

# ברוכים הבאים לתרגול 13 😊

שחר אנגל

[shaharbel0@gmail.com](mailto:shaharbel0@gmail.com)

תרגול- ימי שני 14-16 וימי חמישי 13-15



# נושאי התרגול

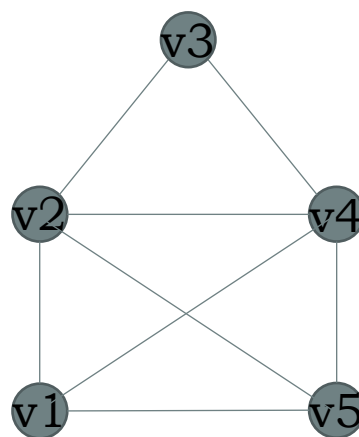
- אוילר
- מציאת עץ פורש מינימלי- פרים



## ■ אוילר

- הגדרה: יהי  $G(V,E)$  גרף לא מכוון.  
מסלול  $P_{x,y}$  נקרא **מסלול אוילר** ב- $G$ , אם הוא עובר בכל הצלעות של  $G$  כך שכל צלע מופיעה בו פעם אחת בלבד, ובנוסף  $x \neq y$ . (כלומר, מתחילים בקודקוד אחד ומסיימים בקודקוד אחר)

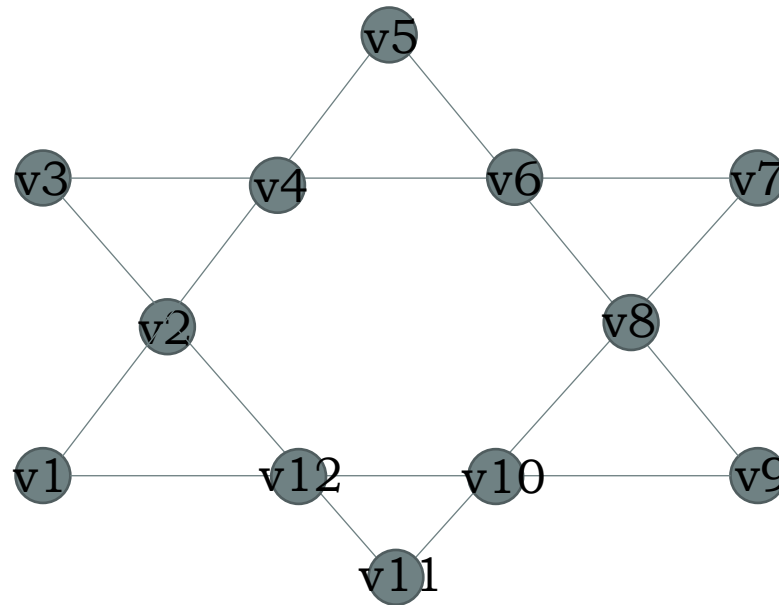
## ■ לדוגמא:



## ■ אוילר

- הגדרה: יהי  $G(V,E)$  גרף לא מכוון.  
מעגל אוילר ב- $G$  הוא מסלול אוילר סגור, כלומר מסלול העובר בכל צלעות הגרף פעם אחת בלבד והקודקוד ההתחלתי הוא גם קודקוד הסיום.

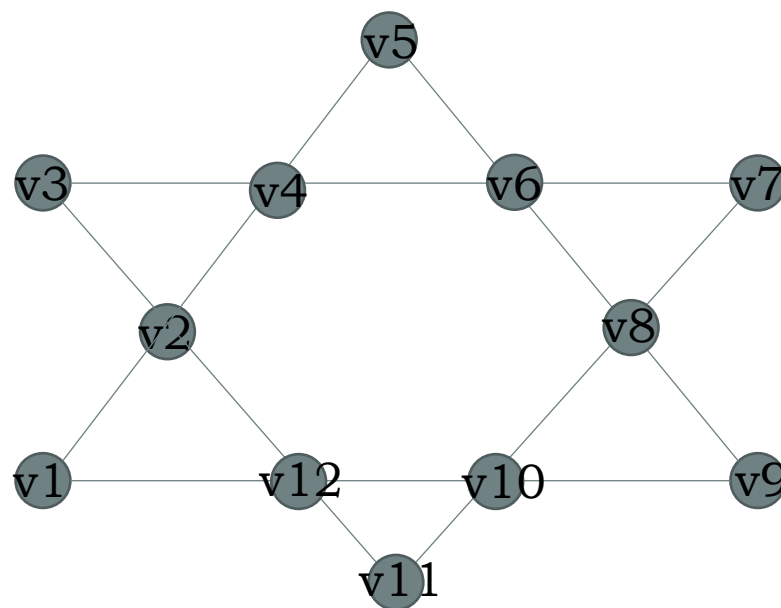
## ■ לדוגמא:



■ אוילר

■ הגדרה: יהי  $G(V,E)$  גרף לא מכוון.  
גרף אוילנריאני הוא גרף המכיל מעגל אוילר

■ לדוגמא:

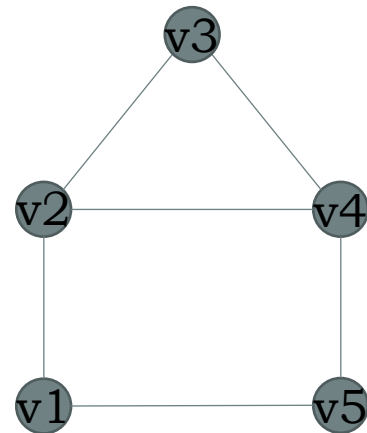


## ■ אוילר

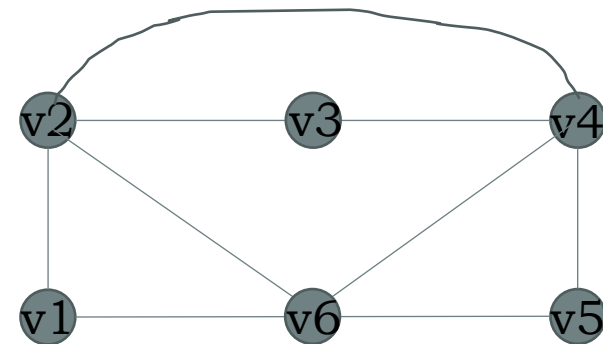
### ■ משפטי זיהוי אוילר בגרפים:

1. יש בגרף  $G$  מעגל אוילר (גרף אוילריאני) אם ורק אם  $G$  קשיר וכל דרגות הגרף זוגיות.
2. יש בגרף  $G$  מסלול אוילר אם ורק אם  $G$  קשיר ובדיוק 2 קודקודים בעלי דרגות אי זוגיות.

### ■ לדוגמא:



מסלול



מעגל

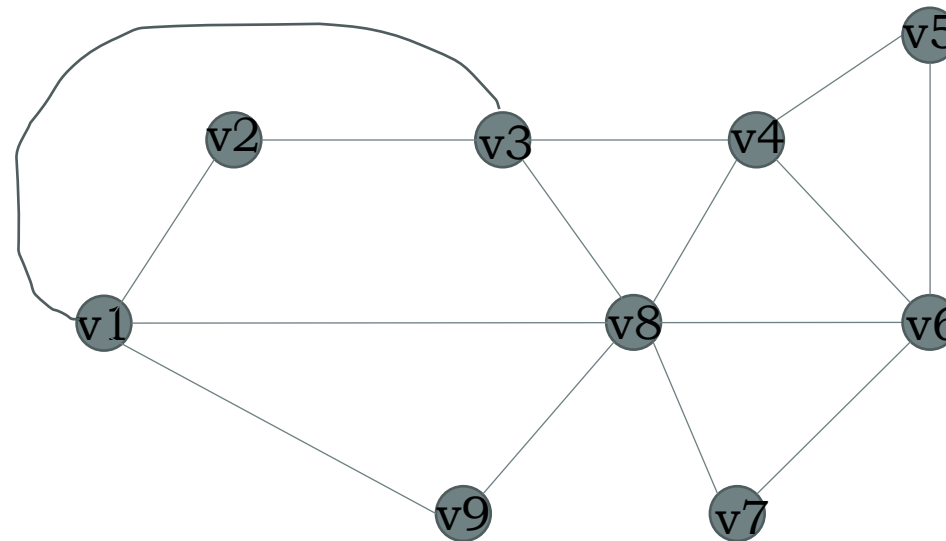


■ אוילר

■ אלגוריתם למציאת מעגל אוילר - רעיון:

1. נתחיל מקודקוד מסוים ונתחיל ממנו מסלול (לא חוזרים על צלע פעמיים) עד שהוא סוגר מעגל
2. אם עברנו על כל הקודקודים נעבור לסעיף 3. אחרת, נוריד את המעגל מהגרף ונחזור לסעיף 1
3. אם יש רק מעגל אחד - סיימנו. אחרת, נאחד בין המעגלים: נתחיל מסלול ממעגל מסוים, וכאשר נגיע למעגל חדש נסגור קודם את המעגל החדש ואז נחזור למעגל הקודם

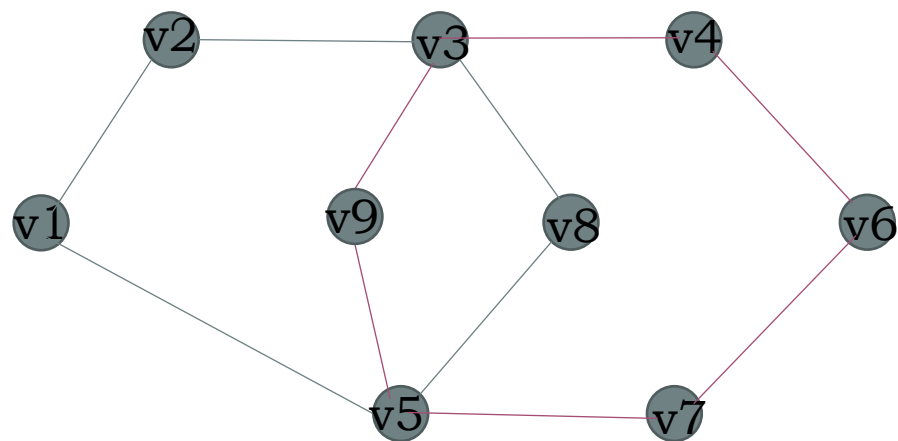
לדוגמא: ■



■ אוילר

■ איך נאחד בין המעגלים?

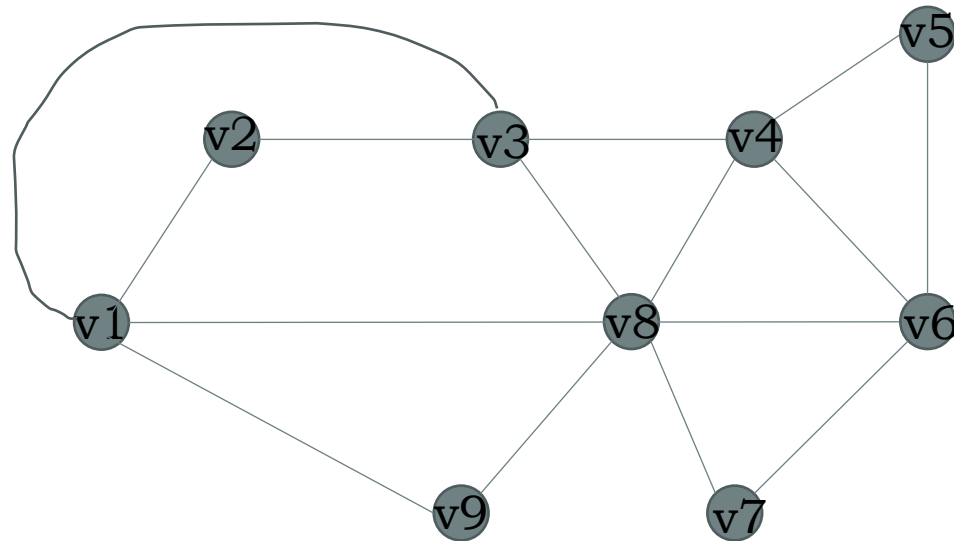
■ לדוגמא:





■ אוילר

■ נחזור לדוגמא שלנו:



■ אוילר

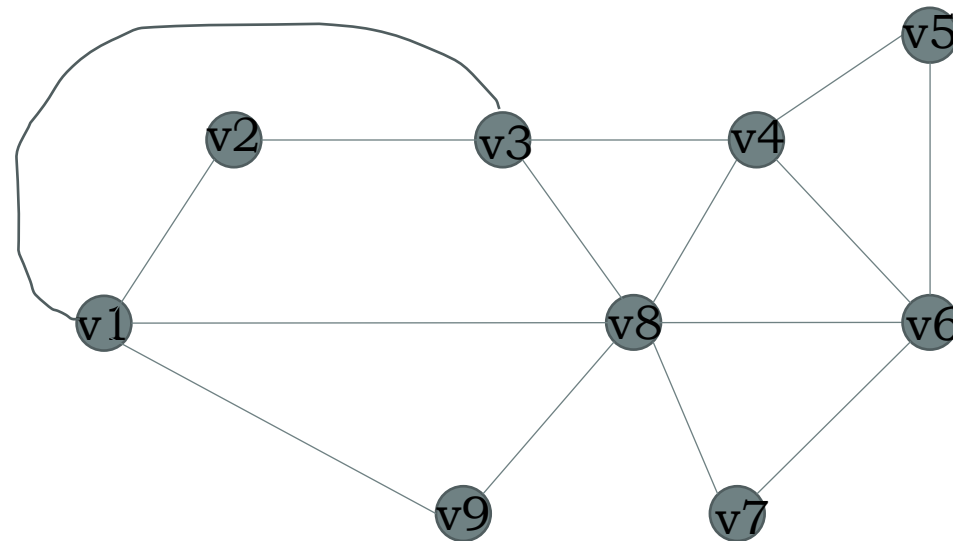
■ אלגוריתם נוסף למציאת מעגל אוילר - רעיון:

## 1. בחר קודקוד

## 2. התחל מסלול ממנו

3. אם סגרך מעגל, תדפיס את הקודקודים בחזרה עד שיהיה אפשר להמשיך בדרך אחרת

לדוגמא: ■



- EulerCycle(G):
- stack  $S = \text{null}$ , stack  $C = \text{null}$
- $S.\text{push}(v_0)$
- while  $S$  is not empty:
  - $u = s.\text{top}()$
  - if  $\text{deg}(u)=0$ :
    - $S.\text{pop}()$
    - $C.\text{push}(u)$
  - else
    - $v = v \in N(u)$
    - $S.\text{push}(v)$
    - $E = E - \{u,v\}$
- return  $C$

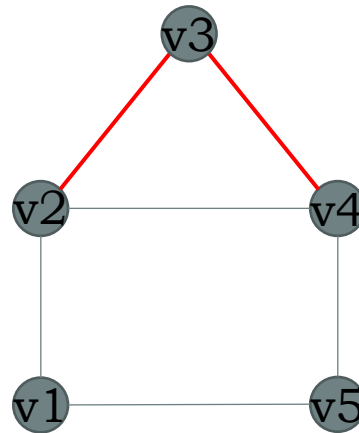


## ■ עץ פורש מינימלי- פרים

- האלגוריתם של פרים הוא אלגוריתם חמדני המשמש למציאת עץ פורש מינימלי בגרף ממושקל לא מכוון.
- האלגוריתם מתחיל את בניית העץ מקודקוד פתיחה שנבחר באקראי.
- בכל צעד האלגוריתם נוסף לעץ את הצלע בעלת המשקל המינימלי מבין אלה היוצאות מקודקודי העץ ולא סוגרות מעגל.

- איך נוודא שלא סגרנו מעגל?
- כאשר נרצה להוסיף צלע לעץ, נוודא שרק אחד מהקודקודים קיים בעץ.

■ לדוגמא:



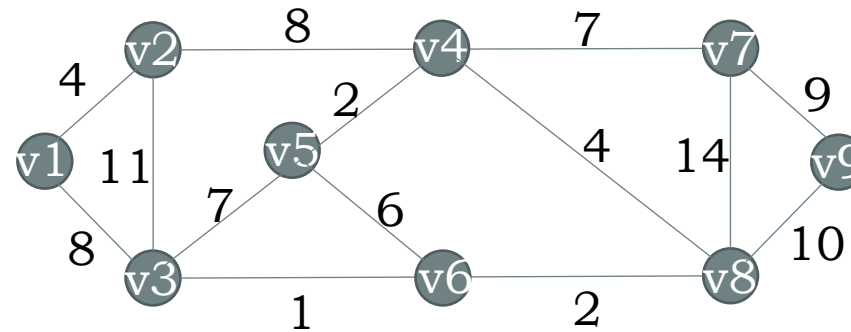
▪ עץ פורש מינימלי- פריים

▪ איך נשמור את העץ?

▪ בעזרת מערך אבות

▪ בנוסף, נרצה לדעת את המשקל המינימלי של העץ הפורש שמצאנו ולכן נשתמש גם במערך משקלים שבכל תא נשמור את המשקל המינימלי שיצא מאותו קודקוד בעץ שנבחר

▪ לדוגמא:



	father	key	visited
v1			
v2			
v3			
v4			
v5			
v6			
v7			
v8			
v9			



```
▪ Prim(G, root):  
o(n)  ▪ for each v in V(G):  
      ▪ visited[v] = false  
      ▪ key[v] = inf  
      ▪ father(v) = NULL  
  
      ▪ key[root] = 0  
  
o(n)  ▪ Q = V(G) // Q = min heap  
      ▪ while (Q is not empty) // or for i=1 to N-1  
o(logn) ▪ u = Extract_Min(Q)  
      ▪ for each v in N(u)  
        ▪ if(visited[v] == false and key[v] > weight(u,v))  
          ▪ key[v] = weight(u,v)  
          ▪ father[v] = u  
o(logn) ▪ decreaseKey(Q,v, weight(u,v))  
      ▪ visited[u] = true
```

סיבוכיות?

$O(|E| * \log(|V|))$



# אז מה צריך לתכנת?

- כל מה שדיברנו עליו היום 😊
- אוילר
- פריים

בהצלחה 😊

