群スキームの基礎

馬杉和貴

2025 年 7 月 11 日

この記事において、以下の notation を固定する。

- S はスキームである。
- G は S 上の群スキームである。
- $\mu_G \colon G \times_S G \to G$ は G の群構造のもとでの乗法射である。
- $c_G \colon G \to G$ は G の群構造のもとでの逆元射である。
- $e_G \colon S \to G$ は G の群構造のもとでの単位元射である。
- pr_i という記号は、(文脈上適切な意味においての) 第 i-成分への射影をあらわす。
- $\sigma_G \colon G \times_S G \to G \times_S G$ を、(pr_1, μ_G) なる同型射とする。
- k を体とする。また、A という記号は、local Artin 環をあらわすものとし、A という記号が文脈中あらわれるとき、k は A の剰余体であるものとする。
- スキーム X について、X 上スキームの圏を Sch_X と表記する。また、X 上の被約なスキームのなす圏を $\mathsf{Sch}_{X,\mathrm{red}}$ と表記する。

1 section 1 (Provisinal title)

cf. SGA3, Exposé VI.

命題 1. *G を S 上の局所有限表示平坦群スキームとする。G が S 上 geometrically reduced であることと、smooth であることは同値である。*

証明. S を代数閉体 k として議論をしてよい。smooth ならば reduced であることは明らかである。よって、逆方向の力学を確認すればよい。

G の任意の閉点 x について、G が x で regular であることを示す。k の代数閉性より、G がある閉点のもとで regular であることを示せばよい。ここで、G の reducedness は、generically smooth であることを導く。したがって、これは所望の主張を導く。 □

命題 2. *G を A 上の局所有限表示平坦群スキームとする。このとき、G は Cohen-Macaulay であり、さらに、任意の点 $x \in G$ について $\mathcal{O}_{G,x}$ のパラメータ系 $a_1, \ldots, a_n$ であって $\mathcal{O}_{G,x}/(a_1, \ldots, a_n)$ が A 上有限自由加群となるようなものが存在する。*

証明. これらの主張は、A がその剰余体である場合に帰着できる。また、k 上本質的に有限型の環 A に対して、その Cohen-Macaulay 性は、k の有限拡大体 K に対する $A \otimes_k K$ の Cohen-Macaulay 性と同値であ

る。このことに着目すれば、平行移動に関するトリックを用いて、ある閉点に対してその Cohen-Macaulay 性を確認すればよい。しかしこのことは、次の一般的なスキーム論の補題により確認される。 □

補題 3. 体 k 上の非空な局所有限型スキーム X について、ある閉点 $x \in X$ が存在して、$\mathcal{O}_{X,x}$ は *Cohen-Macaulay* である。

証明. X を affine 開集合に取り替えてよい。$X = \mathrm{Spec}(B)$ として、B の次元に関する induction をまわす。$\dim B = 0$ のときは明らかである。

$\dim B > 0$ のとき、B の非単元であって、かつ非零因子であるような元が存在するため (仮定を用いている)、そのような元 $f \in B$ をとる。$B/(f)$ の次元は B の次元よりも小さいので、帰納法の仮定により、ある閉点 $y \in \mathrm{Spec}(B/(f))$ が存在して、$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B/(f)),y}$ は Cohen-Macaulay である。ここで、y を X に引き戻すと、$\mathcal{O}_{X,y}$ は Cohen-Macaulay であることがわかる。 □