

מודלים סטטיסטיים ויישומיהם 52518 תשע"ח – תרגיל 8

להגשה עד 25.12.17 בשעה 23:55

1. קובץ הנתונים ex8dat.txt מציג ניסוי לבדיקת יעילותה של תרופה לשיפור תפקוד הכליות בקרב חולי סכרת. עמודות הקובץ הן (משמאל לימין במסד הנתונים) ID, Dose Group, Type of Diabetes ו-Y (מדד תפקוד הכליה).

א. הריצו ANOVA דו-כווני ללא אינטראקציות עם המשקלות

$$\pi_i = \frac{n_{i.}}{N}, \tau_j = \frac{n_{.j}}{N}$$

ב. מצאו ביטוי עבור α_i לפי $\alpha_1, \dots, \alpha_{I-1}, n_1, \dots, n_I$.

ג. במודל נטול האינטראקציות, מצאו את המטריצה C המקיימת $\Delta = C \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{I-1} \end{pmatrix}$, כאשר Δ הוא אוסף כל

הקונטרסטים הזוגיים (מהצורה $\alpha_i - \alpha_{i'}$).

ד. במודל נטול האינטראקציות, חשבו בעזרת השיטה המדויקת רווחי סמך בו-זמניים לכל הקונטרסטים

הזוגיים (מהצורה $\alpha_i - \alpha_{i'}$).

ה. חזרו על הסעיפים הקודמים, הפעם במודל עם אינטראקציות ותוך שימוש במשקלות הבאים:

$$\pi_i = \frac{1}{I}, \tau_1 = 0.75, \tau_2 = 0.25$$

2. יהיה מודל ANOVA דו-כווני (עם או בלי אינטראקציה). כמו בכתה, נסמן ב-H את הבלוק במטריצה $(X^T X)^{-1}$

המתייחס לאיברים $\alpha_1, \dots, \alpha_{I-1}$. נסמן ב- \hat{Y} את וקטור התחזיות תחת המודל המלא וב- $\hat{Y}^{(0)}$ את וקטור התצפיות

תחת ההשערה $H_A: \alpha_1 = \dots = \alpha_I = 0$. ניתן להראות כי $\|\hat{Y} - \hat{Y}^{(0)}\|^2 = \hat{\alpha}^T H^{-1} \hat{\alpha}$ ואז F_A (סטטיסטי המבחן F המשמש לבדיקת ההשערה H_A) מקיים

$$F_A = \frac{\hat{\alpha}^T H^{-1} \hat{\alpha} / (I - 1)}{s^2}$$

תחת $H_A, F_A \sim F_{I-1, p}$ כאשר p הוא מספר דרגות החופש ($N - IJ$) במודל עם אינטראקציות, $N - I - J + 1$ במודל נטול אינטראקציות).

א. עבור נתוני הקובץ ex8dat.txt, ודאו כי מתקיימת הזהות $F_A = \frac{\hat{\alpha}^T H^{-1} \hat{\alpha} / (I-1)}{s^2}$.

ב. נסמן את הערך האמתי של הוקטור α באופן α^* . הוכיחו כי לכל מתקיים

$$\frac{(\hat{\alpha} - \alpha^*)^T H^{-1} (\hat{\alpha} - \alpha^*) / (I - 1)}{s^2} \sim F_{I-1, p}$$

ג. השתמשו בתוצאות הנ"ל כדי לוודא את נכונות רווח הסמך שהוצג בכתה עבור רווח סמך בשיטת Scheffé.

בססו את ההוכחה שלכם על ההוכחה לרווח סמך בשיטת Scheffé במקרה החד-כווני.

3. יהי מודל רגרסיה לא-ליניארי עבור משתנה תגובה רציף Y , המוגדר באופן:

$$Y_i = h(\beta^T X_i) + \epsilon_i$$

כאשר h גזירה ומונוטונית עולה וכן $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$. מצאו את פונקצית לוג-הנראות וכן את הנגזרות החלקיות שלה מסדר ראשון.

4. יהי Y משתנה מקרי בינארי המקיים $Y_i \in \{0, 1\}$. נתייחס למודל הלוגיסטי

$$P(Y = 1 | X = x) = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x}}$$

כאשר X משתנה מקרי בינארי המקיים $X_i \in \{0, 1\}$. הראו כי במקרה זה קיים פתרון אלגברי סגור למשוואת הנראות ומצאו אותו.