群スキームの基礎

馬杉和貴

today

Notation: スキーム S について、S-スキームのなす圏を Sch_S と表記する。

目次

1 商構成

このセクションにおいては、群スキーム G の作用をもつスキーム X について、その商となるべきスキーム X/G の構成を試みる。

はじめに、いくつかの用語について確認する。

定義 1.1. S をスキームとして、G を S 上の群スキームとする。また、X を G が左から作用する S-スキームとして、作用が射 $\rho_X\colon G\times_S X\to X$ によって与えられているとする。また、$\mathrm{pr}_2\colon G\times_S X\to X$ を第 2 成分への射影とする。

- $\Psi_X := (\rho, \mathrm{pr}_2)\colon G\times_S X\to X\times_S X$ なる射について、これを X に関するグラフ射とよぶ。
- X に関するグラフ射がスキームのモノ射であるとき、X の作用について、これを *categorically free* であるという。
- X に関するグラフ射が *immersion* であるとき、X の作用について、これを *scheme-theoretically free* であるという。

定義 1.2. S をスキームとして、G を S 上の群スキームとする。また、X を G が左から作用する S-スキームとして、作用が射 $\rho_X\colon G\times_S X\to X$ によって与えられているとする。また、T を S-スキームとして、x を X の T-点とする。このとき、x の安定化群 G_x を、次の方法で定義される $G\times_S T/T$ の部分関手とする。

- T-スキーム T' について、$G_x(T')$ とは、$g\cdot x|_{T'} = x|_{T'}$ を充たすような G 上の T'-点全体の集合である。

補題 1.3. 定義 *1.2* の状況において、G_x は表現可能である。

証明. $\delta_x := (x,x)\colon T\to X\times_S X$ とおくと、このとき、$G_x\cong T\times_{\delta_x, X\times_S X, \Psi_X}(G\times_S X)$ が成り立つ。 $\square$

定義 1.4. S をスキームとして、G を S 上の群スキームとする。また、X を G が左から作用する S-スキー

ムとして、作用が射 $\rho_X\colon G\times_S X\to X$ によって与えられているとする。また、$\mathrm{pr}_2\colon G\times_S X\to X$ を第 2 成分への射影とする。

- 射 $q\colon X\to Y$ が X の群作用による *categorical quotient* であるとは、q が ρ_X と pr_2 の *(*Sch_S においての*)* コイコライザとなることをいう。
- 射 $q\colon X\to Y$ が X の群作用による *universal categorical quotient* であるとは、任意の S-スキーム S' について、S' 上への底変換をおこなっても *categorical quotient* であることをいう。

定義 1.5. S をスキームとして、G を S 上の群スキームとする。また、X を G の左作用を持つスキームとする。

- $q\colon X\to Y$ が X の G-作用による *geometric quotient* であるとは、Y が環付き空間としての X の G-作用による商となっていることをいう。
- $q\colon X\to Y$ が X の G-作用による *universal geometric quotient* であるとは、任意の S-スキーム S' について、S' 上への底変換をおこなっても *geomteric quotient* であることをいう。

定義 1.6. S をスキームとして、G を S 上の群スキームとする。また、X を G の左作用を持つスキームとする。このとき、X の G-作用による *naive* 商とは、S-スキーム T について集合 $G(T)\backslash X(T)$ を充てる前層のことをいう。また、X の G-作用による *fppf*-商とは、*naive* 商として得られる前層を *fppf*-位相のもとで層化した *fppf*-層のことをいい、$(G\backslash X)_{\mathrm{fppf}}$ と表記する。このとき、自然な層の射 $q_{G\backslash X}\colon X\to (G\backslash X)_{\mathrm{fppf}}$ が存在することに注意する。また、スキームの射 $q\colon X\to Y$ が X の G による *fppf*-商であるとは、q が $q_{G\backslash X}$ を表現することを指していう。また、スキーム Y が X の G による *fppf*-商であるとは、Y が $(G\backslash X)_{\mathrm{fppf}}$ を表現することを指していう。

kkkk