AlgGeomBasic

馬杉和貴

2025 年 7 月 14 日

　このノートは、著者の研究活動上のメモ・備忘録としての側面をもつものである。著者は (執筆時点においては) 遠アーベル幾何学を専攻する修士課程の学生である。したがって、内容については、遠アーベル幾何学を習得するにあたって必要となった、代数幾何学に関する (一般的な) 基礎事項をまとめたものとなる。また、スキーム論についての記述がいくらか大雑把なものとなることがあるが、これは内容の不正確性あるいは informality をいうものではない (同時に、一応 Appendix としてスキーム論の記述を設けているが、必ずしも参照をおこなうとは限らず、むしろことわりなく内容を用いることが多い)。あるいは本記事の読みやすさ・理解しやすさについては、(もちろん目的に付随して一定の配慮はめざすところではあるものの) 保証するものではない。

目次

1 algebraic space

2　group scheme

この section においては、群スキームに関する基本的な事実とその証明を列挙的にまとめる。内容構成は、したがって、特に非体系的である。

以下、次の notation を以下固定し、特別の言及のない限りは、文脈はこの notation に従うものとする:

- S は scheme とする。
- G は S-group scheme とする。
- μ_G (あるいは文脈上明らかな場合は μ) は G の乗法射を表す。
- 1_G (あるいは文脈上明らかな場合は 1) は G の単位元を表す。
- i_G (あるいは文脈上明らかな場合は i) は G の逆射を表す。
- k は体とする。
- A, R は環であるとする。

2.1　base 上 geometrically reduced な平坦群スキームは smooth である

base 上 geometrically reduced な平坦群スキーム G/S が smooth であることをみる。このためには、(flatness より) fiberwise に確認すればよいため、base S を代数閉体 k としてよい。このとき、reducedness の仮定より、G は generically smooth である。このとき、適当な閉点のもとでの平行移動をおこなうことによって、G が smooth であることが理解される。

2.2　標数 0 のスキーム上の平坦群スキームは smooth である

さきと同様の帰着の方法によって、標数 0 の代数閉体 k 上で議論をおこなえばよい。

群スキーム G/k について、その微分加群 $\Omega_{G/k}$ は locally free であるから、これは G の smoothness をみちびく (これは、Stacks Project, Tag 04QN などを参照されたい)。

2.3　アーベルスキームは可換群スキームである

定義 2.1. アーベルスキームとは、群スキームであって、かつ *smooth, proper, geometrically connected* なものをいう。

命題 2.2. アーベルスキーム $A \to S$ は、可換群スキームである。

証明. smooth かつ proper ということから、Noetherian approximation の技術を用いて、S を Noetherian の場合に帰着させることができる。これは、次の rigidity lemma によって、S が体の場合に帰着される。しかしこの場合はアーベル多様体の一般論から従う。 □

補題 2.3. S を *connected scheme* とする。$f\colon X \to Y$ なる S-スキームの射について、X が S 上 *proper, flat* であるとする。また、任意の $s \in S$ について、$\mathrm{H}^0(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) = \kappa(s)$ であったとする。このとき、ある一点 $s_0 \in S$ において $f(X_s)$ が *set-theoretical* に一点であるならば、ある $Y \to S$ の *section* が存在して、f はその *section* によって定義される。

証明. $X \to S$ なる構造射を p とよぶ。descent theory の援用によって、p が section $t\colon S \to X$ をもつと仮定してよい。このとき、$f \circ t \circ p : X \to S \to X \to Y$ なる方法で定義される射と、f との比較をおこなう。

S が一点の場合に示されたとして、以下議論を進める。$Z \subset X$ を、$f = f \circ t \circ p$ を充たす X の閉部分集合とする。前提は、s_0 に集中する S 上の Artin 閉部分スキーム T について、Z が $p^{-1}(T)$ を含むことを意味する。したがって、(簡単なスキーム論的考察から、) Z が X_{s_0} の開近傍を含むことが理解される。p の properness から、これはある s_0 の近傍 U において、Z が $p^{-1}(U)$ を含むことを意味する。この議論によって、$s \in S$ であって $X_s \subset Z$ を充たすもの全体の集合を V とおくと、V は open であることが理解される。しかし、p の flatness より、V の補集合もまた open であると理解される。したがって、S の連結性によって所望の結論を得る。

よって、S が Artin local である場合に帰着された。section の存在を示すために、実際に section を構成する。位相空間の射としては、あたりまえのものを充てればよい。また、$t\colon S \to Y$ なる topological section について、$\mathcal{O}_Y \to t_*(\mathcal{O}_S)$ なる層の射には、$\mathcal{O}_Y \to f_*(\mathcal{O}_X) = t_*(p_*(\mathcal{O}_X)) = t_*(\mathcal{O}_S)$ として得られるものを充てる。この方法によって得られた環付き空間の射は、スキームの射となっており、また所望の条件を充たす。 □

2.4 連結成分

命題 2.4. k を体、S を Spec$k$ とする。G を *connected S-group scheme* とする。このとき、G は *geometrically connected* である。

証明. G が S 上の rational point をもつ (単位元 1_G は rational point である（！）) ことに注意すれば、scheme 論の簡単な exercise である。 □

補題 2.5. k を体、S を Spec$k$ とする。G を S 上 *locally of finite type* な *S-group scheme* とする。このとき、G の単位元を含む連結成分は *clopen subgroup* となる。

証明. G は locally Noetherian, 特に locally connected であるため、任意の連結成分は open である。したがって、補題は明らかである。 □

補題 2.6. k を体、S を Spec$k$ とする。G の単位元を含む連結成分は *closed subgroup* となる。

証明. 明らかである。 □

命題 2.7. k を体、S を Spec$k$ とする。G を S 上 *locally of finite type* な *S-group scheme* とする。このとき、G の連結成分はいずれも *geometrically irreducible, of finite type* であり、かつすべておなじ次元をもつ。

証明. G の単位元をふくむ連結成分を G_0 とよぶ。このとき、命題のすべての主張は、G_0 の場合に帰着される。したがって、以下 G を connected として議論をおこなう。

G が irreducible であることをみるためには、k を代数閉体としてよい。このとき、G の被約化 G_{red} もまた k 上の群スキームとなるが、これは smooth である。よって、G の下部位相空間は G_{red} の下部位相空間と標準的に同相であるから、これは G の irreducible をみちびく。

G の of finite type 性のためには、G が quasi-compact であることをみればよいが、これは次の scheme 論的な補題によって確認できる。 □

補題 2.8. k を体、S を Spec$k$ とする。G を S-*group scheme* とする。このとき、U, V が G の *dense open subset* であるならば、$\mu|_{U\times_S V}\colon U\times_S V\to G$ は *surjective* である。

証明. (体拡大が universally open であること、あるいは平行移動に関するトリックなどをおもいだせば、) $\mu|_{U\times_S V}$ の像が単位元 1 を含んでいることを確認すればよいことが理解される。しかし、U, V が dense open subset であることから、特に $U\cap V^{-1}$ は非空な交差をもつ。したがって、これは補題を示す。 □

2.5 Cohen-Macaulay 性

命題 2.9. G を A 上の局所有限表示平坦群スキームとする。このとき、G は *Cohen-Macaulay* であり、さらに、任意の点 $x\in G$ について $\mathcal{O}_{G,x}$ のパラメータ系 $a_1,\dots,a_n$ であって $\mathcal{O}_{G,x}/(a_1,\dots,a_n)$ が A 上有限自由加群となるようなものが存在する。

証明. これらの主張は、A がその剰余体である場合に帰着できる。また、体 k 上本質的に有限型の環 A に対して、その Cohen-Macaulay 性は、k の有限拡大体 K に対する $A\otimes_k K$ の Cohen-Macaulay 性と同値である。このことに着目すれば、平行移動に関するトリックを用いて、ある閉点に対してその Cohen-Macaulay 性を確認すればよい。しかしこのことは、次の一般的なスキーム論の補題により確認される。 □

補題 2.10. 体 k 上の非空な局所有限型スキーム X について、ある閉点 $x\in X$ が存在して、$\mathcal{O}_{X,x}$ は *Cohen-Macaulay* である。

証明. X を affine 開集合に取り替えてよい。$X=\mathrm{Spec}(B)$ として、B の次元に関する induction をまわす。$\dim B=0$ のときは明らかである。

$\dim B>0$ のとき、B の非単元であって、かつ非零因子であるような元が存在するため (仮定を用いている)、そのような元 $f\in B$ をとる。$B/(f)$ の次元は B の次元よりも小さいので、帰納法の仮定により、ある閉点 $y\in\mathrm{Spec}(B/(f))$ が存在して、$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B/(f)),y}$ は Cohen-Macaulay である。ここで、y を X に引き戻すと、$\mathcal{O}_{X,y}$ は Cohen-Macaulay であることがわかる。 □

2.6 次元等式

2.7 群スキームに関するスキーム論的補題

2.8 商構成

2.9 可換群スキームのなす圏はアーベル圏である

2.10 Chevalley の定理

2.11 semi-abelian scheme の subquotient は semi-abelian である

2.12 semi-abelian scheme の Galois covering は semi-abelian scheme である

3 Picard scheme

3.1 全般的事項

scheme X について、$\mathrm{Pic}(X)$ は X 上の line bundle の同型類全体のなすアーベル群として定められる。ここで、自然に $\mathrm{Pic}(X) \cong \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$ なる同型が与えられる。

scheme S を以下固定する。S-scheme X について、次の方法で Sch_S 上の前層を与えることができる:

- S-scheme T に対して、$\mathrm{Pic}(X \times_S T)$ を充てる。

この方法によって構成される関手を、X/S に関する **naive relative Picard functor**（素朴 Picard 関手）と呼ぶ。また、naive relative Picard functor を fppf-位相のもとで層化した関手を $\mathrm{Pic}_{X/S}$ と表記し、これを **relative Picard functor**（相対 Picard 関手）と呼ぶ。S-scheme としての構造射を $\pi\colon X \to S$ とおくと、明らかに、$\mathrm{Pic}_{X/S}$ は $\mathbb{R}^1\pi_*(\mathbb{G}_m)$ として表示される (ここで、pushforward は fppf-位相のもとで計算している)。

まず、(line bundle によって与えられる - すなわち、naive relative Picard functor 由来である) $\mathrm{Pic}_{X/S}$ の元が、自明化するための条件について確認する。

補題 3.1. *$f\colon X \to S$ を proper, of finite presentation な scheme の射とする。このとき、X 上の line bundle $\mathcal{L}$ によってあらわされる $\mathrm{Pic}_{X/S}(S)$ の元 $[\mathcal{L}]$ について、以下は同値となる。*

1. *$[\mathcal{L}] = 0 \in \mathrm{Pic}_{X/S}(S)$.*
2. *$\mathcal{L}$ は S 上 Zariski local に trivial である (すなわち、ある S の (Zariski) open covering $\{U_i\}_{i\in I}$ が存在して、各 i に対して $\mathcal{L}|_{X\times_S U_i} \cong \mathcal{O}_{X\times_S U_i}$ が成り立つ)。*

証明. 2. ⇒ 1. は明らかである。よって、以下 1. ⇒ 2. を示す。

f の Stein 分解 $X \to T \to S$ をとる。射 $X \to T$ を g とよぶとき、自然な射 $\psi\colon g^*g_*\mathcal{L} \to \mathcal{L}$ が同型となることをみる。仮定より、$\mathcal{L}$ は S 上 fppf-local に trivial である。したがって、ψ の同型性を確認するには、(加群の射の同型が faithfully flat 射のもとで降下することから、) $\mathcal{L}$ が trivial であるときに示せば充分である。このとき、semicontinuity に関する議論により、$g_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_T$ が成り立つ。このことから、ψ の同型性が示される。

よって、T 上の line bundle $\mathcal{L}_T = g_*\mathcal{L}$ が S について Zariski local に trivial であることを示せばよいが、ふたたび limit argument によって、$T \to S$ を finite であるとしてよい (T についての Stein 分解に関する文脈を解除する)。しかし、この場合は標準的なスキーム論の議論により理解される (本質的には、semi-local ring 上の line bundle が常に trivial であることに依る)。 □

Leray spectral sequence をみることで、$f\colon X \to S$ なる scheme の射について、次の標準的な完全列を得る:

$$0 \to \mathrm{H}^1(S, f_*\mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^1(X, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{Pic}_{X/S}(S) \to \mathrm{H}^2(S, f_*\mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^2(X, \mathbb{G}_m).$$

このとき、さらに $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_S$ が成り立つとき (たとえば、f が proper かつ geometrically integral なとき)、$f_*\mathbb{G}_m = \mathbb{G}_{m,S}$ が成り立つことから、さきの完全列は次のように rewrite できる:

$$0 \to \mathrm{Pic}(S) \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}_{X/S}(S) \to \mathrm{Br}(S) \to \mathrm{Br}(X).$$

ここで、$\mathrm{Br}(-)$ なる記号は (スキームに関する) Brauer 群を表すものとする。あるいは (言い換えれば)、さきの完全列により、$\mathrm{Pic}_{X/S}(S)$ の元が X 上の line bundle から生じるための障害が、$\mathrm{Br}(S)$ のなかにあらわれることが理解される。特に、$\mathrm{Br}(S)$ が消失するとき、あるいは $\mathrm{Br}(S) \to \mathrm{Br}(X)$ が単射となるとき (たとえば $X \to S$ が section をもつとき、これは可能である)、この種類の障害は消失する。

補足 3.2. *$S = \mathrm{Spec} R$ を affine scheme とする。このとき、以下の状況においては $\mathrm{Br}(S) = 0$ が成り立つ:*

- *R が separably closed field であるとき。*
- *R が strictly henselian DVR の商体であるとき (さきの条件の一般化である)。*
- *R が strictly henselian valuation ring であるとき。*

このことについて、ここでは証明を与えない。

定義 3.3 (Stein-good)**.** *$f\colon X \to S$ を scheme の射とする。このとき、f が **quasi-Stein-good** であるとは、自然な射 $\mathcal{O}_S \to f_*\mathcal{O}_X$ が同型であることをいう。また、f が **universally quasi-Stein-good** であるとは、任意の S-scheme T に対して、f の base change $f_T\colon X \times_S T \to T$ が quasi-Stein-good であることをいう。f が **Stein-good** であるとは、f が quasi-Stein-good かつ proper, of finite presentation であることをいう。同様に、f が **universally Stein-good** であるとは、universally quasi-Stein-good かつ proper, of finite presentation であることをいう。*

さきの議論により、次のような要約が可能となる。

命題 3.4. *$f\colon X \to S$ を quasi-Stein-good (resp. universally quasi-Stein-good) な scheme の射とする。このとき、以下が成り立つ: 任意の S-flat scheme T に対して (resp. 任意の S-scheme T に対して)、次の完全列を得る:*

$$0 \to \mathrm{Pic}(T) \to \mathrm{Pic}(X \times_S T) \to \mathrm{Pic}_{X/S}(T) \to \mathrm{Br}(T) \to \mathrm{Br}(X \times_S T).$$

さらに、f が section をもつとき、次の短完全列を得る:

$$0 \to \mathrm{Pic}(T) \to \mathrm{Pic}(X \times_S T) \to \mathrm{Pic}_{X/S}(T) \to 0.$$

証明. 既におこなった議論のなかで示された。 □

補足 3.5. *ここでは fppf-topology のもとで議論をおこなったが、さきの命題 (3.4) の内容は (同様の議論のもとで、あるいは適切な修正のもとで) 他の topology (Zariski, étale, fpqc ...) のもとでも成り立つ。特に、次の事実が成り立つ: $f\colon X \to S$ を universally quasi-Stein-good な fppf-morphism とすると、$\mathrm{Pic}_{X/S}$ は fpqc-topology のもとでも sheaf である。実際、$\mathrm{Pic}_{X/S}$ を $f\colon X \to S$ のもとで引き戻すと、さきの命題よりこれは fpqc-topology のもとでも sheaf となる。このとき、sheaf の一般論より、$\mathrm{Pic}_{X/S}$ が fpqc-topology のもとでも sheaf となることが理解される。*

次に、Picard scheme に関してより詳細な議論をおこなうために、rigidification の概念、あるいは rigidificator の概念を導入する。

$f\colon X \to S$ が quasi-Stein-good かつ section $s\colon S \to X$ をもつとき、さきの命題によって $\mathrm{Pic}_{X/S}(T) = \mathrm{Pic}(X \times_S T)/\mathrm{Pic}(T)$ となることが理解されたが、これは次の述べる議論によっても理解される。まず、$\xi \in \mathrm{Pic}_{X/S}(T)$ なる元について、これは T 上 fppf-local には line bundle によって表示される。$T' \to T$ なる fppf-covering, $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X \times_S T')$ をその witness としてとる。このとき、$\mathrm{Pic}(T')$ の元は $\mathrm{Pic}_{X/S}(T')$

においては消失するため、$\mathcal{L}$ が次の条件を充たすようにできる: $s|_{T'}$ を s の T' への base change として得られる section $T' \to X \times_S T'$ とするとき、$s|_{T'}^*\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_{T'}$ が成り立つ。ここで、以降の議論のために、$\alpha\colon \mathcal{O}_{T'} \cong s|_{T'}^*\mathcal{L}$ なる同型をひとつ固定する。このとき、補題 3.1 を振り返れば、(α-canonical な方法で) $T' \times_T T'$ 上の line bundle の同型 $\mathrm{pr}_1^*\mathcal{L} \cong \mathrm{pr}_2^*\mathcal{L}$ を構成でき、またこれが cocycle condition を充たすことも容易に確認できる。したがって、$\mathcal{L}$ は T 上に descent する - この方法によって得られる line bundle を $\overline{\mathcal{L}}$ と表記すると、$\xi = [\overline{\mathcal{L}}]$ が成り立つことが理解される。よって、$\mathrm{Pic}(X \times_S T) \to \mathrm{Pic}_{X/S}(T)$ の surjectivity が確認できる。次に、$\mathrm{Pic}(X \times_S T) \to \mathrm{Pic}_{X/S}(T)$ の kernel が $\mathrm{Pic}(T)$ と一致することをみる - section の存在により、$\mathrm{Pic}(T) \to \mathrm{Pic}(X \times_S T)$ が injective であることは明らかである。また、$\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X \times_S T)$ が $\mathrm{Pic}_{X/S}(T)$ において消失するとき、$\mathcal{L}$ を適切に $\mathrm{Pic}(T)$ の元による twist ととりかえれば、section $s|_T$ によって引き戻した line bundle $\mathcal{L}|_T$ が trivial となるようにできる。このとき、ふたたび補題 3.1 を振り返れば、$\mathcal{L}$ が trivial bundle となることが理解される。よって、所望の結論が得られた。

この議論をもとに、次の定義のもとで rigidification, あるいは rigidificator の概念を導入する。

定義 3.6 (rigidification)**.** *$f\colon X \to S$ を quasi-Stein-good かつ section $s\colon S \to X$ をもつ scheme の射とする。このとき、X 上の line bundle $\mathcal{L}$ について、$\mathcal{L}$ の (s に沿った)* ***rigidification*** *とは、$\alpha\colon \mathcal{O}_S \cong s^*\mathcal{L}$ なる同型のことをいう。*

定義 3.7 (rigidificator)**.** *$f\colon X \to S$ を proper, flat, of finite presentation な scheme の射とする。このとき、X の subscheme Y が f についての* ***rigidificator*** *であるとは、次の条件を充たすことをいう:*

- *Y は S 上 finite, flat, of finite presentation である。*
- *任意の S-scheme T に対して、自然な射 $\Gamma(Y \times_S T) \to \Gamma(X \times_S T)$ が単射である。*

補足 3.8. *f が universally Stein-good かつ flat であるとき、任意の f の section s は f についての rigidificator となることがただちに理解される。*

$f\colon X \to S$ を proper, flat, of finite presentation な scheme の射として、また Y を f についての rigidificator とする。このとき、$\mathrm{Pic}^{\diamondsuit}_{X/S,Y}$ を、S-scheme T について、$X \times_S T$ 上の line bundle $\mathcal{L}$ と $\alpha\colon \mathcal{L}|_{Y \times_S T} \cong \mathcal{O}_{Y \times_S T}$ なる同型の組のなす加群を充てる関手とする。

このとき、注意すべきこととして、rigidify された line bundle は、非自明な自己同型をもたないことが理解される。このことによって、「同型類」という枠組みを導入するうえで起こる (非自明な自己同型の存在に起因する) 不定性を、rigidified category において除去することができる。このことから、特に rigidified line bundle に関する descent theory が可能となり、したがって $\mathrm{Pic}^{\diamondsuit}_{X/S,Y}$ は fpqc-topology のもとで sheaf となることが理解される。

以下、$\mathrm{Pic}^{\diamondsuit}_{X/S,Y}$ と $\mathrm{Pic}_{X/S}$ とのあいだの関連をみる目的で、EGA III の内容についての復習をおこなう。

定義 3.9. *$f\colon X \to S$ を proper, of finite presentation な scheme の射とし、また $\mathcal{F}$ を X 上 locally of finite presentation かつ S-flat な加群とする。このとき、$\mathcal{F}$ が* ***cohomologically flat in dimension 0*** *であるとは、任意の S-scheme T に対して、$(f_T)_*\mathcal{F}|_{X \times_S T}$ が $(f_*\mathcal{F})|_{X \times_S T}$ に自然に同型であることをいう。また、$\mathcal{O}_X$ が cohomologically flat であるとき、f を* ***cohomologically flat in dimension 0*** *であるという。*

命題 3.10. *$f\colon X \to S$ を proper, flat, of finite presentation, geometrically reduced な scheme の射とす*

る。このとき、f は *cohomologically flat in dimension 0* である。

証明. EGA III, Proposition 7.8.6 を参照されたい。 □

命題 3.11. *$f\colon X \to S$ を proper, of finite presentation な scheme の射とする。また、$\mathcal{F}$ を X 上 locally of finite presentation かつ S-flat な加群とする。このとき、ある S 上 locally of finite presentation な $\mathcal{O}_S$-module $\mathcal{Q}$ が存在して、次の条件を充たす: 任意の quasi-coherent $\mathcal{O}_S$-module $\mathcal{M}$ に対して、functorial な同型*

$$f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{M}) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{Q}, \mathcal{M})$$

が成り立つ。また、このとき $\mathcal{Q}$ が locally free であることと、$\mathcal{F}$ が cohomologically flat in dimension 0 であることは同値である。

証明. EGA III, Proposition 7.7.6, あるいは Mumford, "Abelian Varieties", §5 などを参照されたい。 □

$f\colon X \to S$ を proper, flat, of finite presentation な scheme の射とする。このとき、さきの命題より、ある locally of finite presentation な $\mathcal{O}_S$-module $\mathcal{Q}$ が存在して、任意の S-scheme T に対して、$\Gamma(X_T, \mathcal{O}_{X_T}) = \Gamma(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{Q}, \mathcal{O}_T)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{Q}, \mathcal{O}_T) = \mathrm{Hom}_S(T, \mathrm{Sym}(\mathcal{Q}))$ が成り立つことが理解される。

補足 3.12. *f が proper, of finite presentation な scheme の射であったとして、このとき、f が finite ならば、明らかに f は cohomologically flat in dimension 0 である。*

命題 3.13. *$f\colon X \to S$ を proper, flat, of finite presentation な scheme の射とする。また、$Y \subset X$ なる subscheme を S 上 finite, flat, of finite presentation であるとする。このとき、V_X, V_Y を、それぞれ $T \mapsto \Gamma(X_T, \mathcal{O}_{X_T})$, $T \mapsto \Gamma(Y_T, \mathcal{O}_{Y_T})$ なる関手の表現対象とする。このとき、以下は同値である:*

1. *Y は f についての rigidificator である。*
2. *$V_X \to V_Y$ なる (自然に誘導される) 射が closed immersion である。*

証明. $\mathcal{Q}_X$, $\mathcal{Q}_Y$ をそれぞれ X, Y について命題 3.11 の方法で得られる $\mathcal{O}_S$-module とする。このとき、$\mathcal{Q}_X$, $\mathcal{Q}_Y$ の定義より、$\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ なる自然な加群の射が得られる。この観点において、命題は明らかとなる。 □

命題 3.14. *$f\colon X \to S$ を proper, flat, of finite presentation な scheme の射とする。また、V を $T \mapsto \Gamma(X_T, \mathcal{O}_{X_T})$ なる関手の表現対象とする。このとき、S-scheme T に対して $\Gamma(X_T, \mathcal{O}_{X_T}^\times)$ を充てる関手は V の open subscheme V^* によって表現される。*

証明. functor の inclusion が open immersion となっていることを確認すればよいが、これは f が proper であることを思い出せば、ただちに従う。 □

ここで、S-scheme T に対して、自然な射 $\Gamma(T, \mathcal{O}_T) \to \Gamma(X \times_S T, \mathcal{O}_{X \times_S T})$ が存在することから、$\mathbb{G}_{a,S} \to V$ なる環スキームの射が存在することが理解される。また、同様に $\mathbb{G}_{m,S} \to V^*$ なる群スキームの射も存在することが理解される。

命題 3.15. *$f\colon X \to S$ を proper, flat, of finite presentation な scheme の射とする。また、Y を f についての rigidificator とする。このとき、次の自然な系列は étale topology のもとで完全となる:*

$$0 \to V_X^* \to V_Y^* \to \mathrm{Pic}^{\diamondsuit}_{X/S,Y} \to \mathrm{Pic}_{X/S} \to 0.$$

証明. まず、$\mathrm{Pic}^{\diamondsuit}_{X/S,Y} \to \mathrm{Pic}_{X/S}$ の surjectivity を確認する。このためには、rigidificator Y が与えられたとき、étale locally に rigidification が可能であることをみればよい。これはすなわち、$\mathrm{Pic}_{X/S}(T)$ の元が T 上 étale-local に line bundle によって表示されればよい - このことは、$\mathrm{H}^2_{\text{étale}}(S, \mathbb{G}_{m,S}) = \mathrm{H}^2_{\text{fppf}}(S, \mathbb{G}_{m,S})$ なる等号をもちいて確認できる。これは、Milne, "Etale Cohomology", Theorem III.3.9 を参照されたい。 □

3.2 Mumford による反例

$S = \mathrm{Spec}\mathbb{R}[[t]]$ として、また X を $\mathbb{P}^2_S = \mathrm{Proj}\mathbb{R}[[t]][x_0, x_1, x_2]$ の closed subscheme であって、$x_1^2 + x_2^2 = tx_0^2$ なる方程式によって切り出されるものとする。このとき、$\mathrm{Pic}_{X/S}$ が scheme によって表現されないことを示す。

$S' = \mathrm{Spec}\mathbb{C}[[t]]$ として、$\mathrm{Pic}_{X/S}$ を S' に引き戻したものは、次のようなスキームで表現される: $d \in \mathbb{Z}$ に対して、次の方法で得られるスキームを P^d と表記する。$a + b = d$ なる整数の組 a, b に対して、S' の copy $S'_{a,b}$ を用意し、これらを生成点のもとで貼り合わせる。このとき、$P := \coprod_{d \in \mathbb{Z}} P^d$ は $\mathrm{Pic}_{X/S}|_{S'}$ の表現対象となる。また、自然に定まる Galois action は、$S'_{a,b}$ と $S'_{b,a}$ を入れ替える方法で得られるため、明らかに P 上の Galois action は、その群作用によって安定的な affine 開集合による基底をもたない。したがって、特に $\mathrm{Pic}_{X/S}$ は scheme によって表現されない。

3.3 scheme による表現可能性

Grothendieck による次の定理は、Picard functor の scheme による表現可能性についての結果として重要なものである。

定理 3.16. $f \colon X \to S$ を *projective, flat, of finite presentation, geometrically integral* とする。このとき、$\mathrm{Pic}_{X/S}$ は *separated, locally of finite presentation* な S*-scheme* によって表現される。

定理 3.16 は、多くの射影幾何的な方法をもちいて理解される。そのため、"projective" なる仮定は不可避的に要求される。以下、定理 3.16 の証明をおこなっていく。

定理 3.16 を示すにあたって、S は affine としてもよいため、以下そのように仮定する。

定義 3.17. $f \colon X \to S$ なる *scheme* の射が ***strongly projective*** *(resp.* ***strongly quasi-projective****)* であるとは、次の条件を充たすことをいう*: of finitely presentation* であり、かつ S 上の *locally free sheaf* $\mathcal{E}$ が存在して、X が S*-scheme* として $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ の *closed subscheme (resp. subscheme)* として実現される。このような埋め込みを固定した文脈において、$\mathcal{O}_X(1)$ とは、$\mathbb{P}(\mathcal{E})$ 上の *(*標準的な *hyperplane line bundle* であるところの*)* $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$ の X への制限をいう。

$f \colon X \to S$ が strongly projective であるとき、さらにその witness としての射影埋め込みを固定した状況において、多項式 $\Phi \in \mathbb{Q}[t]$ が与えられる毎に、$\mathrm{Pic}^{\Phi}_{X/S}$ なる $\mathrm{Pic}X/S$ の clopen subfunctor を次のように定義できる: $\mathcal{O}_X(1)$ に関する Hilbert polynomial が Φ であるような line bundle の同型類全体を充てる関手とする。このとき、$\mathrm{Pic}^{\Phi}_{X/S}$ が S-scheme によって表現されることが示せればよい。

証明は、次のような方法で進行する: 適切な意味で「因子」を統べる、$\mathrm{Div}_{X/S}$ なる関手を導入し、$\mathrm{Div} \to \mathrm{Pic}$ なる自然な射を導入する。簡単な (線形系に関する) 観察により、この射が relatively representable であることが確認できる。次に、Div が表現対象をもつことをみる。最後に、Pic を Div の適切な quotient として表

現できることを観察し、これが scheme によって表現可能であることをみる。

3.3.1 関手 $\mathrm{Div}_{X/S}$

divisor の概念を relative な状況で導入するにあたって、relative divisor の概念を導入する。

定義 3.18. *$f\colon X \to S$ を locally of finite presentation な scheme の射とする。このとき、X/S 上の **effective relative divisor** とは、X の effective divisor D であって、D が S 上 flat であるようなものをいう。*

以下の命題は flatness に関する local criterion により示される。

命題 3.19. *$\mathcal{I}$ を X 上の quasi-coherent ideal sheaf とする。また、D を $\mathcal{I}$ によって定義される X の closed subscheme とする。また、$x \in D,\ s = f(x)$ なる点をとる。このとき、以下は同値である:*

1. *$\mathcal{I}$ は x において可逆であり、かつ S 上 flat である。*
2. *X, D は x において S 上 flat であり、また fiber D_s は X_s 上の effective divisor である。*
3. *X は S 上 flat であり、かつ x において D はある元 f によって定義され、さらに f が X_s 上で regular であるようにできる。*

証明. 証明は local criterion for flatness に依る - scheme 論の簡単な exercise である。 □

ここまでの準備のもとに、$\mathrm{Div}_{X/S}$ なる関手を次のように定義する: S-scheme T に対して、$\mathrm{Div}_{X/S}(T)$ として $X \times_S T/T$ 上の effective relative divisor 全体のなすアーベル群を充てる。このとき、因子 D を line bundle $\mathcal{O}_X(D)$ に充てる方法で、

$$\mathrm{Div}_{X/S} \to \mathrm{Pic}_{X/S}$$

なる自然な射が存在することが理解される。

命題 3.20 (Div vs. Pic)**.** *$f\colon X \to S$ を strongly projective, flat, geometrically integral な scheme の射とする。このとき、自然な射 $\mathrm{Div}_{X/S} \to \mathrm{Pic}_{X/S}$ は、scheme によって representable である。さらにいえば、$T \to \mathrm{Pic}_{X/S}$ を line bundle $\mathcal{L}$ に対応する射とするとき、ある (“canonical” な方法で構成できる) locally of finite presentation な $\mathcal{O}_T$-module $\mathcal{F}$ が存在して、$\mathrm{Div}_{X/S} \times_{\mathrm{Pic}_{X/S}} T \cong \mathbb{P}(\mathcal{F})$ なる自然な同型を得られる。さらに、$\mathcal{L}$ が cohomologically flat in dimension 0 であるとき、$\mathcal{F},\ f_*(\mathcal{L})$ は locally free であり、これらは互いに dual の関係にある。*

証明. □

3.3.2 $\mathrm{Div}_{X/S}$ の表現可能性

foo

3.3.3 $\mathrm{Pic}_{X/S}$ の表現可能性

bar

3.4 algebraic space による表現可能性

4 Jacobian scheme

5 Albanese variety

6 Néron model

7 Appendix: some glimpses of scheme theory

命題 7.1 (Noetherian approximation)**.** 次が成り立つ*:*

1. *S を qcqs scheme とする。このとき、ある scheme の逆系 $\{S_i, p_{i,i'}\}_{i,i' \in I}$ が存在して、以下の条件を充たす。*
   - *構造射 $p_{i,i'}$ は affine である。*
   - *S_i は $\mathbb{Z}$ 上有限型である。*
   - *$S = \lim S_i$ が成り立つ。*
2. *$f \colon X \to S$ を qcqs morphism とする。このとき、ある scheme の射の逆系 $\{f_i \colon X_i \to S_i, p_{X,i,i'}, p_{S,i,i'}\}_{i,i' \in I}$ が存在して、以下の条件を充たす。*
   - *構造射 $p_{X,i,i'}$, $p_{S,i,i'}$ は affine である。*
   - *X_i, S_i は $\mathbb{Z}$ 上有限型である。*
   - *$X \to S = \lim X_i \to S_i$ が成り立つ。*
3. *$f \colon X \to S$ を scheme の射とする。また、S を quasi-compact, X を qcqs とする。このとき、ある S-scheme の逆系 $\{X_i, p_{i,i'}\}_{i,i' \in I}$ が存在して、以下の条件を充たす。*
   - *構造射 $p_{i,i'}$ は affine である。*
   - *X_i は S 上有限表示である。*
   - *$X = \lim X_i$ が成り立つ。*

命題 7.2 (Stein 分解)**.** *$f \colon X \to S$ を proper, of finite presentation とする。このとき、ある f の射分解 $X \to T \to S$ が存在して、$X \to T$ が geometrically connected, $T \to S$ が integral であるようにできる。*

証明. まず、S を affine と仮定してよい。Noetherian approximation の議論によって、X を近似する scheme の列 X_i をとることができる。このとき、各 $X_i \to S$ に対して Stein 分解を実行して、$X_i \to T_i \to S$ なる射分解を得る。このとき、$T = \lim T_i$ とすると、$T \to S$ は明らかに integral である。さらに、$X_i \to T_i$ は geometrically connected であって、かつ $X \to T$ は射 $X_i \to T_i$ の極限であるため、$X \to T$ もまた geometrically connected である。 □

命題 7.3.

Appendix: algebraic stack