Calculo Numérico:
Interpolação Polinomial de Hermite

Daniel Franco Pereira Junior[1]
Felippe Frasson[1]
Valmei Abreu Júnior[1]

[1]Curso de Ciência da Computação – Faculdades Anglo-Americano (FAA)
Foz do Iguaçu – PR – Brasil

daniel_eddy@live.com
felippefrasson@hotmail.com
valmeijr@terra.com.br

Abstract. *This article presents the Hermite Polynomial Interpolation, since the establishment of a Polynomial up to the development and application of Interpolation. The algorithm shown was used to demonstrate the numerical calculations of Hermite Interpolation.*

Resumo. *Este artigo apresenta a Interpolação Polinomial de Hermite, desde a criação de um polinômio ate o desenvolvimento e a aplicação da interpolação. O algoritmo mostrado foi usado para demonstrar os cálculos numéricos da Interpolação de Hermite.*

1. Polinômios

Segundo Stewart (2006), em matemática polinômios são uma série de monômios ou termos que, por sua vez, são expressões matemáticas na forma ax^n. Cada monômio é caracterizado por um coeficiente, que na equação ax^n é representado por a, uma variável que na equação é representada por x, e um expoente que é representado por n. Assim, um polinômio é um conjunto de monômios, devidamente normalizados. A função polinomial ou polinômio assume a forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Os polinômios desempenham um papel central na teoria de aproximação e análise numérica. O espaço de polinômios de ordem até M (M finito), com coeficientes reais, é definido no intervalo [a,b] na forma:

$$P_m[a,b] = \left\{ p_m(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i x^i,\ \ c_0, \dots, c_m \ \in \Re \ e \ x \in [a,b] \right\}.$$

Ralston (1965) após pesquisar a importância dos polinômios procurou provar destacando as propriedades existentes em P_m [a,b], que:

- P_m[a,b] é um espaço linear de dimensão finita;
- Os polinômios são uma classe importante de funções simples e infinitamente diferenciáveis;
- Os polinômios são de fácil avaliação e armazenagem em computadores digitais;
- A derivada e a antiderivada de um polinômio são também polinômios cujos coeficientes podem ser determinados algebricamente, mesmo por um computador;
- É possível definir taxas de convergência precisas para aproximações de funções suaves por polinômios.

As propriedades citadas, indicam que os polinômios são funções de interpolação e aproximação ideais. No entanto, P_m[a,b] possui um tipo de inflexibilidade que se manifesta na forma da propriedade, que diz: processos de interpolação e aproximação que utilizam polinômios produzindo funções que oscilam excessivamente, sendo que a oscilação fica necessariamente mais pronunciada com o aumento da ordem do polinômio, estas oscilações são conhecidas como fenômeno de Runge .

A contenção desta oscilação é fundamental para a garantia de convergência de problemas gerais de aproximação (DAVIS, 1975). Então, é realizado a substituição de polinômios por outras funções mais flexíveis. Dentre as inúmeras alternativas, encontram-se os polinômios de Hermite que são funções por partes e que têm a vantagem de preservar boa parte das propriedades apresentadas acima para espaços polinomiais.

2. Como se Desenvolve

Segundo Barbosu (2010), em 1878 Charles Hermite procurou mostrar que para $f \in D^{(\propto)}(I)$ existe um único polinômio de grau maior que n, que indica $(H_n f)(x_0^{r0}, x_1^{r1}, \dots x_m^{rm})(x)$ na qual chamou-se a Interpolação Polinomial de Hermite.

Os polinômios de Hermite estão entre os polinômios de Taylor e os polinômios de Lagrange, na qual adaptam-se a valores dados em vários pontos (como os polinômios de Lagrange) e tomam em conta os valores das derivadas (como os polinômios de Taylor).

O objetivo da interpolação de Hermite é o de representar uma função f por um polinômio que seja interpolador de f em alguns pontos do seu domínio e que a sua derivada seja interpolador da derivada de f nesses mesmos pontos (ARAUJO, 2002). Supondo f diferençável, procura-se um polinômio p tal que:

p(x_i) = f(x_i) e p'(x_i) = f'(x_i), i = 0, . . . n. (7).

Existe um único polinômio de grau menor ou igual a 2n + 1 que verifica (7).

Seja $f \epsilon C^{2n+2}([a,b])$ e $x_0, x_1, . . . , x_n$ pontos distintos em [a, b]. Existe um e um só polinômio p_{2n+1} pertencente a P_{2n+1} que verifica:

p(x_i) = f(x_i) e p'(x_i) = f'(x_i), i = 0, . . . n. (8)

Se, adicionalmente, se dispuser de informação sobre as derivadas da função, pode melhorar-se a qualidade da aproximação aumentando-se o grau do polinômio interpolador. Essa técnica designa-se por interpolação de Hermite e, geralmente, apresenta uma menor tendência para comportamento osculatório.
O objetivo desta presente secção é a determinação dos coeficientes do polinômio que interpole não só os valores da função, mas também das derivadas. Na Figura 1 é possível ver uma função $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ sendo representada no gráfico, e a Interpolação do polinômio variando em relação a função $f(x)$, sendo calculado com base no intervalo [1,4].

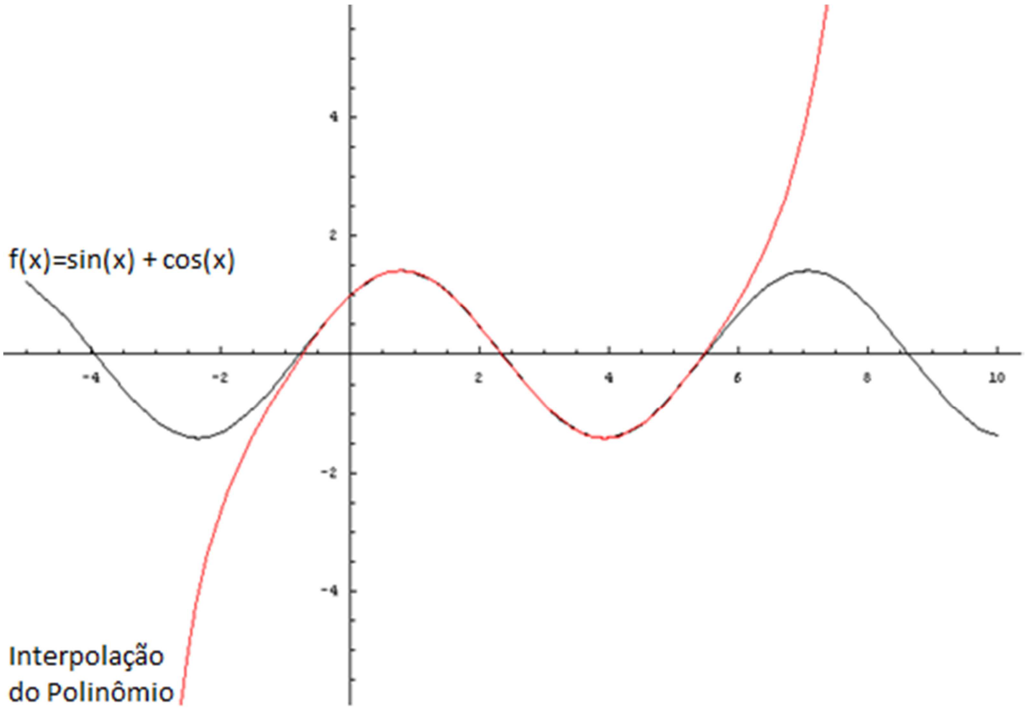

Figura 1. Interpolação Polinomial de Hermite

3. Exemplo utilizando Hermite

Considerando a função $f(x) = x^8 + 1$. Avaliando a função e suas duas primeiras derivadas para x nos pontos x $\{-1,0,1\}$, obtem-se os seguintes dados da na Tabela 1:

X	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
−1	2	−8	56
0	1	0	0
1	2	8	56

Tabela 1. Dados

E então é construído o conjunto $\{z_i\} = \{-1,-1,-1,0,0,0,1,1,1\}$, na qual a tabela é dividida na Figura 2:

$z_0 = -1$	$f[z_0] = 2$								
		$\frac{f'(z_0)}{1} = -8$							
$z_1 = -1$	$f[z_1] = 2$		$\frac{f''(z_1)}{2} = 28$						
		$\frac{f'(z_1)}{1} = -8$		$f[z_3, z_2, z_1, z_0] = -21$					
$z_2 = -1$	$f[z_2] = 2$		$f[z_3, z_2, z_1] = 7$		15				
		$f[z_3, z_2] = -1$		$f[z_4, z_3, z_2, z_1] = -6$		-10			
$z_3 = 0$	$f[z_3] = 1$		$f[z_4, z_3, z_2] = 1$		5		4		
		$\frac{f'(z_3)}{1} = 0$		$f[z_5, z_4, z_3, z_2] = -1$		-2		-1	
$z_4 = 0$	$f[z_4] = 1$		$\frac{f''(z_4)}{2} = 0$		1		2		1
		$\frac{f'(z_4)}{1} = 0$		$f[z_6, z_5, z_4, z_3] = 1$		2		1	
$z_5 = 0$	$f[z_5] = 1$		$f[z_6, z_5, z_4] = 1$		5		4		
		$f[z_6, z_5] = 1$		$f[z_7, z_6, z_5, z_4] = 6$		10			
$z_6 = 1$	$f[z_6] = 2$		$f[z_7, z_6, z_5] = 7$		15				
		$\frac{f'(z_7)}{1} = 8$		$f[z_8, z_7, z_6, z_5] = 21$					
$z_7 = 1$	$f[z_7] = 2$		$\frac{f''(z_7)}{2} = 28$						
		$\frac{f'(z_8)}{1} = 8$							
$z_8 = 1$	$f[z_8] = 2$								

Figura 2. Resolvendo o Polinômio de Hermite

E o polinômio gerado é:

$$
\begin{aligned}
P(x) = {} & 2 - 8(x+1) + 28(x+1)^2 - 21(x+1)^3 + 15x(x+1)^3 \\
& - 10x^2(x+1)^3 + 4x^3(x+1)^3 - 1x^3(x+1)^3(x-1) \\
& + x^3(x+1)^3(x-1)^2 \\
& = 2 - 8 + 28 - 21 - 8x + 56x - 63x + 15x + 28x^2 - 63x^2 \\
& + 45x^2 - 10x^2 - 21x^3 + 45x^3 - 30x^3 + 4x^3 + x^3 + x^3 \\
& + 15x^4 - 30x^4 + 12x^4 + 2x^4 + x^4 - 10x^5 + 12x^5 - 2x^5 \\
& + 4x^5 - 2x^5 - 2x^5 - x^6 + x^6 - x^7 + x^7 + x^8 = x^8 + 1
\end{aligned}
$$

4. Algoritmo

A Figura 3 apresenta um exemplo do algoritmo da interpolação de Hermite, onde serão demonstrados os passos para os procedimentos necessários para sua aplicação.

```
function [H]=hermite(X,x,f,fd);
m=length(x);
for i=1:m
    z(2*i-1)=x(i);
    Q(2*i-1,1)=f(i);
    z(2*i)=x(i);
    Q(2*i,1)=f(i);
    Q(2*i,2)=fd(i);
    if i~=1
        Q(2*i-1,2)=(Q(2*i-1,1)-Q(2*i-2,1))/(z(2*i-1)-z(2*i-2));
    end;
end;
for i=3:2*m
    for j=3:i
        Q(i,j)=(Q(i,j-1)-Q(i-1,j-1))/(z(i)-z(i-j+1));
    end
end
p=1;
H=Q(1,1);
for i=2:2*m
    p=p.*(X-z(i-1));
    H=H+p.*Q(i,i);
end;
```

Figura 3. Algoritmo da Interpolação de Hermite

Para se obter os coeficientes do polinômio Interpolador de Hermite $H(x)$ em (n + 1) números distintos $x_0, x_1, \dots, x_n$; para a função f, é necessário que seja feita uma entrada de números variando $x_0, x_1, \dots, x_n$; valores $f(x_0), \dots, f(x_n)$.

Na saída do algoritmo são apresentados os resultados com os números variando de $Q_{0,0}, Q_{1,1}, \dots, Q_{2n+1,2n+1}$ onde $H(x) = Q_{0,0} + Q_{1,1}(x - x_0) + Q_{2,2}(x - x_0)^2 + Q_{3,3}(x - x_0)^2(x - x_1) + Q_{4,4}(x - x_0)^2(x - x_1)^2 + \cdots + Q_{2n+1,2n+1}(x - x_0)^2 \dots (x - x_{n-1})^2(x - x_n)$, que representam o polinômio gerado.

5. Conclusão

Os polinômios são importantes na área de analise numérica, e como aparecem na resolução de muitos problemas. Interpolar um polinômio consiste em se obter um polinômio $p(x)$ que passe por todos os pontos do conjunto de n+1 números, os métodos da interpolação polinomial diferem uns dos outros, quanto a técnica

de determinação do polinômio interpolador, neste artigo foi apresentado o método da Interpolação Polinomial de Hermite.
O uso da Interpolação Polinomial de Hermite varia já que é uma modificação comum a interpolação de Lagrange como citado no texto. Foi apresentado como é desenvolvido, como é aplicado e como é construído um algoritmo para sua utilização.

6. Referências

STEWART, J. “Cálculo”. 5 ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

DAVIS, P.J. “Interpolation and Approximation”. Dover Publications, 1975.

RALSTON, A. “A First Course in Numerical Analysis”. McGraw-Hill, 1965.

ARAUJO, A. "Sebenta de Análise Numérica", Sebenta da disciplina, Coimbra, 2002

BARBOSU, D. “On the Hermite interpolation polynomial”, 2010.