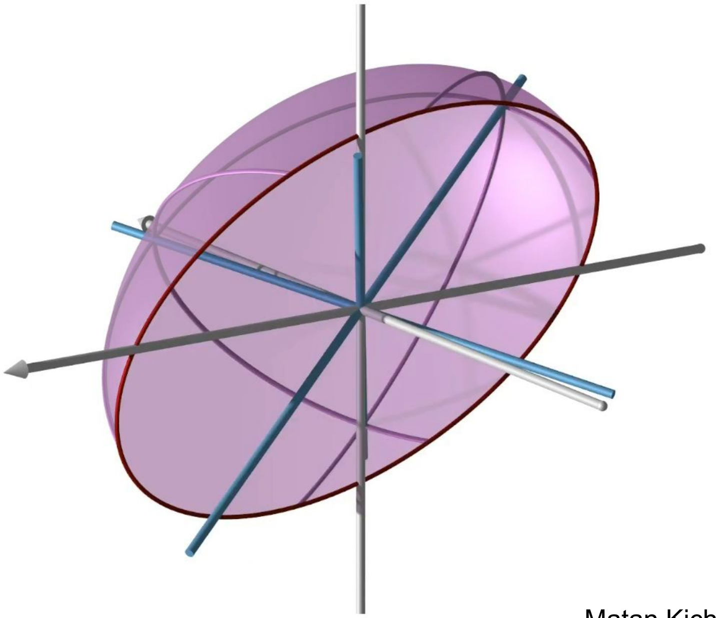
שיטת יעקובי למציאת ערכים עצמיים

הצגה באנליזה נומרית
תשפ"ג, סמסטר חורף

מציגים:
עוז דיאמונד, מתן קיכלר



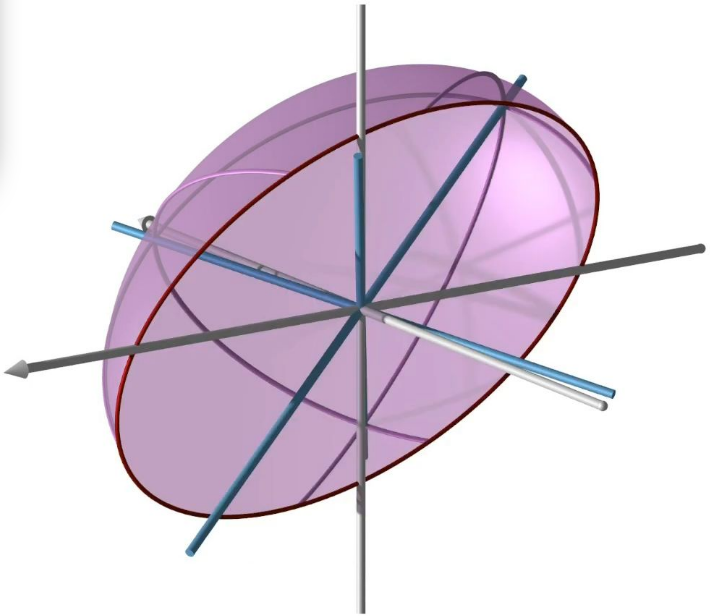
שיטת יעקובי למציאת ערכים עצמיים

רקע

> *"שיטה איטרטיבית הנותנת, בדיוק המבוקש, את הערכים העצמיים והוקטורים העצמיים של מטריצה הרמיטית."*

– ויקיפדיה

ממציא השיטה הוא [יעקב יעקובי]
(זה של היעקוביאן) בשנת 1846.



Carl Gustav Jacob Jacobi

1804 – 1851

שיטת יעקובי למציאת ערכים עצמיים

רקע

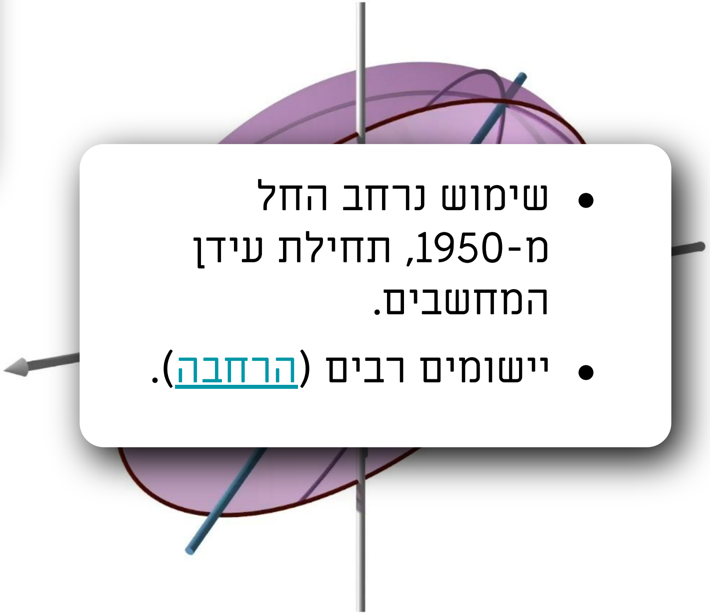
> *"שיטה איטרטיבית הנותנת, בדיוק המבוקש, את הערכים העצמיים והוקטורים העצמיים של מטריצה הרמיטית."*

– ויקיפדיה

ממציא השיטה הוא יעקב יעקובי (זה של היעקוביאן) בשנת 1846.

Carl Gustav Jacob Jacobi

1804 – 1851



- שימוש נרחב החל מ-1950, תחילת עידן המחשבים.
- יישומים רבים (הרחבה).

דוגמה

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & 3 & \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

הרעיון

להצמיד בכל איטרציה את המטריצה במטריצה אוניטרית, כך שסכום ריבועי האיברים שמחוץ לאלכסון יקטן, ובכך ללכסן את המטריצה.

נרצה למצוא צורה אלכסונית - ערכים עצמיים באלכסון הראשי:

מטריצה אוניטרית

מטריצה אוניטרית

איטרציה 1

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & 3 & \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

מטריצה אוניטרית

מטריצה אוניטרית

איטרציה 2

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

מוטיבציה
למה?

אלגוריתם נאיבי

בניית פולינום אופייני למטריצה ומציאת שורשיו

- עבור סדר 5 ואילך אין נוסחה סגורה (תורת גלואה)
- פרוצדורה ארוכה (שגיאה גדולה)
- חוסר יציבות

אלטרנטיבות

אלגוריתם	קלט	פלט
שיטת החזקה	מטריצה כללית	הערך העצמי הגדול והווקטור העצמי המתאים לו
שיטת החזקה ההפוכה	מטריצה כללית ומספר λ (קירוב) לערך העצמי המבוקש	הערך העצמי הקרוב ביותר ל-λ ואת הווקטור העצמי המתאים לו
אלגוריתם QR[1]	מטריצה כללית (יעיל יותר על מטריצת הסנברג)	כל הערכים והווקטורים העצמיים
איטרציות יעקובי	מטריצה סימטרית ממשית	כל הערכים והווקטורים העצמיים
אלגוריתם לנצוש	מטריצה סימטרית או מטריצה הרמיטית ומספר האטרציות	חלק מהערכים העצמיים
אלגוריתם ארנולדי	מטריצה כללית ומספר האטרציות	חלק מהערכים העצמיים

מקור: ויקיפדיה

למה לא שיטת QR?

QR	יעקובי
יתרונות	**יתרונות**
• עובד על כל מטריצה ריבועית • לרוב, חיסכון בחישוב המטריצה ההופכית	• עבור מטריצות סימטריות סדר התכנסות ריבועי • עיבוד מקבילי
חסרונות	**חסרונות**
• חוסר יציבות נומרית של תהליך גרם שמידט	• לא עובד על מטריצה שאינה סימטרית

אלטרנטיבות

אלגוריתם	קלט	פלט
שיטת החזקה	מטריצה כללית	הערך העצמי הגדול והווקטור העצמי המתאים לו
שיטת החזקה ההפוכה	מטריצה כללית ומספר λ (קירוב) לערך העצמי (המבוקש)	הערך העצמי הקרוב ביותר ל־λ ואת הווקטור העצמי המתאים לו
אלגוריתם QR[1]	מטריצה כללית (יעיל יותר על מטריצת הסנברג)	כל הערכים והווקטורים העצמיים
איטרציות יעקובי	מטריצה סימטרית ממשית	כל הערכים והווקטורים העצמיים
אלגוריתם לנצוש	מטריצה סימטרית או מטריצה הרמיטית ומספר האטרציות	חלק מהערכים העצמיים
אלגוריתם ארנולדי	מטריצה כללית ומספר האטרציות	חלק מהערכים העצמיים

מקור: ויקיפדיה

למה לא שיטת QR?

מהיר

QR

יתרונות

- עובד על כל מטריצה ריבועית
- לרוב, חיסכון בחישוב המטריצה ההופכית

חסרונות

- חוסר יציבות נומרית של תהליך גרם שמידט

יעקובי

יתרונות

- עבור מטריצות סימטריות סדר התכנסות ריבועי
- עיבוד מקבילי

חסרונות

- לא עובד על מטריצה שאינה סימטרית

אלטרנטיבות

אלגוריתם	קלט	פלט
שיטת החזקה	מטריצה כללית	הערך העצמי הגדול והווקטור העצמי המתאים לו
שיטת החזקה ההפוכה	מטריצה כללית ומספר λ (קירוב לערך העצמי המבוקש)	הערך העצמי הקרוב ביותר ל-λ ואת הווקטור העצמי המתאים לו
אלגוריתם QR[1]	מטריצה כללית (יעיל יותר על מטריצת הסנברג)	כל הערכים והווקטורים העצמיים
איטרציית יעקובי	מטריצה סימטרית ממשית	כל הערכים והווקטורים העצמיים
אלגוריתם לנצוש	מטריצה סימטרית או מטריצה הרמיטית ומספר האטרציות	חלק מהערכים העצמיים
אלגוריתם ארנולדי	מטריצה כללית ומספר האטרציות	חלק מהערכים העצמיים

מקור: ויקיפדיה

תיאור האלגוריתם

כל עוד האיברים מחוץ לאלכסון הראשי של מטריצה A אינם אפסים:

1. בחר באלמנט הגדול ביותר בערכו המוחלט שמחוץ לאלכסון הראשי – $a_{i,j}$, איבר זה ייקרא *pivot*

2. ניצור מטריצת גיבנס P בזווית θ בעלת מימדים של A
   $p_{i,i} \leftarrow \cos\theta$, $p_{j,j}$ $\qquad p_{j,i} \leftarrow -\sin\theta \qquad p_{i,j} \leftarrow \sin\theta$

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2a_{ij}}{a_{ii}-a_{jj}}\right)$$

3. מאחר ש-P אורתוגונלית, ההופכית שלה, P^{-1}, היא למעשה מתקבלת על ידי שיחלוף. כלומר $P^{T} = P^{-1}$.
   נאתחל את A במטריצה $A \leftarrow P^{-1}AP$.

איברי המטריצה שואפים לערכים העצמיים בכל איטרציה

תיאור האלגוריתם

קירוב מצוין. מספר סופי של איטרציות

~~כל עוד האיברים מחוץ לאלכסון הראשי של מטריצה A אינם אפסים:~~ **בצע K פעמים:**

1. בחר באלמנט הגדול ביותר בערכו המוחלט שמחוץ לאלכסון הראשי – $a_{i,j}$, איבר זה ייקרא *pivot*

2. ניצור מטריצת גיבנס P בזווית θ בעלת מימדים של A
$p_{j,j}, p_{i,i} \leftarrow \cos\theta \quad p_{j,i} \leftarrow -\sin\theta \quad p_{i,j} \leftarrow \sin\theta$

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2a_{ij}}{a_{ii}-a_{jj}}\right)$$

3. מאחר ש-P אורתוגונלית, ההופכית שלה, P^{-1}, היא למעשה מתקבלת על ידי שיחלוף. כלומר $P^{-1} = P^T$.
נאתחל את A במטריצה $A \leftarrow P^{-1}AP$.

איברי אלכסון המטריצה שואפים לערכים העצמיים בכל איטרציה

דוגמה לפעולת השיטה

קלט, מטריצה A

$$\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & 3 & \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

1. מחוץ לאלכסון

איבר מקסימאלי

$$a_{i,j} \leftarrow a_{13} = 2$$

2.

יצירת מטריצה P

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \cos\theta & \qquad & \sin\theta \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} -\sin\theta & \qquad & \cos\theta \end{array} \end{array}$$

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2a_{13}}{a_{11} - a_{33}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

דוגמה לפעולת השיטה

3.

חישוב $P^{-1}AP$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & 3 & \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

האיברים מחוץ לאלכסון הראשי אינם קרובים לאפס

נבצע שוב את האלגוריתם

איטרציה שניה

יצירת מטריצה P

$$\begin{array}{ccc} \cos\theta & \sin\theta & \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} -\sin\theta & \cos\theta & \\ \end{array}$$

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

.2

קלט, $A \leftarrow P^{-1}AP$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

.1 מחוץ לאלכסון

איבר מקסימלי

$a_{i,j} \leftarrow a_{12} = 2$

איטרציה שניה

.3

חישוב $P^{-1}AP$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

לכן הערכים העצמיים של המטריצה של המקורית הם:

$\lambda_1 = 5$

$\lambda_2 = 1$

$\lambda_3 = -1$

משמעות גיאומטרית

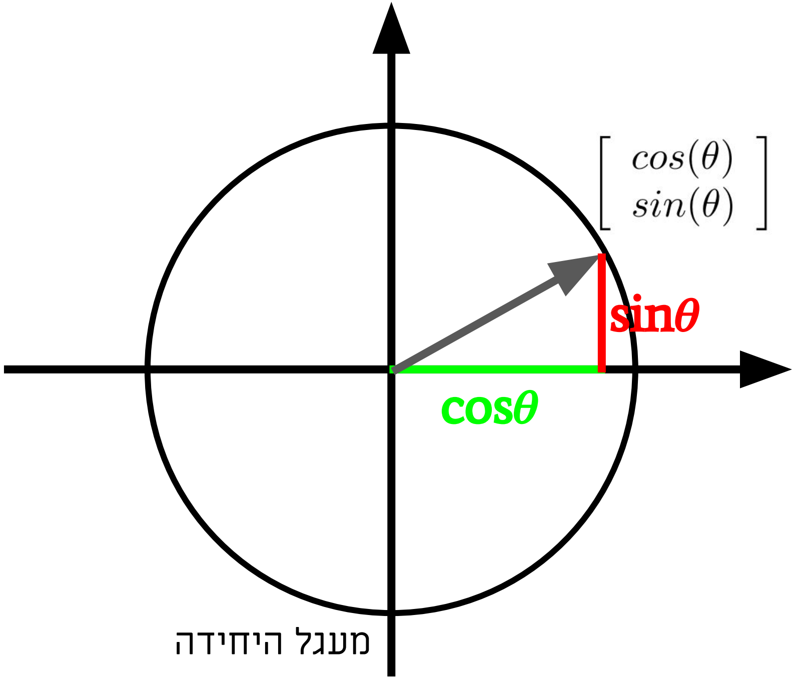
מטריצת סיבוב ב-2D

סיבוב ב-θ רדיאנים בכיוון החיובי
בשני מימדים. הדטרמיננטה שלה 1

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

ואכן,

$$R(\theta) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) \\ sin(\theta) \end{bmatrix}$$



משמעות גיאומטרית

מטריצות סיבובי גיבנס הן מטריצות סיבוב אשר מסובבות במישור 2D תחת מרחב n מימדי:

- איברי האלכסון הראשי 1-ים
- איברים מחוץ לאלכסון הראשי 0-ים
- אם הסיבוב בזווית θ במישור i,j:
  - האיבר במקום ה i,j מקבל $\sin\theta$
  - האיבר במקום ה j,i מקבל $-\sin\theta$
  - האיבר במקום ה i,i מקבל $\cos\theta$
  - האיבר במקום ה j,j מקבל $\cos\theta$

סיבובי גיבנס ב- 3D

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

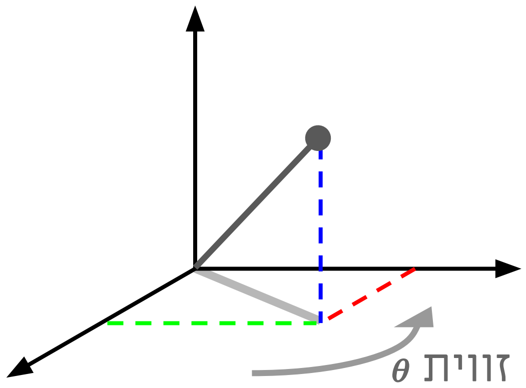
$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

משמעות גיאומטרית

מטריצות סיבובי גיבנס הן מטריצות סיבוב אשר מסובבות במישור 2D תחת מרחב n מימדי:

- איברי האלכסון הראשי 1-ים
- איברים מחוץ לאלכסון הראשי 0-ים
- אם הסיבוב בזווית θ במישור i,j:
  - האיבר במקום ה i,j מקבל $\sin\theta$
  - האיבר במקום ה j,i מקבל $-\sin\theta$
  - האיבר במקום ה i,i מקבל $\cos\theta$
  - האיבר במקום ה j,j מקבל $\cos\theta$

סיבובי גיבנס ב- 3D במישור x,y



משמעות גיאומטרית

מטריצות סיבובי גיבנס הן מטריצות סיבוב אשר מסובבות במישור 2D תחת מרחב n מימדי:

- איברי האלכסון הראשי 1-ים
- איברים מחוץ לאלכסון הראשי 0-ים
- אם הסיבוב בזווית θ במישור i,j:
  - האיבר במקום ה i,j מקבל **sinθ**
  - האיבר במקום ה j,i מקבל **-sinθ**
  - האיבר במקום ה i,i מקבל **cosθ**
  - האיבר במקום ה j,j מקבל **cosθ**

הצורה הכללית - גיבנס ב-n מימדים

$$Q_{k\ell} = \begin{array}{rc} & \begin{array}{ccccccc} & & & & \text{עמודה } \ell & & \end{array} \\ \text{שורה } k & \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & c & \cdots & s & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & -s & \cdots & c & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

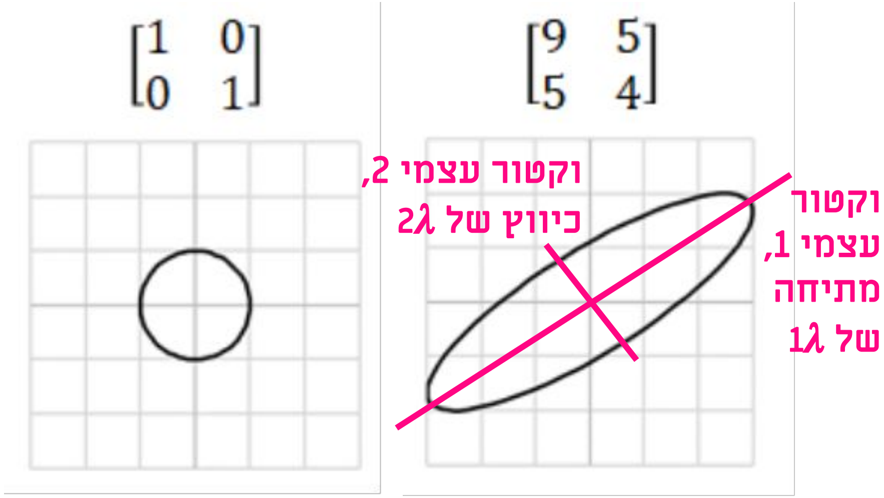
סיבוב במישור ℓk

s = sinθ

c = cosθ

משמעות גיאומטרית

מתיחה ספקטרלית ב-2D



$\lambda_1 \approx 12.090$

$\lambda_2 \approx 0.910$

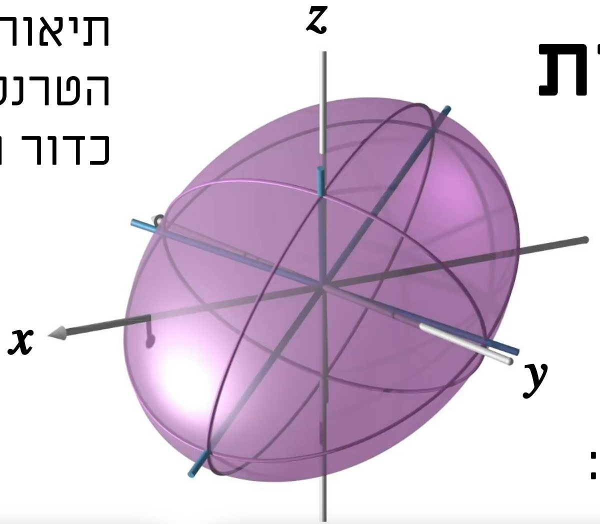
למעשה, ניתן לתאר **מטריצה ממשית סימטרית** כטרנספורמציה שמעתיקה:

- מעגל היחידה ← לאליפסה (מטריצות 2x2)
- כדור היחידה ← לאליפסואיד (מטריצות 3x3)
- היפר-כדור היחידה ← להיפר-אליפסואיד (מטריצות nxn)

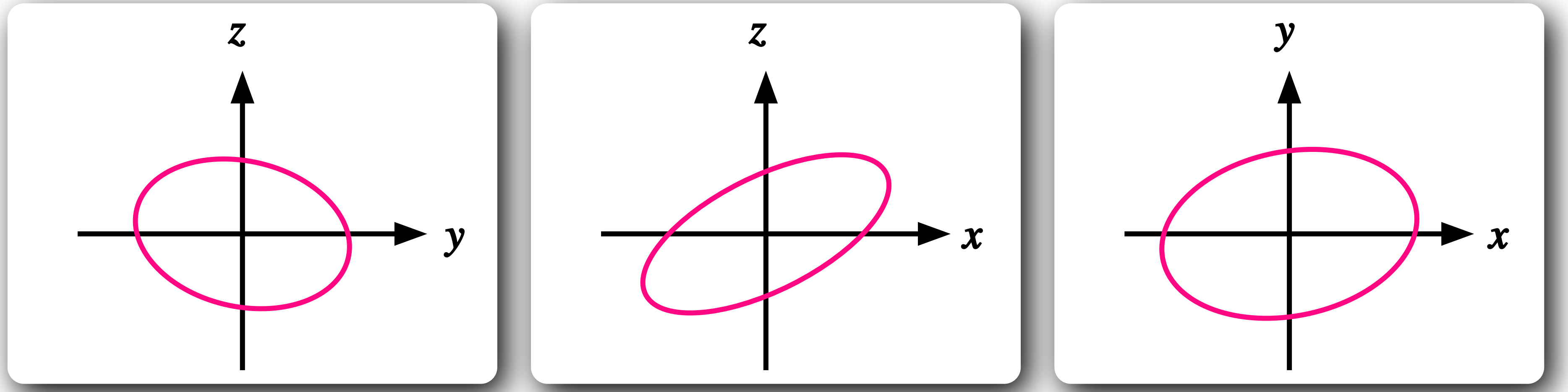
משמעות גיאומטרית

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & 3 & \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

תיאור ויזואלי של
הטרנספורמציה A על
כדור היחידה



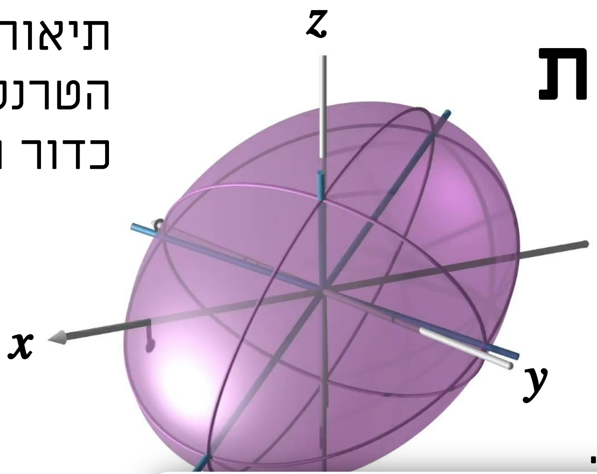
חיתוך האלפסואיד עם המישורים:



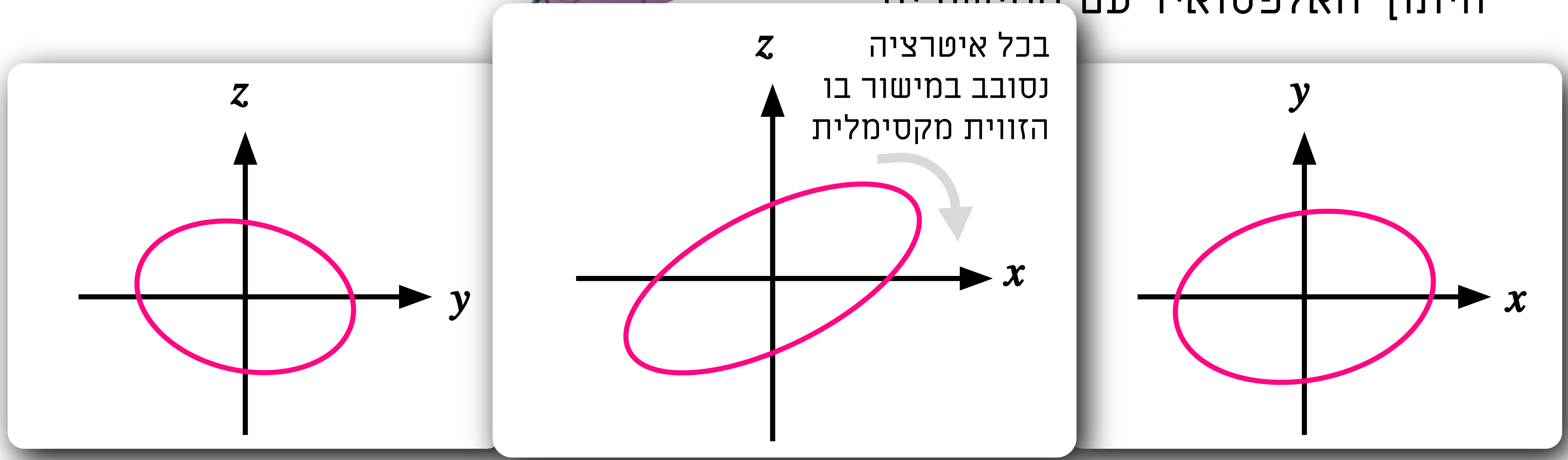
משמעות גיאומטרית

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & 3 & \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

תיאור ויזואלי של
הטרנספורמציה A על
כדור היחידה



חיתוך האלפסואיד עם המישורים:

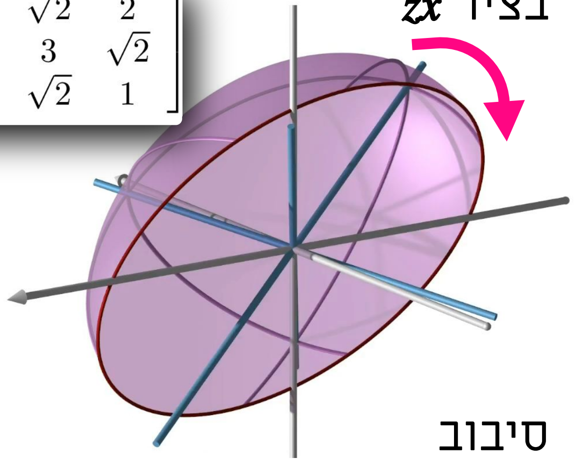


משמעות גיאומטרית

כל סיבוב מתבצע בעזרת כפל המטריצה במטריצת גיבנס

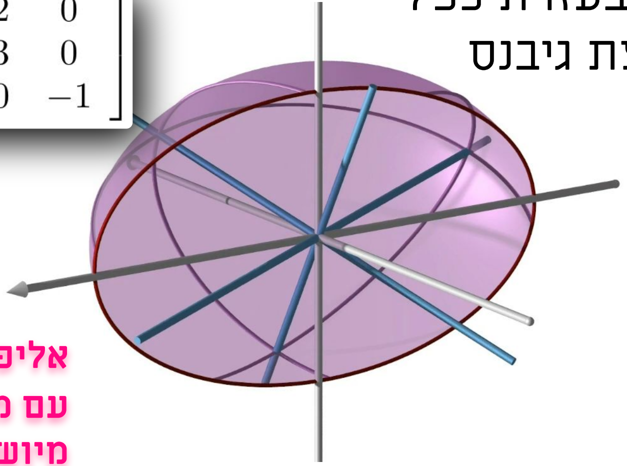
$$\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & 3 & \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

סיבוב בציר zx

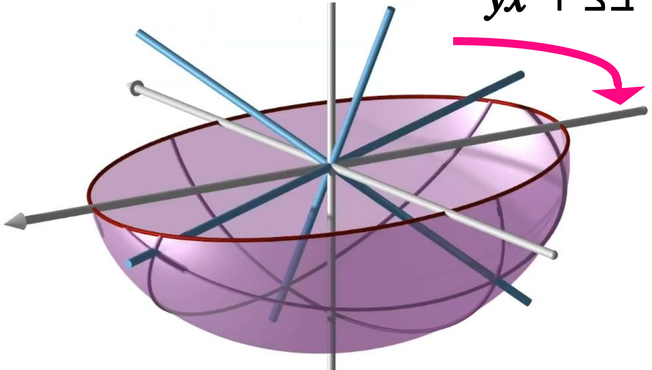


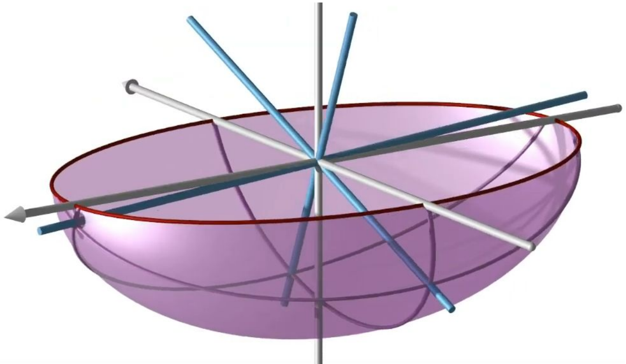
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

אליפסת החיתוך עם מישור zx מיושרת



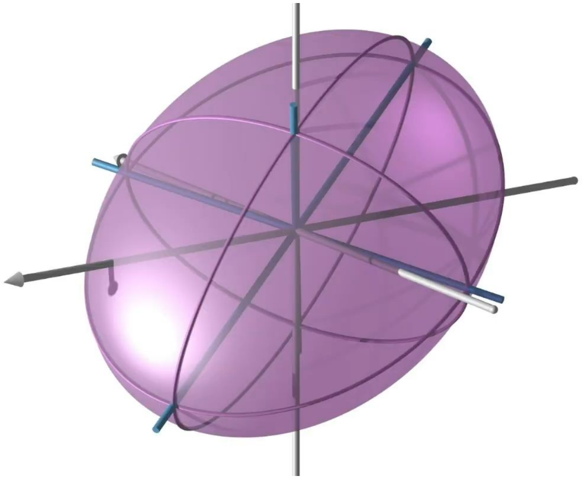
סיבוב בציר yx





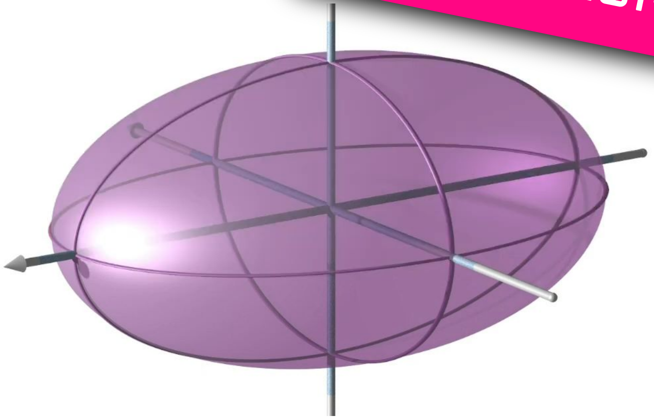
...יאומטרית

האליפסואיד
מיושר עם הצירים



$$A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & 3 & \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

שיטת
יעקובי



$$A^* = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

הערכים העצמיים

מימוש השיטה ב-MATLAB

```
function eigenvalues = jacobi_eigenvalues(A, K)
    n = size(A, 1);
    for k = 1:K
        max_off_diag = max(max(abs(triu(A,1))));
        if max_off_diag == 0 % already a diagonal matrix
            break;
        end
        [i, j] = find(abs(A - diag(diag(A))) == max_off_diag, 1);
        theta = 0.5 * atan(2 * A(i,j) / (A(i,i) - A(j,j)));
        R = eye(n); % Givens rotation matrix
        R(i,i) = cos(theta);
        R(j,j) = cos(theta);
        R(i,j) = -sin(theta);
        R(j,i) = sin(theta);
        A = R' * A * R;
    end
    eigenvalues = diag(A);
end
```

```
>> A = [1 sqrt(2) 2;
        sqrt(2) 3 sqrt(2);
        2 sqrt(2) 1];

>> K = 3; % number of iterations
>> V = jacobi_eigenvalues(A, K)
```

פקודות הרצה