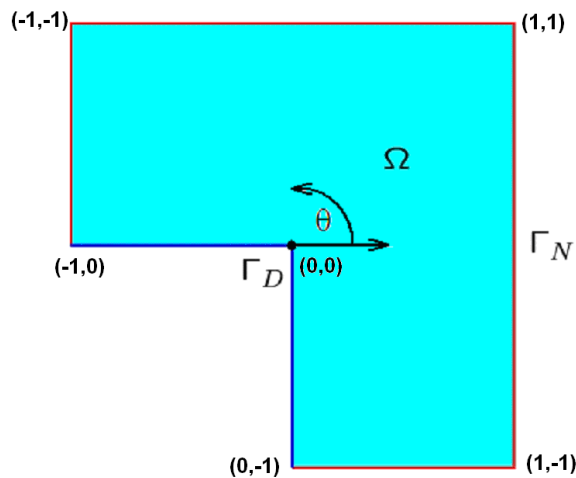


L-shape domain

Sformułowanie silne problemu



Ω to obszar $[-1, 1] \times [-1, 1] \setminus [-1, 0] \times [-1, 0]$ (obszar w kształcie odwróconej litry L)
Brzeg Dirichleta Γ_D i brzeg Neumanna Γ_N są zaznaczone odpowiednio na ciemno niebiesko i czerwono

Problem polega na policzeniu pola temperatur

$R^2 \ni (x_1, x_2) \rightarrow u(x_1, x_2) \in R$ gdzie $u(x_1, x_2)$ oznacza temperaturę w punkcie (x_1, x_2) .

W tym celu rozwiązujemy równanie transportu ciepła

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \text{ na } \Omega$$

(czyli $\Delta u = 0$)

Zadajemy następujące warunki brzegowe:

$u = 0$ na Γ_D (zerowa temperatura na brzegu Dirichleta, zaznaczonym na ciemno niebiesko)

$\frac{\partial u}{\partial n} = g$ na Γ_N (pochodna w kierunku normalnym do brzegu jest zadana funkcją g)

gdzie

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \circ n = \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\| \circ (n_1, n_2) = \frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 = g$$

gdzie $\nabla u = \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\|$ to gradient u natomiast (n_1, n_2) to współrzędne wektora

normalnego;

na przykład na dolnym brzegu - na odcinku $(0, -1) - (1, -1)$ mamy

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \circ n = \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\| \circ (0, -1) = - \frac{\partial u}{\partial x_2} = g$$

oraz g jest funkcją daną w biegunowym układzie współrzędnych o początku w punkcie $(0, 0)$

$$R \times (0, 2\pi) \ni (r, \theta) \rightarrow g(r, \theta) = r^{\frac{2}{3}} \sin^{\frac{2}{3}} \left\| \theta + \frac{\pi}{2} \right\|$$

Sformułowanie słabe problemu

Otrzymujemy mnożąc skalarnie (w sensie normy przestrzeni L2) równanie słabe przez funkcje testujące v

$$b(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V$$

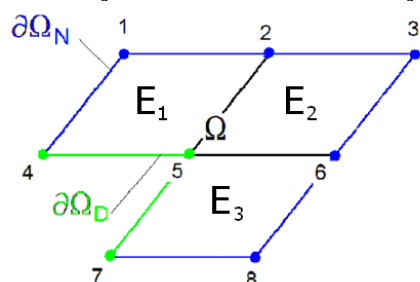
$$b(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad (\text{czyli } b(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \, dx)$$

$$l(v) = \int_{\Gamma_N} g v \, dS$$

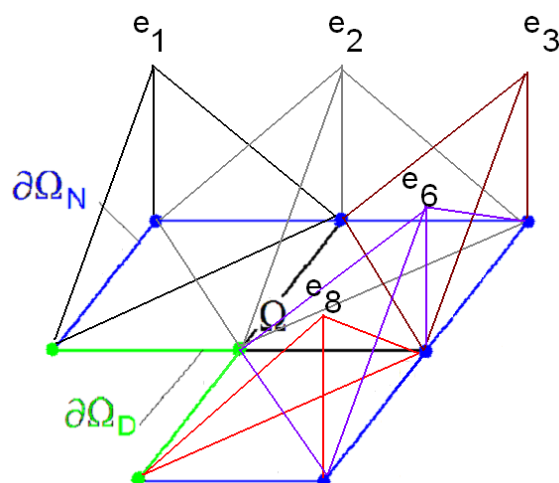
$$V = \{v \in H^1(\Omega) : \text{tr } v = 0 \text{ on } \Gamma_D\}$$

Metoda elementów skończonych

Dzielimy obszar Ω na elementy skończone (najprościej na trzy elementy E1, E2, E3)



na których rozpinamy funkcje bazowe



oraz generujemy układ równań:

$$u \approx u_h = \sum_{i=1}^N a_i e_i$$

$$\sum_{i=1}^N a_i b(e_i, e_j) = l(e_j) \quad j = 1, \dots, N$$

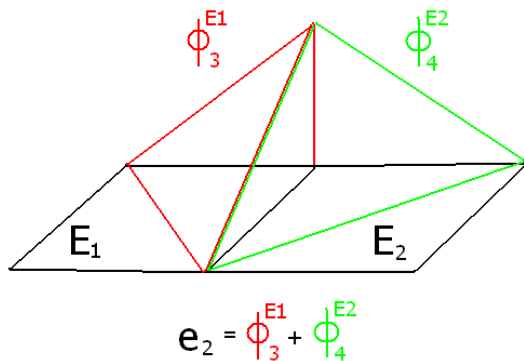
$$b(e_i, e_j) = \int_{\Omega} \nabla e_i \cdot \nabla e_j \, dx = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^2 \frac{\partial e_i}{\partial x_k} \frac{\partial e_j}{\partial x_k} \, dx$$

$$l(e_j) = \int_{\Gamma_N} e_j g \, dS$$

Wymuszenie warunku Dirichleta można osiągnąć zerując wiersze i kolumny związane z węzłami 4, 5 oraz 7

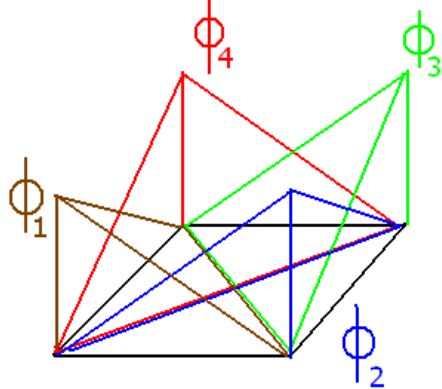
Obserwacje potrzebne do opracowania efektywnego algorytmu

1. Każda globalna funkcja e_i składa się z jednej lub kilku lokalnych funkcji ϕ_i



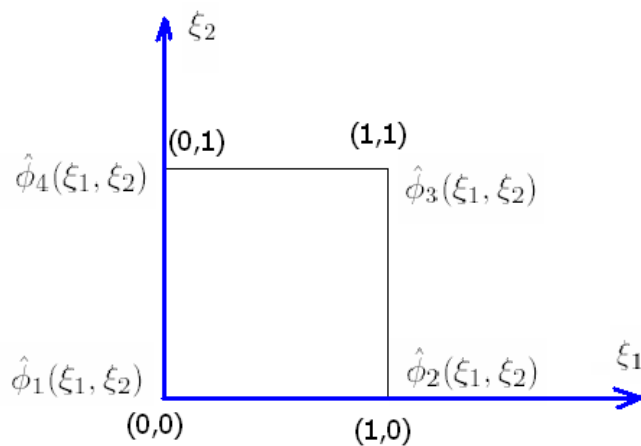
(np. funkcja e_2 składa się z trzeciej lokalnej funkcji na elemencie E_1 , oraz z czwartej lokalnej funkcji na elemencie E_2)

Czyli wprowadzamy lokalne funkcje na dowolnym elemencie
(na razie dla $p=1$)



2. W jaki sposób obliczyć wzór na taką dowolną funkcję ϕ_i ?

Otóż wprowadzamy tzw. element wzorcowy $\hat{E} = [0,1] \times [0,1]$ i definiujemy funkcje wzorcowe na nim



$$\hat{\phi}_1(\xi_1, \xi_2) = \hat{\chi}_1(\xi_1)\hat{\chi}_1(\xi_2) = (1 - \xi_1)(1 - \xi_2)$$

$$\hat{\phi}_2(\xi_1, \xi_2) = \hat{\chi}_2(\xi_1)\hat{\chi}_1(\xi_2) = \xi_1(1 - \xi_2)$$

$$\hat{\phi}_3(\xi_1, \xi_2) = \hat{\chi}_2(\xi_1)\hat{\chi}_2(\xi_2) = \xi_1\xi_2$$

$$\hat{\phi}_4(\xi_1, \xi_2) = \hat{\chi}_1(\xi_1)\hat{\chi}_2(\xi_2) = (1 - \xi_1)\xi_2 ,$$

gdzie

$$\hat{\chi}_1(\xi) = 1 - \xi$$

$$\hat{\chi}_2(\xi) = \xi$$

Następnie zauważamy, iż dowolny element prostokątny E może zostać określony przez swoje położenie (b_1, b_2) oraz swoją szerokość i wysokość (a_1, a_2)

np. trzy przykładowe elementy E1, E2, E3 mogą zostać określone przez

E1: $(b_1, b_2) = (-1, 0); (a_1, a_2) = (1, 1)$

E2: $(b_1, b_2) = (0, 0); (a_1, a_2) = (1, 1)$

E3: $(b_1, b_2) = (0, -1); (a_1, a_2) = (1, 1)$

Definiujemy odwzorowanie przetrzucające element wzorcowy \hat{E} na dowolny element E

$$\hat{E} \ni (\xi_1, \xi_2) \rightarrow x_E(\xi_1, \xi_2) = (b_1 + a_1\xi_1, b_2 + a_2\xi_2) = (x_1, x_2) \in E$$

oraz odwzorowanie odwrotne

$$E \ni (x_1, x_2) \rightarrow x_E^{-1}(x_1, x_2) = \left\| \frac{x_1 - b_1}{a_1}, \frac{x_2 - b_2}{a_2} \right\| = (\xi_1, \xi_2) \in \hat{E}$$

Innymi słowy

$$x_1 = b_1 + a_1\xi_1; \quad x_2 = b_2 + a_2\xi_2$$

oraz

$$\xi_1 = \frac{x_1 - b_1}{a_1}; \quad \xi_2 = \frac{x_2 - b_2}{a_2}$$

Teraz z pomocą x_E^{-1} możemy podać wzory na dowolne funkcje ϕ_i , $i=1,2,3,4$

$$\phi_1(x_1, x_2) = \hat{\phi}_1(x_E^{-1}(x_1, x_2)) = \hat{\phi}_1\left\| \frac{x_1 - b_1}{a_1}, \frac{x_2 - b_2}{a_2} \right\| =$$

$$\hat{\chi}_1\left\| \frac{x_1 - b_1}{a_1} \right\| \hat{\chi}_1\left\| \frac{x_2 - b_2}{a_2} \right\| = \left\| 1 - \frac{x_1 - b_1}{a_1} \right\| \left\| 1 - \frac{x_2 - b_2}{a_2} \right\|$$

$$\phi_2(x_1, x_2) = \hat{\phi}_2(x_E^{-1}(x_1, x_2)) = \hat{\phi}_2\left\| \frac{x_1 - b_1}{a_1}, \frac{x_2 - b_2}{a_2} \right\| =$$

$$\hat{\chi}_2\left\| \frac{x_1 - b_1}{a_1} \right\| \hat{\chi}_1\left\| \frac{x_2 - b_2}{a_2} \right\| = \left\| \frac{x_1 - b_1}{a_1} \right\| \left\| 1 - \frac{x_2 - b_2}{a_2} \right\|$$

$$\begin{aligned}\phi_3(x_1, x_2) &= \hat{\phi}_3(x_E^{-1}(x_1, x_2)) = \hat{\phi}_3\left[\frac{x_1 - b_1}{a_1}, \frac{x_2 - b_2}{a_2}\right] = \\ \hat{\chi}_2\left[\frac{x_1 - b_1}{a_1}\right] \hat{\chi}_2\left[\frac{x_2 - b_2}{a_2}\right] &= \left[\frac{x_1 - b_1}{a_1}\right] \left[\frac{x_2 - b_2}{a_2}\right] \\ \phi_4(x_1, x_2) &= \hat{\phi}_4(x_E^{-1}(x_1, x_2)) = \hat{\phi}_4\left[\frac{x_1 - b_1}{a_1}, \frac{x_2 - b_2}{a_2}\right] = \\ \hat{\chi}_1\left[\frac{x_1 - b_1}{a_1}\right] \hat{\chi}_2\left[\frac{x_2 - b_2}{a_2}\right] &= \left[1 - \frac{x_1 - b_1}{a_1}\right] \left[\frac{x_2 - b_2}{a_2}\right]\end{aligned}$$

3. Całki możemy rozbić na składowe po elementach, z funkcji lokalnych

$$b(\phi_i^k, \phi_j^k) = \int_{E_k} \frac{\partial \phi_i^k}{\partial x_1}(x_1, x_2) \frac{\partial \phi_j^k}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \int_{E_k} \frac{\partial \phi_i^k}{\partial x_2}(x_1, x_2) \frac{\partial \phi_j^k}{\partial x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

Żeby je policzyć dla aproksymacji z funkcjami pierwszego $p=1$, wystarczy wziąć wartość funkcji podcałkowych w środku elementu razy pole elementu ($a_1 \cdot a_2$) czyli

$$\begin{aligned}b(\phi_i^k, \phi_j^k) &= \left[\frac{\partial \phi_i^k}{\partial x_1}\right] \left[b_1 + \frac{a_1}{2}, b_2 + \frac{a_2}{2}\right] \left[\frac{\partial \phi_j^k}{\partial x_1}\right] \left[b_1 + \frac{a_1}{2}, b_2 + \frac{a_2}{2}\right] (a_1 a_2) + \\ &\left[\frac{\partial \phi_i^k}{\partial x_2}\right] \left[b_1 + \frac{a_1}{2}, b_2 + \frac{a_2}{2}\right] \left[\frac{\partial \phi_j^k}{\partial x_2}\right] \left[b_1 + \frac{a_1}{2}, b_2 + \frac{a_2}{2}\right] (a_1 a_2)\end{aligned}$$

Zauważmy ponadto, że pochodne tych funkcji $\frac{\partial \phi_i^k}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi_i^k}{\partial x_2}, \frac{\partial \phi_j^k}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi_j^k}{\partial x_2}$ są stałe i wynoszą +/-

$$\frac{1}{a_1} \text{ lub } +/- \frac{1}{a_2},$$

w zależności od tego którą funkcję różniczkujemy i w którym kierunku.

$$4. \text{ Całka } b(\phi_i^k, \phi_j^k) = \int_{E_k} \frac{\partial \phi_i^k}{\partial x_1}(x_1, x_2) \frac{\partial \phi_j^k}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \int_{E_k} \frac{\partial \phi_i^k}{\partial x_2}(x_1, x_2) \frac{\partial \phi_j^k}{\partial x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

jest dodawana do odpowiedniego wiersza i kolumny globalnej macierzy.

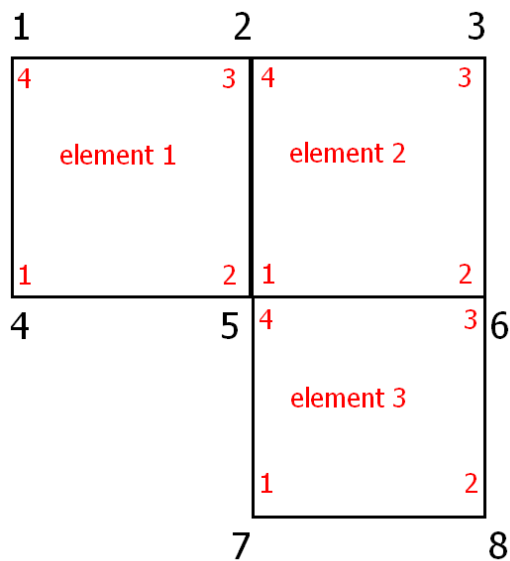
$$\mathbf{B}(\mathbf{i1}, \mathbf{j1}) = \int_{E_k} \frac{\partial \phi_i^k}{\partial x_1}(x_1, x_2) \frac{\partial \phi_j^k}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \int_{E_k} \frac{\partial \phi_i^k}{\partial x_2}(x_1, x_2) \frac{\partial \phi_j^k}{\partial x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

Jak przeliczyć i oraz j na ten wiersz i1 oraz kolumnę j1?

Według schematu – każdy wiersz (kolumna) macierzy odpowiada jednemu współczynnikowi a_i jednej funkcji globalnej e_i

Innymi słowy (kolor czerwony oznacza funkcje lokalne ϕ_i^k na elementach $k=1,2,3,4$,

kolor czarny odpowiadające im funkcje globalne e_i = numery wiersz / kolumn w macierzy)



5. Całka po brzegu $\int_{E_k \cap \Gamma_N} g(x_1, x_2) \phi_i^k(x_1, x_2) dx_1 dx_2$

Musimy sprawdzić wszystkie 4 krawędzie danego elementu E_k , czy nie leżą one na brzegu Neumanna Γ_N .

Jeśli dana krawędź elementu leży na brzegu Neumanna, to dodaje całkę po tej krawędzi do prawej strony, czyli

$$\int_{edge} g(x_1, x_2) \phi_i^k(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = g(x_1^*, x_2^*) \phi_i^k(x_1^*, x_2^*) |edge|$$

gdzie

(x_1^*, x_2^*) to punkt na środku krawędzi

$g(x_1^*, x_2^*)$ to wartość funkcji g w tym punkcie

$\phi_i^k(x_1^*, x_2^*)$ to wartość funkcji lokalnej ϕ_i^k w tym punkcie (zawsze równa $\frac{1}{2}$ lub 0)

$|edge|$ to długość tej krawędzi

Algorytm sekwencyjny generacji układu równań

B(1:8,1:8)=0 (zerowanie macierzy)

L(1:8)=0 (zerowanie wektora prawej strony)

Pętla po elementach $E_k \in \{E_1, E_2, E_3\}$

Pętla po funkcjach ϕ_i^k elementu E_k , $\phi_i^k \in \{\phi_1^k, \phi_2^k, \phi_3^k, \phi_4^k\}$

i1 = wiersz macierzy związany z ϕ_i^k

$$\mathbf{L}(\mathbf{i1}) += \int_{E_k \cap \Gamma_N} g(x_1, x_2) \phi_i^k(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

Pętla po funkcjach ϕ_j^k elementu E_k , $\phi_j^k \in \{\phi_1^k, \phi_2^k, \phi_3^k, \phi_4^k\}$

j1 = kolumna macierzy związana z ϕ_j^k

$$\mathbf{B}(\mathbf{i1}, \mathbf{j1}) += \int_{E_k} \frac{\partial \phi_i^k}{\partial x_1}(x_1, x_2) \frac{\partial \phi_j^k}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \int_{E_k} \frac{\partial \phi_i^k}{\partial x_2}(x_1, x_2) \frac{\partial \phi_j^k}{\partial x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

Koniec pętli po funkcjach ϕ_j^k

Koniec pętli po funkcjach ϕ_i^k

Koniec pętli po elementach E_k

B(4,1:8)=0 (zerowanie wierszy 4,5 i 7 macierzy)
B(5,1:8)=0 (zerowanie wierszy 4,5 i 7 macierzy)
B(7,1:8)=0 (zerowanie wierszy 4,5 i 7 macierzy)
L(4)=0 (zerowanie wiersza 4 wektora prawej strony)
L(5)=0 (zerowanie wiersza 4 wektora prawej strony)
L(7)=0 (zerowanie wiersza 4 wektora prawej strony)
B(4,4)=1 (1 na przekątnej w wierszu 4)
B(5,5)=1 (1 na przekątnej w wierszu 5)
B(7,7)=1 (1 na przekątnej w wierszu 7)

Algorytm sekwencyjny solvera

Rozwiązujemy układ równań (np. eliminacja Gaussa)

Ba=L

Rozwiązanie **a**={a1,...,a8} to współczynniki $u \approx u_h = \sum_{i=1}^N a_i e_i$