Das Elektrische Feld entspricht dem räumlichen Potentialgefälle

verläuft vom höheren zum niedrigeren Potenzial, ist also dem Anstieg entgegengerichtet

φ - elektr. Potential

Der räumliche Anstieg / die räumliche Änderung wird als Gradient bezeichnet und mit dem Nabla-Operator ausgedrückt

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$

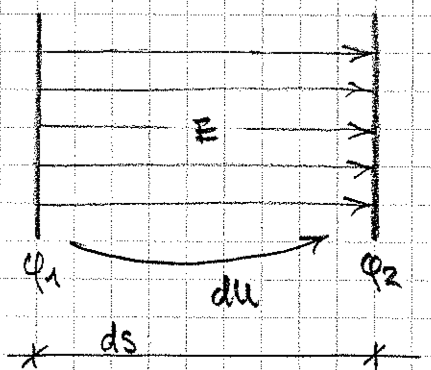
Nabla-Operator entspricht der partiellen Ableitung einer Funktion in die jeweilige Raumdimension

!

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = -\vec{\nabla}\varphi = -\begin{bmatrix} \partial/\partial x\,(\varphi(x,y,z)) \\ \partial/\partial y\,(\varphi(x,y,z)) \\ \partial/\partial z\,(\varphi(x,y,z)) \end{bmatrix}$$

=> In der Aufgabe verläuft das Potenzialgefälle linear zwischen zwei Äquipotenzialflächen → Skalare Betrachtung möglich.



Potenzialdifferenz → $dU = (\varphi_2 - \varphi_1)$

niedrigeres Potenzial

höheres Potenzial

$$E = \frac{dU}{ds} \rightsquigarrow U = \int E\,ds = Es$$

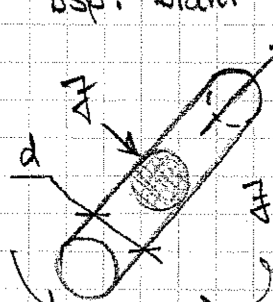
Wegelement

räumlich gilt:

$$\underline{\underline{U = \int \vec{E}\,d\vec{s}}}$$

Stromdichte J ist der Strom pro Fläche

Bsp: Draht



$$J = \frac{4I}{\pi d^2}$$

$$J = \frac{I}{A} = \frac{U}{RA} = \frac{1}{\rho\,\frac{L}{A}} \cdot \frac{U}{A} = \underbrace{\frac{1}{\rho}}_{\kappa} \cdot \frac{UA}{LA} = \kappa\,\frac{U}{L}$$

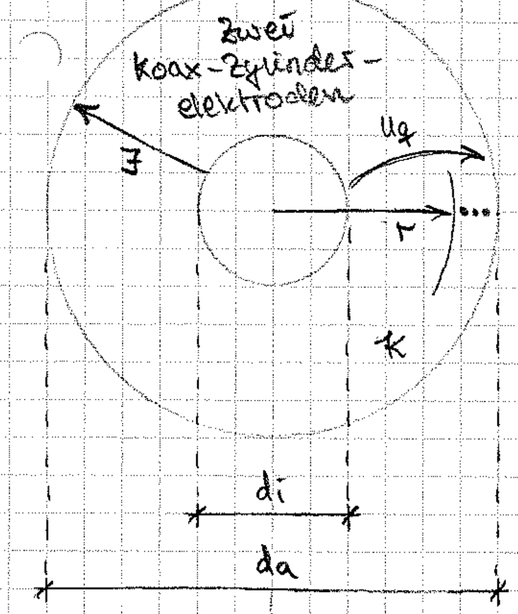
κ - Elektrische Leitfähigkeit

$$J = \kappa\,\frac{U}{L} = \kappa\,\frac{Es}{s} = \kappa E$$

$\rightsquigarrow$ hier: $\underline{\underline{J = \kappa E}}$ $\rightsquigarrow$ räumlich gilt $\underline{\underline{\vec{J} = \kappa\vec{E}}}$

geg: U_q, κ, d_i, d_a, h ges: $R, J(r), E(r)$

Zylinderhöhe + Diagramm



Für konstante A gilt:

$R = \rho \frac{l}{A}$ ⇝ hier ist A aber selbst eine Funktion des Weges:

$A(r) = 2\pi r h$ ⇝ Integrieren

$$R = \rho \cdot \int_{r_i}^{r_a} \frac{1}{A(r)}\, dr = \frac{\rho}{2\pi h} \int_{r_i}^{r_a} \frac{1}{r}\, dr = \frac{\rho}{2\pi h} \ln(r) \Big|_{r_i}^{r_a}$$

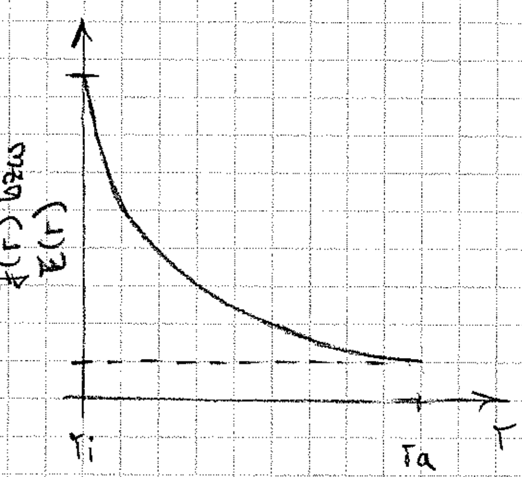
$\rho = \frac{1}{\kappa}$

$$R = \frac{\ln(r_a) - \ln(r_i)}{2\pi \kappa h} \rightsquigarrow R = \frac{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}{2\pi \kappa h}$$

$$J = \frac{I}{A(r)} = \frac{U_q}{R\, A(r)} = \frac{2\pi \kappa \cancel{h}\, U_q}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) 2\pi r \cancel{h}}$$

$$\rightsquigarrow J(r) = \frac{\kappa\, U_q}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) r}$$

⇝ Verlauf $\hat{=} \frac{1}{x}$

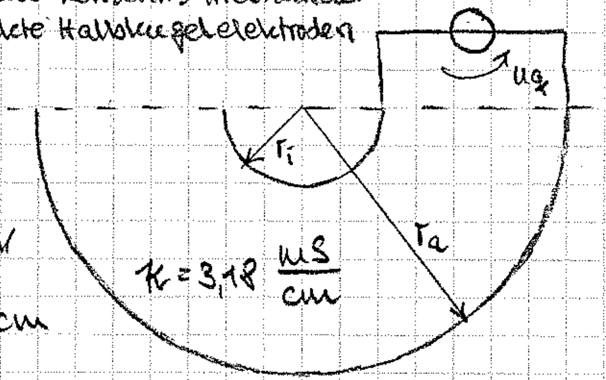


$$J = \kappa E \rightsquigarrow E = \frac{J}{\kappa} \rightsquigarrow E(r) = \frac{U_q}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) r}$$

GET (2) Rechenübung (24) Aufgabe (3) — Markus Symmank 05.06.2025

geg: zwei konzentr. ineinander-
gesteckte Halbkugelelektroden

ges: P



$u_q = 10V$

$r_i = 2cm$

$r_a = 10cm$

$$P = \frac{u^2}{R} \quad \rightsquigarrow \text{ bestimme } R$$

$$R = \frac{1}{\kappa}\int_{r_i}^{r_a} \frac{1}{A(r)}\, dr$$

$$A_{Kugel} = 4\pi r^2$$

$$\downarrow$$

$$A_{Halbk} = 2\pi r^2$$

$$R = \frac{1}{\kappa}\int_{r_i}^{r_a} \frac{1}{2\pi r^2}\, dr = \frac{1}{2\pi\kappa}\int_{r_i}^{r_a} \frac{1}{r^2}\, dr = -\frac{1}{2\pi\kappa}\left[\frac{1}{r}\right]_{r_i}^{r_a}$$

$$R = -\frac{1}{2\pi\kappa}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_i}\right) = \frac{-1\ V\,\cancel{cm}}{2\cdot\pi\cdot 3{,}18\cdot 10^{-3}\,A}\left(\frac{1}{10} - \frac{5}{10}\right)\frac{1}{\cancel{cm}}$$

$$R = -\frac{-4\cdot 10^3\ V}{2\pi\cdot 3{,}18\ A} = \frac{2\cdot 10^3}{3{,}18\,\pi}\,\Omega = \underline{\underline{200\,\Omega}}$$

$$P = \frac{u^2}{R} = \frac{100\,V^2}{200\,\Omega} = \underline{\underline{0{,}5\,W}}$$