מודלים סטטיסטיים ויישומיהם 52518 תשע"ח – תרגיל 7

להגשה עד 18.12.17 בשעה 23:55

1. הוכיחו כי בANOVA דו-כווני מאוזן מתקיים השוויון

$$SST = SSA + SSB + SSAB + SSE$$

כאשר

$$SSA = Jn\sum_{i=1}^{I}(\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...})^2, \qquad SSB = In\sum_{j=1}^{J}(\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...})^2, \qquad SSAB = n\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...})^2,$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n}(Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.})^2$$

2. מצורף קובץ נתונים בשם antwo.dat מניסוי עם שני גורמים – גורם A בעל 3 רמות וגורם B בעל 2 רמות.

א. נסחו את המודל המלא של ANOVA דו-כווני עם אינטראקציה כמודל רגרסיה $Y = X\eta + \epsilon$ כפי שהוצג בכתה, כאשר $\eta = (\mu, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \gamma_{11}, \gamma_{21})^T$. השתמשו במשקלות אחידים $\pi_i = \frac{1}{I}, \tau_j = \frac{1}{J}$.

ב. כתבו פונקציה ב-R להרצת מודל הרגרסיה הנ"ל. הריצו את המודל על נותני הקובץ וחשבו את $SSA, SSB, SSAB, SSE$ במודל המלא, כאשר

$$SSA = SSE(\mu, \beta, \gamma) - SSE(\mu, \alpha, \beta, \gamma)$$
$$SSB = SSE(\mu, \alpha, \gamma) - SSE(\mu, \alpha, \beta, \gamma)$$
$$SSAB = SSE(\mu, \alpha, \beta) - SSE(\mu, \alpha, \beta, \gamma)$$
$$SSE = SSE(\mu, \alpha, \beta, \gamma)$$

ג. חשבו את SSA, SSB, SSE במודל ללא אינטראקציה.

ד. חזרו על השאלה עם המשקלות הבאים:

$$\pi_1 = 0.5, \pi_2 = 0.3, \pi_3 = 0.2, \tau_1 = 0.6, \tau_2 = 0.4$$

השוו לסעיפים הקודמים. אילו קשרים קיימים ומדוע?

3. יש מצב אחד בו קיימים ביטויים יפים ל-$SSA, SSB, SSAB$ בANOVA דו-כווני לא מאוזן. מצב זה נקרא proportionate frequencies ומתרחש כאשר $n_{ij} = N\lambda_i\omega_j$ ולוקחים את המשקלות להיות $\pi_i = \lambda_i, \tau_j = \omega_j$ – במצב הזה מתקבלים הביטויים הבאים:

$$SSA = \sum_{i=1}^{I} n_{i.}(\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...})^2, \qquad SSB = \sum_{j=1}^{J} n_{.j}(\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...})^2, \qquad SSAB = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} n_{ij}(\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...})^2$$

ודאו תוצאה זו עבור $I = 3, J = 2$ ו-n_{ij} להלן:

i/j	1	2
1	3	6
2	4	8
3	5	10

רמז: בנו את המטריצה X, פרקו אותה כפי שראינו בכתה ל-$[Q_0 \quad Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3]$ והראו כי $\forall j \neq m: Q_j^T Q_m = 0$.