מודלים סטטיסטיים ויישומיהם 52518 תשע"ח – פתרון תרגיל 2

להגשה עד 13.11.17 בשעה 23:55

שימו לב: לפני פתרון התרגיל, עליכם לקרוא את הקובץ "Example of Simultaneous Confidence Intervals for a Fixed Set of Contrasts Using the Exact Method" המופיע במודל (קישור).

1. נערך מחקר הבודק את השפעת מתן גמול על תהליך הלמידה בקרב ילדים. המשתנה המוסבר Y, הינו מספר הניסיונות אשר לוקח לילד ללמוד כיצד להרכיב פאזל באופן נכון. בניסוי חולקו הילדים לארבע קבוצות תגמול שונות. הקבוצות הן, אף-פעם, לעיתים רחוקות, לעיתים קרובות ותמיד. החוקרים מעוניינים לבדוק את ההפרשים הבאים,

1) הפרש בין גמול תמידי לממוצע הפשוט בין שאר הקבוצות.

2) הפרש בין גמול לעיתים קרובות לממוצע בין גמול לעיתים רחוקות ואף-פעם.

3) הפרש בין גמול לעיתים רחוקות ואף-פעם.

נתונים: להלן מטריצה אשר כל ערך בה הינו מספר ניסיונות הרכבה עבור פרט מסוים. כל עמודה מציינת קבוצה, כאשר הימנית ביותר הינה "אף-פעם", אחריה "לעיתים רחוקות", "עיתים קרובות" והשמאלית ביותר הינה "גמול תמידי".

$$\begin{bmatrix} 12 & 9 & 15 & 7 \\ 13 & 10 & 16 & 18 \\ 11 & 9 & 17 & 12 \\ 12 & 13 & 16 & 18 \\ 12 & 14 & 16 & 20 \end{bmatrix}$$

א. הציגו את שלושת ההפרשים לעיל באופן מתמטי כקונטרסטים.

ב. חשבו רווח-סמך (ברמת סמך של 95%) עבור כל אחד מהקונטרסטים, כאשר התייחסו לכל קונטרסט כאילו הוא יחיד.

ג. חשבו ר"ס בו זמניים ברמה של 95% לשלושת הקונטרסטים לפי שיטת בונפרוני.

ד. חשבו ר"ס בו זמניים ברמה של 95% לשלושת הקונטרסטים לפי השיטה המדויקת עבור אוסף סופי של קונטרסטים קבועים מראש.

נסמן $\mu_1 = \mu_{always}, \mu_2 = \mu_{often}, \mu_3 = \mu_{seldom}, \mu_4 = \mu_{never}$.

א.

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, c_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, c_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ב. רווח סמך ברמה $1-\alpha$ עבור $\psi(c)$ נתון לפי $\hat{\psi}(c) \pm s\sqrt{V(c)}t_{N-I,1-\frac{\alpha}{2}}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 15 & 7 \\ 13 & 10 & 16 & 18 \\ 11 & 9 & 17 & 12 \\ 12 & 13 & 16 & 18 \\ 12 & 14 & 16 & 20 \end{bmatrix} \to \hat{\beta} = \begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ 16 \\ 15 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$V(C) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right) \\ 0 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ 0 + 0 + 1 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{15} \\ \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}, Var(\hat{\Psi}) = \sigma^2 V(C) = \frac{71}{8}\begin{bmatrix} \frac{4}{15} \\ \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.367 \\ 2.663 \\ 3.55 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Psi} = C\hat{\beta} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4.5 \\ 1 \end{bmatrix} = E[\hat{\psi}(c)], t_{N-I,1-\frac{\alpha}{2}} = t_{16,0.975} \approx 2.12$$

$$S(c^{(1)}) = -2 \pm 1.538 * 2.12 = [-5.261, 1.261]$$

$$S(c^{(2)}) = -4.5 \pm 1.632 * 2.12 = [-7.959, -1.041]$$

$$S(c^{(3)}) = 1 \pm 1.884 * 2.12 = [-2.994, 4.994]$$

ג. כדי לחשב לפי שיטת בונפרוני, נסמן $K=3$ (מספר הקונטרסטים) לכן נבנה רווחי סמך לפי $S\left(c^{(k)}\right)=$

$\hat{\psi}(c)\pm s\sqrt{V(c)}t_{N-I,1-\frac{\alpha}{2K}}$: $t_{N-I,1-\frac{\alpha}{2K}}=t_{16,0.9991667}\approx 2.673$

$$S\left(c^{(1)}\right)=-2\pm 1.538*2.673=[-6.112,2.112]$$
$$S\left(c^{(2)}\right)=-4.5\pm 1.632*2.673=[-8.862,-0.138]$$
$$S\left(c^{(3)}\right)=1\pm 1.884*2.673=[-4.036,6.036]$$

ד. על סמך הערכים שמצאנו, נקבל כי $H=\frac{Cov(\hat{\Psi})}{s^2}=\begin{bmatrix}4/15 & 0 & 0\\ 0 & 0.3 & 0\\ 0 & 0 & 0.4\end{bmatrix}$, אם נבנה את R לפי $R_{rs}=\frac{H_{rs}}{\sqrt{H_{rr}H_{ss}}}$

אז נקבל $R=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$. עבור t^* המתפלג רב-t נדרוש $P(|R|\le t^*)=1-\alpha$, נקבל ב-R:

$qmvt(0.95, corr=R, df=16)\approx 2.31=t^*$. לפי הנוסחא לבניית רווחי סמך מדויקים $\psi\left(c^{(k)}\right)\in$ $\left[\hat{\psi}\left(c^{(k)}\right)\pm t^* s\sqrt{V\left(c^{(k)}\right)}\right]$ נקבל:

$$S\left(c^{(1)}\right)=-2\pm 1.538*2.31=[-5.554,1.554]$$
$$S\left(c^{(2)}\right)=-4.5\pm 1.632*2.31=[-8.270,-0.730]$$
$$S\left(c^{(3)}\right)=1\pm 1.884*2.31=[-3.353,5.353]$$

2. יהי מודל ניתוח שונות חד-כיווני בעל שונויות שונות, $\epsilon_{ij}\sim N\left(0,\sigma_i^2\right)$; $Y_{ij}=\mu_i+\epsilon_{ij}$. נניח כי ה- σ_i^2-ים ידועים וה- ϵ_{ij}-ים בלתי תלויים. פתחו נוסחה עבור רווח- סמך לקונטרסט יחיד, $\psi(c)=\sum_{i=1}^{I}c_i\mu_i$.

$$Var\left(\hat{\psi}(c)\right)=Var\left(c^T\hat{\beta}\right)=c^T cov\left(\hat{\beta}\right)c=c^T\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_I^2\end{bmatrix}c=[c_1 \quad \cdots \quad c_I]\begin{bmatrix}\sigma_1^2c_1\\ \vdots\\ \sigma_I^2c_I\end{bmatrix}=\sum_{j=1}^{I}\sigma_j^2c_j^2\to\psi(c)$$
$$\in\left[\hat{\psi}(c)\pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^{I}\sigma_j^2c_j^2}\right]$$

3. נניח כי באמצעות השיטה המדויקת רוצים לערוך השוואה בין K קונטרסטים אפשריים. כל קונטרסט מוגדר באופן $\psi\left(c^{(k)}\right)=\sum_{i=1}^{I}c_i^{(k)}\mu_i$. הוקטור של כל הקונטרסטים מסומן $\Psi=\begin{bmatrix}\psi\left(c^{(1)}\right)\\ \vdots\\ \psi\left(c^{(K)}\right)\end{bmatrix}$ ומתקיים עבורו $\Psi=C\beta$. בעת, באמצעות הוקטור $\hat{\beta}$, נגדיר את $\hat{\Psi}=C\hat{\beta}$.

א. מצאו הצגה של מטריצת השונויות $Cov(\hat{\Psi})$ בכפל מטריצות.

ב. הניחו כי $K=4$. באמצעות כפל מטריצות, מצאו את ערכו של האיבר $Cov(\hat{\Psi})_{rs}$.

א.

$$Cov(\hat{\Psi})=Cov\left(C\hat{\beta}\right)=CCov\left(\hat{\beta}\right)C^T=C\cdot\sigma^2\cdot\begin{pmatrix}n_1^{-1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & n_I^{-1}\end{pmatrix}\cdot C^T=\sigma^2\cdot C\left(W^TW\right)^{-1}C^T$$

ב. נניח $K=4$:

$$
\begin{aligned}
Cov(\widehat{\Psi}) &= \sigma^2 \cdot C(W^TW)^{-1}C^T \\
&= \sigma^2 \cdot \begin{pmatrix} c_1^{(1)} & \dots & c_I^{(1)} \\ c_1^{(2)} & \dots & c_I^{(2)} \\ c_1^{(3)} & \dots & c_I^{(3)} \\ c_1^{(4)} & \dots & c_I^{(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & n_I^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{(1)} & c_1^{(2)} & c_1^{(3)} & c_1^{(4)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_I^{(1)} & c_I^{(2)} & c_I^{(3)} & c_I^{(4)} \end{pmatrix} \\
&= \sigma^2 \cdot \begin{pmatrix} c_1^{(1)} & \dots & c_I^{(1)} \\ c_1^{(2)} & \dots & c_I^{(2)} \\ c_1^{(3)} & \dots & c_I^{(3)} \\ c_1^{(4)} & \dots & c_I^{(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{c_1^{(1)}}{n_1} & \frac{c_1^{(2)}}{n_1} & \frac{c_1^{(3)}}{n_1} & \frac{c_1^{(4)}}{n_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{c_I^{(1)}}{n_I} & \frac{c_I^{(2)}}{n_I} & \frac{c_I^{(3)}}{n_I} & \frac{c_I^{(4)}}{n_I} \end{pmatrix} \rightarrow Cov(\widehat{\Psi})_{rs} = \sigma^2 \sum_{i=1}^{I} \frac{c_i^{(r)} c_i^{(s)}}{n_i} \\
&= \sigma^2 H_{rs}
\end{aligned}
$$