Bénard 対流問題

@mat_der_D

2018 年 7 月 16 日

1　基礎方程式

基礎方程式は, Boussinesq モデルを用いる:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\nabla p + PrRaT\boldsymbol{k} + Pr\nabla^2 \boldsymbol{u}, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)T = \nabla^2 T. \tag{3}$$

ここで $\boldsymbol{u} = (u, v, w)$ は (無次元) 速度場, T は (無次元) 温度場[*1], p は (無次元) 圧力場であり, $\boldsymbol{k}$ は z 方向の単位ベクトルである．無次元化に用いた長さスケールを L, 時間スケールを τ, 速度スケールを U, 温度スケールを Θ とする．これらのスケールの間には

$$\tau = \frac{L^2}{\kappa}, \quad U = \frac{L}{\tau} = \frac{\kappa}{L}$$

が成り立つ．ただし κ は温度拡散率である．また無次元パラメーターである Prandtl 数 Pr, Rayleigh 数 Ra は

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \quad Ra = \frac{\alpha g \Theta L^3}{\kappa \nu}$$

で定義する．

二次元の場合 (全ての変数が y に依存せず, $v \equiv 0$ の場合) について考える．このときは変数はすべて x, z の関数であり, $\boldsymbol{u} = (u, w)$, $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z})$ と解釈することとする．流れ関数 $\psi(x, z)$ を

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

[*1] 正確にはある基準温度からの温度差 (を無次元化したもの)．方程式は一見温度の基準の取り方によって変わるように見えるが, 基準の取り換えによる項は圧力項に吸収できるため, そのような心配はない．

と導入することで, 基礎方程式は次のように変形される[*2]:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\psi, \omega) = -PrRa\frac{\partial T}{\partial x} + Pr\nabla^2\omega, \tag{4}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + J(\psi, T) = \nabla^2 T. \tag{5}$$

ここで $\omega = -\nabla^2\psi$ は y 方向の渦度である. また $a(x,z), b(x,z)$ に対して

$$J(a,b) = \frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial z} \tag{6}$$

と定義する.

2 境界条件

速度の境界条件は 2 種類考える.

(1) 運動学的条件 + 粘着条件

$$u = v = w = 0 \qquad (\text{at } z = \text{境界}) \tag{7}$$

2 次元の場合, 流れ関数を用いて書き換えると

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \qquad (\text{at } z = \text{境界}) \tag{8}$$

となる[*3].

(2) 運動学的条件 + (水平) 応力なし条件

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = w = 0 \qquad (\text{at } z = \text{境界}) \tag{9}$$

2 次元の場合, 流れ関数を用いて書き換えると

$$\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \qquad (\text{at } z = \text{境界}) \tag{10}$$

となる[*3].

温度の境界条件は

$$T = T_L \qquad (\text{at } z = \text{下の境界}), \qquad T = T_U \qquad (\text{at } z = \text{上の境界}) \tag{11}$$

とする. ただし $T_L > T_U$.

[*2] 非圧縮条件 $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$ は流れ関数を導入した時点で自動的に満足する.

[*3] 厳密には, ここで水平方向の平均流量が常に 0 となる条件を課している.

ここで無次元化に用いた長さスケール L を上下境界の間の距離とし, 温度スケール Θ を $T_L - T_U$ と定めれば, 境界を $z = 0, 1$ とでき, また温度に関する境界条件を $T(z = 0) = 1, T(z = 1) = 0$ とできる.