Teoría y definiciones
*Introducción
A lo largo de este texto utilizaremos las nociones de espacios topológicos y de grupos. Nuestra primera parte consta
Espacios topológicos Vamos a usar la notación estándar de conjuntos. La pertenencia de un elemento x a un conjun
La unión del conjunto A con B se representa por $A \cup B$, la intersección del conjunto A con el conjunto B se represe
f(A)={y $\in Y : existex \in Ayf(x) = y\}$
será llamado imagen directa de A bajo f. Por otro lado dado $B \subset Y$ el conjunto
f$^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$
será llamado la imagen inversa del conjunto B bajo f.
En general tomar la imagen inversa de una imagen directa o en orden alterno, no se obtiene como resultado el mism
f(f$^{-1}(B)) \subset B$
$A \subset f^{-1}(f(A))$.
La primera contención es igualdad si f es sobreyectiva y la segunda contención es igualdad si f es inyectiva, es clar
Sea $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ dada por, $f(1) = f(3) = 1$, $f(2) = f(4) = 3$. Esta función no es inyectiva ni sobreye
En la práctica es usual no indicarse el dominio e imagen de una función pues implícitamente se da a entender que e
Sea X un conjunto y $\tau \subset 2^X$ una familia de subconjuntos de X. Decimos que τ es una **topología** para X si cumpl
$\emptyset$, X son elementos de τ.
Para cada subfamilia finita de τ, $\{A_i\}_{i=1}^n$ se tiene que $\bigcap_{i=1}^n A_i$ es un elemento de τ.
Para cada subfamilia $\{A_i\}_{i\in J}$ donde I es un familia de índices arbitrario, se tiene que $\bigcup_{i\in I} A_i$ es un elemento de τ.
Por **espacio topológico** nos referimos a un par (X, τ) donde X es un conjunto y τ es una topología para X. Deno
La segunda condición se conoce como **cerradura bajo intersecciones finitas** o que **familia es cerrada bajo in**
Sean X un conjunto y la familia 2^X, el par formado por $(X, 2^X)$ es un espacio topológico y es llamado **espacio dis**
Además, si X contiene mas de un punto, las familias 2^X y τ del ejemplo anterior son distintas pero se da la contenc
La topología guarda información importante del conjunto X que nos puede ayudar a distinguir propiedades de este
Cuando el contexto sea claro sobre el espacio topológico vamos prescindir de la notación de la topología y simpleme
Ahora, un resultado que nos permitirá hablar de espacios topológicos en en subconjuntos, esto nos permitirá de hab
Sea X un espacio topológico $Y \subset X$ entonces $\tau_Y = \{A \cap U : U \in \tau\}$ es una topología para Y. Por **subespacio** Y d
El tema que no vamos a detallar es el de sistema de vecindades y bases. Para estos temas tenemos en la bibliografía
Sea $X = \{(x, y) \in R^2 : y \geq 0\}$. Definimos una familia de conjuntos mediante las siguientes condiciones; dado (x, y)
B$_r((x, y), r) = \{(w, z) \in X :\| (x, y) - (w, z) \|< r\}$,
donde indicamos que es la norma usual de R^2 y $z \neq 0$. Por otro lado si $y = 0$ tomamos el conjunto
$\beta((x, 0)) = B_r((x, r), r) \cup \{(x, 0)\}$.
Hemos definido familias de conjuntos en torno a cada punto, esta familia de conjuntos es una base para una topolog
Notemos que en este espacio $R \times \{0\} \subset X$, pero la restricción al subespacio $R \times \{0\}$ nos da un conjunto discreto m
Para operadores topológicos utilizaremos la siguiente notación.
Sea X un espacio topológico y U subconjunto de X.
Diremos que U es **vecindad** de un punto x denotado por $U(x)$ si, $x \in U$ y $U \in \tau$. A la familia de conjuntos $U(x)$ de ve
Al conjunto **interior** de A en X lo denotaremos por

Al conjunto **clausura** de A en X lo denotaremos por,

Denotaremos por $Fr_X(A)$ al conjunto $\overline{A^c} \cap \overline{A}$ a este conjunto le llamaremos la **frontera** de A en X.
Cuando el contexto lo permita simplemente denotaremos por $Int(A)$ al interior, $Cl(A)$ la clausura y $Fr(A)$ a la fro
En topología general nos interesa clasificar espacios mediante las propiedades de sus topologías la manera de hacerl
Sea X espacio topológico y una función $h : X \to X$.
Dado B subconjunto de X, $h|_B$ denotará la restricción $h : B \to h(B)$ de h a B.
Decimos que h es **continua** si para cada conjunto abierto U se cumple que $h^{-1}(U)$ es un conjunto abierto.
Sea h una función continua y biyectiva. Decimos que h es un **homeomorfismo** si la función inversa de h, $h^{-1} : X \to X$
Sean X un conjunto con mas de un punto y las topologías 2^X y $\tau = \{\emptyset, X\}$. Consideremos la función

dada por

Notemos que para cada $x \in X$ el conjunto $\{x\}$ es un conjunto abierto en X_{2^X}, pero $Id_X^{-1}(\{x\}) = \{x\}$ no lo es en X_τ. Si

dada por

si es continua pues $Id_X^{-1}(X) = X$ el cual es un conjunto abierto, el caso $\emptyset$ es trivial. En particular, una función continua
El siguiente resultado es conocido como el **lema de pegadura**
Sean $\mathcal{U} = \{A_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de abiertos tales que $\bigcup \mathcal{U} = X$ y $f : X \to Y$ una función. Si $f_\alpha = f|_{A_\alpha}$ es contin
*Invariantes topológicos
Los invariantes topológicos, son propiedades que una topología tiene y que estas se preservan mediante homeomorfi
Además es importante mencionar el hecho de que un espacio pueda tener una propiedad $\mathcal{P}$ para una topología en p
*Compacidad Sea X un espacio topológico. Una familia de abiertos $\{U_i\}_{i\in I}$ se dice ser una **cubierta abierta** par
A $\subset \bigcup_i U_i$.
Por **subcubierta abierta** nos referimos a una subfamilia

tal que;