מודלים סטטיסטיים ויישומיהם 52518 תשע"ח – פתרון תרגיל 6

להגשה עד 11.12.17 בשעה 23:55

1. להלן לוח μ_{ij} של מודל ניתוח שונות דו-כווני:

i/j	1	2
1	3	6
2	5	10
3	7	14

א. חשבו את $\alpha_i, \beta_j, \gamma_{ij}$.

ב. עבור כל i, חשבו את $\mu_{i1} - \mu_{i2}$

ג. חזרו על סעיפים א' וב', כאשר נחליף כל מספר בטבלה עם ה-log שלו.

$$\bar{\mu}_{i.} = \begin{bmatrix} 4.5 \\ 7.5 \\ 10.5 \end{bmatrix}, \bar{\mu}_{.j} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}, \mu = 7.5$$

א. $$\alpha_i = \bar{\mu}_{i.} - \mu = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \beta_j = \bar{\mu}_{.j} - \mu = \begin{bmatrix} -2.5 \\ 2.5 \end{bmatrix}, \gamma_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ב. $$\mu_{i1} - \mu_{i2} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ -7 \end{bmatrix}$$

ג. $$\bar{\mu}_{i.} = \begin{bmatrix} 1.445 \\ 1.956 \\ 2.292 \end{bmatrix}, \bar{\mu}_{.j} = \begin{bmatrix} 1.551 \\ 2.244 \end{bmatrix}, \mu = 1.898 \rightarrow \alpha_i = \begin{bmatrix} -0.453 \\ 0.058 \\ 0.395 \end{bmatrix}, \beta_j = \begin{bmatrix} -0.347 \\ 0.347 \end{bmatrix}, \gamma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mu_{i1} - \mu_{i2} = \begin{bmatrix} -0.693 \\ -0.693 \\ -0.693 \end{bmatrix}$$

2. במסגרת ניתוח שונות דו-כווני מאוזן, נתייחס לשתי פרמטריזציות של המודל:

$$Y = W\xi + \epsilon$$
$$Y = X\eta + \epsilon$$

כפי שתוארו בכתה (באשר ξ הינו הווקטור של כל ה-μ_{ij}-ים). עבור המקרה בו $I = 4, J = 3, n = 2$, פתרו את הסעיפים הבאים:

א. רשמו מפורשות את W, X, ξ, η.

ב. על בסיס הגדרת הפרמטרים, מצאו מטריצה H המקיימת $\eta = H\xi$.

ג. הראו כי מתקיים $W = XH$ (בסעיף זה תוכלו להיעזר ב-R).

ד. מצאו מטריצה G המקיימת $\xi = G\eta$ והראו כי $G = H^{-1}$.

א.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_{111} \\ y_{112} \\ y_{121} \\ y_{122} \\ y_{131} \\ y_{132} \\ y_{211} \\ y_{212} \\ y_{221} \\ y_{222} \\ y_{231} \\ y_{232} \\ y_{311} \\ y_{312} \\ y_{321} \\ y_{322} \\ y_{331} \\ y_{332} \\ y_{411} \\ y_{412} \\ y_{421} \\ y_{422} \\ y_{431} \\ y_{432} \end{bmatrix}}_{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{21} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{32} \end{bmatrix}}_{\eta} + \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon_{111} \\ \epsilon_{112} \\ \epsilon_{121} \\ \epsilon_{122} \\ \epsilon_{131} \\ \epsilon_{132} \\ \epsilon_{211} \\ \epsilon_{212} \\ \epsilon_{221} \\ \epsilon_{222} \\ \epsilon_{231} \\ \epsilon_{232} \\ \epsilon_{311} \\ \epsilon_{312} \\ \epsilon_{321} \\ \epsilon_{322} \\ \epsilon_{331} \\ \epsilon_{332} \\ \epsilon_{411} \\ \epsilon_{412} \\ \epsilon_{421} \\ \epsilon_{422} \\ \epsilon_{431} \\ \epsilon_{432} \end{bmatrix}}_{\epsilon}$$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} y_{111} \\ y_{112} \\ y_{121} \\ y_{122} \\ y_{131} \\ y_{132} \\ y_{211} \\ y_{212} \\ y_{221} \\ y_{222} \\ y_{231} \\ y_{232} \\ y_{311} \\ y_{312} \\ y_{321} \\ y_{322} \\ y_{331} \\ y_{332} \\ y_{411} \\ y_{412} \\ y_{421} \\ y_{422} \\ y_{431} \\ y_{432} \end{bmatrix}}_{y}
=
\underbrace{\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}}_{W}
\underbrace{\begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \mu_{13} \\ \mu_{21} \\ \mu_{22} \\ \mu_{23} \\ \mu_{31} \\ \mu_{32} \\ \mu_{33} \\ \mu_{41} \\ \mu_{42} \\ \mu_{43} \end{bmatrix}}_{\xi}
+
\underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon_{111} \\ \epsilon_{112} \\ \epsilon_{121} \\ \epsilon_{122} \\ \epsilon_{131} \\ \epsilon_{132} \\ \epsilon_{211} \\ \epsilon_{212} \\ \epsilon_{221} \\ \epsilon_{222} \\ \epsilon_{231} \\ \epsilon_{232} \\ \epsilon_{311} \\ \epsilon_{312} \\ \epsilon_{321} \\ \epsilon_{322} \\ \epsilon_{331} \\ \epsilon_{332} \\ \epsilon_{411} \\ \epsilon_{412} \\ \epsilon_{421} \\ \epsilon_{422} \\ \epsilon_{431} \\ \epsilon_{432} \end{bmatrix}}_{\epsilon}
$$

ב. קוד R לחישוב H:

```
H <- matrix(0, ncol = 12, nrow = 12)
H[1,] <- rep(1/12,12) #mu
H[2,] <- c(rep(1/3,3),rep(0,9)) - H[1,] #a1
H[3,] <- c(rep(0,3),rep(1/3,3),rep(0,6)) - H[1,] #a2
H[4,] <- c(rep(0,6),rep(1/3,3),rep(0,3)) - H[1,] #a3
H[5,] <- rep(c(1/4,0,0),4) - H[1,] #b1
H[6,] <- rep(c(0,1/4,0),4) - H[1,] #b2
H[7,] <- c(1,rep(0,11)) - (H[1,] + H[2,] + H[5,]) #g11
H[8,] <- c(0,1,rep(0,10)) - (H[1,] + H[2,] + H[6,]) #g12
H[9,] <- c(rep(0,3),1,rep(0,8)) - (H[1,] + H[3,] + H[5,]) #g21
H[10,] <- c(rep(0,4),1,rep(0,7)) - (H[1,] + H[3,] + H[6,]) #g22
H[11,] <- c(rep(0,6),1,rep(0,5)) - (H[1,] + H[4,] + H[5,]) #g32
H[12,] <- c(rep(0,7),1,rep(0,4)) - (H[1,] + H[4,] + H[6,]) #g32
```

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{21} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{32} \end{bmatrix}}_{\eta}
=
\underbrace{\begin{bmatrix}
\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\
-\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\
-\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\
\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\
-\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \\
\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\
-\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\
-\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\
\frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\
-\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\
\frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12}
\end{bmatrix}}_{H}
\underbrace{\begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \mu_{13} \\ \mu_{21} \\ \mu_{22} \\ \mu_{23} \\ \mu_{31} \\ \mu_{32} \\ \mu_{33} \\ \mu_{41} \\ \mu_{42} \\ \mu_{43} \end{bmatrix}}_{\xi}
$$

ג.

קוד R (בהמשך לסעיף הקודם):

```
X <- matrix(0, nrow = 24, ncol = 12)
X[,1] <- rep(1,24)
X[,2] <- c(rep(1,6),rep(0,12),rep(-1,6))
X[,3] <- c(rep(0,6),rep(1,6),rep(0,6),rep(-1,6))
X[,4] <- c(rep(0,12),rep(1,6),rep(-1,6))
k1 <- c(1,1,0,0,-1,-1)
k2 <- c(0,0,1,1,-1,-1)
X[,5] <- rep(k1,4)
X[,6] <- rep(k2,4)
X[,7] <- c(k1,rep(0,12),-k1)
X[,8] <- c(k2,rep(0,12),-k2)
X[,9] <- c(rep(0,6),k1,rep(0,6),-k1)
X[,10] <- c(rep(0,6),k2,rep(0,6),-k2)
X[,11] <- c(rep(0,12),k1,-k1)
X[,12] <- c(rep(0,12),k2,-k2)

# create W matrix
W <- matrix(0, nrow = 24, ncol = 12)
for(i in 1:ncol(W)){
  W[(2 * i - 1),] <- c(rep(0, (i - 1)), 1, rep(0, ncol(W) - i))
  W[(2 * i),] <- c(rep(0, (i - 1)), 1, rep(0, ncol(W) - i))
}
all.equal(W,X %*% H)
```

נקבל ערך TRUE, כלומר אכן מתקיים $W = XH$.

ד.

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\mu_{11}\\\mu_{12}\\\mu_{13}\\\mu_{21}\\\mu_{22}\\\mu_{23}\\\mu_{31}\\\mu_{32}\\\mu_{33}\\\mu_{41}\\\mu_{42}\\\mu_{43}\end{bmatrix}}_{\xi}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0\\1&1&0&0&-1&-1&-1&-1&0&0&0&0\\1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0\\1&0&1&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\1&0&1&0&-1&-1&0&0&-1&-1&0&0\\1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&1&0\\1&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&1&-1&-1&0&0&0&0&-1&-1\\1&-1&-1&-1&1&0&-1&0&-1&0&-1&0\\1&-1&-1&-1&0&1&0&-1&0&-1&0&-1\\1&-1&-1&-1&-1&-1&1&1&1&1&1&1\end{bmatrix}}_{G}\underbrace{\begin{bmatrix}\mu\\\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\beta_1\\\beta_2\\\gamma_{11}\\\gamma_{12}\\\gamma_{21}\\\gamma_{22}\\\gamma_{31}\\\gamma_{32}\end{bmatrix}}_{\eta}$$

קוד R:

```
G <- matrix(0, nrow = 12, ncol = 12)
for(i in 1:nrow(G)){
  G[i,] <- X[(2*i),]
}
all.equal(G, solve(H))
```

נקבל ערך TRUE, כלומר אכן מתקיים $G = H^{-1}$.

3. הקבצים המצורפים rdat1.txt, rdat2.txt כוללים משתנה מוסבר Y ושני משתנים מסבירים X_1, X_2. נתייחס אל המודלים הבאים:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \epsilon_i$$
$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \epsilon_i$$

באמצעות R, הריצו את שני המודלים על הקבצים המצורפים. שימו לב כי כאשר מריצים את המודלים על נתוני rdat1.txt ערכו של $\hat{\beta}_1$ זהה לשני המודלים, בעוד ששוויון זה אינו מתקיים עבור נתוני הקובץ rdat2.txt. הסבירו מדוע באמצעות חישובים מתאימים.

קוד R:

```
D1 <- read.table('rdat1.txt', header = T)
t(D1$X1)%*%D1$X2
D2 <- read.table('rdat2.txt', header = T)
t(D2$X1)%*%D2$X2
```

מתקבל כי עבור נתוני rdat1.txt מתקיים תנאי הניצבות $Q_1^T Q_2 = 0$ ואילו עבור נתוני הקובץ rdat2.txt אין ניצבות, $Q_1^T Q_2 = 86$ ולכן הערך של $\hat{\beta}_1$ אינו זהה.