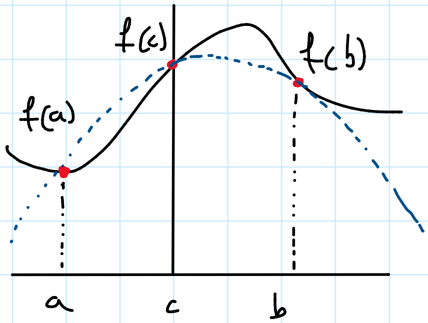
Demostración Regla de Simpson

Monday, June 14, 2021 8:30 PM

Grafico (1)



- $y = f(x)$
- $y = P_2(x)$

Regla de simpson a demostrar:

PDI

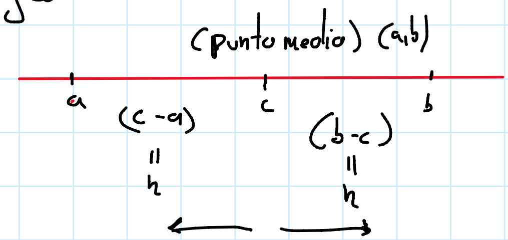
$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b P_2(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

$\Rightarrow$ teniendo en cuenta que $h = \frac{b-a}{2}$, $c = \frac{a+b}{2}$, $c-a = b-c = h$

desarrollando lo último:

$$\begin{cases} (1)\ h = \frac{b-a}{2} \\ (2)\ c = \frac{a+b}{2} \\ (3)\ c-a = h \end{cases} \qquad (4)\ b-c = h$$

geometricamente:



De la demostración geometrica se extra lo siguiento

•) a y b son equidistantes por onde

$$\int_a^b P_2(x)\,dx = \int_{-h}^{h} P_2(x)\,dx$$

•) c es punto medio de a y b.

Por definición en la regla de simpson $P_2(x) = Ax^2 + Bx + c$

$$\int_{-h}^{h} (Ax^2+Bx+c)\,dx = \left(\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + cx\right)\Big|_{-h}^{h};$$

$$= \left(\frac{Ah^3}{3} - \frac{A(-h)^3}{3}\right) + \left(\frac{Bh^2}{2} - \frac{B(-h)^2}{2}\right) + \left(ch - c(-h)\right)$$

$$= \left(Ah^3/3 + \frac{Ah^3}{3}\right) + \left(\cancel{Bh^2/2 - \frac{Bh^2}{2}}^{\,0}\right) + \left(ch + ch\right)$$

$$= \frac{2}{3}Ah^3 + 2Ch$$

$$= \frac{h}{3}\left(2Ah^2 + 6C\right) \quad \Longrightarrow \quad \int_{-h}^{h} P_2(x) = \frac{h}{3}\left(2Ah^2 + 6C\right)$$

Evaluemos los extremos de la función:

$$\begin{aligned}
+\quad P(h) &= Ah^2 + Bh + c = f(a) \\
P(-h) &= Ah^2 - Bh + c = f(b) \\
\hline
2Ah^2 + 2C &= f(a) + f(b) \\
2(Ah^2 + c) &= f(a) + f(b) \\
Ah^2 + c &= \frac{f(a) + f(b)}{2}
\end{aligned}$$

Como C es punto medio de a y c

$$f(c) = \frac{f(a) + f(b)}{2}, \quad Ah^2 + c = f(c)$$

luego

$$2Ah^2 = f(a) + f(b) - 2f(c)$$

reemplazando:

$$\frac{h}{3}\left(2Ah^2 + 6C\right) = \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) - 2f(c) + 6f(c)\right) = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f(c) + f(b)\right)$$

$$= \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

lqqd $\square$