Integrali multipli, curvilinei e di superficie in fisica: una breve guida

Mattia Capuano

May 2020

1 Introduzione

Fin dal primo corso di fisica all'università ci si imbatte in integrali che richiedono uno sviluppo di concetti più avanzati di quelli effettivamente posseduti. Esempi di questo tipo sono la definizione di lavoro di una forza, che fa uso dell'integrale curvilineo, il calcolo del centro di massa un corpo solido e il calcolo del momento di inerzia attorno ad un asse. Tali concetti sono poi formalizzati in corsi di analisi successivi ma può persistere comunque una certa confusione data dalla diversa notazione usata nei testi di fisica e dalle tecniche di calcolo che non sempre fanno uso direttamente delle definizioni formali, procedendo infatti con la manipolazione di differenziali vettoriali. Lo scopo di questo breve testo è presentare in modo sistematico le definizioni degli integrali curvilinei e di superficie per collegarli successivamente a concetti fisici quali lavoro di una forza e flusso di un campo vettoriale. Saranno anche enunciati i teoremi della divergenza e di Stokes. Il tutto sarà fatto evidenziando le diverse notazioni ricorrenti nelle presentazioni di fisica.

2 Integrali di funzioni

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile di n variabili. Sia D un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$. L'integrale di f su D è:

$$\int_D f(z)dz$$

Si tratta dell'integrale classico che discende dalla definizione secondo Riemann o Lebesgue. Il calcolo per $n = 1$ procede valutando una primitiva di f agli estremi. Per $n > 1$ si impiegano il teorema di Tonelli o di Fubini oppure le formule di Gauss-Green.

2.1 Calcolo del momento di inerzia

Un'applicazione degli integrali multipli è Il calcolo del momento di inerzia. Si tratta di un argomento trattato solitamente nel primo corso di fisica all'università ma, pur essendo un integrale multiplo, il calcolo, dopo una serie di considerazioni geometriche, è ridotto all'integrale di una funzione in una variabile. Qui si mostra una definizione formale che ne permette il calcolo per forme più complesse. Si consideri un corpo in $\mathbb{R}^3$ avente un volume $V \subseteq \mathbb{R}^3$. Sia $d : V \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la densità del corpo. Il corpo si dice uniforme se ρ è una funzione costante sul dominio V. Sia $\mathbf{x} \in V$ il vettore che indichi un generico punto del corpo. Si consideri una generica retta, detta *asse del corpo* e sia $r : V \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzioni che ad ogni punto $\mathbf{x}$ del corpo associ la sua distanza minima dall'asse. Il momento di inerzia del corpo rispetto al proprio asse è definito nel seguente modo:

$$I := \int_V r^2(\mathbf{x}) d(\mathbf{x}) dV$$

Per corpi aventi una dimensione trascurabile le variabili dell'integranda si riducono a due e l'integrale viene calcolato sulla superficie del corpo.

2.1.1 Esempio: Momento di inerzia di una sfera disomogenea

Si consideri una sfera disomogenea di raggio R la cui densità sia nulla nell'origine e aumenti linearmente con il raggio. In particolare sia la funzione d così definita: $d(\mathbf{x}) := \frac{d_0}{R}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Si consideri il momento di inerzia della sfera rispetto all'asse z. La distanza di un punto generico della sfera dall'asse è $r(\mathbf{x}) = \sqrt{x^2+y^2})$. L'integrale per il calcolo del momento di inerzia è dunque il seguente:

$$\frac{d_0}{R}\int_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}(x^2+y^2)dV$$

Trasformando in coordinate sferiche (ricordandosi che $det(J)(\rho,\phi,\theta) = \rho\sin(\theta)$) l'integrale si calcola velocemente:

$$\frac{d_0}{R}\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho\rho^2 \sin^2\theta \rho \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, d\rho = d_0 \frac{8}{15}\pi R^4$$

3 Integrali curvilinei

Sia $\underline{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare a tratti in $\mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione il cui dominio contenga il sostegno di $\underline{\gamma}$. Si definisce l'integrale curvilineo di f lungo $\underline{\gamma}$:

$$\int_{\underline{\gamma}} f \, dl := \int_a^b f(\underline{\gamma}(t)) \|\underline{\gamma}'(t)\| \, dt$$

L'integrale curvilineo dunque non è altro che un integrale di una funziona ad una variabile. Il primo membro talvolta si indica ponendo sotto il segno di integrale il sostegno di $\underline{\gamma}$, $C = \underline{\gamma}([a,b])$:

$$\int_C f \, dl$$

3.1 Lavoro di una forza

Sia $\underline{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare a tratti in $\mathbb{R}^n$ e $\underline{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale il cui il dominio contenga il sostegno di $\underline{\gamma}$, C. Il lavoro del campo vettoriale lungo la curva si definisce come integrale curvilineo lungo $\underline{\gamma}$ del prodotto scalare tra il campo vettoriale e il versore tangente alla curva $\underline{T} := \frac{\underline{\gamma}'(t)}{\|\underline{\gamma}(t)\|}$:

$$\int_C \langle \underline{F}, \underline{T} \rangle \, dl$$

Applicando la definizione di integrale curvilineo lo si può esprimere come integrale di una funzione a una variabile.

$$\int_C \langle \underline{F}, \underline{T} \rangle \, dl = \int_a^b \langle \underline{F}(\underline{\gamma}(t)), \frac{\underline{\gamma}'(t)}{\|\underline{\gamma}(t)\|} \rangle \|\underline{\gamma}'(t)\| \, dt = \int_a^b \langle \underline{F}(\underline{\gamma}(t)), \underline{\gamma}'(t) \rangle \, dt$$

Nei testi di fisica il lavoro è solitamente indicato riferendosi all'ultimo integrale dove però è diversa la notazione sia di prodotto scalare che di grandezza vettoriale e, soprattutto, $\underline{\gamma}'(t)dt$ si indica come un differenziale vettoriale **dl**. L'espressione del lavoro diventa dunque:

$$\int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{dl}$$

o

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dl}$$

Mentre la definizione matematica rigorosa permette di dare un metodo di calcolo ben definito, seppur spesso laborioso, l'espressione usata nei testi di fisica si presta ai ragionamenti condotti su grandezze infinitesime frequenti nella materia.

4 Integrali di superficie

Sia $\underline{\psi} : D \to \mathbb{R}^n$ una superficie regolare in $\mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione il cui dominio contenga il sostegno di $\underline{\psi}$. Si definisce l'integrale di superficie di f lungo $\underline{\psi}$:

$$\int_{\underline{\psi}} f \, d\sigma := \iint_D f(\underline{\psi}(u, v)) \|\underline{\psi}_u(u, v) \wedge \underline{\psi}_v(u, v)\| \, du \, dv$$

L'integrale lungo una superficie dunque non è altro che un integrale di una funzione a due variabili. Analogamente all'integrale curvilineo il primo membro talvolta si indica ponendo sotto il segno di integrale il sostegno di $\underline{\psi}$, $S = \underline{\psi}(D)$:

$$\int_S f \, d\sigma$$

4.1 Flusso di un campo

Sia $\underline{\psi} : D \to \mathbb{R}^n$ una superficie regolare in $\mathbb{R}^n$ e $\underline{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale il cui il dominio contenga il sostegno di $\underline{\psi}$, S. Il flusso del campo vettoriale attraverso la superficie si definisce come integrale di superficie lungo $\underline{\psi}$ del prodotto scalare tra il campo vettoriale e il campo di versori normali alla curva $\underline{\nu} := \frac{\underline{\psi}_u(u,v) \wedge \underline{\psi}_v(u,v)}{\|\underline{\psi}_u(u,v) \wedge \underline{\psi}_v(u,v)\|}$:

$$\int_S \langle \underline{F}, \underline{\nu} \rangle \, d\sigma$$

Applicando la definizione di integrale curvilineo lo si può esprimere come integrale doppio di una funzione a due variabili.

$$\int_S \langle \underline{F}, \underline{\nu} \rangle \, d\sigma = \iint_D \langle \underline{F}(\underline{\psi}(u,v)), \frac{\underline{\psi}_u(u,v) \wedge \underline{\psi}_v(u,v)}{\|\underline{\psi}_u(u,v) \wedge \underline{\psi}_v(u,v)\|} \rangle \|\underline{\psi}_u(u,v) \wedge \underline{\psi}_v(u,v)\| \, du \, dv =$$

$$= \iint_D \langle \underline{F}(\underline{\psi}(u,v)), \underline{\psi}_u(u,v) \wedge \underline{\psi}_v(u,v) \, du \, dv$$

Analogamente al lavoro di un campo vettoriale, nei testi di fisica il flusso è solitamente indicato riferendosi all'ultimo integrale dove però è diversa la notazione sia di prodotto scalare che di grandezza vettoriale e, soprattutto, $\underline{\psi}_u(u,v) \wedge \underline{\psi}_v(u,v)$ (il quale, ricordiamo, si tratta del vettore normale alla curva) si indica come un differenziale vettoriale $\mathbf{ds}$. L'espressione del flusso diventa dunque:

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}$$

Analogamente al lavoro di un campo vettoriale la definizione matematica rigorosa permette di dare un metodo di calcolo ben definito spesso laborioso, mentre l'espressione usata nei testi di fisica si presta ai ragionamenti condotti su grandezze infinitesime frequenti nella materia.

5 Teorema della divergenza

Il teorema della divergenza permette di collegare il flusso di un campo attraverso una superficie in tre dimensioni con l'integrale triplo della divergenza sul volume del quale la superficie è bordo. Si noti che la superficie deve essere necessariamente chiusa, da cui l'utilizzo del simbolo di integrale con un cerchio in mezzo. Utilizzando la stessa notazione dei punti precedenti l'enunciato diventa:

$$\oint_{S=\partial V} \langle \underline{F}, \underline{\nu} \rangle \, d\sigma = \iiint_V \underline{\nabla} \cdot \underline{F} \, dx \, dy \, dz$$

Con la notazione dei testi di fisica si ha:

$$\oint_{S=\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV$$

6 Teorema di Stokes

Il teorema di Stokes permette di collegare il lavoro di un campo lunga una curva chiusa in tre dimensioni con flusso del rotore attraverso una qualsiasi superficie di cui la curva è bordo. Facendo considerazioni analoghe alle precedenti l'enunciato è il seguente:

$$\oint_{C=\partial S} \langle \underline{F}, \underline{T} \rangle \, dl = \int_S \langle \underline{\nabla} \times \underline{F}, \underline{\nu} \rangle \, d\sigma$$

Con la notazione usata in fisica si ha:

$$\oint_{C=\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dl} = \int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}$$