Faltings-Chai, preliminaries

馬杉和貴

2025 年 7 月 14 日

1

定義 1. アーベルスキームとは、群スキームであって、かつ *smooth, proper, geometrically connected* なものをいう。

命題 2. アーベルスキーム $A \to S$ は、可換群スキームである。

証明. smooth かつ proper ということから、Noetherian approximation の技術を用いて、S を Noetherian の場合に帰着させることができる。これは、次の rigidity lemma によって、S が体の場合に帰着される。しかしこの場合はアーベル多様体の一般論から従う。 □

補題 3. S を *connected scheme* とする。$f\colon X \to Y$ なる S-スキームの射について、X が S 上 *proper, flat* であるとする。また、任意の $s \in S$ について、$\mathrm{H}^0(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) = \kappa(s)$ であったとする。このとき、ある一点 $s_0 \in S$ において $f(X_s)$ が *set-theoretical* に一点であるならば、ある $Y \to S$ の *section* が存在して、f はその *section* によって定義される。

証明. $X \to S$ なる構造射を p とよぶ。descent theory の援用によって、p が section $t\colon S \to X$ をもつと仮定してよい。このとき、$f \circ t \circ p : X \to S \to X \to Y$ なる方法で定義される射と、f との比較をおこなう。

S が一点の場合に示されたとして、以下議論を進める。$Z \subset X$ を、$f = f \circ t \circ p$ を充たす X の閉部分集合とする。前提は、s_0 に集中する S 上の Artin 閉部分スキーム T について、Z が $p^{-1}(T)$ を含むことを意味する。したがって、(簡単なスキーム論的考察から、)Z が X_{s_0} の開近傍を含むことが理解される。p の properness から、これはある s_0 の近傍 U において、Z が $p^{-1}(U)$ を含むことを意味する。この議論によって、$s \in S$ であって $X_s \subset Z$ を充たすもの全体の集合を V とおくと、V は open であることが理解される。しかし、p の flatness より、V の補集合もまた open であると理解される。したがって、S の連結性によって所望の結論を得る。

よって、S が Artin local である場合に帰着された。section の存在を示すために、実際に section を構成する。位相空間の射としては、あたりまえのものを充てればよい。また、$t\colon S \to Y$ なる topological section について、$\mathcal{O}_Y \to t_*(\mathcal{O}_S)$ なる層の射には、$\mathcal{O}_Y \to f_*(\mathcal{O}_X) = t_*(p_*(\mathcal{O}_X)) = t_*(\mathcal{O}_S)$ として得られるものを充てる。この方法によって得られた環付き空間の射は、スキームの射となっており、また所望の条件を充たす。 □

定理 4. $A \to S$ をアーベルスキームとする。$\mathcal{L}$ を A 上の *line bundle* とする。$I \subset \{1,2,3\}$ について、$m_I\colon A \times_S A \times_S A \to A$ を、「I に属するラベルの成分をすべて足しあわせる」射として定める。このとき、

$$\Theta(\mathcal{L}) := \otimes_{I \subset \{1,2,3\}} m_I^*(\mathcal{L}^{\otimes(-1)^{|I|}})$$

とすると、$\Theta(\mathcal{L})$ は A 上の *trivial line bundle* と *canonically* に同型である。

証明. S が体の場合については、アーベル多様体の一般論から従う。一般の場合には、semicontinuity に関する議論によって、$\Theta(\mathcal{L})$ が S 上の line bundle を引き戻した line bundle と同型であることが理解されるが、$A \times_S A \times_S A$ の zero section 上において、$\Theta(\mathcal{L})$ が (canonically に) trivial であることが従う。よって、l これらのことから所望の結論を得る。 □

定義 5. アーベルスキーム $A \to S$ について、その *zero section* を e とおく。A 上の *line bundle* $\mathcal{L}$ に対して、$\mathcal{L}$ の *rigidification* とは、$\mathcal{O}_S \to e^*(\mathcal{L})$ なる同型射のことをいう。