Capítulo 1

Simplicidad del grupo $Hom(S^1)$

En 1999 E. Ghys en su trabajo [2] dio una adaptación del trabajo de Epstein [1] para el grupo de homeomorfismos que preservan orientación. Epstein en su trabajo [1] trabajó en variedades (espacios muy parecidos a un espacio $\mathbb{R}^m$) sugerimos para ese tema la bibliografía dada en [3]. En una sección utilizaremos el trabajo de Ghys para ver la simplicidad del grupo de homeomorfismos del círculo.

Convenio 1.1. En esta sección vamos hacer el abuso de notación.

- A partir de ahora y lo que resta de la sección, $Hom(S^1)$ denotará al grupo $\{h : S^1 \to S^1 | h \text{ es homeomorfismo y preserva orientación}\}$. Por preservar la orientación nos referimos como en el ejemplo **??**.
- A los subconjuntos cerrados conexos y no degenerados de S^1 serán llamados **sub-intervalos** de S^1.

En el ejemplo **??** hablamos de un espacio cociente que es homemorfo a la circunferencia. Anteriormente vimos que el grupo de homeomorfismos de la circunferencia es un grupo topológico, estudiaremos ahora que el grupo es conexo. Consideremos a S^1 como el cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ como en el ejemplo el ejemplo **??** y sean $\tilde{f}, \tilde{g} \in Hom(S^1)$ existen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótonas crecientes, parcialmente. Consideremos a,

$$H(x,t) = tg(x) + (1-t)f(x),$$

notemos que existe un intervalo entero y un punto tal que

$$\begin{aligned} H(x+1,t) &= tg(x+1)+(1-t)f(x+1) = tg(x)+t+(1-t)f(x)+(1-t) \\ &= tg(x+1)+(1-t)f(x+1)+t+(1-t) = H(x,t)+1 \end{aligned}$$

por tanto tenemos una homotopía entre g y f por tanto $Hom(S^1)$ es grupo conexo. El siguiente lema nos será útil en la demostración de la simplicidad del grupo de homeomorfismos de la circunferencia que preservan orientación.

Lema 1.2. Sea N subgrupo normal de $Hom(S^1)$. Dado $n \in N$ un homemorfismo distinto de la identidad entonces existen J un subintervalo de S^1

$$n(J) \cap J = \emptyset.$$

Demostración. Como n no es la identidad, existe $x \in S^1$ tal que $n(x) \neq x$, de la continuidad de n existe $U(x)$ intervalo abierto de S^1 tal que $n(U)$ no es la identidad. Por otro lado, como el espacio S^1 es espacio métrico compacto (y por tanto normal) sin pérdida de generalidad existe un abierto $V(n(x))$ tal que $\overline{V} \cap \overline{U} = \emptyset$.

Como $Hom(S^1)$ actúa de manera transitiva sobre intervalos de S^1 existe un homeomorfismo h tal que $h(U) = V$, en particular, como h es homeomorfismo, se tiene que

$$\overline{V} = \overline{h(U)} = h(\overline{U})$$

resta notar que,

$$\emptyset = \overline{U} \cap \overline{V} = \overline{U} \cap \overline{h(U)} = \overline{U} \cap h(\overline{U})$$

Haciendo $J = \overline{U}$ se concluye el resultado. □

Observación 1.3. Sean N subgrupo normal de un grupo G y $n \in N$.

1. Para cualquier $g \in G$ el elemento $n^{[g]}$ es un elemento de N por normalidad. Más aún $[n,g] = ngn^{-1}g^{-1}$ es un elemento de N.

Lema 1.4. Sea N subgrupo normal de $Hom(S^1)$. Dado $f \in Hom(S^1)$ soportado en un subintervalo I de S^1 existe $n \in N$ tal que $n(I) \cap I = \emptyset$.

Demostración. Sean $n_0 \in N$ distinto de la identidad $Id : S^1 \to S^1$ por tanto existen x y $U(x)$ un sub-intervalo abierto de S^1 tal que

$$n_0(\overline{U}) \cap \overline{U} = \emptyset.$$

Como $Hom(S^1)$ actúa transitivamente en los subintervalos de S^1 existe h en $Hom(S^1)$ tal que $h(\overline{U}) = J$, como h es un homeomorfismo al tomar la función inversa de h se obtiene que $J = h^{-1}(I)$, sustituyendo esto en la parte previa se obtiene que,

$$n_0(h^{-1}(I)) \cap J = \emptyset,$$

del hecho de que h es biyectiva, tomando ahora la imagen directa bajo h se tiene que,

$$h(n_0(h^{-1}(I)) \cap J) = h(n_0(h^{-1}(I))) \cap h(J) = \emptyset,$$

es decir

$$h(n_0(h^{-1}(I))) \cap I = \emptyset.$$

Consideremos a $n = n_0^{[h]}$, tenemos que n es un homeomorfismo que preserva orientación y cumple la propiedad deseada por la normalidad de N tenemos que $n \in N$.

□

Observación 1.5. De la demostración del lema 1.4 también existe $n_2 \in N$ tal que $n_2(I) \cap n(I) = \emptyset$, repetiremos una parte de la prueba anterior. Como los homeomorfismos que preservan orientación actuan transitivamente en los sub intervalos, existe $h : S^1 \to S^1$ tal que $h(n(I)) = I$

$$n_2^{[h]}(n(I)) \cap n(I)$$

En resumen, dado un homeomorfismo soportando un sub intervalo I, podemos encontrar un homeomorfismo tal que podemos separa los puntos de I. La ténica de considerar cojugados será muy usada en este texto.

Lema 1.6. Sea N un subgrupo normal de $Hom(S^1)$. Se tiene que el conmutador de dos elementos de $Hom(S^1)$ soportados en un mismo intervalo es un elemento de N.

Demostración. Sean f_1 y $f_2 \in Hom(S^1)$ soportados en I, un sub intervalo de S^1, luego por el lema 1.4 existen n_1, $n_2 \in N$ tales que I, $n_1^{-1}(I)$ y $n_2^{-1}(I)$ son conjuntos disjuntos. Definimos a $g_1 = [n_1^{-1}, f_1^{-1}]$ y a $g_2 = [h_2^{-1}, f_2^{-1}]$ que por normalidad son elementos de N. Además por el lema **??** se tiene que,

1. $g_1 = f_1$ y $g_2 = f_2$ en puntos de I,
2. g_1 está soportando en $n_1(I) \cup I$ y que
3. g_2 está soportando en $n_2(I) \cup I$.

Como I, $n_1(I)$ y $n_2(I)$ son conjuntos ajenos, dado $x \in n_1(I)$ se cumple que,

$$[g_1, g_2](x) = [(f_1^{-1})^{[n_1^{-1}]}, id_{S^1}](x) = id_{S^1}(x)$$

y

$$[f_1, f_2](x) = id_{S^1}(x).$$

El caso es análogo si $x \in n_2(I)$ concluimos que $[g_1, g_2] = [f_1, f_2]$. □

Vamos a usar una observación que previamente argumentamos.

Observación 1.7. Si un grupo G es generado por un subconjunto X, su primer grupo derivado G' es generado por conjugados de conmutadores de elementos de X.

El siguiente teorema es presentado en [**?**] como Theorem 4.3.

Lema 1.8. Sea N un subgrupo normal de $Hom(S^1)$. Dados I_1, I_2 e I_3 intervalos que cubren a S_1 que cumplen,

1. $I_1 \cap I_2 \cap I_3 = \emptyset$,
2. pero no vacía dos a dos.

Sean

$$G_j = \langle \{g \in G : g \text{ está soportando en } I_{i \neq j} \cap I_j\} \rangle$$

donde $j = 1, 2, 3$, los subgrupos generados por los elementos que tienen soporte I_j respectivamente. Se cumple para $G = \langle G_1 \cup G_2 \cup G_3 \rangle$ que $G' \subset N$.

Demostración. Para ello, notemos de la obervación anterior G' es generado por los conjugados de los conmutadores de $G_1 \cup G_2 \cup G_3$. Sea $g \in G'$ del lema **??** tenemos que

$$g = \prod_{i}^{n} [h_i^{[k_{2_i}]}, f_i^{[k_{1_i}]}]$$

donde h_i y $f_i \in G_1 \cup G_2 \cup G_3$ y k_{1_i} y $k_{2_i} \in Hom(S^1)$ notemos tanto h_i como f_i tienen soporte contenido en un mismo intervarlo, del lema 1.6 tenemos que $[h_i^{[k_{2_i}]}, f_i^{[k_{1_i}]}] \in N$ para $i = 1, \cdots n$. Por tanto $g \in N$ y en consecuencia $\langle G_1 \cup G_2 \cup G_3 \rangle \subset N$. □

Teorema 1.9. El grupo $Hom_+(S^1)$ de homeomorfismos que preservan la orientación es simple.

Demostración. Sean N un subgrupo normal de $Hom_+(S^1)$ y I_1, I_2 e I_3 intervalos que cubren a S_1 que cumplen las propiedades del lema 1.8. Considerando a $Hom(S^1)$ con la topología compacto abierta este grupo es uno topológico. Las intersecciones $I_1 \cap I_2$, $I_2 \cap I_3$ y $I_3 \cap I_1$ son espacios compactos y la unión de ellos, K tambien es un conjunto compacto. Considerando la unión de los interiores de cada intersección anterior tenemos un abierto U y un elemento básico $\mathcal{U}(K, U)$. Notemos que claramente $Id_{S^1} \in \mathcal{U}(K, U)$ así este básico es no vacío.

Sean x, y y z en $I_1 \cap I_2$, $I_2 \cap I_3$ y $I_3 \cap I_1$ respectivamente. Por la quivalencia entre la topología compacto abierta y la de convergencia uniforme existe $\varepsilon > 0$ tal que en metrica uniforme se tiene que $B_\varepsilon(Id) \subset \mathcal{U}(K, U)$. Sea $f \in B_\varepsilon(Id)$ se tiene que $f(x)$, $f(y)$ y $f(z)$ están en los interiores de las intersecciones $I_i \cap I_j$ respectivamente.

Por un resultado existen g_1, g_2 y $g_3 \in Hom(S^1)$ tal que tienen soporte en $I_1 \cap I_2$, $I_2 \cap I_3$ y $I_3 \cap I_1$ respectivamente y son f en vecindades de x, y y z. Más aún se tiene que

$$g_3^{-1} g_2^{-1} g_1^{-1} f \equiv Id \in G.$$

por tanto existen $h_i \in G_i$ tales que

$$f = g_1 g_2 g_3 h_1 h_2 h_3$$

y por tanto $B_\varepsilon(Id) \subset G$. Como $Hom_+(S^1)$ es un grupo conexo tenemos que $\langle B_\varepsilon(Id) \rangle = Hom_+(S^1)$ de esta manera tenemos que $Hom_+(S^1) = G$. □

Bibliografía

[1] David BA Epstein. The simplicity of certain groups of homeomorphisms. *Compositio Mathematica*, 22(2):165–173, 1970.

[2] Étienne Ghys. Groups acting on the circle. *Enseignement Mathematique*, 47(3/4):329–408, 2001.

[3] Héctor Sánchez Morgado and Oscar A Palmas Velasco. *Geometría riemanniana*. Universidad Nacional Autónoma de México, 2007.