Projektowanie efektywnych algorytmów

Projekt 1

Implementacja algorytmów dokładnych dla problemu komiwojażera

Autor: Mateusz Chalik

Nr indeksu: 252735

Termin zajęć: Czwartek 15.15

Prowadzący: Mgr inż. Antoni Sterna

Spis treści

1. Wstęp teoretyczny

1.1 Opis problemu

TSP (ang. travelling salesman problem) - problem komiwojażera

Nazwa pochodzi od typowej ilustracji problemu, przedstawiającej go z punktu widzenia wędrownego sprzedawcy (komiwojażera): dane jest n miast, które komiwojażer ma odwiedzić, oraz odległość pomiędzy każdą parą miast. Celem jest znalezienie właściwego cyklu Hamiltona - najkrótszej drogi łączącej wszystkie miasta, zaczynającej się i kończącej się w określonym punkcie.

Symetryczny problem komiwojażera (STSP) polega na tym, że dla dowolnych miast A i B odległość z A do B jest taka sama jak z B do A. W asymetrycznym problemie komiwojażera (ATSP) odległości te mogą być różne. Główną trudnością problemu jest duża liczba danych do analizy.

1.2 Opis algorytmów

Algorytm przeglądu zupełnego - gwarantuje optymalne wyniki ale jest bardzo wolny, polega na permutacjach - sprawdza wszystkie możliwe ścieżki poprzez sprawdzenie wszystkich kombinacji podanych wierzchołków / miast.

Algorytm podziału i ograniczeń - metoda opiera się na przeszukiwaniu drzewa reprezentującego przestrzeń rozwiązań problemu, odcięcia redukują liczbę przeszukiwanych wierzchołków przyspieszając rozwiązanie. W danej metodzie rozgałęzienia tworzą następników danego wierzchołka a ograniczenia odcinają części drzewa, w których na pewno nie ma optymalnego rozwiązania.

Algorytm programowania dynamicznego - idea programowania dynamicznego polega na zapisywaniu w pamięci danych z aktualnych podwywołań używając rekurencji. Kolejne podwywołania prowadzą do coraz to łatwiejszych problemów i tak aż to trywialnych.

1.3 Szacowana złożoność obliczeniowa

Przegląd zupełny: $O(n!)$

Metoda podziału i ograniczeń: $wykładnicza,\ O(2^n)$

Metoda programowania dynamicznego: $O(n^2 2^n)$

2. Praktyczny opis działania algorytmów

2.1 Algorytm przeglądu zupełnego

	0	*1*	*2*	*3*
0	0	2	7	6
1	4	0	8	5
2	5	3	0	1
3	9	4	8	0

1) Wartości początkowe

min = INT_MAX
path = null

2) Obliczamy koszt każdej możliwej ścieżki:

{0} {1, 2, 3} = 0 -> 1 -> 2 -> 3 -> 0 = 27 min = 27 path = {0, 1, 2, 3, 0}

{0} {1, 3, 2} = 0 -> 1 -> 3 -> 2 -> 0 = 27 min = 27 path = {0, 1, 2, 3, 0}

{0} {2, 1, 3} = 0 -> 2 -> 1 -> 3 -> 0 = 24 min = 24 path = {0, 2, 1, 3, 0}

{0} {2, 3, 1} = 0 -> 2 -> 3 -> 1 -> 0 = 16 min = 16 path = {0, 2, 3, 1, 0}

{0} {3, 1, 2} = 0 -> 3 -> 1 -> 2 -> 0 = 23 min = 16 path = {0, 2, 3, 1, 0}

{0} {3, 2, 1} = 0 -> 3 -> 2 -> 1 -> 0 = 21 min = 16 path = {0, 2, 3, 1, 0}

2.2 Algorytm podziału i ograniczeń

	0	*1*	*2*	*3*
0	0	9	7	6
1	4	0	8	5
2	5	3	0	1
3	9	4	8	0

1) Wartości początkowe

lowerBound = 0
upperBound = INT_MAX
path = null
cost = 0
bestCost = INT_MAX
possiblePath = null
visited = [false, false, false, false]

2) Obliczamy początkowe dolne ograniczenie dodając minimum z każdego wiersza

lowerBound = 6 + 4 + 1 + 4 = 15
possiblePath = {0}
visited = [true, false, false, false]

3) Przeszukiwanie drzewa (lowerBound = 15, cost = 0, level = 1)

(1) rekurencja

level != 4
przeszukujemy nieodwiedzone wierzchołki z wiersza o indeksie [level – 1]
i = 1, *bierzemy wierzchołek o indeksach* [0][1]
poprzednie lowerBound *zapisujemy do tymczasowej zmiennej,* lowerBound = 0
cost = 0 + 9 = 9
dodanie do lowerBound *minimów z wierszy, których indeksy w* visited *są równe false*
lowerBound = 9
lowerBound + cost < bestCost : possiblePath = {0, 1}
visited = [true, true, false, false]

przeszukiwanie drzewa (lowerBound = 9, cost = 9, level = 2)

(2) rekurencja

level != 4
przeszukujemy nieodwiedzone wierzchołki z wiersza o indeksie [level – 1]
i = 2, *bierzemy wierzchołek o indeksach* [1][2]
poprzednie lowerBound *zapisujemy do tymczasowej zmiennej,* lowerBound = 0
cost = 9 + 8 = 17
dodanie do lowerBound *minimów z wierszy, których indeksy w* visited *są równe false*
lowerBound = 8
lowerBound + cost < bestCost : possiblePath = {0, 1, 2}
visited = [true, true, true, false]

przeszukiwanie drzewa (lowerBound = 8, cost = 17, level = 3)

(3) rekurencja

level != 4
przeszukujemy nieodwiedzone wierzchołki z wiersza o indeksie [level – 1]
i = 3, *bierzemy wierzchołek o indeksach* [2][3]
poprzednie lowerBound *zapisujemy do tymczasowej zmiennej,* lowerBound = 0
cost = 17 + 1 = 18
dodanie do lowerBound *minimów z wierszy, których indeksy w* visited *są równe false*
lowerBound = 4
lowerBound + cost < bestCost : possiblePath = {0, 1, 2, 3}
visited = [true, true, true, true]

przeszukiwanie drzewa (lowerBound = 4, cost = 18, level = 4)

(4) rekurencja

level == 4
dodanie połączenia pomiędzy wierzchołkiem possiblePath[level – 1] *a* possiblePath[0]
result = 18 + 9 = 27
result < bestCost : bestCost = 27, path = {0, 1, 2, 3, 0}
znaleziono nową optymalną ścieżkę oraz koszt

(5) wyjście z rekurencji

level = 2, i = 2
odjęcie kosztu pomiędzy wierzchołkiem possiblePath[level – 1] a possiblePath[i]
cost = 18 – 1 – 8 = 9
przypisanie do lowerBound *zachowanej wartości:* lowerBound = 9
visited = [false, false, false, false]
ustawienie visited *na* true *do aktualnego poziomu*: visited = [true, true, false, false]

i = 3, *bierzemy wierzchołek o indeksach* [1][3]
poprzednie lowerBound *zapisujemy do tymczasowej zmiennej,* lowerBound = 0
cost = 9 + 5 = 14
dodanie do lowerBound *minimów z wierszy, których indeksy w* visited *są równe false*
lowerBound = 5
lowerBound + cost < bestCost : possiblePath = {0, 1, 3}
visited = [true, true, false, true]

przeszukiwanie drzewa (lowerBound = 5, cost = 14, level = 3)

(6) rekurencja

level != 4
przeszukujemy nieodwiedzone wierzchołki z wiersza o indeksie [level – 1]
i = 2, *bierzemy wierzchołek o indeksach* [3][2]
poprzednie lowerBound *zapisujemy do tymczasowej zmiennej,* lowerBound = 0
cost = 14 + 8 = 22
dodanie do lowerBound *minimów z wierszy, których indeksy w* visited *są równe false*
lowerBound = 5
lowerBound + cost < bestCost : possiblePath = {0, 1, 3, 2}
visited = [true, true, true, true]

(7) rekurencja

level == 4
dodanie połączenia pomiędzy wierzchołkiem possiblePath[level – 1] a possiblePath[0]
result = 22 + 5 = 27
result !< bestCost : bestCost = 27, path = {0, 1, 2, 3, 0}
koszt nowej ścieżki jest taki sam jak poprzedni, nie zmieniamy optymalnego rozwiązania

itd…

2.3 Algorytm programowania dynamicznego

	0	*1*	*2*	*3*
0	0	9	7	6
1	4	0	8	5
2	5	3	0	1
3	9	4	8	0

1) Wartości początkowe

min = INT_MAX
bitMask = 0
newSubset = 0
counter = 1
costTable = inf
pathTable = inf

2) Szukanie minimum

Start rekurencji: (source = 0, set = $2^{\text{liczba miast}} - 1 - 2^{\text{source}}$ = 14, bitMask = 0, newSubset = 0)

i = 0
bitMask = $2^{\text{liczba miast}} - 1 - 2^{\text{i}}$ = 16 - 1 - 1 = 14
newSubset = set & bitMask = 14 AND 14 = 14
set = newSubset -> stop, kolejna iteracja

i = 1
bitMask = 16 - 1 - 2 = 13
newSubset = set & bitMask = 14 AND 13 = 12
set != newSubset -> tempMin = matrix[0][1] + rekurencja(source = i, set = newSubset) = 9 + …

i = 1
bitMask = 16 - 1 - 2 = 13
newSubset = set & bitMask = 12 AND 13 = 12
set = newSubset -> stop, kolejna iteracja

i = 2
bitMask = 16 - 1 - 4 = 11
newSubset = set & bitMask = 12 AND 11 = 8
set != newSubset -> tempMin = matrix[1][2] + rekurencja(source = i, set = newSubset) = 8 + …

i = 2
bitMask = 16 - 1 - 4 = 11
newSubset = set & bitMask = 8 AND 11 = 8
set = newSubset -> stop, kolejna iteracja

i = 3
bitMask = 16 - 1 - 8 = 7
newSubset = set & bitMask = 8 AND 7 = 0
set != newSubset -> tempMin = matrix[2][3] + rekurencja(source = i, set = newSubset) = 1 + …

i = 3
bitMask = 16 - 1 - 8 = 7
newSubset = set & bitMask = 0 AND 7 = 0
set != newSubset -> koniec iteracji

itd…

3) Końcowe zapisane tablice oraz odczyt rozwiązania:

costTable:

	0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*
0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	16	-1
1	4	-1	-1	-1	13	-1	-1	-1	14	-1	-1	-1	18	-1	-1	-1
2	5	-1	7	-1	-1	-1	-1	-1	10	-1	9	-1	-1	-1	-1	-1
3	9	-1	8	-1	13	-1	15	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

początkowa wartość set = $2^{\text{liczba miast}} - 1 - 2^{\text{source}}$ = 14

cost = costTable [0][14] = 16

pathTable:

	0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*
0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	2	-1
1	-1	-1	-1	-1	2	-1	-1	-1	3	-1	-1	-1	2	-1	-1	-1
2	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	3	-1	3	-1	-1	-1	-1	-1
3	-1	-1	1	-1	2	-1	2	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

początkowa wartość set = $2^{\text{liczba miast}} - 1 - 2^{\text{source}}$ = 14
start = 0, counter = 1, set = 14 -> path[counter] = pathTable[start][set] -> path[1] = 2
start = 2, counter = 2, set = 10 -> path[2] = pathTable [2][10] = 3
start = 3, counter = 3, set = 2 -> path[3] = pathTable [3][2] = 1
path = {0, 2, 3, 1, 0}

3. Opis implementacji algorytmu

Graf został zaimplementowany jako osobna klasa posiadająca różne metody. Koszt pomiędzy wierzchołkami są zaimplementowane jako wektor dwuwymiarowy typu int a ścieżka jako tablica typu int.

Do metod sterującymi algorytmami podajemy macierz oraz pustą tablicę, która zostanie wypełniona przez algorytm optymalną ścieżką. Metody zwracają koszt optymalnej ścieżki.

3.1 Algorytm przeglądu zupełnego

Główna pętla programu:

```
do {
    // obliczamy ścieżkę
    int currentCost = calculate(nodes, matrix);

    // jeżeli koszt jest mniejszy od dotychczasowego
    if (currentCost < minCost) {

        // znaleziono nową najkrótszą ścieżkę
        minCost = currentCost;

        // przypisanie ścieżki
        for (int i = 0; i < matrix.size(); ++i) {
            bestPath[i] = nodes[i];
        }
    }

  // sprawdzenie wszystkich możliwych kombinacji
} while (next_permutation(nodes, nodes + matrix.size()));
```

Gdzie funkcja *calculate* liczy ścieżkę i koszt podanej kombinacji wierzchołków.

Funkcja *next_permutation* oblicza wszystkie kombinacje podanego zbioru wierzchołków.

3.2 Algorytm podziału i ograniczeń

Funkcja obliczająca minimum w danym wierszu.

```
int BranchAndBound::minimumLine(int line) {

    int cost = INT_MAX;

    // przeszukujemy cały wiersz
    for (int i = 0; i < matrixSize; i++) {

        // jeżeli znaleziono minimum i wierzchołek do którego prowadzi
minimum nie został jeszcze odwiedzony
        if (thisMatrix[line][i] < cost && line != i && visited[i] == false)

            // przypisujemy minimum
            cost = thisMatrix[line][i];
    }

    return cost;
}
```

Górne ograniczenie zostaje nadpisane, gdy podczas przeszukiwania drzewa dotrzemy do liścia.

```
// gdy dotarliśmy do ostatniego poziomu (SCHODZENIE W GŁĄB AŻ DO LIŚCIA)
if (level == matrixSize) {

    // jeżeli istnieje połączenie
    if (thisMatrix[possiblePath[level - 1]][possiblePath[0]] != -1) {

        int result = cost + thisMatrix[possiblePath[level -
1]][possiblePath[0]];

        // znaleziono nowe optymalne rozwiązanie
        if (result < bestCost) {

            // przepisanie ścieżki
            for (int i = 0; i < matrixSize; i++)
                path[i] = possiblePath[i];

            // dodanie pierwszego miasta na koniec
            path[matrixSize] = possiblePath[0];

            // optymalny koszt
            bestCost = result;
        }
    }
    return;
}
```

Z racji tego, że jest to schodzenie w głąb, jest tworzone wiele dolnych ograniczeń, ich wartości są zapamiętywane na danym poziomie a nowe dolne ograniczenie jest liczone podczas kolejnego wywołania rekurencji na poziomie wyższym.

```
// tymczasowe dolne ograniczenie (DAJE ZA KAŻDYM RAZEM NOWE DOLNE
OGRANICZENIE)
int tempBound = lowerBound;
lowerBound = 0;

// dodanie kosztu
cost += thisMatrix[possiblePath[level - 1]][i];

// dla wszystkich węzłow
for (int j = 1; j < matrixSize; j++) {

    // resetowanie tablicy z odwiedzonymi wierzchołkami
    if (j == i)
        visited[0] = true;
    else
        visited[0] = false;

    // dodanie do dolnego ograniczenia minimów z lini (potomków których nie
odwiedzono)
    if (visited[j] == false)
        lowerBound += minimumLine(j);
}
```

Początkowe ustalenie dolnej i górnej granicy.

```
// górna granica
bestCost = INT_MAX;

// obliczanie dolnej granicy
for (int i = 0; i < matrixSize; i++)
    lowerBound += minimumLine(i);
```

3.3 Algorytm programowania dynamicznego

Głównym elementem jest utworzenie pomocniczych tablic. W jednej są przechowywane minima w zakresie podwywołań a na drugiej (w tych samych miejscach) wierzchołki.

```
// rezerwowanie miejsca
for (int i = 0; i < matrixSize; i++) {
    costTable.resize((int)pow(2, matrixSize));
    pathTable.resize((int)pow(2, matrixSize));

    // uzupełnianie tablicy 2d wartościami początkowymi (-1/inf)
    for (int j = 0; j < pow(2, matrixSize); j++) {
        costTable[i].push_back(-1);
        pathTable[i].push_back(-1);
    }
}
```

Główną częścią rekurencji jest wyliczanie nowych masek oraz podzbiorów, dalej zapisywanie ich we wcześniej utworzonych tablicach.

Maksa bitowa jest wyliczana ze wzoru: $2^{\text{liczba miast}} - 1 - 2^{\text{aktualny wierzchołek}}$.

Podzbiór jest wyliczany przy pomocy funkcji logicznej *AND* na bitach, które reprezentują zbiór.

```
// wyliczenie nowej maski bitowej
bitMask = (int)(pow(2, matrixSize) - 1 - pow(2, i));

// przypisanie nowego podzbioru (użycie bitowego AND)
newSubset = (int)set & bitMask;

// jeżeli aktualny zbiór jest inny od nowego
if (newSubset != set) {

    // wyliczenie kosztu
    tempMin = matrix[source][i] + findMinimum(i, newSubset, matrix);
```

4. Plan eksperymentu

Dla przeglądu zupełnego wielkości instancji wynosiły: 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 wierzchołków.

Dla metody podziału i ograniczeń oraz programowania dynamicznego wielkości instancji wynosiły: 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 i 18 wierzchołków.

Algorytmy zostały wywołane 100 razy a wyniki dla każdego przypadku uśredniano.

Aby pomiary były rzetelne, przed każdym wywołaniem algorytmu generowany jest nowy zestaw danych.

Pomiary są w pełni automatyczne, zostały zapisane do pliku a dalej analizowane.

Szybka funkcja generująca liczy pseudolosowe:

```
int Randomize::random_mt19937(int min, int max) {

    static uniform_int_distribution<int> uid(min,max);
    return uid(rng);
}
```

Sposób generowania danych poprzez konstruktor klasy Graph:

```
Graph::Graph(int size) {

    // losowanie
    Randomize r;

    // rezerwujemy pamięć
    matrix.reserve(size);

    for (int i = 0; i < size; i++) {
        vector<int> temp;
        temp.reserve(size);

        for (int j = 0; j < size; j++) {
            temp.push_back(r.random_mt19937(1, 99));
        }

        temp[i] = 0;
        this->matrix.push_back(temp);
    }

    // uzupełnianie przekątnej zerami
    for (int i = 0; i < size; i++) {

        matrix[i][i] = 0;
    }
}
```

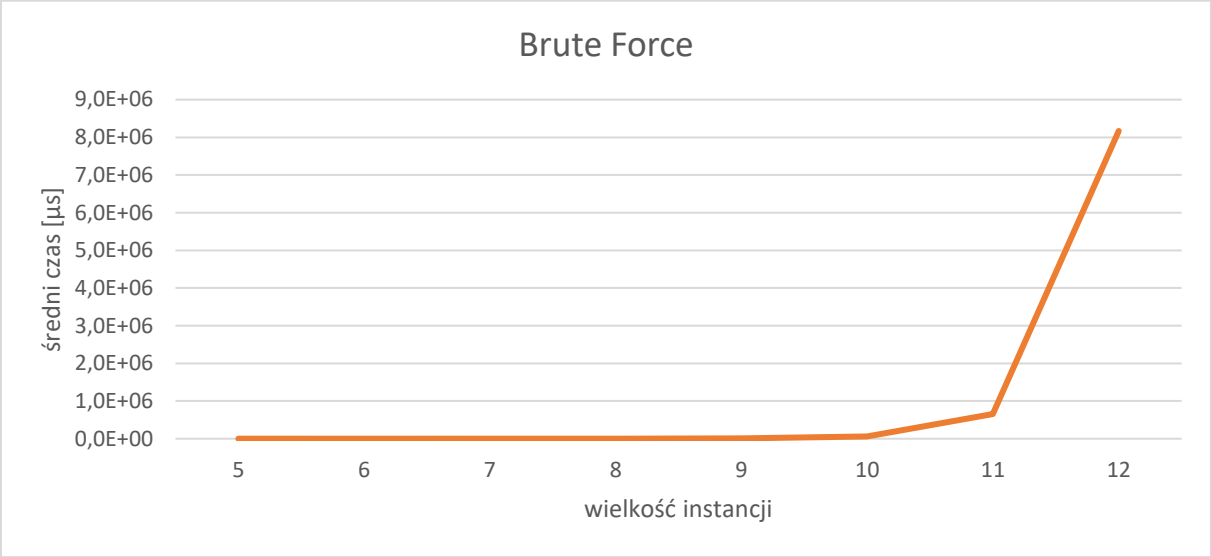
Sposób mierzenia czasu:

```
for (int i = 0; i < reps; ++i) {

    graph = new Graph(instanceSize);

    bb = new BranchAndBound();
    path = new int[instanceSize + 1];

    QueryPerformanceFrequency((LARGE_INTEGER *)&frequency);
    start = read_QPC();

    bb->algorithmBranchAndBound(graph->getMatrix(), path);

    elapsed = read_QPC() - start;
    sum += (1000000.0 * elapsed) / frequency;
}
file << "B&B: " << instanceSize << " miast,  czas [us]:  suma: " <<
setprecision(0) <<sum<<", średnia: "<<setprecision(0)<< sum / reps << endl;
sum = 0;
```

5. Wyniki eksperymentów

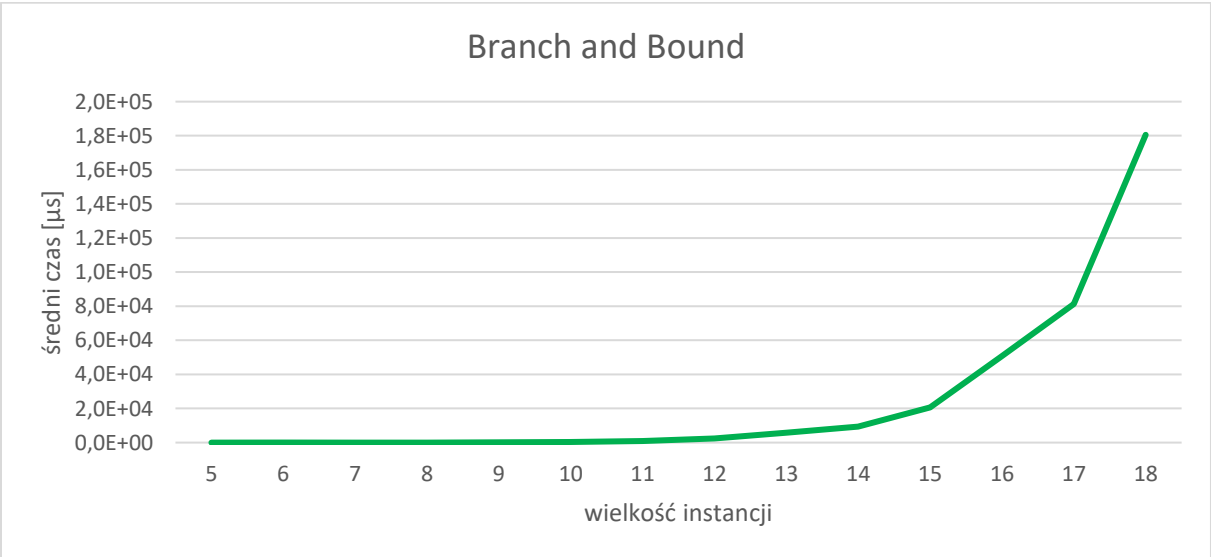
5.1 Algorytm przeglądu zupełnego

wielkość instancji	5	6	7	8	9	10	11	12
średni czas [µs]	33	25	79	547	5015	55629	650852	8167777



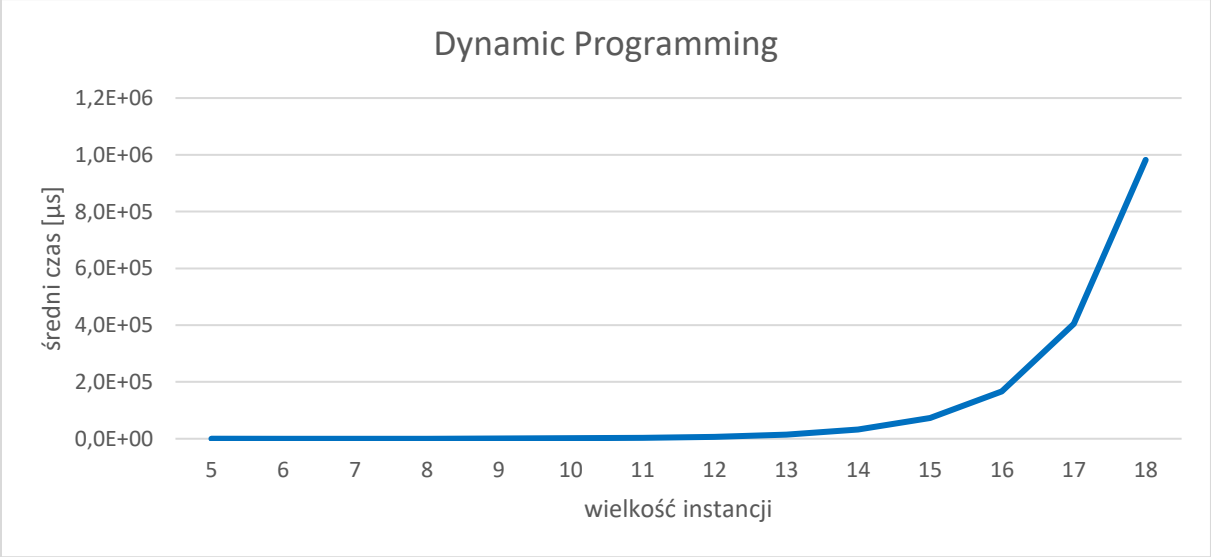
5.2 Algorytm podziału i ograniczeń

wielkość instancji	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
średni czas [µs]	28	23	33	68	148	415	844	2367	5841	9391	20629	50669	81208	180538

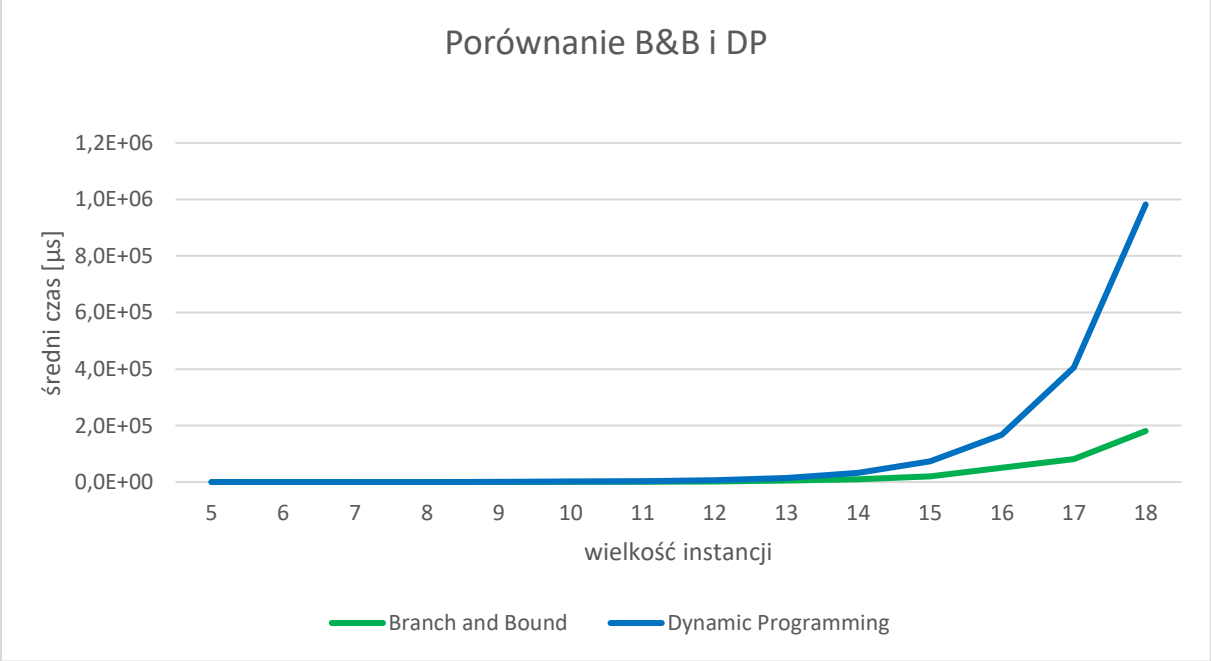


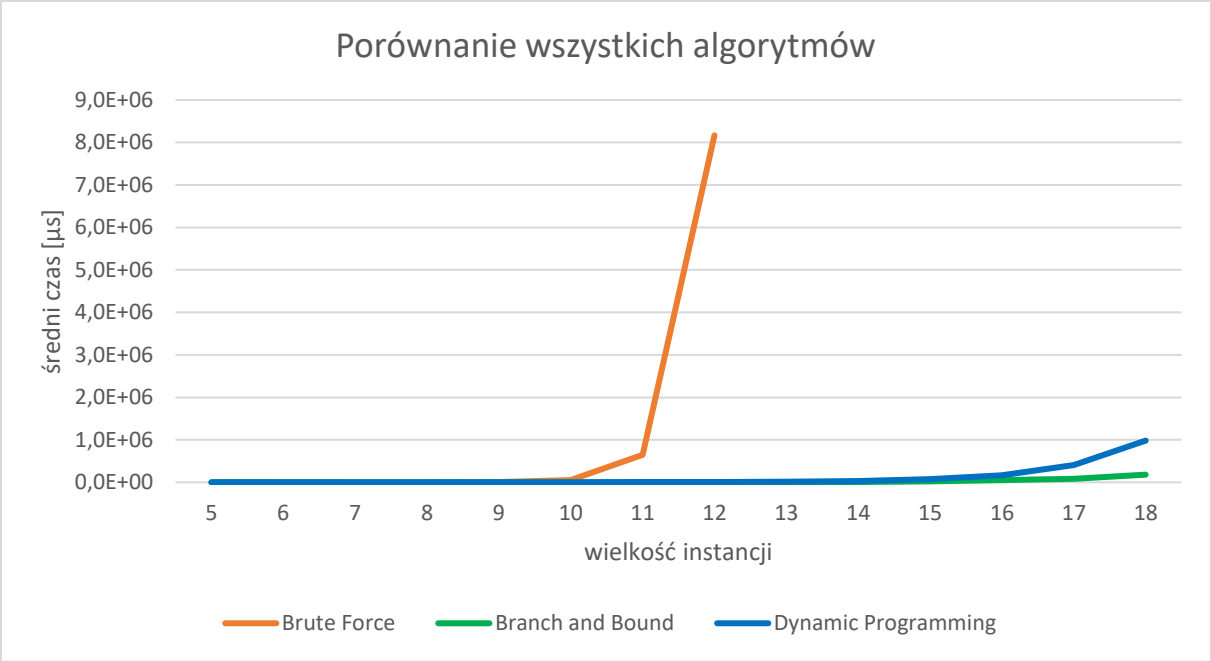
5.3 Algorytm programowania dynamicznego

wielkość instancji	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
średni czas [µs]	37	56	100	204	466	1701	3686	6071	14075	32046	73639	167067	404986	982190



5.4 Porównanie algorytmów





6. Wnioski

Pomiary wykazały, że najszybszym algorytmem spośród badanych jest algorytm podziału i ograniczeń. Metoda programowania dynamicznego dla niewielkich struktur okazała się nieznacznie gorsza od wyżej wymienionej metody, lecz dla większych instancji różnica jest zauważalna na korzyść podziału i ograniczeń, co obrazuje wykres porównania tych dwóch algorytmów.

Najwolniejszym algorytmem jest przegląd zupełny. Gwarantuje on optymalny wynik, lecz jest bardzo wolny, co doskonale przedstawia wykres porównania wszystkich algorytmów.

Wykresy poszczególnych algorytmów pokazują, że każdy z nich ma wykładniczą złożoność obliczeniową. Porównując wszystkie trzy algorytmy zauważamy jednak, że każda złożoność obliczeniowa jest inna.

Początkowa wersja algorytmu przeglądu zupełnego była bardzo wolna. To przez przekazywanie macierzy jako argumentu do funkcji obliczającej ścieżkę z danej kombinacji wierzchołków. Utworzenie macierzy globalnej i branie z niej wartości zamiast przekazywania jej jako argument zdecydowanie przyspieszyło algorytm.

Udała się również optymalizacja początkowej wersji algorytmu programowania dynamicznego. Tak jak w przypadku przeglądu zupełnego utworzenie globalnej macierzy zamiast przekazywania jej jako parametr funkcji przyspieszyło lekko algorytm. Natomiast kluczową rolą w optymalizacji algorytmu okazało się przekazywanie do funkcji pojedynczych zmiennych zamiast tworzenie ich jako globalne.