

Національний університет «Києво-Могилянська Академія»

Факультет природничих наук

Кафедра фізико-математичних наук

Соколов Андрій Миколайович

**ТЕМПЕРАТУРНА ЗАЛЕЖНІСТЬ ДЕФАЗУВАННЯ
НАДПРОВІДНОГО КУБІТА ПРИ ДИСПЕРСІЙНОМУ
ВИМІРЮВАННІ**

Магістерська робота
за спеціальністю „Фізика”

Науковий керівник
доктор фіз.-мат. наук
головний науковий співробітник
Чумак Олександр Олександрович

До захисту допущено

Завідувач кафедру

доктор фіз.-мат. наук, професор **Голод П.І.**

“ ” 2011 р.,

Київ 2011

РЕФЕРАТ

Випускна кваліфікаційна робота магістра: 60 стор., 9 рис., 26 дж.

КВАНТОВА ОПТИКА, ДЖОЗЕФСОНІВСЬКИЙ КОНТАКТ, ДВОРІВНЕВА СИСТЕМА, ШТУЧНИЙ АТОМ, КУБІТ, ДИСПЕРСІЙНЕ ВИМІРЮВАННЯ, ДЕКОГЕРЕНЦІЯ, ДЕФАЗУВАННЯ.

ЗМІСТ

	Стор.
ВСТУП	4
РОЗДІЛ 1. Методи розрахунку надпровідних електричних кіл	11
1.1. Квазістаціонарне наближення для надпровідників	11
1.2. Закони Кірхгофа для струмів і потоків	12
1.3. Двополюсники	14
1.3.1. Конденсатор	15
1.3.2. Котушка індуктивності	15
1.3.3. Джозефсонівський контакт	15
1.4. Отримання динамічних рівнянь електричного кола	16
РОЗДІЛ 2. Гамільтоніан системи	17
2.1. Гамільтоніан осцилятора	18
2.2. Гамільтоніан дворівневої системи (кубіта)	19
2.3. Гамільтоніан осциляторного резервуара	20
2.4. Два зв'язаних осцилятори	23
2.5. зв'язана з осцилятором дворівнева система	28
2.6. Наближення хвилі, що обертається	29
2.7. Накачка	30
РОЗДІЛ 3. Дефазування кубіта під впливом дисперсійного вимірювання	32
3.1. Рівняння для операторів резонатору	33
3.2. Ефективний гамільтоніан в дисперсійному режимі	37
3.3. Рух взаємної фази станів кубіта	39
3.4. Стохастичний аналіз руху взаємної фази станів кубіта	41
3.5. Рух перетворених операторів резонатора	44
3.6. Двочасова кореляція флуктуацій числа фотонів в резонаторі	44

3.7. Дисперсія стохастичної частини зміни фази кубіта	50
3.8. Швидкість дефазування, що спричинена вимірюванням	52
ВИСНОВКИ	54
БІБЛІОГРАФІЯ	58

ВСТУП

Дана робота має відношення водночас до прикладних і фундаментальних питань сучасної фізики. До прикладних належать питання про те, як створити надійний кубіт — інформаційний елемент квантового комп'ютера, як точно вимірювати стан кубіта, згодом, як створити квантовий комп'ютер? До фундаментальних належить питання про межі застосовності квантової фізики, питання про опис квантового вимірювання, проблема редукції хвильової функції. Якщо добре розібратись, то всі ці питання пов'язані. Розгортати їх клубок почнемо із питання про квантовий комп'ютер.

Квантовий комп'ютер Квантовий комп'ютер — машина, яка використовує суттєво квантовий рух для здійснення обчислень. Під «суттєво квантовим» рухом системи розумітимемо такий, що його передбачення — передбачення результатів вимірювань після деякого часу еволюції системи виходячи із початкових умов — потребує застосування квантової механіки. Так, поведінка лазера чи надпровідника, хоча і є проявом квантової механіки, але зазвичай може бути описаною механікою класичною. Натомість, проходження фотона через дифракційний отвір, чи рух спіна в електромагнітному полі можна описати лише квантовою механікою.

Інтуїтивно зрозуміло, що квантовий комп'ютер матиме обчислювальну потужність, більшу за потужність його класичного аналогу — звичайного комп'ютера. Дійсно, знаючи рух хвильової функції деякої системи, завжди можна розрахувати рух його квантових середніх, який за відомою теоремою і є класичним рухом. Отримати ж із руху класичних величин динаміку хвильової функції неможливо: при переході від квантового до класичного випадку було втрачено інформацію, яка могла бути результатом корисних обчислень.

Але так само втрачається інформація і, наприклад, при переході від мікроскопічного опису системи до статистичного: чи відрізняється перехід кванто-

вий опис—класичний опис від такого переходу? Виявляється, що так, і можна легко зрозуміти чому. Справа в тому, що для чисельного моделювання навіть досить простих квантових систем за допомогою класичних комп'ютерів, можуть знадобитись значні обчислювальні потужності. Із зростанням кількості квантових частинок, що моделюються, розмірність Гільбертового простору всієї системи — кількість амплітуд вірогідностей у векторі стану, за якими треба слідкувати, — зростає експоненційно. Не зважаючи на те, що внаслідок вимірювання відбудеться редукція стану системи до одного із її власних станів, вірогідність отримати цей власний стан після еволюції системи залежить від динаміки амплітуд *всіх* станів. Натомість, із зростанням кількості класичних частинок (чи навіть макроскопічних систем із класичними внутрішніми ступенями вільності), які моделюються, чи моделюють іншу систему, кількість незалежних змінних (хай навіть пов'язаних із мікроскопічними ступенями вільності) зростає лише лінійно. Таким чином, видно, що елементів класичного комп'ютера дуже швидко стане замало для моделювання квантової системи. Отже остання матиме більшу обчислювальну потужність для деяких задач — принаймні, для задачі про моделювання самої себе.

В останні роки бурхливо розвивається теорія квантової інформатики, що досліджує можливості обчислень за допомогою (поки що більше гіпотетичних) квантових комп'ютерів. Зокрема показано, що, аналогічно до універсальних — здатних із довільно заданою точністю моделювати будь-яку систему — цифрових класичних комп'ютерів, можна створити (принаймні гіпотетично) універсальні квантові комп'ютери. Найпростішими інформаційними елементами класичних універсальних комп'ютерів є біти (від англ. Binary digit, двійковий знак) — класичні системи із двома станами, яким співставляються знаки “0” і “1”. Один із цих станів, будучи записаний у біт, повинен достатньо тривалий час зберігатися у ньому без змін, і має з бути зчитаний із біта з достатньо малою вірогідністю помилки. Найпростішими елементами квантових комп'ютерів є кубіти (від англ. QUantum BIT, квантовий біт) —

квантові системи із двома базисними станами. На відміну від біта, у кубіт можна записати суперпозицію цих станів, яка задається двома дійсними числами. Стану кубіта співставляється елемент Гільбертового простору,

$$|q\rangle = e^{-i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle. \quad (1)$$

де $\phi, \theta \in \mathbb{R}$ — дійсні числа, якими можна параметризувати стан кубіта; $|0\rangle, |1\rangle$ — його базисні стани. Саме такий стан $|q\rangle$ має зберігатись у кубіті достатньо довгий час, і має бути зчитаний із достатньо малою вірогідністю помилки.

Процеси втрати квантового стану кубіта Через те, що такий стан задається двома числами, прийнято виділяти два процеси, що призводять до втрати цього стану: *релаксацію* і *декогеренцію* (чи *дефазування*). Релаксація — це процес переходу із збудженого стану до основного, тобто до стану, що є більш енергетично вигідним. Час, за який релаксація майже напевне відбулась, називають у спеціальній літературі часом T_1 , або часом релаксації. Дефазування, чи декогеренція — це процес стохастизації взаємної фази ϕ двох базисних станів. Цей процес схожий на деполяризацію класичного світла: коли взаємна фаза базисних станів (поляризацій в оптичній аналогії) втрачається, квантова інтерференція (просто інтерференція в оптиці) між двома базисними станами стає неможливою. Фактично, в цьому випадку квантовий стан (чи стан із певною поляризацією в оптиці) просто перестає існувати. Час, за який декогеренція майже напевне відбулась, називають у спеціальній літературі часом T_2 , або часом декогеренції чи дефазування.

Поки що не вдається досягнути часів T_1, T_2 , достатньо малих для створення практично корисного квантового комп'ютера, хоча в цьому напрямі відбувається поступовий прогрес, як в області експериментальних реалізацій кубітів і теоретичного опису процесів релаксації та дефазування, так і в області винайдення стійких до завад квантових алгоритмів і т. зв. алгоритмів квантової корекції.

Гарним оглядом літератури з квантової інформатики і літератури, що стосується різних фізичних реалізацій кубітів є робота Ді Вінчензо [1]. У нашій роботі цікавитимемось здебільшого реалізацією кубітів за допомогою надпровідних електричних кіл.

Кубіти на Джозефсонівських контактах Дуже малі часи релаксації і декогеренції, а також малість константи \hbar пояснюють відсутність спостережень суттєво квантових ефектів у звичайному макроскопічному світі.

Але виявляється, є мезоскопічні (із розмірами порядку мікрометрів) системи, для яких все ж можна спостерігати квантову поведінку. При цьому, звичайно, потрібно охолодити таку систему до досить низької температури, $T \ll E_0/k$, де E_0 — енергія найнижчого енергетичного рівня системи, k — стала Больцмана. До того ж, потрібно, щоб ширина енергетичних рівнів була значно меншою за відстань між ними. Прикладом таких систем є кубіти на джозефсонівських контактах.

Ці кубіти є електричними схемами з провідниками із значно охолодженого ($T \lesssim 40\text{мК}$) надпровідника. Через нелінійний характер джозефсонівського контакту коливний контур із ним матиме нееквідистантний спектр — таку систему ще називають штучним атомом. Стан системи із нееквідистантним можна задавати і зчитувати за допомогою спектроскопічних методів, а правильним підбором параметрів контуру і контакту можна добитись, щоб переходи на рівні крім перших двох були маловірогідні. Таким чином, на джозефсонівському контакті можна спроектувати систему, що поводитиме себе як дворівнева, причому її стан можна задавати і зчитувати; тобто, така система буде кубітом.

Здавалось би, через значні розміри такі кубіти мали б бути неконкурентоздатними у порівнянні із іншими, меншими, реалізаціями. Дійсно, характерні часи релаксації кубіта на джозефсонівських контактах становлять всього близько 2мс у порівнянні із такими для атома, 60мс; приблизно так

же відрізняються і часи дефазування. Насправді, надпровідні кубіти мають ряд переваг у порівнянні із іншими реалізаціями. Так, параметри системи легко можна задавати на етапі проектування. Це якісно відрізняє реалізацію кубітів за допомогою схем “штучних атомів” від реалізацій на атомах даних природою, параметри яких можна хіба що вибирати із таблиці Менделєєва. Крім того, частоти кубітів на джозефсонівських контактах лежать в гігагерцовому діапазоні, що дозволяє використовувати розвинену техніку схем НВЧ для задання, контролю і вимірювання стану кубіта. В реалізаціях же за допомогою атомів частоти переходів лежать в оптичному діапазоні, і вся техніка значно ускладнюється та зростає в ціні. Насамкінець, такі системи порівняно легко виготовити — для цього використовуються добре відомі технології виготовлення складних мікросхем. Ці технології дешеві і масові, і, що важливо, потенціально дозволяють створити квантові комп’ютери з великою кількістю певним чином взаємодіючих кубітів. Саме нарощування кількості кубітів стало каменем спотикання у інших реалізаціях квантового комп’ютера.

Системи схемної квантової електродинаміки (Circuit QED).
Квантові неруйнуючі вимірювання. Дисперсійне вимірювання.
 Особливо перспективними є схеми, які для захисту від зовнішнього електромагнітного середовища проектуються так, щоб надпровідний кубіт взаємодівав лише із спеціально створеним резонатором, що знаходиться на тій же пластинці кремнію, що і кубіт. Такі системи називають в літературі системами схемної квантової електродинаміки (Circuit QED), чи квантовою електродинамікою на чіпі. Вимірювання стану кубіта тоді здійснюється за т. зв. дисперсійною схемою, коли розстройка частоти кубіта і резонатора є значною у порівнянні із силою їх взаємодії. У цьому випадку вплив кубіта на резонатор зводиться до зсуву його частоти в залежності від стану кубіта. Цей зсув і використовується для вимірювання стану кубіта: найчастіше його визначають із зсуву фази хвилі, що пройшла через резонатор. Важливо,

що така схема вимірювання є неруйнуючою. Це означає, що оператор який відповідає вимірюваній величині є інтегралом руху, і після вимірювання система залишається у виміряному стані. Ця властивість дозволяє підвищити точність вимірювання просто збільшенням його тривалості, адже оператор не змінюється до закінчення вимірювання.

Але, із нерівності Гайзенберга, точність визначення однієї величини зменшує визначеність величини, що їй спряжена. У нашому випадку спряженою величиною є фаза кубіта, отже, неруйнуюче вимірювання його стану спричиняє дефазування. Так, в дисперсійному режимі резонатор впливає на кубіт, змінюючи його частоту на величину, залежну від кількості фотонів у резонаторі (такий ефект відомий у атомній фізиці як ефект Штарка). Це призводить до того, що через флуктуації кількості фотонів у резонаторі флуктує і фаза кубіта. З часом, ці флуктуації призводять до дефазування стану кубіта.

Флуктуації кількості фотонів у резонаторі складаються із чисто квантових і статистичних флуктуацій. Якщо перших позбутися неможливо (саме вони і призводять до нерівності Гайзенберга), то другі залежать від температури зовнішнього середовища. Розгляду їх впливу на дефазування і присвячена дана робота.

Постановка задачі Нашою метою було визначення характеристик дефазування під впливом дисперсійного вимірювання кубіта на джозефсонівському контакті в залежності від температури зовнішнього середовища. Цю залежність автор роботи і науковий керівник не зустрічали в літературі, тому отримані результати претендують на оригінальність.

Хоча спочатку задачу було поставлено саме для надпровідної реалізації схеми дисперсійного вимірювання кубіта, одержані результати застосовні і до інших фізичних реалізацій схеми. Спеціальні аспекти надпровідної реалізації ми використовуємо лише в місцях, де необхідна апеляція до експерименту (більшість відомих нам експериментальних реалізацій є саме надпровід-

ними) і для наочного пояснення деяких питань.

РОЗДІЛ 1

МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ НАДПРОВІДНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

1.1. Квазістаціонарне наближення для надпровідників

Часто системи, що складаються з провідників та електромагнітного поля, можна наближено представити у вигляді електричних кіл, властивості яких розраховуються за допомогою наближених наслідків рівнянь Максвелла — законів Кірхгофа, та співвідношень між струмами та напругами елементів кола; у такому випадку говорять, що справедливе *квазістаціонарне наближення*. Коротко наведемо і оціним умови його справедливості для надпровідних кубітів.¹

По-перше, потрібно, щоб товщина надпровідника була набагато більша за глибину проникнення магнітного поля, $d \gg \lambda_{\text{пр}}$: тоді поведінка системи не залежатиме від способу її збудження. Доведення цього твердження можна знайти в тому ж [2]; тут тільки скажемо, що коли магнітне поле відсутнє всередині провідника, то можна однозначно визначити взаємні і самоіндуктивності контурів довільної товщини (у випадку ж звичайних провідників це справедливо лиш коли вони досить тонкі і енергія магнітного поля зовні провідника значно перевищує енергію всередині).

По-друге, характерні розміри підсистеми із надпровідників a мають бути набагато менші за довжину хвилі коливачогося поля λ , $a \ll \lambda$. Тоді розповсюдженням електромагнітних хвиль в межах підсистеми можна знехтувати; вона є “точкою” для поля.²

Наскільки відомо автору, для всіх реалізованих схем кубітів на джозефсо-

¹Детальний опис електродинаміки квазістаціонарного наближення і опис феноменології електродинаміки надпровідників першого роду можна знайти у Ландау і Ліфшиця [2].

²Також, у такому випадку можна використовувати дипольне наближення для опису взаємодії підсистеми із полем.

нофських контактах ці умови виконуються. Дійсно, оцінимо глибину проникнення магнітного поля $\lambda_{\text{пр.}} = \frac{2ne}{\varepsilon m} \sim$. Характерні розміри кубітів на джозефсонівських контактах $a \sim 10$ мкм, а резонансні частоти $\nu \sim 10$ ГГц (див. огляд [3], роботи [4, 5]); тоді довжина хвилі λ буде порядку $\lambda = c/\nu \sim 3$ см $\gg a$, де c — швидкість світла у вакуумі.

1.2. Закони Кірхгофа для струмів і потоків

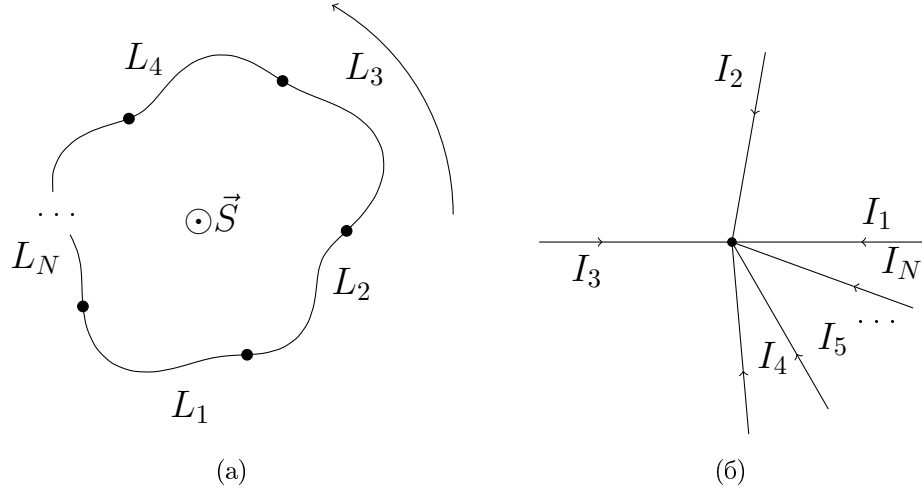


Рис. 1.1: (а) Замкнений контур L , що обмежує орієнтовану поверхню S і розбитий на підконттури $L_1 \dots L_N$. Стрілкою вказано напрям обходу контурів, що відповідає обраній орієнтації поверхні. (б) Вузол електричного кола, в який затікають струми $I_1 \dots I_N$.

З подальшого буде видно, що процеси в надпровідних квантованих електричних колах зручно описувати не струмами через кожен елемент і напругами на ньому, як звичайно, а струмами через елементи (чи зарядами, що протекли через них) і деякими величинами розмірності магнітного потоку, що можна співставити елементам. Тому отримаємо для цих величин еквівалентне формулювання законів Кірхгофа.³

³Запис і використання законів Кірхгофа у подібній формі не є чимось новим; див., напр., огляд Деворета та статтю Буркарда, Коха, і ДіВінченцо [6, 7].

Спершу нагадаємо походження звичайного закону Кірхгофа для напруг. Нехай $\vec{E}_{\text{стат.}}$ — напруженість поля електростатичного походження; $\vec{E}_{\text{інш.}}$ — напруженість деякого ефективного поля, що описує всі інші впливи на заряд, включаючи і електромагнітні неелектростатичного походження. Тоді прийнято називати напругою на ділянці L_n контура L (див. рис. 1.1а) величину

$$U_n = \int_{L_n} (\vec{E}_{\text{стат.}} + \vec{E}_{\text{інш.}}) \cdot d\vec{l},$$

де $d\vec{l}$ — елемент контуру L , причому цей контур проходить достатньо близько від поверхні надпровідника. Так як електростатичне поле потенціальне, то сума контурних напруг рівна

$$\sum_{n=1}^N U_n = \varepsilon, \quad (1.1)$$

де величина $\varepsilon = \int_L \vec{E}_{\text{інш.}}$ називається контурною електрорушійною силою (е.р.с.). Вираз 1.1 і є закон Кірхгофа для напруг.

Тепер отримаємо закон Кірхгофа для деяких потокових величин, що пов'язані з кожним елементом кола. За допомогою одного з рівнянь Максвелла виділимо е.р.с., що пов'язана із магнітною (само)індукцією:

$$\varepsilon = - \int_S \dot{\vec{B}} \cdot d\vec{s} + \varepsilon',$$

де S — поверхня, що обмежується контуром L , $d\vec{s}$ — орієнтований елемент поверхні, \vec{B} — магнітне поле на ній (рис. 1.1а). Інтегруючи за часом закон Кірхгофа 1.1 і вважаючи, що підінтегральні вирази зануляються на нескінченності так, щоб інтеграли збігались,⁴ отримуємо шукане рівняння:

$$\sum_{n=1}^N \Phi_n = -\Phi + \int_{-\infty}^t \varepsilon' dt, \quad (1.2)$$

⁴Цей трюк легко зрозуміти з фізичних міркувань. Справа в тому, що в підінтегральному виразі завжди існує дисипативний множник виду $\exp(-t/t_{\text{дисип.}})$. Звичайно, характерний час затухання $t_{\text{дисип.}}$ набагато більший за час спостереження, інакше б довелось враховувати цей множник для опису системи на наших часах спостереження.

Смисл проведеного в нехтуванні початковими умовами — розгляду системи в усталеному режимі.

де: $\Phi_n = \int_{-\infty}^t U_n dt$ — інтеграл напруги на елементі, що, очевидно, має розмірність потоку, та який надалі умовно і називатимемо “поток на елементі”, $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$ — магнітний потік через контур L .

Нагадаємо і закон Кірхгофа для струмів. Він виражає неперервність струму, за умови, що заряд у вузлі кола залишається постійним. Для струмів I_n , що затікають у вузол кола (див. рис. 1.1б):

$$\sum_{n=1}^N I_n = 0. \quad (1.3)$$

Рівність 1.3 також можна проінтегрувати, нехтуючи початковими умовами так само, як і при отриманні 1.2. Вийде закон Кірхгофа для зарядів,

$$\sum_{n=1}^N Q_n = \text{const}, \quad (1.4)$$

де $Q_n = \int_{-\infty}^t I_n dt$ — сумарний заряд, що затік гілкою до вузла за весь час існування кола. Рівність 1.4 означає, що надлишковий заряд у вузлі кола не змінюється.

1.3. Двополюсники

Окрім рівнянь Кірхгофа, для аналізу електричного кола потрібні співвідношення між струмом і напругою (поток і струмом) “через” кожен елемент кола з двома закінченнями — двополюсник за радіотехнічною термінологією. Нижче буде показано, що такі співвідношення дійсно можна записати і використовувати і для елементів з е.р.с. “всередині”.

Отримаємо зв’язок між потоком і струмом для двополюсників, що знадобляться у подальшому: ємність, індуктивність, та джозефсонівський контакт. Схематичні зображення цих елементів подано на рисунках, де стрілками вказано напрями струмів. Також, «0» біля верхньої клеми означає, що від неї відраховується потік на елементі, а «Φ» біля нижньої вказує потік на елементі.

1.3.1. Конденсатор Зміна з часом напруги на конденсаторі (напряв спадання напруги вказано на рис. 1.2), \dot{U} , рівна

$$\dot{U} = I/C,$$

де I — струм — зміна заряду на обкладці з додатнім зарядом, C — ємність конденсатора.

Із означення потоку на елементі, $\Phi(t) = \int_{-\infty}^t U dt$, отримуємо:

$$\ddot{\Phi} = I/C,$$

де Φ — вклад конденсатора у потік, I — струм через конденсатор.

1.3.2. Котушка індуктивності Часто самоіндуктивність контура позначають на електричній схемі котушкою, рис. 1.3: справа в тому, що через лінійність рівнянь електромагнітного поля і елементів кіл, е.р.с. індукції дійсно можна сконцентрувати в одному елементі.

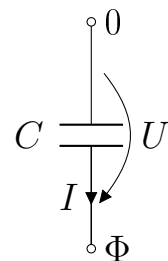


Рис. 1.2: Конденсатор.

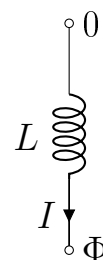


Рис. 1.3: Індуктивність.

$$\Phi = LI,$$

де L — її індуктивність, I — струм, що протікає через котушку.

1.3.3. Джозефсонівський контакт

$$I = I_0 \sin 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}$$

Видно, що струм через джозефсонівський контакт природним чином виражається через потік на ньому. Саме тому при аналізі надпровідних елементів електричних кіл з джозефсонівськими контактами зру-

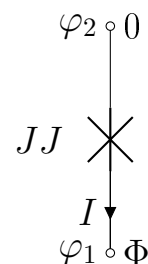


Рис. 1.4: Джозефсонівський контакт.

чно користуватись законами Кірхгофа в потоковому формулюванні.

1.4. Отримання динамічних рівнянь електричного кола

Коли коло розбито на двополюсники із відомими характеристиками, можна використовувати два (дуальних) методи отримання динамічних рівнянь системи — метод потенціалів і метод контурних струмів.

РОЗДІЛ 2

ГАМІЛЬТОНІАН СИСТЕМИ

Запишемо гамільтоніан системи, яку схематично зображено на рис. 2.1. Він є сумою гамільтоніанів відокремлених частин системи і гамільтоніанів взаємодії між ними:¹

$$H = H_q + H_r + H_{qr} + H_{rd} + H_b + H_{rb}, \quad (2.1)$$

де H_q є гамільтоніаном дворівневої системи (кубіта); H_r є гамільтоніаном осцилятора; H_{qr} є гамільтоніаном взаємодії кубіта і осцилятора; H_{rd} є гамільтоніаном дії накачки на осцилятор; H_{rb} є гамільтоніаном взаємодії осцилятора і нескінченної кількості осциляторів — осциляторного резервуару, за допомогою взаємодії з яким моделюється дисипація і флуктуації; H_b є гамільтоніаном осциляторного резервуару. Явний вигляд цих гамільтоніанів взаємодії і міркування, що приводять до опису дисипації за допомогою осциляторного резервуару ми наведемо далі.

Підкреслимо, що ми нехтуємо безпосередньою взаємодією між кубітом і осциляторним резервуаром. По-перше, нас цікавить вплив дисперсійного вимірювання на дефазування кубіта, тобто опосередкований вплив накачки на кубіт через осцилятор. Тому логічно розглядати лише осцилятор дисипатив-

¹Операторні дашки тут і далі не пишемо, якщо це не призводитиме до непорозумінь.

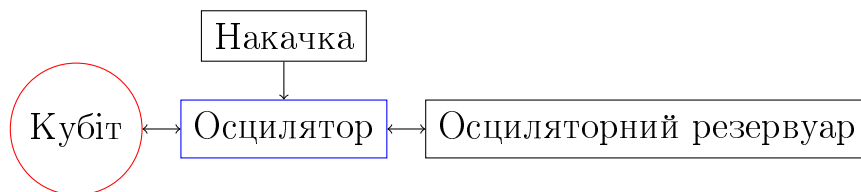


Рис. 2.1: Схематичне зображення системи. Кубіт пов'язано із дисипативним осцилятором під дією накачки. Дисипація моделюється за допомогою резервуару осциляторів. Кубіт вважається бездисипативним.

ним. По-друге, у будь-якому випадку, основним джерелом флуктуацій є зв'язок резонатора із зовнішнім середовищем, за рахунок якого здійснюється вимірювання стану кубіта. В усіх відомих автору експериментальних реалізаціях схеми (див. посилання на початку розділу і [5, 8]) кубіт і резонатор знаходились в кріостаті з температурою $T \lesssim 40\text{мК}$. За такої температури вплив статистичних флуктуацій кріостата нехтовно малий у порівнянні з їх впливом з боку зв'язку резонатора із зовнішнім світом. Цей зв'язок на порядок-два знижує добротність резонатора, тоді як на кубіт майже не впливає. Дійсно, навантажена (тобто, з урахуванням зв'язку із зовнішнім середовищем) добротність резонаторів у відомих автору експериментах все ж складала принаймні $Q \sim 10^3$. Завдяки цьому резонатор виступав в якості фільтра, що захищав кубіт від зовнішніх завад. Додатковим підтвердженням є експеримент Кіма та ін. [5], в якому визначено, що основний вплив на дефазування кубіта справляє саме зв'язок з відкритим резонатором.

Незважаючи на наведені вище евристичні міркування, питання про припустимість нехтування взаємодією кубіта та осциляторного резервуара слід вважати відкритим. Умови за яких це можна зробити ще потрібно визначити.

Далі наведемо гамільтоніани осцилятора і кубіта — членів H_r і H_q з повного гамільтоніану 2.1.

2.1. Гамільтоніан осцилятора

Гамільтоніан осцилятора, у представленні чисел заповнення (див. книгу Дірака [9], § 34):

$$H_r = \hbar\omega_r(a^\dagger a + \frac{1}{2}), \quad [a, a^\dagger] = 1.$$

Фізична природа такого осцилятора може бути різною: мода резонатора НВЧ [10, 11, 12, 13], LC-контур [8, 5], і навіть механічний мікрорезонатор [14].

2.2. Гамільтоніан дворівневої системи (кубіта)

Гамільтоніан кубіта, як і довільної дворівневої системи, зручно записати через т. зв. оператори Паулі, які ми введемо нижче.

У базисі власних станів гамільтоніану H_q вільної дворівневої системи

$$|0\rangle, |1\rangle : H_q|0\rangle = E_0|0\rangle$$

$$H_q|1\rangle = E_1|1\rangle$$

матричне представлення гамільтоніана дворівневої системи має вигляд

$$H_q = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Матриці Паулі $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, і одинична матриця $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ утворюють повну систему базисних векторів для матриць 2×2 . Матриця із 2.2 легко розкладається по цій системі:

$$H_q = \frac{1}{2}(E_0 - E_1)\mathbb{1} + \frac{1}{2}(E_0 + E_1)\sigma_z,$$

причому перший доданок зникає, якщо обрати відлік енергії від $\frac{1}{2}(E_0 - E_1)$.

Остаточно:

$$H_q = \frac{1}{2}\hbar\omega_q\sigma_z,$$

де частота переходу $\omega_q = (E_0 + E_1)/\hbar$.

Звичайно, насправді дворівнева система є ідеалізацією:³ реально існуючі системи не є дворівневими, хоча за певних умов переходами на інші рівні можна знехтувати, і вважати систему дворівневою. Так, атом що взаємодіє із електромагнітним полем, яке гармонічно змінюється з частотою, близькою до однієї із резонансних частот атома, можна вважати дворівневою системою (див. будь-який підручник з квантової оптики, напр., книгу Волза і

²Детальніше оператори Паулі та їх властивості розглянуті у додатку ??, і підручнику Ландау і Ліфшиця [15], розділ VIII, де також можна прочитати про їх застосування як операторів, що пропорційні оператору спіна частинки.

³Крім, в деякому смислі, елементарних частинок зі спіном $\frac{1}{2}$, де поза межами справедливості дворівневої моделі Паулі вже не є справедливою одночастинкова нерелятивістська квантова механіка.

Мільбурна, [16], розділ 10; чи підручник з квантової механіки, напр., книгу Ландау і Ліфшиця [15], § 42). Аналогічно, різні схеми кубітів на джозефсонівських контактах, що є просто квантовими нелінійними осциляторами, мають більше двох рівнів енергії; але їх проектують так, щоб переходи на наступні після перших двох рівнів були малоімовірними у робочому режимі, тож такі схеми теж можна вважати дворівневими системами. (див. препринт [17]).

У пункті 2.5. ми розглянемо дворівневу систему, як таку, що отримується обмеженням Гільбертового простору нелінійного осцилятора до суперпозицій першого і другого стану.

Перейдемо до гамільтоніану осциляторного резервуару — члену H_b з повного гамільтоніану 2.1.

2.3. Гамільтоніан осциляторного резервуара

Для опису дисипації і флуктуацій використовуємо модель т. зв. осциляторного резервуару ⁴ (oscillator bath, heat bath) — нескінченної кількості гармонічних осциляторів.

Гамільтоніан осциляторного резервуара в представленні чисел заповнення:

$$H_b = \sum_n \hbar \omega_n (b_n^\dagger b_n + \frac{1}{2}), \quad [b_m, b_n^\dagger] = \delta_{mn}, \quad (2.3)$$

де b_n^\dagger , b_n — оператори народження і знищення кванта в n -тому осциляторі резервуару.

Спробуємо пояснити, чому за допомогою великої кількості осциляторів можна змоделювати дисипацію, в т. ч. і в квантовій системі. Також окреслимо межі застосовності такої моделі.

Розглянемо систему і осциляторний резервуар, що взаємодіють. Збудження, яке покинуло систему і розподілилось між осциляторами, повернеться

⁴Осциляторний резервуар ще називають термостатом, але така назва може дещо збити читача з пантелику.

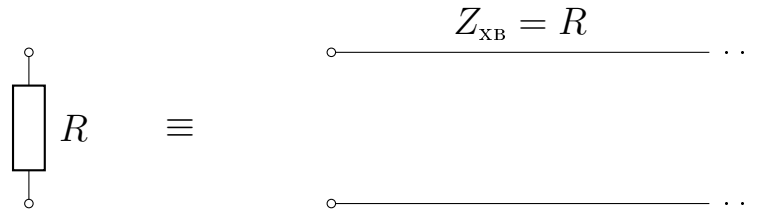


Рис. 2.2: Активний опір R в квазіріноважному електричному колі можна представити у вигляді нескінченної двопровідної лінії з суто активним хвильовим опором, що рівний опору R .

назад дуже нескоро; якщо ж осциляторів нескінченна кількість, то ніколи не повернеться. Фактично, осциляторний резервуар описує дисипацію на зразок випромінювальної, коли енергія передається нескінченній кількості осциляторів поля.

Для електричних кіл це можна наочно представити у вигляді нескінченної двопровідної лінії із суто активним хвильовим опором⁵ (див. рис. 2.2), у яку і дисипує енергія. Дійсно, у такій лінії не буде відбитої хвилі; тому напруга і струм на затискачах лінії будуть рівні напрузі і струму падаючої хвилі, $U = U_+$, $I = I_+$, причому останні пов'язані між собою хвильовим опором лінії, $Z_{xb.} = U_+/I_+$. Якщо хвильовий опір лінії суто активний, $Z_{xb.} = R$, $R \in \mathbb{R}$, тобто хвиля в самій лінії розповсюджується без втрат,⁶ отримаємо закон Ома для резистора з опором R , $U = IR$. Отже, нескінченна двопровідна лінія дійсно еквівалентна дисипативному елементу кола.

Суттєво, що система разом із резервуаром є консервативною, тому до неї можна застосувати канонічний формалізм, а отже і канонічне квантування.⁷ Так квантуються слабкодисипативні електричні кола у роботі [20]. Цей підхід

⁵Ми користуємось радіотехнічним жаргоном, називаючи комплексний опір (імпеданс) просто опором.

⁶Це можна легко побачити, наприклад, із виразу хвильового опору для двопровідної лінії з погонними ємністю κ та індуктивністю ν , $Z_{xb.} = \sqrt{\nu/\kappa}$. Видно, що якщо ν і κ комплексні, тобто індуктивності і ємності мають втрати, то і $Z_{xb.}$ буде комплексним; видно, що справедливо і зворотнє твердження.

⁷Вперше випромінювальне затухання у квантовій механіці описав Ландау, розглядаючи проблему спонтанних переходів і уширення спектральних ліній атома. Див. роботу [18], чи її переклад російською у збірнику [19], с. 19.

узгоджується, принаймні, з експериментальними даними для надпровідних систем, в яких дисипативні процеси неістотні. [20, 21]

Ясно, що таким способом дійсно можна описати випромінювальну дисипацію в навколишнє електромагнітне середовище, від якої, в принципі, неможливо позбутись. Щодо інших джерел дисипації, то вони задовільно описуються цією моделлю в квазірівноважному наближенні. Процитуємо Юрке і Денкера [20], стосовно застосування такої моделі процесів затухання для електричних кіл: ⁸

... термодинаміка вимагає, щоб рівноважний шум, що спричиняється резистором залежав лише від його опору R і температури T резистора. Ця незалежність рівноважної поведінки резистора від властивостей його матеріалу чи мікроскопічної структури виправдовує використання двопровідної лінії як моделі резистора. Цей підхід, що базується на класичній феноменології, нехтує електричним шумом мікроскопічного чи нестационарного походження такого як, наприклад, фліккер-шум чи $1/f$ -шум. З іншого боку, відчувається, що нема фундаментальних причин для існування таких джерел шумів. Із достатньою пильністю в проектуванні і виготовленні, ці джерела шумів часто можуть бути значно зменшені чи усунуті. Тому представлений тут підхід [випромінювальна модель дисипативних процесів] розглядає лише шуми, існування яких вимагається термодинамікою і співвідношеннями невизначеності Гайзенберга, шуми фундаментального походження, що не можуть бути вилучені на етапі проектування шляхом правильного вибору матеріалів. Поставимо питання: маючи прилад із описаною класичною поведінкою, якими будуть його ідеальні квантові експлуатаційні якості? Тому представлені тут розрахунки дещо схожі на розрахунки методами рівноважної термодинаміки. Такі

⁸Переклад автора.

розрахунки дають відповідь на те, яких найкращих характеристик можна досягнути для заданого приладу.

Записавши гамільтоніани кожної складової системи — кубіта, осцилятора, і осциляторного резервуару, і провівши дискусію щодо останнього, перейдемо до визначення вигляду гамільтоніанів взаємодії між кубітом і осцилятором та між осцилятором та резервуаром — членів H_{qr} та H_{rb} з повного гамільтоніану 2.1.

Почнемо зі взаємодії між осцилятором і одним із осциляторів резервуару. Для цього розглянемо два довільні зв'язані осцилятори.

2.4. Два зв'язаних осцилятори

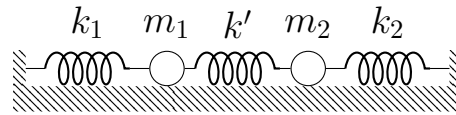


Рис. 2.3: Два зв'язаних механічних осцилятора.

Метою цього підрозділу є отримання, в лінійному наближенні, гамільтоніану взаємодії двох осциляторів в класичному і квантовому випадках.

Спочатку розберемо простий приклад — два зв'язаних осцилятора, які зображено на рис. 2.3. Вважаємо, що відхилення системи від положення рівноваги невеликі і пружинки можна описувати лінійним законом Гука. Тоді легко бачити, що функція Лагранжа зображеної системи

$$L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \underbrace{\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2}_{L_1(x_1, \dot{x}_1)} + \underbrace{\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_2x_2^2}_{L_2(x_2, \dot{x}_2)} - \frac{1}{2}k'(x_2 - x_1)^2,$$

де $x_{1,2}$ — відхилення від рівноваги першого і другого осцилятора, $m_{1,2}$ і $k_{1,2}$ — маси відповідних кульок і жорсткості пружинок, k' — коефіцієнт жорсткості пружинки, що відповідає за зв'язок осциляторів. Фігурними дужками виділено лагранжіани L_1 і L_2 вільних першого і другого осциляторів.

Видно, що частину лагранжіана, яка відповідає за зв'язок, можна відділити від частин — позначимо їх $\tilde{L}_{1,2}$, — що описують зсунуті осцилятори окремо:

$$L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \tilde{L}_1(x_1, \dot{x}_1) + k'x_1x_2 + \tilde{L}_2(x_2, \dot{x}_2),$$

$$\tilde{L}_{1,2}(x_{1,2}, \dot{x}_{1,2}) = \frac{1}{2}m_{1,2}\dot{x}_{1,2}^2 - \frac{1}{2}(k_{1,2} + k')x_{1,2}^2.$$

Переходячи до функції Гамільтона за допомогою перетворення Лежандра, $H(p, x) = p\dot{x}(p) - L(x, \dot{x}(p))$, де узагальнені імпульси $p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$, бачимо, що частина гамільтоніану яка відповідає за зв'язок, також відділяється:

$$H(p, x) = \tilde{H}_1(p_1, x_1) + k'x_1x_2 + \tilde{H}_2(p_2, x_2).$$

В цьому простому механічному прикладі дві підсистеми зв'язані через свої координати. Отримавши рівняння руху системи, можна побачити, що на кожен із підсистем діє сила, залежна від координати іншої. Тому зв'язок через координати називають ще силовим зв'язком. [22]

Також може бути, що дві підсистеми зв'язані через свої імпульси. В рівняннях руху для кожної підсистеми фігуруватиме “сила інерції”, що пов'язана із прискоренням іншої. Тому зв'язок через імпульси ще називають інерційним. [22]

Відомі автору ілюстрації зв'язку через імпульси для механічних систем мають дещо штучний вигляд. Так, у розглянутому вище прикладі можна канонічним перетворенням перейти до зв'язку через узагальнені імпульси. Також, можна було б вибрати узагальнені координати таким чином, щоб координата одної кульки відмірялась від положення іншої: фізично це означало б, що першу кульку ми описуємо у неінерційній системі відліку. Неважко показати, що в такому випадку теж будуть зв'язані імпульси підсистем.

На відміну від механічних систем, для електричних кіл обидва види зв'язку можна наочно продемонструвати. На рисунках 2.4 і 2.5 зображено по два електричні осцилятори (LC-конттури), що взаємодіють. Конттури на рис. 2.4

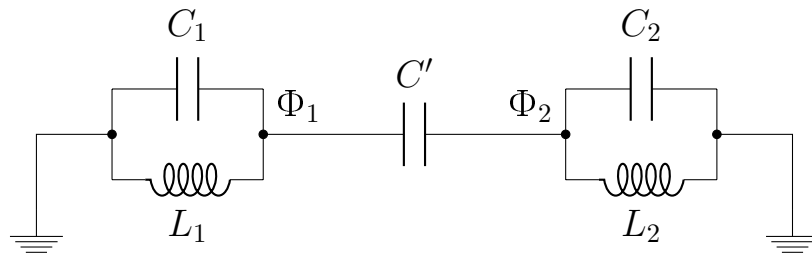


Рис. 2.4: Два LC-контури із ємнісним зв'язком.

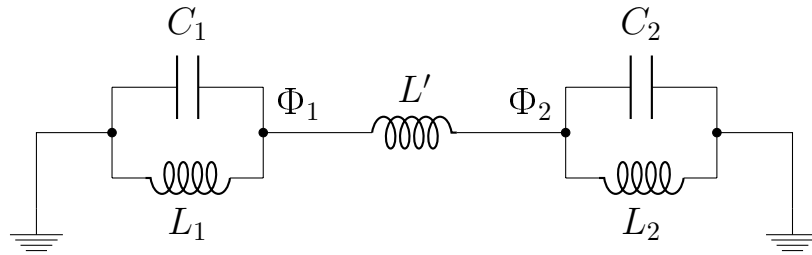


Рис. 2.5: Два LC-контури із індуктивним зв'язком.

зв'язано за допомогою конденсатора, на рис. 2.5 — за допомогою індуктивності. Зараз ми покажемо, що одна із цих пар взаємодіючих систем пов'язана координатами, а інша — імпульсами.

Для опису електричних кіл за допомогою формалізмів теоретичної механіки можна обрати (див. розділ ??) за узагальнені координати “потoki” $\Phi = \int_{-\infty}^t U dt$, де напруги U , а отже і “потoki” Φ кожного вузла кола відраховуються від довільно обраного вузла, що називається землею, і позначається на схемах знаком \equiv .

За такого вибору узагальнених координат внески конденсатора і котушки в лагранжіани систем із рисунків запишуться як: ⁹

$$L_C = \frac{C'(\dot{\Phi}_2 - \dot{\Phi}_1)^2}{2},$$

$$L_L = \frac{(\Phi_2 - \Phi_1)^2}{2L'},$$

де L' і C' — індуктивність котушки та ємність конденсатора зв'язку.

⁹Щоб не вводити зайвих позначень, використовуємо літеру “ L ” для позначення лагранжіана і індуктивності одночасно. Розрізнятимемо ці два випадка за допомогою додаткових позначень (штрихів, індексів) та із контексту.

Повні лагранжіани систем із ємнісним та індуктивним зв'язком мають вигляд

$$L_{\epsilon\text{мн.},\text{інд.}} = \sum_{i=1,2} \frac{C\dot{\Phi}_i}{2} + \frac{\Phi_i^2}{2L} + L_{C,L}.$$

Легко бачити, що узагальнені імпульси, $Q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial \dot{\Phi}} L_{\epsilon\text{мн.},\text{інд.}} = C\dot{\Phi}$, мають фізичний зміст зарядів на конденсаторах. Зробивши перетворення Лежандра і отримавши гамільтоніани систем, можна виділити гамільтоніани ємнісного і індуктивного зв'язку:

$$H_{\epsilon\text{мн.}} = \tilde{C}'(C', C_1, C_2) Q_1 Q_2, \quad (2.4)$$

$$H_{\text{інд.}} = \tilde{L}'(L', L_1, L_2) \Phi_1 \Phi_2; \quad (2.5)$$

де $\tilde{C}'(C', C_1, C_2)$, $\tilde{L}'(L', L_1, L_2)$ — коефіцієнти зв'язку, що залежать від відповідних параметрів зв'язаних осциляторів і параметру самого зв'язку. Явний вигляд цих коефіцієнтів нас не цікавить. За бажанням читач може сам провести необхідні елементарні перетворення і отримати його.

Помічаємо, що один з цих гамільтоніанів описує взаємодію через узагальнені координати, інший — через узагальнені імпульси. Тому зв'язок через координати називають ще ємнісним, а через імпульси — індуктивним зв'язком. [22]

Взагалі, єдині можливі в лінійному наближенні гамільтоніани взаємодії двох осциляторів — це гамільтоніани наведеного вище виду координата-координата, $H_{\text{qq}} \sim q_1 q_2$, і імпульс-імпульс, $H_{\text{pp}} \sim p_1 p_2$, та гамільтоніани виду координата-імпульс, $H_{\text{qp}} \sim q_1 p_2$, і імпульс-координата, $H_{\text{pq}} \sim p_1 q_2$. Тому гамільтоніан довільної взаємодії в лінійному наближенні матиме загальний вигляд:

$$\begin{aligned} H_{\text{лін.зв.}} &= H_{\text{qq}} + H_{\text{pp}} + H_{\text{qp}} + H_{\text{pq}} = \\ &= \kappa_{\text{qq}} q_1 q_2 + \kappa_{\text{pp}} p_1 p_2 + \kappa_{\text{qp}} q_1 p_2 + \kappa_{\text{pq}} p_1 q_2, \end{aligned} \quad (2.6)$$

де κ_{qq} , κ_{pp} , κ_{qp} , κ_{pq} — деякі коефіцієнти зв'язку для кожного з видів лінійної взаємодії.

Проведемо стандартну процедуру канонічного квантування (див. книгу Дірака [9], § 21). Квантовий аналог гамільтоніана 2.6 отримується простою заміною класичних канонічно спряжених змінних на ермітові оператори, а дужок Пуасона — на комутатори з точністю до $i\hbar$:

$$p_i \rightarrow \hat{p}_i, \quad q_i \rightarrow \hat{q}_i : [\hat{q}_i, \hat{q}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad [\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2\}; \quad (2.7)$$

$$H_{\text{лін.зв.}} \rightarrow \hat{H}_{\text{лін.зв.}} = \kappa_{\text{qq}}\hat{q}_1\hat{q}_2 + \kappa_{\text{qp}}\hat{q}_1\hat{p}_2 + \kappa_{\text{rp}}\hat{p}_1\hat{q}_2 + \kappa_{\text{rr}}\hat{p}_1\hat{p}_2. \quad (2.8)$$

Наприклад, квантові аналоги ємнісного 2.4 та індуктивного 2.5 гамільтоніанів взаємодії:

$$\hat{H}_{\text{ємн.}} = \tilde{C}'\hat{Q}_1\hat{Q}_2, \quad (2.9)$$

$$\hat{H}_{\text{інд.}} = \tilde{L}'\hat{\Phi}_1\hat{\Phi}_2, \quad (2.10)$$

де оператори $\hat{\Phi}_{1,2}$, $\hat{Q}_{1,2}$ задовольняють комутаційним співвідношенням

$$\begin{aligned} [\hat{Q}_i, \hat{Q}_j] &= 0, \quad [\hat{\Phi}_i, \hat{\Phi}_j] = 0, \\ [\hat{\Phi}_j, \hat{Q}_i] &= i\hbar\delta_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2\}. \end{aligned}$$

Для гармонічних осциляторів можна перейти до представлення чисел заповнення (див. книгу Дірака [9], § 34). оператори народження і знищення квантів збудження першого і другого осцилятора, $\hat{a}_{1,2}^\dagger$ і $\hat{a}_{1,2}$, можна визначити через відповідні координати і імпульси як

$$\begin{aligned} \hat{a}_{1,2}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2m_{1,2}\hbar}} \frac{1}{\sqrt{\omega_{1,2}}} \hat{p} + i\sqrt{\frac{m_{1,2}}{2\hbar}} \sqrt{\omega_{1,2}} \hat{x}, \\ \hat{a}_{1,2} &= \frac{1}{\sqrt{2m_{1,2}\hbar}} \frac{1}{\sqrt{\omega_{1,2}}} \hat{p} - i\sqrt{\frac{m_{1,2}}{2\hbar}} \sqrt{\omega_{1,2}} \hat{x}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

де $\omega_{1,2}$ — резонансні частоти осциляторів, $m_{1,2}$ — міри інертності їх руху.

комутаційні співвідношення операторів народження і знищення отримуються з комутаційних співвідношень координат та імпульсів ?? і даного визначення 2.11:

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{1,2}, \hat{a}_{1,2}^\dagger] &= 1, \\ [\hat{a}_1, \hat{a}_2] &= 0, \quad [\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_2] = 0. \end{aligned}$$

наприклад, квантові гамільтоніани ємнісного ?? та індуктивного ?? зв'язку у представленні чисел заповнення запишуться як:

$$\begin{aligned}\hat{h}_{\text{ємн.}} &= -2\hbar\tilde{c}'\rho_1\rho_2(\hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_1)(\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_2), \\ \hat{h}_{\text{інд.}} &= 2\hbar\tilde{l}'\rho_1^{-1}\rho_2^{-1}(\hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_1)(\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_2),\end{aligned}$$

де ми ввели т. зв. хвильовий опір lc-контур, $\rho_{1,2} = \sqrt{\frac{l_{1,2}}{c_{1,2}}}$. параметри осцилятора в позначеннях 2.11 виражаються через радіотехнічні як:

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{l_{1,2}c_{1,2}}}, \quad m_{1,2} = c_{1,2}.$$

загальний же гамільтоніан довільної лінійної взаємодії у представленні чисел заповнення має вигляд

$$\begin{aligned}\hat{h}_{\text{лін.зв.}} &= g_{++}(\hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_1)(\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_2) + g_{--}(\hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_1)(\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_2) + \\ &+ \frac{1}{i}g_{+-}(\hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_1)(\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_2) + \frac{1}{i}g_{-+}(\hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_1)(\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_2),\end{aligned}\tag{2.12}$$

де g_{++} , g_{+-} , g_{--} , $g_{-+} \in \mathbb{R}$ — дійсні коефіцієнти зв'язку. вони рівні, з точністю до константи (додатньої чи від'ємної), відповідним коефіцієнтам зв'язку із ???. при нашому визначенні 2.11 операторів народження і знищення коефіцієнт g_{++} відповідає за індуктивний (інерційний) зв'язок, g_{--} — за ємнісний (силовий) зв'язок, а коефіцієнти g_{+-} і g_{-+} — за змішані види зв'язку.

далі ми запишемо аналогічний гамільтоніан взаємодії дворівневої системи і осцилятора, а також зробимо деякі наближення.

2.5. зв'язана з осцилятором дворівнева система

$$\begin{aligned}h_{\text{джк}} &= g_{x+}\sigma_x(a^\dagger + a) + g_{x-}\sigma_x(a^\dagger - a) + \\ &+ \frac{1}{i}g_{y-}\sigma_y(a^\dagger - a) + \frac{1}{i}g_{y+}\sigma_y(a^\dagger + a),\end{aligned}\tag{2.13}$$

Інколи такий гамільтоніан зв'язку ще називають гамільтоніаном Джейнса-Каммінгса (Jaynes-Cummings Hamiltonian). Частіше ж цю назву використовують для гамільтоніана в дуже корисному наближенні, яке часто дає змогу аналізувати взаємодію аналітично, при цьому точно описуючи поведінку системи в практично важливих випадках. Це наближення ми зараз і розглянемо.

2.6. Наближення хвилі, що обертається

10

Розглянемо два осцилятори, що пов'язані індуктивною взаємодією. Гамільтоніан такої системи рівний

$$H = \hbar\omega_1(a_1^\dagger a_1 + \frac{1}{2}) + f\hbar(a_1^\dagger + a_1)(a_2^\dagger + a_2) + \hbar\omega_2(a_2^\dagger a_2 + \frac{2}{2}),$$

де оператори $a_{1,2}$ задовольняють комутаційним співвідношенням

$$\begin{aligned} [a_{1,2}, a_{1,2}^\dagger] &= 1, \\ [a_1, a_2] &= 0, [a_1^\dagger, a_2] = 0. \end{aligned}$$

Рівняння руху операторів є

$$\dot{a}_{1,2} = -i\omega_{1,2}a_{1,2} - if(a_{2,1}^\dagger + a_{2,1}),$$

а його розв'язок для заданих початкових умов у момент часу t_0 рівний

$$a_{1,2} = a_{1,2}(t_0)e^{-i\omega_{1,2}(t-t_0)} - if \int_{t_0}^t (a_{2,1}^\dagger + a_{2,1})e^{-i\omega_{1,2}(t-t')} dt'.$$

Видно, що після циклічних підстановок й інтегрування член $e^{-i\omega_{1,2}(t-t_0)}a_{2,1}$ перетвориться на доданок із різницею частот $\omega_1 - \omega_2$ у знаменнику; спряжений же до нього міститиме суму замість різниці частот. За умови достатньої близькості частот доданком із сумою частот можна знехтувати. Це і є суть наближення хвилі, що обертається.

Прослідкувавши походження цього малого доданку, можна взагалі виключити його причину — швидкоосцилюючі члени в гамільтоніані, пропорційні до a_1a_2 і $a_1^\dagger a_2^\dagger$. Отже, в нашому наближенні гамільтоніан набуде вигляду

$$H = \hbar\omega_1(a_1^\dagger a_1 + \frac{1}{2}) + f\hbar(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1) + \hbar\omega_2(a_2^\dagger a_2 + \frac{2}{2}),$$

Не повторюючи подібні міркування для загальних гамільтоніанів взаємодії двох осциляторів, ??, і осцилятора з дворівневою системою, ??, одразу

¹⁰Rotating Wave Approximation (RWA) в англomовній літературі.

визначимо їх вигляд в наближенні хвилі, що обертається. Вони мають містити лише «дозволені» в цьому наближенні добутки операторів, і бути самоспряженими. Єдино можливий їх вигляд, що задовольняє ці умови, це

$$H_{\text{ДК}} = g(\sigma_+ a + a^\dagger \sigma_-)$$

$$H_{\text{ліп.зв.}} = f(b_n^\dagger a + a^\dagger b_n),$$

де g, f — деякі константи взаємодії.

Ми використовуємо наближення хвилі, що обертається для аналізу нашої системи. Тому гамільтоніани взаємодії осцилятора і кубіта та осцилятора із резервуаром рівні

$$H_{\text{qr}} = \hbar g(\sigma_+ a + a^\dagger \sigma_-)$$

$$H_{\text{rb}} = \hbar \sum_n f_n(b_n^\dagger a + a^\dagger b_n), \quad (2.14)$$

де стала g виражає силу взаємодії осцилятора і кубіта, f_n — осцилятора і n -того осцилятора резервуару.

2.7. Накачка

Взагалі, опис накачки повністю аналогічний опису одного із осциляторів резервуара; але природньо щодо накачки висунути наступні додаткові припущення. Назовемо оператор для опису впливу поля накачки на нашу (точкову) систему оператором c . Вважаємо, що сигнал накачки достатньо потужний, щоб знехтувати некомутативністю його операторів: $c^\dagger c \gg 1$, і тому $c^\dagger c = cc^\dagger - 1 \approx cc^\dagger$. Вважаємо, що система не впливає на накачку — в силу потужності джерела накачки і (або) особливостей його технічної реалізації, — а отже сигнал накачки є заданим у часі. До того ж, вважаємо сигнал накачки монохроматичним. Таким чином, оператори накачки рівний

$$c = c(0)e^{-i\omega_{\text{д}}t} = (c^\dagger)^*,$$

а гамільтоніан взаємодії осцилятора з накачкою рівний

$$H_{\text{rd}} = \hbar f (c^* a + a^\dagger c), \quad (2.15)$$

де f — константа дії накачки на осцилятор.

РОЗДІЛ 3

ДЕФАЗУВАННЯ КУБІТА ПІД ВПЛИВОМ ДИСПЕРСІЙНОГО ВИМІРЮВАННЯ

Зрозуміло, що для аналізу дефазування кубіта перш за все потрібно знайти рух відносної фази станів кубіта. Побачимо, що у дисперсійному наближенні, тобто коли сила взаємодії кубіт-осцилятор достатньо мала, а їх розстройка за частотою достатньо велика, $g \ll |\omega_q - \omega_r|$, швидкість зміни фази залежить від кількості фотонів у осциляторі, $\tilde{\omega}_q = \omega_q + \chi a^\dagger(t)a(t)$, $\chi = \text{const} \in \mathbb{R}$; цей ефект аналогічний ефекту Штарка (див. [15], § 76) в атомній фізиці.

Почнемо аналіз рівнянь руху системи. Ще раз випишем гамільтоніан повної системи 2.1:

$$H = H_q + H_r + H_b + H_{qr} + H_{rb},$$

де гамільтоніани її вільних складових,

$$H_q = \frac{1}{2} \hbar \omega_q \sigma_z \quad (\text{гамільтоніан кубіта}),$$

$$H_r = \hbar \omega_r (a^\dagger a + \frac{1}{2}) \quad (\dots \text{осцилятора}),$$

$$H_b = \sum_n \hbar \omega_n (b_n^\dagger b_n + \frac{1}{2}) \quad (\dots \text{осциляторного резервуару}),$$

гамільтоніани взаємодії в лінійному та наближенні хвилі, що обертається,

$$H_{qr} = \hbar g (\sigma_+ a + a^\dagger \sigma_-) \quad (\text{гамільтоніан взаємодії кубіта та осцилятора}),$$

$$H_{rb} = \hbar \sum_n f_n (b_n^\dagger + d^\dagger b_n) \quad (\dots \text{осцилятора та резервуара}),$$

$$H_{rd} = \hbar f (c^* a + a^\dagger c), \quad (\dots \text{осцилятора і накачки}),$$

оператори народження і знищення квантів у осциляторі та резервуарі задо-

вольняють звичним комутаційним співвідношенням,

$$\begin{aligned}
 [a, a^\dagger] &= 1, & [b_n, b_n^\dagger] &= 1, & \text{за означенням,} \\
 [a, b_n] &= 0, & [a, b_n^\dagger] &= 0, & \text{із незалежності змінних} \\
 & & & & \text{осцилятора і мод резервуару,} \\
 [b_m, b_n^\dagger] &= \delta_{mn}, & [b_m, b_n] &= 0, & \text{із взаємної незалежності} \\
 & & & & \text{змінних мод резервуару,}
 \end{aligned}$$

і коефіцієнти зв'язку осцилятора і кубіта, g , та осцилятора і n -тої моди резервуару, f_n , — дійсні,

$$g \in \mathbb{R}, \quad f_n \in \mathbb{R}.$$

Підкреслимо, що наведений гамільтоніан з *самого початку є деяким ефективним* гамільтоніаном, що описує усереднену динаміку системи на цікавих нам інтервалах часу. При цьому до високочастотних змін вектора стану системи, які усереднюються, можуть належати не тільки коливання, якими ми знехтували, переходячи до наближення RWA, але і будь-які інші, які, безумовно, існують. До таких можна віднести коливання, які призводять до редукції хвильової функції системи.

3.1. Рівняння для операторів резонатору

1

Для аналізу руху фази кубіта нам знадобляться диференціальні рівняння на оператор $a(t)$ знищення збуджень осцилятора. Виявляється, що за певних умов які накладаються на моди резервуару та їх зв'язок із осцилятором, вплив резервуару на зміну $a(t)$ зводиться до появи затухання і флуктуацій.

Спочатку знайдемо $a(t)$ у відсутності накачки, тобто при $f = 0$ у гамільтоніані 2.15. Рівняння руху Гайзенберга оператора a знищення кванта в

¹У цьому розділі, в основному, повторюється підхід викладений у роботі Бермана і Чумака, [23].

осциляторі

$$\dot{a} = \frac{1}{i\hbar}[a, H],$$

перетворюється, із врахуванням вигляду 2.1 повного гамільтоніана H , на

$$\dot{a} = -i\omega_1 a - i \sum_n f_n b_n - ig\sigma_- \quad (3.1)$$

В цьому рівнянні є нескінченна кількість операторів резервуару b_n , зміна у часі яких невідома. Покажемо, що за умови щільного розташування частот ω_n осциляторів резервуару і плавної зміни коефіцієнтів зв'язку f_n з частотою, доданки з b_n в 3.1 можна виразити через $a(t)$ і початкові умови $b_n(t_0)$.

Аналогічно отриманню 3.1 одержуємо рівняння руху для оператора b_n знищення кванта в n -тій моді резервуару:

$$\dot{b}_n = -i\omega_n b_n - if_n a. \quad (3.2)$$

Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння, з невідомою функцією $a(t)$ в якості неоднорідності. Його повний розв'язок складається із загального розв'язку однорідного рівняння, що задовольняє заданим початковим умовам, і частинного розв'язку неоднорідного рівняння. Останній найлегше шукати, знайшовши спочатку елементарний розв'язок рівняння — узагальнену функцію $\epsilon(t)$, що є розв'язком рівняння з неоднорідністю у вигляді дельта-функції, $\delta(t)$. Для рівняння 3.2 вона знаходиться із:

$$\dot{\epsilon}_n(t) + i\omega_n \epsilon(t) = \delta(t).$$

Виразимо елементарний розв'язок і дельта-функцію через їх Фур'є-образи,

$$\epsilon_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \check{\epsilon}_n(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} d\omega.$$

Із рівняння для Фур'є-образів можна знайти образ $\check{\epsilon}_n(\omega)$:

$$i\omega \check{\epsilon}_n + i\omega_n \check{\epsilon}_n = \frac{1}{2\pi} \Rightarrow \check{\epsilon}_n = \frac{1}{i(\omega + \omega_n)} \frac{1}{2\pi}. \quad (3.3)$$

Повертаючись до оригіналу отримуємо,

$$\epsilon_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i(\omega + \omega_n)} \frac{1}{2\pi} = e^{-i\omega_n t},$$

де інтегрування можна здійснити методами теорії функції комплексного змінного. Шуканий частинний розв'язок рівняння для $b_n(t)$, 3.2, отримується згорткою його елементарного розв'язку та неоднорідності; фактично, це є наслідком принципу суперпозиції для лінійного диференційного оператора. Обираючи межі інтегрування так, щоб задовольнявся принцип причинності, і вводячи початкові умови в момент часу $t = t_0$, маємо

$$b_n(t) = \begin{cases} b_n(t_0)e^{-i\omega_n(t-t_0)} - if_n \int_{t_0}^t a(t')e^{-i\omega_n(t-t')} dt', & t \geq 0 \\ b_n(t_0)e^{-i\omega_n(t-t_0)} - if_n \int_{-\infty}^t a(t')e^{-i\omega_n(t-t')} dt', & t < 0. \end{cases}$$

Нехай $t \geq 0$; для $t < 0$ наведені нижче міркування приводять до того ж результату. Другий доданок в рівнянні 3.1 на $a(t)$ перетворюється на

$$-i \sum_n f_n b_n = -i \sum_n b_n(t_0)e^{-i\omega_n t} - \sum_n f_n^2 \int_{t_0}^t a(t')e^{-i\omega_n(t-t')} dt'.$$

Розглянемо член з інтегралом від $a(t)$. Можемо, за умови що частоти ω_n щільно розташовані, перейти до суми по інтервалам частот $\Delta\omega(n)$ з $\Delta N(n)$ частотами мод всередині, і, в ліміті, $\Delta\omega(n) \rightarrow 0$, перейти до інтегрування по частотам:

$$\begin{aligned} \sum_n f_n^2 e^{-i\omega_n(t-t')} &\approx \\ &\approx \sum_n \frac{\Delta N(n)}{\Delta\omega(n)} f_n^2 e^{-i\omega_n(t-t')} \Delta\omega(n) \approx \\ &\approx \int_0^{+\infty} \frac{dn(\omega')}{d\omega'} f^2(\omega') e^{-i\omega'(t-t')} d\omega'. \end{aligned}$$

де $\frac{dn(\omega')}{d\omega'}$ — густина станів резервуару. Тоді

$$\begin{aligned} \sum_n f_n^2 \int_{t_0}^t a(t')e^{-i\omega_n(t-t')} dt' &\approx \\ &\approx \int_0^{+\infty} d\omega' \underbrace{\frac{dn(\omega')}{d\omega'} f^2(\omega')}_{k(\omega')} \int_{t_0}^t dt' \underbrace{a(t')e^{i\omega_r(t'-t)}}_{\text{повільно змінний, див. 3.1}} e^{-i(\omega' - \omega_r)(t-t')}, \end{aligned}$$

де ми виділили ефективний коефіцієнт зв'язку $k(\omega')$ мод резервуара в околі ω' , і повільно змінний множник, який можна винести за інтеграл. Функція $\int_{t_0}^t dt' e^{-i(\omega' - \omega_r)(t-t')} \sim \frac{\sin(\omega' - \omega_r)(t-t_0)/2}{(\omega' - \omega_r)(t-t_0)/2}$ — Фур'є перетворення прямокутного імпульсу — поводить себе подібно до дельта-функції. Дійсно, вона майже зануляється для $|\omega' - \omega_r| > 2\pi/(t - t_0)$; тому, при досить великих часах спостереження $t - t_0$ і досить гладкої функції $k(\omega')$, можна вважати, що в інтегралі по $d\omega'$ остання рівна $k(\omega_r)$. З тих же причин нижню межу інтегралу можна продовжити до мінус нескінченності. Отже,

$$\begin{aligned} \sum_n f_n^2 \int_{t_0}^t a(t') e^{-i\omega_n(t-t')} dt' &\approx k(\omega_r) a(t) \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \int_{t_0}^t dt' e^{-i(\omega' - \omega_r)(t-t')} = \\ &= k(\omega_r) a(t) \int_{t_0}^t dt' \delta(t - t') e^{-i(\omega' - \omega_r)(t-t')} = \frac{1}{2} k a(t), \end{aligned} \quad (3.4)$$

де ми позначили $k = k(\omega_r)$.

Проведені перетворення легко можна узагальнити, і отримати співвідношення, яке виконується за наведених вище умов для пар (f_n, ω_n) ,

$$\sum_n f_n^2 e^{-i\omega_n \tau} = k \delta(\tau), \quad (3.5)$$

для узагальнених функцій, що діють на достатньо плавно змінні в околі ω_r функції. Тобто, його можна використовувати під знаком інтеграла по $d\tau$, за умови що інші множники достатньо плавно змінні в цьому околі.

Фізичний зміст цього співвідношення легко зрозуміти. При $\tau \neq 0$ кожен доданок суми має випадкову амплітуду і випадкову фазу: через те, що мод резервуару досить багато, в такому випадку сума зануляється. І тільки коли $\tau = 0$, сума збігається до деякої константи k .

Отже, рівняння 3.1 перетворюється на

$$\dot{a} = \left(-i\omega_r - \frac{k}{2} \right) a - i \sum_n f_n b_n(0) e^{i\omega_n(t-t_0)} - ig\sigma_-.$$

Введемо початкові умови на нескінченності, $\lim_{t \rightarrow -\infty} a(t) = 0$, тобто, вважаємо, що коливання пов'язані із впливом ненульових початкових умов встигли

затухнути. Тоді рівняння частково інтегрується, і

$$a(t)|_{f=0} = \sum_n \frac{f_n b_n(t_0) e^{-i\omega_n(t-t_0)}}{\omega_r - \omega_n + ik/2} + \int_{-\infty}^t e^{-i\omega_q(t-t')} \sigma_-(t') dt', \quad (3.6)$$

де позначкою $|_{f=0}$ ми нагадуємо, що цей розв'язок отримано у припущенні відсутності накачки.

Не повторюючи наведені вище перетворення для випадку включеної накачки, $f \neq 0$, можна помітити, що взаємодія з нею повністю аналогічна взаємодії із n -тою модою резервуару, а отже

$$a(t) = \sum_n \frac{f_n b_n(t_0) e^{-i\omega_n(t-t_0)}}{\omega_r - \omega_n + ik/2} + \frac{f c(t_0) e^{-i\omega_d(t-t_0)}}{\omega_r - \omega_d + ik/2} + \int_{-\infty}^t e^{-i\omega_q(t-t')} \sigma_-(t') dt'. \quad (3.7)$$

3.2. Ефективний гамільтоніан в дисперсійному режимі

Розглянемо унітарне перетворення хвильової функції:

$$\Psi \rightarrow U\Psi, \quad U : U^\dagger U = 1.$$

Із коваріантності нестационарного рівняння Шредінгера відносно цього перетворення знайдемо як перетвориться гамільтоніан:

$$H \rightarrow U^\dagger H U - i\hbar U^\dagger \dot{U}.$$

Застосуємо метод унітарних перетворень для спрощення гамільтоніану кубіта і осцилятора, що взаємодіють. Коли система працює в дисперсійному режимі, тобто при взаємодії кубіта і осцилятора, малій у порівнянні із їх розстройкою, $g \ll |\omega_q - \omega_r|$, гамільтоніан Джейнса-Каммінґса в наближенні хвилі, що обертається,

$$H = \frac{1}{2} \hbar \omega_q \sigma_z + \hbar g (\sigma_+ a + a^\dagger \sigma_-) + \hbar \omega_r (a^\dagger a + \frac{1}{2}), \quad (3.8)$$

можна унітарним перетворенням

$$U = e^{\gamma(\sigma_+ a - a^\dagger \sigma_-)}, \quad \gamma = -\frac{g}{\omega_q - \omega_r}, \quad (3.9)$$

перетворити (див. роботу [10], дисертацію [13]) до діагонального вигляду,

$$H \rightarrow U^\dagger H U = \frac{1}{2}\hbar \left(\omega_q - 2\chi \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \right) + \hbar\omega_r \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right),$$

де стала $\chi = \frac{g^2}{\omega_q - \omega_r}$ виражає силу дисперсійного впливу осцилятора на кубіт. Діагоналізований гамільтоніан ще називають ефективним, чи (не зовсім вдало) перенормованим.

Наш гамільтоніан 2.1 відрізняється від 3.8 присутністю члена 2.15, що пов'язаний із накачкою і членів 2.3, 2.14, що пов'язані із осциляторним резервуаром. Використовуючи тотожність

$$e^{-\gamma A} H e^{\gamma A} = H + \gamma [H, x] + \frac{\gamma^2}{2} [H, [H, x]] + \dots,$$

і той факт, що $(\sigma_+ a - a^\dagger \sigma_-)^\dagger = -(\sigma_+ a - a^\dagger \sigma_-)$, подіємо на них перетворенням 3.9:

$$H_{rd} \rightarrow U^\dagger H_{rd} U = H_{rd} - \underbrace{f\hbar\gamma(c^*\sigma_- + \sigma_+ c)}_{H_{qd}}, \quad (3.10)$$

$$H_b \rightarrow U^\dagger H_b U = H_b,$$

$$H_{rb} \rightarrow U^\dagger H_{rb} U = H_{rb} - \sum_n \gamma \hbar f_n (b^\dagger \sigma_- (1 - \text{ch } \gamma) + \sigma_+ b \text{sh } \gamma).$$

Зробимо наближення, яке суттєво спростить подальші міркування. Вважаємо, що найбільша із констант зв'язку осцилятор-резервуар задовольняє умові:

$$\gamma \hbar \max\{f_1, f_2, \dots\} \ll 1, \quad (3.11)$$

а отже

$$H_{rb} \rightarrow U^\dagger H_{rb} U \approx H_{rb}.$$

Розглянемо другу частину гамільтоніану 3.10, яку назовемо гамільтоніаном H_{qd} . Всі інші члени ефективного гамільтоніану назовемо H_0 і зробимо перехід до представлення взаємодії:

$$H \rightarrow e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t} H e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t} - i\hbar e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t} \frac{d}{dt} e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t} = e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t} H_{qd} e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t} = f\hbar\gamma(c^*\sigma_- e^{i(\omega_d - \omega_q)t} + \text{e. c.}).$$

Залежність від часу операторів σ_{\pm} після інтегрування відповідних гамільтонових рівнянь руху буде пропорційна до $fg/(\omega_r - \omega_q)/(\omega_d - \omega_q)$. Запропоновані схеми дисперсійного вимірювання (див. роботи [10, 23]) працюють при малій (чи взагалі нульовій) розстройці $|\omega_r - \omega_d|$, тому, з огляду на величину розстройки кубіт-осцилятор, вважаємо, що

$$\frac{fg}{(\omega_r - \omega_q)(\omega_d - \omega_q)} \approx 0, \quad (3.12)$$

а отже доданком H_{qd} взагалі можна знехтувати і

$$H_{rd} \rightarrow U^\dagger H_{rd} U \approx H_{rd}.$$

Насправді, схеми дисперсійного вимірювання проектується так, щоб виконувалось співвідношення 3.12, яке призводить до того що вимірювання стає неруйнуючим. Дійсно, із ефективного гамільтоніана в наших наближеннях, слідує, що

$$\dot{\sigma}_z = 0. \quad (3.13)$$

3.3. Рух взаємної фази станів кубіта

Покажемо, що після перетворення 3.9 рух фази «кубіта» відрізняється від руху фази справжнього кубіта наперед заданим чином: тоді для знаходження дефазування — яке є результатом стохастичного руху кубіта — можемо використовувати перетворений «кубіт».

Для цього знайдемо стохастичну частину залежності від часу показника експоненти перетворення 3.9, яка пропорційна операторам кубіта. Вводячі початкові умови в момент часу $t = 0$, замишемо інтегральне рівняння для оператора σ_- :

$$\sigma_-(t) = \sigma_-(0)e^{-i\omega_q t} - ig \int_0^t \left(e^{-i\omega_q t'} a(t') + \text{e. c.} \right) dt'.$$

З цього рівняння і аналогічного рівняння для оператора a , із 3.6 видно, що

стохастична частина показника експоненти перетворення U рівна

$$\gamma\sigma_+(t) \sum_n \frac{f_n b_n(0) e^{-i\omega_n t}}{\omega_r - \omega_n + ik/2} + \text{e. c.} \approx 0,$$

враховуючи умову 3.11. Саме частина показника експоненти перетворення U , що пропорційна операторам кубіта впливає на стан кубіта при унітарному перетворенні. Ми показали, що стан «кубіта» не змінюється випадковим чином після перетворення 3.9.

Розглянемо вектор стану кубіта (надалі під «кубітом» матимемо на увазі перетворений «кубіт»), що є частиною вектору стану повної системи. Запараметризуємо його як

$$|q\rangle = e^{-i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle. \quad (3.14)$$

Видно, що параметризований таким чином вектор стану є нормованим, а параметр ϕ визначає відносну фазу базисних станів $|0\rangle$ і $|1\rangle$. Коефіцієнт « $1/2$ » в фазах станів і сама присутність фази у обох станів не мають фізичного змісту — така параметризація обрана для зручності. Коефіцієнт « $1/2$ » в аргументах тригонометричних функцій означає, що куту ϕ потрібно два рази зробити повний оберт, для того щоб перевести $|q\rangle$ у початкове положення. Це є наслідком того, що $|q\rangle$ змінюється унітарним перетворенням, що можна представити унітарною комплексною матрицею 2×2 з одиничним визначником, тобто групою $SU(2)$.

Із нестационарного рівняння Шредінгера для вектору стану кубіта,

$$i\hbar \frac{d}{dt} |q\rangle = H |q\rangle,$$

і вигляду гамільтоніану системи H (надалі під гамільтоніаном системи, H , матимемо на увазі ефективний гамільтоніан; під іншими операторами — перетворені оператори), отримуємо рівняння

$$i \frac{d}{dt} |\dot{q}(t)\rangle = \frac{1}{2} \left(\omega_q - 2\chi \left(a(t)^\dagger a(t) + \frac{1}{2} \right) \right) \sigma_z |q(t)\rangle, \quad (3.15)$$

де $\chi = \frac{g^2}{\omega_q - \omega_r}$.

Із цього рівняння легко отримати залежність відносної фази станів кубіта від часу,

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \omega_q t - 2\chi \int_0^t n(t) dt = \\ &= \omega_q t - 2\chi \int_0^t \langle n(t) \rangle dt - 2\chi \int_0^t \Delta n(t),\end{aligned}\tag{3.16}$$

де ми позначили

$$\begin{aligned}n(t) &= a^\dagger(t)a(t), \\ \Delta n(t) &= n(t) - \langle n(t) \rangle.\end{aligned}$$

3.4. Стохастичний аналіз руху взаємної фази станів кубіта

Нас цікавить стохастична частина зміни фази, яка і призводить до дефазування,

$$\Delta\phi(t) = 2\chi \int_0^t \Delta n(t),\tag{3.17}$$

Використовуючи визначення $\Delta n(t)$, легко переконатись, що середнє стохастичної зміни фази рівне нулю, $\langle \Delta\phi(t) \rangle = 0$. Тому, для характеристики дефазування кубіта потрібно використати дисперсію

$$\langle \Delta\phi^2(t) \rangle = 4\chi^2 \int_0^t \int_0^t \langle \Delta n(t_1) \Delta n(t_2) \rangle dt_1 dt_2,\tag{3.18}$$

або, краще, пов'язану із нею величину — кореляцію амплітуд вірогідності базисних станів кубіта, що виражає їх здатність до квантової інтерференції, тобто є мірою когерентності стану кубіта.

Із рівняння 3.15, чи із сталості σ_z , див. рівняння 3.13, видно, що кут θ (див. параметризацію 3.14) не змінюється із часом. Тоді кореляція $G(t)$ амплітуд вірогідності базисних станів рівна

$$G(t) = \langle (e^{-i\phi(t)/2} \cos \frac{\theta}{2})^* e^{i\phi(t)/2} \sin \frac{\theta}{2} \rangle = \frac{1}{2} \langle e^{i\phi(t)} \sin \theta \rangle = \frac{1}{2} e^{i\omega_q t} \sin \theta \langle e^{i\Delta\phi(t)} \rangle.\tag{3.19}$$

Зв'язок цієї величини з дисперсією ми отримаємо далі, поки що ж визначимо через неї деякі важливі характеристики процесу дефазування.

За визначенням, густина спектру (див. підручник Ахманова, Дьякова і Чіркїна, [24]; чи довідник Корнів, [25]) випадкового процесу $f(t)$ є

$$S_f(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle |\check{f}_T(\nu)|^2 \rangle}{T},$$

де $\check{f}_T(\nu) = \int_{-T}^T f(t) e^{2\pi i \nu t} dt$. Із визначення густини спектру і припущення про стаціонарність процесу,² можна отримати відому теорему Вінера-Хінчіна [24, 25], яка пов'язує густину спектру випадкового сигналу і його кореляцію:

$$S_f(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt G_f(t) e^{2\pi i \nu t}, \quad G_f(t) = \langle f(0) f(t) \rangle. \quad (3.20)$$

Час когерентності (чи декогеренції, або дефазування), тобто час, за який кубіт “забуває” свою фазу, втрачаючи здатність до квантової інтерференції своїх базисних станів, визначається через ширину $\Delta\nu$ густини спектру сигналу $e^{i\Delta\phi(t)}$:

$$T_2 = \frac{1}{\Delta\nu}. \quad (3.21)$$

Вважаючи, що час кореляції флуктуацій кількості фотонів набагато менший за час спостереження за фазою, $\tau_{\text{кор.}} \ll t$, перепишемо інтеграл 3.17 у вигляді суми

$$\Delta\phi(t) = 2\chi \int_0^t \Delta n(t) = 2\chi \sum_{t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_n < t} \Delta n(t_i) \tau_{\text{кор.}}.$$

Застосовуючи центральну граничну теорему, приходимо до висновку, що $\Delta\phi(t)$ можна вважати, в кожен момент часу t , випадковою величиною із гаусівською густиною розподілу,

$$\rho(\Delta\phi) = C e^{-\frac{\Delta\phi^2}{2\langle\Delta\phi^2\rangle}}, \quad (3.22)$$

де константа нормування $C = 1/\sqrt{2\pi\langle\Delta\phi^2\rangle}$ і ми опустили несуттєву зараз залежність від часу.

²Стаціонарним процесом називаємо такий, автокореляція якого залежить тільки від різниці часів, $G(t_2, t_1) = G(t_2 - t_1)$.

У літературі [10, 11, 12] таке наближення ще не зовсім вдало³ називають гаусівським наближенням для фази (gaussian approximation for the phase).

Покажемо, що у цьому наближенні кореляція $G(t)$ амплітуд вірогідності базисних станів легко виражається через дисперсію 3.18 стохастичної частини зміни фази кубіта. Ця кореляція, див. рівняння 3.19, пропорційна середньому, $G(t) \sim \langle e^{i\Delta\phi(t)} \rangle$, яке можна розписати

$$\langle e^{i\Delta\phi(t)} \rangle = \sum_n \frac{i^n}{n!} \langle \Delta\phi^n(t) \rangle = \sum_n \frac{i^{2n+1}}{(2n+1)!} \langle \Delta\phi^{2n+1}(t) \rangle + \sum_n \frac{(-1)^n}{(2n)!} \langle \Delta\phi^{2n}(t) \rangle \quad (3.23)$$

При розподілі 3.22 середні першої суми у виразі 3.23 заноляються, а середні другої не складно розрахувати:

$$\begin{aligned} C^{-1} \langle \Delta\phi^{2n} \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta\phi^{2n} \rho(\Delta\phi) = \left| \gamma = \frac{1}{2\langle \Delta\phi^2 \rangle} \right| = (-1)^n \frac{d^n}{d\gamma^n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma\Delta\phi^2} \\ &= \frac{d^n}{d\gamma^n} \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} = \frac{(2n)!!}{2^n} \frac{\sqrt{\pi}}{\gamma^{\frac{2n+1}{2}}} = \sqrt{2\pi} (2n)!! \langle \Delta\phi^2 \rangle^{\frac{n+1}{2}}, \end{aligned}$$

де

$$(2n)!! \stackrel{\text{def}}{=} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k+1) \cdot \dots = \frac{(2n)!!}{n! 2^n}.$$

Остаточно,

$$\langle e^{i\Delta\phi(t)} \rangle = \sum_n \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\langle \Delta\phi^2(t) \rangle^n}{2^n} = e^{\frac{\langle \Delta\phi^2(t) \rangle}{2}}. \quad (3.24)$$

Із рівняння 3.18 видно, що дисперсія стохастичної зміни фази кубіта 3.18, а отже і міра його когерентності 3.19, і час його дефазування 3.21 визначається через двохчасовий корелятор флуктуацій кількості фотонів в осциляторі,

$$\langle \Delta n(t_1) \Delta n(t_2) \rangle = \langle a^\dagger(t_1) a(t_1) a^\dagger(t_2) a(t_2) \rangle.$$

Знаходженням цього корелятору ми і займемось далі. Спочатку розрахуємо зміну з часом оператора $a(t)$ знищення кванта в осциляторі.

³Така назва може навести на думку, що зміна стохастичної частини фази є гаусівським випадковим процесом, тобто процесом із автокореляцією у вигляді гаусіани, що, звісно, зовсім не так.

3.5. Рух перетворених операторів резонатора

Диференціальне рівняння на оператор $a(t)$, що отримується із вигляду ефективного гамільтоніану при вимкненій накачці, $f = 0$,

$$\dot{a} = -i\tilde{\omega}_r a - i \sum_n f_n b_n$$

Величина $\tilde{\omega}_r$ має зміст ефективної резонансної частоти осцилятора, що зсувнута через дисперсійну взаємодію із кубітом, $\tilde{\omega}_r = \omega_r + \chi\sigma_z$, де $\chi = \frac{g^2}{|\omega_r - \omega_q|}$. Наведене рівняння отождне рівнянню 3.1 з точністю до члена з оператором кубіта і заміни $\tilde{\omega}_r$ на ω_r . Його розв'язок легко можна отримати із розв'язку 3.6 рівняння 3.1,

$$a(t)|_{f=0} = \sum_n \frac{f_n b_n(t_0) e^{-i\omega_n(t-t_0)}}{\tilde{\omega}_r - \omega_n + ik/2}. \quad (3.25)$$

Як і в пункті 3.3., нехтуємо залежністю другої частини гамільтоніану 3.10 від часу, і тоді $a(t)$ при увімкненій накачці, $f \neq 0$, має вигляд

$$a(t) = \sum_n \frac{f_n b_n(t_0) e^{-i\omega_n(t-t_0)}}{\tilde{\omega}_r - \omega_n + ik/2} + \frac{f c(t_0) e^{-i\omega_d(t-t_0)}}{\tilde{\omega}_r - \omega_n + ik/2}. \quad (3.26)$$

3.6. Двочасова кореляція флуктуацій числа фотонів в резонаторі

Знайдемо кореляцію $\langle \Delta n(t_1) \Delta n(t_2) \rangle$, через яку виражається середньоквадратичне відхилення флуктуації відносної фази $\phi(t)$ збудженого $|1\rangle$ і основного $|0\rangle$ станів кубіта, $\langle \Delta \phi^2(t) \rangle$.

Спочатку знайдемо кореляцію $\langle \Delta n(t_1) \Delta n(t_2) \rangle|_{f=0}$, тобто двочасову кореляцію флуктуацій числа фотонів в резонаторі у відсутності накачки.

Помічаємо, що

$$\begin{aligned} \langle \Delta n(t_1) \Delta n(t_2) \rangle &= \langle (n(t_1) - \overline{n(t_1)})(n(t_2) - \overline{n(t_2)}) \rangle = \\ &= \langle n(t_1) n(t_2) \rangle - \langle n(t_1) \rangle \langle n(t_2) \rangle, \end{aligned} \quad (3.27)$$

тобто можна спочатку знайти $\langle n(t_1) n(t_2) \rangle$.

У відсутності накачки, оператор знищення кванту в осциляторі рівний

$$a(t)|_{f=0} = \sum_n \frac{f_n b_n(0) e^{-i\omega_n t}}{\omega_r - \omega_n + ik/2},$$

де, у порівнянні з 3.25, ми без втрати загальності обрали початковий момент часу $t_0 = 0$, а також знехтували впливом стану кубіта на частоту осцилятора.

Позначимо

$$B_n(t) = \frac{f_n b_n(0) e^{-i\omega_n t}}{\omega_r - \omega_n + ik/2}. \quad (3.28)$$

Припустимо, що початкові значення операторів мод резервуару є випадковими, $b_n(0) = 0$, і що початкові значення операторів різних його мод $b_n(0)$ і $b_m(0)$, $m \neq n$ є статистично незалежними. Тоді, враховуючи, що з точністю наближення RWA середні швидкоосцилюючих середніх зануляються

$$\langle B_n(t_1) B_n(t_2) \rangle \approx 0, \langle B_n^\dagger(t_1) B_n^\dagger(t_2) \rangle \approx 0,$$

отримаємо,

$$\begin{aligned} \langle n(t_1) n(t_2) \rangle &= \langle a^\dagger(t_1) a(t_1) a^\dagger(t_2) a(t_2) \rangle = \\ &= \sum_{m,n} (\langle B_n^\dagger(t_1) B_n(t_1) \rangle \langle B_m^\dagger(t_2) B_m(t_2) \rangle + \langle B_n^\dagger(t_1) B_n(t_2) \rangle \langle B_m(t_1) B_m^\dagger(t_2) \rangle), \end{aligned}$$

причому частина суми тривіально рівна добутку середніх кількостей фотонів, тобто,

$$\langle n(t_1) n(t_2) \rangle = \langle n(t_1) \rangle \langle n(t_2) \rangle + \sum_n \langle B_n^\dagger(t_1) B_n(t_2) \rangle \sum_m \langle B_m(t_1) B_m^\dagger(t_2) \rangle. \quad (3.29)$$

Розрахуємо суму одночасових кореляцій,

$$\begin{aligned} \sum_n \langle B_n^\dagger(t_1) B_n(t_1) \rangle &= \sum_n \frac{f_n^2 \langle b_n^\dagger(0) b_n(0) \rangle}{(\omega_r - \omega_n)^2 + k^2/4} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_n \frac{f_n^2 \langle b_n^\dagger(0) b_n(0) \rangle}{(\omega - \omega_r)^2 + k^2/4} \delta(\omega - \omega_n) d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dt \sum_n \frac{1}{2\pi} \frac{f_n^2 \langle b_n^\dagger(0) b_n(0) \rangle}{(\omega - \omega_r)^2 + k^2/4} e^{i(\omega - \omega_n)t} \approx \\ &\approx \langle n_b \rangle_{\omega_r} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{1}{2\pi} \frac{k \delta(t)}{(\omega - \omega_r)^2 + k^2/4} e^{i(\omega - \omega_n)t} = \langle n_b \rangle_{\omega_r} \quad (3.30) \end{aligned}$$

де $\langle n_b \rangle_{\omega_r}$ — кількість фотонів резервуару з частотою ω_r .

В передостанньому переході викладки 3.30 ми використали правило 3.5, вважаючи, що для $\frac{\Delta N(n)}{\Delta \omega(n)} \frac{f_n^2 \langle b_n^\dagger(0) b_n(0) \rangle}{(\omega - \omega_r)^2 + k^2/4}$ можна здійснити перехід до неперервної границі (див. перетворення, що привели до 3.4) — функції

$$\frac{k(\omega_r) \langle n_b \rangle_{\omega_r}}{(\omega - \omega_r)^2 + k^2/4}, \quad (3.31)$$

яка достатньо гладка в деякому (залежному від затухання k) околі ω_r . Зауважимо, що ця умова — на швидкість зміни кількості фотонів в модах резервуару з частотою моди — майже напевне виконується для високодобротних резонаторів, тобто коли добротність $Q = \omega_r/k \gg 1$.

Розрахуємо суму двочасових кореляцій, $\sum_n \langle B_n^\dagger(t_1) B_n(t_2) \rangle$ і $\sum_n \langle B_n(t_1) B_n^\dagger(t_2) \rangle$. Повторюючи міркування, зроблені для отримання 3.30, одержимо для кореляції нормально впорядкованих операторів,

$$\sum_n \langle B_n^\dagger(t_1) B_n(t_2) \rangle = \langle n_b \rangle_{\omega_r} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{k e^{-i\omega(t_2-t_1)}}{(\omega - \omega_r + ik/2)(\omega - \omega_r - ik/2)},$$

де інтеграл можна розрахувати інтегруванням по комплексній площині, обравши правильні контури обходу полюсів в залежності від знаку $t_2 - t_1$, і отримати остаточний результат:

$$\sum_n \langle B_n^\dagger(t_1) B_n(t_2) \rangle = \langle n_b \rangle_{\omega_r} e^{-i\omega_r(t_2-t_1) - \frac{k}{2}|t_2-t_1|}. \quad (3.32)$$

Для кореляції операторів, розташованих антинормально, можна застосувати правила комутації, $[b_n, b_n^\dagger] = 1$, і отримати аналогічно вираз

$$\sum_n \langle B_n(t_1) B_n^\dagger(t_2) \rangle = (1 + \langle n_b \rangle_{\omega_r}) e^{-i\omega_r(t_2-t_1) - \frac{k}{2}|t_2-t_1|}. \quad (3.33)$$

Отже, з виразу 3.29 і елементарного співвідношення 3.27 можемо отримати шукану двочасову кореляцію флуктуацій кількості фотонів в резонаторі (поки що) у випадку відсутності накачки:

$$\langle \Delta n(t_1) \Delta n(t_2) \rangle \Big|_{f=0} = \langle n_b \rangle_{\omega_r} (\langle n_b \rangle_{\omega_r} + 1) e^{-k|t_2-t_1|}.$$

Видно, що кореляція флуктуацій числа фотонів в осциляторі в час t_1 із флуктуацій числа фотонів ньому в час t_2 експоненційно спадає (з декрементом затухання k) із збільшенням різниці часів $|t_2 - t_1|$. Із збільшенням фотонів в модах резервуару з частотою поблизу частоти осцилятора ω_r зростають амплітуди флуктуацій кількості фотонів в осциляторі, а отже і ненормована двочасова кореляція їх кількості.

Тепер знайдемо цю кореляцію із включеною накачкою, $f \neq 0$. Повний оператор знищення кванту в осциляторі рівний:

$$a(t) = \sum_n \frac{f_n b_n(0) e^{-i\omega_n t}}{\omega_r - \omega_n + ik/2} + \frac{f c(0) e^{-i\omega_d t}}{\omega_r - \omega_d + ik/2}$$

де, у порівнянні з 3.26, ми без втрати загальності обрали початковий момент часу $t_0 = 0$.

Визначимо, додатково до B_n , що визначений у 3.28, оператор

$$C(t) = \frac{f c(0) e^{-i\omega_d t}}{\omega_r - \omega_d + ik/2}.$$

Використовуючи наведені вище припущення щодо статистичних властивостей операторів мод резервуару в початковий момент часу, $b(0)$; і одразу виділяючи доданки, що дають просто добуток середніх значень числа фотонів, отримуємо:

$$\begin{aligned} \langle n(t_1) n(t_2) \rangle &= \langle n(t_1) \rangle \langle n(t_2) \rangle + \\ &+ \sum_n \langle B_n^\dagger(t_1) B_n(t_2) \rangle \sum_m \langle B_m(t_1) B_m^\dagger(t_2) \rangle + \\ &+ C^\dagger(t_1) C(t_2) \sum_n \langle B_n(t_1) B_n^\dagger(t_2) \rangle + \\ &+ C(t_1) C^\dagger(t_2) \sum_n \langle B_n^\dagger(t_1) B_n(t_2) \rangle. \end{aligned}$$

Враховуючи, що накачка є класичною, $[c^\dagger, c] = 0$, і використовуючи вже отримані вирази для сум кореляцій: $\sum_n \langle B_n^\dagger(t_1) B_n(t_1) \rangle$ із 3.30, $\sum_n \langle B_n^\dagger(t_1) B_n(t_2) \rangle$ із 3.32, $\sum_n \langle B_n(t_1) B_n^\dagger(t_2) \rangle$ із 3.33, одержимо, після нескладних перетворень,

шукану кореляцію,

$$\begin{aligned}\langle \Delta n(t_1) \Delta n(t_2) \rangle &= \langle n_b \rangle_{\omega_r} (\langle n_b \rangle_{\omega_r} + 1) e^{-k|t_2-t_1|} + \\ &+ 2\tilde{n}_d \langle n_b \rangle_{\omega_r} e^{-\frac{k}{2}|t_2-t_1|} \cos(\omega_r - \omega_d)(t_2 - t_1) + \\ &+ \tilde{n}_d e^{-\frac{k}{2}|t_2-t_1|} e^{i(\omega_r - \omega_d)(t_2-t_1)},\end{aligned}\quad (3.34)$$

де

$$\tilde{n}_d = \frac{|fc|^2}{(\omega_r - \omega_d)^2 + k^2/4}. \quad (3.35)$$

Прояснимо фізичний зміст величин \tilde{n}_d , $\langle n_b \rangle_{\omega_r}$. Для цього знайдемо залежність від часу середньої кількості фотонів у осциляторі:

$$\begin{aligned}\langle n(t) \rangle &= \langle a^\dagger(t) a(t) \rangle = \\ &= \sum_n \frac{f_n^2 \langle b_n^\dagger(0) b_n(0) \rangle}{(\tilde{\omega}_r - \omega_n)^2 + k^2/4} + \frac{|fc|^2}{(\tilde{\omega}_r - \omega_n)^2 + k^2/4} = \\ &= \sum_n \langle B_n^\dagger(t) B_n(t) \rangle + \frac{|fc|^2}{(\tilde{\omega}_r - \omega_n)^2 + k^2/4} = \\ &= \langle n_b \rangle_{\omega_r} + \tilde{n}_d.\end{aligned}\quad (3.36)$$

Таким чином, величина \tilde{n}_d є кількістю фотонів в осциляторі, що пов'язана з дією накачки. Величина $\langle n_b \rangle_{\omega_r}$ — кількість фотонів резервуару в модах з частотою близько ω_r — крім того рівна кількості фотонів в осциляторі, що пов'язана із взаємодією з осциляторним резервуаром. Із виразів 3.35 і 3.31, видно що осцилятор з шириною k резонансної лінії виступає в якості фільтра з амплітудно-частотною характеристикою у вигляді лоренціани, $1/((\omega_r - \omega_d)^2 + k^2/4)$, для збуджень, що передаються з боку накачки і мод резервуару. Причому, через те що частоти мод резервуару майже не змінюються в околі ω_r , кількість фотонів резервуару в осциляторі рівна просто $\langle n_b \rangle_{\omega_r}$. Уявляючи осцилятор в якості фільтра для зовнішніх збуджень, легко зрозуміти чому збудження з кубіту не попадають у резонатор: через сильну розстройку частот кубіта і осцилятора у порівнянні з шириною резонансної лінії осцилятора (і силою взаємодії кубіта і осцилятора), вони ним відфільтровуються.

Розібравши фізичний зміст коефіцієнтів $\langle n_b \rangle_{\omega_r}$ і \tilde{n}_d із виразу 3.45 для дво-часової кореляції флуктуацій кількості фотонів осцилятора $\langle \Delta n(t_1) \Delta n(t_2) \rangle$, перейдемо до обговорення самого виразу.

За відсутності накачки, $f = 0$, він, як і слід, переходить у вираз 3.29.

Якщо покласти $\langle n_b \rangle_{\omega_r} = 0$, тобто вважати, що резервуар не дає реальних фотонів у осцилятор, наша кореляція набуває вигляду

$$\langle \Delta n(t_1) \Delta n(t_2) \rangle = \tilde{n}_d e^{-\frac{\kappa}{2}|t_2-t_1|} e^{i(\omega_r-\omega_d)(t_2-t_1)}, \quad (3.37)$$

Математично, ця частина повної кореляції 3.45 була отримана через некому-тативність операторів народження і знищення квантів в модах резервуару, b_n^\dagger і b , яка дала доданок, незалежний від $\langle n_b \rangle_{\omega_r}$ в 3.33. Фізично ця частина описує взаємодію вакууму — віртуальних фотонів — резервуару із накачкою. Цікаво, що без накачки така вакуумна складова не виникає.

Кореляція 3.37, де знехтувано реальними збудженнями осцилятора резервуаром, за однакових часів $t_1 = t_2 = t$ рівна просто

$$\langle \Delta n(t) \Delta n(t) \rangle = \tilde{n}_d = \langle n(t) \rangle, \quad (3.38)$$

де ми використали рівність 3.36, поклавши $\langle n_b \rangle_{\omega_r} = 0$. Отримана рівність є властивістю т. зв. когерентного стану, тобто, за одним із означень, власного стану оператора знищення. Дійсно, можна показати, що за відсутністю дисипації, стан осцилятора на який діє класична накачка буде когерентним (див. [26], розділ 2).

Видно, що при $\omega_r \neq \omega_d$ кореляція 3.45 зменшується, що, згідно із виразом 3.18 для дисперсії стохастичної частини руху фази кубіта, призводить до зменшення дефазування кубіта.

У практично ж важливому випадку вимірювання стану кубіта вимірюванням зміни фази відбитої від резонатора (чи такої, що пройшла через резонатор) хвилі (див. роботи [10, 11, 12, 4, 8], дисертацію [13]) для найбільшої ефективності вимірювання обирають частоту накачки рівною частоті основної моди резонатора, $\omega_r = \omega_d$.

Далі аналізуємо саме цей випадок. При $\omega_r = \omega_d$ вираз 3.45 перетворюється на

$$\begin{aligned}\langle \Delta n(t_1) \Delta n(t_2) \rangle &= \langle n_b \rangle_{\omega_r} (\langle n_b \rangle_{\omega_r} + 1) e^{-k|t_2-t_1|} + \\ &+ 2\tilde{n}_d \langle n_b \rangle_{\omega_r} e^{-\frac{k}{2}|t_2-t_1|} \\ &+ \tilde{n}_d e^{-\frac{k}{2}|t_2-t_1|}.\end{aligned}\quad (3.39)$$

Зазначимо, що в цьому випадку отриманий нами вираз для кореляції флуктуацій 3.39 переходить при $\langle n_b \rangle_{\omega_r} = 0$ у відомий в літературі [10, 11, 12] вираз

$$\langle \Delta n(t_1) \Delta n(t_2) \rangle = \tilde{n}_d e^{-\frac{k}{2}|t_2-t_1|},$$

який отримується у роботі [10] в припущенні, що стан осцилятора (моди стрічкового НВЧ-резонатора в роботах) є когерентним, тобто, нехтуючи впливом резервуару із ненульовою температурою. Цей вираз кореляції використовують для знаходження швидкості дефазування кубіта.

Ми ж знайдемо швидкість дефазування із врахуванням вкладу резервуару у кількість фотонів осцилятора, тобто, нехтуючи температурою резервуару. Для цього спочатку знайдемо дисперсію стохастичної частини фази кубіта.

3.7. Дисперсія стохастичної частини зміни фази кубіта

Розрахуємо дисперсію стохастичної частини фази, $\langle \Delta \phi^2(t) \rangle$, використовуючи вираз 3.18 і результат 3.39 — корелятор $\langle \Delta n(t_1) \Delta n(t_2) \rangle$ при $\omega_r = \omega_d$. Здійснюючи нескладне інтегрування, маємо:

$$\begin{aligned}\langle \Delta \phi^2(t) \rangle &= 4\chi^2 \int_0^t \int_0^t \langle \Delta n(t_1) \Delta n(t_2) \rangle dt_1 dt_2 = \\ &= 8\chi^2 \langle n_b \rangle_{\omega_r} (\langle n_b \rangle_{\omega_r} + 1) \left(\frac{|t|}{k} - \frac{1}{k^2} + \frac{e^{-k|t|}}{k^2} \right) + \\ &+ 8\chi^2 8\tilde{n}_d \langle n_b \rangle_{\omega_r} \left(\frac{|t|}{2k} - \frac{1}{k^2} + \frac{e^{-k|t|/2}}{k^2} \right) + \\ &+ 8\chi^2 4\tilde{n}_d \left(\frac{|t|}{2k} - \frac{1}{k^2} + \frac{e^{-k|t|/2}}{k^2} \right).\end{aligned}\quad (3.40)$$

Нагадаємо, що коефіцієнт $\chi = \frac{g^2}{|\omega_q - \omega_r|}$ виражає силу ефекту Штарка при дисперсійному вимірюванні.

Практично важливим є випадок, коли вклад резервуара у кількість фотонів осцилятора все ж є порівняно невеликим, $\langle n_b \rangle_{\omega_r} \ll \tilde{n}_d$. В експериментах, які описані у роботах, що процитовані вище і роботах [4, 5], такий режим досягається охолодженням кріостату із системою всередині до температур порядку десятків мілікельвін, і його ретельним захистом від зовнішніх завад. У цьому режимі можливе достатньо точне вимірювання стану кубіта; в ньому ж функціонуватимуть, поки що гіпотетичні, квантові комп'ютери.

Крім того, досить велике значення $\langle n_b \rangle_{\omega_r}$ означає, що порушується наближення слабкої взаємодії із резервуаром, і наші формули стають, в кращому випадку, здогадкою.⁴

Для режиму з $\langle n_b \rangle_{\omega_r} \ll \tilde{n}_d$ отримаємо вираз для дисперсії стохастичної частини фази, $\langle \Delta \phi^2(t) \rangle$. Зберігаючи лише доданки, лінійні по $\langle n_b \rangle_{\omega_r}$, маємо

$$\langle \Delta \phi^2(t) \rangle = 16\chi^2 \frac{N}{k} (|t| + 2 \frac{e^{-\frac{k}{2}|t|} - 1}{k}), \quad (3.41)$$

де ми позначили деяку ефективну кількість фотонів, що призводить до дефазування, через

$$N = \tilde{n}_d (2\langle n_b \rangle_{\omega_r} + 1).$$

Як і слід було очікувати, цей результат переходить у наведений в роботі [11], якщо покласти $\langle n_b \rangle_{\omega_r} = 0$.

Отже, за умови $\langle n_b \rangle_{\omega_r} \ll \tilde{n}_d$, вплив реальних фотонів резервуару, що проникають у осцилятор, на дисперсію стохастичної частини фази зводиться до ефективного збільшення кількості фотонів накачки у $2\langle n_b \rangle_{\omega_r} + 1$ разів.

Тепер розрахуємо міру квантової когерентності — кореляцію амплітуд ві-

⁴Як прийнято вважати, за сильної взаємодії із оточуючим середовищем перестає бути справедливою сама квантова механіка — точніше, вона переходить в класичну. Знаходження області значень $\langle n_b \rangle_{\omega_r}$, за яких це наближення ще є справедливим, заслуговує уваги як експериментаторів, так і теоретиків: таким чином, можливо, вдасться прояснити межі застосовності квантової механіки.

рогідностей базисних станів кубіта, із якої знайдемо швидкість декогеренції (дефазування).

3.8. Швидкість дефазування, що спричинена вимірюванням

Одержимо міру дефазування (декогеренції) кубіта, що спричинена процесом вимірювання: накачуванню осцилятора на його власній частоті, $\omega_d = \omega_r$ і визначенню стану кубіта за зсувом фаз падаючої на осцилятор і відбитої (чи такої, що пройшла) хвилі. Продовжуємо вважати, що кількість фотонів резервуару в осциляторі мала у порівнянні із кількістю фотонів накачки в ньому, $\langle n_b \rangle_{\omega_r} \ll \tilde{n}_d$.

Якщо вважати зміну фази кубіта Згідно отриманому співвідношенню 3.24, кореляція амплітуд базисних станів кубіта визначається через дисперсію стохастичної частини зміни його фази,

$$\langle e^{i\phi(t)} \rangle = e^{\frac{\langle \phi^2(t) \rangle}{2}}$$

де дужки означають одночасне усереднення по ансамблю і квантове усереднення.

Розрахуємо густину спектру випадкового процесу $e^{i\phi(t)}$. Як вже було сказано в підрозділі 3.3., її можна визначити за теоремою Вінера-Хінчина 3.20 із автокореляції випадкового процесу, тобто,

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{\langle \phi^2(t) \rangle}{2}\right) e^{i\omega t} dt. \quad (3.42)$$

Розрахуємо густину спектру 3.42, використовуючи вираз 3.41 дисперсії флуктуації фази, який є вірним для наших припущень щодо схеми вимірювань. Через присутність модуля в підінтегральному виразі розіб'ємо інтеграл із 3.42 на дві частини:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\langle \phi^2(t) \rangle}{2}} e^{i\omega t} dt = \int_0^{+\infty} \dots dt + \int_{-\infty}^0 \dots dt.$$

Позначивши $\mu = 16N\frac{\chi^2}{k^2}$, перетворимо першу частину (із винесеним множником $e^{-\mu}$):

$$\begin{aligned} e^{\mu} \int_0^{+\infty} \dots e^{i\omega t} d\omega &= \int_0^{+\infty} \exp \left((e^{-kt/2} - \frac{kt}{2})\mu + i\omega t \right) dt = \\ &= -\frac{2}{k} \int_1^0 e^{-\mu x} x^{(\mu\frac{k}{2}-i\omega)\frac{2}{k}} dx = \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{k} \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mu)^n}{n!} x^{n+\mu+i\frac{2\omega}{k}} dx = \\ &= \frac{2}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mu)^n}{n!} \frac{1}{n+\mu+1-i\frac{2\omega}{k}}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Хоча інтеграл в рівності 3.43 має вигляд неповної гамма-функції (див., напр., довідник [25]), а точніше, він рівний $\frac{2}{k\mu}\mu^{-\mu+2i\omega/k}\Gamma_1(\mu-2i\omega/k+1)$, вираз її через суму 3.44 матиме просту фізичну інтерпретацію в остаточному виразі густини спектру; до того ж, для порівняння останнього із отриманим в літературі теж потрібно використовувати запис через суму.

Аналогічно знаходимо другу частину інтегралу 3.42,

$$\begin{aligned} e^{\mu} \int_{-\infty}^0 \dots e^{i\omega t} d\omega &= \int_{-\infty}^0 \exp \left((-e^{-kt/2} + \frac{kt}{2})\mu + i\omega t \right) dt = \\ &= \frac{2}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mu)^n}{n!} \frac{1}{n+\mu+1+i\frac{2\omega}{k}}. \end{aligned}$$

Таким чином, густина спектру рівна

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(\frac{\langle \phi^2(t) \rangle}{2} \right) e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{2e^{-\mu}}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mu)^n}{n!} \frac{(n+\mu+1)/2}{((n+\mu+1)/2)^2 + (\frac{2\omega}{k})^2}. \end{aligned}$$

де $\mu = 16N\frac{\chi^2}{k^2}$, сила зсуву Штарка $\chi = \frac{g^2}{|\omega_q - \omega_r|}$, ефективне число фотонів, що призводять до дефазування $N = \tilde{n}_d(2\langle n_b \rangle_{\omega_r} + 1)$.

ВИСНОВКИ

Головною метою роботи було дослідження впливу взаємодії із зовнішнім середовищем, що має ненульову температуру системи достатньо розстроєних за частотами, $|\omega_q - \omega_r| \gg g$, кубіта і моди резонатора (яку ми називали просто осцилятором) під час вимірювання стану резонатора.

Вимірювання здійснюється сигналом накачки із частотою ω_d . Так як вплив резонатора на кубіт при такій розстройці їх частот зводиться до ефекту Штарка — зсуву частоти кубіта на величину пропорційну до кількості числа фотонів у резонаторі, то дисперсія флуктуації фази ϕ кубіта визначаються через двочасову кореляцію кількості фотонів у резонаторі:

$$\langle \Delta \phi^2(t) \rangle = 4\chi^2 \int_0^t \int_0^t \langle \Delta n(t_1) \Delta n(t_2) \rangle dt_1 dt_2.$$

де ми позначили величини: кількість фотонів у резонаторі

$$n(t) = a^\dagger(t)a(t),$$

сила зсуву Штарка,

$$\chi = \frac{g^2}{|\omega_r - \omega_q|}.$$

Результати В наведених нижче отриманих результатах під ω_r ми розуміємо зсунуту на $\chi\sigma_z$ частоту резонатора, $\chi = 2g^2/|\omega_r - \omega_q|$. Частоту накачки позначено через ω_d .

Нами отримана ця кореляція 3.45

$$\begin{aligned} \langle \Delta n(t_1) \Delta n(t_2) \rangle = & \langle n_b \rangle_{\omega_r} (\langle n_b \rangle_{\omega_r} + 1) e^{-k|t_2 - t_1|} + \\ & + \tilde{n}_d \langle n_b \rangle_{\omega_r} e^{-\frac{k}{2}|t_2 - t_1|} \cos(\omega_r - \omega_d)(t_2 - t_1) + \\ & + \tilde{n}_d e^{-\frac{k}{2}|t_2 - t_1|} e^{i(\omega_r - \omega_d)(t_2 - t_1)}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

де k — константа згасання резонатору, виражається через його добротність Q як $k = \omega_r/Q$ $\langle n_b \rangle_{\omega_r}$ — кількість фотонів резервуару з частотою ω_r — кіль-

кість фотонів резервуару, що проникли в резонатор, і кількість фотонів накачки, що проникла в резонатор,

$$\tilde{n}_d = \frac{|fc|^2}{(\omega_r - \omega_d)^2 + k^2/4}.$$

Якщо вважати резервуар рівноважним, то кількість фотонів $\langle n_b \rangle_{\omega_r}$ можна рахувати як кількість фотонів випромінювання абсолютно чорного тіла, тобто за розподілом Бозе-Енштейна. Можна також рахувати $\langle n_b \rangle_{\omega_r}$ як суму вкладів частин резервуару із різною температурою. Цю можливість слід використати у майбутніх дослідженнях.

При $\omega_r - \omega_d = 0$, тобто за умов вимірювання стану кубіта за фазою випромінювання, що пройшло через резонатор, тобто за реалізації, яка реально використовується, ця кореляція узагальнює відомі в літературі вирази на випадок, коли впливом проникнення квантів збудження (фотонів) зовнішнього середовища (резервуара в нашій моделі) у резонатор не можна знехтувати, тобто коли не можна знехтувати ненульовою температурою зовнішнього середовища.

Всі наступні величини розраховані для описаного вище випадку $\omega_r - \omega_d = 0$, і так само узагальнюють відомі в літературі вирази.

Отримано дисперсію флуктуацій фази 3.40,

$$\begin{aligned} \langle \Delta \phi^2(t) \rangle &= 4\chi^2 \int_0^t \int_0^t \langle \Delta n(t_1) \Delta n(t_2) \rangle dt_1 dt_2 = \\ &= 8\chi^2 \langle n_b \rangle_{\omega_r} (\langle n_b \rangle_{\omega_r} + 1) \left(\frac{|t|}{k} - \frac{1}{k^2} + \frac{e^{-k|t|}}{k^2} \right) + \\ &+ 8\chi^2 4\tilde{n}_d \langle n_b \rangle_{\omega_r} \left(\frac{|t|}{2k} - \frac{1}{k^2} + \frac{e^{-k|t|/2}}{k^2} \right) + \\ &+ 8\chi^2 4\tilde{n}_d \left(\frac{|t|}{2k} - \frac{1}{k^2} + \frac{e^{-k|t|/2}}{k^2} \right). \end{aligned}$$

У практично важливому випадку, коли кількість фотонів зовнішнього середовища все ж мала у порівнянні із такими накачки вираз для дисперсії флуктуацій фази перетворюється на

$$\langle \Delta \phi^2(t) \rangle = 16\chi^2 \frac{N}{k} \left(|t| + 2 \frac{e^{-\frac{k}{2}|t|} - 1}{k} \right),$$

де ми позначили деяку ефективну кількість фотонів, що призводить до дефазування, через

$$N = \tilde{n}_d(\langle n_b \rangle_{\omega_r} + 1),$$

тобто для невеликої кількості фотонів середовища $\langle n_b \rangle_{\omega_r}$ в резонаторі вплив середовища зводиться до домноження кількості фотонів накачки \tilde{n}_d на $\langle n_b \rangle_{\omega_r} + 1$. Для кількості фотонів середовища в резонаторі $\langle n_b \rangle_{\omega_r} \sim 1$ цей вплив вже стає значним.

Для часів спостереження (часів вимірювання в даному випадку), достатньо великих у порівнянні із часом кореляції флуктуацій числа фотонів в резонаторі, $t_{\text{спост.}} \gg 2/k = 20\text{мкс}$, можна вважати що флуктуація фази в кожен момент часу є випадковою величиною із гаусівськи розподілом. Тоді всі величини, пов'язані із цією флуктуацією, виражаються через знайдену дисперсію флуктуації фази.

Зокрема, наведемо вирази для швидкості дефазування, спричиненого вимірюванням у двох випадках.

Коли ефективна кількість фотонів, що призводить до дефазування невелика, $N \ll 1$, швидкість дефазування, спричиненого вимірюванням рівна

$$1/T_2^{\text{вим.}} = 4\chi^2/k^2 N.$$

Коли ж ефективна кількість фотонів, навпаки, велика, $N \gg 1$, то швидкість такого дефазування пропорційна

$$1/T_2^{\text{вим.}} \sim \sqrt{N}.$$

Взагалі, швидкість дефазування для довільної кількості ефективних фотонів N можна отримати із виразу для спектру величини $\langle e^{i\Delta\phi(t)} \rangle = e^{\frac{\langle \Delta\phi^2(t) \rangle}{2}}$, який рівний

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{\langle \phi^2(t) \rangle}{2}\right) e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{2e^{-\mu}}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mu)^n}{n!} \frac{(n + \mu + 1)/2}{((n + \mu + 1)/2)^2 + (\frac{2\omega}{k})^2}. \end{aligned}$$

де $\mu = 16N\frac{\chi^2}{k^2}$.

Редукція як наслідок дефазування Насамкінець, обговоримо проблему редукції квантового стану системи. Ми не пропонуємо тут розв’язку цієї проблеми, а тільки наводимо міркування, що розкривають частину її фізичного змісту. Виявляється, деякого розуміння процесу редукції можна досягти, аналізуючи наслідки процесу дефазування (декогеренції).

Нехай внаслідок вимірювання система вже повністю дефазувалась. Тоді система переходить в статистичну суміш базисних станів, яка є не більш квантовою за підкинуту копію, яку тримають в кулаку — такий стан системи ще називають повністю змішаним. Фактично, в такому випадку вже відбулась редукція: стан системи вже визначений, але через складні взаємодії із оточуючим середовищем ми можемо тільки визначити вірогідності знаходження системи в тому чи іншому базисному стані. Ці вірогідності даються квадратами модулів амплітуди вірогідностей бувшої хвильової функції.

Звичайно, редукція може відбуватись і без участі експериментатора. Під впливом дефазування, спричиненого “незапланованим вимірюванням” зовнішнім середовищем система так само може втратити свої квантові властивості.

Може виникнути питання, яким чином могла відбутись редукція — перехід системи до одного із базисних станів, якщо при неруйнуючому вимірюванні оператор, що вимірюється, можна вважати інтегралом руху? Справа в тому, що динаміка переходу в один із власних станів не описується нашим гамільтоніаном 2.1, який описує лише динаміку системи усереднену по часам більшим за період коливання, що призводять до редукції.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. *DiVincenzo, D.P.* The physical implementation of quantum computation / D.P. DiVincenzo // *Fortschr. Phys.* — 2000. — Vol. 48, no. 9-11. — Pp. 771–783.
2. *Ландау, ЛД.* Теоретическая физика: учебное пособие в 10 т. / ЛД Ландау, ЕМ Лифшиц. — 2-е, переработанное и дополненное. изд. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. — Т. VII. Электродинамика сплошных сред.
3. *Clarke, J.* Superconducting quantum bits / J. Clarke, F.K. Wilhelm // *Nature*. — 2008. — Vol. 453, no. 7198. — Pp. 1031–1042.
4. Strong coupling of a single photon to a superconducting qubit using circuit quantum electrodynamics / A. Wallraff, DI Schuster, A. Blais et al. // *Nature*. — 2004. — Vol. 431, no. 7005. — Pp. 162–167.
5. Decoupling a Cooper-pair box to enhance the lifetime to 0.2 ms / Z. Kim, B. Suri, V. Zaretsky et al. // *Physical Review Letters*. — 2011. — Vol. 106, no. 12. — P. 120501.
6. *Devoret, M.H.* Quantum fluctuations in electrical circuits / M.H. Devoret // *Les Houches, Session LXIII*. — 1995.
7. *Burkard, G.* Multilevel quantum description of decoherence in superconducting qubits / G. Burkard, R.H. Koch, D.P. DiVincenzo // *Physical Review B*. — 2004. — Vol. 69, no. 6. — P. 64503.
8. *Vijay, R.* Observation of quantum jumps in a superconducting artificial atom / R. Vijay, DH Slichter, I. Siddiqi // *Physical Review Letters*. — 2011. — Vol. 106, no. 11. — P. 110502.
9. *Дирак, П.* Принципы квантовой механики: Пер. с англ / П. Дирак // М.: Физматгиз. — 1960.
10. Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: An architecture for quantum computation / A. Blais, R.S. Huang, A. Wallraff et al. // *Physical Review A*. — 2004. — Vol. 69, no. 6. — P. 062320.

11. Qubit-photon interactions in a cavity: Measurement-induced dephasing and number splitting / J. Gambetta, A. Blais, DI Schuster et al. // *Physical Review A*. — 2006. — Vol. 74, no. 4. — P. 042318.
12. ac Stark shift and dephasing of a superconducting qubit strongly coupled to a cavity field / DI Schuster, A. Wallraff, A. Blais et al. // *Physical review letters*. — 2005. — Vol. 94, no. 12. — P. 123602.
13. *Schuster, D.I.* Circuit quantum electrodynamics: Ph.D. thesis / Yale University. — 2007.
14. Quantum ground state and single-phonon control of a mechanical resonator / AD O'Connell, M. Hofheinz, M. Ansmann et al. // *Nature*. — 2010. — Vol. 464, no. 7289. — Pp. 697–703.
15. *Ландау, ЛД.* Теоретическая физика: учебное пособие в 10 т. / ЛД Ландау, ЕМ Лифшиц. — Четвертое, исправленное изд. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — Т. III. Квантовая механика. Нерелятивистская теория.
16. *Walls, D.F.* Quantum optics / D.F. Walls, G.J. Milburn. — Springer Verlag, 2008.
17. Measurement of the Josephson Junction Phase Qubits by a Microstrip Resonator / G.P. Berman, A.R. Bishop, A.A. Chumak et al. // *Arxiv preprint arXiv:0912.3791*. — 2009.
18. *Landau, L.* Das dämpfungsproblem in der wellenmechanik / L. Landau // *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*. — 1927. — Vol. 45, no. 5. — Pp. 430–441.
19. *Ландау, Л.Д.* Собрание трудов / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — Наука, 1969. — Т. 1.
20. *Yurke, B.* Quantum network theory / B. Yurke, J.S. Denker // *Physical review. A, General physics*. — 1984. — Vol. 29, no. 3. — Pp. 1419–1437.
21. *Лихарев, К.К.* Реально-квантовые макроскопические эффекты в слабой сверхпроводимости / К.К. Лихарев // *Успехи физических наук*. — 1983. — Т. 139, № 1. — С. 169–184.

22. *Анісімов, ІО.* Коливання і хвилі / ІО Анісімов. — К.: Академпрес., 2003. — Також доступна за адресою <http://ioa.rpd.univ.kiev.ua/book/content.html>.
23. *Berman, G.P.* Influence of external fields and environment on the dynamics of a phase-qubit–resonator system / G.P. Berman, A.A. Chumak // *Physical Review A*. — 2011. — Vol. 83, no. 4. — P. 042322.
24. *Ахманов, С.А.* Введение в статистическую радиофизику и оптику / С.А. Ахманов, Ю.Е. Дьяков, А.С. Чиркин. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981.
25. *Корн, Г.* Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. — четвертое изд. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978.
26. *Scully, Marian O.* Quantum Optics / Marian O. Scully, M. Suhail Zubairy. — Cambridge: University Press, 1997.