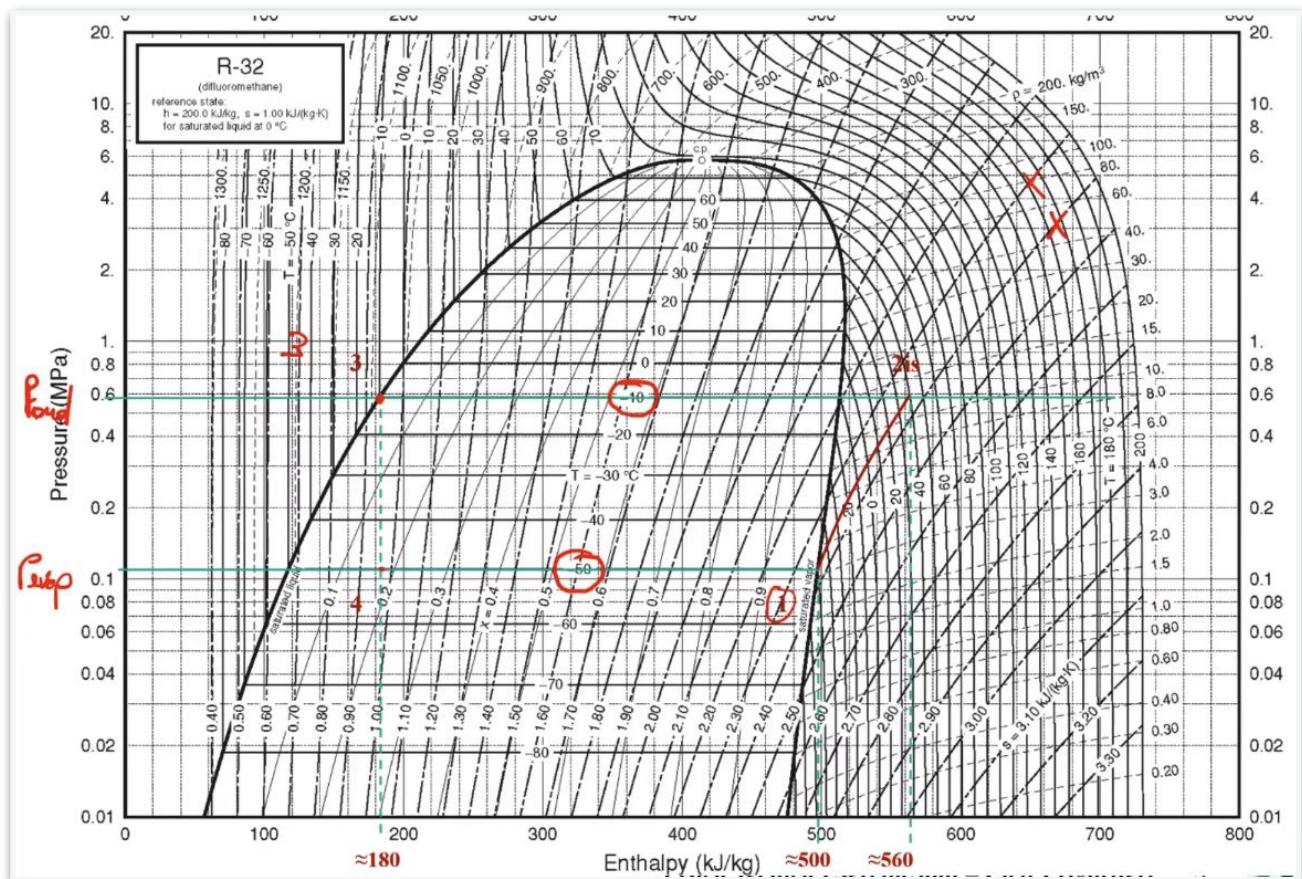
Consideriamo quindi la pressione all'evaporatore e al condensatore avendo fissato le due temperature. Inoltre siamo certi dello stato termodinamico 3 (liquido saturo in uscita al condensatore) e quindi è determinato anche 4 essendo 3→4 a entalpia costante. [continua dopo]



Dobbiamo completare la parte della compressione e sappiamo che nel compressore entra vapore saturo e quindi identifichiamo lo stato 1.

Allora nel diagramma abbiamo un rendimento isoentropico di 0,75 (diverso da 1) e quindi per ricavare lo stato reale bisogna passare per quello finale ideale (lungo l'isoentropica, a rendimento unitario) e poi tenere conto della definizione di rendimento isoentropico stesso. Quindi facciamo passare un'isoentropica per lo stato del punto 1 (la disegniamo più o meno centrata tra le due isoentropiche che abbiamo nel grafico).

Allora andiamo a leggere l'entalpia dello stato 1 e l'entalpia dello stato 2-isoentropico (ideale) e quindi anche nello stato 3. Allora determiniamo anche 4 lungo la curva a entalpia costante.



Per ricavare il 2 reale sfruttiamo la definizione di rendimento isoentropico ed andiamo ad intersecare la curva a pressione costante (isobara del condensatore) e andiamo a disegnare la trasformazione reale.

Il ciclo è completamente determinato e conosciamo gli stati determinati e quindi le entalpie che ci servono.

Allora per le entalpie ricavate ricordiamo che:

$$h_1 = h_{vap-saturo} \approx 500 \text{ kJ/kg}$$

$$h_{2is} \approx 560 \text{ kJ/kg}$$

e l'abbiamo letta dopo averla ricavata per via grafica.

Quindi consideriamo il rendimento isoentropico del compressore definito come lavoro ideale su lavoro reale, cioè

$$\rho_{is} = \frac{\ell_{ideale}}{\ell_{reale}} = \frac{h_{2is} - h_1}{h_2 - h_1} = 0,75$$

$$\text{Possiamo esplicitare } h_2 = h_1 + \frac{h_{2is} - h_1}{\rho_{is}} \approx 580 \text{ kJ/kg}$$

Si ricordi che il rendimento isoentropico di compressore e turbina devono essere minori uguali ad 1 quindi pensando alle loro funzioni la turbina fornisce lavoro e quindi nel caso reale funziona peggio del caso reale (fornirà meno lavoro) e quindi

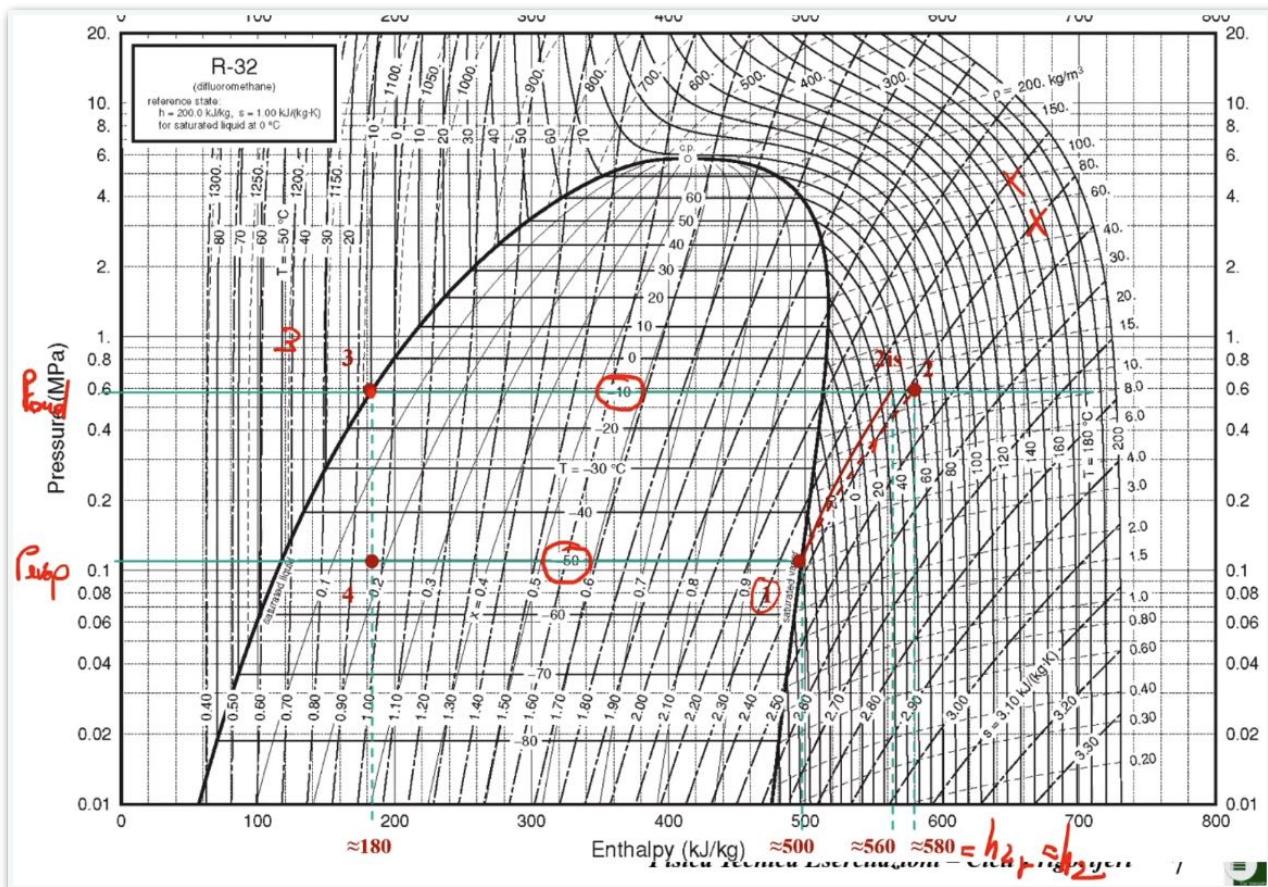
$$\rho_{is} = \frac{\ell_{reale}}{\ell_{ideale}}$$

mentre per il compressore si aggiorna al contrario, in termini di lavoro speso essendo una macchina operatrice, e

$$\text{quindi il lavoro ideale sarà inferiore a quello reale e allora } \rho_{is} = \frac{\ell_{ideale}}{\ell_{reale}}.$$

Mentre per gli stati 3 e 4 abbiamo letto che  $h_3 = h_4 \approx 180 \text{ kJ/kg}$

Cioè il ciclo della parte inferiore dell'impianto è completamente determinata.



Invece per la parte con R134a ci dobbiamo occupare sia della sua temperatura all'evaporatore che di quella al condensatore.

Nello scambiatore in cascata conosciamo la pressione a cui lavora R32 mentre nel condensatore conosciamo la temperatura dell'ambiente esterno pari a 30°C, ovvero la temperatura del fluido freddo nel condensatore.

Quindi dobbiamo stabilire la temperatura del fluido freddo lato scambiatore in cascata e la temperatura del fluido caldo lato condensatore.

L'unica informazione è il  $\Delta T$  minimo di 10°C e quindi abbiamo due gradi di libertà, dobbiamo fare due scelte, sia al condensatore che allo scambiatore in cascata.

Partiamo dallo scambiatore in cascata, se R32 è a -10°C allora R134a deve trovarsi almeno a -20°C.

Nel condensatore se l'aria è a 30°C allora R134a deve trovarsi almeno a 40°C.

Conosciamo l'andamento dell'R32 che si raffredda da 2 a 3 e sappiamo la temperatura di 3 di -10°C ma l'andamento di temperatura presenta prima un desuriscaldamento e poi il passaggio di stato vero e proprio.

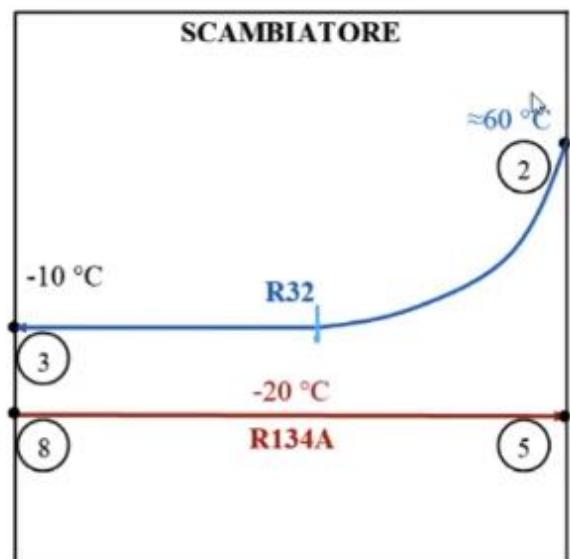
La temperatura di 60°C la si legge dal diagramma identificando l'isoterma che passa per 2.

Allora essendo il  $\Delta T$  minimo di 10°C troviamo che R134a deve stare almeno a 20°C.

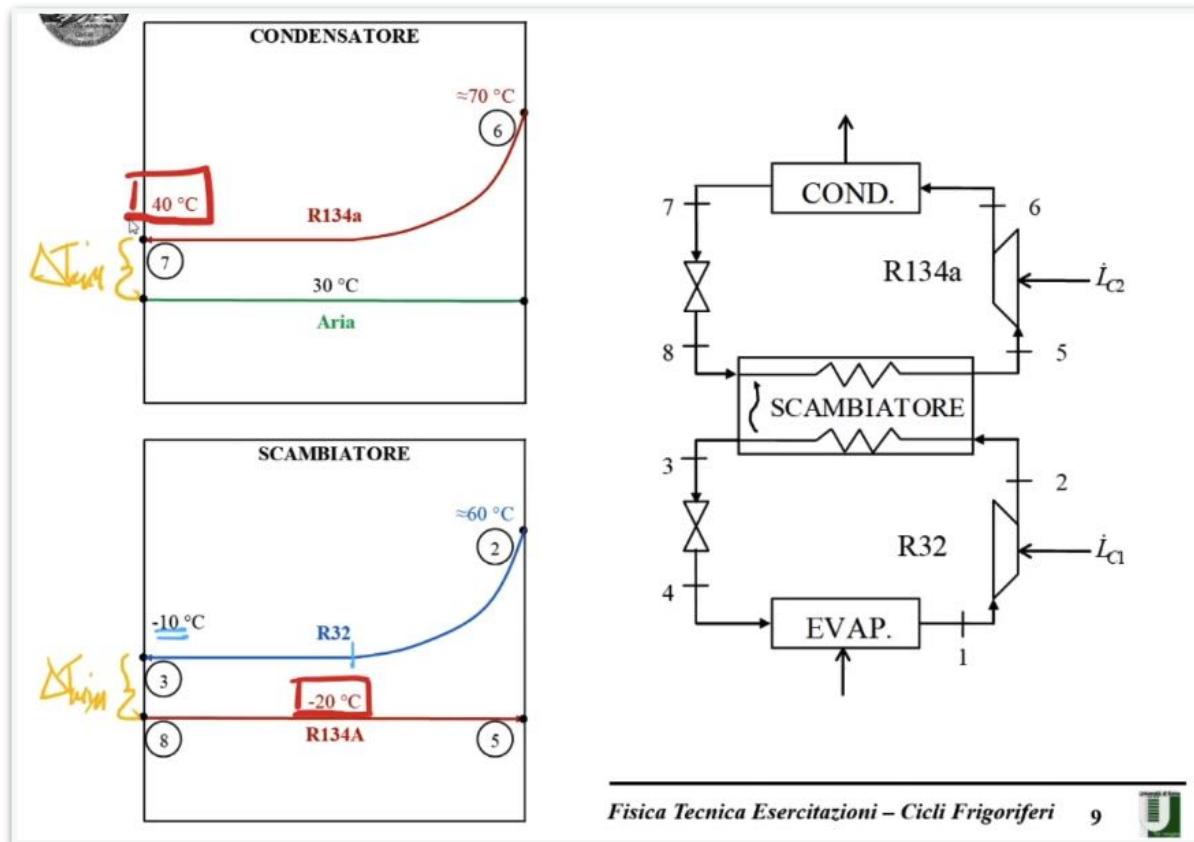
L'aria invece, della sorgente esterna, è a 30°C fissato. Nel condensatore al temperatura più bassa la si raggiunge nello stato termodinamico 7 (raffreddamento finale) e vedremo come la temperatura in 6 sarà funzione di queste scelte fatte.

Inoltre, essendo il  $\Delta T$  minimo sempre di 10°C, questa volta sarà  $30+10=40^\circ\text{C}$  a cui deve operare R134a.

È sufficiente considerare il  $\Delta T$  e fermarsi appena è sufficiente senza andare a temperature superiori.

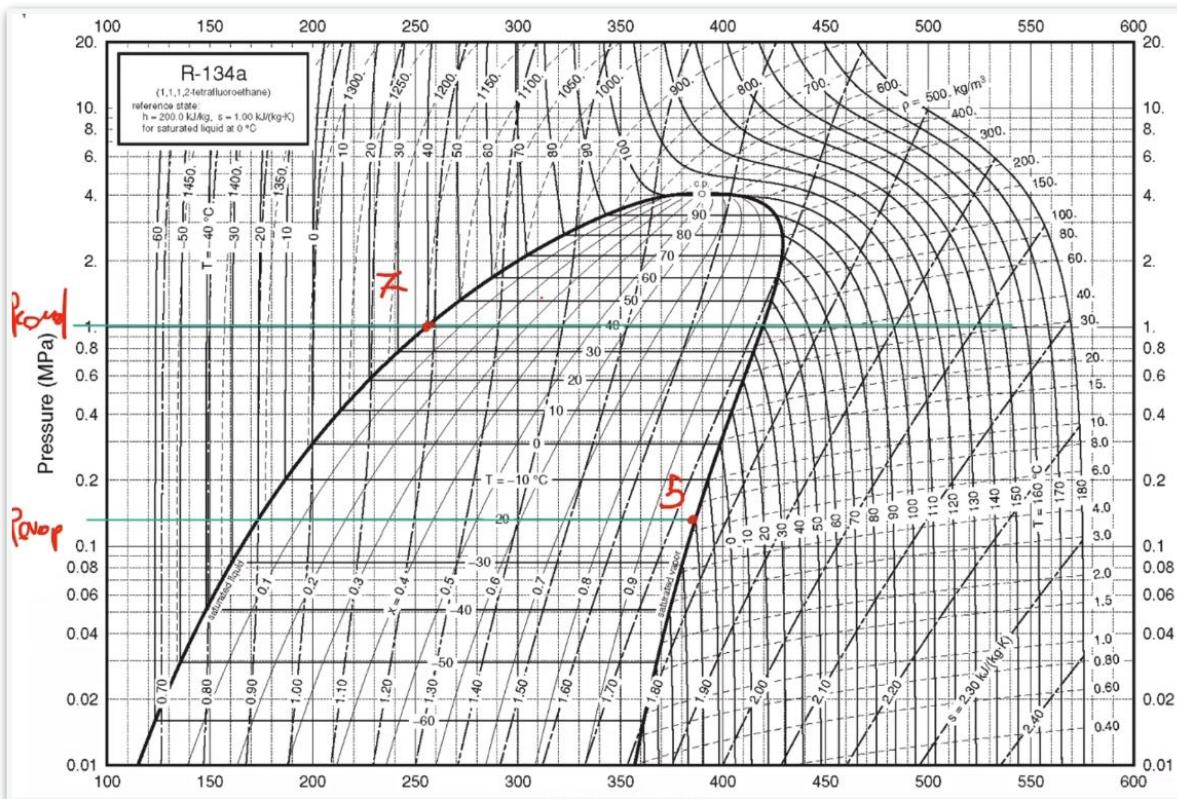


Cioè quanto abbiamo appena detto:



Fisica Tecnica Esercitazioni – Cicli Frigoriferi 9

Queste considerazioni fatte si riflettono nel diagramma dell'R134a dove abbiamo scelto i riferimenti per la parte superiore dell'impianto di  $-20^{\circ}\text{C}$  e  $40^{\circ}\text{C}$ . Questo ci identifica le pressioni all'evaporatore e al condensatore:



Dal testo sappiamo anche che liquido saturo esce dal condensatore e vapore saturo entra nel compressore, cioè i due stati termodinamici identificati come 5 e 7 sono noti.

Allora, come prima, ci disegniamo l'isoentropica e leggiamo i valori delle entalpie (pagina seguente) e identifichiamo il 6 isoentropico mentre 5, 7 e 8 li possiamo riportare correttamente.

A questo punto dalla definizione di rendimento isoentropico ci calcoliamo  $h_6$  reale e lo riportiamo sul diagramma andando ad ultimare il ciclo 5→6→7→8, univocamente determinato.

Cioè:

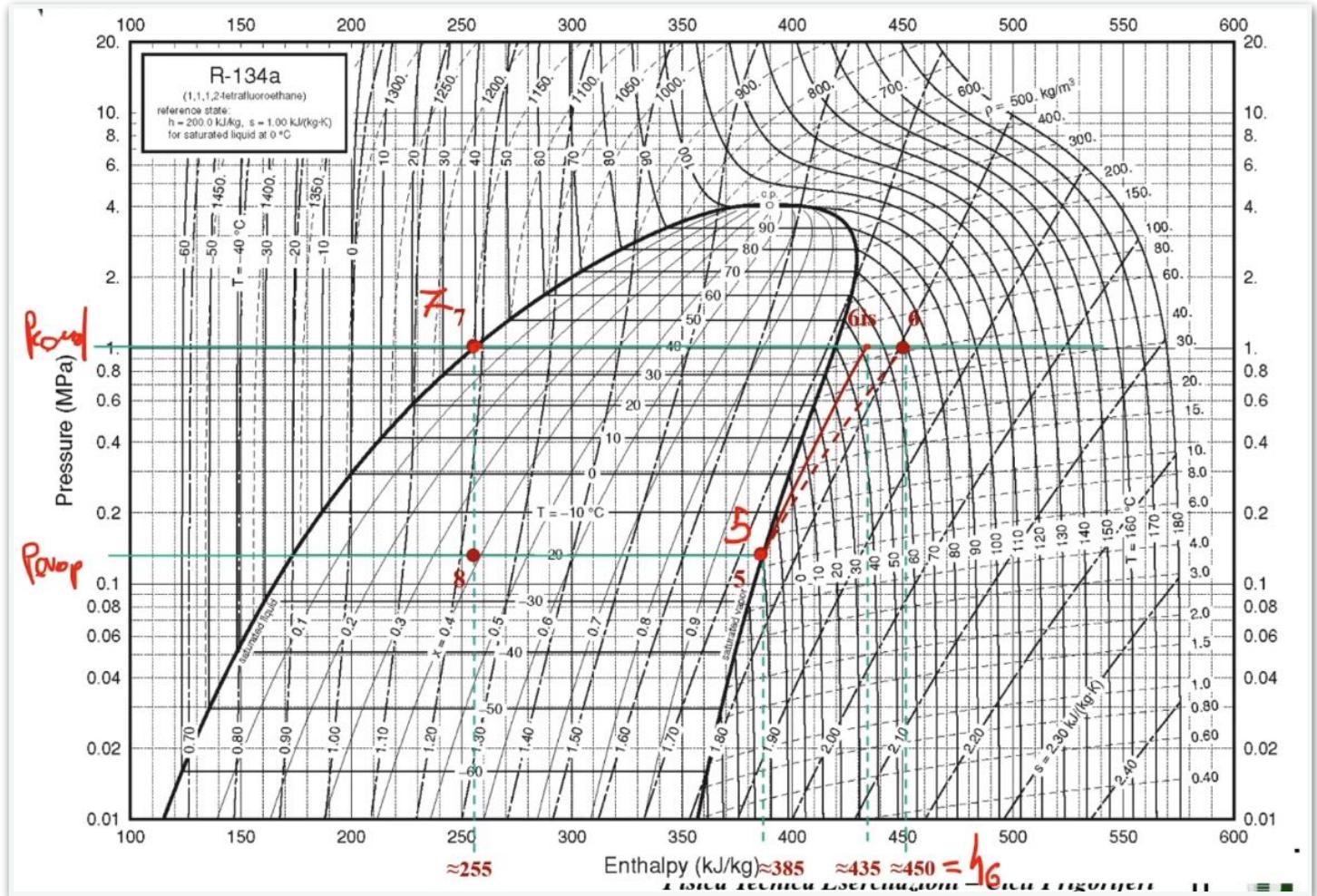
$$h_5 = h_{vap-sat} \approx 385 \text{ kJ/kg, letto.}$$

$$h_{gis} = 435 \text{ kJ/kg, letto.}$$

Da questo si considera  $\rho_{is} = \frac{\ell_{ideale}}{\ell_{reale}} = \frac{h_{6is} - h_5}{h_6 - h_5} = 0.75$  da cui si ricava  $h_6 = h_5 + \frac{h_{6is} - h_5}{\rho_{is}} \approx 450 \text{ kJ/kg}$

$$h_7 = h_8 \approx 255 \text{ kJ/kg}$$

E allora abbiamo tutti gli stati termodinamici:



Dobbiamo ancora ricavarci il COP e le due portate di R32 e di R134a.

Per il COP conosciamo la definizione ma dobbiamo passare per le due portate.

Per ricavare le due portate dal testo leggiamo come possiamo fare un bilancio all'evaporatore del quale sappiamo esserci in ingresso aria a 30°C con uscita a -40°C, conosciamo anche la sua portata e il suo  $c_p$ .

Cioè il bilancio all'evaporatore tra l'aria che si raffredda e R32 che si scalda, ovvero:

$$\dot{m}_a c_p |\Delta T| = \dot{m}_{R32} (h_1 - h_2)$$

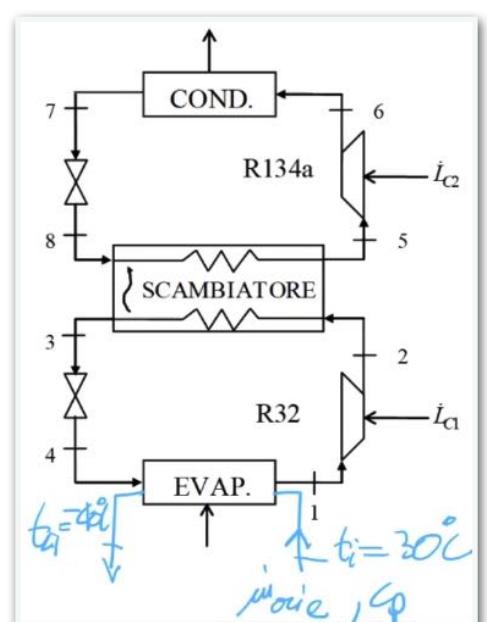
$$\text{Dove abbiamo } \dot{m}_{aria} = 0,6 \text{ kg/s e } c_p = \frac{7}{2} R \approx 1 \text{ kJ/kg K e } |\Delta T| = 70 \text{ °C}$$

$$\Rightarrow \dot{m}_{R32} = 0,13 \text{ kg/s}$$

Allora possiamo considerare anche il bilancio allo scambiatore in cascata tra i due fluidi, R32 che condensa ed R134a che evapora, ovvero

$$\dot{m}_{R32} (h_2 - h_3) = \dot{m}_{R134a} (h_5 - h_8) \text{ da cui ricaviamo la portata di R134a,}$$

$$\dot{m}_{R134a} = 0,41 \text{ kg/s}$$



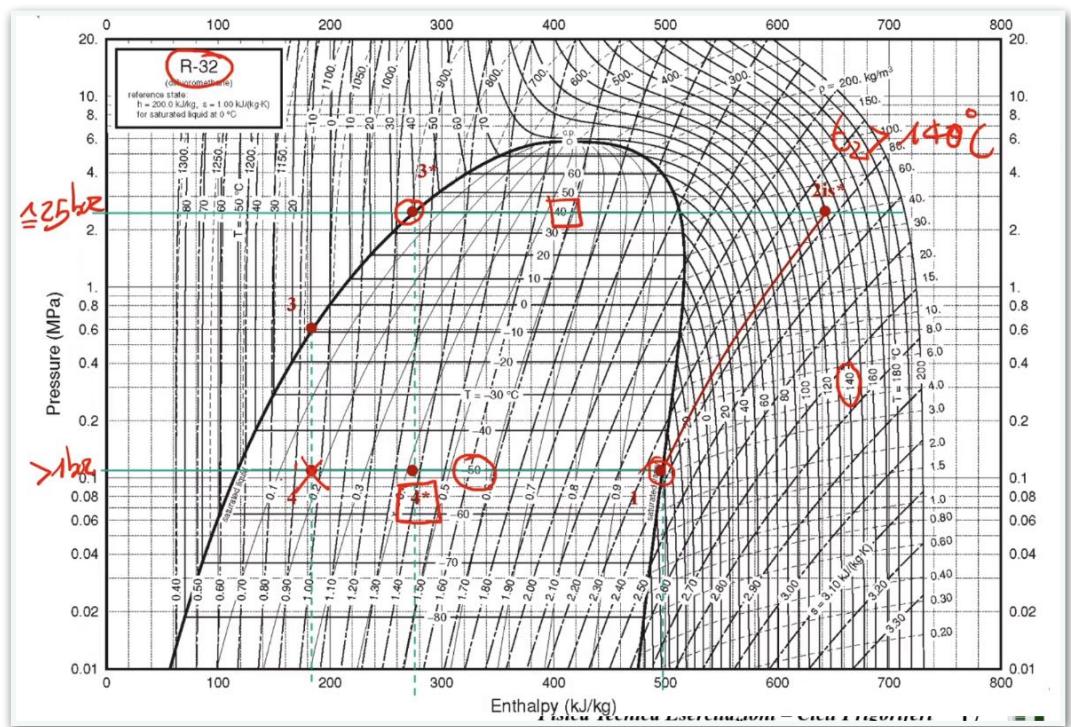
$$\text{Allora sappiamo che } COP = \frac{\dot{m}_{R132a} (h_1 - h_4)}{\dot{m}_{R32} (h_2 - h_1) + \dot{m}_{R134a} (h_6 - h_5)} = 1,12$$

### ULTERIORI CALCOLI SUI FOGLI DEGLI ESERCIZI

Si osservi come è utile utilizzare due fluidi diversi quando ci sono importanti salti di temperatura tra condensatore ed evaporatore.

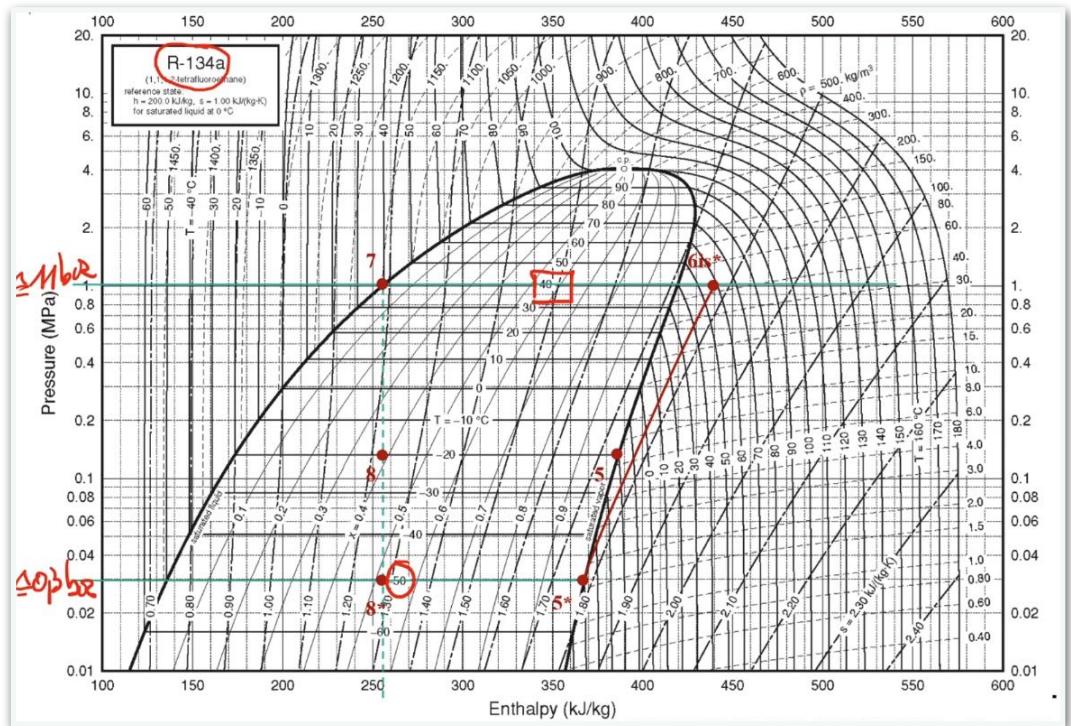
Infatti utilizzando solo R32 nella parte bassa dell'impianto da  $-50^{\circ}\text{C}$  abbiamo una pressione leggermente superiore ad 1 bar ed è bene tenere l'evaporatore ad una pressione leggermente superiore a quella atmosferica, cioè vogliamo l'impianto in sovrapressione in modo da non far entrare aria nel sistema stesso (meglio perdite verso l'esterno e eventualmente reintegrare il fluido).

Quindi qui va benissimo R32 ma dovevamo arrivare a  $40^{\circ}\text{C}$  quindi ad una pressione di 25 bar che iniziano a diventare una pressione importante che richiede costi maggiori e sistemi di sicurezza. Un limite accettabile è solitamente di 10-12 bar sopra i quali servono ulteriori sistemi di sicurezza. Inoltre una sola compressione ci avrebbe portato ad un 2isoentropico con una temperatura di  $140^{\circ}\text{C}$  che inizia ad essere troppo elevata (anche perché la  $T_2$  sarà maggiore del valore isoentropico). Questo è pericoloso perché cambia le caratteristiche degli oli che sono necessari al compressore e inoltre induce un forte stress termico al circuito.  
Inoltre lo stato  $4^*$  sarebbe stato spostato portando uno svantaggio in termini di rendimento e potenza frigorifera.



Invece prendendo R134a che funziona meglio a temperature superiori si vede come a  $40^{\circ}\text{C}$  la pressione sarebbe appena superiore a 10 bar, ovvero ancora accettabile.

Tuttavia andando a  $-50^{\circ}\text{C}$  si otterebbe una pressione di circa 0,3 bar che quindi in depressione porta molti svantaggi tra cui le probabili inclusioni di aria che modificano il funzionamento del ciclo frigorifero.



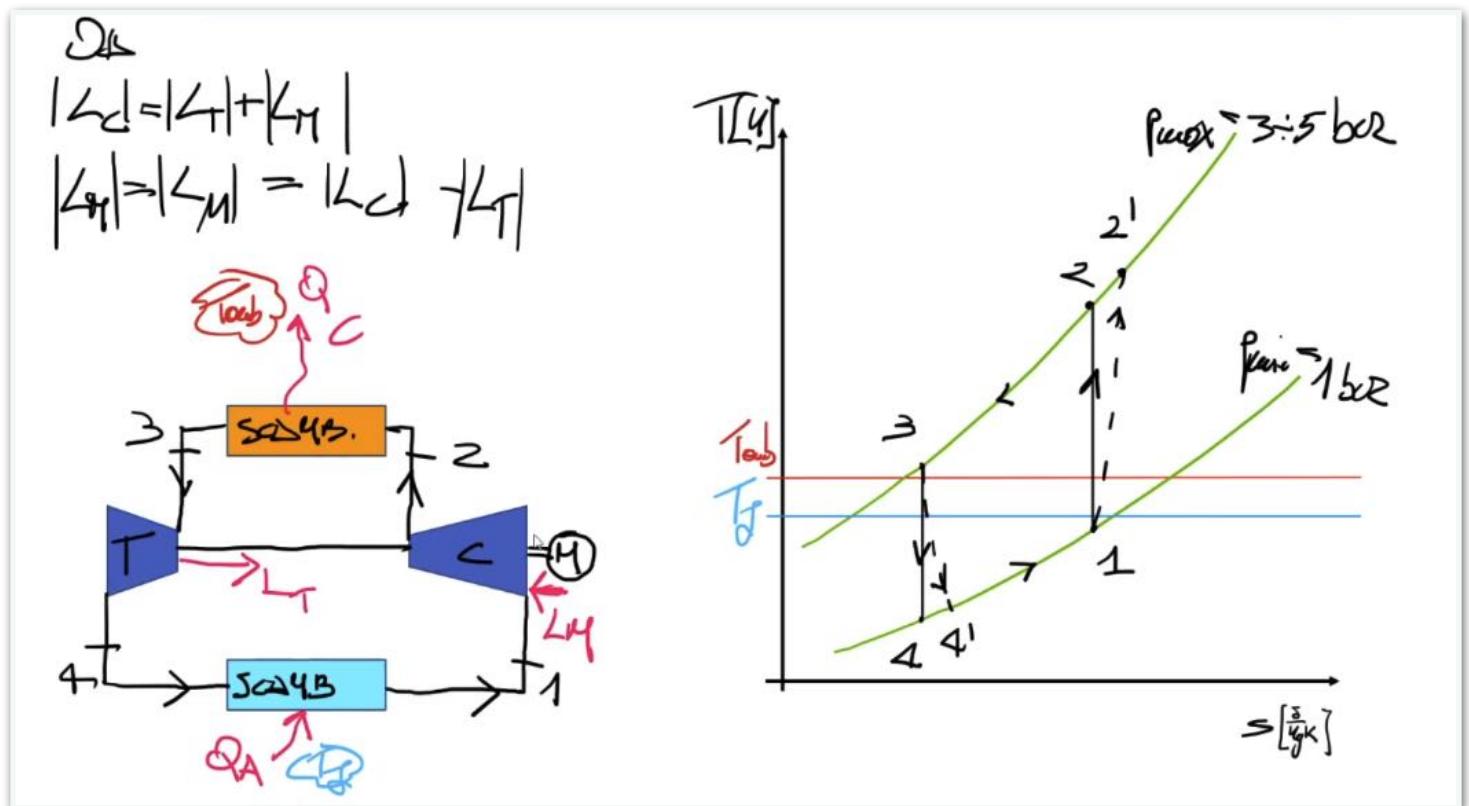
Per questo motivo, la dove ci sono grandi salti di temperatura, si preferisce utilizzare due fluidi opportunamente scelti.

## Impianto ad aria

L'impianto ad aria, quindi il ciclo Joule inverso è costituito dai due scambiatori, il compressore e la turbina con il verso di percorrenza indicato in figura (antiorario nel disegno seguente, solitamente si è soliti disegnarlo così)

Lo scopo è sempre quello di sottrarre calore alla sorgente fredda e cederlo a quella calda ed ovviamente è possibile farlo se c'è del lavoro fatto sull'impianto. Il lavoro è quello preso dall'esterno che deve fornire un motore ed è quello del compressore meno quella della turbina (parte del lavoro netto viene preso dalla turbina stessa).  $|L_{motore esterno}| = |L_C| - |L_T|$

Il fluido evolvente è l'aria.



Nel diagramma Ts riportiamo sempre le due temperature limite (ambiente e frigo). L'ambiente evolve tra le due pressioni degli scambiatori, la minima che generalmente è di 1 bar (pressione di aspirazione dell'aria) e la massima solitamente tra i 3 e i 5 bar. 1 è l'uscita dello scambiatore e il calore lo prendiamo dall'ambiente frigo quindi  $T_1 \leq T_f$  (dove l'uguale è caso limite). Da qui parte la compressione in 2 se ideale o in 2' se reale. Poi parte il raffreddamento dove cediamo calore all'ambiente esterno in 2->3. Qui vale la condizione che per lo stato termodinamico 3 si deve avere  $T_3 \geq T_{amb}$ . In 3 entriamo in turbina dove espandiamo 3->4 nella trasformazione reale in 3->4' in quella ideale (entropia crescente !!). Poi il raffreddamento verso 1.

Vale per la potenza frigorifera:  $\dot{Q}_A = \dot{m} (h_1 - h_4) = \dot{m} c_p (T_1 - T_4)$

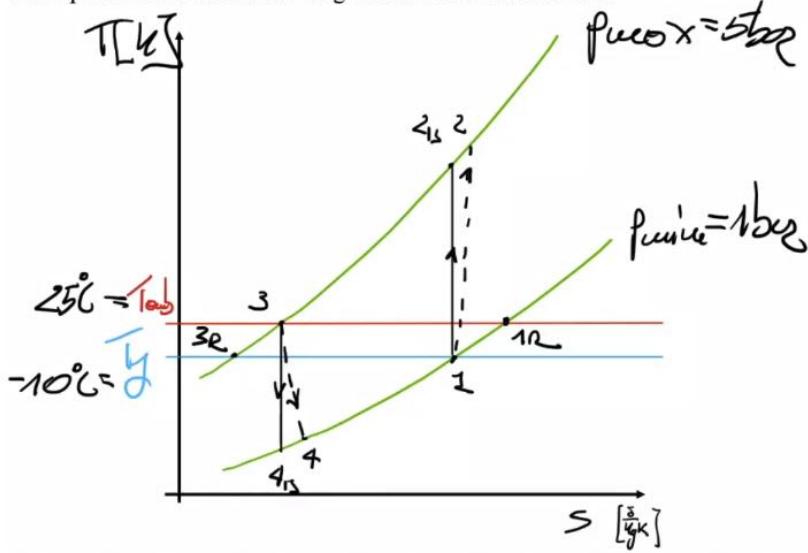
E per il rendimento (fase utile fratto ciò che spendiamo)  $COP = \eta = \epsilon = \frac{\dot{Q}_A}{|\dot{L}_M|} = \frac{\dot{Q}_A}{|L_C| - |L_T|} = \frac{\dot{Q}_A}{|\dot{Q}_C| - |\dot{Q}_A|}$

Si osservi che  $\eta = \frac{q_a}{q_a - q_c} = \frac{c_p(T_1 - T_4)}{c_p(T_2 - T_3) - c_p(T_1 - T_4)} = \frac{1}{\frac{q_c}{q_a} - 1} = \frac{1}{\frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_4} - 1} = \frac{1}{\frac{T_2}{T_1} - 1}$  e allora nel caso ideale

$\eta = \frac{1}{r_p^{\frac{k-1}{k}} - 1}$  dove  $r_p$  è il rapporto di compressione,  $r_p = \frac{p_{max}}{p_{min}}$ .

## Esercizio 2

Si vuole mantenere un “ambiente frigo” alla temperatura di  $-10^{\circ}\text{C}$  tramite un impianto funzionante secondo ciclo Joule inverso, che evolve tra le pressioni di 1 e 5 bar, in un ambiente esterno a  $25^{\circ}\text{C}$ . Determinare i rendimenti isentropici di compressione ed espansione nell’ipotesi che il COP sia pari a 0.66 e l’effetto frigorifero specifico pari a  $61 \text{ kJ kg}^{-1}$ . Successivamente, con i rendimenti trovati, valutare COP ed effetto frigorifero per un impianto con rigeneratore. Supporre tutti gli scambiatori con superfici di scambio infinite (caso limite ideale o di scambiatore perfetto). Riportare gli schemi di impianto ed i cicli corrispondenti su uno stesso diagramma termodinamico  $T-s$ .



È importante sottolineare come il testo ci dice di supporre gli scambiatori con superfici di scambio infinite (caso limite ideale o di scambiatore perfetto).

Questo significa che quando cediamo calore nello scambiatore da 2 a 3 allora se 3 deve essere maggiore/uguale della temperatura ambiente allora se lo scambiatore è di dimensioni infinite la temperatura in 3 sarà quella ambiente:  $T_3 = T_{amb}$

Inoltre, assorbendo calore dalla sorgente fredda si ha anche  $T_1 = T_f$

Questa considerazione ci consente di fissare 1 su  $T_f$  e 3 su  $T_{amb}$ .

Ricaviamo i rendimenti isoentropici di compressore ed espansore:

$$\text{Per il compressore } \rho_{isC} = \frac{\ell_{ideale}}{\ell_{reale}} = \frac{h_{2is} - h_1}{h_2 - h_1} = \frac{c_p(T_{2is} - T_1)}{c_p(T_2 - T_1)}$$

$$\text{Per la turbina, invece, } \rho_{isT} = \frac{\ell_{reale}}{\ell_{ideale}} = \frac{h_3 - h_4}{h_3 - h_{4is}} = \frac{c_p(T_3 - T_4)}{c_p(T_3 - T_{4is})}$$

( $c_p$  si può semplificare in tutte e due le espressioni).

Di questi conosciamo solo  $T_1$  e  $T_3$ .

Vedremo che le due temperature isoentropiche sono facilmente ricavabili mentre ci mancano effettivamente  $T_4$  e  $T_2$  per le quali dovremo sfruttare le altre informazioni.

Ricordando che il calore assorbito  $q_a = h_1 - h_4 = c_p(T_1 - T_4) = 61 \text{ kJ/kg}$  e da questo dato noto ricaviamo facilmente  $T_4$ . Quindi ci converrà partire dal rendimento isoentropico di turbina.

L’altra relazione è quella legata all’altro lato, quindi al COP, che possiamo riscrivere dividendo per la portata (è la stessa) e quindi con le grandezze specifiche:  $COP = \frac{q_a}{\ell_T - \ell_C} = \frac{\dot{q}_a}{\dot{q}_c - \dot{q}_a}$ .

Quindi andiamo a considerare:

$$q_a = c_p(T_1 - T_4) = 1 \text{ kJ/kg K} (-10^{\circ}\text{C} - T_4) = 61 \text{ kJ/kg} \implies T_4, \text{ da cui ricaviamo la temperatura in 4.}$$

Poi per il rendimento isoentropico di turbina ci manca il  $T_4$  isoentropico che andiamo a ricavare dalla trasformazione isoentropica

$$\text{tra 3 e 4isoentropico: } \frac{T_3}{p_3^{\frac{k-1}{k}}} = \frac{T_{4is}}{p_{4is}^{\frac{k-1}{k}}} \implies T_{4is} = \left( \frac{p_{4is}}{p_3} \right)^{\frac{k-1}{k}} \cdot T_3 \text{ dove } \frac{p_{4is}}{p_3} = \frac{1}{r_p} \text{ e quindi si ricava:}$$

$$\rho_{isC} = \frac{T_3 - T_4}{T_3 \left[ 1 - r_p^{\frac{k-1}{k}} \right]} = 0,87$$

GLI IMPIANTI AD ARIA COME QUESTO, OPERANDO TRA PRESSIONI DI 1 E 5 BAR, SI POSSONO CONSIDERARE COME GAS PERFETTO IN QUANTO SIAMO ANCHE BEN LONTANI DALLA TEMPERATURA CRITICA DELL'ARIA.

FARE ATTENZIONE PER I GAS PERFETTI SOLO QUANDO SIAMO NEI VAPORI SURRISCALDATI, QUINDI FARE ATTENZIONE QUANDO SIAMO INTORNO LA CAMPANA DI ANDREWS. QUESTI SONO GAS PERFETTI SE SONO MOLTO RAREFATTI QUINDI NELLE MISCELE ARIA UMIDA DOVE IL VAPORE ACQUEO È MOLTO RAREFATTO.

L'altra informazione sul rendimento ci permette di ricavare il lavoro di compressore reale:  $\ell_C = \ell_{C_{reale}} = h_2 - h_1 = \dots$

Da cui il rendimento isoentropico del compressore sarà  $\rho_{isC} = \frac{c_p (T_{2is} - T_1)}{\ell_{C_{reale}}}$  dove ci manca il  $T_{2is}$  isoentropico che ricaviamo

$$\text{lungo l'isoentropica, ovvero } \frac{T_{2is}}{p_{2is}^{\frac{k-1}{k}}} = \frac{T_1}{p_1^{\frac{k-1}{k}}} \Rightarrow T_{2is} = T_1 \left( \frac{p_{2is}}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} = T_1 \cdot r_p^{\frac{k-1}{k}}$$

$$\text{Inoltre } h_3 - h_4 = c_p (T_3 - T_4)$$

$$c_p T_1 \left( r_p^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right)$$

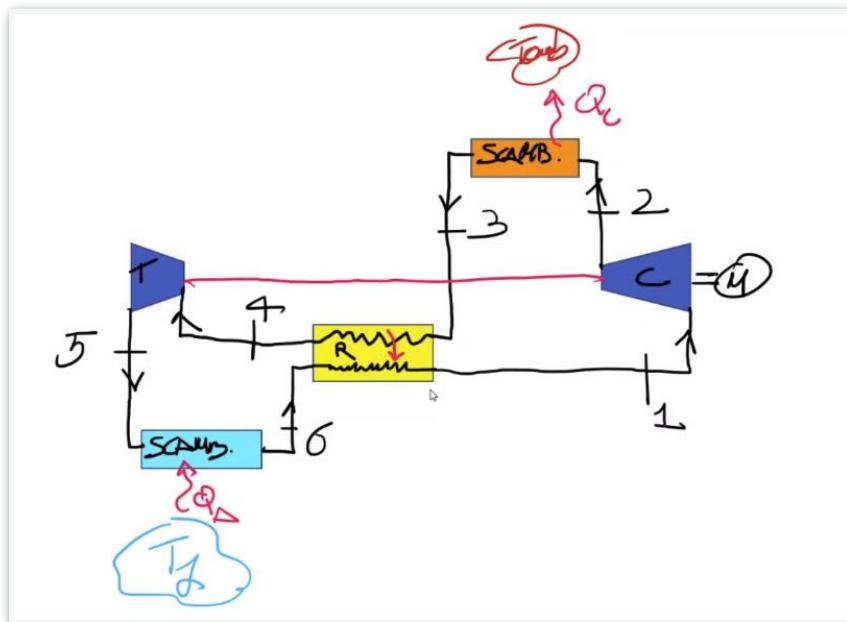
$$\text{Quindi si ottiene } \rho_{isC} = \frac{c_p T_1 \left( r_p^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right)}{\ell_{C_{reale}}} = 0,82$$

Si osservi che il rendimento isoentropico del compressore è sempre inferiore a quello di turbina.

Adesso con questi rendimenti trovati dobbiamo valutare il nuovo potere frigorifero e il COP per il ciclo con rigeneratori.

Il **ciclo Joule inverso (frigorifero ad aria) con rigeneratore** punta a migliorare il  $q_{a_{ideale}} = h_1 - h_4$  e per farlo cerca di spostare  $T_3$  il più possibile verso il basso tuttavia non può scendere sotto la temperatura ambiente. Tuttavia si può pensare di prendere il fluido a  $T_1$  (sicuramente inferiore a  $T_3$ ) e di raffreddarci il fluido a  $T_3$  abbassando ulteriormente la temperatura di ingresso in turbina.

Quindi l'impianto si modifica come in figura:  
(i numeri sono ridefiniti rispetto il caso precedente)



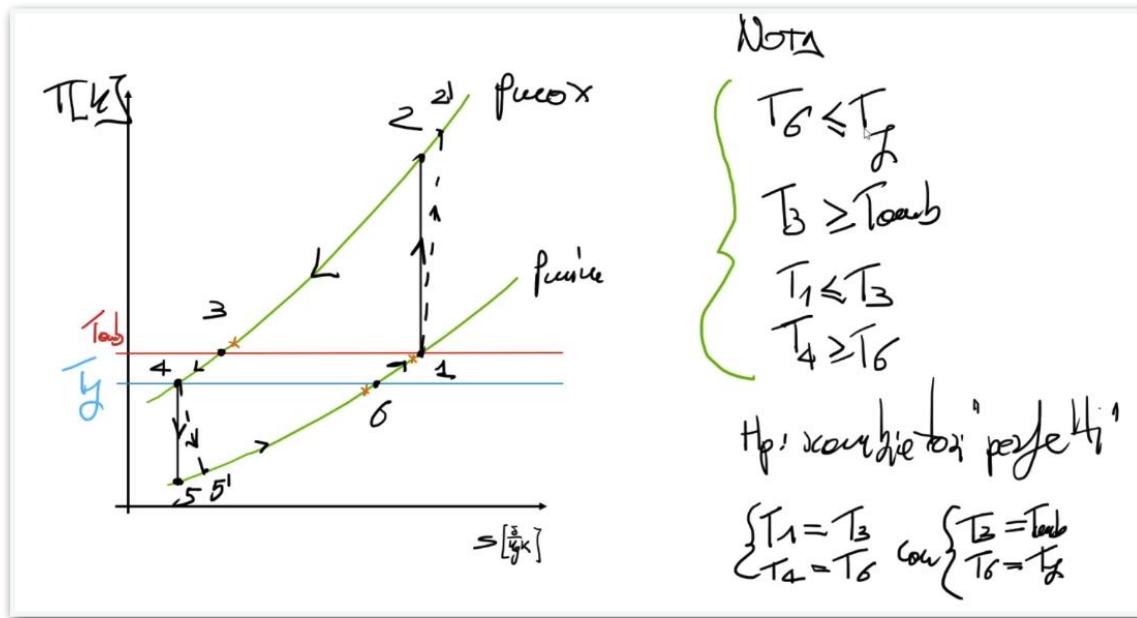
cioè prendiamo il fluido che esce dallo scambiatore e lo mettiamo a contatto con il fluido che veniva dallo scambiatore di alta temperatura.

Il fluido caldo cede calore al fluido freddo che entra in turbina ad una temperatura  $T_4$  inferiore alla temperatura  $T_3$ .

Cioè abbiamo il limite per  $T_3$  pari alla temperatura ambiente che nella realtà dovrà trovarsi anche leggermente sopra.

Da 3 a 4 raffreddo e dall'altra parte c'è un fluido che si riscalda.

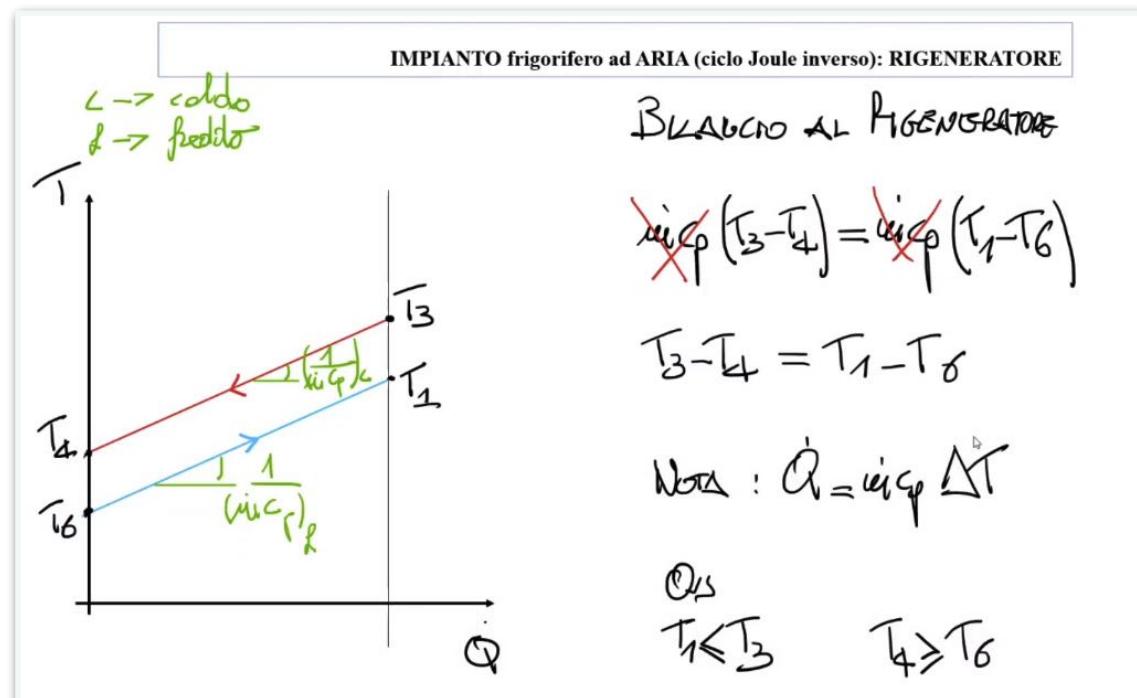
1 sarà leggermente inferiore alla T ambiente mentre 6 sarà leggermente inferiore alla T frigo.



Vale anche che  $T_1 \leq T_3$  e  $T_4 \geq T_6$ .

Facciamo anche l'ipotesi di avere a che fare con **scambiatori perfetti** cioè scambiatori di dimensione infinita che quindi ci permette di considerare le uguaglianze di  $T_6$  uguale alla temperatura frigo e  $T_3$  alla temperatura ambiente da cui esce  $\begin{cases} T_1 = T_3 \\ T_4 = T_6 \end{cases}$

Per vedere questo consideriamo quello che accade nel rigeneratore dove il fluido 3-4 si raffredda mentre 6-1 si riscalda:

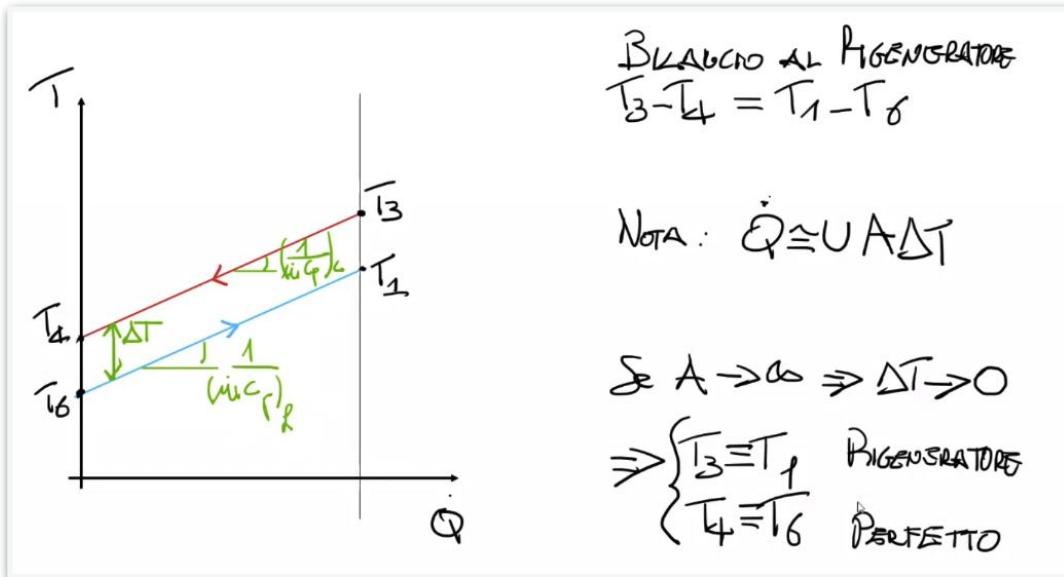


Dove dal  $\dot{Q}$  si ricava la pendenza delle curve  $\left(\frac{1}{\dot{m} c_p}\right)_f = \frac{1}{\dot{c}_f}$  e  $\left(\frac{1}{\dot{m} c_p}\right)_c = \frac{1}{\dot{c}_c}$  dove  $c$  sta per caldo ed  $f$  per freddo.

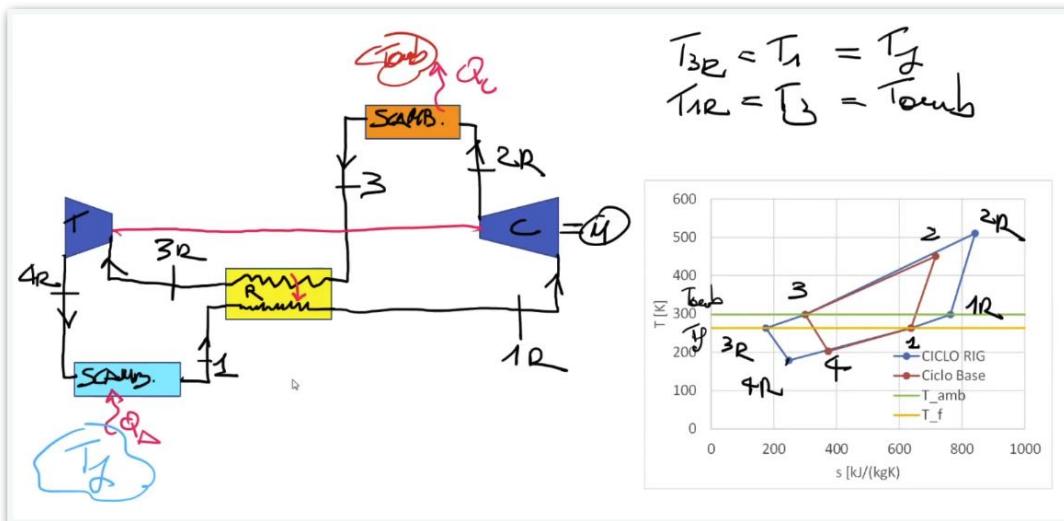
Un bilancio sul rigeneratore ci permette di semplificare le capacità termiche e infatti le due curve sono due rette parallele.

Facendo l'ipotesi di scambiatore perfetto viene fuori che lo scambio dei due fluidi è  $\dot{Q} \approx UA \Delta T$  dove in realtà il  $\Delta T$  è la temperatura media logaritmica  $\Delta T_{ML}$ , cioè è come se le due curve vanno a collassare (Figura a pagina seguente)

Questo giustifica il disegno di prima in cui abbiamo considerato 3 e 1 pari alla T ambiente e 4 e 6 pari alla temperatura frigo.

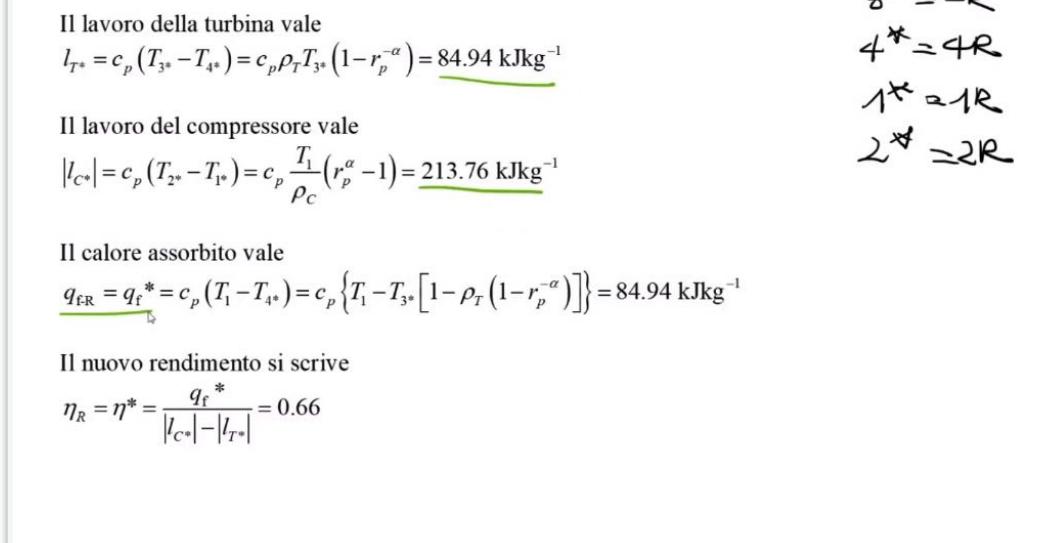


Tornando all'esercizio abbiamo gli stati termodinamici come identificati prima (in **rosso** ciclo base e in **blu** quello rigenerato).



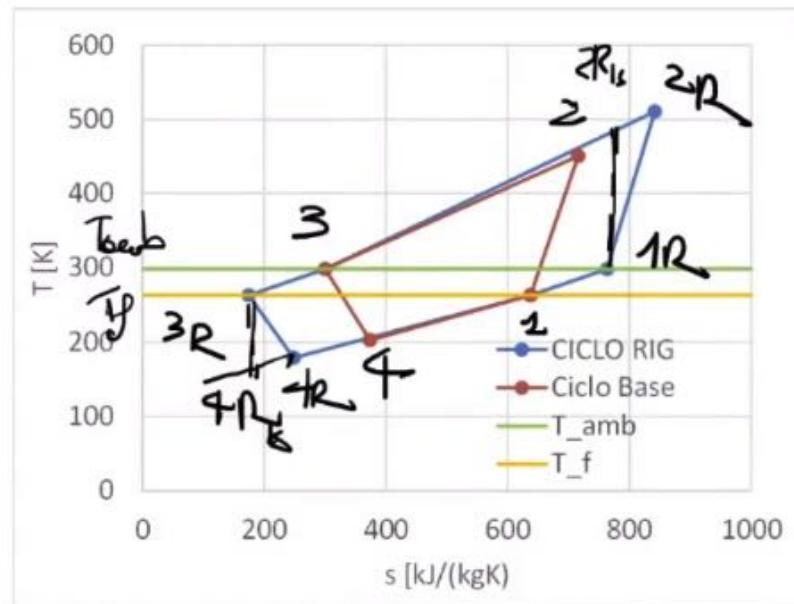
Sono cambiati alcuni stati termodinamici ma il rendimento isoentropico di turbina è sempre lo stesso ovvero  $\rho_{isT} = \frac{h_3 - h_{4R}}{h_3 - h_{4R_{is}}}$

per il compressore  $\rho_{isC} = \frac{h_{2R_{is}} - h_{1R}}{h_{2R} - h_{1R}}$ . Cioè con i calcoli:



Dove il calore assorbito è aumentato mentre per la particolare combinazione di temperature i rendimenti restano uguali. [continua]

Quindi di questo nuovo ciclo conosciamo  $\begin{cases} T_{3R} = R_1 = T_f \\ T_{1R} = T_3 = T_{amb} \end{cases}$  con le quali riusciamo a tracciare le isoentropiche e quindi possiamo ricalcolare tutti gli altri stati termodinamici che mancano (4R e 2R).



I PASSAGGI MATEMATICI MANCANTI SONO PRESENTI NEL FILE DEGLI ESERCIZI.

## Impianti di liquefazione

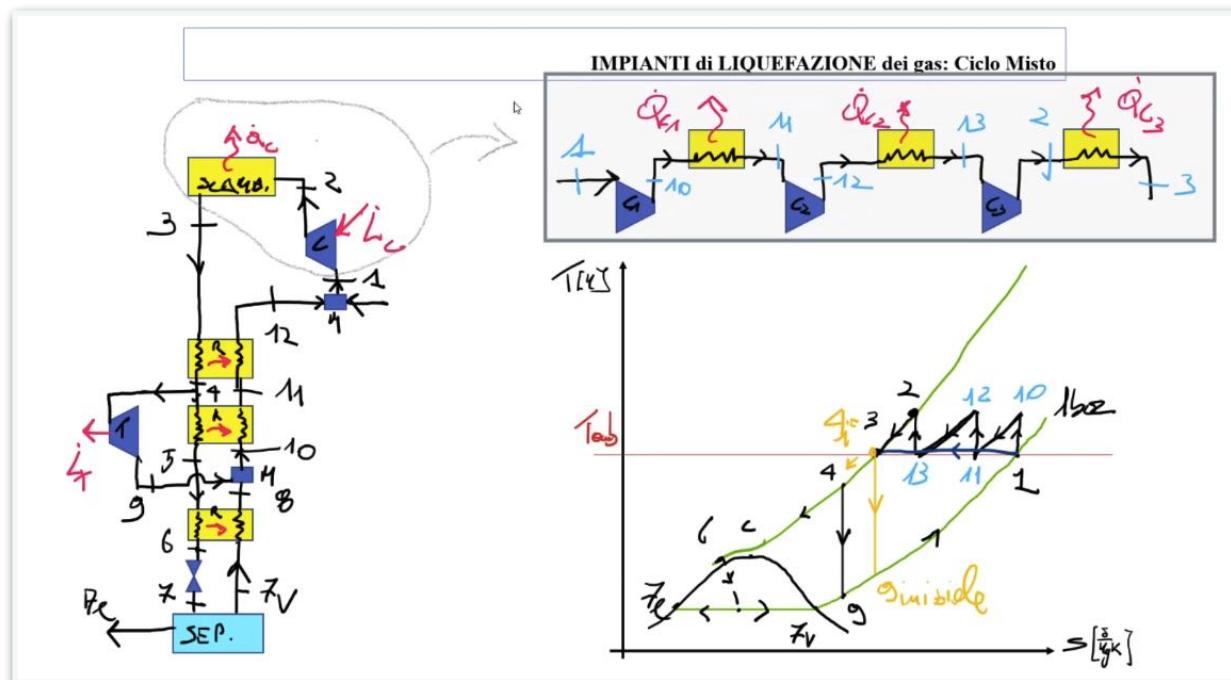
Abbiamo già visto a lezione gli impianti di liquefazione dividendo il ciclo Claude e Linde tuttavia gli impianti sono spesso a ciclo misto. Ci sono sempre compressore e scambiatore che cedono calore all'ambiente esterno e un serie di rigeneratori in cui c'è un fluido che deve raffreddare e in controcorrente il fluido più freddo.

Si entra nel separatore sempre con una valvola di laminazione in quanto entrando nella campana di Andrews si preferisce avere la valvola.

È sempre presente la turbina per recuperare un po' di lavoro e per la fase di avvio dell'impianto stesso.

Il separatore fa la fase utile vera e propria liquefacendo il fluido.

Nel riquadro in alto è rappresentato il fatto che quando si inseriscono compressore e scambiatore per questa tipologia di impianti si intende una compressione che definiamo inter-refrigerata, cioè fatta di compressori e scambiatori in cui il calore è ceduto all'ambiente esterno.



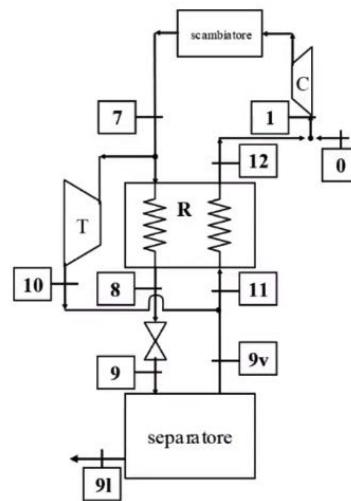
Riportandolo su un piano Ts l'aria entra nel compressore (dopo un filtraggio) a temperatura ambiente e pressione atmosferica in 1. Poi ci sono le fasi di compressione e inter-refrigeramento  $10 \rightarrow 11 \rightarrow 12 \rightarrow 13 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ , semplificato in  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$  o  $1 \rightarrow 3$  (spesso rappresentata direttamente come un'isoterma, in blu). La compressione è sempre inter-refrigerata poiché il salto di pressione è importante (25-40 bar) ed è meglio raffreddare.

Lo stato 6 è fuori dalla campana e laminando si finisce all'interno della sesta nello stato termodinamico 7 dove separiamo il vapore dal liquido e il 7liquido è la fase utile per cui è pensato l'impianto.

Non vengono riportati gli altri stati poiché dovremmo verificare le temperature nei rigeneratori, è sufficiente considerare le isobare sui quali si trovano.

## Esercizio 1

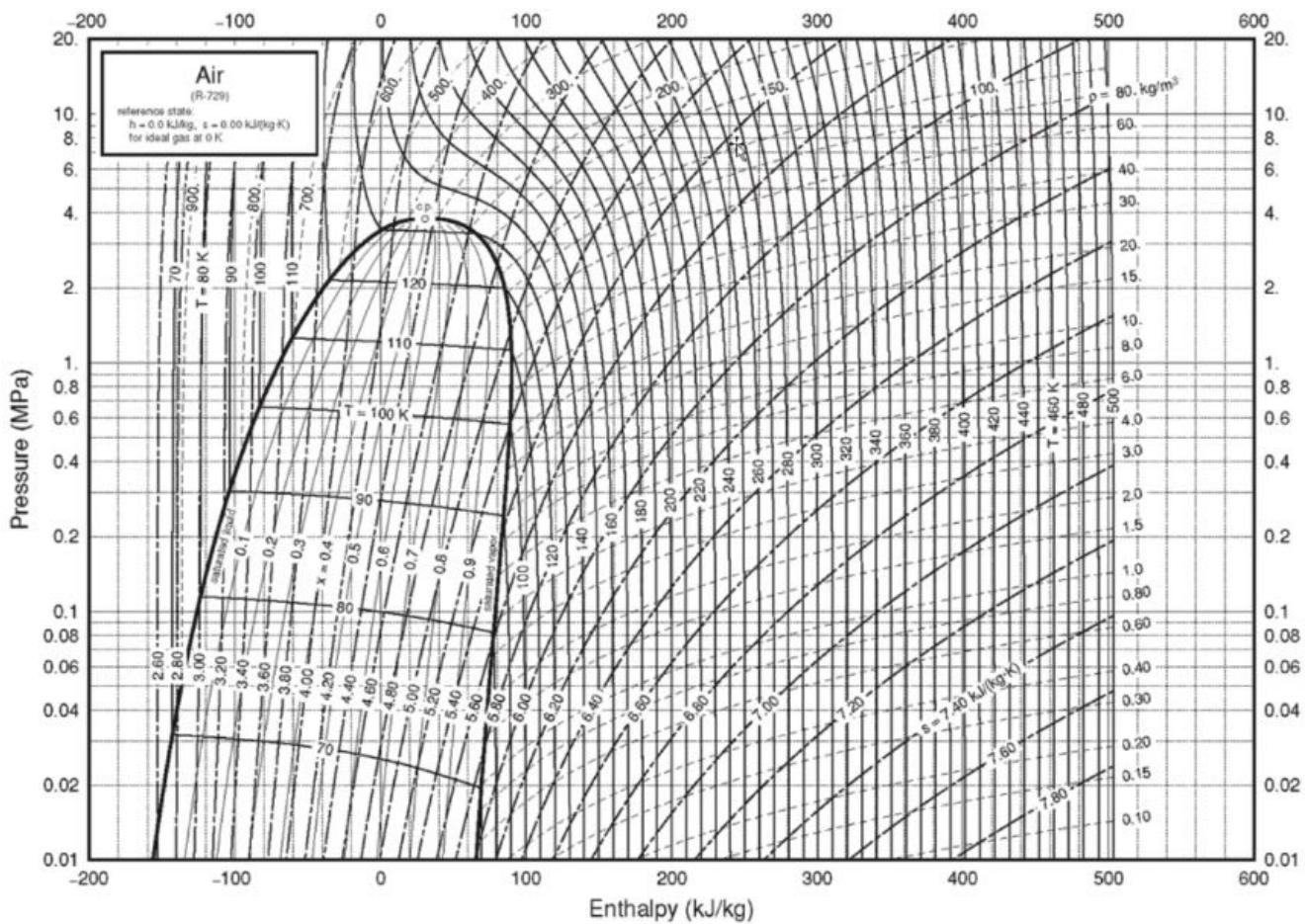
Un ipotetico impianto per la liquefazione dei gas opera secondo lo schema di Figura. La compressione avviene in tre stadi interrefrigerati con pressioni finali nell'ordine pari a 3 bar, 10 bar e 40 bar. Nella prima compressione una portata di  $1 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$  di aria è aspirata a 1 bar e 260K (stato 1), sempre a 300 K negli stadi successivi di compressione. Anche le temperature nello stato 7 (40 bar) e nello stato 0 (1 bar) sono di 300K. Sapendo che il titolo del vapore nel separatore è pari a 0.7, determinare, in condizioni stazionarie, la portata di liquido che si separa e quella che transita nell'espansore. Calcolare inoltre la potenza netta spesa dall'impianto. Riportare correttamente gli stati termodinamici del ciclo sul diagramma  $p$ - $h$  allegato. Siano unitari i rendimenti isentropici dei compressori e della turbina (cfr. figura e allegati).



Sono noto lo stato 7, 0 e 1. Conosciamo anche  $x_9$ .

Dobbiamo conoscere la portata in turbina e la portata che si separa.

In allegato il diagramma ph dell'aria:



Proviamo a riportarci sull'impianto le trasformazioni del ciclo già note.

1 si trova a 260 K e 1 bar.

Possiamo riportare subito i riferimenti della pressioni 1 bar, 3 bar, 10 bar e 40 bar con il grafico in MPa (va moltiplicato per 10 per i bar). Segniamoci quindi riferimenti sul diagramma.

Riusciamo quindi a riportare lo stato 0 a 300 K e 1a 260 K.

È noto anche lo stato 7 a 300K.

La compressione è inter-refrigerata e i compressori sono adiabatici reversibili quindi isoentropici e allora riportiamoci le compressioni con le relative inter-refrigerazioni.

Nella prima si va da 1bar a 3bar, cioè 1->2.

Per ricavare lo stato 2 possiamo utilizzare anche le relazioni del gas perfetto oppure lo leggiamo qualitativamente dal diagramma, circa 350 K.

$$\text{Altrimenti } T_2 = T_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} = 356 \text{ K.}$$

Poi avviene la refrigerazione e raffreddiamo fino a 300K (ingresso nell'aspirazione successiva).

Arriviamo quindi allo stato 3 dove entriamo nel successivo compressore in cui c'è la compressione 3->4, siamo a circa 400 K.

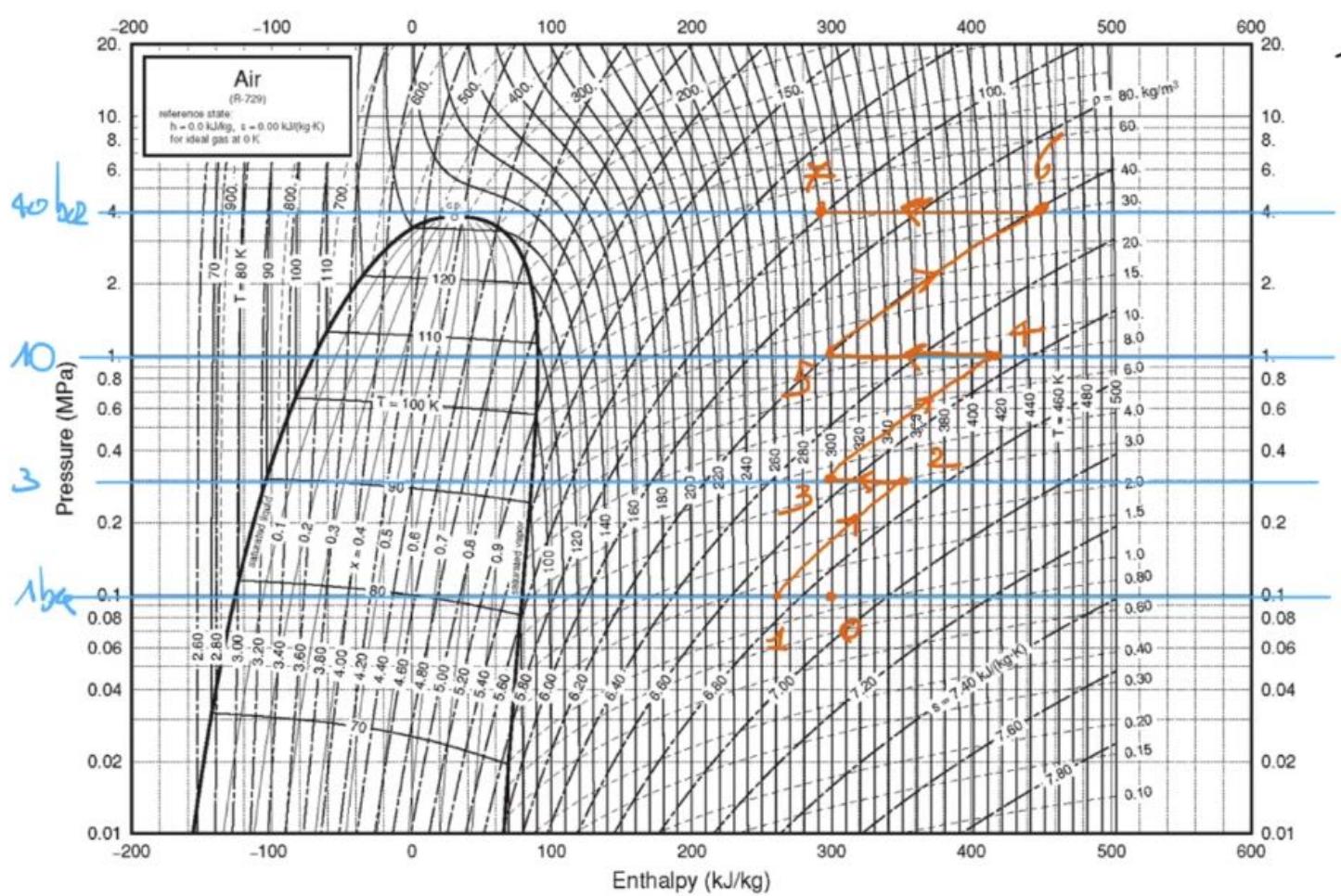
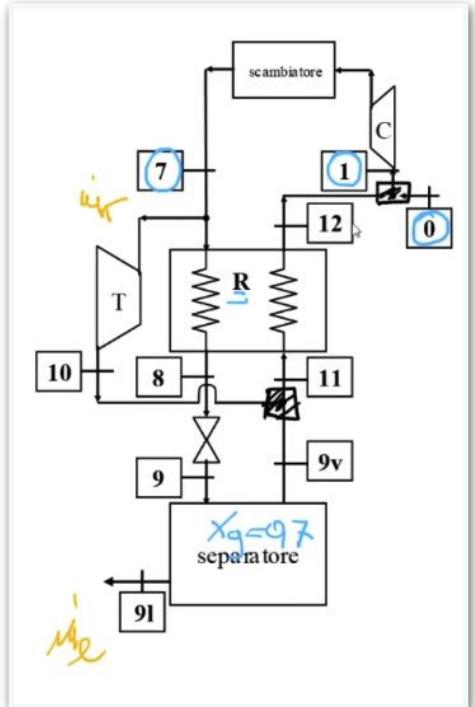
$$\text{Calcolandolo con le relazioni } T_4 = T_3 \left( \frac{p_4}{p_3} \right)^{\frac{k-1}{k}} = 423 \text{ K.}$$

Si faccia attenzione che qui siamo oltre la temperatura critica e sono sicuramente gas ed essendo lontani dalla campana l'aria può essere considerata un gas perfetto.

Raffreddiamo nuovamente fino a 300K, 4->5.

Seguiamo all'ora l'isoentropica arrivando allo stato 6.

Raffreddiamo nuovamente fino a 7.



Conoscere questi stati termodinamici significa andare a leggere le entalpie.

Inoltre dal testo conosciamo il titolo di 9 e sappiamo che la laminazione avviene da 40bar a 1 bar e arriviamo in  $x=0,7$  che dove interseca l'isobara ci permette di identificare lo stato termodinamico 9.

Avendo facilmente ricavato 9 ricaviamo anche 9l e 9v (liquido e vapore saturo) e lo stato 8 che viene dalla laminazione e quindi ad entalpia costante.

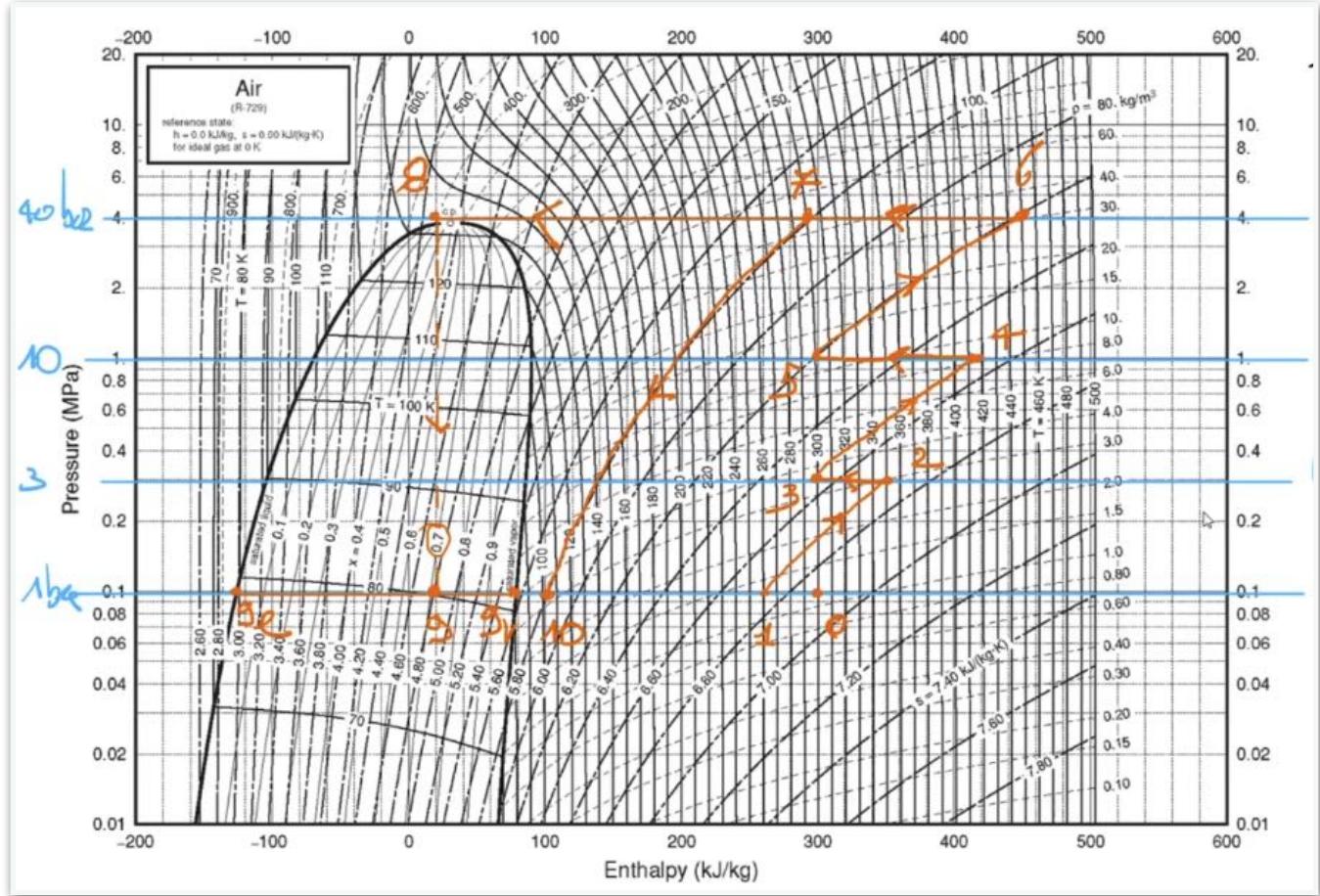
(Indicati a pagina successiva).

Quindi possiamo completare il ciclo da 7->8 e la trasformazione 8->9l con 9v.

Inoltre possiamo ricavare facilmente anche lo stato 10 con l'isoentropica da 7.

Non riusciamo ancora a ricavare gli stati 11 e 12.

Possiamo dire che 11 si troverà tra 9v e 10 poiché c'è un miscelatore da cui entra 9v e 10 e la corrente di uscita sarà nelle condizioni intermedie. Lo stato 12 invece sarà a sinistra di 1 in quanto 1 è il risultato della miscelazione tra 12 e 0.



Alle incognite delle due portate di turbina e di liquido che si separa si aggiungono anche  $h_{11}$  e  $h_{12}$ .

Possiamo scrivere diversi bilanci:

- Bilancio ai miscelatori
- Bilancio al rigeneratori
- Bilancio al separatore

Abbiamo questi 4 organi aperti in cui ci sono più correnti per le quali possiamo scrivere il bilancio.

Il rigeneratori è un organo aperto, uno scambiatore, non c'è calore scambiato ne valore e allora le variazioni di entalpia tra ingresso e uscita devono essere le stesse.

Conosciamo la portata  $\dot{m}_1 = 1 \text{ kg/s}$  e quindi la portata che entra nel rigeneratori lato fluido caldo sarà

$(\dot{m}_1 - \dot{m}_T)(h_7 - h_8) = (\dot{m}_1 - \dot{m}_l)(h_{12} - h_{11})$ , dove la portata lato freddo nello stato 11 è la somma di quella in turbina e di quella di 9v oppure può essere vista semplicemente come le portate che si sono ricongiunte meno quella di liquido che è uscita dal sistema.

Dal bilancio al separatore conosciamo la portata che arriva che si separa in liquido e vapore  $\dot{m}_9 = \dot{m}_{9l} + \dot{m}_{9v}$  che possiamo riscrivere come le portate già considerate, ovvero  $(\dot{m}_1 - \dot{m}_T) = \dot{m}_l + x_9(\dot{m}_1 - \dot{m}_T)$  con  $x_9 = \frac{\dot{m}_{9v}}{\dot{m}_{9l} + \dot{m}_{9v}}$

Dal bilancio al miscelatore dopo la turbina abbiamo che  $\dot{m}_T h_{10} + \underbrace{x_9(\dot{m}_1 - \dot{m}_T)h_{9v}}_{\text{stato 10}} = (\dot{m}_1 - \dot{m}_l)h_{11}$

E dal bilancio sull'altro miscelatore in aspirazione abbiamo che  $(\dot{m}_1 - \dot{m}_l)h_{12} + \underbrace{\dot{m}_l h_0}_{\text{reintegro}} = \dot{m}_1 h_1$ .

A pagina seguente per i calcoli.

Risolvendo il sistema delle 4 equazioni, sommando le prime due equazioni, si scrive

$$\begin{cases} \dot{m}_1 \cdot (h_7 - h_8 + h_{9v}) + \dot{m}_T (h_{10} - h_{9v} - h_7 + h_8) - \dot{m}_l \cdot h_{9v} = (\dot{m}_1 - \dot{m}_l) \cdot h_{12} \\ \dot{m}_l = (1 - x_9)(\dot{m}_1 - \dot{m}_T) \\ h_{12} = \frac{\dot{m}_l \cdot h_l - \dot{m}_l \cdot h_0}{\dot{m}_1 - \dot{m}_l} \end{cases}$$

Sostituendo la seconda e la terza nella prima si ricava la portata della turbina:

$$\dot{m}_T = \dot{m}_l \frac{h_7 - h_8 + h_{9v} - (1 - x_9)(h_{9v} - h_0) - h_l}{h_{9v} - h_{10} + h_7 - h_8 - (1 - x_9)(h_{9v} - h_0)} = 0.494 \text{ kg s}^{-1}$$

Dalla precedente

$$\dot{m}_l = (1 - x_9)(\dot{m}_1 - \dot{m}_T) = 0.152 \text{ kg s}^{-1}$$

Invece, per la potenza netta spesa dall'impianto, possiamo considerare la potenza delle varie compressioni a cui sottraiamo la potenza della turbina. Otterremo un valore in modulo positivo ma sappiamo che il lavoro di compressione dovrà essere fornito all'impianto.

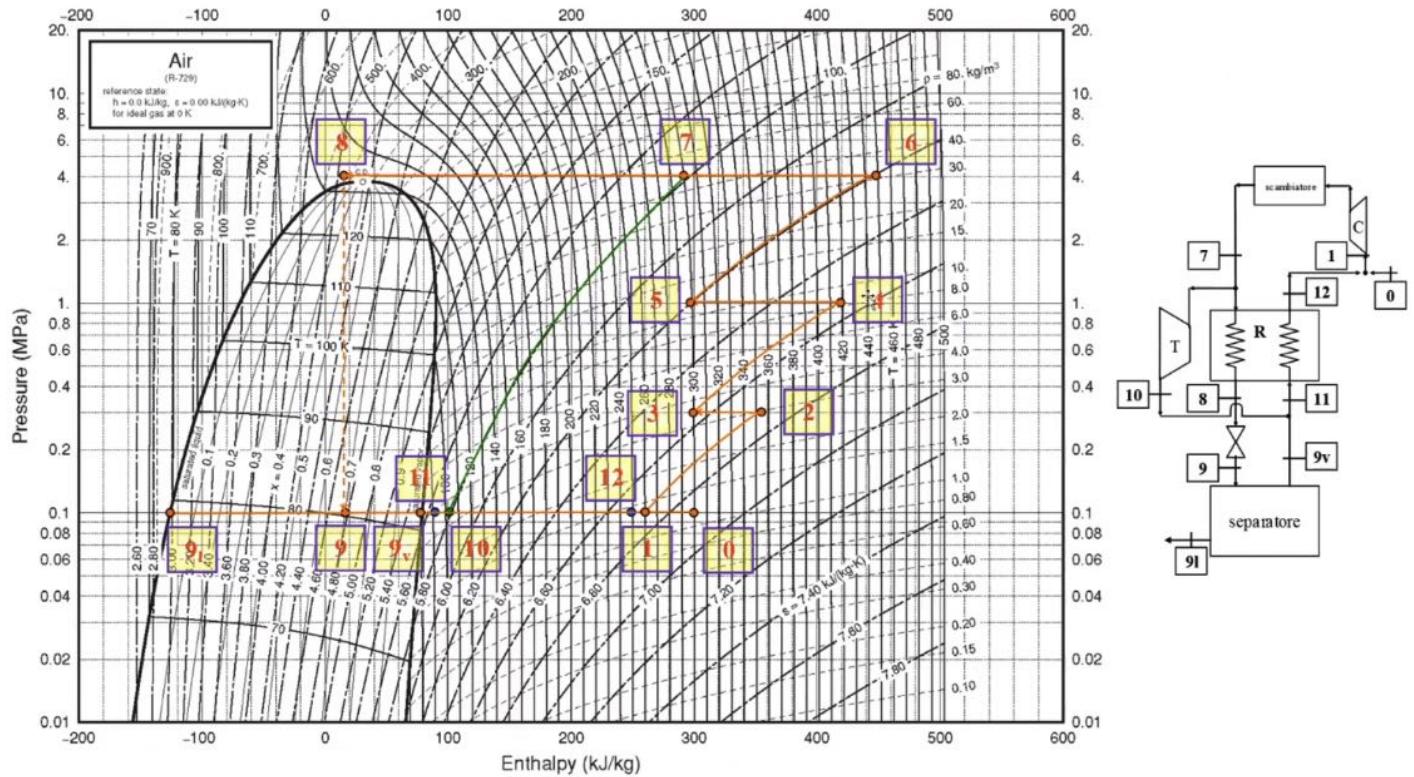
Per il compressore  $|\dot{L}_C| = |\dot{L}_{C_1}| + |\dot{L}_{C_2}| + |\dot{L}_{C_3}| = \dot{m}_1 [(h_2 - h_1) + (h_4 - h_3) + (h_6 - h_5)]$

Per la turbina  $|\dot{L}_T| = \dot{m}_T (h_7 - h_{10})$

E allora la potenza netta in modulo sarà  $|P_M| = |\dot{L}_C| - |\dot{L}_T| = 276 \text{ kW}$ .

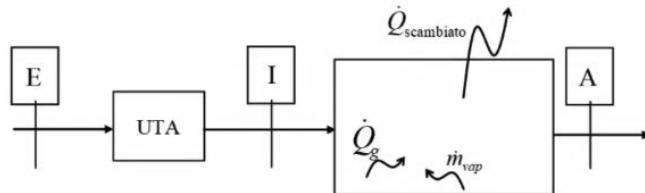
Si osservi che questa potenza sarà da **fornire all'impianto**.

Cioè, l'intero ciclo sul diagramma ph.



## Esercizio 2 - Climatizzazione

In una sala ristorante (alta 5 m, con pianta rettangolare 9x20 m<sup>2</sup>), un impianto a tutta aria deve garantire una temperatura di 20°C, con umidità relativa del 55% (A). Il locale è esposto sui due lati lunghi, su uno corto e sul tetto allo scambio con l'ambiente esterno ((E) a 4°C ed umidità relativa del 20%). Determinare il coefficiente di scambio termico globale medio tra il locale e l'esterno affinché la temperatura di immissione (I) non superi di 15°C quella interna, senza far ricorso ad eventuali portate di ricircolo. Per i calcoli, considerare di avere una clientela di 45 persone, ciascuna delle quali con carico termico sensibile di 80W, mentre il carico di vapore è pari a 110 g/ora (calore latente di 2500 kJkg<sup>-1</sup>) per ogni persona, compreso il vapore delle portate. Nella potenza termica interna occorre considerare anche le luci, con carico pari a 30 Wm<sup>-2</sup> (superficie della pianta). La portata di aria di rinnovo, presa dall'esterno, è pari a 37 m<sup>3</sup>/(ora:persona). Considerando un'efficienza del saturatore pari al 78%, determinare le potenze termiche di pre-riscaldamento e post-riscaldamento scambiate per portare l'aria dalle condizioni esterne a quelle di immissione. Riportare tutte le trasformazioni su un diagramma psicrometrico. Sia il calore latente di evaporazione dell'acqua sempre pari a 2500 kJ·kg<sup>-1</sup>, le entalpie di riferimento di acqua liquida satira ed aria secca nulle alla temperatura di 0°C, i calori specifici pari a  $c_{p-a} = 1 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\text{K}^{-1}$  e  $c_{p-v} = 1.8 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ . Considerare una pressione totale di 10<sup>5</sup> Pa



Abbiamo le condizioni di A e di E e diverse informazione sul locale da climatizzare.

Il diagramma psicrometrico su cui riportare le informazioni sarà chiaramente un diagramma qualitativo.

In aggiuntaabbiamo bisogno di sapere come la pressione è legata alla temperatura:

**Tabella 1 – Pressione di saturazione del vapor d'acqua in equilibrio col liquido**

$t [^{\circ}\text{C}]$	4	10	20	30	40
$p [\text{kPa}]$	0.813	1.2281	2.3388	4.2455	7.3814

Dobbiamo ricavare il coefficiente di scambio termico globale medio tra il locale e l'esterno che chiaramente è legato alla relazione del calore scambiato con l'esterno  $\dot{Q}_{scambiato}$ .

Affinché esca fuori il coefficiente di scambio globale conviene scriverlo come  $\dot{Q}_{scambiato} = U \cdot A \cdot \Delta T$ . Per la conduzione abbiamo visto come strutture composte (come la parete del locale) che non è detto conosciamo nel dettaglio ma sappiamo ci saranno vari strati (intonaco, mattone, isolante, cemento, ecc), una temperatura interna ed una esterna e quindi il flusso termico. Consideriamo la conduzione nei vari spessori e sappiamo che il calore scambiato sarà funzione dello spessore, del coefficiente di scambio convettivo interno e del coefficiente di scambio convettivo esterno. Cioè abbiamo un primo scambio convettivo, poi i diversi scambi condutti tra gli strati e infine lo scambio convettivo esterno. Sono tutte resistenze termiche esterne.

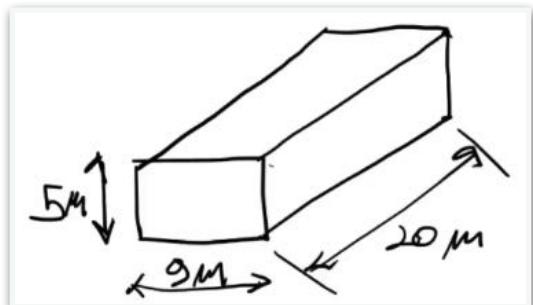
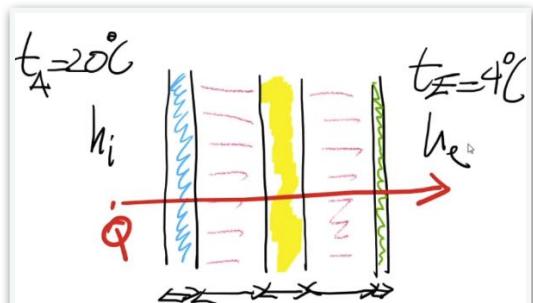
La superficie A è chiaramente il piano uscente che in una struttura piana rimane costante, cioè  $A = 2 \cdot 20 \cdot 5 + 9 \cdot 5 + 20 \cdot 9$ .

Inoltre  $\Delta t = t_A - t_E = (20 - 4) \text{ } ^{\circ}\text{C}$ .

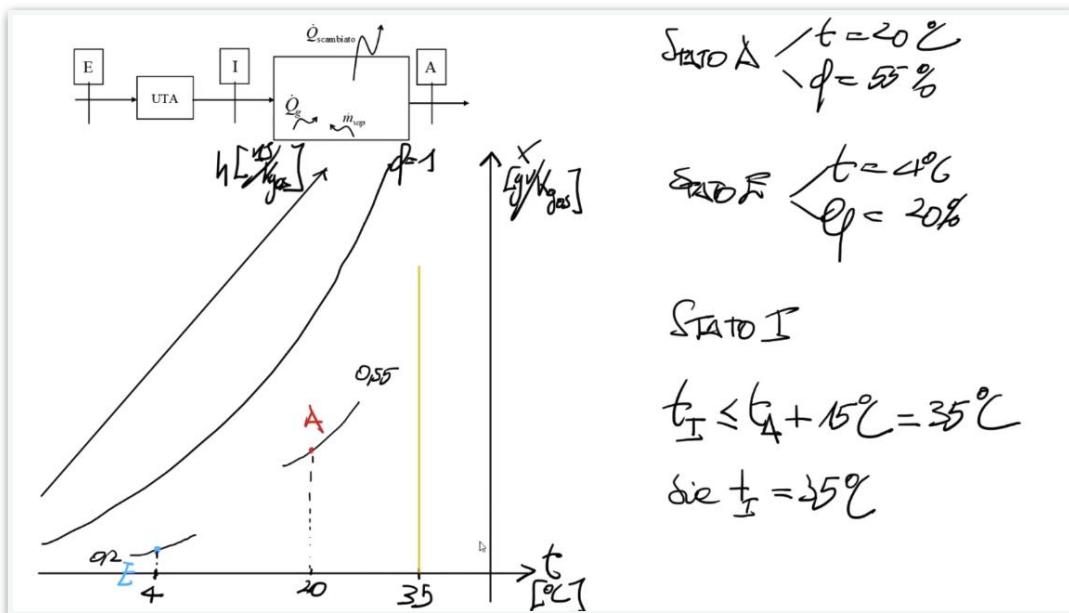
Per ricavare il  $\dot{Q}_{scambiato}$  sappiamo che il locale è un sistema aperto e quindi possiamo provare a scrivere il primo principio per sistemi aperti (bilancio di energia) e bilancio di massa.

Prima di provare a scrivere queste equazioni cerchiamo di riportare gli stati noti (A ed E) sul diagramma psicrometrico che in questo caso dobbiamo disegnare manualmente inserendo dei riferimenti.

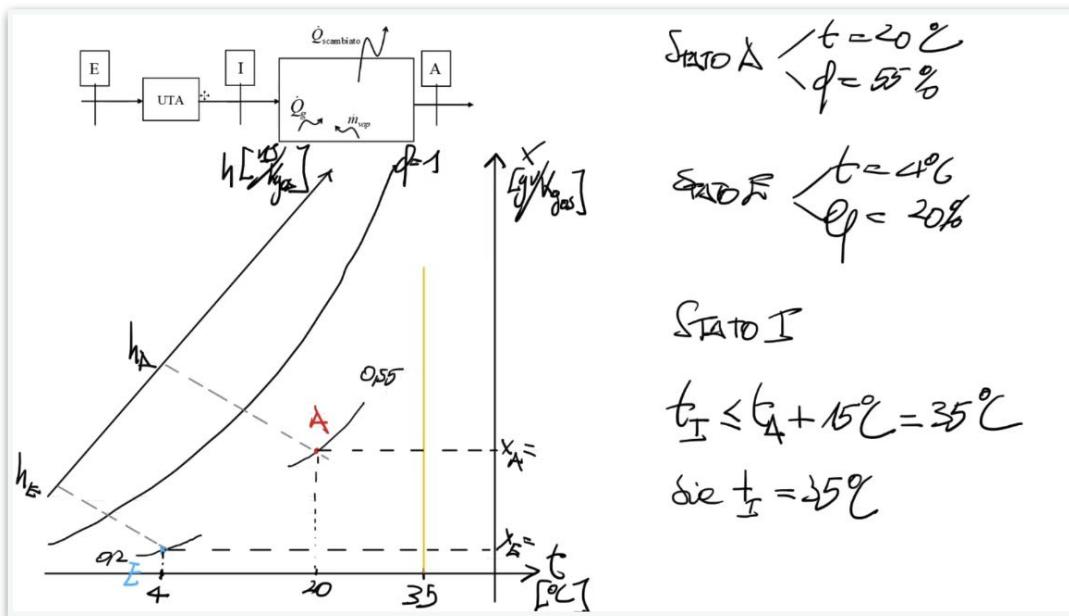
Per lo stato A sappiamo  $\begin{cases} t_A = 20 \text{ } ^{\circ}\text{C} \\ \varphi = 55 \% \end{cases}$  e per lo stato E  $\begin{cases} t_E = 4 \text{ } ^{\circ}\text{C} \\ \varphi = 20 \% \end{cases}$ , quindi riportiamoli sul diagramma.



Dallo stato I sappiamo che  $t_I \leq t_A + 15^\circ\text{C} = 35^\circ\text{C}$  e possiamo fissarla proprio pari a  $35^\circ\text{C}$  e il punto di immissione deve trovarsi su questa isoterma.



Possiamo quindi riportare anche grandezze che dobbiamo ancora ricavare come i titoli e le entalpie.



Proviamo allora a scrivere le equazioni di bilancio e partiamo dal bilancio di massa:

$$\begin{cases} \dot{m}_{asI} = \dot{m}_{asA} = \dot{m}_{asE} \\ \dot{m}_{vI} + \dot{m}_{vg} + \dot{m}_{vA} \longrightarrow x_I \dot{m}_{asI} + \dot{m}_{vg} = x_A \dot{m}_{asA} \end{cases} \implies x_I = x_A - \frac{\dot{m}_{vg}}{\dot{m}_{asI}} = x_A - \frac{\dot{m}_{vg}}{\dot{m}_{asE}}.$$

Da questo imposta la temperatura in I (grado di libertà che avevamo) ricaviamo il titolo e quindi determiniamo completamente lo stato I.

Per il bilancio di energia  $\dot{Q} - \dot{U}_f = \Delta \dot{H} + \Delta \dot{E}_p + \Delta \dot{E}_c$ , dove non c'è lavoro ma nel calore scambiato c'è sia il calore scambiato che quello generato. Dal punto di vista energetico conviene sempre scrivere che tutto ciò che entra [positivo] (al primo membro) è pari a ciò che esce [negativo] (al secondo membro).

$$\dot{m}_{asI} h_I + \dot{Q}_{sensibile\ persone} + \dot{Q}_{luci} + \dot{Q}_{vapore} = \dot{m}_{asA} h_A + \dot{Q}_{scambiato}, \text{ dove l'incognita è proprio } \dot{Q}_{scambiato}$$

$$\text{Da qui potremo allora calcolare } U = \frac{\dot{Q}_{scambiato}}{A \cdot \Delta T}, \quad \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} \right]$$

Dal diagramma potremmo leggere i valori ma in questo caso dobbiamo calcolarli poiché non lo abbiamo.

$$\text{Ci servono } x_A, h_A, h_I, \dot{m}_{asE} = \dot{m}_{asA}$$

Per la portata di aria secca presa dall'esterno si fa riferimento al locale e solitamente si immagina di avere una portata nelle condizioni del locale.

Abbiamo la portata volumetrica  $\dot{V} = 37 \frac{m^3}{ora \cdot persona} \cdot \#persone = 37,45 \frac{m^3}{3600 s}$

Allora ci calcoliamo la portata massica  $\dot{m} = \frac{\dot{V}}{v_A}$ , con il volume specifico in A ovvero  $v_A = \frac{V}{m_{as}}$ .

Il volume lo ricaviamo dall'equazione di stato dei gas perfetti e allora (possiamo scriverlo sia per l'aria secca che per i vapori) abbiamo  $\begin{cases} p_{as}V = n_{as}R_u T \\ p_v V = n_v R_u T \end{cases}$

$$\text{Cioè abbiamo } v_A = \frac{\frac{n_{as}R_u T}{p_{as}}}{\frac{m_{as}}{m_{as}}} = \frac{1}{p m_{as}} \frac{R_u T}{p_{as}} = \frac{R_{as} T_A}{p_{as}}$$

Inoltre la pressione dell'aria secca sarà quella totale meno la pressione del vapore ( $\phi$  per la pressione di saturazione alla  $T_A$ ), ovvero il volume specifico sarà  $v_A = \frac{R_{as} T_A}{p_t - \phi p_s(T_A)}$ .

Abbiamo ricavato quindi la portata massica ma dobbiamo ricavarci anche le altre grandezze e non abbiamo il diagramma da cui leggerle. Per ricavare titolo ed entalpia di A ed E possiamo sfruttare le seguenti relazioni per l'aria umida:

$$h = h_{as} + x \cdot h_v = c_{p_{as}}(t - t_0) + x [h_{l_0} + q_v + c_{p_v}(t - t_0)]$$

Dal testo conosciamo il calore di evaporazione e le entalpie di riferimento nulle a 0°C, ovvero sia  $t_0 = 0^\circ\text{C}$  allora l'entalpia sarà  $h(t) = c_{p_{as}} \cdot t + x(q_v + c_{p_v} \cdot t)$ , dove per ricavare il titolo dobbiamo considerare il rapporto tra le moli nonché tra le pressioni

$$x = 0,622 \cdot \left( \frac{p_v}{p_{as}} \right) = 0,622 \frac{\phi p_s(t)}{p_t - \phi p_s(t)}$$

La pressione di saturazione la andiamo a cercare dalle tabelle del vapore saturo per l'acqua a seconda della temperatura dello stato che stiamo considerando (A o E).

Quindi sia in A che in E siamo in grado di ricavare titolo ed entalpia, ovvero:

$$x_E = 1 \cdot 10^{-3}$$

$$x_A = 8,1 \cdot 10^{-3}$$

$$h_A = 40,56 \text{ kJ/kg}$$

$$h_E = 6,54 \text{ kJ/kg}$$

Possiamo allora ricavare anche  $x_I = 0,0056$  e quindi lo stato termodinamico I.

$$\text{È facile allora calcolare anche } h_I = c_{p_{as}} t_I + x_I (q_v + c_{p_v} t_I) = 49,26 \text{ kJ/kg}$$

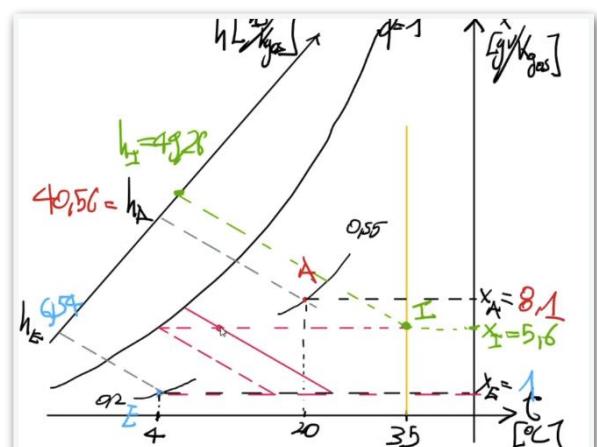
Dall'altra equazione scritta precedentemente ricaviamo anche  $\dot{Q}_{scambiato} = 17,15 \text{ kW}$

$$\text{Allora si ricava anche il coefficiente di scambio globale medio } U = 2,52 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$$

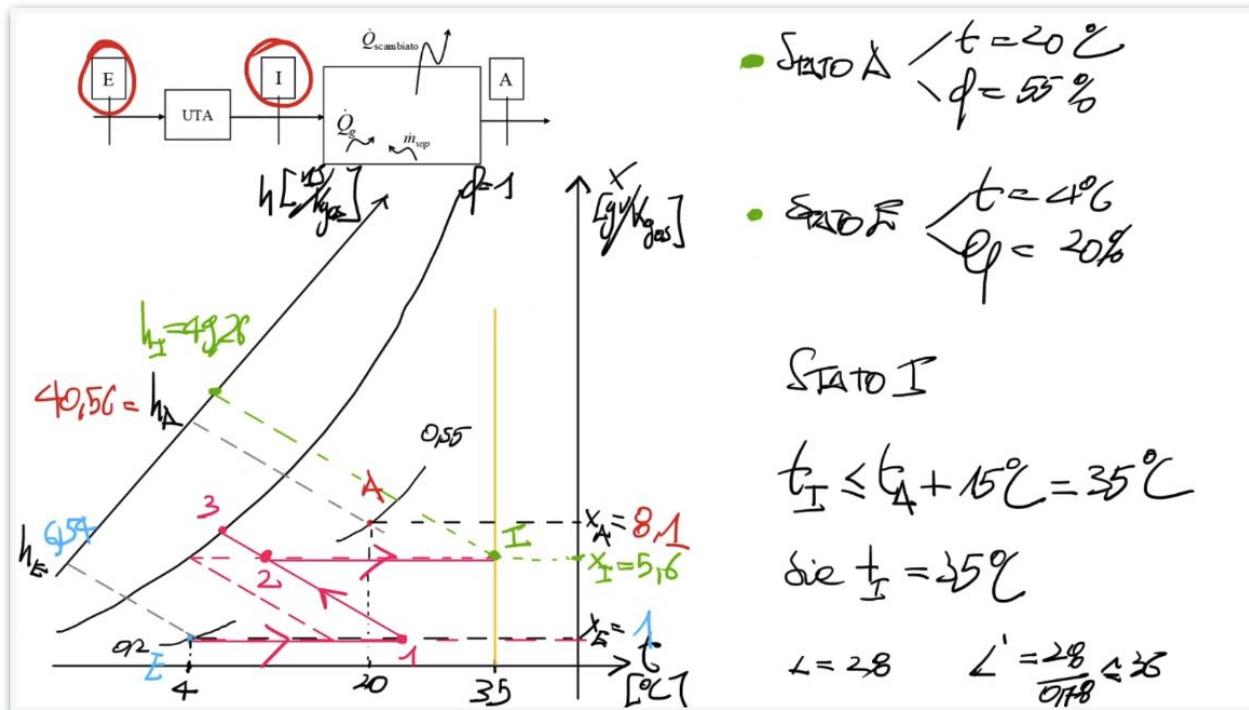
PER I CALCOLI COMPLETI FAR RIFERIMENTO AL FILE DI ESERCIZI 8.

Non ci resta che disegnare la trasformazione che ci porta da E ad I, ovvero alle condizioni di immissione tali che si verifica nella stanza la condizione A. Di mezzo c'è un saturatore adiabatico con efficienza di 0,78 e allora qualitativamente la trasformazione dopo l'uscita del saturatore affronta un riscaldamento isotitolo (tratteggio **rosso**) e in ingresso al saturatore ci muoviamo lungo l'isotitolo dell'ambiente esterno (tratteggio **rosso e nero**). Sappiamo che sarà il 78% della saturazione completa e allora qualitativamente (si disegna quella al 100% e ne calcoliamo la lunghezza come  $L' = \frac{L_{misurata}}{0,78}$  e la riportiamo correttamente) fermandoci allo stato di uscita precedentemente identificato.

Allora a pagina seguente la trasformazione completa.



Non avendo il diagramma e dovendolo fare tramite le relazioni conviene passare per i titoli.

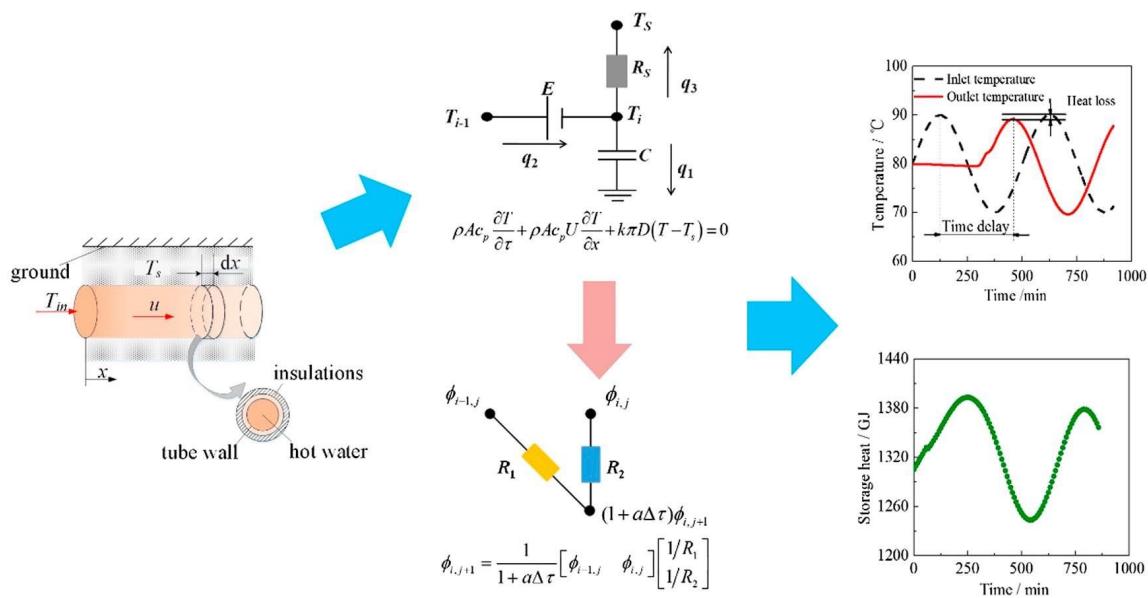


Abbiamo 1 in ingresso al saturatore, 2 uscita reale e 3 quella ideale e allora in questo caso vale per il saturatore

$$\epsilon = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{x_I - x_E}{x_3 - x_E} \text{ e allora ricaviamo } x_3 \text{ ricavando anche lo stato termodinamico 3} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_3 \\ \varphi_3 = 1 \end{array} \right. \implies h_3 = \dots$$

# FISICA TECNICA

Settimana 17



# Indice settimana 17

Indice settimana 17	2
martedì 19 gennaio 2021 - Approfondimento	3
Domande	3
<i>Domanda su esame 07/02/2017</i>	3
<i>Vademecum esami a distanza</i>	3
Scambi termici - osservazioni generali	4
<i>Esempio 1</i>	4
<i>Esempio 2</i>	7
<i>Esempio 3</i>	8

# Domande

Domanda su esame 07/02/2017

## FISICA TECNICA (9CFU – Ing. MEDICA)

Prova di esame del 07/02/2017

### Esercizi numerici

- Un impianto a tutta aria deve garantire in un ufficio openspace (alto 3 m, con pianta rettangolare 20x16 m<sup>2</sup>) una temperatura di 24°C, con umidità relativa del 45%. Il locale è esposto su tutti i lati, compreso il tetto, allo scambio con l'aria esterna, con un coefficiente di scambio globale medio pari a 2 Wm<sup>-2</sup>K<sup>-1</sup>. All'interno sono previste delle postazioni di lavoro ogni 8 m<sup>2</sup> con un impiegato ed un pc, con carichi termici rispettivamente di 70W e 15W. Il carico di vapore è pari a 90 g/h per ogni persona (calore latente di 2444 kJkg<sup>-1</sup>). In estate l'aria è prelevata all'esterno (30 °C di bulbo secco e 25°C di bulbo umido) ed il volume del locale deve essere rinnovato 11 volte in un'ora. Sapendo che il salto di temperatura tra l'aria all'interno del locale e quella immessa non deve essere superiore a 10°C, valutare se è necessario dover far ricorso ad una portata di ricircolo. Determinare, inoltre, le potenze scambiate nelle batterie di raffreddamento e post riscaldamento. Considerare un fattore di by-pass del 5% e riportare tutte le trasformazioni sul diagramma psicrometrico allegato.

## Vademecum esami a distanza

Fare riferimento al file su didattica web



Macroarea di Ingegneria  
Dipartimento di Ingegneria Industriale  
ING/IND-10 FISICA TECNICA INDUSTRIALE

### FISICA TECNICA (9CFU)

Laurea Magistrale in Ingegneria Medica // Anno Accademico 2020-2021

#### INDICAZIONI PER GLI ESAMI DI PROFITTO A DISTANZA

Gli esami di profitto che nell'anno accademico vigente dovranno essere sostenuti nella modalità a distanza seguiranno le indicazioni generali stabilite dall'ateneo.

Rispettando tale prescrizione, gli esami di FISICA TECNICA (9CFU), corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Medica, sono caratterizzati da uno scritto e dal successivo orale.

La data dello scritto a distanza è indicata sul portale Delphi e sulla pagina DidatticaWEB<sup>1</sup> dedicati al corso, nonché sul calendario esami del Corso di Studi in Ingegneria Energetica.

L'esame orale sarà fissato successivamente, in accordo con gli studenti.

#### Modalità di iscrizione

Si riportano alcuni passaggi:

- Iscriversi all'esame tramite Delphi, come consuetudine.
- Se ancora non lo si possiede, fare richiesta di account Teams temporaneo<sup>2</sup>.
- Se ancora non si è iscritti, fare richiesta di adesione al Team specifico del corso<sup>3</sup>.
- Entro la data dell'esame scritto il docente provvederà ad aggiungervi in una specifica Classe per gli Appelli all'interno del Team;
- Il giorno dell'esame scritto, connettersi almeno 15 minuti prima dell'orario stabilito per l'inizio della prova.

#### Modalità di partecipazione allo scritto

Per i requisiti minimi e la partecipazione agli esami si faccia riferimento al "Decreto Rettoriale n. 888/2020 - esami on line" ed in particolare al suo allegato "Esami di profitto on-line V 1.0", disponibili per gli studenti alla pagina

[https://web.uniroma2.it/module/name/Content/newlang/it/italiano/action/showpage/navpath/cov/content\\_id/89283/section\\_id/7781](https://web.uniroma2.it/module/name/Content/newlang/it/italiano/action/showpage/navpath/cov/content_id/89283/section_id/7781).

<sup>1</sup> DidatticaWEB del Corso: <https://didattica.uniroma2.it/informazioni/index/Insegnamento/190890-Fisica-Tecnica>

<sup>2</sup> Richiesta account Teams temporaneo [http://web.uniroma2.it/module/name/Content/newlang/it/italiano/action/showpage/navpath/TEA/content\\_id/89863/section\\_id/7781](http://web.uniroma2.it/module/name/Content/newlang/it/italiano/action/showpage/navpath/TEA/content_id/89863/section_id/7781)

<sup>3</sup> Teams del Corso: 2020-2021 GORI-8037786-FISICA\_TECNICA <https://teams.microsoft.com/l/team/19%3a45ac539ac3124f1f8d0e134f6264fdc%240thread.tacv2/conversations?groupId=17e2dbe0-75d6-445d-8818-1779c6d173a9&tenantId=24c5be2a-d764-40c5-9975-82d08ae47d0e>



Macroarea di Ingegneria  
Dipartimento di Ingegneria Industriale  
ING/IND-10 FISICA TECNICA INDUSTRIALE

In particolare, si richiede:

- ✓ la disponibilità ad attenersi a quanto stabilito dal docente prima e durante la prova;
- ✓ la necessità di tenere l'audio e la telecamera o webcam sempre accesi;
- ✓ la possibilità di essere inquadrati, ad esempio, secondo la disposizione di Figura 1.



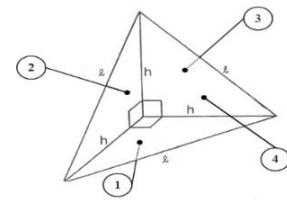
Figura 1 – Possibile inquadratura durante l'esame scritto

#### Alcuni dettagli sull'elaborazione della prova scritta

Il riferimento è sempre il documento "Esami di profitto on-line V 1.0". Si riportano qui alcuni aspetti:

- ✓ Il Testo di Esame sarà disponibile nella sezione "Attività" del Team del Corso, dopo che il docente avrà provveduto al riconoscimento dei partecipanti e al controllo delle "postazioni".
- ✓ Visto che durante la prova il Testo deve poter essere consultato e che allo stesso tempo bisogna garantire la continua inquadratura, come in Fig1, si consiglia di leggere sullo schermo del PC la traccia e di utilizzare il proprio cellulare o una webcam esterna per l'inquadratura, la quale deve mettere a fuoco necessariamente anche il monitor del PC.
- ✓ Tabelle eventuali saranno allegati al testo, senza la necessità che siano stampati.
- ✓ Gli studenti dovranno invece avere disponibili in formato cartaceo eventuali diagrammi necessari nella soluzione degli esercizi. Fare ricorso a quelli della raccolta pdf denominata "FTmed-Diagrammi per esame scritto a distanza", presente su Teams e in DidatticaWEB.
- ✓ La prova dovrà essere compilata a mano su fogli bianchi o a quadri procurati dallo studente/studentessa.
- ✓ Lo studente/studentessa avrà con sé il solo materiale per scrivere (penna e matita), una eventuale gomma, il righeggio e/o le quadre, la calcolatrice, oltre i citati fogli e la raccolta di diagrammi, tutti già presenti sul tavolo di lavoro.
- ✓ La consegna prevede che allo scadere del tempo disponibile lo studente/studentessa produca un file pdf del proprio elaborato, ottenuto mediante scanner (se disponibile) o software scaricabili gratuitamente sul proprio dispositivo. Eventualmente, sarà sufficiente anche la semplice foto in un qualche formato "immagine".
- ✓ Lo studente/ studentessa provvederà alla consegna come restituzione dell'attività Teams e farà fede la marca temporale affissa dal programma.

Cordiali saluti, Il docente.



$$F_{1-2}, F_{1-3}, F_{1-4} = ?$$

CHIUSURA SU 1

$$\left. \begin{array}{l} F_{1-1} + F_{1-2} + F_{1-3} + F_{1-4} = 1 \\ F_{1-1} = 0 \text{ perché piana} \\ \text{con } F_{1-2} = F_{1-3} \text{ per simmetria} \end{array} \right\} \Rightarrow 2F_{1-2} + F_{1-4} = 1$$

$$\Rightarrow F_{1-2} = \frac{1 - F_{1-4}}{2}$$

RECIPROCA

$$A_1 F_{1-4} = A_4 F_{4-1} \Rightarrow F_{1-4} = \frac{A_4}{A_1} \cdot F_{4-1}$$

## Scambi termici - osservazioni generali

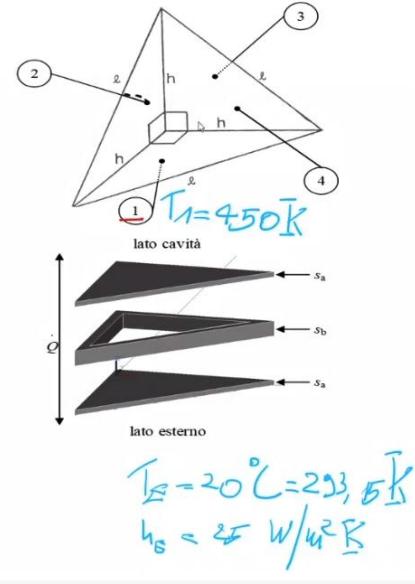
Andiamo a vedere alcuni esercizi concentrandoci non tanto sullo svolgimento in se quanto sul come impostare la risoluzione.

### Esempio 1

In questo primo esercizio abbiamo uno scambio termico tra le facce per irraggiamento nella cavità e poi c'è anche uno scambio esterno:

Nella struttura cava riportata in figura, con  $h$  pari a 0.5 m, sia "1" la faccia di base ( $h-h-l$ ) alla temperatura di 450 K, le due laterali uguali "2" e "3" siano alle temperature rispettivamente di 200 °C e 250 °C, e sia denominata con "4" la terza faccia laterale ( $l-l-l$ ). La superficie di base ha una struttura come segue: a partire dalla faccia interna della cavità si incontra uno spessore  $s_a$  = 2 cm con materiale avente condutività  $\lambda_m$  = 0.7 Wm⁻¹K⁻¹, uno spessore  $s_b$  = 6 cm dello stesso materiale, con una parte cava ( $h_b-h_b-l_b$ , con  $h_b=0.4$  m) contenente aria ( $\lambda_{aria} = 0.026 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ) ed infine un altro spessore  $s_a$  = 2 cm dello stesso materiale. L'ambiente esterno sia a 20 °C ( $h_e = 25 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$ ). Determinare il fattore di vista  $F_{1-2}$ , il flusso termico (in watt) netto scambiato dalla superficie di base con la cavità e la temperatura a cui si trova la superficie 4. Supporre nere tutte le facce e la monodirezionalità dello scambio termico

$$\begin{aligned} F_{1-2} &=? \\ Q_{1-2} &=? \\ F_{1-4} &=? \end{aligned}$$



Il testo ci chiede il fattore di vista tra 1 e 2, la temperatura di 4 e il  $\dot{Q}$  scambiato tra 1 e il resto della cavità.

Per il fattore di vista ci bastano alcune considerazioni geometriche.

Per il  $\dot{Q}$  tra 1 e la cavità dobbiamo considerare che 1 scambia anche con l'esterno.

È chiaro che la direzione dello scambio termico è verso l'esterno in quanto il  $T_1$  è maggiore.

Partiamo allora dal bilancio sulla faccia 1 considerando l'energia per sistemi chiusi dividendo per l'unità di tempo:

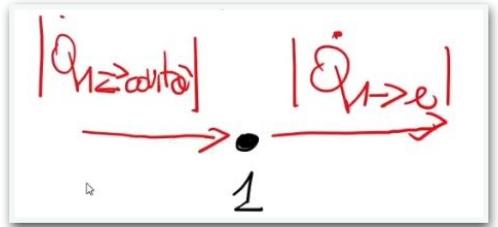
$$\dot{Q} - \dot{L} = \Delta \dot{U} + \Delta \dot{E}_p + \Delta \dot{E}_c$$

Su questa espressione possiamo anche fare delle semplificazioni considerando che non ci sono variazioni di energia potenziale e meccanica, non ci sono scambi di lavoro e si suppone anche vera la stazionarietà (almeno che non è scritto diversamente nel testo) che quindi ci porta a dire che anche  $\Delta \dot{U} = 0$ .

Allora si riduce a  $\sum \dot{Q}_{scambiati} = 0$

Sulla faccia 1 abbiamo il calore che va verso l'esterno che chiaramente va verso l'esterno ( $T_1 > T_E$ ) e allora necessariamente se questo se ne va ci deve essere un altro  $\dot{Q}$  entrante, ovvero:

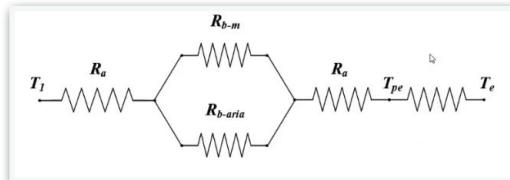
$$|\dot{Q}_{1 \leftrightarrow cavità}| = |\dot{Q}_{1 \leftrightarrow esterno}|.$$



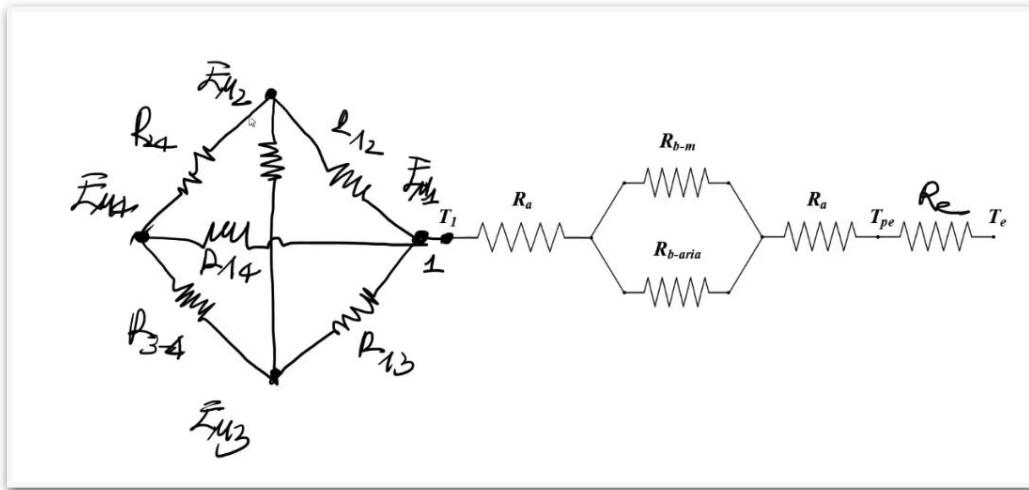
In questo tipo di esercizi spesso conviene passare per l'analogia elettrica ovvero farsi prima il circuito termico e poi risolverlo con le regole proprie dei circuiti elettrici in quanto le leggi sono molto simili (potenziale, flusso e resistenza).

Abbiamo 1 che scambia per conduzione in a, in b abbiamo conduzione parte nel materiale e parte in aria, poi nuovamente uno scambio per conduzione e infine la convezione all'esterno.

Ovvero con l'analogia elettrica abbiamo (trascuriamo la convezione nell'intercapedine interna)



Nella cavità interna i potenziali sono dovuti ai poteri emissivi delle superfici nere che sono collegate tra loro da delle resistenze.



Per completare i potenziali potremmo avere dei generatori (o messe a terra) sulle superfici che a loro volta possono scambiare in qualche modo.

Si ricordi che il potere emissivo è  $E_n(T) = \sigma T^4$   $\left[ \frac{W}{m^2} \right]$ , dove  $\sigma$  è la costante di Boltzmann.

In condizioni stazionarie per questi circuiti applichiamo le leggi di Kirchhoff riducendo le resistenze in serie/parallelo. Spesso è comodo scrivere l'equilibrio ai nodi nonché un bilancio ai nodi.

Quindi andando a risolvere il calore che da 1 va verso l'esterno abbiamo i potenziali  $T_1$  e  $T_E$  e possiamo ricondurre tutto il circuito ad un'unica resistenza  $R_{TOT} = R_a + R_p + R_a + R_e$  con  $\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_{b-m}} + \frac{1}{R_{b-aria}} \Rightarrow R_p = \frac{R_{b-m} \cdot R_{b-aria}}{R_{b-aria} + R_{b-m}}$ .

Le resistenze termiche sono sempre inversamente proporzionali alla superficie di scambio:

$$R_a = \frac{s_a}{\lambda_m A_1}$$

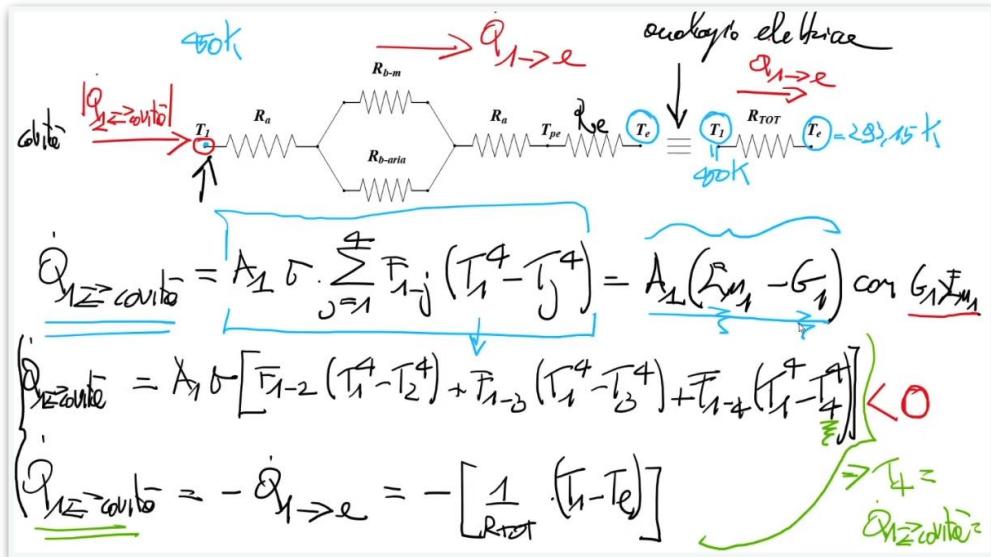
$$R_{b-aria} = \frac{s_b}{\lambda_{aria} A_{aria}} \text{ e } R_{b-aria} = \frac{s_b}{\lambda_m (A_1 - A_{aria})}$$

$$R_e = \frac{1}{h_e A_1}$$

Lo stesso calore sarà lo stesso scambiato con la cavità ovvero:  $\dot{Q}_{1 \leftrightarrow \text{cavità}} = A - 1\sigma \sum_{j=1}^4 F_{1-j} (T_1^4 - T_j^4) = A_1 (E_{n1} - G_1)$

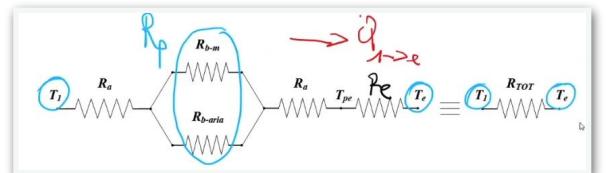
con  $G_1 > E_{n1}$

Cioè esplicitandola ricaviamo  $T_4$  e  $\dot{Q}_{1 \leftrightarrow \text{cavità}}$  (quest'ultimo può essere maggiore, minore o uguale a zero).



Per i fattori di vista non faremo alcuna considerazione:

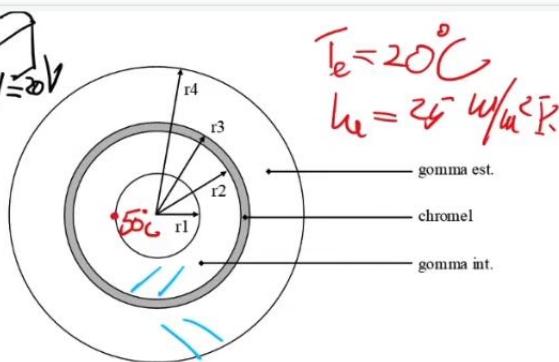
La struttura che abbiamo rappresentato potrebbe richiamare la struttura della parete di un locale da condizionare e quindi dobbiamo calcolare il calore che dall'interno va verso l'esterno (nel caso invernale) o che dall'esterno va verso l'interno (nel caso estivo).



**Esempio 2**

Vediamo un altro esempio

Nell'ipotetica struttura cilindrica, riportata in figura, si vuole mantenere la parete al raggio  $r_1$  ad una temperatura di  $50^\circ\text{C}$ . Determinare il flusso termico scambiato dalla parete, sapendo che la struttura ha una lunghezza di 50 m e che alla sezione di chromel ( $\chi_{elettrico} = 1.1 \cdot 10^{-6} \Omega \text{m}$ ) è applicata una differenza di potenziale pari a 20 V. Il cilindro è immerso in un ambiente esterno con aria a  $20^\circ\text{C}$  ed un coefficiente di scambio convettivo pari a  $25 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ . Le dimensioni sono  $r_1 = 0.01 \text{ m}$ ,  $r_2 = 0.02 \text{ m}$ ,  $r_3 = 0.022 \text{ m}$  e  $r_4 = 0.035 \text{ m}$ , mentre per le conducibilità delle due gomme valgono  $k_{\text{gomma int}} = 0.2 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  e  $k_{\text{gomma est}} = 0.08 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ . Si trascuri la resistività termica dello spessore di chromel.



$$R_{gi} = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi L \cdot k_{gi}}$$

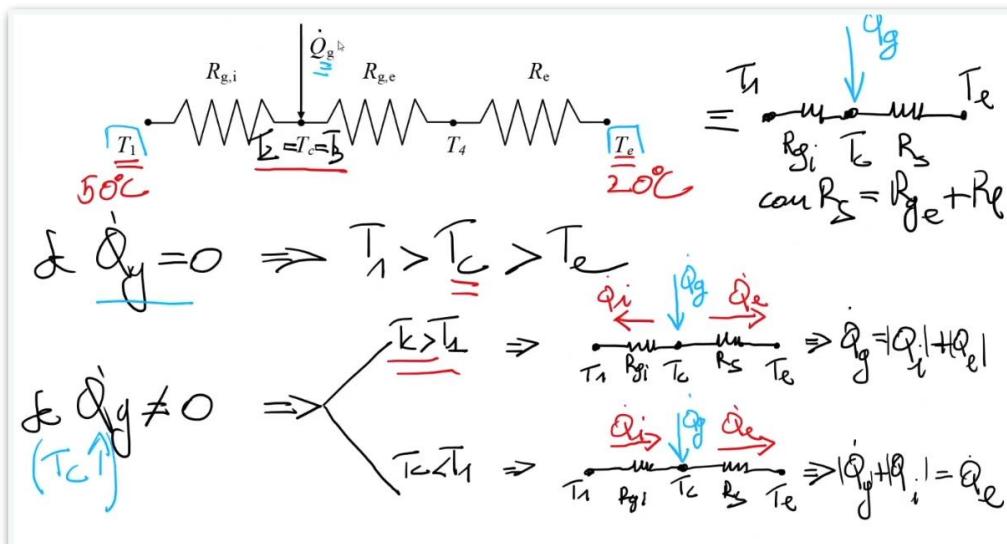
$$R_{ge} = \frac{\ln \frac{r_4}{r_3}}{2\pi L \cdot k_{ge}}$$

$$R_e = \frac{1}{h_e \cdot 2\pi r_4 \cdot L}$$

Siamo sempre in condizioni stazionarie ma si aggiunge un calore generatore. In figura la sezione del tubo.

Andiamo a riportare il circuito termico:

Considerando un calore generato nullo allora il flusso termico andrebbe da  $T_1$  verso l'esterno.



Abbiamo anche la temperatura del Chromel,  $T_2$  e  $T_3$ , ma essendo la conducibilità infinita e quindi la resistività termica trascurabile allora  $T_2 \equiv T_3$  e sarà per noi la temperatura del Chromel.

**NOTA:** CHROMEL È IL NOME COMMERCIALE DI UNA LEGA A BASE DI NICHEL, USATA PRINCIPALMENTE COME POLO POSITIVO NELLE TERMOCOPIE DI TIPO K, ABBINATO ALL'ALUMEL. UNA VARIANTE DEL CHROMEL (IL CHROMEL-R) È STATA UTILIZZATA DALLE LITTON INDUSTRIES COME STRATO PIÙ ESTERNO NELLA REALIZZAZIONE DI ALCUNE ZONE DELLE TUTE SPAZIALI DEL PROGRAMMA APOLLO. IN PARTICOLARE È STATO UTILIZZATO PER RIVESTIRE LE ZONE IN CUI ERA NECESSARIA UNA ELEVATA RESISTENZA ALLA ABRASIONE (AD ESEMPIO PER I GUANTI E PER PARTE DEGLI SCARPONCINI) [DA WIKIPEDIA]

Nel momento in cui c'è calore generato  $\dot{Q}_g$  questo è un flusso che arriva sul nodo del Chromel sul quale dobbiamo poter scrivere un'equazione di bilancio. Sicuramente la temperatura del Chromel cresce ma potrebbe essere maggiore di  $T_1$  o continuare ad essere inferiore. Se è maggiore allora il calore avrà una direzione con una sua equazione di bilancio. Se invece rimane minore allora entrambi i calori andranno verso l'esterno e si arriva ad una seconda equazione di bilancio.

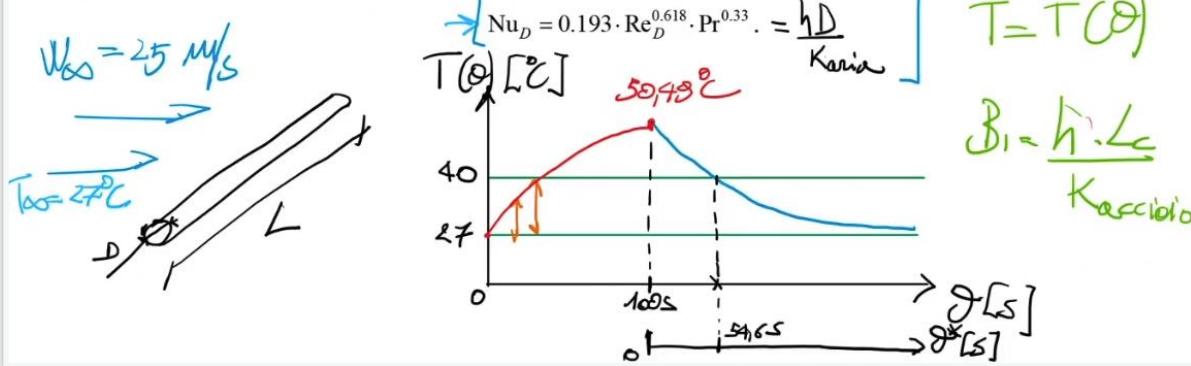
Il calore generato si ricava per effetto Joule.

### Esempio 3

In questo esercizio c'è anche la dipendenza dal tempo.

Quando abbiamo affrontato la teoria abbiamo utilizzato una semplificazione, ovvero di poter usare dove possibile l'ipotesi di parametri concentrati. In generale la temperatura di un corpo varia sia nel tempo che nell'estensione del corpo stesso ma facendo l'ipotesi di parametri concentrati stiamo dicendo che la temperatura cambia nel tempo ma è omogenea nel sistema considerato e quindi un punto è rappresentativo dello stato del sistema.

Un filo di acciaio AISI 304 ( $D = 15 \text{ mm}$  e  $L = 30 \text{ m}$ , resistività elettrica  $\chi = 6.9 \cdot 10^{-7} \Omega \cdot \text{m}$ ,  $\rho = 7900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $k = 14.9 \text{ W m}^{-1} \text{K}^{-1}$  e  $c_p = 0.477 \text{ kJ kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ ) è inizialmente in equilibrio termico con un flusso di aria che lo investe, sulla sua sola superficie laterale, con una velocità di  $25 \text{ ms}^{-1}$  ed una temperatura di  $27^\circ\text{C}$  ( $v_{aria} = 15.68 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$ ,  $\alpha_{aria} = 22.14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$ ,  $\kappa_{aria} = 0.02622 \text{ W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ ). Successivamente, per un tempo di 100 secondi, è applicata ai capi del filo una differenza di potenziale elettrico pari a 30 V. Cessato il passaggio di corrente, determinare dopo quanto tempo la temperatura del filo è pari a  $40^\circ\text{C}$ . Verificare le eventuali ipotesi fatte per la risoluzione del problema e supporre valida la seguente correlazione empirica:



Consideriamo quindi un riferimento  $\theta$  che indica il tempo e la temperatura funzione del tempo. La temperatura inizialmente cresce in funzione del passaggio di corrente (effetto Joule) poi stacchiamo la corrente elettrica e quindi ci ritroviamo con un filo più caldo dell'ambiente esterno che quindi tenderà a raffreddare e asintoticamente tende alla temperatura dell'ambiente indisturbato ( $27^\circ\text{C}$ ).

Facciamo l'ipotesi che in questo andamento la temperatura sia solo funzione del tempo  $T(\theta)$  e avendo solo la convezione all'esterno andiamo a verificare il numero di Biot.

Riportati sia il numero di Biot che il numero di Nusselt.

Il **numero di Biot**  $Bi = \frac{h \cdot L_c}{k_{acciaio}}$  è il rapporto tra la resistenza termica interna di natura condutiva e quella termica esterna, in

questo caso di natura convettiva. Cioè il numero di Biot ha senso solo se la resistenza esterna è di natura convettiva.  $h$  è il coefficiente di scambio convettivo,  $L_c$  è una lunghezza caratteristica del materiale ovvero  $L_c = \frac{\text{volume}}{\text{superficie che scambia}}$ .

Il **numero di Nusselt** è un numero adimensionale ed è il rapporto tra lo scambio termico per convezione rispetto allo scambio termico per sola conduzione  $Nu_D = \frac{h \cdot D}{k_{aria}}$ . Compare il  $k$  del fluido mentre  $h$  è sempre lo stesso. Il pedice del Nusselt fa riferimento alla dimensione caratteristica per il quale è calcolato.

Hanno una definizione simile ma il Biot lo si utilizza per valutare se la resistenza interna condutiva è trascurabile rispetto quella esterna convettiva in un problema che potrebbe essere a parametri concentrati (se il Biot è piccolo) mentre il numero di Nusselt è un rapporto tra lo scambio convettivo e lo scambio conduttivo dal lato del fluido.

Dal lato dell'aria ci sarebbe solo scambio conduttivo ovvero  $Nu = 1$  quando il fluido è fermo.

Per partire nel risolvere questo esercizio abbiamo la relazione empirica per il numero di Nusselt tipico della convezione forzata (c'è la velocità  $w$  imposta dall'esterno, mentre nella convezione naturale dipende sempre dal numero di Prandtl  $Pr$  ma anche dal numero di Grashof  $Gr$ ).

Quindi si ricava il  $Bi = 0,0385 < 0,1$  ed essendo più piccolo di 0,1 l'ipotesi di parametri concentrati è accettabile.

Quindi si vuole vedere se è possibile utilizzare i parametri concentrati ovvero se la resistenza interna è inferiore a quella interna e mentre quella interna è conduttiva quella esterna dipende. Spesso è convettiva e quindi si ricava il Biot e se questo è inferiore a 0,1 l'ipotesi è accettabile.

Poi si parte dal bilancio per il sistema termodinamico (in questo caso il sistema chiuso ovvero il cilindro). Essendo in condizioni non stazionarie  $\Delta U \neq 0$

$$\bullet \quad B_1 = \frac{h \cdot V / A}{K_{\text{esterno}}} = 0,0385 < 0,1 \Rightarrow \text{Ipotesi accettabile}$$

$\delta Q - \delta L = dU + dE_p + dE_g \Rightarrow \delta Q = dU$

$$\dot{Q}_g = hA(T(\theta) - T_\infty) + mc \frac{dT(\theta)}{d\theta}$$

$$\frac{dT(\theta)}{d\theta} + \frac{hA}{mc} T(\theta) = \frac{hA T_\infty}{mc} + \frac{\dot{Q}_g}{mc}$$

sia  $\zeta = \frac{mc}{hA}$   $\triangleq$  costante di tempo

$$\frac{dT(\theta)}{d\theta} + \frac{1}{\zeta} T(\theta) = \frac{1}{\zeta} T_\infty + \frac{\dot{Q}_g}{mc}$$

$$\tau = \frac{m \cdot c_p}{h \cdot A} = 92.36 \text{ s}$$

$$\delta Q = dU$$

Inoltre nel  $\delta Q$  non c'è solo il calore scambiato per convezione con l'esterno ma anche un calore generato con il passaggio di corrente.

Quindi per i primi 100 secondi abbiamo un calore generato che fa salire la temperatura e nel mentre c'è anche lo scambio convettivo con l'esterno.

Allora viene fuori un'equazione differenziale al primo ordine a coefficienti costanti che sappiamo come risolvere.

**NOTA**  
Risoluzione delle equazioni differenziali del primo ordine

Sia  $y'(x) + a(x) \cdot y(x) = f(x)$

La soluzione è  $y(x) = e^{-\int a(x) dx} \int e^{\int a(x) dx} f(x) dx + C e^{-\int a(x) dx}$  + condizioni al contorno  
 Nella quale  $y_{\text{omogenea}} = C e^{-\int a(x) dx}$   $y_{\text{particolare}} = e^{-\int a(x) dx} \int f(x) dx$  con la costante  $C$  ricavata dalla condizione al contorno

Se i coefficienti sono costanti, allora  $y'(x) + a \cdot y(x) = f(x)$   
 La soluzione è  $y(x) = e^{-ax} \int e^{ax} f(x) dx + C e^{-ax}$  + condizioni al contorno

$$T(\theta) + \frac{1}{\zeta} T(\theta) = \underline{f(\theta)}$$

Tornando all'esercizio...  
 La soluzione dell'equazione omogenea associata è  $t_{\text{om}}(\theta) = C_1 e^{-\frac{\theta}{\tau}}$   
 La soluzione particolare è data dalla  $t_p(\theta) = e^{-\frac{\theta}{\tau}} \int e^{\frac{\theta}{\tau}} \left( \frac{1}{\tau} t_\infty + \frac{\dot{Q}_g}{m \cdot c_p} \right) d\theta = \tau \left( \frac{1}{\tau} t_\infty + \frac{\dot{Q}_g}{m \cdot c_p} \right)$

Or  
 $y_m$  è soluzione di  $y'(x) + a(x) \cdot y(x) = 0$   
 $y_p$  è soluzione di  $y'(x) + a(x) \cdot y(x) = f(x)$

Dunque, la soluzione finale sarà

$$\begin{cases} t(\theta) = t_{\text{om}}(\theta) + t_p(\theta) = C_1 \cdot e^{-\frac{\theta}{\tau}} + t_\infty + \frac{\dot{Q}_g}{m \cdot c_p} \tau \\ \text{con } t|_{\theta=0} = C_1 + t_\infty + \frac{\dot{Q}_g}{m \cdot c_p} \tau = t_0 = t_\infty = 27^\circ \end{cases}$$

Dopo i primi 100 secondi stacchiamo la resistenza elettrica e quindi il sistema tende a raffreddarsi e diminuisce la sua energia interna poiché sta scambiando calore e quindi si arriva ad una nuova equazione di bilancio dove scompare il calore generato.

Dunque, la soluzione finale sarà

$$\begin{cases} t(\vartheta) = t_{\text{ini}}(\vartheta) + t_p(\vartheta) = C_1 \cdot e^{-\frac{\vartheta}{\tau}} + t_\infty + \frac{\dot{Q}_g}{m \cdot c_p} \tau \\ \text{con } t|_{\vartheta=0} = C_1 + t_\infty + \frac{\dot{Q}_g}{m \cdot c_p} \tau = t_0 = t_\infty \end{cases}$$

Dalle precedenti

$$C_1 = t_0 - t_\infty - \frac{\dot{Q}_g}{m \cdot c_p} \tau = -\frac{\dot{Q}_g}{m \cdot c_p} \tau$$

quindi

$$t(\vartheta) = t_\infty + \left( \frac{\dot{Q}_g}{m \cdot c_p} \tau \right) \left[ 1 - e^{-\frac{\vartheta}{\tau}} \right] = 27 + 35.52 \left( 1 - e^{-\frac{\vartheta}{92.36}} \right)$$

Dopo 100 secondi la temperatura vale

$$t(\vartheta = 100) = 27 + 35.52 \left( 1 - e^{-\frac{100}{92.36}} \right) = 50.49^\circ\text{C}$$

$$T(\vartheta = 0) = 50,49^\circ\text{C}$$

Nuove esigenze di bilancio

$$m \cdot c_p \frac{dT(\vartheta^*)}{d\vartheta^*} + hA(T(\vartheta^*) - T_\infty) = 0$$

$$\ln \frac{T(\vartheta^*) - T_\infty}{T(\vartheta=0) - T_\infty} = - \frac{hA}{mc} \vartheta^*$$

$$\vartheta^* = - \frac{mc}{hA} \ln \frac{T(\vartheta^*) - T_\infty}{T(\vartheta=0) - T_\infty}$$

$$\vartheta^* = -2 \cdot \ln \frac{40 - 27}{50.49 - 27} = 54,65$$