

# Aproksymacja rozwiązania równania potencjału elektromagnetycznego metodą elementów skończonych

Mateusz Kosman

16 stycznia 2025

## 1 Równanie potencjału elektromagnetycznego

Dane jest równanie:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_r} \quad (1)$$

o następujących warunkach brzegowych:

$$\phi'(0) + \phi(0) = 5 \quad (2)$$

$$\phi(3) = 2 \quad (3)$$

oraz następujących wartościach zmiennych:

$$\rho = 1 \quad (4)$$

$$\epsilon_r = \begin{cases} 10, & x \in [0, 1] \\ 5, & x \in (1, 2] \\ 1, & x \in (2, 3] \end{cases} \quad (5)$$

Chcemy znaleźć aproksymację rozwiązania równania (1) korzystając z podanych danych.

## 2 Wyprowadzenie sformułowania wariacyjnego

Równanie (1) mnożymy obustronnie przez funkcję testową  $v(x)$  spełniającą warunek  $v(3) = 0$ . Otrzymane równanie obustronnie całkujemy po dziedzinie  $\Omega = [0, 3]$  i przekształcamy równoważnie:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}(x) \cdot v(x) = -\frac{\rho}{\epsilon_r} \cdot v(x)$$

$$\begin{aligned}
\phi''v &= -\frac{\rho}{\epsilon_r}v \\
\int_0^3 \phi''v \, dx &= \int_0^3 -\frac{\rho}{\epsilon_r}v \, dx \\
\int_0^3 \phi''v \, dx &= -\frac{\rho}{\epsilon_r} \int_0^3 v \, dx \\
[\phi'v]_0^3 - \int_0^3 \phi'v' \, dx &= -\frac{\rho}{\epsilon_r} \int_0^3 v \, dx \quad (\text{całk. przez części}) \\
-\phi'(0)v(0) - \int_0^3 \phi'v' \, dx &= -\frac{\rho}{\epsilon_r} \int_0^3 v \, dx \quad (v(3) = 0) \\
(\phi(0) - 5)v(0) - \int_0^3 \phi'v' \, dx &= -\frac{\rho}{\epsilon_r} \int_0^3 v \, dx \quad (\text{korzystamy z (2)}) \\
\phi(0)v(0) - \int_0^3 \phi'v' \, dx &= 5v(0) - \frac{\rho}{\epsilon_r} \int_0^3 v \, dx \tag{6}
\end{aligned}$$

Wprowadźmy oznaczenia:

$$B(\phi, v) = \phi(0)v(0) - \int_0^3 \phi'v' \, dx \tag{7}$$

$$L(v) = 5v(0) - \frac{\rho}{\epsilon_r} \int_0^3 v \, dx \tag{8}$$

Równanie (6) możemy zapisać jako:

$$B(\phi, v) = L(v), \tag{9}$$

gdzie  $B(\phi, v)$  jest funkcjonałem biliniowym, a  $L(v)$  funkcjonałem liniowym.

### 3 Zastosowanie metody Galerkin

Dzielimy dziedzinę na  $n$  obszarów. W związku z tym przyjmuję ciąg funkcji bazowych  $(e_0, e_1, \dots, e_n)$  zdefiniowanych następująco:

$$e_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}, & x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases} \tag{10}$$

$$e'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_i-x_{i-1}}, & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \frac{1}{x_i-x_{i+1}}, & x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases} \tag{11}$$

Aproksymujemy rozwiązanie liniowe kombinacją funkcji bazowych  $e_i = e_i(x)$  z przesunięciem  $2e_n$  (zatem zakładamy, że  $w_n = 2$ ), co wynika z (3):

$$\phi \approx 2e_n + \sum_{i=0}^{n-1} w_i e_i \quad (12)$$

$$v \approx \sum_{i=0}^{n-1} v_i e_i \quad (13)$$

Podstawiając aproksymację (12) do równania (9) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} B\left(2e_n + \sum_{i=0}^{n-1} w_i e_i, v\right) &= L(v) \\ B(2e_n, v) + B\left(\sum_{i=0}^{n-1} w_i e_i, v\right) &= L(v) \\ B\left(\sum_{i=0}^{n-1} w_i e_i, v\right) &= L(v) - B(2e_n, v) \\ B\left(\sum_{i=0}^{n-1} w_i e_i, v\right) &= L(v) - B(2e_n, v) \\ \sum_{i=0}^{n-1} w_i B(e_i, v) &= L(v) - B(2e_n, v) \end{aligned}$$

Do otrzymanego równania podstawiamy aproksymację (13):

$$\sum_{i=0}^{n-1} w_i B\left(e_i, \sum_{j=0}^{n-1} v_j e_j\right) = L\left(\sum_{j=0}^{n-1} v_j e_j\right) - B\left(2e_n, \sum_{j=0}^{n-1} v_j e_j\right)$$

Skoro  $v$  jest dowolną funkcją, to możemy przyjąć, że:

$$\forall j \in \{0, 1, \dots, n-1\} : v_j = \begin{cases} 1, & x = x_j \\ 0, & x \neq x_j \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy układ  $n$  równań:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n-1} w_i B(e_i, e_0) = L(e_0) - B(2e_n, e_0) \\ \sum_{i=0}^{n-1} w_i B(e_i, e_1) = L(e_1) - B(2e_n, e_1) \\ \dots \\ \sum_{i=0}^{n-1} w_i B(e_i, e_{n-1}) = L(e_{n-1}) - B(2e_n, e_{n-1}) \end{cases}$$

Układ ten można przedstawić w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} B(e_0, e_0) & B(e_1, e_0) & \cdots & B(e_{n-1}, e_0) \\ B(e_0, e_1) & B(e_1, e_1) & \cdots & B(e_{n-1}, e_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(e_0, e_{n-1}) & B(e_1, e_{n-1}) & \cdots & B(e_{n-1}, e_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(e_0) - B(2e_n, e_0) \\ L(e_1) - B(2e_n, e_1) \\ \vdots \\ L(e_{n-1}) - B(2e_n, e_{n-1}) \end{bmatrix}$$

Mnożąc równanie obustronnie od lewej przez odwrotność macierzy z wartościami funkcjonału  $B$  otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B(e_0, e_0) & B(e_1, e_0) & \cdots & B(e_{n-1}, e_0) \\ B(e_0, e_1) & B(e_1, e_1) & \cdots & B(e_{n-1}, e_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(e_0, e_{n-1}) & B(e_1, e_{n-1}) & \cdots & B(e_{n-1}, e_{n-1}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} L(e_0) - B(2e_n, e_0) \\ L(e_1) - B(2e_n, e_1) \\ \vdots \\ L(e_{n-1}) - B(2e_n, e_{n-1}) \end{bmatrix} \quad (14)$$

## 4 Obliczanie wartości układu równań

Obliczając całki iloczynów funkcji bazowych korzystamy z faktu, że  $e_i e_j \equiv 0$  dla  $|i - j| \geq 2$ , ponieważ dla każdego  $x$  co najmniej jeden z czynników jest równy 0, co wynika z definicji (10).

Wyznaczamy wartości  $B(e_i, e_j)$  korzystając z równania (7):

$$\begin{aligned} B(e_i, e_j) &= \begin{cases} e_0(0)^2 - \int_0^3 e_0'^2 dx, & i = j = 0 \\ e_i(0)^2 - \int_0^3 e_i'^2 dx, & i = j \neq 0 \\ e_i(0)e_j(0) - \int_0^3 e_i' e_j' dx, & |i - j| = 1 \\ e_i(0)e_j(0), & |i - j| \geq 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} e_0(0)^2 - \frac{n}{3}, & i = j = 0 \\ e_i(0)^2 - \frac{2n}{3}, & i = j \neq 0 \\ e_i(0)e_j(0) + \frac{n}{3}, & |i - j| = 1 \\ e_i(0)e_j(0), & |i - j| \geq 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - \frac{n}{3}, & i = j = 0 \\ -\frac{2n}{3}, & i = j \neq 0 \\ \frac{n}{3}, & |i - j| = 1 \\ 0, & |i - j| \geq 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

Z kolei wartości  $B(2e_n, e_j)$  wynoszą:

$$B(2e_n, e_j) = \begin{cases} 2e_n(0)e_{n-1}(0) - \int_0^3 (2e_n)' e_{n-1}' dx, & j = n - 1 \\ 2e_n(0)e_j(0) - \int_0^3 (2e_n)' e_j' dx, & j \neq n - 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} 2e_n(0)e_{n-1}(0) + \frac{2n}{3}, & j = n-1 \\ 2e_n(0)e_j(0), & j \neq n-1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{2n}{3}, & j = n-1 \\ 0, & j \neq n-1 \end{cases}
\end{aligned} \tag{16}$$

Wyznaczamy wartości  $L(e_j)$  korzystając z równania (8):

$$\begin{aligned}
L(e_j) &= 5e_j(0) - \frac{\rho}{\epsilon_r} \int_0^3 e_j dx \\
&= \begin{cases} 5 - \frac{3\rho}{2n\epsilon_r}, & j = 0 \\ -\frac{3\rho}{n\epsilon_r}, & j \neq 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{17}$$

Podstawiając wartości (15), (16), (17) do równania (14) otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ \vdots \\ w_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{n}{3} & \frac{n}{3} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{n}{3} & -\frac{2n}{3} & \frac{n}{3} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{n}{3} & -\frac{2n}{3} & \frac{n}{3} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n}{3} & -\frac{2n}{3} & \frac{n}{3} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{n}{3} & -\frac{2n}{3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{2n}{3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 - \frac{3\rho}{2n\epsilon_r} \\ -\frac{3\rho}{n\epsilon_r} \\ -\frac{3\rho}{n\epsilon_r} \\ -\frac{3\rho}{n\epsilon_r} \\ \vdots \\ -\frac{3\rho}{n\epsilon_r} \\ -\frac{3\rho}{n\epsilon_r} - \frac{2n}{3} \end{bmatrix} \tag{18}$$

Przy aproksymacji (12) założyliśmy, że  $w_n = 2$ . Stąd możemy już obliczyć wszystkie wartości ciągu  $(w_0, w_1, \dots, w_n)$  i zaproksymować  $\phi$  zgodnie z (12):

$$\phi \approx 2e_n + \sum_{i=0}^{n-1} w_i e_i = \sum_{i=0}^n w_i e_i \tag{19}$$

## 5 Szczegóły techniczne

W ramach aproksymacji zadanego równania całki funkcji bazowych liczone są numerycznie, w związku z czym wartości obliczone w poprzedniej sekcji nie są wymagane. Program jest napisany w języku *Python 3.12.3* i wykorzystuje biblioteki:

- *matplotlib 3.10.0* - do wizualizacji danych,
- *numpy 1.26.4* - do rachunku macierzowego.

Wartość  $n$  przekazywana jest przez użytkownika jako parametr uruchomieniowy aplikacji, tj. wykonywany jest kod `N = int(sys.argv[1])`.