

תרגיל בית 2

הסתברות להנדסת תוכנה

הגשה: יום ה' 9/12/21 בשעה 23.55

מרצה אחראי: ד"ר בנימין מוניץ

הערות:

1. הקפידו על פתרונות מלאים, מסודרים ומנומקים.

2. ההגשה במודל בלבד. יש להגיש קובץ PDF עד 5MB.

שאלה 1. גמר ה- NBA בכדורסל הוא סדרה של 7 משחקים אשר מסתיימת ברגע שאחת הקבוצות מגיעה ל-4 נצחונות. התוצאות האפשריות של הגמר בין שתי קבוצות מתמודדות A ו- B הם, למשל:

$AAAA$ (קבוצה A מנצחת 4 משחקים ראשונים ברצף)

$BABABAB$ (קבוצה B מנצחת במשחק ראשון, שלישי, חמישי ושביעי)

וכו'.

נתון כי לשתי הקבוצות יש אותה הסתברות 0.5 לנצחון.

א. יהי X מ"מ השווה למספר המשחקים שישחקו הקבוצות. X מקבל ערכים 4, 5, 6, 7.

מיצאו את התפלגות של X . כמוכן, מיצאו את $E[X]$, $Var(X)$ ו- $Std(X)$.

ב. יהי Y מ"מ השווה למספר המשחקים שהקבוצה A מנצחת.

מיצאו את התפלגות של Y . כמוכן, מיצאו את $E[Y]$, $Var(Y)$ ו- $Std(Y)$.

ג. מיצאו את התפלגות משותפת של X ו- Y . האם X ו- Y הם תלויים?

הערה: תשימו לב: אין צורך בבניית טבלת ההתפלגות המשותפת,

אלא תנו נוסחה עבור $Pr[X = i, Y = j]$.

ד. חשבו את $Cov(X, Y)$ ואת $\rho_{X,Y}$.

ה. יהי Z מ"מ השווה למספר המשחקים שהקבוצה B מנצחת.

חשבו את $\rho_{Y,Z}$ ואת $\rho_{X,Z}$.

שאלה 2. בהנתן תמורה (פרמוטציה) אקראית של n מספרים שונים זה מזה, ניצור עץ חיפוש בינארי ריק ונכניס אליו את האיברים בזה אחר זה.

(א) הוכיחו/הפריכו: בהנחה שלכל תמורת קלט אותה הסתברות, נקבל התפלגות אחידה של עצי החיפוש הבינאריים מעל n איברי הקלט.

(ב) נסמן את איברי הקלט ע"י $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. מהי ההסתברות שבמהלך יצירת העץ אנו משווים בין המספרים a_i ו- a_j ? נמקו.

(ג) הוכיחו כי תוחלת מספר ההשוואות בעת בניית העץ היא $O(n \log n)$.

שאלה 3. בשאלה זו כל סעיף עומד בפני עצמו.

(א) הוכיחו כי לכל מ"מ X מתקיים $Var(X) = \min_{a \in \mathbb{R}} E[(X - a)^2]$.

(ב) הוכיחו כי לכל שני מ"מ **בלתי תלויים** X ו- Y מתקיים

$$\rho(X + Y, X - Y) = \frac{Var(X) - Var(Y)}{Var(X) + Var(Y)}.$$

בהצלחה!