Índice general

Capítulo 1

Teoría y definiciones

Introducción

A lo largo de este texto utilizaremos las nociones de topología general y teoria de grupos. Nuestra primera meta consta de introducir notación y teoremas correspondientes a espacios topológicos, operadores topológicos, homemorfismos y finalmente llegar a espacios generados. De teoría de grupos, hablaremos de morfismos de grupos, grupos derivados para terminar en grupos simples.

Nuestra meta para este capítulo, consta de poder hablar brevemente de grupos topológicos, hablaremos de un ejemplo concreto de un espacio de funciones donde el reto es demostrar mediante la topología la continuidad de las operaciones de grupo. La bibliografía en que nos basamos es estándar, esto es, libros de cursos o libros de las editoriales de la UNAM.

1.1. Espacios topológicos

Vamos a usar la notación estándar de conjuntos. La pertenencia de un elemento x a un conjunto X se denota por $x \in X$. Dados dos conjuntos A y B denotaremos la contención del conjunto A en el conjunto B por $A \subset B$ y la igualdad de conjuntos $A = B$ representa que se dan las contenciones $A \subset B$ y $B \subset A$.

La unión del conjunto A con B se representa por $A \cup B$, la intersección del conjunto A con el conjunto B se representa por $A \cap B$. $A \setminus B$ representa el conjunto de los elementos que están en A pero que no están en B en particular a $X \setminus B$ le diremos el complemento de B en X, finalmente $\mathcal{P}X$ representa el conjunto potencia de X, es decir, la familia $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}$. Sean X, Y conjuntos y $f : X \to Y$ una función, para cualquier $A \subset X$ el conjunto,

$$f(A) = \{y \in Y : \text{ existe } x \in A \text{ y } f(x) = y\}$$

será llamado imagen directa de A bajo f. Por otro lado dado $B \subset Y$ el conjunto

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

será llamado la imagen inversa del conjunto B bajo f.

Observación 1.2. En general tomar la imagen inversa de una imagen directa o en orden alterno, no se obtiene como resultado el mismo conjunto. Pero se tiene que

$$f(f^{-1}(B)) \subset B$$
$$A \subset f^{-1}(f(A)).$$

La primera contención es igualdad si f es sobreyectiva y la segunda contención es igualdad si f es inyectiva, es claro que si f es biyectiva tenemos las dos igualdades.

Ejemplo 1.3. Sea $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ dada por, $f(1) = f(3) = 1$, $f(2) = f(4) = 3$. Esta función no es inyectiva ni sobreyectiva. Consideremos a $\{1, 4\}$, notemos que $f^{-1}(\{1, 4\}) = \{1, 3\}$ pero $f(f^{-1}(\{1, 4\})) = \{1\}$. Por otro lado, consideremos a $\{1, 2\}$ y notemos que $f(\{1, 2\}) = \{1, 3\}$ pero que $f^{-1}(\{1, 3\}) = \{1, 2, 3, 4\}$.

En la práctica es usual no indicarse el dominio e imagen de una función pues implícitamente se da a entender que el lector no tiene inconveniente.

Definición 1.4. Sea X un conjunto y $\tau \subset P(X)$ una familia de subconjuntos de X. Decimos que τ es una **topología** para X si τ cumple que;

1. $\emptyset$, X son elementos de τ.

2. Para cada subfamilia finita de τ, $\{A_i\}_{i=1}^n$ se tiene que $\bigcap_{i=1}^n A_i$ es un elemento de τ.

3. Para cada subfamilia $\{A_i\}_{i\in J}$ donde I es un familia de índices arbitrario, se tiene que $\bigcup_{i\in I} A_i$ es un elemento de τ.

Por **espacio topológico** nos referimos a un par (X,τ) donde X es un conjunto y τ es una topología para X. Denotaremos al espacio (X,τ) por X_τ. A los elementos U de τ les llamaremos **conjuntos abiertos**. Un conjunto V se dice **cerrado** si es complemento de un conjunto abierto es decir existe U conjunto abierto tal que $V = X \setminus U$.

Nota 1.5. La segunda condición se conoce como **cerradura bajo intersecciones finitas** o que **familia es cerrada bajo intersecciones finitas.** La tercera condición se conoce como **cerradura bajo uniones arbitrarias** o que **la familia es cerrada bajo uniones arbitrarias.**

Ejemplo 1.6. Sean X un conjunto y la familia 2^X, el par formado por $(X, 2^X)$ es un espacio topológico y es llamado **espacio discreto**. Por otro lado sea $\tau = \{\emptyset, X\}$, esta familia cumple la definición de topología, el espacio (X,τ) es llamado **espacio indiscreto**.

Además, si X contiene más de un punto, las familias 2^X y τ del ejemplo anterior son distintas pero se da la contención $\tau \subset 2^X$ notemos que en consecuencia un conjunto puede tener mas de una topología y entre ellas distintas.

La topología guarda información importante del conjunto X que nos puede ayudar a distinguir propiedades. En el ejemplo, los espacios discreto e indiscreto no distinguen mucho sobre X, estas dos topologías en este aspecto son triviales.

Convención 1.7. Cuando el contexto sea claro sobre el espacio topológico vamos prescindir de la notación de la topología y simplemente diremos que X es espacio topológico.

Ahora, un resultado que nos permitirá hablar de espacios topológicos en en subconjuntos, esto nos permitirá de hablar sin ambigüedades respecto a los ejemplos concretos que estudiaremos.

Teorema 1.8. Sea X un espacio topológico $Y \subset X$ entonces $\tau_Y = \{A \cap U : U \in \tau\}$ es una topología para Y. Por **subespacio** Y de X nos referimos al espacio (Y, τ_Y).

Convención 1.9. El tema que no vamos a estudiar los temas de bases y sistema de vecindades. Para estos temas tenemos en la bibliografía [**?**] capitulo 2, página 58 para bases de vecindades y capitulo 3, página 73 para bases para una topología.

La familia de conjuntos que acontinuación vamos a detallar, nos da una manera de obtener espacios topológicos mediante un sustema de vecindades. Este ejemplo es muy rico en propiedades y en ocaciones un fuerte contraejemplo.

Ejemplo 1.10. Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. Definimos una familia de conjuntos mediante las siguientes condiciones;

1. dado $(x, y) \in X$ y $r > 0$ si $y > 0$ definimos el conjunto,

$$B_r((x, y), r) = \{(w, z) \in X : \|(x, y) - (w, z)\| < r\},$$

   donde hacemos enfasis que es la norma usual de $\mathbb{R}^2$ y $z \neq 0$.

2. Si $y = 0$ tomamos el conjunto ;

$$\beta((x, 0)) = B_r((x, r), r) \cup \{(x, 0)\}.$$

Hemos definido una familia de conjuntos sobre los puntos de X, esta familia de conjuntos induce una base para una topología sobre X y este espacio es conocido como **plano de Moore**.

Notemos que en este espacio $\mathbb{R} \times \{0\} \subset X$, pero la restricción al subespacio $\mathbb{R} \times \{0\}$ nos da un conjunto discreto mientras que la restricción al plano $\{(x, y) \in X : y > 0\}$ es el plano positivo en $\mathbb{R}^2$.

AXIOMAS DE SEPARACION ACÁ

Para operadores topológicos utilizaremos la siguiente notación.

Definición 1.11. Sea X un espacio topológico y U subconjunto de X.

- Diremos que U es **vecindad** de un punto x a si, $x \in U$ y $U \in \tau$. A la familia de vecindades de un punto x la denotaremos mediante $\mathcal{N}(x)$.
- Al conjunto **interior** de A en X lo denotaremos por

$$\text{Int}(A) = \{x \in A : \text{ existe } U \in \mathcal{N}(x) \text{ tal que } U \subset A\}.$$

- Al conjunto **clausura** de A en X lo denotaremos por,

$$\text{Cl}(A) = \{x \in A : \text{para toda } U \in \mathcal{N}(x) \text{ se cumple que } U \cap A \neq \emptyset\}.$$

- Denotaremos por Fr_X al conjunto $\mathrm{Cl}(A^c) \cap \mathrm{Cl}(A)$ a este conjunto le llamaremos la **frontera** de A en X.

Convención 1.12. Cuando el contexto lo permita simplemente denotaremos por $\mathrm{Int}(A)$ al interior, $\mathrm{CL}(A)$ la clausura y $\partial(A)$ a la frontera de A en X.

En esta parte de la topología nos interesa estudiar los espacios mediante de las propiedades de X o de τ (incluso ambas) y compararlas mediante las de otros espacios, esto es, poder demostrar que un espacio desconocido tenga propiedades de espacios ya conocidos, por lo que podemos clasificar por medio relaciones entre espacios y trabajar con un espacio ya conocido o mas estudiado.

Definición 1.13. Sea X espacio topológico y una función $h : X \to X$.

1. Dado B subconjunto de X, $h|_B$ denotará la restricción $h : B \to h(B)$ de h a B.

2. Decimos que h es **continua** si para cada conjunto abierto U se cumple que $h^{-1}(U)$ es un conjunto abierto.

3. Sea h una función continua y biyectiva. Decimos que h es un **homeomorfismo** si la función inversa de h, $h^{-1} : X \to X$ es continua.

Ejemplo 1.14. Sean X un conjunto con mas de un punto y las topologías 2^X y $\tau = \{\emptyset, X\}$. Consideremos la función

$$Id_X : X_\tau \to X_{2^X}$$

dada por

$$Id_X(x) = x.$$

Notemos que para cada $x \in X$ el conjunto $\{x\}$ es un conjunto abierto en X_{2^X}, pero $Id_X^{-1}(\{x\}) = \{x\}$ no lo es en X_τ. Sin embargo reescribiendo la función anterior de la siguiente manera,

$$Id_X : X_{2^X} \to X_\tau$$

dada por

$$Id_X(x) = x,$$

si es continua pues $Id_X^{-1}(X) = X$ el cual es un conjunto abierto, el caso $\emptyset$ es trivial. En particular, una función continua y biyectiva no siempre tiene inversa continua.

El siguiente resultado es conocido como el **lema de pegadura**

Proposición 1.15. Sean $\mathcal{U} = \{A_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de abiertos tales que $\bigcup \mathcal{U} = X$ y $f : X \to Y$ una función. Si $f_\alpha = f|_{A_\alpha}$ es continua para todo $\alpha \in A$ entonces f es continua.

Invariantes topológicos

Los invariantes topológicos son propiedades que una topología tiene y que éstas se preservan mediante homeomorfismos. Esto es sean X, Y espacios y $\mathcal{P}$ una propiedad topológica tal que X posee a $\mathcal{P}$ se dice que $\mathcal{P}$ es un **invariante topológico** si para todo homemorfismo $h : X \to Y$, Y tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

Además es importante mencionar el hecho de que un espacio pueda tener una propiedad $\mathcal{P}$ para una topología en particular, y no poseer la propiedad con otra topología definida en el mismo conjunto. Veremos dos de las propiedades más estudiadas e importantes del análisis moderno.

Compacidad

Definición 1.16. Sean X un espacio topológico y A subconjunto de X. Una familia de abiertos $(U_i)_{i\in I}$ es una **cubierta abierta** para A si $A \subset \bigcup_i U_i$. Por **subcubierta abierta** nos referimos a una subfamilia $(U_{i_j})_{j\in J}$ de $(U_i)_{i\in I}$ tal que $A \subset \bigcup_j U_{i_j}$.

Decimos que un espacio topológico es **compacto** si para toda cubierta abierta de X existe una subcubierta abierta y finita para X. Decimos que un subconjunto $A \subset X$ es compacto si lo es como subespacio.

Un teorema importante respecto a funciones continuas y conjuntos compactos es el siguiente teorema y puede consultarse en la página 121 de [**?**].

Teorema 1.17. Sea C un subconjunto compacto de X, para toda función continua $f : X \to Y$ el conjunto $f(C)$ es un conjunto compacto en Y.

Esto puede encontrarse en página 120 de [**?**].

Teorema 1.18. Sean X un espacio y un subconjunto $B \subset X$.

1. Si X es compacto y si B es cerrado entonces es compacto.

2. Si X es T_2 y si B es compacto entonces B es cerrado.

Una demostración puede encontrarse en [?] VIII.1.22 Teorema. En palabras simples, la imagen continua de un conjunto compacto es compacta. Para el tema de funciones continuas Una demostración de este teorema se puede encontrar en capitulo 2, Teorema 2.5

Teorema 1.19. Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $K \subset A$. Si f es una función continua y K es un conjunto compacto entonces f es uniformemente continua sobre K.

Conexidad

Decimos que X es **disconexo** si existe abiertos U y V ajenos y no vacíos tales que $X = U \cup V$. Decimos que un espacio X es **conexo** si no es disconexo. Un subconjunto $Y \subset X$ es conexo (o disconexo) si lo es como subespacio.

El siguiente teorema se encuentra en [?] como theorem 26.3.

Teorema 1.20. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua. Dado C un subconjunto conexo de X se tiene que $f(C)$ es un conjunto conexo.

Topología métrica

Un **espacio métrico** es un par (X, d) donde X es un conjunto y $d : X \times X \to [0, \infty)$ es una función que satisface las siguientes condiciones;

1. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$

A la función d le llamamos una **métrica** para X. Al par (X, d) le denotaremos por X_d.

Observación 1.21. La notación X_d hacemos énfasis es que X es el conjunto con métrica d, más adelante veremos que un espacio métrico es un espacio topológico por lo que X_d es el equivalente a X_τ donde τ es la generada por la métrica salvo que ahora indicamos la cualidad métrica de esta topología.

Ejemplo 1.22. Dados $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, la norma euclidiana,

$$d(\vec{a}, \vec{b}) :=\| \vec{a} - \vec{b} \|$$

define una métrica en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1.23. Sean X un conjunto no vacío y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definida mediante:

$$d(a,b) = \begin{cases} 1, & si \quad a \neq b; \\ 0, & si \quad a = b. \end{cases}$$

d es conocida como la **métrica discreta** y X_d como **espacio métrico discreto**.

Ejemplo 1.24. - Sea X_d espacio métrico. Definimos,

$$\bar{d}(a,b) = \begin{cases} 1 & si \quad 1 < d(a,b); \\ d(a,b) & si \quad d(a,b) < 1. \end{cases}$$

$\bar{d}$ es una métrica para X con $\bar{d}(a,b) \leq 1$ para cuales quiera a, $b \in X$.

Definición 1.25. Sean $\varepsilon > 0$ y $x \in X_d$. Definimos a la **bola abierta** de centro x y radio ε como

$$B_d(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}.$$

De manera parecida definimos a la **bola cerrada** de centro x y radio ε como

$$\overline{B}_d(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) \leq \varepsilon\}.$$

Para diferenciar la métrica que X pueda tener (y por tanto las bolas de X) denotaremos $B_d(x,\varepsilon)$ y diremos que es una **d-bola.** En caso de que no haya confusión simplemente denotaremos $B(x,\varepsilon)$. Tenemos los conceptos necesarios para definir una topología para un espacio métrico.

Proposición 1.26. Sea X espacio métrico. La familia $\{B_d(x,\varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}$ de todas las d-bolas es base para una topología sobre X.

Teorema 1.27. Si x, $y \in X_d$ con $x \neq y$ entonces existen vecindades $U(x)$ y $V(y)$ tales que $U \cap V = \emptyset$.

Observación 1.28. El teorema anterior nos dice que los espacios métricos son espacios Hausdorff.

Terminamos esta parte con la siguiente definición que es muy usada en los artículos de [**?**], [**?**] y [**?**].

Definición 1.29. Decimos que X es un **continuo** si es un espacio métrico, compacto y conexo.

Al estudiar espacios métricos nos vemos en la opción de no estudiar los axiomas de separación, que es una parte muy importante de la topología general. De nuevo, recomendamos el siguiente texto donde se puede profundizar este tema. Es claro que no hablar de este tema nos deja un estudio sesgado, pero usaremos solo un axioma de separación hasta la parte de la topología del grupo de homeomorfismos de la circunferencia. Incluso, solo es necesario concordar el tercer axioma separación.

Topología conciente

En topología se estudia distintas maneras de obtener espacios topológicos como el subespacio, los productos pero otra mas compleja es la topología generada por funciones o familia de funciones, en sí es obtener un espacio topológico donde una función o una familia de funciones son continuas. En [**?**], se explica de manera adecuada este tema, desde el capitulo 3 hasta el 5. Sin embargo tomaremos las definiciones de [**?**] y de [**?**] puesto que el primero es un libro de actual circulación y el otro es un recurso en linea y su acceso no es limitado.

Definición 1.30. Sean X un espacio topológico, Y un conjunto y $f : X \to Y$ una función sobreyectiva. La topología mas fina en Y para la cual f es continua se llama **topología de identificación** inducida por f. A f se le llama **identificación**.

Dado X un espacio y $A \subset X$, consideremos a $Y = (X \setminus A) \cup \{A\}$, el subespacio A ha sido colapsado a un punto $\{A\}$, sea

$$q(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in X \setminus A \\ A \text{ si } x \in A. \end{cases}$$

la topología final inducida por q es llamada la **topología identificación**; el espacio resultante se llama **espacio de identificación** y a q se le llama **identificación**.

Ejemplo 1.31. Consideremos a $\mathbb{Z}$ como subespacio de $\mathbb{R}$ y al cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, este espacio cociente tiene un subespacio homeomorfo a S^1 por cada intervalo $[n, n+1]$ colapsando los números enteros a un punto. A este espacio se le conoce como **ariete hawaiano**.

Los resultados sobre la topología de identificación se pueden consultar en [**?**] página 87. Nos iremos ahora al tema es espacio cociente. Veamos ahora los espacios cocientes.

Sean X espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia en X. Recordemos que una relación de equivalencia induce una partición de un conjunto en subconjuntos ajenos que son las clases de equivalencia, las cuales se definen por $[x] = \{y \in X : x \sim y\}$. La familia de las clases de equivalencia es denotado por $X/\sim$ ie,

$$X/\sim = \{[x] : x \in X\},$$

tenemos una función sobreyectiva,

$$f : X \to X/\sim$$

dada por

$$f(x) = [x].$$

Definición 1.32. Con la topología de identificación inducida por f a la familia $X/\sim$ se llama espacio cociente de X bajo la relación $\sim$.

Ejemplo 1.33. Sea $f : \mathbb{R} \to S^1$ la función exponencial, $f(s) = e^{2\pi is}$ es una identificación talque $f(s) = f(t)$ si y solo si $t - s \in \mathbb{Z}$.

El siguiente teorema se encuentra en [**?**] como teorema IV.2.16.

Teorema 1.34. Sea $f : X \to Y$ una identificación. Si se define una relación tal que $x \sim y$ si y solo si $f(x) = f(y)$, entonces f determina un homeomorfismo $\tilde{f} : X/\sim \to Y$.

Ejemplo 1.35. Nuevamente, consideremos a $\mathbb{Z}$ como subespacio de $\mathbb{R}$ y la relación; $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Z}$. Esta relación es de equivalencia. En efecto,

1. $x - x = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. Supongamos que $x - y \in \mathbb{Z}$, entonces claramente $y - x = -(x - y) \in \mathbb{Z}$ y por tanto $y \sim x$.

3. Si $x - y \in \mathbb{Z}$ y $y - z \in \mathbb{Z}$ resta notar que

$$x - z = x - y + y - z$$

el cual es un numero entero. Por tanto $x \sim z$.

Del teorema anterior y de la función exponencial se tiene que $(\mathbb{R}/\sim) \cong S^1$. La función $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\sim$ dada por $\pi(x) = [x]$ está bien definida y es una función cociente. Definimos a $Hom(\mathbb{R})$ los homeomorfismos monótonos crecientes de la recta que cumplen la propiedad,

$$\tilde{f}(x+1) = \tilde{f}(x) + 1.$$

Este homeomorfismo induce un homeomorfismo,

$$f : \mathbb{R}/\sim \to \mathbb{R}/\sim$$

dado por $f = \pi(\tilde{f})$. Notemos que de esto se induce un homeomorfismo de la circunferencia en la circunferencia $f : S^1 \to S^1$. Un homeomorfismo de este tipo se dice que **preserva orientación** si es creciente y no la preserva si es decreciente.

Concluimos esta sección con toda la notación referente a topología que vamos a usar o se usan en los artículos consultados. En caso dado se use otro resultado será tratado en la respectiva sección.

1.36. Grupos

En este texto estudiaremos nociones de álgebra moderna, para ello planteamos la notación necesaria para desarrollar dichos temas. Para el desarrollo de esto temas recomendamos la siguiente literatura donde nos hemos basado en la estructura de [**?**] y contenido de [**?**].

Definición 1.37. Sea G un conjunto no vacío. Por grupo nos referimos a una terna $(G, \circ, e)$ con $\circ : G \times G \to G$ una operación en G y e un elemento de G tales que

1. La operación $\circ$ es asociativa.

2. para cada $g \in G$ existe $h \in G$ tal que $\circ(g,h) = \circ(h,g) = e$. A h se le llamara un inverso de g.

3. Para todo $g \in G$ se cumple que $\circ(g,e) = \circ(e,g) = g$.

Convención 1.38. Para evitar entrar en resultados interesantes que no usaremos de manera explícita recurrimos a completar el tema con los teoremas que hablan de la unicidad de los elementos e y g como en [**?**]. A partir de ahora denotaremos simplemente por gh a la operación $\circ(g,h)$, en otras palabras, hacemos el abuso de notación, $\circ(g,h) := gh$.

Definición 1.39. Sea G un grupo y subconjunto H de G. Decimos que H es **subgrupo** de G denotado por $H \leq G$, si la operación $\circ : H \times H \to G$ es una operación cerrada en H.

Observación 1.40. Sea $X \subset G$ denotemos por $\langle X \rangle$ a la intersección de subgrupos de G que contiene a X. $\langle X \rangle$ es un subgrupo de G que contiene a X. Dicho grupo es llamado el **grupo generado por** X. Si X es finito, $X = \{a_1, \cdots, a_n\}$ entonces $\langle X \rangle$ es denotado por $\langle a_1, \cdots, a_n \rangle$. Más aún si $X = \emptyset$ notemos que $\langle X \rangle = \{e_G\}$ el grupo trivial.

El siguiente resultado es tomado de [**?**] como proposición 3.3.1.

Proposición 1.41. Si H es un subgrupo que contiene a X entonces $\langle X \rangle \subset H$.

La proposición anterior nos da una propiedad minimal respecto a la contención de X. En otras palabras $\langle X \rangle$ es el minimo subgrupo que contiene a X.

Definición 1.42. Sea G un grupo y $X \subset G$ no vacío. Una palabra en X es un elemento $w \in G$ de la forma

$$w = x_1^{a_i} \cdots x_n^{a_n},$$

donde $n \in \mathbb{Z}^+$, $x_i \in X$ y $a_i \in \mathbb{Z}$ para toda i. Denotamos por $\mathbf{W}(X)$ el conjunto de todas la palabras de X. Observemos que $X \subset \mathbf{W}(X)$ además nos es conveniente definir a $\mathbf{W}(\emptyset) := \{e_G\}$.

El siguiente resultado puede encontrarse en

Teorema 1.43. Sea $X \subset G$ se tiene que $\langle X \rangle = \mathbf{W}(X)$.

De esta manera tenemos una descripción de los elementos de $\langle X \rangle$ es decir, para cada $w \in \langle X \rangle$ se tiene una representación mediante,

$$w = x_1^{a_i} \cdots x_n^{a_n}$$

incluso se puede tomar a los elementos $a_i \in \{-1, 1\}$ en algunos caso es importante tener la simetría de X, el conjunto $X^- = \{x^{-1} | x \in X\}$ pero dependerá de la utilidad de la descripción. Ahora estableceremos la notación para clases laterales que nos permitirá desarrollar el resto de nuestro trabajo.

Definición 1.44. Sea G un grupo y subconjuntos H, K de G.

1. El conjunto KH se define como $KH = \{kh : k \in K \text{ y } h \in H\}$. En particular cuando K conste de un solo punto, $K = \{k\}$ denotaremos al conjunto KH por kH.

2. Para todo $g \in G$ el conjunto $gH = \{gh : h \in H\}$ le llamaremos **clase lateral izquierda**; análogamente por **clase lateral derecha** nos referimos al conjunto $Hg = \{hg : h \in H\}$. A la familia $G/H_{der} = \{gH : g \in G\}$ le llamaremos la familia de clases laterales derechas de H y análogamente a $G/H_{izq} = \{Hg : g \in G\}$ le llamaremos la familia de clases laterales derechas de H.

Observación 1.45. De la definición anterior tenemos unas observaciones interesantes.

1. Las clases de un conjunto forma una partición de G y por tanto las clases inducen una relación de equivalencia.

2. Más aún existe una correspondencia entre clases laterales.

   Sea

$$\begin{aligned} \varphi : G/H_d &\to G/H_i \\ gH &\mapsto Hg^{-1} \end{aligned}$$

   esta función cambia una clase lateral derecha a una izquierda. Veamos que es una función biyectiva. La función es sobre, pues para $g \in G$ y para el elemento Hg tenemos que g^{-1} es tal que $\varphi(g^{-1}H) = Hg$. Resta ver que es inyectiva, sean g_1H y g_1H clases derechas y supongamos que

$$Hg_1^{-1} = \varphi(g_1H) = \varphi(g_2H) = Hg_2^{-1}$$

   Sea $g_1h_1 \in g_1H$ notemos que

$$g_1h_1(h_1^{-1}g_1^{-1}) = e$$

   como $Hg_2^{-1} = Hg_1^{-1}$ existe h_2 tal que $h_2g_2^{-1} = h_1^{-1}g_1^{-1}$, así en la ecuación previa tenemos que,

$$g_1h_1(h_2g_2^{-1}) = e$$

es decir, $g_1h_1 = g_2h_2^{-1}$ dando la contención $g_1H \subset g_2H$, la contención recíproca es idéntica se obtiene que $g_1H = g_2H$. Concluimos que φ es biyectiva.

Sin embargo, esta correspondencia no deja en claro que $gH = Hg$ un ejemplo de esto se puede encontrar en 111 imate.

3. Dado $g \in G$ y $h \in H$ si $ghg^{-1} \in H$ entonces existe $h_1 \in H$ tal que $ghg^{-1} = h_1$ es decir, $gh = h_1g$ que de acuerdo con la notación de clases, cada elemento de una clase izquierda es un elemento de la correspondiente clase derecha, de manera precisa $gH = Hg$.

La situación anterior es sorprendente y no solo es una curiosidad matemática, esto nos da la estructura de como clasificar grupos.

Definición 1.46. Sea G un grupo y H subgrupo de G.

1. Dados $g, h \in G$ al elemento hgh^{-1} le llamaremos el conjugado de g por h y vamos a denotarlo por $g^{[h]}$.

2. Decimos que g **normaliza** a H si $gHg^{-1} \subset H$. Al conjunto $N_G(H) = \{g \in G : gH = Hg\}$ le llamamos el **normalizador** de H en G.

3. Si $G = N_G(H)$ decimos que H es **normal** en G y denotaremos esto por $H \trianglelefteq G$.

Una manera de construir nuevos grupos por grupos establecidos es por medio de los cocientes. 113 imate

Teorema 1.47. Sea H subrupo normal de G entones el conjunto G/H es un grupo.

También, es necesario establecer las funciones entre grupos que preservan estructura de grupo en si mismo.

Definición 1.48. Sea G un grupo.

1. Una función $\varphi : G \to G$ es un **morfismo** de grupos si

$$\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h).$$

2. Definimos al **Kernel** de φ al conjunto $Ker(\varphi) = \{g \in G : \varphi(g) = e\}$.

3. Diremos que un morfismo de grupos φ es:

- **Monomorfismo:** si φ es inyectiva.
- **Epimorfismo:** si φ es sobreyectiva
- **Isomorfismo:** si φ es biyectiva.

Una parte de la teoría de cubrientes nos permite definir el siguiente morfismo de grupos.

Ejemplo 1.49. Del ejemplo 1.35 consideremos a $S^1 = \mathbb{R}/\sim$ y al subgrupo de homeomorfismos que preservan orientación que vamos a de notarlo por $Hom_+(S^1)$. De la teoría de cubrientes para $f : S^1 \to S^1$ un homeomorfismo que preserva la orientación se tiene que existe una función $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\pi(\tilde{f}) = f$, esto es $f([x]) = [\tilde{f}(x)]$ y que satisface la relación,

$$\tilde{f}(x+1) = \tilde{f}(x) + 1.$$

Tenemos un morfismo de grupos $\varphi : Hom_+(S^1) \to Hom(S^1)$. Recíprocamente toda función $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estrictamente creciente que satisface la relación anterior induce un homeomorfismo en S^1. φ es un epimorfismo de grupos.

Los siguientes términos son importantes, tanto desde la historia del estudio de los grupos, como para definir a las acciones sobre conjuntos.

Definición 1.50. Sea X un conjunto no vacío y G un grupo.

1. A la familia $S_X = \{f : X \to X | f \text{ es biyectiva } \}$ le llamaremos el **grupo simétrico** de X. Si X es finito de cardinalidad n denotamos a S_X por S_n.

2. Decimos que G **actúa** sobre X si existe un morfismo de grupos $\varphi : G \to S_X$. Si G actúa sobre X entonces diremos que X es un G-conjunto.

Nota 1.51. S_X es un grupo con la composición de funciones.

El resultado siguiente es equivalente a la definición de acción, puede consultar esto en

Teorema 1.52. Sea X un G conjunto, entonces existe una función $\alpha : G \times X \to X$ que satisface

1. $\alpha(e, x) = x$

2. $\alpha(g, \alpha(h, x)) = \alpha(gh, x)$

A dicha función le llamaremos una **acción** de G sobre X.

Nota 1.53. De manera recíproca al teorema, si existe una acción de G sobre X entonces existe un morfismo de grupos $\varphi : G \to S_X$.

Grupos conmutadores, grupos derivados

Para este trabajo usaremos a los conjugados de un elemento y los conmutadores. Para ello vamos a estudiar un poco de notación y de teoría para acortar nuestras demostraciones.

Definición 1.54. Sea G un grupo y g, $h \in G$. Definimos al **conmutador** de g y h como el elemento

$$[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}.$$

Dados dos subconjutos H y K de G, definimos al grupo $[H, K]$ como el grupo generado por los elementos $\{[h, k] : h \in H \text{ y } k \in K \in G\}$. En particular al grupo $[G, G]$ le llamaremos el **primer grupo derivado** de G y vamos a denotarlo por G' . Además, cuando $G' = G$ diremos que el grupo G es **perfecto**, en este caso, todo elemento de G es producto de un numero finito de conmutadores.

Observación 1.55. Haremos unas observaciones de la definición anterior. Sean G un grupo y g, x, $y \in G$ con $[x, y]$ su conmutador.

1. El inverso de un conmutador,

$$\begin{aligned}[x,y]^{-1} &= (xyx^{-1}y^{-1})^{-1} \\ &= (yx^{-1}y^{-1})^{-1}x^{-1} \\ &= (x^{-1}y^{-1})^{-1}y^{-1}x^{-1} \\ &= (y^{-1})^{-1}xy^{-1}x^{-1} \\ &= yxy^{-1}x^{-1} = [y,x].\end{aligned}$$

2. El conjugado de un conmutador,

$$\begin{aligned}[x,y]^{[g]} &= g(xyx^{-1}y^{-1})g^{-1} \\ &= (gxg^{-1})(gyg^{-1})(gx^{-1}g^{-1})(gy^{-1}g^{-1}) \\ &= [y^{[g]}, x^{[g]}].\end{aligned}$$

3. El conmutador bajo homeomorfismos. Sea $\phi : G \to G$ un morfismo de

grupos, notemos que,

$$\begin{aligned}\phi([x,y]) &= \phi(xyx^{-1}y^{-1})\\ &= \phi(x)\phi(y)\phi(x^{-1})\phi(y^{-1})\\ &= \phi(x)\phi(y)\phi(x)^{-1}\phi(y)^{-1}\\ &= [\phi(x),\phi(y)],\end{aligned}$$

más aún sea $x \in [G,G]$ es decir existen a_i, $b_i \in G$, $i = 1, \cdots n$ tales que

$$x = [a_1, b_1]^{m_1} \cdots [a_n, b_n]^{m_n},$$

notemos que para todo morfismo de grupos, ϕ se cumple que

$$\phi(x) = [\phi(a_1), \phi(b_1)]^{m_1} \cdots [\phi(a_n), \phi(b_n)]^{m_n} \in [G,G].$$

Por tanto $\phi([G,G]) \subset [G,G]$.

4. $[G,G]$ es normal en G. Sea $g \in G$ y consideremos el automorfismo interno

$$\begin{aligned}\gamma_g : G &\to G\\ x &\mapsto x^{[g]}\end{aligned}$$

claramente se tiene que $\gamma_g([G,G]) = g[G,G]g^{-1}$ y por el inciso anterior $g[G,G]g^{-1} = \gamma_g([G,G]) \subset [G,G]$, concluimos así la normalidad.

Proposición 1.56. Sea G un grupo generado por un conjunto X entonces para G' el primer subgrupo conmutador es generado por conjugados de conmutadores de elementos de X. Esto es

$$G' = \langle\{[x,y]^{[g]} : g \in G \text{ y } x, y \in X\}\rangle$$

Demostración. Sea $W = \langle\{[x,y]^{[g]} : g \in G$ y $x, y \in X\}$. Notemos que para x, $y \in X$ y $g \in g$ se tiene que

$$[x,y]^{[g]} = [x^{[g]}, y^{[g]}]$$

G' es un grupo que contiene al conjunto generador de W por tanto

$$W \subset G'.$$

Para la otra parte, sean $a, b \in G$ estudiaremos la cantidad de factores de a, esto es, como X genera a G, existen $s_1 \cdots s_n \in X$ tales que $a = s_1^{\alpha_1} \cdots s_n^{\alpha_n}$

con $\alpha_i \in \{1,-1\}$. Supongamos el caso en que $b \in X$. Por inducción fuerte sobre n veremos el resultado. Notemos que $n=1$ es directo, supongamos el caso $n=2$,

$$\begin{aligned}
[s_1^{\alpha_1}s_2^{\alpha_2},b] &= (s_1^{\alpha_1}s_2^{\alpha_2})b(s_2^{-\alpha_2}s_1^{-\alpha_1})b^{-1}\\
&= s_1^{\alpha_1}(s_2^{\alpha_2}bs_2^{-\alpha_2}b^{-1})(bs_1^{-\alpha_1}b^{-1}s_1^{\alpha_1})s_1^{-\alpha_1}\\
&= ([s_2^{\alpha_2},b]^{[s_1^{\alpha_1}]})([b,s_1^{-\alpha_1}]^{[s_1^{\alpha_1}]})
\end{aligned}$$

El cual es un producto de conjugados de elementos de X por tanto $[a,b] \in W$. Para el caso $n=3$ tenemos que

$$\begin{aligned}
[s_1^{\alpha_1}s_2^{\alpha_2}s_3^{\alpha_3},b] &= (s_1^{\alpha_1}s_2^{\alpha_2}s_3^{\alpha_3})b(s_3^{-\alpha_3}s_2^{-\alpha_2}s_1^{-\alpha_1})b^{-1}\\
&= s_1^{\alpha_1}(s_2^{\alpha_2}s_3^{\alpha_3}bs_3^{-\alpha_3}s_2^{-\alpha_2}b^{-1})(bs_1^{-\alpha_1}b^{-1}s_1^{\alpha_1})s_1^{-\alpha_1}\\
&= s_1^{\alpha_1}[s_2^{\alpha_2}s_3^{\alpha_3},b][b,s_1^{-\alpha_1}]s_1^{-\alpha_1}\\
&= ([s_2^{\alpha_2}s_3^{\alpha_3},b]^{[s_1^{\alpha_1}]})([b,s_1^{-\alpha_1}]^{[s_1^{\alpha_1}]})
\end{aligned}$$

De la primera parte,

$$[s_1^{\alpha_1}s_2^{\alpha_2}s_3^{\alpha_3},b] = ([s_3^{\alpha_3},b]^{[s_2^{\alpha_2}]})([b,s_2^{-\alpha_2}]^{[s_2^{\alpha_2}]})([b,s_1^{-\alpha_1}]^{[s_1^{\alpha_1}]})$$

nuevamente tenemos que $[a,b] \in W$. Por inducción fuerte, supongamos que se cumple para $1,\cdots,n-1$ veremos el caso n,

$$\begin{aligned}
[s_1^{\alpha_1}\cdots s_n^{\alpha_n},b] &= (s_1^{\alpha_1}\cdots s_n^{\alpha_n})b(s_n^{-\alpha_n}\cdots s_1^{-\alpha_1})b^{-1}\\
&= (s_1^{\alpha_1}\cdots s_n^{\alpha_n})b(s_n^{-\alpha_n}\cdots s_2^{-\alpha_2}b^{-1}bs_1^{-\alpha_1})b^{-1}s_1^{\alpha_1}s_1^{-\alpha_1}\\
&= s_1^{\alpha_1}(s_2^{-\alpha_2}\cdots s_n^{\alpha_n})b(s_n^{-\alpha_n}\cdots s_2^{-\alpha_2})b^{-1}(bs_1^{-\alpha_1}b^{-1}s_1^{\alpha_1})s_1^{-\alpha_1}\\
&= ([s_2^{-\alpha_2}\cdots s_n^{\alpha_n},b]^{[s_1^{\alpha_1}]})([b,s_1^{-\alpha_1}]^{[s_1^{\alpha_1}]})
\end{aligned}$$

por hipótesis de inducción tenemos que $[s_2^{-\alpha_2}\cdots s_n^{\alpha_n},b]$ es producto de conjugados de conmutadores de X, a saber

$$\begin{aligned}
[s_1^{\alpha_1}\cdots s_n^{\alpha_n},b] =& [s_n,b]^{[(s_1^{\alpha_2}\cdots s_{n-1}^{\alpha_{n-1}})]}[b,s_{n-1}]^{[(s_1^{\alpha_1}\cdots s_{n-1}^{\alpha_{n-1}})]}*\\
&[b,s_{n-2}]^{[(s_1^{\alpha_1}\cdots s_{n-2}^{\alpha_{n-2}})]}[b,s_{n-3}]^{[(s_1^{\alpha_1}\cdots s_{n-3}^{\alpha_{n-3}})]}\cdots[b,s_1^{-1}]^{[s_1^{-1}]}
\end{aligned}$$

Por tanto tenemos que cada factor es un conjugado de un conmutador de elementos de X tenemos que $[a, b] \in W$ y terminamos la hipótesis de inducción. En general si $b = t_1^{\alpha_1} \cdots t_m^{\alpha_m}$ notemos que en la expresión anterior están los términos $[s_j, b]$ con $s_j \in X$. Por lo previo cada $[s_j, t_1^{\alpha_1} \cdots t_m^{\alpha_m}]$ es producto de conjugado de conmutadores de elementos de X, los conjugados de conjugados de $[s_j, b]$ son conjugados de conmutadores de elementos de X tenemos que $[a, b] \in W$. Dando así la igualdad de grupos.

$\square$

Grupos topológicos

La estructura matemática que resulta de considerar una topología en un grupo es muy interesante, para nuestros fines no abundaremos en ello, simplemente hacemos mención acerca de ciertas propiedades de grupos topológicos que usaremos.

Definición 1.57. Sea X un grupo decimos que X es un **grupo topológico** si existe una topología en X de manera que las funciones

1. Multiplicación,

$$\begin{aligned} \circ : X \times X &\to X \\ (x, y) &\mapsto xy \end{aligned}$$

2. Inversión

$$\begin{aligned} {}^{-1} : X &\to X \\ x &\mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

son continuas.

Topología compacto abierta

Sean X, Y espacios topológicos, Y^X la familia de funciones $f : X \to Y$, para cada $A \subset X$ y $B \subset Y$ denotamos a

$$\mathcal{U}(A, B) = \{f \in Y^X | f(A) \subset B\}$$

en caso de que $A = \{a\}$ denotamos simplemente por $\mathcal{U}(a, B) = \{f \in Y^X | f(a) \in B\}$.

Tomamos el resultado siguiente de [**?**] páginas 105-110.

Proposición 1.58. La colección de las familias de la forma $\mathcal{U}(K, B)$ donde K es un compacto de X y Uun abierto de Y es una subbase para una topología en Y^X. Dicha topología será llamada **topolgía compacto-abierta**.

Observación 1.59. Un hecho interesante es que la topología compacto abierta es mas fina que la topología producto y es mas gruesa que la topología caja, pero en el caso finito la tres topologias coinciden.

Topología compacto abierta para el circulo

Denotaremos por S^1 al conjunto $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$ y a cualquier espacio topológico homeomorfo a S^1 le llamaremos curva cerrada simple.

Nota 1.60. $Hom(X)$ denotará el grupo de homeomorfismos $h : X \to X$ y la función identidad $Id_X : X \to X$ denotará el neutro de $Hom(X)$. Notemos que $Hom(X)$ es un grupo con la composición de funciones.

Demostración. El resultado es directo que la composición de funciones biyectivas es biyectiva y que composición de funciones continuas es continua. □

Veremos un ejemplo de la topología compacto abierta en el espacio S^1. Esto con el fin de ver que la terna $(Hom(S^1), \circ, \tau_{CA})$ es un grupo topológico.

Definición 1.61. Sea X_d un espacio métrico compacto. Definimos a la métrica de la convergencia uniforme como;

$$d(f, g) = \max_{x \in X}\{d(f(x), g(x))\}$$

donde f y g son funciones continuas.

Ahora vamos a evitar desarrollar una parte de la teoría. Queremos solo usar una equivalencia entre la topología compacto abierta y la generada por la métrica uniforme. Para ello sugerimos revisar [**?**] página 321 hasta 325, también [**?**] desde las páginas 278 hasta 284. Para revisar la referencia de Willard,de tener en cuenta el capitulo 10, el libro de Munkres es adecuado para una introducción al tema y Wiilard es un libro detallado.

Definición 1.62. Sean (Y, d) un espacio métrico y X un espacio topológico. Sea $f \in Y^X$, C sub-espacio compacto de X y $\varepsilon > 0$. Definimos a $B_C(f, \varepsilon)$ como la familia de funciones $g \in Y^X$ para las cuales,

$$\sup\{d(f(x), g(x)) | x \in C\} < \varepsilon.$$

Las familias $B_C(f, \varepsilon)$ forman una base para una topología sobre Y^X la cual será llamada la **topología de la convergencia compacta**.

El siguiente resultado puede consultarse en Willar 43.7 pàg 284 o Munkres 46.8 pá 325.

Teorema 1.63. Para un espacio de funciones, X^Y donde X es compacto, la topología de la convergencia compacta es la topología compacto abierta.

El siguiente teorema puede encontrarse en Munkres como teorema 46.7

Teorema 1.64. Sean X un espacio topológico e Y_d métrico. Para el espacio de funciones Y^X se tiene la siguiente inclusión de topologías:

$$\text{(uniforme)} \subset \text{(convergencia compacta)}$$

Si X es compacto entonces las topologías coinciden.

Este teorema puede estudiarse en Munkres como teorema 46.8 o en Willar como teo 43.7

Teorema 1.65. Sean X un espacio toplógico e Y_d métrico. Sobre el subespacio de funciones continuas de X a Y se tiene que la topología de la convergencia compacta y de la convergencia uniforme coinciden.

Veremos ahora que el grupo de homeomorfismos del cículo es un grupo topológico con la topología compacto abierta (o métricas como según nos convenga) y la composición de funciones como operación de grupo.

El grupo topológico $Hom(S^1)$

Veremos que las operaciones

$$g \mapsto g^{-1}$$

y

$$(gh) \mapsto gh$$

son funciones continuas en la topología compacto abierta. Para el caso de la función inversión usaremos la equivalencia métrica. Observemos que:

- Si g es una función continua en un espacio compacto entonces g es uniformemente continua, además si g es un homeomorfismo tenememos que la función g^{-1} es uniformemente continua.

Sean $\varepsilon > 0$, h, $g \in Hom(S^1)$. Veremos que existe $\delta > 0$ tal que si $d(g,h) < \delta$ se implica que

$$d(g^{-1}, h^{-1}) < \varepsilon,$$

en la métrica de la convergencia uniforme. De la observación tenemos de la continuidad uniforme de g^{-1} que, para todo $x \in S^1$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$ entonces

$$|g^{-1}(x) - g^{-1}(y)| < \varepsilon.$$

Consideremos la bola $B_d(h, \delta)$ y x_0 fijo. Como h es biyectiva existe $z_0 \in S^1$ tal que $z = h^{-1}(x)$, por la definición de la métrica uniforme se cumple que,

$$|h(z_0) - g(z_0)| \leq d(h, g) < \delta$$

junto de la continuidad de g^{-1} se tiene que,

$$|g^{-1}(h(z_0)) - g^{-1}(g(z_0))| < \varepsilon,$$

pero notemos que

$$|g^{-1}(x_0) - h^{-1}(x_0)| = |g^{-1}(h(z_0)) - z_0| < \varepsilon,$$

para x_0 fijo. Luego, tomando el máximo tenemos que

$$d(g, h) < \varepsilon$$

de esta manera la función inversión es un función continua. Veremos ahora la continuidad de la multiplicación mediante la topología compacto abierta. Antes, hacemos mención de un resultado que no demostraremos pero que nos será de utilidad. Willar lm 43.3

Lema 1.66. En un espacio regular, si un conjunto F es compacto, U es un abierto y $F \subset U$ entonces existe un conjunto abierto V tal que $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

Afirmamos que la operación composición

$$\circ : Hom(S^1) \times Hom(S^1) \to Hom(S^1)$$

dada por

$$\circ(g, h) := gh,$$

es continua en la topología compacto abierta. Sean g, $h \in Hom(S^1)$ y consideremos un abierto básico en la topología compacto abierta que sea vecindad de gh, explícitamente sean K compacto de S^1 y U abierto en S^1 tal que

$$\mathcal{U}(K,U)(gh) = \{f \in Hom(S^1) : f(K) \subset U\}$$

es claro que $gh(K) \subset U$ y como g es biyectiva, componiendo con la función g^{-1} se tiene que;

$$h(K) \subset g^{-1}(U),$$

notemos que g y h son homeomorfismos por tanto $h(K)$ es compacto y $g^{-1}(U)$ es abierto, como S^1 es un espacio normal, existe V abierto en S^1 tal que

$$h(K) \subset V \subset \overline{V} \subset g^{-1}(U),$$

vamos a considerar al básico de $Hom(S^1) \times Hom(S^1)$ dado por

$$\mathcal{W} := \mathcal{U}(\overline{V}, U) \times \mathcal{U}(K, V).$$

Como $\overline{V} \subset g^{-1}(U)$ componiendo con la función g se sigue que $g(\overline{V}) \subset U$ y como $h(K) \subset V$ tenemos que $(g,h) \in \mathcal{W}$. Veremos que la imagen de $\mathcal{W}$ bajo la operación $\circ$ está contenida en $\mathcal{U}(K,U)$.

Sea $(f_1, f_2) \in \mathcal{W}$, tenemos las siguientes contenciones,

$$f_1(\overline{V}) \subset U$$
$$f_2(K) \subset V$$

componiendo la primera contención por f_1^{-1} se sigue que

$$f_2(K) \subset V \subset \overline{V} \subset f_1^{-1}(U)$$

finalmente resta notar que las contenciones anteriores se mantienen si componemos con f_1 esto es;

$$f_1 f_2(K) \subset U,$$

de esta manera $f_1 f_2 \in \mathcal{U}(K,U)(gh)$, es decir la función $\circ$ es continua. Concluimos que $(Hom(S^1), \tau_{CA})$ es un grupo topológico.

1.67. Lemas y observaciones

Observación 1.68. Sea G un grupo topológico.

1. Sea $Q(e)$ la componente conexa de la identidad. Como la función multiplicación es continua se sigue que, para toda $h \in G$ el conjunto $hQ(e)$ es conexo y contiene al elemento h.

2. $g \in Q(e)$ si y solo si $e \in Q(g)$. En particular $Q(g) = Q(e)$.

3. Si $h \in Q(e)$ entonces $e \in Q(h^{-1})$. En particular $h \in Q(e)$ si y solo si $h^{-1} \in Q(e)$.

Demostración. Sea $g \in Q(e)$, notemos que $Q(e)$ es un conjunto conexo que tiene a g por tanto $Q(e) \subset Q(g)$, en particular $e \in Q(g)$. El recíproco es idéntico y se omite. Para la otra parte, notemos que $h^{-1}Q(e)$ es un conjunto conexo que tiene a h^{-1} por tanto $h^{-1}Q(e) \subset Q(h^{-1})$, como $h \in Q(e)$ se sigue que el elemento,

$$h^{-1}h \in h^{-1}Q(e)$$

y así $e \in Q(h^{-1})$. □

Lema 1.69. La componente conexa de la identidad es un grupo.

Demostración. Veremos que el conjunto $Q(e)$ es cerrado bajo la operación de G. Sean g, $h \in Q(e)$, por la observación previa resta ver que $e \in Q(gh)$. Tenemos que $ghQ(e) \subset gQ(h) \subset Q(gh)$ por otro lado notemos que,

$$gh(h^{-1}) \in ghQ(e)$$

y así $g \in ghQ(e)$, por tanto tenemos la contención $ghQ(e) \subset Q(g) = Q(e)$, concluimos que $gh \in Q(e)$. □

Lema 1.70. Sea $(X, \tau, \circ)$ grupo topológico y U abierto en X, para todo $h \in X$ el conjunto hU es abierto.

Demostración. Sea h en X, las siguientes funciones

$$\begin{aligned} \varphi_h : X &\to X \\ g &\mapsto hg \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\phi_h : X &\to X \\ g &\mapsto h^{-1}g\end{aligned}$$

son continuas e inversas una de otra. Resta notar que $\varphi_h(U) = hU$ y la imagen directa de φ es la imagen inversa de su función inversa $\varphi_h(U) = \phi_h^{-1}(U)$ que por continuidad es un conjunto abierto. Tenemos así que hU es un conjunto abierto.

□

Proposición 1.71. Sea $(X, \tau, \circ)$ un grupo topológico conexo. Para toda $U(e)$ se cumple que $\langle U \rangle = X$.

Demostración. Sea $U \in \mathcal{N}(e)$, resta ver que $G \subset \langle U \rangle$. Para ello veremos que $\langle U \rangle$ es un conjunto abierto y cerrado en X por la conexidad de X se da la igualdad.

Sea $g \in \langle U \rangle$, por definición de subgrupo generado, para todo subgrupo H de X que contiene a U se cumple que

1. $g \in H$,
2. al ser cerrado como subgrupo tenemos que, para toda $u \in U$ el elemento gu está en H, por tanto

$$gU \subset H,$$

3. Por el lema 1.70 el conjunto gU es abierto.

Más aún, $g = ge \in gU$, de esta manera se que tiene que $gU(g)$ junto con la contención $gU \subset H$ de la definición de grupo generado tenemos que $gU \subset \langle U(e) \rangle$ y por tanto $\langle U(e) \rangle$ es un conjunto abierto.

Para ver que $\langle U \rangle$ es cerrado, sea $h \in \overline{\langle U \rangle}$ y consideremos al conjunto hU que, por el lema 1.70 es abierto y en particular es vecindad de h, $hU(h)$ y por definición del conjunto cerradura tenemos que,

$$hU \cap \langle U \rangle \neq \emptyset.$$

De esta manera, sea $g \in hU \cap \langle U \rangle$ ent particular, como $g \in hU$ existe $u \in U$ tal que $g = hu$ y consideremos lo siguiente,

$$h = gu^{-1} \in \langle U \rangle U = \langle U \rangle$$

por tanto $\overline{\langle U\rangle} \subset \langle U\rangle$. Tenemos que $\langle U(e)\rangle$ es un conjunto cerrado a abierto en un espacio conexo, entonces o $\langle U\rangle = \emptyset$ o $\langle U\rangle = X$ como $e \in \langle U\rangle$ concluimos que $\langle U(e)\rangle = X$. $\square$

Hablaremos ahora de un término importante, el soporte de un homeomorfismo, veremos unas propiedades sencillas que nos permitiran ahorrar tiempo en las explicaciones importantes.

Definición 1.72. Sea $K \subset X$ y $h : X \to X$ un homeomorfismo. Decimos que K es un **conjunto de soporte** para h (o que h está soportado en K) si,

1. $X \setminus K$ es no vacío y
2. $h|_{X\setminus K} = id|_{X\setminus K}$.

Al conjunto

$$Sup(h) = Cl\left(\{x \in X : h(x) \neq x\}\right),$$

le llamaremos el **soporte** de h. Si h no es la función identidad entonces $Sup(h)$ es no vacío y además, para K conjunto de soporte de h se tiene que

$$Sup(h) \cap (X \setminus K) = \emptyset$$

por tanto

$$Sup(h) \subset K$$

el conjunto $Sup(h)$ es un conjunto mínimo de los conjuntos de soporte para una homeomorfismo. A la familia de homeomorfismos, $g : X \to X$, para los cuales existe $U \in \tau$ tal que $g|_U = e|_U$ le denotaremos por $Hom_0(X)$.

Observación 1.73. Sea $g : X \to X$ un homeomorfismo que está soportado en K.

1. Como la función g^{-1} es una función inyectiva notemos que,

$$\{x \in X : g(x) \neq x\} = \{x \in X : x \neq g^{-1}(x)\}$$

Al tomar cerradura, se tiene que $Sup(g) = Sup(g^{-1})$, g y g^{-1} tienen el mismo soporte.

2. Para la función inversa $g^{-1} : X \to X$ tenemos que

$$id|_{X \setminus K} = g^{-1}|_{g(X \setminus K)} = g^{-1}|_{X \setminus K}.$$

   Es decir, g^{-1} está soportando en $g(K)$. Más aún tenemos que $g(K) = K$ para ello, notemos que si $x \in g(K) \cap (X \setminus K)$ entonces existe $y \in K$ tal que $g(y) = x$ pero, $x \in X \setminus K$ entonces $g(x) = x$ y por la inyectividad de g se tiene que $x = y$ lo cual es absurdo. Por tanto $g(K) \subset K$. Análogamente,

$$\begin{aligned} K \cap (X \setminus g(K)) &= K \cap g(X \setminus K) \\ &= K \cap X \setminus K = \emptyset, \end{aligned}$$

   por tanto $K \subset g(K)$ dando la igualdad de conjutos.

3. Si f y g son dos funciones con soportadas en K entonces $fg(K) = K = gf(K)$. Por inducción esto se tiene para una cantidad finita es decir, $f_1 \cdots f_n$ entonces $f_1 \cdots f_n(K) = K$.

Observación 1.74. La composición de funciones con soportes ajenos. Sean f, g dos homemorfismos tales que K_f y K_g son conjuntos de soporte respectivamente y tales que $K_f \cap K_g = \emptyset$ y $K_f \cup K_g \neq X$ entonces para $h = fg$ se cumple que, $h = g$ en K_g, $h = K_f$ en K_f y h tiene soporte en $K_f \cup K_g$. Esto se puede hacer para una cnatidad finita de pares de funciones $f_n g_n$.

Para la primera parte, notemos que $h(K_f) = fg(K_f)$, como $g(K_f) \subset g(X \setminus K_g)$ tenemos que $g|_{K_f} = Id$, por tanto $h|_{K_f} = f|_{K_f}$. El resultado es análogo a para $h|_{K_g} = g|_{K_g}$. Para la ultima parte, notemos que

$$h(X \setminus (K_f \cup K_g) = h(X \setminus K_f) \cap h(X \setminus K_g))$$

de la primera parte tenemos que, dado $x \in (X \setminus K_f) \cap (X \setminus K_g)$

$$fg(x) = f(x) = x.$$

Por tanto, se tiene que h está soportado en $K_f \cup K_g$. De manera inductiva supongamos que $(f_i)_{i=1}^n$ y $(g_i)_{i=1}^n$ son familias de funciones tales que están soportadas en K y W respectivamente. Para $h = g_1 f_1 \cdots g_n f_n$ se cumple que $h = g_1 \cdots g_n$ en W y $h = f_1 \cdots f_n$ en K. Notemos que,

$$h(K) = g_1 f_1 \cdots g_n f_n(K)$$

se tiene que $f_i(K) = K \subset X \setminus W$ para $i = 1, \cdots, n$ por tanto para

$$g_n(f_n(K)) = f_n(K),$$

al componer por $g_{n-1} f_{n-1}$ y aplicando la observación 1.73

$$g_{n-1} f_{n-1} g_n(f_n(K)) = f_{n-1} f_n(K),$$

repitiendo este proceso una cantidad finita de veces, se tiene que

$$h(K) = f_1 \cdots f_{n-1} f_n(K).$$

Para el caso en que $h(W) = g_1 \cdots g_{n-1} g_n(W)$ es similar. Además si $x \in X(\backslash K) \cap (X \setminus W)$ entonces de la priemera parte de esta observación,

$$h(x) = g_1 f_1 \cdots g_n f_n(x) = g_1 f_1 \cdots g_{n-1} f_{n-1}(x) \cdots = x$$

y h está soportando en $K \cup W$.

La observación anterior es una manera de generalizar a [**?**] property (E). El siguiente lema será usado en las secciones posteriores, es importante, no solo nos deja manipular el soporte de un homeomorfismo bajo una conjugación si no que nos da la herramienta importante sobre ciertos conmutadores de homeomorfismos para el teorema 1 del trabajo de Anderson en [**?**], también es importante mencionar que Epstein en [**?**] tambien lo usa. Este lema se encuentra en [**?**] como property (A).

Lema 1.75. Sean $K \subset X$ y $g \in Hom_0(X)$ soportado en K. Para cualquier $h \in Hom(X)$ se tiene que,

1. $g^{[h^{-1}]}$ está soportado en $h^{-1}(K)$.
2. Si $h^{-1}(K) \cap K = \emptyset$ y $h^{-1}(K) \cup K \neq X$ entonces
   a) $[h^{-1}, g^{-1}]$ está soportado en $h^{-1}(K) \cup K$,
   b) $[h^{-1}, g^{-1}]|_K = g|_K$ y
   c) $[h^{-1}, g^{-1}]|_{h^{-1}(K)} = h^{-1} g^{-1} h|_{h^{-1}(K)}$

Demostración. Para el primer inciso. Sea $x \in X \setminus h^{-1}(K) = h^{-1}(X \setminus K)$ de donde $h(x) \in X \setminus K$, como K es un conjunto de soporte para g tenemos que,

$$g(h(x)) = h(x)$$

de esta manera al componer con la función h^{-1} por la izquierda obtenemos lo siguiente,

$$h^{-1}gh(x) = x,$$

y tenemos que,

$$g^{[h]}(x)|_{X\setminus h^{-1}(K)} = id_{X\setminus h^{-1}(K)},$$

por definición concluimos que $h^{-1}gh(x)$ está soportado en $h^{-1}(K)$.

Ahora veremos el segundo inciso. De la primera parte tenemos que $h^{-1}g^{-1}h$ tiene soporte en $h^{-1}(K)$ y g en K los cuales son conjuntos ajenos por tanto de la observación observación 1.73, la observación anterior, tenemos que $[h^{-1}, g^{-1}]$ tiene soporte en $K \cup h^{-1}(K)$.

$\square$

Finalizamos este capitulo recordando que nuestra introducción pudiera no abarcar todos los resultados que vamos a mencionar, sin embargo mencionamos los libros que hemos consultado donde pudiera estar la demostración detallada o bien un estudio profundo de dicho tema.