04_簡単な例でみるカルマンフィルタの考え方(時変ver)

この記事では、次のような測定を考える；

- 測定対象の物理量は、真値M_tで時間的に変化する確率変数。M_tが従う確率過程は

$$M_t = M_{t-1} + W_t, \qquad W_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2) \tag{1}$$

- 測定値X_tは誤差V_tを含んでいるの確率分布に従うものとする

$$X_t = M_t + V_t, \qquad V_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_v^2) \tag{2}$$

> 前との差分は真値M_tが時間的に変化するという点にある
> この前提で$t-1$時点からt時点へのカルマンフィルタを考える

推定の対象であるMは確率変数であり、その実現値を得ることはできない。そのため、Mの実現値の推定として、Mの従う分布の平均値を採用する.
ここでは前提として$t-1$時点のM_{t-1}の確率分布は以下のように既に推定されているものとする；

$$M_{t-1} \sim \mathcal{N}(\hat{\mu}_{t-1}, \hat{\sigma}_{t-1}) \tag{3}$$

事前分布の推定

(3),(1)より、M_tの推定分布は

$$P(M_t = \mu_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_v^2 + \hat{\sigma}_{t-1}^2)}} \exp\left[\frac{(\mu_t - \hat{\mu}_{t-1})^2}{2(\sigma_v^2 + \hat{\sigma}_{t-1}^2)}\right] \tag{4}$$

となる。この分布のことを事前分布と呼ぶ。またこの時点での状態の推定値$\mu_t^{(\text{事前})}$として平均値の$\hat{\mu}_{t-1}$を採用し、フィルタ前推定値と呼ぶことにする。

尤度（条件付き確率）の推定

次に測定値$X_t = x_t$が得られたとして、その測定値が得られる尤度を考える。**尤度は$P(X_t = x_t | M_t = \mu_t)$であるから←あってるんかな？**、(2)に着目すると

$$P(X_t = x_t | M_t = \mu_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} \exp\left[\frac{(x_t - \mu_t)^2}{2\sigma_w^2}\right] \tag{5}$$

となる

事後分布の推定（カルマンフィルタ）

式(4),(5)から事後分布$P(M_t = \mu_t | X_t = x_t)$は

$$P(\mu_t | x_t) \propto P(x_t | \mu_t) P(\mu_t) \tag{6}$$

(6)は正規分布になり、その平均値$\mu_t^{(\text{事後})}$は

$$\mu_t^{(\text{事後})} = \mu_t^{(\text{事前})} + K_t(x_t - \mu_t^{(\text{事前})})$$

となる。ここでKはカルマンゲインと呼ばれる量で、

$$K_t = \frac{\sigma_v^2 + \sigma_{t-1}^2}{\sigma_v^2 + \sigma_{t-1}^2 + \sigma_w^2}$$

となる。また、(6)の分散σ_t^2は

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \frac{\sigma_w^2}{\sigma_v^2 + \sigma_{t-1}^2 + \sigma_w^2}(\sigma_v^2 + \hat{\sigma}_{t-1}^2) \\ &= (1 - K)(\sigma_v^2 + \hat{\sigma}_{t-1}^2) \end{aligned}$$

となる。$\mathcal{N}(\mu_t^{(\text{事後})}, \sigma_t^2)$をつかって使って次は$t+1$時点の状態の推定を行っていく