Aproksymacja rozwiązania równania potencjału elektromagnetycznego metodą elementów skończonych

Mateusz Kosman

16 stycznia 2025

1 Równanie potencjału elektromagnetycznego

Dane jest równanie:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_r} \tag{1}$$

o następujących warunkach brzegowych:

$$\phi'(0) + \phi(0) = 5 \tag{2}$$

$$\phi(3) = 2 \tag{3}$$

oraz następujących wartościach zmiennych:

$$\rho = 1 \tag{4}$$

$$\epsilon_r = \begin{cases} 10, & x \in [0,1] \\ 5, & x \in (1,2] \\ 1, & x \in (2,3] \end{cases} \tag{5}$$

Chcemy znaleźć aproksymację rozwiązania równania (1) korzystając z podanych danych.

2 Wyprowadzenie sformułowania wariacyjnego

Równanie (1) mnożymy obustronnie przez funkcję testową $v(x)$ spełniającą warunek $v(3) = 0$. Otrzymane równanie obustronnie całkujemy po dziedzinie $\Omega = [0,3]$ i przekształcamy równoważnie:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}(x) \cdot v(x) = -\frac{\rho}{\epsilon_r} \cdot v(x)$$

$$
\begin{aligned}
\phi'' v &= -\frac{\rho}{\epsilon_r} v \\
\int_0^3 \phi'' v \, dx &= \int_0^3 -\frac{\rho}{\epsilon_r} v \, dx \\
\int_0^3 \phi'' v \, dx &= -\frac{\rho}{\epsilon_r} \int_0^3 v \, dx \\
[\phi' v]_0^3 - \int_0^3 \phi' v' \, dx &= -\frac{\rho}{\epsilon_r} \int_0^3 v \, dx \text{ (całk. przez części)} \\
-\phi'(0) v(0) - \int_0^3 \phi' v' \, dx &= -\frac{\rho}{\epsilon_r} \int_0^3 v \, dx \ \ (v(3) = 0) \\
(\phi(0) - 5) v(0) - \int_0^3 \phi' v' \, dx &= -\frac{\rho}{\epsilon_r} \int_0^3 v \, dx \text{ (korzystamy z (2))} \\
\phi(0) v(0) - \int_0^3 \phi' v' \, dx &= 5v(0) - \frac{\rho}{\epsilon_r} \int_0^3 v \, dx \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Wprowadźmy oznaczenia:

$$
B(\phi, v) = \phi(0) v(0) - \int_0^3 \phi' v' \, dx \qquad (7)
$$

$$
L(v) = 5v(0) - \frac{\rho}{\epsilon_r} \int_0^3 v \, dx \qquad (8)
$$

Równanie (6) możemy zapisać jako:

$$
B(\phi, v) = L(v), \qquad (9)
$$

gdzie $B(\phi, v)$ jest funkcjonałem biliniowym, a $L(v)$ funkcjonałem liniowym.

3 Zastosowanie metody Galerkina

Dzielimy dziedzinę na n obszarów. W związku z tym przyjmuję ciąg funkcji bazowych $(e_0, e_1, ..., e_n)$ i ich pochodnych zdefiniowanych następująco:

$$
e_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, & x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases} \qquad (10)
$$

$$
e_i'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_i - x_{i-1}}, & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \frac{1}{x_i - x_{i+1}}, & x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases} \qquad (11)
$$

Aproksymujemy rozwiązanie liniowe kombinacją funkcji bazowych $e_i = e_i(x)$ z przesunięciem $2e_n$ (zatem zakładamy, że $w_n = 2$), co wynika z (3):

$$\phi \approx 2e_n + \sum_{i=0}^{n-1} w_i e_i \tag{12}$$

$$v \approx \sum_{i=0}^{n-1} v_i e_i \tag{13}$$

Podstawiając aproksymację (12) do równania (9) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
B\left(2e_n + \sum_{i=0}^{n-1} w_i e_i, v\right) &= L(v) \\
B(2e_n, v) + B\left(\sum_{i=0}^{n-1} w_i e_i, v\right) &= L(v) \\
B\left(\sum_{i=0}^{n-1} w_i e_i, v\right) &= L(v) - B(2e_n, v) \\
B\left(\sum_{i=0}^{n-1} w_i e_i, v\right) &= L(v) - B(2e_n, v) \\
\sum_{i=0}^{n-1} w_i B(e_i, v) &= L(v) - B(2e_n, v)
\end{aligned}$$

Do otrzymanego równania podstawiamy aproksymację (13):

$$\sum_{i=0}^{n-1} w_i B\left(e_i, \sum_{j=0}^{n-1} v_j e_j\right) = L\left(\sum_{j=0}^{n-1} v_j e_j\right) - B\left(2e_n, \sum_{j=0}^{n-1} v_j e_j\right)$$

Skoro v jest dowolną funkcją, to możemy przyjąć, że:

$$\forall j \in \{0, 1, ..., n-1\} : v_j = \begin{cases} 1, & x = x_j \\ 0, & x \neq x_j \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy układ n równań:

$$\begin{cases}
\sum_{i=0}^{n-1} w_i B\left(e_i, e_0\right) = L\left(e_0\right) - B\left(2e_n, e_0\right) \\
\sum_{i=0}^{n-1} w_i B\left(e_i, e_1\right) = L\left(e_1\right) - B\left(2e_n, e_1\right) \\
\dots \\
\sum_{i=0}^{n-1} w_i B\left(e_i, e_{n-1}\right) = L\left(e_{n-1}\right) - B\left(2e_n, e_{n-1}\right)
\end{cases}$$

Układ ten można przedstawić w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} B\left(e_0,e_0\right) & B\left(e_1,e_0\right) & \cdots & B\left(e_{n-1},e_0\right) \\ B\left(e_0,e_1\right) & B\left(e_1,e_1\right) & \cdots & B\left(e_{n-1},e_1\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B\left(e_0,e_{n-1}\right) & B\left(e_1,e_{n-1}\right) & \cdots & B\left(e_{n-1},e_{n-1}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L\left(e_0\right) - B\left(2e_n,e_0\right) \\ L\left(e_1\right) - B\left(2e_n,e_1\right) \\ \vdots \\ L\left(e_{n-1}\right) - B\left(2e_n,e_{n-1}\right) \end{bmatrix}$$

Mnożąc równanie obustronnie od lewej przez odwrotność macierzy z wartościami funkcjonału B otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B\left(e_0,e_0\right) & B\left(e_1,e_0\right) & \cdots & B\left(e_{n-1},e_0\right) \\ B\left(e_0,e_1\right) & B\left(e_1,e_1\right) & \cdots & B\left(e_{n-1},e_1\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B\left(e_0,e_{n-1}\right) & B\left(e_1,e_{n-1}\right) & \cdots & B\left(e_{n-1},e_{n-1}\right) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} L\left(e_0\right) - B\left(2e_n,e_0\right) \\ L\left(e_1\right) - B\left(2e_n,e_1\right) \\ \vdots \\ L\left(e_{n-1}\right) - B\left(2e_n,e_{n-1}\right) \end{bmatrix} \tag{14}$$

4 Obliczanie wartości układu równań

Obliczając całki iloczynów funkcji bazowych oraz iloczynów ich pochodnych korzystamy z faktu, że $e_ie_j \equiv e_i'e_j' \equiv 0$ dla $|i-j| \geq 2$, ponieważ dla każdego x co najmniej jeden z czynników jest równy 0, co wynika z definicji (10), (11).
Wyznaczamy wartości $B(e_i,e_j)$ korzystając z równania (7):

$$\begin{aligned} B(e_i,e_j) &= \begin{cases} e_0(0)^2 - \int_0^3 e_0'^2\,dx, & i=j=0 \\ e_i(0)^2 - \int_0^3 e_i'^2\,dx, & i=j\neq 0 \\ e_i(0)e_j(0) - \int_0^3 e_i'e_j'\,dx, & |i-j|=1 \\ e_i(0)e_j(0), & |i-j|\geq 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} e_0(0)^2 - \frac{n}{3}, & i=j=0 \\ e_i(0)^2 - \frac{2n}{3}, & i=j\neq 0 \\ e_i(0)e_j(0) + \frac{n}{3}, & |i-j|=1 \\ e_i(0)e_j(0), & |i-j|\geq 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - \frac{n}{3}, & i=j=0 \\ -\frac{2n}{3}, & i=j\neq 0 \\ \frac{n}{3}, & |i-j|=1 \\ 0, & |i-j|\geq 2 \end{cases} \end{aligned} \tag{15}$$

Z kolei wartości $B(2e_n,e_j)$ wynoszą:

$$B(2e_n,e_j) = \begin{cases} 2e_n(0)e_{n-1}(0) - \int_0^3 (2e_n)'e_{n-1}'\,dx, & j=n-1 \\ 2e_n(0)e_j(0) - \int_0^3 (2e_n)'e_j'\,dx, & j\neq n-1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2e_n(0)e_{n-1}(0) + \frac{2n}{3}, & j = n-1 \\ 2e_n(0)e_j(0), & j \neq n-1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{2n}{3}, & j = n-1 \\ 0, & j \neq n-1 \end{cases} \tag{16}$$

Wyznaczamy wartości $L(e_j)$ korzystając z równania (8):

$$\begin{aligned} L(e_j) &= 5e_j(0) - \frac{\rho}{\epsilon_r}\int_0^3 e_j\,dx \\ &= \begin{cases} 5 - \frac{3\rho}{2n\epsilon_r}, & j = 0 \\ -\frac{3\rho}{n\epsilon_r}, & j \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{17}$$

Podstawiając wartości (15), (16), (17) do równania (14) otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ \vdots \\ w_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\frac{n}{3} & \frac{n}{3} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{n}{3} & -\frac{2n}{3} & \frac{n}{3} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{n}{3} & -\frac{2n}{3} & \frac{n}{3} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n}{3} & -\frac{2n}{3} & \frac{n}{3} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{n}{3} & -\frac{2n}{3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{2n}{3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 - \frac{3\rho}{2n\epsilon_r} \\ -\frac{3\rho}{n\epsilon_r} \\ -\frac{3\rho}{n\epsilon_r} \\ -\frac{3\rho}{n\epsilon_r} \\ \vdots \\ -\frac{3\rho}{n\epsilon_r} \\ -\frac{3\rho}{n\epsilon_r} - \frac{2n}{3} \end{bmatrix} \tag{18}$$

Przy aproksymacji (12) założyliśmy, że $w_n = 2$. Stąd możemy już obliczyć wszystkie wartości ciągu $(w_0, w_1, \ldots, w_n)$ i zaproksymować ϕ zgodnie z (12):

$$\phi \approx 2e_n + \sum_{i=0}^{n-1} w_i e_i = \sum_{i=0}^{n} w_i e_i \tag{19}$$

5 Szczegóły techniczne

W ramach aproksymacji zadanego równania całki funkcji bazowych liczone są numerycznie, w związku z czym wartości obliczone w poprzedniej sekcji nie są wymagane. Program jest napisany w języku *Python 3.12.3* i wykorzystuje biblioteki:

- *matplotlib 3.10.0* - do wizualizacji danych,
- *numpy 1.26.4* - do rachunku macierzowego.

Wartość n przekazywana jest przez użytkownika jako parametr uruchomieniowy aplikacji, tj. wykonywany jest kod $\mathrm{N = int(sys.argv[1])}$.