次の方程式を解く:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{1}$$

ただし $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \ni (x,t) \to u(x,t) \in \mathbb{R}$ である．ここでは周期境界条件

$$u(x,t) = u(x+L,t) \quad (\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty))$$

を満たすものを考える．ある正の整数 N に対して

$$x_i = \frac{i}{N} \quad (0 \leq i \leq N)$$

と定め,

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = L$$

と差分化する．今 $\Delta x = L/N$ とおくと

$$\begin{aligned} u_x(x_i,t) &= \frac{u(x_{i+1},t) - u(x_{i-1},t)}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2), \\ u_{xxx}(x_i,t) &= \frac{u(x_{i+2},t) - 2 * u(x_{i+1},t) + 2 * u(x_{i-1},t) - u(x_{i-2},t)}{2(\Delta x)^3} + O((\Delta x)^2) \end{aligned}$$

となる．よって $O((\Delta x)^2)$ の精度で

$$u_t = F(u),$$

$$\begin{aligned} F(u) = \Bigg(&-6u(x_i,t) \cdot \frac{u(x_{i+1},t) - u(x_{i-1},t)}{2\Delta x} \\ &\frac{-u(x_{i+2},t) - 2 * u(x_{i+1},t) + 2 * u(x_{i-1},t) - u(x_{i-2},t)}{2(\Delta x)^3} \Bigg)_{0 \leq i \leq N} \end{aligned}$$

となる．ここではこれを利用して 4 次の Runge-Kutta 法により時間積分を行う．