

AlgGeomBasic

馬杉和貴

2025 年 7 月 12 日

このノートは、著者の研究活動上のメモ・備忘録としての側面をもつものである。著者は (執筆時点においては) 遠アーベル幾何学を専攻する修士課程の学生である。したがって、内容については、遠アーベル幾何学を習得するにあたって必要となった、代数幾何学に関する (一般的な) 基礎事項をまとめたものとなる。

目次

1	algebraic space	1
2	Picard scheme	2
3	group scheme	3
4	Albanese variety	3
5	Néron model	3
6	Appendix: some glimpses of scheme theory	4

1 algebraic space

2 Picard scheme

scheme X について、 $\mathrm{Pic}(X)$ は X 上の line bundle の同型類全体のなすアーベル群として定められる。ここで、自然に $\mathrm{Pic}(X) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$ なる同型が与えられる。

scheme S を以下固定する。 S -scheme X について、次の方法で Sch_S 上の前層を与えることができる:

- S -scheme T に対して、 $\mathrm{Pic}(X \times_S T)$ を充てる。

この方法によって構成される関手を、 X/S に関する **naive relative Picard functor** (素朴 Picard 関手) と呼ぶ。また、naive relative Picard functor を fppf-位相のもとで層化した関手を $\mathrm{Pic}_{X/S}$ と表記し、これを **relative Picard functor** (相対 Picard 関手) と呼ぶ。 S -scheme としての構造射を $\pi: X \rightarrow S$ とおくと、明らかに、 $\mathrm{Pic}_{X/S}$ は $\mathbb{R}^1\pi_*(\mathbb{G}_m)$ として表示される (ここで、pushforward は fppf-位相のもとで計算している)。

- 3 group scheme
- 4 Albanese variety
- 5 Néron model

6 Appendix: some glimpses of scheme theory

命題 1 (Noetherian approximation). 次が成り立つ:

1. S を qcqs scheme とする。このとき、ある scheme の逆系 $\{S_i, p_{i,i'}\}_{i,i' \in I}$ が存在して、以下の条件を充たす。
 - 構造射 $p_{i,i'}$ は affine である。
 - S_i は \mathbb{Z} 上有限型である。
 - $S = \lim S_i$ が成り立つ。
2. $f: X \rightarrow S$ を qcqs morphism とする。このとき、ある scheme の射の逆系 $\{f_i: X_i \rightarrow S_i, p_{X,i,i'}, p_{S,i,i'}\}$ が存在して、以下の条件を充たす。
 - 構造射 $p_{X,i,i'}, p_{S,i,i'}$ は affine である。
 - X_i, S_i は \mathbb{Z} 上有限型である。
 - $X \rightarrow S = \lim X_i \rightarrow S_i$ が成り立つ。
3. $f: X \rightarrow S$

命題 2 (Stein 分解). $f: X \rightarrow S$ を proper, of finite presentation