

א. נשתמש בפרמטריזציה  $Y = W\beta + \epsilon$ , תחת המודל המלא מתקיים:

$$W\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \gamma \end{pmatrix}$$

ותחת המודל החלקי מתקיים:

$$W^0\beta^0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -3 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \gamma \end{pmatrix}$$

ב. האומדים יימצאו לפי הנוסחה  $\hat{\beta} = (W^T W)^{-1} W^T Y$ . עבור המודל המלא:

$$W^T W = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \rightarrow (W^T W)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

$$W^T Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 16 \\ 22 \\ 31 \\ 27 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 \\ 83 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (W^T W)^{-1} W^T Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 55 \\ 83 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{18}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mu}_1 \\ \hat{\mu}_2 \\ \hat{\gamma} \end{pmatrix}$$

תחת השערת האפס:

$$(W^{0T} W^0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \rightarrow (W^{0T} W^0)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

$$W^{0T} Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 16 \\ 22 \\ 31 \\ 27 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 138 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta}^0 = (W^{0T} W^0)^{-1} W^{0T} Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 138 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{3} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mu}_1^0 \\ \hat{\gamma}^0 \end{pmatrix}$$

ג. נמצא את וקטורי התחזיות,  $\hat{Y} = W\hat{\beta}$ :

$$\hat{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18\frac{1}{3} \\ 27\frac{2}{3} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18\frac{1}{3} - \frac{6}{4} \\ 18\frac{1}{3} - \frac{3}{4} \\ 18\frac{1}{3} + \frac{9}{4} \\ 27\frac{2}{3} - \frac{3}{4} \\ 27\frac{2}{3} - \frac{3}{4} \\ 27\frac{2}{3} + \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16\frac{5}{6} \\ 17\frac{7}{12} \\ 20\frac{7}{12} \\ 26\frac{11}{12} \\ 26\frac{11}{12} \\ 28\frac{5}{12} \end{pmatrix}$$

$$\hat{Y}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -3 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 23 \\ 3 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 - \frac{6}{4} \\ 23 - \frac{3}{4} \\ 23 + \frac{9}{4} \\ 23 + \frac{3}{4} \\ 23 - \frac{3}{4} \\ 23 + \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21\frac{1}{2} \\ 22\frac{1}{4} \\ 25\frac{1}{4} \\ 22\frac{1}{4} \\ 23\frac{3}{4} \\ 23 \end{pmatrix}$$

$$Y - \hat{Y} = \begin{pmatrix} 17 - 16\frac{5}{6} \\ 16 - 17\frac{7}{12} \\ 22 - 20\frac{7}{12} \\ 31 - 26\frac{11}{12} \\ 27 - 28\frac{5}{12} \\ 25 - 27\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -1\frac{7}{12} \\ 1\frac{5}{12} \\ 4\frac{1}{12} \\ -1\frac{5}{12} \\ -2\frac{2}{3} \end{pmatrix} = e \rightarrow \|Y - \hat{Y}\|^2 = \sum_{i=1}^6 e_i^2 = 30\frac{1}{3}$$

$$\hat{Y} - \hat{Y}^0 = \begin{pmatrix} 16\frac{5}{6} - 21\frac{1}{4} \\ 17\frac{7}{12} - 22\frac{1}{4} \\ 20\frac{7}{12} - 25\frac{1}{4} \\ 26\frac{11}{12} - 22\frac{1}{4} \\ 28\frac{5}{12} - 23\frac{3}{4} \\ 27\frac{2}{3} - 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\frac{2}{3} \\ -4\frac{2}{3} \\ -4\frac{2}{3} \\ 4\frac{2}{3} \\ 4\frac{2}{3} \\ 4\frac{2}{3} \end{pmatrix} = e_0 \rightarrow \|\hat{Y} - \hat{Y}^0\|^2 = \sum_{i=1}^6 e_{0i}^2 = 130\frac{2}{3}$$

יש פרמטר אחד שמבדיל בין המודלים, סה"כ דרגות החופש של המודל המלא הן 3 ולכן סטטיסטי F המתקבל הוא:

$$F = \frac{\frac{130\frac{2}{3}}{1}}{\frac{30\frac{1}{3}}{3}} = 12.9231 \sim F_{1,3}$$

## שאלה 2

לכל אחד מהמשתנים יש שתי רמות, לכן נקבל:

$$\lambda_2^A = -\lambda_1^A, \quad \lambda_2^B = -\lambda_1^B, \quad \lambda_{12}^{AB} = \lambda_{21}^{AB} = -\lambda_{22}^{AB} = -\lambda_{11}^{AB}$$

$$\theta_{11} = \log(\pi_{11}) = \bar{\theta}_{..} + \lambda_1^A + \lambda_1^B + \lambda_{11}^{AB} \rightarrow \boxed{\lambda_{11}^{AB} = \theta_{11} - \bar{\theta}_{..} - \lambda_1^A - \lambda_1^B}$$

$$\theta_{12} = \log(\pi_{12}) = \bar{\theta}_{..} + \lambda_1^A + \lambda_2^B + \lambda_{12}^{AB} = \bar{\theta}_{..} + \lambda_1^A - \lambda_1^B - \lambda_{11}^{AB} \rightarrow \boxed{\lambda_{11}^{AB} = \bar{\theta}_{..} + \lambda_1^A - \lambda_1^B - \theta_{12}}$$

$$\theta_{21} = \log(\pi_{21}) = \bar{\theta}_{..} + \lambda_2^A + \lambda_1^B + \lambda_{21}^{AB} = \bar{\theta}_{..} - \lambda_1^A + \lambda_1^B - \lambda_{11}^{AB} \rightarrow \boxed{\lambda_{11}^{AB} = \bar{\theta}_{..} - \lambda_1^A + \lambda_1^B - \theta_{21}}$$

$$\theta_{22} = \log(\pi_{22}) = \bar{\theta}_{..} + \lambda_2^A + \lambda_2^B + \lambda_{22}^{AB} = \bar{\theta}_{..} - \lambda_1^A - \lambda_1^B + \lambda_{11}^{AB} \rightarrow \boxed{\lambda_{11}^{AB} = \theta_{22} - \bar{\theta}_{..} + \lambda_1^A + \lambda_1^B}$$

נסכם על ארבע המשוואות ונקבל:

$$\begin{aligned} 4 \cdot \lambda_{11}^{AB} &= \theta_{11} - \theta_{12} - \theta_{21} + \theta_{22} = \log(\pi_{11}) - \log(\pi_{12}) - \log(\pi_{21}) + \log(\pi_{22}) = \log\left(\frac{\pi_{11}}{\pi_{12}}\right) + \log\left(\frac{\pi_{22}}{\pi_{21}}\right) \\ &= \log\left(\frac{\pi_{11}\pi_{22}}{\pi_{12}\pi_{21}}\right) \rightarrow \lambda_{11}^{AB} = \frac{1}{4} \log\left(\frac{\pi_{11}\pi_{22}}{\pi_{12}\pi_{21}}\right) \end{aligned}$$

## שאלה 3

$$P(Y = 1|X = x) = F(\beta_0 + \beta_1 x) = 1 - e^{-e^{\beta_0 + \beta_1 x}}$$

נשים לב כי המאורעות ב"ת עבור ערכי x השונים, לכן הנראות תהיה מכפלה של 3 פונקציות נראות בינומיות:

$$\begin{aligned} L &= \binom{100}{30} P(Y = 1|X = 0)^{30} P(Y = 0|X = 0)^{70} \\ &\quad \cdot \binom{100}{60} P(Y = 1|X = 1)^{60} P(Y = 0|X = 1)^{40} \binom{100}{85} P(Y = 1|X = 2)^{85} P(Y = 0|X = 2)^{15} \\ &= \binom{100}{30} (1 - e^{-e^{\beta_0}})^{30} (e^{-e^{\beta_0}})^{70} \cdot \binom{100}{60} (1 - e^{-e^{\beta_0 + \beta_1}})^{60} (e^{-e^{\beta_0 + \beta_1}})^{40} \binom{100}{85} (1 - e^{-e^{\beta_0 + 2\beta_1}})^{85} (e^{-e^{\beta_0 + 2\beta_1}})^{15} \\ l &= \log\left(\binom{100}{30}\right) + \log\left(\binom{100}{60}\right) + \log\left(\binom{100}{85}\right) + 30 \log(1 - e^{-e^{\beta_0}}) + 70 \log(e^{-e^{\beta_0}}) + 60 \log(1 - e^{-e^{\beta_0 + \beta_1}}) \\ &\quad + 40 \log(e^{-e^{\beta_0 + \beta_1}}) + 85 \log(1 - e^{-e^{\beta_0 + 2\beta_1}}) + 15 \log(e^{-e^{\beta_0 + 2\beta_1}}) \\ &= \log\left(\binom{100}{30}\right) + \log\left(\binom{100}{60}\right) + \log\left(\binom{100}{85}\right) + 30 \log(1 - e^{-e^{\beta_0}}) - 70e^{\beta_0} + 60 \log(1 - e^{-e^{\beta_0 + \beta_1}}) - \\ &\quad 40e^{\beta_0 + \beta_1} + 85 \log(1 - e^{-e^{\beta_0 + 2\beta_1}}) - 15e^{\beta_0 + 2\beta_1} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{du} (\log(1 - e^{-e^u})) = \frac{1}{1 - e^{-e^u}} \cdot \frac{d}{du} (1 - e^{-e^u}) = \frac{1}{1 - e^{-e^u}} \cdot e^u e^{-e^u} = \frac{e^{u - e^u}}{1 - e^{-e^u}} = \frac{e^{u - e^u}}{1 - e^{-e^u}} \cdot \frac{e^{e^u}}{e^{e^u}} = \frac{e^u}{e^{e^u} - 1}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \beta_0} = 30 \frac{e^{\beta_0}}{e^{e^{\beta_0}} - 1} - 70e^{\beta_0} + 60 \frac{e^{\beta_0 + \beta_1}}{e^{e^{\beta_0 + \beta_1}} - 1} - 40e^{\beta_0 + \beta_1} + 85 \frac{e^{\beta_0 + 2\beta_1}}{e^{e^{\beta_0 + 2\beta_1}} - 1} - 15e^{\beta_0 + 2\beta_1} = 0$$

$$\rightarrow e^{\beta_0} \left( \frac{30}{e^{e^{\beta_0}} - 1} - 70 + \frac{60e^{\beta_1}}{e^{e^{\beta_0 + \beta_1}} - 1} - 40e^{\beta_1} + \frac{85e^{2\beta_1}}{e^{e^{\beta_0 + 2\beta_1}} - 1} - 15e^{2\beta_1} \right) = 0$$

$$\frac{\partial l}{\partial \beta_1} = 60 \frac{e^{\beta_0 + \beta_1}}{e^{e^{\beta_0 + \beta_1}} - 1} - 40e^{\beta_0 + \beta_1} + 85 \frac{2 \cdot e^{\beta_0 + 2\beta_1}}{e^{e^{\beta_0 + 2\beta_1}} - 1} - 15 \cdot 2 \cdot e^{\beta_0 + 2\beta_1} = 0$$

$$\rightarrow e^{\beta_0} \left( 60 \frac{e^{\beta_1}}{e^{e^{\beta_0 + \beta_1}} - 1} - 40e^{\beta_1} + 170 \frac{e^{2\beta_1}}{e^{e^{\beta_0 + 2\beta_1}} - 1} - 30e^{2\beta_1} \right) = 0$$

אלו המשוואות שצריך לפתור. אם נציב את הערכים  $\hat{\beta}_0^{(0)} = -0.973$ ,  $\hat{\beta}_1^{(0)} = 0.8206$  נקבל כי הביטויים בצד השמאלי של המשוואות הללו מתאפסים.

#### שאלה 4

$$Y = X\eta + \epsilon$$

$$\alpha_3 = -\alpha_1 - \alpha_2, \quad \beta_2 = -\beta_1, \quad \gamma_{12} = -\gamma_{11}, \quad \gamma_{22} = -\gamma_{21}, \quad \gamma_{31} = -\gamma_{11} - \gamma_{21}, \quad \gamma_{32} = \gamma_{11} + \gamma_{22}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_{111} \\ y_{112} \\ y_{113} \\ y_{121} \\ y_{122} \\ y_{123} \\ y_{211} \\ y_{212} \\ y_{213} \\ y_{221} \\ y_{222} \\ y_{223} \\ y_{311} \\ y_{312} \\ y_{313} \\ y_{321} \\ y_{322} \\ y_{323} \end{pmatrix}}_Y = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_X \underbrace{\begin{pmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \end{pmatrix}}_{\eta} + \underbrace{\begin{pmatrix} \epsilon_{111} \\ \epsilon_{112} \\ \epsilon_{113} \\ \epsilon_{121} \\ \epsilon_{122} \\ \epsilon_{123} \\ \epsilon_{211} \\ \epsilon_{212} \\ \epsilon_{213} \\ \epsilon_{221} \\ \epsilon_{222} \\ \epsilon_{223} \\ \epsilon_{311} \\ \epsilon_{312} \\ \epsilon_{313} \\ \epsilon_{321} \\ \epsilon_{322} \\ \epsilon_{323} \end{pmatrix}}_{\epsilon}$$

ב. במודל ANOVA דו-כווני' חוסר אינטראקציה הינו מצב בו ההפרש בין שתי עמודות קבוע, ללא תלות בשורה עליה מסתכלים (ובהתאם גם ההפרש בין שתי שורות ללא תלות בעמודה). נתונים הממוצעים להלן:

$\mu_{ij}$	$j = 1$	$j = 2$
$i = 1$	1	4
$i = 2$	3	?
$i = 3$	8	?

בשורה הראשונה ההפרש בין העמודות הוא 3 ולכן צריך להתקיים  $\mu_{22} - \mu_{21} = 3 \rightarrow \mu_{22} = 3 + \mu_{21} = 3 + 3 = 6$

הממוצעים יהיו:

$\mu_{ij}$	$j = 1$	$j = 2$
$i = 1$	1	4
$i = 2$	3	6
$i = 3$	8	11

וניתן לראות כי ההפרשים קבועים כנדרש.

#### שאלה 5

יש לנו  $\binom{15}{2} = 105$  תוצאות אפשריות במועד א', סכום הדרגות של ציוני תלמידי סטטיסטיקה הוא  $R = 15 + 12 = 27$ .

נחשב כמה אופנים יש לקבלת סכום דרגות כזה או גבוה יותר:

$$R = 27: (12,15), (13,14)$$

$$R = 28: (13,15)$$

$$R = 29: (14,15)$$

ולכן ערך ה-p-value יהיה  $\frac{4}{105} = 0.0381$ , כלומר עבור רמת מובהקות חד-צדדית גדולה או שווה ל-0.0381 נדחה את השערת האפס (לפיה אין הבדל בין ציוני תלמידי סטטיסטיקה ותלמידי כלכלה), עבור רמת מובהקות קטנה מ-0.0381 לא נדחה את השערת האפס.