スキームの群作用による商

馬杉和貴

2025 年 7 月 12 日

Notation: スキーム S について、S-スキームのなす圏を Sch_S と表記する。

このノートにおいては、群スキーム G の作用をもつスキーム X について、その作用に関する商概念をいくつか導入する。本稿においては、その構成について取り扱うことはない。

はじめに、いくつかの用語について確認する。

定義 1. S をスキームとして、G を S 上の群スキームとする。また、X を G が左から作用する S-スキームとして、作用が射 $\rho_X\colon G \times_S X \to X$ によって与えられているとする。また、$\mathrm{pr}_2\colon G \times_S X \to X$ を第 2 成分への射影とする。

- $\Psi_X \coloneqq (\rho, \mathrm{pr}_2)\colon G \times_S X \to X \times_S X$ なる射について、これを X に関するグラフ射とよぶ。
- X に関するグラフ射がスキームのモノ射であるとき、X の作用について、これを *categorically free* であるという。
- X に関するグラフ射が *immersion* であるとき、X の作用について、これを *scheme-theoretically free* であるという。

定義 2. S をスキームとして、G を S 上の群スキームとする。また、X を G が左から作用する S-スキームとして、作用が射 $\rho_X\colon G \times_S X \to X$ によって与えられているとする。また、T を S-スキームとして、x を X の T-点とする。このとき、x の安定化群 G_x を、次の方法で定義される $G \times_S T/T$ の部分関手とする。

- T-スキーム T' について、$G_x(T')$ とは、$g \cdot x|_{T'} = x|_{T'}$ を充たすような G 上の T'-点全体の集合である。

補題 3. 定義 *2* の状況において、G_x は表現可能である。

証明. $\delta_x \coloneqq (x, x)\colon T \to X \times_S X$ とおくと、このとき、$G_x \cong T \times_{\delta_x, X \times_S X, \Psi_X} (G \times_S X)$ が成り立つ。 □

定義 4. S をスキームとして、G を S 上の群スキームとする。また、X を G が左から作用する S-スキームとして、作用が射 $\rho_X\colon G \times_S X \to X$ によって与えられているとする。また、$\mathrm{pr}_2\colon G \times_S X \to X$ を第 2 成分への射影とする。

- 射 $q\colon X \to Y$ が X の群作用による *categorical quotient* であるとは、q が ρ_X と pr_2 の *(*Sch_S において*)* コイコライザとなることをいう。
- 射 $q\colon X \to Y$ が X の群作用による *universal categorical quotient* であるとは、任意の S-スキーム S' について、S' 上への底変換をおこなっても *categorical quotient* であることをいう。

定義 5. S をスキームとして、G を S 上の群スキームとする。また、X を G の左作用を持つスキームとする。

- $q\colon X \to Y$ が X の G-作用による *geometric quotient* であるとは、Y が環付き空間としての X の G-作用による商となっていることをいう。
- $q\colon X \to Y$ が X の G-作用による *universal geometric quotient* であるとは、任意の S-スキーム S' について、S' 上への底変換をおこなっても *geometric quotient* であることをいう。

定義 6. S をスキームとして、G を S 上の群スキームとする。また、X を G の左作用を持つスキームとする。このとき、X の G-作用による *naive* 商とは、S-スキーム T について集合 $G(T)\backslash X(T)$ を充てる前層のことをいう。また、X の G-作用による *fppf*-商とは、*naive* 商として得られる前層を *fppf*-位相のもとで層化した *fppf*-層のことをいい、$(G\backslash X)_{\mathrm{fppf}}$ と表記する。このとき、自然な層の射 $q_{G\backslash X}\colon X \to (G\backslash X)_{\mathrm{fppf}}$ が存在することに注意する。また、スキームの射 $q\colon X \to Y$ が X の G による *fppf*-商であるとは、q が $q_{G\backslash X}$ を表現することを指していう。また、スキーム Y が X の G による *fppf*-商であるとは、Y が $(G\backslash X)_{\mathrm{fppf}}$ を表現することを指していう。

補題 7. S をスキームとして、G を S 上の群スキームとする。また、X を G の左作用を持つスキームとする。このとき、*fppf*-商構成は底変換と *compatible* である。すなわち、S' を S の S-スキームとするとき、$G_{S'} \coloneqq G \times_S S'$ および $X_{S'} \coloneqq X \times_S S'$ について、$(G_{S'}\backslash X_{S'})_{\mathrm{fppf}} = (G\backslash X)_{\mathrm{fppf}} \times_S S' := (G\backslash X)_{\mathrm{fppf}}|_{S'}$ が成り立つ。

証明. 以下の証明中、ある圏の対象 a に付随する表現可能関手を h_a という記号で表記する。層の一般論により、S-上のスキーム T について、表現可能関手 h_T の S' への引き戻しが $h_{T\times_S S'}$ に一致することがわかる。したがって、$h_G, h_X, h_{G\times_S X}$ の S' への引き戻しは、それぞれ $h_{G_{S'}}, h_{X_{S'}}, h_{G_{S'}\times_{S'} X_{S'}}$ に一致する。また、引き戻し関手が圏の余極限を保つことから、$(G\backslash X)_{\mathrm{fppf}}$ の S' への引き戻しは、$(G_{S'}\backslash X_{S'})_{\mathrm{fppf}}$ に一致する。これは所望の主張である。 □

補題 8. S をスキームとして、G を S 上の群スキームとする。また、X を G の左作用 ρ を持つスキームとする。また、X の G による *fppf*-商 $(G\backslash X)_{\mathrm{fppf}}$ が S-スキーム Y によって表現されているとする。このとき、*natural quotient map* $q_{G\backslash X}\colon X \to Y$ は *fppf covering* であり、また X 上の G-作用が自由であるならば、自然な射 $(\rho, \mathrm{pr}_2)\colon G \times_S X \to X \times_Y X$ は同型である。

証明. $q_{G\backslash X}\colon X \to Y$ が fppf covering であることは、表現可能関手のあいだの射 $h_X \to h_Y$ が fppf 層の epimorphism であることから従う。実際、$h_X \to h_Y$ が epimorphism であることから、ある X 上の fppf covering $U \to X$ が存在して、$U \to X \to Y$ なる合成が Y 上の fppf covering になることがわかる。このとき、$X \to Y$ が fppf covering であることは、一般的な可換環論 (たとえば、Stacks Project, Tag 06NB) より従う。また、X 上の G-作用が自由であるならば、X の G-作用による naive 商を $(G\backslash X)_{\mathrm{naive}}$ と表記すると、X 上の G-作用が自由であることから、$G \times_S X \cong X \times_{(G\backslash X)_{\mathrm{naive}}} X$ が成り立つ。したがって、層化をとることで、$G \times_S X \cong X \times_Y X$ が成り立つ。 □

補題 9. 補題 8 の状況において (特に、X 上の G-作用が自由であるとき)、X の G-作用による *fppf*-商 $(G\backslash X)_{\mathrm{fppf}}$ が何らかの S-スキームによって表現されているとき、X 上の G-作用は *scheme-theoretically free* である。

証明. fppf-商 $(G\backslash X)_{\mathrm{fppf}}$ が S-スキーム Y によって表現されているとする。このとき、自然な射 $(\rho, \mathrm{pr}_2)\colon G \times_S X \to X \times_Y X$ が同型であることから、かつ自然な射 $X \times_Y X \to X \times_S X$ が immersion となることに注意すれば、所望の結論を得る。 □

ここまで定義したいくつかの商概念 (categorical, geometric, fppf) について、そのあいだの比較をおこなう。

命題 10. S をスキームとして、G を S 上の群スキームとする。また、X を G の左作用を持つスキームとする。このとき、以下が成り立つ。

1. X の G 作用による *geometric quotient* が存在するなら、これは *categorical quotient* である。
2. X の G 作用による *fppf-quotient* が存在するなら、これは *geometric quotient* である。
3. X が S 上局所有限型であり、かつ G が S 上平坦かつ局所有限表示であるとする。さらに、G の X への作用が *scheme-theoretically free* であるとき、X の G による *geometric quotient* が存在するなら、それは *fppf-quotient* となる。

証明. 1. について、geometric quotient が存在するならば、それが categorical quotient となることは明らかである。

2. については、Anantharaman, Sivaramakrishna, "Schémas en groupes, espaces homogènes et espaces algébriques sur une base de dimension 1", Appendix I を参照されたい。

3. については、Bas Edixhoven, Gerard van der Geer, Ben Moonen "Abelian Varieties", Chapter 4 を参照されたい。 □

SGA3 において、以下の定理が示された。

定理 11. S を *locally Noetherian* なスキームとする。また、G を S 上 *proper flat* な有限型の群スキームとして、さらに X 上に G の *scheme-theoretically free* な作用が備わっているとする。また、X が S 上 *quasi-projective* であるとする。

以上の条件のもとに、X の G による *fppf-quotient* $(G\backslash X)_{\mathrm{fppf}}$ は S-上 *separated* かつ有限型なスキーム Y によって表現可能であり、また商写像 $q\colon X \to Y$ は *proper, of finite type* かつ *flat* な全射である。