מודלים סטטיסטיים ויישומיהם 52518 תשע"ח – פתרון בוחן 1

1. עבור הקובץ qn1.txt מתקיים $c^T = [0.45 \quad -0.22 \quad 0.87 \quad -1.1]$, $n_i = [20 \quad 21 \quad 19 \quad 20]$ והממוצעים $\bar{y}_{i.} = [0.5052 \quad 0.593 \quad 0.7036 \quad 0.6436]$

א. $\hat{\psi}(c) = c^T \bar{y}_{i.} = 9.797 \cdot 10^{-4}$, $s^2 = 0.0804$

קוד R:

```
c <- c(0.45, -0.22, 0.87, -1.1)
D <- read.table('qn1.txt')
D$V1 <- as.factor(D$V1)
D <- D[order(D$V1),]
y <- D$V2
N <- length(y)
I <- nlevels(D$V1)
ni <- tapply(y,D$V1,FUN = length)
yi <- tapply(y,D$V1, FUN = mean)
psi.hat <- c %*% yi
s.2 <- sum((y-ave(D$V2,D$V1))^2) / (N -I)
V.c <- s.2 * sum((c^2)/ni)
T <- psi.hat/sqrt(V.c)
```

מתקבל $T = 0.0103$.

ב. תהליך גרם-שמידט עבור k וקטורים $v_1, \dots, v_k$ מוגדר באופן:

$$u_1 = v_1, \qquad u_i = v_i - \sum_{j=1}^{i-1} proj_{u_j}(v_i), \qquad proj_{u_j}(v_i) = \frac{u_j^T v_i}{u_j^T u_j} \cdot u_j$$

כדי לקבל בסיס אורתונורמלי, לאחר מציאת הוקטורים $u_1, \dots, u_k$ מנרמלים אותם באופן

$$e_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}$$

נפתור עבור הוקטורים $[v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4] = \begin{bmatrix} 0.45 & 0 & 0 & 0 \\ -0.22 & 1 & 0 & 0 \\ 0.87 & 0 & 1 & 0 \\ -1.1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$:

$$u_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 0.45 \\ -0.22 \\ 0.87 \\ -1.1 \end{pmatrix} \rightarrow \|u_1\| = \sqrt{0.45^2 + (-0.22)^2 + 0.87^2 + (-1.1)^2} = 1.4892$$

$$\rightarrow e_1 = \begin{pmatrix} 0.3022 \\ -0.1477 \\ 0.5842 \\ -0.7386 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = v_2 - \frac{u_1^T v_2}{\|u_1\|^2} u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-0.22}{2.2178} \begin{pmatrix} 0.45 \\ -0.22 \\ 0.87 \\ -1.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.0992 \begin{pmatrix} 0.45 \\ -0.22 \\ 0.87 \\ -1.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0446 \\ 0.9782 \\ 0.0863 \\ -0.1091 \end{pmatrix}$$

$$\|u_2\| = 0.9890 \rightarrow e_2 = \begin{pmatrix} 0.0451 \\ 0.9890 \\ 0.0873 \\ -0.1103 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = v_3 - \frac{u_1^T v_3}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{u_2^T v_2}{\|u_2\|^2} u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{0.87}{2.2178} \begin{pmatrix} 0.45 \\ -0.22 \\ 0.87 \\ -1.1 \end{pmatrix} - \frac{0.0863}{0.9782} \begin{pmatrix} 0.0446 \\ 0.9782 \\ 0.0863 \\ -0.1091 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1805 \\ 0 \\ 0.6511 \\ 0.4411 \end{pmatrix}$$

$$\|u_3\| = 0.8069 \to e_3 = \begin{pmatrix} -0.2236 \\ 0 \\ 0.8069 \\ 0.5467 \end{pmatrix}$$

באופן דומה מחשבים את u_4 ומקבלים $u_4 = \begin{pmatrix} 0.3504 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1434 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0.9255 \\ 0 \\ 0 \\ 0.3786 \end{pmatrix}$. מתקיים $e_1 \perp (e_2, e_3, e_4)$ ולכן

נוכל לסמן $A = (e_2, e_3, e_4) = \begin{pmatrix} 0.0451 & -0.2236 & 0.9255 \\ 0.9890 & 0 & 0 \\ 0.0873 & 0.8069 & 0 \\ -0.1103 & 0.5467 & 0.3786 \end{pmatrix}$. קוד R:

```
V <- diag(4)
V[,1] <- c
U <- matrix(0, ncol = 4, nrow = 4)
for(i in 1:ncol(V)){
  U[,i] <- V[,i]
  if(i > 1){
    for(j in 1:(i - 1)){
      U[,i] <- U[,i] - ((sum(V[,i] * U[,j]))/(sum(U[,j] * U[,j]))) * U[,j]
    }
  }
  U[,i] <- U[,i]/sqrt(sum(U[,i]^2))
}
A <- U[,-1]
```

כלומר $A = [a_1 \quad a_2 \quad a_3] = \begin{bmatrix} 0.0451 & -0.2236 & 0.9255 \\ 0.9890 & 0 & 0 \\ 0.0873 & 0.8069 & 0 \\ -0.1103 & 0.5467 & 0.3786 \end{bmatrix}$

ג. נסמן את שורות A באופן $a^i = [a_{1i} \quad a_{2i} \quad a_{3i}]$,

$$E[y] = X\beta \to X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ & \vdots & & \end{bmatrix} \to \tilde{X} = XA = \begin{bmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^2 \\ \vdots \\ a^3 \\ \vdots \\ a^4 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\to \widehat{\omega} = \left(\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1}\tilde{X}^T y = \begin{bmatrix} 0.5997 \\ 0.8066 \\ 0.7113 \end{bmatrix} \to \hat{y}^{(0)} = \tilde{X}\widehat{\omega} = \begin{bmatrix} 0.5050 \\ \vdots \\ 0.5931 \\ \vdots \\ 0.7032 \\ \vdots \\ 0.6441 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

קוד R:

```
X <- matrix(0, nrow = 80, ncol = 4)
X[1:20,1] <- 1
X[21:41,2] <- 1
X[42:60,3] <- 1
X[61:80,4] <- 1
X.tilde <- X%*%A
w <- solve(t(X.tilde)%*%X.tilde)%*%t(X.tilde)%*%y
y.hat.0 <- X.tilde%*%w
```

ד.

$$\hat{y} = X\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 0.5052 \\ \vdots \\ 0.5930 \\ \vdots \\ 0.7036 \\ \vdots \\ 0.6437 \\ \vdots \end{bmatrix} \to \sum_{k=1}^{N} \left(\hat{y}_k - \hat{y}_k^{(0)}\right)^2 = 8.5121 \cdot 10^{-6} = \left\|\hat{y} - \hat{y}^{(0)}\right\|^2 \to F = \frac{8.5121 \cdot 10^{-6}}{0.0804}$$
$$= 1.0587 \cdot 10^{-4}$$

ומתקיים $T^2 = 1.0587 \cdot 10^{-4}$ כלומר $F = T^2$ כנדרש.

קוד R:

```
y.hat <- rep(yi, ni)
err <- sum((y.hat - y.hat.0)^2)
F <- err/ (s.2)
(T^2)/F
```

2. יהיו מודלי הרגרסיה $y = X\beta + \epsilon = Z\xi + \epsilon$, מתקיים $\xi = H\beta, Z = XH^{-1}$.

$$\hat{\xi} = (Z^T Z)^{-1} Z^T y = ((XH^{-1})^T XH^{-1})^{-1} (XH^{-1})^T y = \left(H^{-1^T} X^T X H^{-1}\right)^{-1} H^{-1^T} X^T y$$
$$= H(X^T X)^{-1} \underbrace{H^{-1^{T^{-1}}} H^{-1^T}}_{=I} X^T y = H(X^T X)^{-1} I X^T y = H(X^T X)^{-1} X^T y = H\hat{\beta}$$

.4

א.

$$E\left[\widehat{\Psi}\right]=\begin{bmatrix}\mu_2-\mu_1\\ \vdots\\ \mu_I-\mu_1\end{bmatrix}\rightarrow C=\begin{bmatrix}-1 & \cdots & -1\\ 1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow Cov\left(\widehat{\Psi}\right)=\sigma^2 C\begin{bmatrix}n_1^{-1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & n_I^{-1}\end{bmatrix}C^T=\sigma^2\begin{bmatrix}\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2} & \frac{1}{n_1} & \cdots & \frac{1}{n_1}\\ \frac{1}{n_1} & \frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_3} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{n_1}\\ \frac{1}{n_1} & \cdots & \frac{1}{n_1} & \frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_I}\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \psi^{(k)}\in\left[\mu_k-\mu_1\pm q_{1-\alpha,R}\cdot\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_{k+1}}}\right]$$

כאשר $q_{1-\alpha,R}$ הוא האחוזון התואם של ההתפלגות הרב-נורמלית עם מטריצת קורלציה R, כך שעבור וקטור מקרי מהתפלגות רב-נורמלית $Z\in N_p(0,R)$ מתקיים $P\left(\max_{1\le k\le I-1}|Z_k|\le q_{1-\alpha,R}\right)=1-\alpha$.

אם השונות אינה ידועה:

$$\left(Cov\left(\widehat{\Psi}\right)\right)_{rs}=\begin{cases}\frac{\sigma^2}{n_1} & r\neq s\\ \sigma^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right) & r=s\end{cases}\rightarrow H_{rs}=\begin{cases}\frac{1}{n_1} & r\neq s\\ \left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right) & r=s\end{cases}$$

$$\rightarrow R_{rs}=\frac{H_{rs}}{\sqrt{H_{rr}H_{ss}}}=\begin{cases}\frac{1}{n_1}\Big/\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_{r+1}}\right)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_{s+1}}\right)} & r\neq s\\ \left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_{r+1}}\right)\Big/\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_{r+1}}\right)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_{r+1}}\right)} & r=s\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\sqrt{\frac{n_{r+1}n_{s+1}}{(n_{r+1}+n_1)(n_{s+1}+n_1)}} & r=s\\ 1 & r\neq s\end{cases}$$

$$\psi^{(k)}\in\left[\mu_k-\mu_1\pm t^*_{N-I,1-\alpha}\cdot s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_{k+1}}}\right]$$

כאשר t^* הוא אחוזון של התפלגות t רב-משתנית עם מטריצת קורלציה R, כך שעבור וקטור מקרי מהתפלגות t רב-משתנית $T\in T_{p,N-I}(R)$ מתקיים $P\left(\max_{1\le k\le I-1}|T_k|\le t\right)=1-\alpha$.

ב.

i. עבור $\sigma^2=9.5$ מתקבלים רווחי הסמך הבאים ($q_{1-\alpha,R}=2.3674$):

$$S\left(c^{(1)}\right)=[-2.0539,2.8539]$$
$$S\left(c^{(2)}\right)=[-6.8539,-1.9461]$$
$$S\left(c^{(3)}\right)=[3.6461,8.5539]$$

ii. עבור σ^2 לא ידוע, נאמד $s^2=10.42$ מתקבלים רווחי הסמך הבאים ($t^*_{N-I,1-\alpha}=2.4287$):

$$S\left(c^{(1)}\right)=[-2.2365,3.0365]$$
$$S\left(c^{(2)}\right)=[-7.0365,-1.7635]$$
$$S\left(c^{(3)}\right)=[3.4635,8.7365]$$

קוד R:

```
library(mvtnorm)
ni <- c(24,14,14,14)
I <- length(ni)
N <- sum(ni)
yi <- c(21.7,22.1,17.3,27.8)
s.2 <- 10.42
sigma.2 <- 9.5
alpha <- 0.05
C <- rbind(rep(-1, I - 1),diag(I - 1))
psi.hat <- t(yi%*%C)
H <- matrix(1 / ni[1], ncol = I - 1, nrow = I - 1)
diag(H) <- diag(H) + 1/ni[-1]
V.c <- t((1/ni) %*% (C^2))
R <- H / sqrt(diag(H) %*% t(diag(H)))
q <- qmvnorm(1 - alpha, tail='both.tails', corr = R)$quantile
v.q <- q * sqrt(sigma.2 * V.c)
CIq <- cbind(lower = psi.hat - v.q, upper = psi.hat + v.q)
t.star <- qmvt(p = 1 - alpha, df = N - I, tail='both.tails', corr = R) $quantile
v.t <- t.star * sqrt(s.2 * V.c)
CIt <- cbind(lower = psi.hat - v.t, upper = psi.hat + v.t)
```

ג. בשיטת בונפרוני רווחי סמך מוגדרים באופן $S(c^{(k)}) = \hat{\psi}(c^{(k)}) \pm t_{N-I,1-\frac{\alpha}{2K}} s\sqrt{V(c^{(k)})}$.

$$S(c^{(1)}) = [-2.2712,3.0712]$$
$$S(c^{(2)}) = [-7.0712,-1.7288]$$
$$S(c^{(3)}) = [3.4288,8.7712]$$

ניתן לראות כי רווחים אלו רחבים עוד יותר מאלו שפותחו מסעיף ב'.

קוד R:

```
v.b <- qt(1 - alpha/6, N - I) * sqrt(s.2 * V.c)
CIb <- cbind(lower = psi.hat - v.b, upper = psi.hat + v.b)
```

ד. לפי הנוסחאות שפותחו בסעיף א' נקבל

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, Cov(\widehat{\Psi}) = \sigma^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{m} + \frac{1}{dm} & \frac{1}{m} \\ \frac{1}{m} & \frac{1}{m} + \frac{1}{dm} \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} \frac{d+1}{dm} & \frac{1}{m} \\ \frac{1}{m} & \frac{d+1}{dm} \end{bmatrix}$$

כמו כן, רווח סמך מקיים

$$\psi^{(k)} \in \left[\hat{\psi}^{(k)} \pm q_{1-\frac{\alpha}{2},R} \cdot \sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_{k+1}}}\right] \to P\left(\left|\frac{\hat{\psi}^{(k)} - \psi^{(k)}}{\sigma\sqrt{V(c)}}\right| \le \frac{\sigma\sqrt{V(c)}q_{1-\frac{\alpha}{2},R}}{\sigma\sqrt{V(c)}}\right) = 1 - \alpha$$

לכן נקבל

$$P\left(\left|\frac{\hat{\psi}^{(k)} - \psi^{(k)}}{\sigma\sqrt{V(c)}}\right| > \frac{\sigma\sqrt{V(c)}q_{1-\frac{\alpha}{2},R}}{\sigma\sqrt{V(c)}}\right) = \alpha = P\left(\left|\hat{\psi}^{(k)} - \psi^{(k)}\right| > \sigma\sqrt{V(c)}q_{1-\frac{\alpha}{2},R}\right)$$

נציב את $V(c)$ לפי $Cov(\widehat{\Psi})$ שמצאנו ובכן $H_0: \psi^{(k)} = 0$:

$$P\left(\left|\hat{\psi}^{(k)}\right| > \sigma\sqrt{\frac{d+1}{dm}}q_{1-\frac{\alpha}{2},R}\right) = \alpha = P\left(\left|\hat{\psi}^{(k)}\right| > \frac{c}{\sqrt{m}}\right) \to c = \sigma\sqrt{\frac{d+1}{d}}q_{1-\frac{\alpha}{2},R}$$

באופן טבעי ככל ש-d גדל הקורלציה בין הקונטרסטים עולה ולכן הערך הקריטי $q_{1-\alpha,R}$ קטן:

$$V(c)=\frac{d+1}{d},\qquad \sqrt{V(c)}=\sqrt{\frac{d+1}{d}},\qquad \rho=\frac{1}{V(c)}=\frac{d}{d+1},\qquad c_\alpha(b)=b\cdot\sqrt{V(c)},\qquad \alpha=0.1$$

d	$V(c)$	$\sqrt{V(c)}$	ρ	$q_{1-\alpha,R}$	$c_\alpha(q_{1-\alpha,R})$	$CI(\psi^{(k)})$	CI width
1	2	1.4142	0.5	1.9164	2.7102	$\psi^{(k)}\in[\hat{\psi}^{(k)}\pm 2.7102\cdot\sigma]$	$5.4203\cdot\sigma$
2	1.5	1.2247	0.6667	1.8858	2.3096	$\psi^{(k)}\in[\hat{\psi}^{(k)}\pm 2.3096\cdot\sigma]$	$4.6191\cdot\sigma$
3	1.333	1.1547	0.75	1.8634	2.1516	$\psi^{(k)}\in[\hat{\psi}^{(k)}\pm 2.1516\cdot\sigma]$	$4.3033\cdot\sigma$
4	1.25	1.1180	0.8	1.8464	2.0643	$\psi^{(k)}\in[\hat{\psi}^{(k)}\pm 2.0643\cdot\sigma]$	$4.1286\cdot\sigma$
5	1.2	1.0954	0.8333	1.8329	2.0078	$\psi^{(k)}\in[\hat{\psi}^{(k)}\pm 2.0078\cdot\sigma]$	$4.0156\cdot\sigma$

קוד R:

```
d <- 1:5
vc <- (d + 1) / d
sqvc <- sqrt(vc)
rho <- 1 / vc
alpha <- 0.1
q <- c()
for(i in d){
  R <- matrix(c(1, rho[i], rho[i], 1), ncol = 2)
  q_crit <- qmvnorm(1 - alpha, tail = 'both.tails', corr = R)$quantile
  q <- c(q, q_crit)
}
c_alpha <- q * sqvc
```

בשיטת בונפרוני רווח הסמך הוא $\hat{\psi}(c)\pm s\sqrt{V(c^{(k)})}t^*_{N-I,1-\frac{\alpha}{2K}}$ ולכן הערך הקריטי מהצורה $\frac{c}{\sqrt{m}}$ יהיה נתון באופן $c=s\sqrt{\frac{d+1}{d}}t_{N-I,1-\frac{\alpha}{2K}}$ או במקרה של שונות ידועה $c=\sigma\sqrt{\frac{d+1}{d}}q_{1-\frac{\alpha}{2K}}$. כיוון שרמת הסמך הנדרשת לכל קונטרסט בנפרד גבוהה יותר $(q_{1-\frac{\alpha}{2K}}>q_{1-\frac{\alpha}{2}})$ אז הערך הקריטי יהיה גדול יותר.