Correccion 2do Examen parcial

Tuesday, September 7, 2021 9:13 AM

Color para calificar

• Datos Relevantes:

$\frac{3,75}{4}$

Cuestión 1 (2.5 pts.) – En una región residencial el límite máximo de velocidad es de 30 km/h. Para monitorear el cumplimiento de esta norma fue instalado un sistema electrónico de vigilancia, que para un determinado vehículo obtuvo la información "posición x tiempo" presentada en la Tabla 1.

Limite de velocidad $= 30\frac{km}{h} \times \frac{1h}{3600s} \times \frac{1000m}{1km}$

$= 8,33\, m/s$

Tabla 1 – Datos experimentales "posición x tiempo" para un vehículo en movimiento.

t = tiempo(s)	1	4	7	10
y = posición (m)	130	155	180	210

Considerando que el vehículo esté en movimiento rectilíneo uniforme, i.e. velocidad constante, sabemos que

constante

$$y(t) = x_0 + vt \qquad (1),$$

(1) $y(t) = x_0 + vt$

(2) $n = 4$

donde y representa la posición del vehículo en el instante t, x_0 es la posición del vehículo en el instante $t = 0$, y v es la velocidad de desplazamiento del vehículo. Haciendo el ajuste de los datos experimentales presentados en la Tabla 1 por la recta de la Ec. (1) se observa que el coeficiente angular establece el valor de la velocidad.

Analisis Dimensional

1.1 Haga una breve descripción del método de los mínimos cuadrados empleado para el ajuste de curvas. Explique porque en el problema aquí tratado el ajuste de curvas es más recomendado que una interpolación de datos experimentales.

1.2 Determine la velocidad de desplazamiento del vehículo. ¿El límite máximo de velocidad fue infringido?

Ajuste de curvas: (Minimo cuadrado)

$Y(t)[m] = X_0[m] + v\,t[s]$

formula : $S = \sum_{i=1}^{n} \Big(Y_i - \underbrace{(X_0 + vt_i)}_{\text{modelo}}\Big)^2 =$

$\frac{(Y(t) - X_0)[m]}{t\ [s]} = v\,[m/s]$

$= \big(130 - (x_0 + v(1))\big)^2 + \big(155 - (x_0 + v(4))\big)^2 + \big(180 - (x_0 + v(7))\big)^2 + \big(210 - (x_0 + v(10))\big)^2$

$= (130 - x_0 - v)^2 + (155 - X_0 - 4v)^2 + (180 - x_0 - 7v)^2 + (210 - X_0 - 10v)^2$

Ahora debemos obtener $\frac{\partial S}{\partial x}$, $\frac{\partial S}{\partial v}$.

• $\frac{\partial S}{\partial x} = 2(130 - X_0 - v)(-1) + 2(155 - X_0 - 4v)(-1) + 2(180 - X_0 - 7v)(-1) + 2(210 - X_0 - 10v)(-1)$

$= -2(130 - X_0 - v) - 2(155 - X_0 - 4v) - 2(180 - X_0 - 7v) - 2(210 - X_0 - 10v)$

• $\frac{\partial S}{\partial v} = 2(130 - X_0 - v)(-1) + 2(155 - X_0 - 4v)(-4) + 2(180 - X_0 - 7v)(-7) + 2(210 - X_0 - 10v)(-10)$

$= -2(130 - X_0 - v) - 8(155 - X_0 - 4v) - 14(180 - X_0 - 7v) - 20(210 - X_0 - 10v)$

luego: $\partial S/\partial x = 0$, $\partial S/\partial v = 0$

$\frac{\partial S}{\partial x} = -2(130 - X_0 - v) - 2(155 - X_0 - 4v) - 2(180 - X_0 - 7v) - 2(210 - X_0 - 10v) = 0$

$-(130 - X_0 - v) - (155 - X_0 - 4v) - (180 - X_0 - 7v) - (210 - X_0 - 10v) = 0/2$

$= -130 + X_0 + v - 155 + X_0 + 4v - 180 + X_0 + 7v - 210 + X_0 + 10v = 0$

$= -675 + 4X_0 + 22v = 0$

$$\frac{\partial S}{\partial v} = -\cancel{2}(130 - X_0 - v) - \cancel{8}(155 - X_0 - 4v) - \cancel{14}(180 - X_0 - 7v) - \cancel{20}(210 - X_0 - 10v) = 0/2$$

$= -130 + X_0 + v - 620 + 4X_0 + 16v - 1260 + 7X_0 + 49v - 2100 + 10X_0 + 100v = 0$

$= 4110 + 22X_0 + 166v = 0$

Se genera el sistema.

$$\begin{cases} 22v + 4X_0 - 675 = 0 \\ 166v + 22X_0 - 4110 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 22 & 4 \\ 166 & 22 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ X_0 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 675 \\ 4110 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Calculadora}$$

$\Rightarrow Y(t)_{\text{modelado}} = \frac{721}{6} + \frac{53}{6} t$

R

1.1) En este caso lo correcto era realizar un ajuste de curvas a una interpolación, debido a lo siguiente: Si interpolabamos los datos no íbamos a encontrar más que una $Y(t)$ en un t que no se presentaba en la tabla, en definitiva con esto no podíamos saber la velocidad del conductor. Por otro lado con ajuste de curvas íbamos a encontrar los coeficientes del modelo lineal propuesto y entre ellos la velocidad.

1.2) La velocidad maxima era de 8,33 m/s, la velocidad del conductor fue de 8,83 m/s. Fue infringido el limite de velocidad pues 8,33 < 8,83

1/1

Cuestión 2 (2.5 pt.) – Interpolar los siguientes puntos experimentales con un polinomio de segundo grado utilizando el abordaje de forzar el paso del polinomio por los puntos dados (no usar interpolación Lagrangeana).

k	x_k	y_k
1	2	4
2	4	2
3	8	8

• Forzando el paso para $P_2(X)$:

$P_2(X_1) = Y_1 = \sum_{i=0}^{2} a_i X^i$

$$\begin{pmatrix} 1 & X_1 & X_1^2 \\ 1 & X_2 & X_2^2 \\ 1 & X_3 & X_3^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{Bmatrix}$$

$$P_2(x_1) = Y_1 = \sum_{i=0} a_i x^i$$

$$\begin{cases} P_2(x_1) = Y_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 \\ P_2(x_2) = Y_2 = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 \\ P_2(x_3) = Y_3 = a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \end{Bmatrix}$$

reemplazando:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 8 & 64 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{Bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 16 & 2 \\ 1 & 8 & 64 & 8 \end{array}\right) \xleftrightarrow{F_3 - F_2 \to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 16 & 2 \\ 0 & 4 & 48 & 6 \end{array}\right) \xleftrightarrow[F_2]{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 12 & -2 \\ 0 & 4 & 48 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xleftrightarrow{F_2/2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & 4 & 48 & 6 \end{array}\right) \xleftrightarrow{F_3/4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 12 & 3/2 \end{array}\right) \xleftrightarrow[F_3]{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 5/2 \end{array}\right)$$

$$\xleftrightarrow[F_2]{F_2 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -7/2 \\ 0 & 0 & 6 & 5/2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3]{F_3/6} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 5/12 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 4 \\ a_1 = -7/2 \\ a_2 = 5/12 \end{cases} \Rightarrow a_0 = 4 - 2(-7/2) - 4(5/12) = 28/3$$

R//
$$\begin{cases} a_0 = 28/3 \\ a_1 = -7/2 \\ a_2 = 5/12 \end{cases}$$

R//
$$P_2(x) = \frac{5}{12}x^2 - 7/2\, x + 28/3$$

1/1

Cuestión 3 (2.5 pt.) – El comportamiento de un fenómeno natural es modelado matemáticamente con la ecuación (1)

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2} - 2y^2 \qquad (1)$$

y con la condición inicial dada por la ecuación (2)

$$y(0) = 0 \qquad (2)$$

Obtenga una aproximación para la solución del problema en el punto $x = 0.1$, empleando el método de Euler modificado con un paso de $h = 0.025$ y trabajando con una precisión de 10^{-5}.

X_n	Y_n
0	0

modificado con un paso de $h = 0.025$ y trabajando con una precisión de 10^{-5}.

0	0
0,025	0,02499
0,05	0,04988
0,075	0,07459
0,1	X

Condiciones iniciales

$Y(0) = 0$

$a = 0$

$b = 0{,}1$

$$N = \frac{0{,}1 - 0}{0{,}025} = 4$$

$m = 1$

$$Y_1 = 0 + (0{,}025)\left(\frac{1}{1+\left(0+\frac{0{,}025}{2}\right)^2} - 2\left(0 + \frac{0{,}025}{2}\left(\frac{1}{1+0^2} - 2(0)\right)\right)\right)$$

$$= 0 + (0{,}025) = 0{,}02499$$

$$Y_2 = 0{,}02499 + 0{,}025\left(\frac{1}{1+0{,}0375^2} - 2\left(0{,}02499 + 0{,}0125\left(\frac{1}{1+0{,}025^2} - 2(0{,}02499)^2\right)\right)^2\right)$$

$$= 0{,}04988$$

$$Y_3 = 0{,}04988 + 0{,}025\left(\frac{1}{1+0{,}0625^2} - 2\left(0{,}04988 + 0{,}0125\left(\frac{1}{1+0{,}05^2} - 2(0{,}04988)^2\right)\right)^2\right)$$

$$= 0{,}07459$$

0,75/1

Cuestión 4 (2.5 pts.) – Interpole los siguientes puntos experimentales usando un abordaje lineal

k	x_k	y_k
1	2	4
2	4	2
3	8	8

Con $k=1$ y $k=2$

$$\alpha = \frac{\beta - 2}{4 - 2} = \frac{\beta - 2}{2} \; ; \; f(\beta)_2 = \left(1 - \frac{\beta - 2}{2}\right)4 + \left(\frac{\beta - 2}{2}\right)2$$

$$= \left(\frac{2 - \beta + 2}{2}\right)4 + \beta - 2$$

$$= (4 - \beta)2 + \beta - 2 = 8 - 2\beta + \beta - 2 = 6 - \beta$$

Con $k=2$ y $k=3$

$\alpha = \frac{\beta - 4}{8-4} = \left(\frac{\beta-4}{4}\right)$; $f(\beta) = \left(1 - \left(\frac{\beta-4}{4}\right)\right) 2 + \left(\frac{\beta-4}{2}\right) 8$

$\bar{f}(\beta)_2 = \left(\frac{4-\beta+4}{\cancel{4}_2}\right)\cancel{2}^1 + \left(\frac{\beta-4}{\cancel{2}_1}\right)\cancel{8}^{\cancel{4}\,2} = \left(\frac{8-\beta}{2}\right) + 2(\beta-4) = 4 - \frac{\beta}{2} + 2\beta - 8$

$= \frac{3}{2}\beta - 4$

R

$$\begin{cases} \bar{f}_1(\beta) = 6 - \beta \\ \bar{f}_2(\beta) = \frac{3}{2}\beta - 4 \end{cases}$$

1/1

3,75/4

9,375/10