מודלים סטטיסטיים ויישומיהם 52518 תשע"ח – תרגיל 12

1. נתון המודל (AB,C) עם $I=J=K=3$. הוכחתם בביתה:

$$(f_{rs.}-n\pi_{rs.})-(f_{rJ.}-n\pi_{rJ.})-(f_{Is.}-n\pi_{Is.})+(f_{IJ.}-n\pi_{IJ.})=0$$

נסכום את המשוואה הזו עבור $s=1,\dots,J-1$:

$$\sum_{s=1}^{J-1}\Big((f_{rs.}-n\pi_{rs.})-(f_{rJ.}-n\pi_{rJ.})-(f_{Is.}-n\pi_{Is.})+(f_{IJ.}-n\pi_{IJ.})\Big)=0$$

$$=\sum_{s=1}^{J-1}(f_{rs.}-n\pi_{rs.})-(J-1)(f_{rJ.}-n\pi_{rJ.})-\sum_{s=1}^{J-1}(f_{Is.}-n\pi_{Is.})+(J-1)(f_{IJ.}-n\pi_{IJ.})$$

$$=\sum_{s=1}^{J-1}(f_{rs.}-n\pi_{rs.})+(f_{rJ.}-n\pi_{rJ.})-(f_{rJ.}-n\pi_{rJ.})-(J-1)(f_{rJ.}-n\pi_{rJ.})$$

$$-\sum_{s=1}^{J-1}(f_{Is.}-n\pi_{Is.})+(J-1)(f_{IJ.}-n\pi_{IJ.})$$

$$=\underbrace{\sum_{s=1}^{J}(f_{rs.}-n\pi_{rs.})}_{=f_{r..}-n\pi_{r..}=0}-J(f_{rJ.}-n\pi_{rJ.})-\sum_{s=1}^{J-1}(f_{Is.}-n\pi_{Is.})+(J-1)(f_{IJ.}-n\pi_{IJ.})$$

$$=-J(f_{rJ.}-n\pi_{rJ.})-\sum_{s=1}^{J-1}(f_{Is.}-n\pi_{Is.})+(J-1)(f_{IJ.}-n\pi_{IJ.})$$

$$=-J(f_{rJ.}-n\pi_{rJ.})-\sum_{s=1}^{J-1}(f_{Is.}-n\pi_{Is.})-(f_{IJ.}-n\pi_{IJ.})+(f_{IJ.}-n\pi_{IJ.})$$

$$+(J-1)(f_{IJ.}-n\pi_{IJ.})=-J(f_{rJ.}-n\pi_{rJ.})-\underbrace{\sum_{s=1}^{J}(f_{Is.}-n\pi_{Is.})}_{=0}+J(f_{IJ.}-n\pi_{IJ.})$$

$$=J\Big((f_{IJ.}-n\pi_{IJ.})-(f_{rJ.}-n\pi_{rJ.})\Big)=0\rightarrow(f_{IJ.}-n\pi_{IJ.})-(f_{rJ.}-n\pi_{rJ.})=0$$

בעת נסכום שוב את המשוואה, עבור $r=1,\dots,I-1$:

$$(I-1)(f_{IJ.}-n\pi_{IJ.})-\sum_{r=1}^{I-1}(f_{rJ.}-n\pi_{rJ.})$$

$$=(I-1)(f_{IJ.}-n\pi_{IJ.})+(f_{IJ.}-n\pi_{IJ.})-(f_{IJ.}-n\pi_{IJ.})-\sum_{r=1}^{I-1}(f_{rJ.}-n\pi_{rJ.})$$

$$=I(f_{IJ.}-n\pi_{IJ.})-\underbrace{\sum_{r=1}^{I}(f_{rJ.}-n\pi_{rJ.})}_{=0}=I(f_{IJ.}-n\pi_{IJ.})=0\rightarrow f_{IJ.}-n\pi_{IJ.}=0\rightarrow\boxed{\hat{\pi}_{IJ.}=\frac{f_{IJ.}}{n}}$$

$$(f_{IJ.}-n\pi_{IJ.})=0\rightarrow(f_{IJ.}-n\pi_{IJ.})-(f_{rJ.}-n\pi_{rJ.})=-(f_{rJ.}-n\pi_{rJ.})=0\rightarrow\boxed{\hat{\pi}_{rJ.}=\frac{f_{rJ.}}{n}}$$

$$(f_{IJ.}-n\pi_{IJ.})=(f_{rJ.}-n\pi_{rJ.})=0\rightarrow(f_{rs.}-n\pi_{rs.})-(f_{rJ.}-n\pi_{rJ.})-(f_{Is.}-n\pi_{Is.})+(f_{IJ.}-n\pi_{IJ.})$$
$$=(f_{rs.}-n\pi_{rs.})-(f_{Is.}-n\pi_{Is.})=0$$

נסכום שוב את המשוואה, עבור $r=1,\dots,I-1$:

$$\sum_{r=1}^{I-1}(f_{rs.}-n\pi_{rs.})-(I-1)(f_{Is.}-n\pi_{Is.})$$

$$=\sum_{r=1}^{I-1}(f_{rs.}-n\pi_{rs.})+(f_{Is.}-n\pi_{Is.})-(f_{Is.}-n\pi_{Is.})-(I-1)(f_{Is.}-n\pi_{Is.})$$

$$=\underbrace{\sum_{r=1}^{I}(f_{rs.}-n\pi_{rs.})}_{=0}-I(f_{Is.}-n\pi_{Is.})=0\rightarrow f_{Is.}-n\pi_{Is.}=0\rightarrow \boxed{\hat{\pi}_{Is.}=\frac{f_{Is.}}{n}}$$

$$f_{Is.}-n\pi_{Is.}=0\rightarrow (f_{rs.}-n\pi_{rs.})-(f_{Is.}-n\pi_{Is.})=(f_{rs.}-n\pi_{rs.})=0\rightarrow \boxed{\hat{\pi}_{rs.}=\frac{f_{rs.}}{n}}$$

כלומר הוכחנו $\hat{\pi}_{rs.}=\frac{f_{rs.}}{n}$ לכל $r=1,\dots,I,\ s=1,\dots,J$.

2. נתון המודל (AB,C).

```
indat = read.table("ex12dat.txt")
names(indat) = c("Satisfaction","Sex","Age","count")

A = indat$Satisfaction
B = indat$Sex
C = indat$Age
f = indat$count

A1 = (A==1) - (A==3)
A2 = (A==2) - (A==3)
B1 = (B==1) - (B==2)
C1 = (C==1) - (C==2)
AB11 = A1*B1
AB21 = A2*B1

fit = glm(f ~ A1 + A2 + B1 + C1 + AB11 + AB21, family=poisson)
summary(fit)

######

n <- sum(indat$count)
indat$AB <- paste(indat$Satisfaction, indat$Sex)
prop_AB. <- aggregate(formula = count ~ AB, data = indat, FUN = sum)$count / n
prop_..C <- aggregate(formula = count ~ Age, data = indat, FUN = sum)$count / n
C <- cbind(1, A1, A2, B1, C1, AB11, AB21)
lambda.hat <- fit$coefficients
theta.hat <- C %*% lambda.hat
indat$pi.hat <- exp(theta.hat) / sum(exp(theta.hat))
pi.hat_AB. <-  aggregate(formula = pi.hat ~ AB, data = indat, FUN = sum)$V1
pi.hat_..C <-  aggregate(formula = pi.hat ~ Age, data = indat, FUN = sum)$V1
all.equal(prop_AB., pi.hat_AB.)
all.equal(prop_..C, pi.hat_..C)
```