EXAMEN SIMULADO

Thursday, July 15, 2021 9:06 AM

1) Método de Newton:

Estimativas iniciales a probar: función : $f(x) = x^2 - 4$ Tolerancia: $1.0 \times 10^{-5} = 0,00001$

a) $x_0 = 3$ b) $x_0 = -3$ Dev : $f'(x) = 2x$

Para $x_0 = 3$; $f(x) = x^2 - 4$; $f'(x) = 2x$

Metodo de Newton

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$$

, Notese que busamos x en $x^2 - 4 = 0$

$x = sqrt(4)$

; Buscamo

$|x_k - x_{k-1}| \leq T$

•) Para $x_0 = 3$

• $x_k = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 3 - \frac{5}{6} = 2,16667$; $T = 3 - 2,16667 = 0,83333 \leq 0,00001$ (X)

•) $x_0 = 2,1667$

- $x_k = 2,1667 - \frac{f(2,1667)}{f'(2,1667)} = 2,006383$; $T = 2,16667 - 2,00638 = 0,16029 \leq 0,00001$ (X)

•) $x_0 = 2,00638$

- $x_k = 2,00638 - \frac{f(2,00638)}{f'(2,00638)} = 2,00001$; $T = 2,00638 - 2,00001 = 0,00637 \leq 0,00001$ (X)

•) $x_0 = 2,00001$

$x_k = 2,00001 - \frac{f(2,00001)}{f'(2,00001)} = 2,00000$; $T = 2,00001 - 2,00000 = 0,00001 \leq 0,00001$ (✓)

Solucion

Primera Solución:

iteración	x_k	Tolerancia
1	3	0,83333
2	2,16667	0,16029

1	3	0,83333
2	2,16667	0,16029
3	2,00638	0,00637
4	2,6001	0,0001

• Para $X_0 = -3$; $f(x) = x^2 - 4$; $f'(x) = 2x$; $T = 0{,}00001$

• $X_0 = -3$

$$X_K = -3 - \frac{f(-3)}{f'(-3)} = -2{,}16667 \quad ; \quad T = |-3 + 2{,}16667| = 0{,}83333 \leq 0{,}00001 \ (X)$$

• $X_0 = -2{,}16667$

$$X_K = -2{,}16667 - \frac{f(-2{,}16667)}{f'(-2{,}16667)} = -2{,}00641 \quad ; \quad T = |-2{,}16667 + 2{,}00641| = 0{,}16024 \leq 0{,}00001 \ (X)$$

• $X_0 = -2{,}00641$

$$X_K = -2{,}00641 - \frac{f(-2{,}00641)}{f'(-2{,}00641)} = -2{,}00001 ; \quad T = |-2{,}00641 + 2{,}00001| = 0{,}0064 \leq 0{,}00001 \ (X)$$

• $X_0 = -2{,}00001$

$$X_K = -2{,}00001 - \frac{f(-2{,}00001)}{f'(-2{,}00001)} = -2 \quad ; \quad T = |-2{,}00000 + 2{,}00001| = 0{,}00001 < 0{,}00001 \ (\checkmark)$$

↳ Solución

Tabla de iteraciones

iteración	X_0	X_k	Tolerancia	
1	-3	-2,16667	0,83333	✗
2	-2,16667	-2,00641	0,16024	✗
3	-2,00641	-2,00001	0,0064	✗
4	-2,00001	-2,00000	0,00001	✓

② Algoritmo Derivación numérica (Diferencias Avanzadas)

$f(x) = x^2 - 4$, $f'(-2) = ?$ Valor inicial $\Delta x = 0,1$. $T = 0,01$.

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$, la iteracion Avanza tal que $\Delta x_k = \frac{\Delta x_{k-1}}{2}$, $|\Delta x - \Delta x_k| \leq T$

Analiticamente:

$f'(-2) = 2(-2) = -4$

$\Delta x = 0,1$.

·) $f'(-2) = \dfrac{f(-2+0,1) - f(-2)}{0,1} = \dfrac{-0,39 - 0}{0,1} = -3,9$

$\rightarrow \frac{\Delta x}{2} = \frac{0,1}{2} = 0,05$, $|0,1 - 0,05| = 0,05 \leq 0,01$ (X)

·) $f'(-2) = \dfrac{f(-2+0,05) - f(-2)}{0,05} = \dfrac{-0,1475 - 0}{0,05} = -3,95$

$\rightarrow \frac{\Delta x}{2} = \frac{0,05}{2} = 0,025$, $|0,05 - 0,025| = 0,025 \leq 0,01$ (X)

· $f'(-2) = \dfrac{f(-2+0,025) - f(-2)}{0,025} = \dfrac{-0,099375 - 0}{0,025} = -3,975$

$\frac{\Delta x}{2} = \frac{0,025}{2} = 0,0125$, $|0,025 - 0,0125| = 0,0125$ (✓).

$\cdot\ f(-2) = \dfrac{f(-2+0,0125) - f(-2)}{0,0125} = \dfrac{-0,04984 - 0}{0,0125} = -3,9872$

Aquí se Alcanza la tolerancia (solución).

---

3 Gauss - Jacobi

$$\begin{cases} 14x_1 + 10x_2 + 7x_3 = 137 \\ 5x_1 + 11x_2 + 8x_3 = 110 \\ x_1 + 6x_2 + 20x_3 = 100 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 14 & 10 & 7 \\ 5 & 11 & 8 \\ 1 & 6 & 20 \end{pmatrix}}_{A_{n\times n},\ 3\times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 137 \\ 110 \\ 100 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Ya tiene dominancia diagonal

A no tiene ceros

$$X_0 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

En general para 3x3.

$$x_1 = \frac{1}{14}\left(137 - 10x_2^{(k+1)} - 7x_3^{(k+1)}\right)$$

$$x_2 = \frac{1}{11}\left(110 - 5x_1^{(k+1)} - 8x_3^{(k+1)}\right)$$

$$x_3 = \frac{1}{20}\left(100 - 1x_1^{(k+1)} - 6x_2^{(k+1)}\right)$$

Primera iteración $X_0^T = \{1, 1, 1\}$

$$x_1 = \frac{1}{14}\left(137 - 10(1) - 7(1)\right) = 8,57142$$

$$x_2 = \frac{1}{11}\left(110 - 5(1) - 8(1)\right) = 8,81818$$

$$x_3 = \frac{1}{20}\left(100 - 1 - 6\right) = 4,65$$

; $X_k = \begin{Bmatrix} 8,57142 \\ 8,81818 \\ 4,65 \end{Bmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} x_{k_1} \\ x_{k_2} \\ x_{k_3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{o_1} \\ x_{o_2} \\ x_{o_3} \end{pmatrix}$

· **Segunda iteración** $X_0 = \begin{Bmatrix} 8,57142 \\ 8,81818 \\ 4,65 \end{Bmatrix}$

$$X_1 = \frac{1}{14}\left(137 - 10(8{,}81818) - 7(4{,}65)\right) = 1{,}16201$$

$$X_2 = \frac{1}{11}\left(110 - 5(8{,}57142) - 8(4{,}65)\right) = 2{,}72208$$

$$X_3 = \frac{1}{20}\left(100 - 1(8{,}57142) - 6(8{,}81818)\right) = 1{,}925975$$

$$X_k = \begin{Bmatrix} 1{,}16201 \\ 2{,}72208 \\ 1{,}925975 \end{Bmatrix}$$

- **Tercera iteración** $X_0 = \begin{Bmatrix} 1{,}16201 \\ 2{,}72208 \\ 1{,}925975 \end{Bmatrix}$

$$X_1 = \frac{1}{14}\left(137 - 10(2{,}72208) - 7(1{,}925975)\right) = 6{,}878383$$

$$X_2 = \frac{1}{11}\left(110 - 5(1{,}16201) - 8(1{,}925975)\right) = 8{,}0711045$$

$$X_3 = \frac{1}{20}\left(100 - 1{,}16201 - 6(2{,}72208)\right) = 4{,}125275$$

- **Cuarto iteración** $X_0 = \begin{Bmatrix} 6{,}878383 \\ 8{,}0711045 \\ 4{,}125275 \end{Bmatrix}$

$$X_1 = \frac{1}{14}\left(137 - 10(8{,}0711045) - 7(4{,}125275)\right) = 1{,}958\,0021$$

$$X_2 = \frac{1}{11}\left(110 - 5(6{,}878383) - 8(4{,}125275)\right) = 3{,}873984$$

$$X_3 = \frac{1}{20}\left(100 - 6{,}878383 - 6(8{,}0711045)\right) = 2{,}2347$$

$$X_k = \begin{Bmatrix} 1{,}958004 \\ 3{,}873984 \\ 2{,}2347 \end{Bmatrix}$$

El proceso continua igual

converge a una Tolerancia 0,001 con el menor 24 iteración lo cual no es optimo seguir realizando

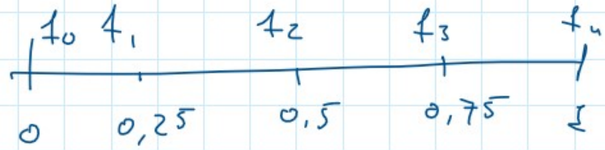
---

(4) Metodo de simpson.

- 4 intervalos ; $\int_0^1 3^x \, dx$; Valor analitico: $\int_0^1 3^x \, dx = 1{,}82048$

Metodo de simpson

$$I(f) \simeq \frac{h}{3}\left(f_0 + 4\underbrace{\sum_{i=1}^{n/2} f_{2i-1}}_{\text{impares}} + 2\underbrace{\sum_{i=1}^{n/2-1} f_{2i}}_{\text{pares}} + f_n\right)$$



K=1 hasta n=4, con k+=2, pasos pares ; $f_0 = 3^0 = 1$; $f_n = 3^1 = 3$

$h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$,

K=2

$\sum_{i=1}^{2/2} f_{2i-1}$ = (No Aplica) ; $\sum_{i=1}^{2/2-1} f_{2i}$ (No Aplica)

K=4, Alanza 4.

$$\sum_{i=1}^{4/2=2} f_{2i-1} = f_1 + f_3 = f(0,25) + f(0,75) = 3,59558$$

$$\sum_{i=1}^{4/2-1=1} f_{2i} = f_2 = f(0,5) = 1,73205$$

Solo dos iteraciones y no aplicó la tolerancia

$$\Rightarrow I(f) \simeq \frac{1}{12}\left(1 + 4(3,59558) + 2(1,73205) + 3\right)$$

$$\simeq 1,820535$$