Note: tra tensori e relatività

Mattia Capuano

2021

Contents

1 Relatività ristretta

1.1 Gli assiomi e le trasformazioni di Lorentz

Si hanno due assiomi:

- Le leggi della fisica sono le medesime in ogni sistema di riferimento
- La velocità della luce è la stessa in ogni sistema di riferimento

A partire da questi due assiomi si ottengono delle trasformazioni lineari, dette di Lorentz, tra sistemi di riferimento diversi che si muovono ad una velocità reciproca $\mathbf{v}$, misurata nel sistema di riferimento iniziale:

$$\begin{cases} t' = \gamma\left(t - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}}{c^2}\right) \\ \mathbf{r}'_\perp = \mathbf{r}_\perp \\ \mathbf{r}'_\parallel = \gamma(\mathbf{r}_\parallel - \mathbf{v}t) \end{cases}$$

Dove $\mathbf{r}_\perp$ e $\mathbf{r}_\parallel$ denotano rispettivamente la componente perpendicolare e parallela della posizione rispetto alla velocità. A partire da tali trasformazioni si ottiene che la grandezza:

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{1}$$

è costante in tutti i sistemi di riferimento.

1.2 Le isometrie dello spazio galileiano

Nello spazio galileiano, matematicamente descritto da $\mathbb{R}^3$, ogni cambiamento del sistema di riferimento deve lasciare invariata una quantità simile all'eq. (1), ossia la norma indotta dal prodotto scalare euclideo, che, geometricamente, sono le distanze:

$$\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{euclideo} = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$$

Le trasformazioni lineari che lasciano invariate un dato prodotto scalare sono dette *isometrie*, Le isometrie di $\mathbb{R}^3$ sono le rotazioni e sono rappresentate da matrici ortogonali, $\mathcal{R}$, le cui inverse coincidono con le proprie trasposte, infatti:

$$\mathbf{x}^T\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\| = \|\mathcal{R}\mathbf{x}\| = \langle \mathcal{R}\mathbf{x}, \mathcal{R}\mathbf{x} \rangle_{euclideo} = (\mathcal{R}\mathbf{x})^T\mathcal{R}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathcal{R}^T\mathcal{R}\mathbf{x} \Rightarrow \mathcal{R}^T\mathcal{R} = \mathbb{I} \tag{2}$$

L'insieme di tali matrici è denotato con $\mathcal{O}(3)$ e costituisce un gruppo. Il sottogruppo di matrici ortogonali di determinante unitario è detto *speciale* e si denota con $\mathcal{SO}(3)$.

1.3 Le isometrie dello spazio minkoskiano

Risulta dunque conveniente ambientare la fisica della relatività speciale in uno spazio quadridimensionale la cui norma sia descritta dall'eq. (1) e tra le cui isometrie (cioè le trasformazioni lineari che lasciano la norma invariata) vi siano proprio le trasformazioni di Lorentz. Tale spazio, detto di Minkowski, è $\mathbb{R}^4$, con prodotto scalare definito nel seguente modo:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{minkowskiano} = \mathbf{x}^T\eta\mathbf{y} \tag{3}$$

Dove η è la matrice:

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

In generale per uno generico prodotto scalare la matrice tra il primo vettore trasposto e il secondo vettore è detto *tensore metrico*. Nel caso dello spazio minkowskiano il tensore metrico è η mentre nel caso dello spazio euclideo è la matrice identità. A partire da un evento nello spazio euclideo, descritto da un istante di tempo t e dalla posizione $\mathbf{x}$ si ottiene un unico punto nello spazio di Minkowski costruito nel seguente modo:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Si osserva che la sua norma è proprio quella data dall'eq. (1). In maniera del tutto analoga a come fatto nell'eq. (2) si costruiscono le isometrie dello spazio di Minkowski, tra le quali bisognerà ritrovare le trasformazioni di Lorentz.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T\eta\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\| = \|\Lambda\mathbf{x}\| = \langle\Lambda\mathbf{x},\Lambda\mathbf{x}\rangle_{minkowskiano} = (\Lambda\mathbf{x})^T\eta\Lambda\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\Lambda^T\eta\Lambda\mathbf{x} \\ \Rightarrow \boxed{\Lambda^T\eta\Lambda = \eta} \end{aligned} \tag{6}$$

La relazione ottenuta definisce le isometrie nello spazio di Minkowski. Tali trasformazioni formano un gruppo, detto di Lorentz, denotato con $\mathcal{O}(1,3)$. Nel caso in cui si prendano matrici con determinante unitario si ha il gruppo speciale, denotato con $\mathcal{SO}(1,3)$.

1.4 Le trasformazioni di Lorentz e le rotazioni sono isometrie dello spazio minkowskiano

Dalla definizione del tensore metrico η è evidente che le matrici di rotazione di $\mathbb{R}^3$, che in tal caso operano in un sottospazio di $\mathbb{R}^4$, soddisfano la condizione dell'eq. (6). Come già detto anche le trasformazioni di Lorentz devono appartenere a tale gruppo. Affinché ciò sia evidente è necessario riscriverle come matrici che operano su vettori dello spazio di Minkowski. Si prenda $\mathbf{v}$ di modo che giaccia sul primo asse coordinato spaziale (ciò si può sempre fare attraverso una rotazione, che, abbiamo visto, è un'operazione compatibile con l'invariante dell'eq.(1)). Allora si ha:

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - \frac{vx^1}{c^2}) \\ x'^1 = \gamma(x^1 - vt) \\ x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3 \end{cases} \tag{7}$$

Moltiplicando e dividendo opportunamente per c si ha:

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \frac{v}{c}x^1) \\ x'^1 = \gamma(x^1 - \frac{v}{c}ct) \\ x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3 \end{cases} \tag{8}$$

Definendo $\beta := \frac{v}{c}$. In forma matriciale si ha dunque:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{9}$$

La matrice assume una formula più significativa definendo la *rapidità*, ovvero un numero ξ la cui tangente iperbolica è pari a β (ovvero $\beta = \tanh \xi$):

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \xi & -\sinh \xi & 0 & 0 \\ -\sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Appare evidente l'analogia con le rotazioni di $\mathbb{R}^3$. In questa forma le trasformazioni di Lorentz prendono il nome di *boost* e risulta evidente che soddisfano l'equazione (6).

2 Notazione di Einstein

2.1 Prodotto scalare e il duale di uno spazio

Le usuali operazioni tra vettori e matrici possono essere scritte esplicitamente tramite le operazioni tra componenti. Ad esempio il prodotto scalare euclideo si scrive come:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$$

Tuttavia è possibile adottare una notazione alternativa, più significativa. Si consideri il prodotto scalare indotto dal tensore metrico. Esplicitamente si può scrivere come:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{minkowskiano} = \mathbf{x}^T \eta \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Moltiplicando il vettore trasposto per il tensore metrico si ha:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{minkowskiano} = \begin{pmatrix} x^0 & -x^1 & -x^2 & -x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Il vettore riga scritto a sinistra non è più il vettore $\mathbf{x}$, ma il suo **duale**, ossia quello ottenuto a partire dal naturale isomorfismo tra lo spazio di minkowski e il suo duale. Si rammenti che, in generale, dato V, spazio vettoriale, si definisce lo spazio duale V^* come l'insieme degli operatori da V al campo su cui V è definito, in questo caso $\mathbb{R}$. Avendo definito un prodotto scalare $\langle , \rangle$ sullo spazio, è possibile rappresentare ogni elemento del duale a partire da un vettore $\mathbf{x} \in V$ come:

$$L_{\mathbf{x}} \in V^* \to L_{\mathbf{x}} = \langle \mathbf{x}, \dots \rangle$$

$L_{\mathbf{x}}$ è il duale di $\mathbf{x}$ e, come si vede dall'eq.(12) è possibile darne un esplicita rappresentazione vettoriale come vettore colonna ottenuto moltiplicando il trasposto di $\mathbf{x}$ per il tensore metrico, ovvero:

$$\mathbf{x}_{duale} = \mathbf{x}^T g \tag{13}$$

2.2 I vettori e i corrispettivi duali visti come lo stesso oggetto con componenti distinte

Queste considerazioni ci portano ad introdurre la nuova notazione. Le componenti di un vettore dello spazio V saranno indicate con un indice posto in alto, e saranno dette **contravarianti**, le componenti del vettore duale corrispondente saranno indicate con un indice posto in basso e saranno dette **covarianti**. Inoltre per indici uguali posti sia in alto che in basso sarà omesso il simbolo di somma, lasciando dunque sottintesa la dimensione su cui si lavora (ovvero il valore massimo dell'indice). Osservando l'eq.(12) si ha:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_\mu y^\mu \tag{14}$$

L'indice di $\mathbf{x}$ è posto in basso perché si hanno le componenti covarianti, cioè quelle del duale di $\mathbf{x}$, mentre l'indice di $\mathbf{y}$ è posto in alto perché si hanno le componenti nello spazio di Minkowski ordinario, non nel suo duale. Dall'eq. (11) si ha invece:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu \tag{15}$$

Che coincide con l'ordinario prodotto scalare di uno spazio con tensore metrico g scritto per componenti ed omettendo il simbolo di somma. Si noti che la matrice ha gli indici in basso. Per adesso non è necessario comprendere se questo ha un significato analogo a quello chiarito per i vettori. Confrontando le equazioni (14) e (15) si ha una relazione tra le componenti di $\mathbf{x}$ e il suo duale:

$$x_\nu = x^\mu g_{\mu\nu} \tag{16}$$

Si osservi che questo è semplicemente un modo alternativo per scrivere l'eq.(13). Per praticità isomorfismo tra V e V^*, espresso dalle equazioni (13) e (16), viene chiamato **abbassamento dell'indice**. Si ricordi che il fatto **non** è un puro giuoco notazionale ma esprime un fatto geometrico ben preciso. Per chiarezza si riscrive tale relazione in forma matriciale esplicitando il tensore metrico nel caso minkowskiano e trascurando se i vettori in oggetto sono di tipo riga o colonna.

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ -x^1 \\ -x^2 \\ -x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Si osservi che nello spazio euclideo in coordinate canoniche non si osserva alcuna differenza tra le componenti covarianti e contravarianti perché il tensore metrico è l'identità.

2.3 Componenti covarianti e contravarianti di matrici

Dove bisogna porre gli indici di una matrice? Consideriamo il prodotto tra una matrice e un vettore dello spazio V. La notazione classica per componenti assume la forma:

$$\mathbf{y} = M\mathbf{x} \rightarrow y_i = \sum_{j=1}^{n} M_{ij} x_j \tag{18}$$

Se $\mathbf{x}$ appartiene allo spazio, in notazione di Einstein avrà l'indice in alto. Anche $\mathbf{y}$ dovrà ancora avere l'indice in alto. Per la convenzione adottata la matrice dovrà avere un indice in basso, perché dovrà sommarsi con uno in alto, quello di $\mathbf{x}$, e sarà quello relativo alle colonne, e perciò dovrà essere più a sinistra, e l'altro indice dovrà essere in alto, di modo che, essendo quello che "avanza", sarà in alto anche quello di $\mathbf{y}$, come richiediamo:

$$y^i = M^i_j x^j \tag{19}$$

Rimane ancora possibile interpretare gli indici della matrice come legati a vettori di V e funzionali di V^* ma ciò ci porterebbe troppo lontano. Ci si accontenti di osservare che il tensore metrico nella sezione precedente è stato scritto con due indici in basso. Ciò porta a distinguere una classe di oggetti (più precisamente si tratta di applicazioni lineari da V o da V^* a V o a V^*) di due "indici", detti **tensori di secondo rango** che possono avere entrambi gli indici in alto (saranno dunque tensori doppiamente contravarianti), entrambi gli indici in basso (doppiamente covarianti), col primo indice in alto e il secondo in basso o viceversa (tensori di secondo rango misti). Le matrici comunemente intese sono tensori di secondo rango miste. Tramite la stessa operazione di "abbassamento dell'indice" (eq. 16) è possibile trasformarla in un tensore di secondo rango doppiamente covariante:

$$M_{ij} = M^k_j g_{ki} \tag{20}$$

2.4 Una tabella riassuntiva delle operazioni base

Oggetto	Notazione compatta	Notazione per componenti	Notazione di Einstein
Vettore	$\mathbf{x}$	x_i	x^i
Matrice	M	M_{ij}	M^i_j
Trasposizione	M^T	M_{ji}	M_j^i
Matrice per vettore	$\mathbf{y} = M\mathbf{x}$	$y_i = \sum_j M_{ij} x_j$	$y^i = M^i_j x^j$
Matrice per matrice	$C = AB$	$C_{ij} = \sum_m A_{im} Bmj$	$C^i_j = A^i_m B^m_j$
Prodotto scalare	$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$	$\sum_{i,j=1}^n x_i g_{ij} y_j$	$x^j y_j = x^i g_{ij} y^j$

L'equazione (6) in questo linguaggio si scrive come:

$$\Lambda^\rho_\mu \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma_\nu = \eta_{\mu\nu} = \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu \eta_{\rho\sigma} \tag{21}$$

Dove nell'ultimo passaggio, considerando che si sta facendo una operazione tra componenti di matrici e non tra matrici stesse, si è applicata la proprietà commutativa.