Lemas y observaciones

Observación 0.1. Sea G un grupo topológico.

1. Sea $Q(e)$ la componente conexa de la identidad. Como la función multiplicación es continua se sigue que, para toda $h \in G$ el conjunto $hQ(e)$ es conexo y contiene al elemento h.

2. $g \in Q(e)$ si y solo si $e \in Q(g)$. En particular $Q(g) = Q(e)$.

3. Si $h \in Q(e)$ entonces $e \in Q(h^{-1})$. En particular $h \in Q(e)$ si y solo si $h^{-1} \in Q(e)$.

Demostración. Sea $g \in Q(e)$, notemos que $Q(e)$ es un conjunto conexo que tiene a g por tanto $Q(e) \subset Q(g)$, en particular $e \in Q(g)$. El recíproco es idéntico y se omite. Para la otra parte, notemos que $h^{-1}Q(e)$ es un conjunto conexo que tiene a h^{-1} por tanto $h^{-1}Q(e) \subset Q(h^{-1})$, como $h \in Q(e)$ se sigue que el elemento,

$$h^{-1}h \in h^{-1}Q(e)$$

y así $e \in Q(h^{-1})$. □

Lema 0.2. La componente conexa de la identidad es un grupo.

Demostración. Veremos que el conjunto $Q(e)$ es cerrado bajo la operación de G. Sean g, $h \in Q(e)$, por la observación previa resta ver que $e \in Q(gh)$. Tenemos que $ghQ(e) \subset gQ(h) \subset Q(gh)$ por otro lado notemos que,

$$gh(h^{-1}) \in ghQ(e)$$

y así $g \in ghQ(e)$, por tanto tenemos la contención $ghQ(e) \subset Q(g) = Q(e)$, concluimos que $gh \in Q(e)$. □

Lema 0.3. Sea $(X, \tau, \circ)$ grupo topológico y U abierto en X, para todo $h \in X$ el conjunto hU es abierto.

Demostración. Sea h en X, las siguientes funciones

$$\begin{aligned} \varphi_h : X &\to X \\ g &\mapsto hg \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\phi_h : X &\to X \\ g &\mapsto h^{-1}g\end{aligned}$$

son continuas e inversas una de otra. Resta notar que $\varphi_h(U) = hU$ y la imagen directa de φ es la imagen inversa de su función inversa $\varphi_h(U) = \phi_h^{-1}(U)$ que por continuidad es un conjunto abierto. Tenemos así que hU es un conjunto abierto.

$\square$

Proposición 0.4. Sea $(X, \tau, \circ)$ un grupo topológico conexo. Para toda $U(e)$ se cumple que $\langle U \rangle = X$.

Demostración. Sea $U \in \mathcal{N}(e)$, resta ver que $G \subset \langle U \rangle$. Para ello veremos que $\langle U \rangle$ es un conjunto abierto y cerrado en X por la conexidad de X se da la igualdad.

Sea $g \in \langle U \rangle$, por definición de subgrupo generado, para todo subgrupo H de X que contiene a U se cumple que

1. $g \in H$,
2. al ser cerrado como subgrupo tenemos que, para toda $u \in U$ el elemento gu está en H, por tanto
$$gU \subset H,$$
3. Por el lema 0.3 el conjunto gU es abierto.

Más aún, $g = ge \in gU$, de esta manera se que tiene que $gU(g)$ junto con la contención $gU \subset H$ de la definición de grupo generado tenemos que $gU \subset \langle U(e) \rangle$ y por tanto $\langle U(e) \rangle$ es un conjunto abierto.

Para ver que $\langle U \rangle$ es cerrado, sea $h \in \overline{\langle U \rangle}$ y consideremos al conjunto hU que, por el lema 0.3 es abierto y en particular es vecindad de h, $hU(h)$ y por definición del conjunto cerradura tenemos que,

$$hU \cap \langle U \rangle \neq \emptyset.$$

De esta manera, sea $g \in hU \cap \langle U \rangle$ ent particular, como $g \in hU$ existe $u \in U$ tal que $g = hu$ y consideremos lo siguiente,

$$h = gu^{-1} \in \langle U \rangle U = \langle U \rangle$$

por tanto $\overline{\langle U\rangle} \subset \langle U\rangle$. Tenemos que $\langle U(e)\rangle$ es un conjunto cerrado a abierto en un espacio conexo, entonces o $\langle U\rangle = \emptyset$ o $\langle U\rangle = X$ como $e \in \langle U\rangle$ concluimos que $\langle U(e)\rangle = X$. $\square$

Definición 0.5. Sea $K \subset X$ y $h : X \to X$ un homeomorfismo. Decimos que h está **soportado** en K si,

1. $X \setminus K$ es no vacío y
2. $h|_{X\setminus K} = id|_{X\setminus K}$.

Al conjunto

$$Sup(h) = \overline{\{x \in X : h(x) \neq x\}},$$

le llamaremos el **soporte** de h. Al subgrupo de homeomorfismos, $g : X \to X$, para los cuales existe $U \in \tau$ tal que $g|_U = e|_U$ le denotaremos por $Hom_0(X)$.

Observación 0.6. Si $g : X \to X$ un homeomorfismo que está soportado en K, para la función inversa $g^{-1} : X \to X$ tenemos que

$$id|_{X\setminus K} = g^{-1}|_{g(X\setminus K)} = g^{-1}|_{X\setminus K}.$$

Es decir, g^{-1} está soportando en $g(K)$.

El siguiente lema será usado en las secciones posteriores, es importante para el desarrollo del trabajo de Anderson y Epstein en **referencia**

Lema 0.7. Sean $K \subset X$ y $g \in Hom_0(X)$ soportado en K.

1. Para cualquier $h \in Hom(X)$ se tiene que $h^{-1}gh$ está soportado en $h^{-1}(K)$.
2. Si $h^{-1}(K) \cap K = \emptyset$ entonces
   a) $[h, g]$ está soportado en $h^{-1}(K) \cup K$,
   b) $[h, g]|_K = g|_K$ y
   c) $[h, g]|_{h^{-1}(K)} = h^{-1}g^{-1}h|_{h^{-1}(K)}$

Demostración. Para el primer inciso. Sea $x \in X \setminus h^{-1}(K) = h^{-1}(X \setminus K)$ de donde $h(x) \in X \setminus K$, como K es el soporte de g tenemos que,

$$g(h(x)) = h(x)$$

de esta manera al componer con la función h^{-1} por la izquierda obtenemos lo siguiente,

$$h^{-1}gh(x) = x$$

tenemos que

$$h^{-1}gh(x)|_{X\setminus h^{-1}(K)} = id_{X\setminus h^{-1}(K)}$$

y por definición concluimos que $h^{-1}gh(x)$ está soportado en $h^{-1}(K)$.

Ahora veremos el segundo inciso. Supongamos que $h^{-1}(K) \cap K = \emptyset$. Sea $x \in (X \setminus h^{-1}(K)) \cap (X \setminus K)$, como como g está soportando en K tenemos que

$$h(g(x)) = h(x),$$

más aún como en el inciso anterior tenemos $h(x) \in X \setminus K$ junto con que $g^{-1}|_{X\setminus K} = id$ (observación 0.6) se sigue que

$$g^{-1}(h(x)) = h(x)$$

finalmente componiendo con h^{-1} por la izquierda tenemos que

$$[h^{-1}, g^{-1}](x) = h^{-1}g^{-1}hg(x) = x$$

es decir,

$$[h^{-1}, g^{-1}]|_{(X\setminus h^{-1}(K))\cap(X\setminus K)} = id,$$

por tanto $[h^{-1}, g^{-1}]$ está soportado en $h^{-1}(K) \cup K$. Finalmente, de la observación 0.6 el homeomorfismo g^{-1} está soportado en $g(K)$ del primer inciso tenemos que $h^{-1}g^{-1}h$ está soportado en $h^{-1}(g(K))$ y de esta manera

$$h^{-1}g^{-1}h(h^{-1}(g(K))) = h^{-1}(K),$$

de donde tenemos que

$$[h^{-1}, g^{-1}]|_{h^{-1}(K)} = h^{-1}(K).$$

Además, notemos $h^{-1}g^{-1}h[g(K)] = id$ entonces

$$g(K) \subset sup(h^{-1}g^{-1}h)^c.$$

□

Observación 0.8. Cualquier conjugado del producto de conjugados de producto de h y h^{-1} tiene el mismo numero de conjugados de h y h^{-1}.

Demostración. Si $f = (g_1 h^{-1} g_1^{-1}) \cdots (g_n h g_n^{-1})$ entonces para cualquier g en $Hom(X)$ se tiene que

$$\begin{aligned} gfg^{-1} &= g(g_1 h^{-1} g_1^{-1}) \cdots (g_n h g_n^{-1}) g^{-1} \\ &= (g g_1 h^{-1} g_1^{-1} g^{-1}) \cdots (g g_n h g_n^{-1} g^{-1}). \end{aligned}$$

□

Finalizamos este capitulo recordando que nuestra introducción pudiera no abarcar todos los resultados que vamos a mencionar, sin embargo mencionamos los libros que hemos consultado donde pudiera estar la demostración detallada o bien un estudio profundo de dicho tema. [**?**]

Bibliografía

[1] Prieto de Castro, Carlos, *Topología básica*, segunda edicion, Ediciones Científicas Universitarias, México, DF, 2013.

[2] Salicrup Graciela, *Introducción a la Topología*, Sociedad Matemática Mexicana, México, DF, 1997.

[3] R.D. Anderson *The Algebraic simplicity of certain groups of homeomorphisms* American Mathematical Society, Enero 1958.

[4] J. Krasinkiewicz *On homeomorphisms of the Sierpiński curve* Annales societatis Mathematicae Polanae, 1969.