アルゴリズムとデータ構造 レポート 1 プログラミング演習

森 立平 mori@c.titech.ac.jp

2017 年 6 月 27 日

1 レポート 1 のプログラミング課題の補足説明

1.1 実行時間と入力制約

各問題には入力制約がある。大雑把に言って、$O(f(n))$ 時間アルゴリズムであれば、$f(n) \leq 10^7$ となる n については、大体どのような実行環境でも 1 秒以内に計算が終わる。大体の目安として

- $n \leq 200$ は $O(n^3)$ 時間アルゴリズムで 1 秒以内に解ける。
- $n \leq 1000$ は $O(n^2)$ 時間アルゴリズムで 1 秒以内に解ける。
- $n \leq 10^5$ は $O(n \log n)$ 時間アルゴリズムで 1 秒以内に解ける。
- $n \leq 10^7$ は $O(n)$ 時間アルゴリズムで 1 秒以内に解ける。
- $n \leq 10^{18}$ は $O(\log n)$ 時間アルゴリズムで一瞬で解ける。

もちろん、オーダーはあくまで漸近的な尺度なのでこれらは目安にすぎない。同じオーダーの時間計算量でもプログラムの実装によってプログラムの実行速度は大きく変わり得る。

この課題で各問題について設計する動的計画法は演習室で実行したときに入力制約を満たす任意の入力に対して 1 秒以内に計算が終了するものでなくてはならない。想定している通りの解法であれば、どのような実装でも十分間に合う。実行時間を計るには `time ./a.out < input.txt` とコマンドの先頭に `time` をつければよい。

1.2 注意点

- 最適解を求める問題では複数存在しうる最適解のうちの 1 つを出力すればよい。
- 配列のサイズを `N` とすると、`dp[0], ..., dp[N-1]` を使用することができる。もしも `dp[N]` まで使用したいのであれば、配列のサイズを `N+1` にする必要がある。
- プログラムで入力を受け取る際には `scanf` を用いる。整数を一つ受け取り変数 `n` に代入したい場合は `scanf("%d", &n);` とする。二つの整数を受け取り変数 `n, m` にこの順番で代入したい場合は `scanf("%d%d", &n, &m);` とする。配列に値を代入する場合も同様であるが `&A[i]` の代わりに `A+i` が使える。この `scanf` は空白や改行は適宜飛ばして読むので、入力に含まれる改行について考慮する必要はない。
- 各問題についてテスト用の入出力を用意しているので、プログラムの結果が正しいことを確認すること。2 つのファイルの差分は `diff file1.txt file2.txt` で調べることができる。

2　問題

2.1　最適な行列積の順番 ★

問題文

各 $i = 1, 2, \ldots, n$ について M_i を $a_i \times a_{i+1}$ 行列としたとき、行列積 $M_1 M_2 \cdots M_n$ を計算するための最小のスカラー乗算回数 X をもとめよ。ただし、$a \times b$ 行列と $b \times c$ 行列の行列積には abc 回のスカラー乗算が必要とする。

入力制約

$1 \leq n \leq 100$
$1 \leq a_i \leq 100, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n+1\}$

入力

n
$a_1 \ \cdots \ a_{n+1}$

出力

X

サンプル 1

入力:

```
3
1 2 3 4
```

出力:

```
18
```

説明:

最初に 1×2 行列と 2×3 行列の積を計算する (スカラー乗算 6 回)。それから 1×3 行列と 3×4 行列の積を計算する (スカラー乗算 12 回)。するとスカラー乗算は合計で 18 回となる。先に 2×3 行列と 3×4 行列の行列積を計算すると、最初の行列積だけでスカラー乗算が 24 回必要となってしまう。

サンプル 2

入力:

```
10
2 4 3 7 9 8 2 3 4 7 8
```

出力:

```
552
```

2.2 棒の価値 ★

問題文

整数 i について、長さ i の棒は a_i 円で売れる。長さ i の棒を 2 つにカットして長さ j の棒 $(1 \leq j < i)$ と長さ $i-j$ の棒を得るのに k 円かかる。長さ n の棒を使って上げることのできる利益の最大値 X と対応する分割 $(N_1, N_2, \dots, N_m)$ を求めよ。

入力制約

$1 \leq n \leq 1000$
$0 \leq k \leq 10^5$
$1 \leq a_i \leq 10^5, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$

入力

$n \quad k$
$a_1 \cdots a_n$

出力

X
$N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_m$
(但し、$N_1 \leq N_2 \leq \cdots \leq N_m$ とする)

サンプル 1

入力:

```
5 1
1 2 3 4 2
```

出力:

```
4
1 4
```

サンプル 2

入力:

```
10 10
10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
```

出力:

```
10
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
```

2.3 最長共通部分数列 ★

問題文

2 つの数列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ と $b_1, b_2, \ldots, b_m$ の連続するとは限らない共通部分数列の最大の長さ X とその共通部分数列 $C_1, C_2, \ldots, C_X$ を求めよ。

入力制約

$1 \leq n, m \leq 1000$
$1 \leq a_i \leq 10^9, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$
$1 \leq b_i \leq 10^9, \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\}$

入力

$n \quad m$
$a_1 \cdots a_n$
$b_1 \cdots b_m$

出力

X
$C_1 \cdots C_X$

サンプル 1

入力:

```
4 3
1 2 4 3
1 2 3
```

出力:

```
3
1 2 3
```

サンプル 2

入力:

```
4 4
1 8 3 1
1 1 3 8
```

出力:

```
2
1 8
```

2.4 最大部分和 ★★

問題文

数列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ の連続する部分数列 $a_L, a_{L+1}, \ldots, a_R$ の和の最大値 X と対応する区間 $[L, R]$ を求めよ。

入力制約

$1 \le n \le 10^6$
$-1000 \le a_i \le 1000, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$

入力

n
$a_1 \cdots a_n$

出力

X
$L\ R$
(ただし空の区間は $L = R = 0$ で表すとする)

サンプル 1

入力:

```
5
1 1 1 1 1
```

出力:

```
5
1 5
```

サンプル 2

入力:

```
10
1 -2 3 -1 4 -5 8 -3 1 1
```

出力:

```
9
3 7
```

サンプル 3

入力:

```
3
-1 -1 -1
```

出力:

```
0
0 0
```

2.5　ペアの作り方 ★★

問題文

1 から n までの数字の中でペアをいくつか作りたい。一つの数字は高々一つのペアに属している。また、2 つのペア $\{x_1, y_1\}$ と $\{x_2, y_2\}$ について、$x_1 < x_2 < y_1 < y_2$ となることが無いとする。そのようなペア達の作り方の総数を 10^9 で割った余り X をもとめよ。

入力制約

$1 \leq n \leq 1000$

入力

n

出力

X

サンプル 1

入力:

```
4
```

出力:

```
9
```

説明:

∅
{1,2}
{2,3}
{3,4}
{1,3}
{2,4}
{1,4}
{1,2}, {3,4}
{1,4}, {2,3}
の 9 通り。

サンプル 2

入力:

```
5
```

出力:

```
21
```

サンプル 3

入力:

```
100
```

出力:

```
193303669
```

2.6　最短経路の数 ★★

問題文

$h \times w$ のマス目がある。マス目は # で表わされるものと. で表わされるものがある。あるマス目からその上下左右のマス目に移動することができるが # のマス目には移動できない。左上のマス目からスタートして右下のマス目に $h+w-2$ 回の移動で到達する方法の数を 10^9 で割った余り X を答えよ。

入力制約

$1 \leq h, w \leq 1000$
$2 \leq h + w$

入力

$h\ w$
$c_{1,1} \cdots c_{1,w}$
$\vdots$
$c_{h,1} \cdots c_{h,w}$
(各 $c_{i,j}$ は # か. のいずれかである。)
($c_{1,1} = c_{h,w} =$.)

出力

X

サンプル 1

入力:

```
3 3
...
...
...
```

出力:

```
6
```

サンプル 2

入力:

```
4 3
...
.#.
.#.
...
```

出力:

```
2
```

サンプル 3

入力:

```
5 5
.....
###..
.....
..###
.....
```

出力:

```
0
```

サンプル 4

入力:

```
5 80
................................................................................
................................................................................
.......................................#........................................
................................................................................
................................................................................
```

出力:

```
1131600
```

2.7 働き者 ★★

問題文

全部で n 個の仕事がある。i 番目の仕事は時刻 a_i に開始して時刻 b_i の直前に終了し、w_i 円の報酬がもらえる。n 個の仕事からいくつか選択して働いたときに得られる報酬の最大値 X をもとめよ。ただし、同時に複数の仕事はできないものとする。また、時刻 b の直前に終了する仕事の後に時刻 b に開始する仕事をすることができるものとする。

入力制約

$1 \le n \le 1000$
$1 \le n \le 10^5$ (難易度 ★★★)
$1 \le a_i < b_i \le 10^9 \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$
$a_i \le a_{i+1} \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$
$1 \le w_i \le 10^4 \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$

入力

n
$a_1\ b_1\ w_1$
$\vdots$
$a_n\ b_n\ w_n$

出力

X

サンプル 1

入力:

```
3
10 20 1
15 25 2
20 30 2
```

出力:

```
3
```

説明:

仕事 1 と仕事 3 を選ぶと報酬の合計が 3 円になる。

サンプル 2

入力:

```
3
10 20 1
15 19 2
20 30 2
```

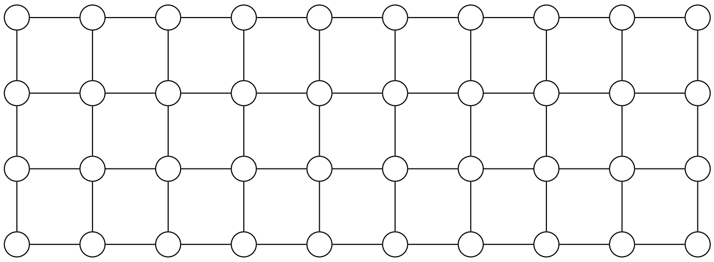
出力:

```
4
```

2.8 グリッド上のサイクルの数 ★★★

問題文

縦に 4 つ、横に $n+1$ つ頂点が格子状に接続しているグラフ



を $3 \times n$ のグリッドと呼ぶ。$3 \times n$ のグリッド上の単純閉路の個数を 10^9+7 で割った余り X をもとめよ。

入力制約

$1 \leq n \leq 10^6$
$1 \leq n \leq 10^{18}$ (難易度 ★★★★)

入力

n

出力

X

小さな n について

$n = 1, 2, \ldots, 10$ については

```
6, 40, 213, 1049, 5034, 23984, 114069, 542295, 2577870, 12253948
```

サンプル 1

入力:

```
100
```

出力:

```
652583913
```

サンプル 2

入力:

```
1000000
```

出力:

```
595248477
```

サンプル 3

入力:

```
1000000000000000000
```

出力:

```
103670646
```