מודלים סטטיסטיים ויישומיהם 52518 תשע"ח – תרגיל 7

להגשה עד 18.12.17 בשעה 23:55

1. הוכיחו כי בANOVA דו-כווני מאוזן מתקיים השוויון

$$SST = SSA + SSB + SSAB + SSE$$

כאשר

$$SSA = Jn\sum_{i=1}^{I}(\bar{Y}_{i..}-\bar{Y}_{...})^2\,,\qquad SSB = In\sum_{j=1}^{J}(\bar{Y}_{.j.}-\bar{Y}_{...})^2\,,\qquad SSAB = n\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(\bar{Y}_{ij.}-\bar{Y}_{i..}-\bar{Y}_{.j.}+\bar{Y}_{...})^2\,,$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n}(Y_{ijk}-\bar{Y}_{ij.})^2$$

$$SSA = Jn\sum_{i=1}^{I}(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})^2 = \sum_{i=1}^{I}Jn(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})^2 = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}n(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})^2 = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})^2$$

$$SSB = In\sum_{j=1}^{J}(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})^2 = I\sum_{j=1}^{J}n(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})^2 = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}n(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})^2 = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})^2$$

$$SSAB = n\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{...})^2 = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{...})^2$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk}-\bar{y}_{ij.})^2$$

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})^2 + \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})^2 + \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{...})^2 + \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk}-\bar{y}_{ij.})^2$$
$$= SSA + SSB + SSAB + SSE =$$
$$= \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n}\left[(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})^2 + (\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})^2 + (\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{...})^2 + (y_{ijk}-\bar{y}_{ij.})^2\right]$$

נשים לב כי מתקיים מאילוצי המודל:

$$0 = \sum_{i=1}^{I}(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...}) = \sum_{j=1}^{J}(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...}) = \sum_{i=1}^{I}(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{...}) = \sum_{j=1}^{J}(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{...})$$
$$= \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk}-\bar{y}_{ij.}) = 0$$

ולכן גם מתקיים:

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...}) = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...}) = 0$$

באותו אופן מתקיים גם:

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{...}) = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n}\left((\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{...})\right) = 0$$

וגם:

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk}-\bar{y}_{ij.}) = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n}\left((\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{...}) + (y_{ijk}-\bar{y}_{ij.})\right) = 0$$

לכן נוכל לרשום:

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n}\left[(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})^2+(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})^2+(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{...})^2+(y_{ijk}-\bar{y}_{ij.})^2\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n}\Bigg[(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})^2+(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})^2+2\underbrace{(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})}_{\sum\ =0}+(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{...})^2$$
$$+(y_{ijk}-\bar{y}_{ij.})^2\Bigg]$$

$$=\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n}\left[\left((\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})+(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})\right)^2+(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{...})^2+(y_{ijk}-\bar{y}_{ij.})^2\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n}\Bigg[\left((\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})+(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})\right)^2+(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{...})^2$$
$$+2\underbrace{\left((\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})+(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})\right)(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{...})}_{\sum\ =0}+(y_{ijk}-\bar{y}_{ij.})^2\Bigg]$$

$$=\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n}\left[\left((\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})+(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})+(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{...})\right)^2+(y_{ijk}-\bar{y}_{ij.})^2\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n}\Bigg[\left((\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})+(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})+(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{...})\right)^2+(y_{ijk}-\bar{y}_{ij.})^2$$
$$+2\underbrace{\left((\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})+(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})+(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{...})+(y_{ijk}-\bar{y}_{ij.})\right)}_{\sum\ =0}\Bigg]$$

$$=\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n}\left[\left((\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})+(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})+(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{...})+(y_{ijk}-\bar{y}_{ij.})\right)^2\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n}\left[\left((\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})+(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})+(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{...})+(y_{ijk}-\bar{y}_{ij.})\right)^2\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n}\Bigg[\Big((\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})+(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})+\left((\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{...})-(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})-(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})\right)$$
$$+(y_{ijk}-\bar{y}_{ij.})\Big)^2\Bigg]=\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n}\left[\left((\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{...})+(y_{ijk}-\bar{y}_{ij.})\right)^2\right]=\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n}\left[(y_{ijk}-\bar{y}_{...})^2\right]=SST$$

2. מצורף קובץ נתונים בשם antwo.dat מניסוי עם שני גורמים – גורם A בעל 3 רמות וגורם B בעל 2 רמות.

א. נסחו את המודל המלא של ANOVA דו-כווני עם אינטראקציה במודל רגרסיה $Y=X\eta+\epsilon$ כפי שהוצג בכתה, כאשר $\eta=(\mu,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\gamma_{11},\gamma_{21})^T$. השתמשו במשקלות אחידים $\pi_i=\frac{1}{I},\tau_j=\frac{1}{J}$.

ב. כתבו פונקציה ב-R להרצת מודל הרגרסיה הנ"ל. הריצו את המודל על נתוני הקובץ וחשבו את $SSA,SSB,SSAB,SSE$ במודל המלא, כאשר

$$SSA=SSE(\mu,\beta,\gamma)-SSE(\mu,\alpha,\beta,\gamma)$$
$$SSB=SSE(\mu,\alpha,\gamma)-SSE(\mu,\alpha,\beta,\gamma)$$
$$SSAB=SSE(\mu,\alpha,\beta)-SSE(\mu,\alpha,\beta,\gamma)$$
$$SSE=SSE(\mu,\alpha,\beta,\gamma)$$

ג. חשבו את SSA,SSB,SSE במודל ללא אינטראקציה.

ד. חזרו על השאלה עם המשקלות הבאים:

$$\pi_1=0.5,\pi_2=0.3,\pi_3=0.2,\tau_1=0.6,\tau_2=0.4$$

השוו לסעיפים הקודמים. אילו קשרים קיימים ומדוע?

ראינו בכתה $\gamma_{iJ} = -\sum_{j=1}^{J-1}\frac{\tau_j\gamma_{ij}}{\tau_J}, \gamma_{Ij} = -\sum_{i=1}^{I-1}\frac{\pi_i\gamma_{iJ}}{\pi_I}, \beta_J = -\sum_{j=1}^{J-1}\frac{\tau_j\beta_j}{\tau_J}, \alpha_I = -\sum_{i=1}^{I-1}\frac{\pi_i\alpha_i}{\pi_I}$ לכן נוכל לכתוב אותם במטריצה הכללית X. עבור הנתונים הבאים

i\j	1	2	$n_{i.}$
1	3	2	5
2	3	2	5
3	3	4	7
$n_{.j}$	9	8	17

המשקלות תהיינה:

$$\alpha_3 = -\frac{\pi_1}{\pi_3}\alpha_1 - \frac{\pi_2}{\pi_3}\alpha_2$$

$$\beta_2 = -\frac{\tau_1}{\tau_2}\beta_1$$

$$\gamma_{3j} = -\frac{\pi_1}{\pi_3}\gamma_{1j} - \frac{\pi_2}{\pi_3}\gamma_{2j} \to \gamma_{3j} = -\frac{\pi_1}{\pi_3}\gamma_{11} - \frac{\pi_2}{\pi_3}\gamma_{21}$$

$$\gamma_{i2} = -\frac{\tau_1}{\tau_2}\gamma_{i1} \to \gamma_{12} = -\frac{\tau_1}{\tau_2}\gamma_{11}, \gamma_{22} = -\frac{\tau_1}{\tau_2}\gamma_{21}, \gamma_{32} = \frac{\pi_1}{\pi_3}\frac{\tau_1}{\tau_2}\gamma_{11} + \frac{\pi_2}{\pi_3}\frac{\tau_1}{\tau_2}\gamma_{21}$$

ותתקבל המטריצה X באופן:

$$y = \begin{bmatrix} y_{111} \\ y_{112} \\ y_{113} \\ y_{121} \\ y_{122} \\ y_{211} \\ y_{212} \\ y_{213} \\ y_{221} \\ y_{222} \\ y_{311} \\ y_{312} \\ y_{313} \\ y_{321} \\ y_{322} \\ y_{323} \\ y_{324} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -\frac{\tau_1}{\tau_2} & -\frac{\tau_1}{\tau_2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -\frac{\tau_1}{\tau_2} & -\frac{\tau_1}{\tau_2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -\frac{\tau_1}{\tau_2} & 0 & -\frac{\tau_1}{\tau_2} \\ 1 & 0 & 1 & -\frac{\tau_1}{\tau_2} & 0 & -\frac{\tau_1}{\tau_2} \\ 1 & -\frac{\pi_1}{\pi_3} & -\frac{\pi_2}{\pi_3} & 1 & -\frac{\pi_1}{\pi_3} & -\frac{\pi_2}{\pi_3} \\ 1 & -\frac{\pi_1}{\pi_3} & -\frac{\pi_2}{\pi_3} & 1 & -\frac{\pi_1}{\pi_3} & -\frac{\pi_2}{\pi_3} \\ 1 & -\frac{\pi_1}{\pi_3} & -\frac{\pi_2}{\pi_3} & 1 & -\frac{\pi_1}{\pi_3} & -\frac{\pi_2}{\pi_3} \\ 1 & -\frac{\pi_1}{\pi_3} & -\frac{\pi_2}{\pi_3} & -\frac{\tau_1}{\tau_2} & \frac{\pi_1\tau_1}{\pi_3\tau_2} & \frac{\pi_2\tau_1}{\pi_3\tau_2} \\ 1 & -\frac{\pi_1}{\pi_3} & -\frac{\pi_2}{\pi_3} & -\frac{\tau_1}{\tau_2} & \frac{\pi_1\tau_1}{\pi_3\tau_2} & \frac{\pi_2\tau_1}{\pi_3\tau_2} \\ 1 & -\frac{\pi_1}{\pi_3} & -\frac{\pi_2}{\pi_3} & -\frac{\tau_1}{\tau_2} & \frac{\pi_1\tau_1}{\pi_3\tau_2} & \frac{\pi_2\tau_1}{\pi_3\tau_2} \\ 1 & -\frac{\pi_1}{\pi_3} & -\frac{\pi_2}{\pi_3} & -\frac{\tau_1}{\tau_2} & \frac{\pi_1\tau_1}{\pi_3\tau_2} & \frac{\pi_2\tau_1}{\pi_3\tau_2} \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \end{bmatrix}}_{\eta} + \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon_{111} \\ \epsilon_{112} \\ \epsilon_{113} \\ \epsilon_{121} \\ \epsilon_{122} \\ \epsilon_{211} \\ \epsilon_{212} \\ \epsilon_{213} \\ \epsilon_{221} \\ \epsilon_{222} \\ \epsilon_{311} \\ \epsilon_{312} \\ \epsilon_{313} \\ \epsilon_{321} \\ \epsilon_{322} \\ \epsilon_{323} \\ \epsilon_{324} \end{bmatrix}}_{\epsilon}$$

א. אם נבחר $\pi_i = \frac{1}{3}, \tau_j = \frac{1}{2}$ אז הגודל של כל אחד מהשברים הוא 1 והמטריצה תהיה:

$$
y=\begin{bmatrix} y_{111}\\ y_{112}\\ y_{113}\\ y_{121}\\ y_{122}\\ y_{211}\\ y_{212}\\ y_{213}\\ y_{221}\\ y_{222}\\ y_{311}\\ y_{312}\\ y_{313}\\ y_{321}\\ y_{322}\\ y_{323}\\ y_{324} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1&1&0&1&1&0\\ 1&1&0&1&1&0\\ 1&1&0&1&1&0\\ 1&1&0&-1&-1&0\\ 1&1&0&-1&-1&0\\ 1&0&1&1&0&1\\ 1&0&1&1&0&1\\ 1&0&1&1&0&1\\ 1&0&1&-1&0&-1\\ 1&0&1&-1&0&-1\\ 1&-1&-1&1&-1&-1\\ 1&-1&-1&1&-1&-1\\ 1&-1&-1&1&-1&-1\\ 1&-1&-1&-1&1&1\\ 1&-1&-1&-1&1&1\\ 1&-1&-1&-1&1&1\\ 1&-1&-1&-1&1&1 \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} \mu\\ \alpha_1\\ \alpha_2\\ \beta_1\\ \gamma_{11}\\ \gamma_{21} \end{bmatrix}}_{\eta} + \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon_{111}\\ \epsilon_{112}\\ \epsilon_{113}\\ \epsilon_{121}\\ \epsilon_{122}\\ \epsilon_{211}\\ \epsilon_{212}\\ \epsilon_{213}\\ \epsilon_{221}\\ \epsilon_{222}\\ \epsilon_{311}\\ \epsilon_{312}\\ \epsilon_{313}\\ \epsilon_{321}\\ \epsilon_{322}\\ \epsilon_{323}\\ \epsilon_{324} \end{bmatrix}}_{\epsilon}
$$

קוד R:

```
D <- read.table("antwo.dat", header = T)
I <- length(levels(as.factor(D$A)))
J <- length(levels(as.factor(D$B)))
y <- D$Y
pi <- rep(1/I,I)
tau <- rep(1/J,J)
X <- matrix(0, ncol = 6, nrow = 17)
X[,1] <- rep(1, 17)
X[,2] <- c(rep(1, 5), rep(0, 5), rep(-pi[1]/pi[3], 7))
X[,3] <- c(rep(0, 5), rep(1, 5), rep(-pi[2]/pi[3], 7))
X[,4] <- c(rep(c(rep(1, 3), rep(-tau[1]/tau[2], 2)),2),rep(1, 3), rep(-tau[1]/tau[2], 4))
X[,5] <- c(rep(1, 3), rep(-tau[1]/tau[2], 2), rep(0, 5), rep(-pi[1]/pi[3], 3), rep((tau[1] * pi[1])/(tau[2] * pi[3]), 4))
X[,6] <- c(rep(0, 5), rep(1, 3), rep(-tau[1]/tau[2], 2), rep(-pi[2]/pi[3], 3), rep((tau[1] * pi[2])/(tau[2] * pi[3]), 4))
eta <- as.numeric(lm(y ~ X -1)$coeff)
A <- 2:3 #alphas
B <- 4 # beta
AB <- 5:6 # gammas
mu.full <- X %*% eta
SSE <- sum((y - mu.full) ^ 2)
mu.A <- X[,-A] %*% eta[-A]
SSA <- sum((y - mu.A) ^ 2) - SSE
mu.B <- X[,-B] %*% eta[-B]
SSB <- sum((y - mu.B) ^ 2) - SSE
mu.AB <- X[,-AB] %*% eta[-AB]
SSAB <- sum((y - mu.AB) ^ 2) – SSE
```

ומתקבלים הערכים הבאים:

SSE	SSA	SSB	SSAB
125.417	2273.711	2242.823	10.822

ב. קוד R (המשך לסעיף הקודם):

```
mu.AB <- X[,-AB] %*% eta[-AB]
SSE <- sum((y - mu.AB) ^ 2)
mu.A <- X[,-c(A,AB)] %*% eta[-c(A,AB)]
SSA <- sum((y - mu.A) ^ 2) - SSE
mu.B <- X[,-c(B,AB)] %*% eta[-c(B,AB)]
SSB <- sum((y - mu.B) ^ 2) - SSE
```

ומתקבלים הערכים הבאים:

SSE	SSA	SSB
136.239	2227.317	2272.176

ג. הקוד יהיה זהה לסעיפים הקודמים, מלבד שתי שורות:

```
pi <- c(2.,3.,5.)
tau <- c(4.,6.)
```

ומתקבלים הערכים הבאים:

SSE	SSA	SSB	SSAB
125.417	2240.593	2164.379	13.363

בהנחת חוסר האינטראקציה נקבל את הערכים

SSE	SSA	SSB
138.77	2201.527	2319.451

ניתן לראות כי ערכי SSE,SSAB במודל המלא שומרים על ערכם.

3. יש מצב אחד בו קיימים ביטויים יפים ל-$SSA, SSB, SSAB$ בANOVA דו-כווני לא מאוזן. מצב זה נקרא proportionate frequencies ומתרחש כאשר $n_{ij} = N\lambda_i\omega_j$ ולוקחים את המשקלות להיות $\pi_i = \lambda_i, \tau_j = \omega_j$ – במצב הזה מתקבלים הביטויים הבאים:

$$SSA = \sum_{i=1}^{I} n_{i.}(\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...})^2\,, \qquad SSB = \sum_{j=1}^{J} n_{.j}\left(\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...}\right)^2, \qquad SSAB = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} n_{ij}\left(\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...}\right)^2$$

ודאו תוצאה זו עבור $I = 3, J = 2$ ו-n_{ij} להלן:

i/j	1	2
1	3	6
2	4	8
3	5	10

רמז: בנו את המטריצה X, פרקו אותה כפי שראינו בכתה ל-$[Q_0 \quad Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3]$ והראו כי $\forall j \neq m: Q_j^T Q_m = 0$.

ניתן לראות בקלות מהנתונים כי $\omega = \begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$ וכן $\lambda = \begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12}\end{bmatrix}$.

קוד R, דומה בחלקו לזה של שאלה 2:

```
pi <- c(1/4,1/3,5/12)
tau <- c(1/3,2/3)
X <- matrix(0, ncol = 6, nrow = 36)
X[,1] <- rep(36 ,1)
X[,2] <- c(rep(1, 9), rep(0, 12), rep(-pi[1]/pi[3], 15))
X[,3] <- c(rep(0, 9), rep(1, 12), rep(-pi[2]/pi[3], 15))
X[,4] <- c(rep(1, 3), rep(-tau[1]/tau[2], 6), rep(1, 4), rep(-tau[1]/tau[2], 8), rep(1, 5), rep(-tau[1]/tau[2], 10))
X[,5] <- c(rep(1, 3), rep(-tau[1]/tau[2], 6), rep(0, 12), rep(-pi[1]/pi[3], 5), rep((tau[1] * pi[1])/(tau[2] * pi[3]), 10))
X[,6] <- c(rep(0, 9), rep(1, 4), rep(-tau[1]/tau[2], 8), rep(-pi[2]/pi[3], 5), rep((tau[1] * pi[2])/(tau[2] * pi[3]), 10))
Q0 <- X[1,]
Q1 <- X[2:3,]
Q2 <- X[4,]
Q3 <- X[5:6,]
sum(t(Q0) %*% Q1)
sum(t(Q0) %*% Q2)
sum(t(Q0) %*% Q3)
sum(t(Q1) %*% Q2)
sum(t(Q1) %*% Q3)
sum(t(Q2) %*% Q3)
t(X) %*% X
```

ומתקיים כי $Q_0^TQ_1 = Q_0^TQ_2 = Q_0^TQ_3 = Q_1^TQ_2 = Q_1^TQ_3 = Q_2^TQ_3 = 0$, כלומר המטריצה X^TX תהיה בצורת בלוקים על האלכסון ולכן נקבל ביטויים דומים לאלו של ניתוח שונות חד–כווני. אכן, המטריצה X^TX המתקבלת מקיימת זאת:

$$X^TX = \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14.4 & 7.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7.2 & 21.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7.2 & 3.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.6 & 10.8 \end{bmatrix}$$