מודלים סטטיסטיים ויישומיהם 52518 תשע"ח – תרגיל 11

להגשה עד 15.1.18 בשעה 23:55

1. במסגרת של מודלים לוג-לינאריים, הוכיחו כי המודל (AB,AC) גורר לכך ש-
$P(B=j, C=k|A=i) = P(B=j|A=i)P(C=k|A=i)$
כלומר ש-(B,C) ב"ת בהנתן A.

$$\theta_{i..} = \frac{1}{JK}\sum_{j,k}\theta_{ijk} = \frac{1}{JK}\sum_{j,k}\mu+\lambda_i^A+\lambda_j^B+\lambda_k^C+\lambda_{ij}^{AB}+\lambda_{ik}^{AC} = \mu+\lambda_i^A+\frac{1}{JK}\sum_{j,k}\lambda_j^B+\lambda_k^C+\lambda_{ij}^{AB}+\lambda_{ik}^{AC}$$

$$=\mu+\lambda_i^A+\frac{1}{JK}\left(\sum_j \lambda_j^B+\lambda_{ij}^{AB}+\sum_k \lambda_k^C+\lambda_{ik}^{AC}\right)$$

$$\rightarrow \pi_{i..} = e^{\theta_{i..}} = e^{\mu+\lambda_i^A+\frac{1}{JK}\left(\sum_j \lambda_j^B+\lambda_{ij}^{AB}+\sum_k \lambda_k^C+\lambda_{ik}^{AC}\right)} = e^{\mu+\lambda_i^A} e^{\frac{1}{JK}\sum_j \lambda_j^B+\lambda_{ij}^{AB}} e^{\frac{1}{JK}\sum_k \lambda_k^C+\lambda_{ik}^{AC}}$$

$$P(B=j,C=k|A=i) = \frac{\pi_{ijk}}{\pi_{i..}} = \frac{e^{\theta_{ijk}}}{e^{\theta_{i..}}} = \frac{e^{\mu+\lambda_i^A+\lambda_j^B+\lambda_k^C+\lambda_{ij}^{AB}+\lambda_{ik}^{AC}}}{e^{\mu+\lambda_i^A} e^{\frac{1}{JK}\sum_j \lambda_j^B+\lambda_{ij}^{AB}} e^{\frac{1}{JK}\sum_k \lambda_k^C+\lambda_{ik}^{AC}}}$$

$$= \frac{e^{\mu+\lambda_i^A+\lambda_j^B+\lambda_k^C+\lambda_{ij}^{AB}+\lambda_{ik}^{AC}} e^{\mu+\lambda_i^A} e^{\frac{1}{JK}\sum_j \lambda_j^B+\lambda_{ij}^{AB}} e^{\frac{1}{JK}\sum_k \lambda_k^C+\lambda_{ik}^{AC}}}{\left(e^{\mu+\lambda_i^A} e^{\frac{1}{JK}\sum_j \lambda_j^B+\lambda_{ij}^{AB}} e^{\frac{1}{JK}\sum_k \lambda_k^C+\lambda_{ik}^{AC}}\right)^2}$$

$$= \frac{e^{\mu+\lambda_i^A+\lambda_j^B+\lambda_{ij}^{AB}} e^{\lambda_k^C+\lambda_{ik}^{AC}} e^{\mu+\lambda_i^A} e^{\frac{1}{JK}\sum_j \lambda_j^B+\lambda_{ij}^{AB}} e^{\frac{1}{JK}\sum_k \lambda_k^C+\lambda_{ik}^{AC}}}{\big(P(A=i)\big)^2}$$

$$= \frac{e^{\mu+\lambda_i^A+\lambda_j^B+\lambda_{ij}^{AB}} e^{\mu+\lambda_i^A+\lambda_k^C+\lambda_{ik}^{AC}} e^{\frac{1}{JK}\sum_j \lambda_j^B+\lambda_{ij}^{AB}} e^{\frac{1}{JK}\sum_k \lambda_k^C+\lambda_{ik}^{AC}}}{\big(P(A=i)\big)^2}$$

$$= \frac{e^{\mu+\lambda_i^A+\lambda_j^B+\lambda_{ij}^{AB}} e^{\frac{1}{JK}\sum_k \lambda_k^C+\lambda_{ik}^{AC}} e^{\mu+\lambda_i^A+\lambda_k^C+\lambda_{ik}^{AC}} e^{\frac{1}{JK}\sum_j \lambda_j^B+\lambda_{ij}^{AB}}}{\big(P(A=i)\big)^2}$$

$$= \frac{e^{\mu+\lambda_i^A+\lambda_j^B+\lambda_{ij}^{AB}+\frac{1}{JK}\sum_k \lambda_k^C+\lambda_{ik}^{AC}} e^{\mu+\lambda_i^A+\lambda_k^C+\lambda_{ik}^{AC}+\frac{1}{JK}\sum_j \lambda_j^B+\lambda_{ij}^{AB}}}{\big(P(A=i)\big)^2} = \frac{P(A=i,B=j)P(A=i,C=k)}{\big(P(A=i)\big)^2}$$

$$= \frac{P(A=i,B=j)}{P(A=i)}\frac{P(A=i,C=k)}{P(A=i)} = P(B=j|A=i)P(C=k|A=i) \blacksquare$$

2. במסגרת של מודלים לוג-ליניאריים, נגדיר

$$\Psi_{ii'jj'}^{k}=\left(\frac{P(B=j'|A=i',C=k)}{P(B=j|A=i',C=k)}\right)\Big/\left(\frac{P(B=j'|A=i,C=k)}{P(B=j|A=i,C=k)}\right)$$

הוכיחו כי המודל (AB,AC,BC) גורר לכך ש- $\Psi_{ii'jj'}^{k}$ לא תלוי ב-k, ז"א מנת יחס הסיכויים של כל שני משתנים אינה תלויה בערכו של המשתנה השלישי.

נביט במנת יחס הסיכויים:

$$\psi_{ii',jj'}^{k}=\frac{\left(\frac{P(B=j'|A=i',C=k)}{P(B=j|A=i',C=k)}\right)}{\left(\frac{P(B=j'|A=i,C=k)}{P(B=j|A=i,C=k)}\right)}=\frac{\left(\frac{\left(\frac{P(A=i',B=j',C=k)}{P(A=i',C=k)}\right)}{\left(\frac{P(A=i',B=j,C=k)}{P(A=i',C=k)}\right)}\right)}{\left(\frac{\left(\frac{P(A=i,B=j',C=k)}{P(A=i,C=k)}\right)}{\left(\frac{P(A=i,B=j,C=k)}{P(A=i,C=k)}\right)}\right)}=\frac{\frac{P(A=i',B=j',C=k)}{P(A=i',B=j,C=k)}}{\frac{P(A=i,B=j',C=k)}{P(A=i,B=j,C=k)}}$$

$$=\frac{\frac{e^{\mu+\lambda_{i'}^{A}+\lambda_{j'}^{B}+\lambda_{k}^{C}+\lambda_{i'j'}^{AB}+\lambda_{i'k}^{AC}+\lambda_{j'k}^{BC}}}{e^{\mu+\lambda_{i'}^{A}+\lambda_{j}^{B}+\lambda_{k}^{C}+\lambda_{i'j}^{AB}+\lambda_{i'k}^{AC}+\lambda_{jk}^{BC}}}}{\frac{e^{\mu+\lambda_{i}^{A}+\lambda_{j'}^{B}+\lambda_{k}^{C}+\lambda_{ij'}^{AB}+\lambda_{ik}^{AC}+\lambda_{j'k}^{BC}}}{e^{\mu+\lambda_{i}^{A}+\lambda_{j}^{B}+\lambda_{k}^{C}+\lambda_{ij}^{AB}+\lambda_{ik}^{AC}+\lambda_{jk}^{BC}}}}=\frac{e^{\left(\lambda_{j'}^{B}-\lambda_{j}^{B}\right)+\left(\lambda_{i'j'}^{AB}-\lambda_{i'j}^{AB}\right)+\left(\lambda_{j'k}^{BC}-\lambda_{jk}^{BC}\right)}}{e^{\left(\lambda_{j'}^{B}-\lambda_{j}^{B}\right)+\left(\lambda_{ij'}^{AB}-\lambda_{ij}^{AB}\right)+\left(\lambda_{j'k}^{BC}-\lambda_{jk}^{BC}\right)}}=e^{\lambda_{i'j'}^{AB}+\lambda_{ij}^{AB}-\lambda_{i'j}^{AB}-\lambda_{ij'}^{AB}}$$

כנדרש, זהו ביטוי שאינו תלוי ב-k, כלומר מנת יחס הסיכויים של A,B אינה תלויה ב-C. נוכל להכליל זאת גם לשני זוגות המשתנים האחרים תחת המודל (AB,AC,BC).

3. הוכיחו את השוויון (עם הסימון שהוגדר בכיתה)

$$\lambda_{ijk}^{ABC}=\sum_{a=1}^{I-1}\sum_{b=1}^{J-1}\sum_{c=1}^{K-1}\phi_{ia}^{A}\phi_{jb}^{B}\phi_{kc}^{C}\lambda_{abc}^{ABC}$$

עבור $i=1,\dots,I,\ j=1,\dots,J,\ k=1,\dots,K$. שימו לב כי נדרש טיפול מיוחד כאשר $i=I$, $j=J$ או $k=K$.

הגדרנו את המשתנים הבאים:

$$\phi_{ia}^{A}=\begin{cases}1 & i=a\\ -1 & i=I\\ 0 & o.w\end{cases},\qquad \phi_{jb}^{B}=\begin{cases}1 & j=b\\ -1 & j=J\\ 0 & o.w\end{cases},\qquad \phi_{ck}^{C}=\begin{cases}1 & k=c\\ -1 & k=K\\ 0 & o.w\end{cases}$$

<u>עבור $i<I,j<J,k<K$:</u>

$\phi_{ia}^{A}\phi_{jb}^{B}\phi_{kc}^{C}=1$ כאשר $i=a,j=b,k=c$, אחרת $\phi_{ia}^{A}\phi_{jb}^{B}\phi_{kc}^{C}=0$. כל האברים בסכימה נופלים מלבד האבר של $i=a,j=b,k=c$ ומקבלים את השוויון.

<u>עבור $i=I,j<J,k<K$:</u>

$\phi_{Ia}^{A}=-1$ עבור כל a ולכן $\phi_{Ia}^{A}\phi_{jb}^{B}\phi_{kc}^{C}=-1$ כאשר $j=b,k=c$ ואחרת $\phi_{Ia}^{A}\phi_{jb}^{B}\phi_{kc}^{C}=0$. מתוך האילוץ $\sum_{a=1}^{I}\lambda_{ajk}^{ABC}=0$, השוויון המתקבל הוא $\lambda_{Ijk}^{ABC}=-\sum_{a=1}^{I-1}\lambda_{ajk}^{ABC}$:

$$\lambda_{Ijk}^{ABC}=-\sum_{a=1}^{I-1}\lambda_{ajk}^{ABC}=\sum_{a=1}^{I-1}\phi_{Ia}^{A}\lambda_{ajk}^{ABC}=\sum_{a=1}^{I-1}\phi_{Ia}^{A}\phi_{jb}^{B}\lambda_{ajk}^{ABC}+\underbrace{\sum_{j\neq b}\phi_{Ia}^{A}\phi_{jb}^{B}\lambda_{abk}^{ABC}}_{=0}=\sum_{a=1}^{I-1}\sum_{b=1}^{J-1}\phi_{Ia}^{A}\phi_{jb}^{B}\lambda_{abk}^{ABC}$$

$$=\sum_{a=1}^{I-1}\sum_{b=1}^{J-1}\phi_{Ia}^{A}\phi_{jb}^{B}\phi_{kc}^{C}\lambda_{abk}^{ABC}+\underbrace{\sum_{k\neq c}\phi_{Ia}^{A}\phi_{jb}^{B}\phi_{kc}^{C}\lambda_{abk}^{ABC}}_{=0}=\sum_{a=1}^{I-1}\sum_{b=1}^{J-1}\sum_{c=1}^{K-1}\phi_{Ia}^{A}\phi_{jb}^{B}\phi_{kc}^{C}\lambda_{abc}^{ABC}$$

כנדרש. באופן דומה נקבל תוצאות עבור <u>$i<I,j=J,k<K$</u> ועבור <u>$i<I,j<J,k=K$</u>.

<u>עבור $i=I,j=J,k<K$:</u>

$\phi_{Ia}^{A}=-1$ עבור כל a ו-$\phi_{Jb}^{B}=-1$ עבור כל b, לכן $\phi_{Ia}^{A}\phi_{Jb}^{B}\phi_{kc}^{C}=1$ כאשר $k=c$ ואחרת $\phi_{Ia}^{A}\phi_{Jb}^{B}\phi_{kc}^{C}=0$. יש לנו את האילוצים $\sum_{a=1}^{I}\lambda_{ajk}^{ABC}=0,\sum_{b=1}^{J}\lambda_{ibk}^{ABC}=0$ מהם נקבל:

$$\sum_{a=1}^{I}\sum_{b=1}^{J}\lambda_{abk}^{ABC}=0=\sum_{a=1}^{I-1}\sum_{b=1}^{J-1}\lambda_{abk}^{ABC}+\sum_{a=1}^{I-1}\lambda_{aJk}^{ABC}+\sum_{b=1}^{J-1}\lambda_{Ibk}^{ABC}+\lambda_{IJk}^{ABC}$$

$$\to\lambda_{IJk}^{ABC}=-\left(\sum_{a=1}^{I-1}\sum_{b=1}^{J-1}\lambda_{abk}^{ABC}+\sum_{a=1}^{I-1}\lambda_{aJk}^{ABC}+\sum_{b=1}^{J-1}\lambda_{Ibk}^{ABC}\right)$$

$$=-\left(-\sum_{a=1}^{I-1}\sum_{b=1}^{J-1}\lambda_{abk}^{ABC}+\sum_{a=1}^{I-1}\sum_{b=1}^{J-1}\lambda_{abk}^{ABC}+\sum_{a=1}^{I-1}\sum_{b=1}^{J-1}\lambda_{abk}^{ABC}+\sum_{a=1}^{I-1}\lambda_{aJk}^{ABC}+\sum_{b=1}^{J-1}\lambda_{Ibk}^{ABC}\right)$$

$$=-\left(-\sum_{a=1}^{I-1}\sum_{b=1}^{J-1}\lambda_{abk}^{ABC}+\sum_{a=1}^{I}\sum_{b=1}^{J-1}\lambda_{abk}^{ABC}+\sum_{a=1}^{I-1}\sum_{b=1}^{J}\lambda_{abk}^{ABC}\right)$$

$$=-\left(-\sum_{a=1}^{I-1}\sum_{b=1}^{J-1}\lambda_{abk}^{ABC}+\sum_{b=1}^{J-1}\underbrace{\sum_{a=1}^{I}\lambda_{abk}^{ABC}}_{=0}+\sum_{a=1}^{I-1}\underbrace{\sum_{b=1}^{J}\lambda_{abk}^{ABC}}_{=0}\right)\to\boxed{\lambda_{IJk}^{ABC}=\sum_{a=1}^{I-1}\sum_{b=1}^{J-1}\lambda_{abk}^{ABC}}$$

$$\lambda_{IJk}^{ABC}=\sum_{a=1}^{I-1}\sum_{b=1}^{J-1}\lambda_{abk}^{ABC}=\sum_{a=1}^{I-1}\sum_{b=1}^{J-1}\phi_{Ia}^{A}\phi_{Jb}^{B}\lambda_{abk}^{ABC}=\sum_{a=1}^{I-1}\sum_{b=1}^{J-1}\phi_{Ia}^{A}\phi_{Jb}^{B}\phi_{kc}^{C}\lambda_{abk}^{ABC}+\underbrace{\sum_{k\neq c}\phi_{Ia}^{A}\phi_{Jb}^{B}\phi_{kc}^{C}\lambda_{abk}^{ABC}}_{=0}$$

$$=\sum_{a=1}^{I-1}\sum_{b=1}^{J-1}\sum_{c=1}^{K-1}\phi_{ia}^{A}\phi_{jb}^{B}\phi_{kc}^{C}\lambda_{abc}^{ABC}$$

כנדרש. באופן דומה נקבל תוצאות עבור <u>$i=I,j<J,k=K$</u> ועבור <u>$i=I,j=J,k<K$</u>.

עבור $i = I, j = J, k = K$:

$\phi_{Ia}^{A} = -1$ עבור כל a, $\phi_{Jb}^{B} = -1$ עבור כל b ו-$\phi_{Kc}^{C} = -1$ עבור כל c, לכן $\phi_{Ia}^{A}\phi_{jb}^{B}\phi_{Kc}^{C} = -1$. כתוצאה מכך, נקבל כי $\lambda_{IJK}^{ABC} = -\sum_{a=1}^{I-1}\sum_{b=1}^{J-1}\sum_{c=1}^{K-1}\lambda_{abc}^{ABC}$.

ממסקנות המקרה הקודם נקבל כי מתקיים

$$\sum_{a=1}^{I-1}\sum_{b=1}^{J-1}\sum_{c=1}^{K}\phi_{ia}^{A}\phi_{jb}^{B}\phi_{kc}^{C}\lambda_{abc}^{ABC} = 0$$

לכן

$$\sum_{a=1}^{I-1}\sum_{b=1}^{J-1}\sum_{c=1}^{K}\phi_{ia}^{A}\phi_{jb}^{B}\phi_{kc}^{C}\lambda_{abc}^{ABC} = \sum_{a=1}^{I-1}\sum_{b=1}^{J-1}\sum_{c=1}^{K-1}\phi_{ia}^{A}\phi_{jb}^{B}\phi_{kc}^{C}\lambda_{abc}^{ABC} + \phi_{Ia}^{A}\phi_{jb}^{B}\phi_{Kc}^{C}\lambda_{IJK}^{ABC} = 0$$

$$\rightarrow \underbrace{-\phi_{Ia}^{A}\phi_{jb}^{B}\phi_{Kc}^{C}}_{=-1}\lambda_{IJK}^{ABC} = \sum_{a=1}^{I-1}\sum_{b=1}^{J-1}\sum_{c=1}^{K-1}\phi_{ia}^{A}\phi_{jb}^{B}\phi_{kc}^{C}\lambda_{abc}^{ABC} \rightarrow \lambda_{IJK}^{ABC} = \sum_{a=1}^{I-1}\sum_{b=1}^{J-1}\sum_{c=1}^{K-1}\phi_{ia}^{A}\phi_{jb}^{B}\phi_{kc}^{C}\lambda_{abc}^{ABC}$$

וגמרנו.

4. בקובץ self-esteem-dat.txt מצויים נתונים ממחקר על הערכה עצמית בקרב סטודנטים באוניברסיטה. נסמן: A=sex, B=gpa, C=esteem. כתבו תוכנית לחישוב אומדי נראות המרבית עבור המודל הלוג-ליניארי (AB,AC,BC) והריצו אותה על הנתונים.

```
#read data
indat = read.table('self-esteem-dat.txt',header=T)
p = indat$count/sum(indat$count)
#set up z matrix
a = c(rep(1,4),rep(-1,4))
b = rep(c(1,1,-1,-1),2)
c = rep(c(1,-1),4)
ab = a*b
ac = a*c
bc = b*c
z = cbind(a,b,c,ab,ac,bc)
#do the iterations and print out the result
max.iter = 100
tol = 1e-6
diff = 99
tau = rep(0,6)
tauval = tau
itr = 0
while ((diff > tol) & (itr < max.iter))}
itr = itr + 1
xi = z %*% tau
exi = exp(xi)
pi = exi/sum(exi)
w = diag(pi[,1]) - pi %*% t(pi)
h = solve(t(z) %*% w %*% z) %*% t(z)
y = w %*% xi + (p-pi)
tau.old = tau
tau = h %*% y
diff = max(abs(tau-tau.old))
tauval = rbind(tauval,t(tau))
{
iter = 0:itr
result = cbind(iter,tauval)
print(result)
```