ברוכים הבאים לתרגול 7 ☺

שחר אנגל

shaharbel0@gmail.com

תרגול- ימי שני 14-16 וימי חמישי 13-15

נושא התרגול

- מציאת תת מטריצה בעלת סכום מקסימלי

תיאור הבעיה

מציאת תת מטריצה עם סכום מקסימלי

- בהינתן מטריצה בגודל m*n, מהי תת המטריצה שסכום איבריה הוא הגדול ביותר?

- <u>לדוגמא:</u> נתונה מטריצה:

2	1	-3	-4	5
0	6	3	4	1
2	-2	-1	4	-5
-3	3	1	0	3

- מהי תת המטריצה בעלת הסכום המקסימלי עבורה?
- איך נחשב זאת?
- בכמה דרכים:

- **פתרון א'- חיפוש שלם**
- כמו שאנו יודעים, חיפוש שלם עובר על כל תתי המטריצות האפשריות, מחשב את הסכום שלהן ומחזיר לנו בסוף את התשובה הנכונה.
- מה החיסרון שלו?
  - בדר"כ זמן הריצה שלו גדול..
- איך נגדיר מלבן?

- כלומר, נצטרך לקחת את כל האפשרויות של i,j – הפינה השמאלית העליונה של המלבן, וכל האפשרויות של k,l- הפינה הימנית התחתונה של המלבן, לסכום ולקחת את המקסימום.
- כמה לולאות for נצטרך?
  - 6
  - 2 בשביל i,j, 2 בשביל k,l, ועוד 2 בשביל לסכום

- **פתרון א'- חיפוש שלם**
- פסאודו קוד:

- for i=1 to n
  - for j=1 to m
    - for k=i to n
      - for l=j to m
        - for x=i to k
          - for y=j to l
            - נחשב סכום
            - נעדכן מקסימום ואינדקסים

- סיבוכיות:
  - o(n^6)

- **פתרון ב'- מערך עזר**
- בפתרון זה נוכל להשתמש ב-Best כדי שיעזור לנו.
- נייצר את כל תתי השורות ואת כל תתי העמודות, נפעיל Best ונדע את התשובה.
- <u>לדוגמא:</u>

2	1	-3	-4	5
0	6	3	4	1
2	-2	-1	4	-5
-3	3	1	0	3

- אם נרצה לחבר את שורות 1-2 נעשה זאת כך:

2	4	2	8	-4

- אם נפעיל עליו את Best מה הוא יחזיר?
  - את תאים 1-4
  - אבל מה זה בעצם אומר?
    - שהוא מחזיר לנו את תת המטריצה מתא (0,1) לתא (2,3)
- כלומר, נרצה לקחת את כל תתי השורות האפשריות, להכניס למערך עזר, להפעיל את Best על המערך ולקבל את התשובות עבור תת מטריצה.

2	1	-3	-4	5
0	6	3	4	1
2	-2	-1	4	-5
-3	3	1	0	3

- **פתרון ב'- מערך עזר**
- סיבוכיות:
  - $o(n^2)$ לייצר את כל תתי השורות
  - $o(n^2)$ לסכום את כל תת המטריצה שקיבלנו
  - $o(n)$ להפעיל Best
- סה"כ נקבל: $o(n^4)$

- פסאודו קוד:

- for i=1 to n
  - for j=i to n
  - איפוס של מערך העזר
    - for k=i to j
      - for l=1 to m
        - arr[l] += Mat[k,l]
    - Best(arr)
    - נעדכן מקסימום ואינדקסים

- **פתרון ג'- מטריצת עזר**
- בפתרון זה נוכל להשתמש בתכנות דינאמי.
- הרעיון שעומד מאחורי הפתרון הוא שאם נתונים לנו סכומים חלקיים נוכל בעזרתם לחשב את הסכום הכולל.
- מה הכוונה?
- נגיד שאנו רוצים לחשב את תת המטריצה הזו:

2	1
0	6

ויש לנו כבר את הסכום של השורה הראשונה = 3, העמודה הראשונה = 2, ו-2, אז נוכל לקחת את הערך של 6 להוסיף לו את הסכום של השורה הראשונה, להוסיף את הסכום של העמודה הראשונה ולהוריד את הערך של 2 (כי ספרנו פעמיים) וכך לקבל סה"כ = 9

- נוכל לחשב את זה כך: נייצר מטריצת עזר שהערך בכל תא יהיה הסכום של המטריצה מנקודת ההתחלה ועד התא הזה
- <u>לדוגמא:</u>

1	-3
6	3

- מטריצת העזר תראה כך:

1	-2
7	7

- איך זה עוזר לנו?

פתרון ג'- מטריצת עזר

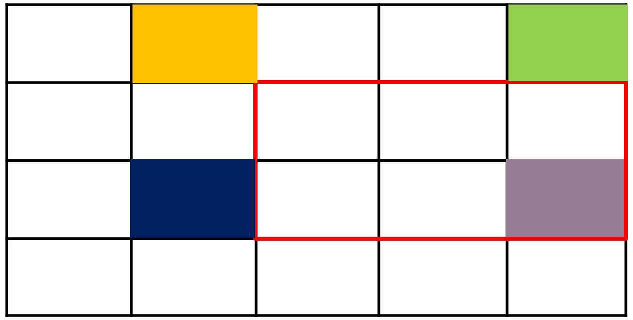
- בעזרת מטריצת העזר נוכל לחשב סכומים אחרים.
- <u>דוגמא קטנה:</u> נתונה המטריצה

1	-3
6	3

ומטריצת העזר שלה

1	-2
7	7

- אם נרצה לחשב את הסכום בתא $(2,2)$ נוכל לקחת את הסכום הכולל של $(1,1)$ עד $(2,2)$ במטריצת העזר, ולהוריד ממנו את הסכומים האחרים וכך להישאר עם הסכום שרצינו.
- ועכשיו בגדול: $A =$



$H =$

- אם נרצה לחשב את תת המטריצה האדומה המתחילה בתא $(1,2)$ ומסתיימת בתא $(2,4)$ נוכל לחשב זאת כך:
- בתא הסגול יש לנו את הסכום הכולל מ-$(0,0)$ ועד $(2,4)$, בתא הירוק יש לנו את הסכום הכולל מ-$(0,0)$ ועד $(0,4)$, בתא הכחול יש לנו את הסכום הכולל מ-$(0,0)$ ועד $(2,1)$ ובתא הכתום יש לנו את הסכום הכולל מ-$(0,0)$ ועד $(0,1)$.
- כעת, נחשב: התא הסגול – התא הירוק – התא הכחול + התא הכתום = הסכום של תת המטריצה האדומה שזה בדיוק מה שאנחנו צריכים ☺

- **פתרון ג'- מטריצת עזר**
- אבל איך בונים את מטריצת העזר H?
- נתחיל מהתאים הקלים: נמלא תחילה את השורה הראשונה והעמודה הראשונה:
- $H[0,j] = H[0,j-1] + A[0,j]$ וכנ"ל את העמודה (רק $H[i,0]$)
- בשביל למלא את שאר המטריצה נוכל להיעזר במה שמילאנו כבר:
- $H[i,j] = A[i,j] + H[i,j-1] + H[i-1,j] – H[i-1,j-1]$
- אחרי שבנינו את מטריצת העזר H, אנו צריכים לעבור עליה ולחשב את הסכומים של כל תתי המטריצות האפשריות:

A =

2	1	-3	-4	5
0	6	3	4	1
2	-2	-1	4	-5
-3	3	1	0	3

H =

- for i=1 to n
  - for j=1 to m
    - for k=i to n
      - for t=j to m
        - sum = H[k,t] – H[k,j-1] – H[i-1,t] + H[i-1,j-1]
        - נעדכן מקסימום ואינדקסים

- סיבוכיות:
  - o(n^4)

- **פתרון ד'- super Best**
- איך ניתן עכשיו לשפר את הסיבוכיות ל-o(n^3)?
- מה עזר לנו לרדת בסיבוכיות מ-o(n^6) ל-o(n^4)?
  - להוסיף עזר כדי לשמור נתוני ביניים
  - תכנות דינאמי/Best
- בואו נשתמש בעזרים אלו כדי לשפר עוד קצת את הסיבוכיות:
- במקום לאפס את מערך העזר בכל פעם, נשתמש בקיים ורק נוסיף את השורה החדשה, נפעיל Best ונמצא את כל תתי המטריצות שקשורות לתאים אלו.
- <u>דוגמת הרצה:</u>

2	1	-3	-4	5
0	6	3	4	1
2	-2	-1	4	-5
-3	3	1	0	3

start R =
start C =
end R =
end C =
sum =

- פתרון ד'- **super Best**
- פסאודו קוד:

- for i=1 to m
  - איפוס של מערך העזר
  - for j=i to m
    - for k=1 to n
      - arr[k] += Mat[k,j]
    - Best(arr)
    - נעדכן מקסימום ואינדקסים

- סיבוכיות:
  - o(n^3)
  - אבל זה רק סדר גודל.. הסיבוכיות האמיתית היא o(n*m^2)
- האם כדאי לרוץ על השורות ולסכום עמודות או לרוץ על העמודות ולסכום את השורות?
  - תלוי בקלט- אם המטריצה לאורך נרוץ על שורות ואם היא לרוחב אז נרוץ על עמודות.

אז מה צריך לתכנת?

- כל מה שדיברנו עליו היום ☺

1. חיפוש שלם- o(n^6)
2. מערך עזר ו-Best- o(n^4)
3. מטריצת עזר- o(n^4)
4. Super Best- o(n^3)

בהצלחה ☺