

מודלים סטטיסטיים ויישומיהם 52518 תשע"ח – פתרון תרגיל 3

להגשה עד 20.11.17 בשעה 23:55

(המשך שאלה 1 מהשבוע שעבר – לנוחותכם מצורפת ההקדמה לשאלה)

1. נערך מחקר הבדוק את השפעת מתן גמול על תהליך הלמידה בקרב ילדים. המשתנה המוסבר Y , הינו מספר הניסיונות אשר לוקח לילד ללמוד כיצד להרכיב פאזל באופן נכון. בניסוי חולקו הילדים לארבע קבוצות תגמול שונות. הקבוצות הן, אף-פעם, לעיתים רחוקות, לעיתים קרובות ותמיד. החוקרים מעוניינים לבדוק את ההפרשים הבאים,

(1 הפרש בין גמול תמידי לממוצע הפשוט בין שאר הקבוצות.

(2 הפרש בין גמול לעיתים קרובות לממוצע בין גמול לעיתים רחוקות ואף-פעם.

(3 הפרש בין גמול לעיתים רחוקות ואף-פעם.

נתונים: להלן מטריצה אשר כל ערך בה הינו מספר ניסיונות הרכבה עבור פרט מסוים. כל עמודה מציינת קבוצה, כאשר הימנית ביותר הינה "אף-פעם", אחריה "לעיתים רחוקות", "עיתים קרובות" והשמאלית ביותר הינה "גמול תמידי".

$$\begin{bmatrix} 12 & 9 & 15 & 7 \\ 13 & 10 & 16 & 18 \\ 11 & 9 & 17 & 12 \\ 12 & 13 & 16 & 18 \\ 12 & 14 & 16 & 20 \end{bmatrix}$$

א. חשבו ר"ס בו-זמניים ברמה של 95% לשלושת הקונטרסטים לפי שיטת שפה (Scheffé) לכל הקונטרסטים האפשריים, כאילו הקונטרסטים הנ"ל לא נקבעו מראש.

ב. אם נרצה לחשב p-Value להשערה $\psi_k(c) = 0$ עם תיקון לפי שיטת שפה, נוכל לבצע זאת באופן

הבא:

$$i. \text{ נגדיר } a = (\psi_k(c))^2 / ((I-1)s^2V(c))$$

ii. באמצעות הפונקציה $\text{pf}()$ ב-R נחשב את ההסתברות $P(F_{I-1, N-1} > a) = 1 - P(F_{I-1, N-1} \leq a)$

בדרך זו, חשבו p-Value לשלושת הקונטרסטים לעיל.

ג. חשבו ר"ס בו זמניים ברמה של 95% לכל ההפרשים הזוגיים לפי שיטת טוקי (Tukey).

ד. אם נרצה לחשב p-Value להשערה $H_0: \Delta_{i,i'} = \mu_i - \mu_{i'} = 0$ עם תיקון לפי שיטת טוקי, נוכל לבצע

זאת באופן הבא:

$$i. \text{ נגדיר } b = \frac{|\hat{\Delta}_{i,i'}|}{s \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}} \right)}}$$

ii. באמצעות הפונקציה $\text{ptukey}()$ נחשב את ההסתברות $P(Q_{I, N-I} > b) = 1 - P(Q_{I, N-I} \leq b)$

בדרך זו, חשבו p-Value לכל ההפרשים הזוגיים.

א. נקבל ב-R: $qf(0.95, 3, 16) \approx 3.239 = F_{I-1, N-I}^{(1-\alpha)}$ אז $\xi = \sqrt{(I-1)F_{I-1, N-I}^{(1-\alpha)}} \approx 3.117$. לפי נוסחת שפה

$$\psi(c^{(k)}) \in [\hat{\psi}(c^{(k)}) \pm \xi s \sqrt{V(c^{(k)})}]$$

$$S(c^{(1)}) = -2 \pm 1.538 * 3.239 = [-6.795, 2.795]$$

$$S(c^{(2)}) = -4.5 \pm 1.632 * 3.239 = [-9.586, 0.586]$$

$$S(c^{(3)}) = 1 \pm 1.884 * 3.239 = [-4.873, 6.873]$$

$$a = \frac{(c\hat{\beta})^2}{(I-1)s^2V(C)} = \begin{bmatrix} 4/(3 \cdot 2.367) \\ 20.25/(3 \cdot 2.663) \\ 1/(3 \cdot 3.55) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.563 \\ 2.535 \\ 0.094 \end{bmatrix} \rightarrow Pval = \underbrace{1 - pf(a, 3, 16)}_{@R} = \begin{bmatrix} 0.645 \\ 0.093 \\ 0.962 \end{bmatrix} . \text{ב.}$$

ג. מטריצת ההפרשים הזוגיים $\hat{\Delta}_{ik} = \hat{\mu}_i - \hat{\mu}_k$ המתקבלת:

$$\hat{\Delta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & -3 \\ -1 & 0 & -5 & -4 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

לפי נוסחת טוקי-קרמר $\Delta_{ik} \in \left[\hat{\Delta}_{ik} \pm q_{I,N-I}^{(1-\alpha)} s \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_k} \right)} \right]$ כאשר נקבל ב-R:

$$q_{I,N-I}^{(1-\alpha)} = qtukey(0.95, 4, 16) \approx 4.046$$

$$S(\Delta_{1,2}) = 1 \pm 4.046 * 2.979 * \sqrt{0.2} = [-4.391, 6.391]$$

$$S(\Delta_{1,3}) = -4 \pm 4.046 * 2.979 * \sqrt{0.2} = [-9.391, 1.391]$$

$$S(\Delta_{1,4}) = -3 \pm 4.046 * 2.979 * \sqrt{0.2} = [-8.391, 2.391]$$

$$S(\Delta_{2,3}) = -5 \pm 4.046 * 2.979 * \sqrt{0.2} = [-10.391, 0.391]$$

$$S(\Delta_{2,4}) = -4 \pm 4.046 * 2.979 * \sqrt{0.2} = [-9.391, 1.391]$$

$$S(\Delta_{3,4}) = 1 \pm 4.046 * 2.979 * \sqrt{0.2} = [-4.391, 6.391]$$

$$b = \frac{|\hat{\Delta}_{ik}|}{s \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_k} \right)}} \approx \frac{|\hat{\Delta}_{ik}|}{1.332} \approx \begin{bmatrix} 0.751 \\ 3.002 \\ 2.252 \\ 3.753 \\ 3.002 \\ 0.751 \end{bmatrix} \rightarrow Pval = \underbrace{1 - ptukey(b, 4, 16)}_{@R} \approx \begin{bmatrix} 0.950 \\ 0.188 \\ 0.410 \\ 0.074 \\ 0.188 \\ 0.950 \end{bmatrix} . \text{ד.}$$