Examen Primer Bimestre: Métodos Numéricos

Tuesday, July 20, 2021 8:52 AM

Gutemberg S. Mendoza 20/July/2021

Cuestión 1 (1 pt.) – Usando, por separado, las estimativas iniciales a) $x_0 = 1$ y b) $x_0 = -1$, encuentre las dos raíces de la siguiente función $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \cos(x)$ empleando el método de Newton. Observación: $f'(x) = \frac{x}{2} + \sin(x)$, tolerancia $T = 10^{-5}$ y trabaje en radianes.

Metodo de Newton:

$$X_K = X_{K-1} - \frac{f(X_{K-1})}{f'(X_{K-1})}$$

$T = 0,00001$

① Resolución:

a) $X_0 = 1$

Primera iteración: $k=1$

$$X_K = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \cos(1)}{\left(\frac{1}{2}\right) + \sin(1)} = 1,21641 \; ; \; |1,21641 - 1| = 0,21641 \leq T \; (X)$$

Segunda iteración: $k=2$

$$X_K = 1,21641 - \frac{f(1,21641)}{f'(1,21641)} = 1,20159 \; ; \; |1,20159 - 1,21641| = 0,01481 \leq T \; (X)$$

Tercera iteración: $k=3$

$$X_K = 1,20159 - \frac{f(1,20159)}{f'(1,20159)} = 1,20153 \; ; \; |1,20153 - 1,20159| = 0,00006 \leq T \; (X)$$

Cuarta iteración $k=4$

$$X_K = 1,20153 - \frac{f(1,20153)}{f'(1,20153)} = 1,20154 \; ; \; |1,20154 - 1,20153| = 0,00001 \leq T \; (✓)$$

$\therefore$ Con 4 iteraciones alcanzamos el valor de $X = 1,2054$; $f(1,20154) = \left(\frac{1,20154}{2}\right)^2 - \cos(1,20154)$

$= 0,000002607 \approx 0$ ✓

Cuestión 2 (1 pt.) – Aplique un método iterativo para calcular una aproximación para la derivada de la función $f(x) = x^2 - 3x + 4$ utilizando el método de las diferencias retrasadas en el punto $x = 5$, con una tolerancia de 10^{-3} y $\Delta x = 0.1$ al inicio de la iteración. Utilice un criterio de parada relativo.

D.f. Retrasadas.

$T = 0,001$

$T_R = 0,10\%$ error admitido.

② Solución:

Primera iteracion $\Delta X_K = 5$, $k=1$

$$f'(5) = \frac{f(5) - f(5 - 0,1)}{0,1} = \frac{14 - 13,31}{0,1} = 6,9.$$

Segunda iteración $\Delta X_K = 0,1/2$, $k=2$

$$f'(5) = \frac{f(5) - f(5-0{,}05)}{0{,}05} = \frac{14 - 13{,}6525}{0{,}05} = 6{,}95 \quad ; \quad \frac{|6{,}950 - 6{,}900|}{6{,}900} \times 100 = 0{,}73\%$$

$0{,}73\% \leq 0{,}10$ (✗)

Tercera iteracion. $\Delta x_k = \frac{0{,}05}{2} = 0{,}025$, $k=3$

$$f'(5) = \frac{f(5) - f(5-0{,}025)}{0{,}025} = \frac{14 - 13{,}826}{0{,}025} = 6{,}96 ; \quad \frac{|6{,}960 - 6{,}950|}{6{,}950} \times 100 = 0{,}14\%$$

$0{,}14\% \leq 0{,}10$ (✗)

Cuarta iteración $\Delta x_k = \frac{0{,}025}{2} = 0{,}0125$, $k=4$

$$f'(5) = \frac{f(5) - f(5-0{,}0125)}{0{,}0125} = \frac{14 - 13{,}913}{0{,}0125} = 6{,}96 ; \quad ; \quad \frac{|6{,}960 - 6{,}960|}{6{,}960} \times 100 = 0\%$$

$0\% \leq 0{,}10$ (✓)

$\therefore$ Con 4 iteraciones se obtiene $f'(5) \approx 6{,}96$ // el valor real es 7.
con tolerancia de 0,001

Cuestión 3 (1 pt.) – Usando el método de Gauss-Jacobi, respetando el criterio suficiente de aplicación para garantizar la convergencia, obtenga una "aproximación" para la solución del siguiente sistema de ecuaciones algébricas lineales. Si no converge, realice al menos tres iteraciones y deje claramente explicado el criterio de parada.

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 15 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 13 \\ 40 \\ 5 \end{Bmatrix}, \qquad \vec{x}_o{}^T = \{1 \quad 1 \quad 1\} \quad \text{y} \quad Tol = 1 \times 10^{-2}$$

③ Solución:

Matriz inicial:

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 15 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 40 \\ 5 \end{pmatrix} ; \quad \vec{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad Tol = 0{,}01$$

→ Recordemos que este metodo solo acepta matrices con dominancia diagonal: nuestra matriz inicial no tiene, por ende realicemos $F_2 \leftrightarrow F_3$, de donde

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 15 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 40 \end{pmatrix} , \quad \vec{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad : Tol \ 0{,}01$$

Del algoritmo de Gauss-Jacobi se extrae la siguiente formula basada en 3×3

$$X_{1_K} = \frac{1}{9}\left(13 - 3X_2^{(K-1)} - (1)X_3^{(K-1)}\right)$$

$$X_{2_K} = \frac{1}{3}\left(5 - (1)X_1^{(K-1)} - (1)X_3^{(K-1)}\right)$$

$$X_{3_K} = \frac{1}{15}\left(40 - (1)X_1^{(K-1)} - (3)X_2^{(K-1)}\right)$$

Primera iteración : $K=1$

$$X_1 = \frac{1}{9}\left(13 - 3(1) - (1)(1)\right) = 1$$

$$X_2 = \frac{1}{3}\left(5 - (1) - 1\right) = 1 \quad ; \quad X_{0_1} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2{,}4 \end{Bmatrix} \quad ; \quad X_K - X_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}4 \end{Bmatrix}$$

$$X_3 = \frac{1}{15}\left(40 - 1 - 3\right) = 2{,}4$$

$$\|X_K - X_0\| = 1{,}4 \leq 0{,}01 \ (\times)$$

Segunda iteración $K=2$

$$X_1 = \frac{1}{9}\left(13 - 3(1) - (1)(2{,}4)\right) = 0{,}84$$

$$X_2 = \frac{1}{3}\left(5 - (1) - 2{,}4\right) = 0{,}53 \quad ; \quad X_{0_2} = \begin{Bmatrix} 0{,}84 \\ 0{,}53 \\ 2{,}4 \end{Bmatrix} \quad ; \quad X_K - X_0 = \begin{Bmatrix} 0{,}16 \\ 0{,}47 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$X_3 = \frac{1}{15}\left(40 - (1) - 3\right) = 2{,}4.$$

$$\|X_K - X_0\| = 0{,}49 \leq 0{,}1 \ (\times)$$

Tercera iteración $K=3$

$$X_1 = \frac{1}{9}\left(13 - 3(0{,}53) - 2{,}4\right) = 1{,}00$$

$$X_2 = \frac{1}{3}\left(5 - 0{,}84 - 2{,}4\right) = 0{,}59 \quad X_{0_3} = \begin{Bmatrix} 1{,}00 \\ 0{,}59 \\ 2{,}50 \end{Bmatrix} \quad X_K - X_0 = \begin{Bmatrix} 0{,}16 \\ 0{,}06 \\ 0{,}1 \end{Bmatrix}$$

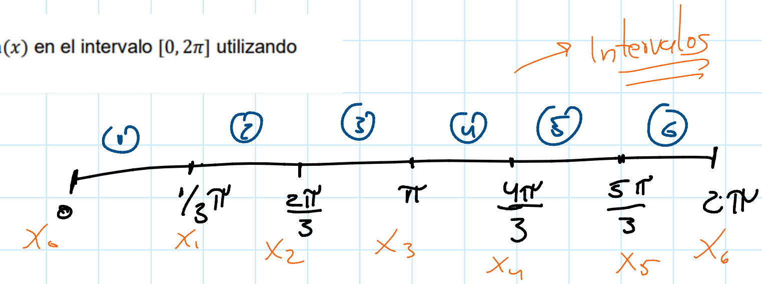
$$X_3 = \frac{1}{15}\left(40 - 0{,}84 - 3(0{,}53)\right) = 2{,}50$$

$$\|X_K - X_0\| = 0{,}10 \leq 0{,}1 \ (\checkmark)$$

$\therefore$ Para 3 iteraciones el metodo converge a la tolerancia y estima la solución del sistema de ecuaciones como

$$\text{Solución} = \begin{Bmatrix} 1{,}00 \\ 0{,}59 \\ 2{,}50 \end{Bmatrix}$$

Cuestión 4 (1 pt.) – Obtenga la integral de la función $f(x) = \sin(x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$ utilizando el método del Trapecio. Utilice 6 subintervalos.



(4) Solución

$$I = \int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx \quad ; \quad f(x_0 = 0) = \sin(0) = 0$$

$$f(x_n = 2\pi) = \sin(2\pi) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{5} f(x_i) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5)$$

$$= \sin\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) + \sin\left(2\pi/3\right) + \sin(\pi) + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$= \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} + 0 + \cancel{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} + \cancel{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx = \frac{2\pi - 0}{2}\Big(0 + 0 + 2(0)\Big) = 0$$

Simpson