

# 预测控制课程小结

开课学院：电子信息与电气工程学院

2020 年 6 月 9 日

类别	C	学号	000000000000	姓名	zihasheng	班级	0000000
标题	基于状态空间模型预测控制的无人驾驶车辆路径跟踪					指导教授	李德伟

## 1 引言

模型预测控制 (MPC) [1, 2] 是一种基于优化的控制方法, 可以处理具有硬状态和输入约束的复杂多输入多输出 (MIMO) 系统。与别的方法不同的是, 模型预测控制并不是在实验室中科学家通过理论研究得到的成果, 而是工程师在工业实践过程中发展起来的一种有效的控制方法。这是因为虽然上世纪 60 年代开始迅猛发展的现代控制理论在航空航天和制导等领域中起到了重要的作用, 但是当现代控制理论被应用于工业中的过程控制时却发现其控制效果很难达到预期。由于现代控制理论往往需要建立准确的参数数学模型, 但是工业过程控制一般存在着很强的非线性、时变性、不确定性和强耦合等特征, 所以现代控制理论很难对工业过程控制建立准确有效的模型。而且在工业过程控制中, 经济因素也是不可忽略的一个重要因素, 如何使用低成本的控制方法实现实时有效的控制是需要考虑的问题, 而现代控制理论的许多算法往往过于复杂难以用低性能的计算机实现。综合以上原因, 为了克服理论与工业中的实际应用之间的鸿沟, 模型预测控制应运而生, 而且模型预测控制一经问世, 立马在石油化工、电力等行业迅速发展起来。

现如今, 无人驾驶车辆发展迅猛, 在智能交通系统 (ITS) 中有着巨大的应用前景。在对无人驾驶车辆的研究中, 控制车辆进行路径跟踪是重要的一个环节 [3]。由于模型预测控制具备能够系统地考虑模型非线性, 且易于处理多约束优化问题等优势, 所以在无人驾驶车辆的运动规划与控制等领域得到了广泛的应用。本文通过对文献 [4] 中无人驾驶车辆路径跟踪这一多变量有约束系统的例子进行研究, 应用基于状态空间的模型预测控制算法进行仿真, 根据仿真结果分析预测控制系统的性能 (有无静差、抗扰动能力、模型失配时的鲁棒性等) 以及设计参数与对稳定性的影响。

## 2 模型

### 2.1 车辆运动学模型

对于无人驾驶车辆进行控制, 首先要建立车辆系统的运动学模型。建立合适的能够满足实际使用的模型是设计控制系统的前提, 为求解提供了约束, 而且可以提高控制的效果。由于无人驾驶车辆在实际的行驶过程中遇到的情况是十分复杂的, 一方面在建模的过程中不可能把所有的因素考虑进去, 另一方面考虑的越多会使得建立的模型非常复杂, 难以求解。所以我们首先要根据无人驾驶车辆的实际情况, 选取恰当的控制变量, 建立尽可能准确而且可以在实际中使用的模型。

由于无人驾驶车辆的特殊性, 车辆在行驶的过程中不可能突然停下来等待系统求解接下来的控制量。因此, 在建模车辆系统时, 进行对约束的简化和近似是非常必要的, 这样可以保证求解的实时性, 从而保证无人驾驶车辆行驶过程中对路径跟踪的不间断。

车辆的转弯运动模型如图1所示。在惯性坐标系  $OXY$  下,  $(X_r, Y_r)$  和  $(X_f, Y_f)$  分别代表车辆后轴和前轴轴心的坐标,  $\varphi$  代表车辆的航向角,  $\delta_f$  代表前轮偏角,  $v_r$  和  $v_f$  分别代表车辆后轴和前轴的中心速度,

$l$  表示车辆的轴距。

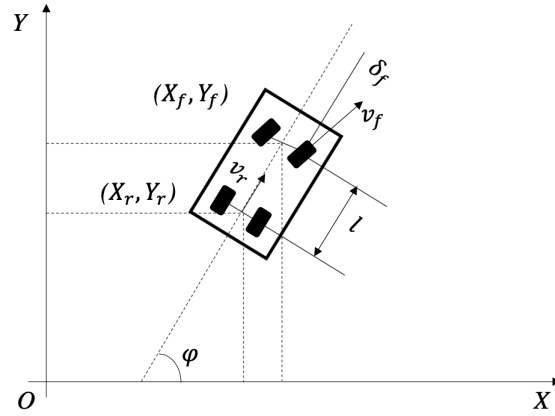


图 1: 车辆运动模型

车辆的前轮转向示意图如下图所示,  $R$  为后轮转向半径,  $P$  为车辆的瞬时转动中心,  $M$  为车辆后轴轴心,  $N$  为车辆前轴轴心, 假设车辆在转弯过程中车辆质心侧偏角保持不变。

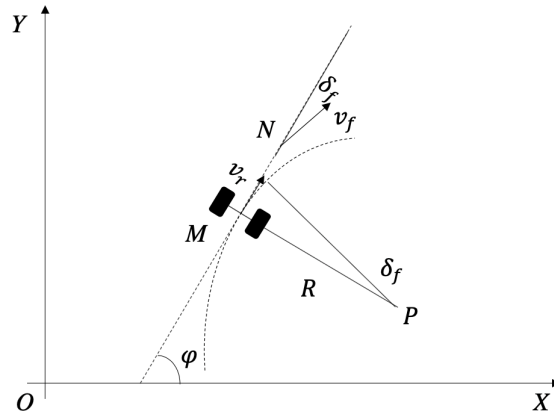


图 2: 车辆运动模型

在后轴轴心  $(X_r, Y_r)$  处, 速度为:

$$v_r = \dot{X}_r \cos \varphi + \dot{Y}_r \sin \varphi \quad (1)$$

前后轴的运动学约束为:

$$\begin{cases} \dot{X}_f \sin(\varphi + \delta_f) - \dot{Y}_r \cos(\varphi + \delta_f) = 0 \\ \dot{X}_r \sin \varphi - \dot{Y}_r \cos \varphi = 0 \end{cases} \quad (2)$$

由公式 (1) 和公式 (2) 联立得到:

$$\begin{cases} \dot{X}_r = v_r \cos \varphi \\ \dot{Y}_r = v_r \sin \varphi \end{cases} \quad (3)$$

再由前后轮的几何关系可以得到下式：

$$\begin{cases} X_f = X_r + l \cos \varphi \\ Y_f = Y_r + l \sin \varphi \end{cases} \quad (4)$$

把公式 (3) 和 (4) 代入公式 (2) 中得到航向角速度为：

$$\omega = \frac{v_r}{l} \tan \delta_f \quad (5)$$

然后由航向角速度  $\omega$  和车速  $v_r$  可以得到转向半径  $R$  和前轮偏角  $\delta_f$ ，

$$\begin{cases} R = v_r / \omega \\ \delta_f = \arctan(l/R) \end{cases} \quad (6)$$

由公式 (3) 和公式 (5) 可以得到车辆的运动学模型：

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_r \\ \dot{Y}_r \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} v_r + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega \quad (7)$$

在得到了上述公式以及知道了当前时刻的位置状态、运动状态（控制量）以后，便可以通过求解微分方程的方法来获取无人驾驶车辆下一时刻的位置状态。在无人驾驶车辆的路径跟踪过程中，选取状态变量为  $[X_r, Y_r, \varphi]^T$ ，控制变量为  $[v_r, \delta_f]^T$ 。

## 2.2 模型预测控制算法

模型预测控制算法包括三个部分：预测模型、滚动优化和反馈校正 [5]。

### 2.2.1 预测模型

预测模型是模型预测控制的基础，我们主要利用对象的历史信息和未来输入，然后依赖预测模型来预测未来的输出。本文所使用的预测模型为状态空间模型。对于自动驾驶车辆系统而言，其运动学模型和动力学模型都是非线性模型。假设此非线性系统有如下一般的状态空间形式：

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t)) \\ x(t) &\in \chi, u(t) \in \Gamma \end{aligned} \quad (8)$$

其中， $f(\cdot, \cdot)$  指系统的状态转移函数， $y(\cdot)$  是系统输出， $x$  为  $n_s$  维状态变量， $u$  为  $m_c$  维控制变量， $\chi$  为状态变量约束， $\Gamma$  为控制变量约束。根据此模型，只需知道  $x(t)$  和  $u(t), u(t+1), \dots$ ，便可以预测未来的

状态和输出：

$$\begin{aligned}
\tilde{x}(t+i|t) &= f(\tilde{x}(t+i-1|t), u(k+i-1)) \\
\tilde{y}_m(t+i|t) &= g(\tilde{x}(t+i|t), u(k+i-1)) \\
i &= 1, \dots, \\
\tilde{x}(k|k) &= x(k)
\end{aligned} \tag{9}$$

由  $i = 1$  开始递推公式 (9) 便可以作为预测模型。针对本文所研究的无人驾驶车辆，考虑其在低速行驶过程中路径跟踪控制，所以使用公式 (7) 作为预测模型。

### 2.2.2 滚动优化

模型预测控制的一个显著特点就是反复进行在线优化某一性能指标来确定控制作用。由于系统的控制增量未知，所以我们需要设定合适的优化目标，并通过求最优解得到控制时域内的控制序列。若  $f(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$  为系统的一个稳定点和系统的控制目标。对于任意的时域  $N$ ，考虑如下的优化目标函数  $J_N(\cdot, \cdot)$ ：

$$J_N(x(t), U(t)) = \sum_{k=t}^{t+N-1} l(x(k), u(k)) + P(x(t+N)) \tag{10}$$

其中， $U(t) = [u(t), \dots, u(t+N-1)]^T$  是在控制时域  $N$  内的控制量输入序列， $x(t)$  是在输入向量序列  $U(t)$  作用于系统下的状态向量轨迹，优化目标函数中的第一项表示对期望输出的跟踪能力，第二项表示终端约束。

综合公式 (8) 和公式 (10)，非线性模型预测控制就是要在每一个步长内求解以下带约束的有限时域优化问题：

$$\min J_N(x_t, U_t) \tag{11}$$

$$\text{s.t. } x_{k+1,t} = f(x_{k,t}, u_{k,t}), \quad k = t, \dots, N-1 \tag{12}$$

$$x_{k,t} \in \chi, \quad k = t+1, \dots, t+N-1 \tag{13}$$

$$u_{k,t} \in \Gamma, \quad k = t, \dots, t+N-1 \tag{14}$$

$$x_{t,t} = x(t) \tag{15}$$

$$x_{N,t} \in \chi_{fin} \tag{16}$$

其中，式 (12) 是系统所决定的状态约束，由于预测模型的解析关系难以得到，因此把时域中所有时刻的预测模型用于模型预测。式 (13) 和式 (14) 分别是状态向量和控制输入向量约束，式 (15) 是初始状态约束，式 (16) 是终端状态约束。

假设上述优化问题存在可行解，那么求解得到最优控制序列  $U_t^*(t) = [u_{t,t}^*, \dots, u_{t+N-1,t}^*]$ 。根据模型预测控制的原理，将该控制序列中的第一个元素作为受控对象的实际控制输入，即：

$$u(x(t)) = u_{t,t}^* \tag{17}$$

在下一个采样时刻，系统重新以新的采样时刻作为初始状态求解上述优化问题，并将控制序列中的第一个元素作为受控对象的实际控制输入，这样循环直到完成整个控制过程。

### 2.2.3 反馈校正

在  $t$  时刻实施控制后, 即可算出对象在未来时刻的各输出值。到  $t+1$  时刻测得各实际输出值  $y_i(t+1)$  后, 即可与相应的预测值比较并构成误差向量。利用这一误差信息预测未来的输出误差, 并以此补偿基于模型的预测, 可以得到经过校正的预测向量, 如下式所示:

$$\tilde{y}_p(t+i|t) = \tilde{y}_m(t+i|t) + \tilde{e}(t+i|t), i = 1, 2, \dots \quad (18)$$

根据预测模型、滚动优化和反馈校正, 模型预测控制的整体原理如图3所示。首先, 对于无人驾驶车辆的路径跟踪问题, 参考轨迹-1 就是无人驾驶车辆需要跟踪的路径。时刻  $k$  是当前时刻, 那么模型预测控制就是要基于当前时刻的测量值和预测模型来预测系统在预测时域内的输出, 也就是曲线 2。通过滚动优化过程中, 对目标函数的优化问题求解最优解可以得到控制时域内的控制变量。然后把控制变量的第一个元素作为实际控制量, 进而来到下一个时刻  $k+1$ , 重复上述动作, 从而实现被控对象(无人驾驶车辆)的路径跟踪。

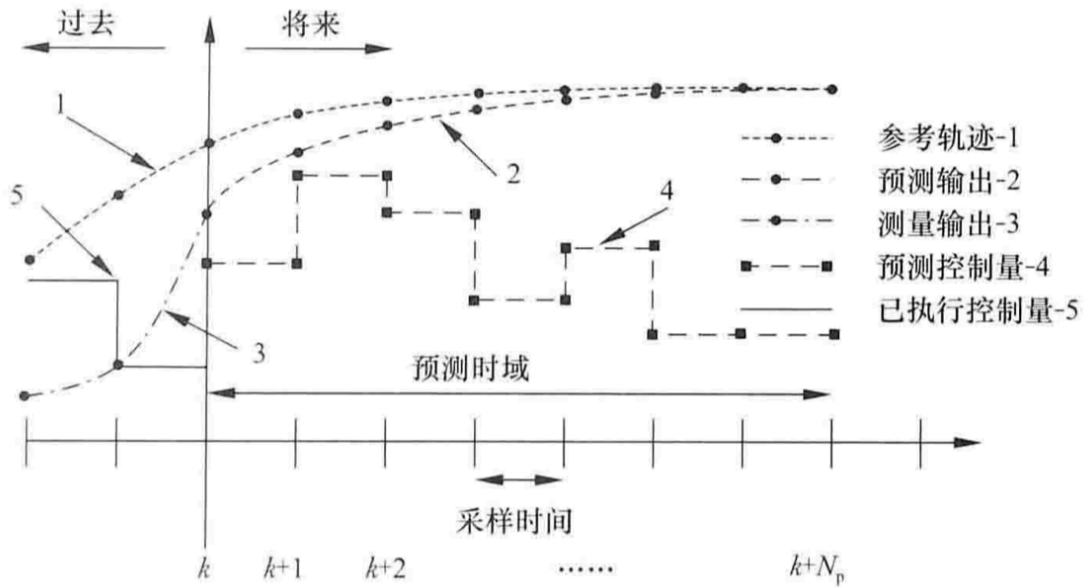


图 3: 模型预测控制原理图

## 3 实验结果及讨论

本文对文献 [4] 中无人驾驶车辆的非线性模型预测控制算法的例子使用 Matlab 进行仿真验证。

### 3.1 控制系统及参数定义

首先在如下的代码中对车辆控制系统的基本情况进行定义。

```
1 Nx=3; %状态量个数
2 Np=25; %预测时域
3 Nc=2; %控制时域
4 l=1; %轴距
5 N=200; %参考轨迹点数量
6 T=0.05; %采样周期
```

然后进行对状态变量的初始化。定义无人驾驶车辆的起始位置在 (0,0) 处，初始航向角为  $\pi/6$ 。

```
1 State_Initial=zeros(Nx,1);
2 State_Initial(1,1)=0; % 横坐标x
3 State_Initial(2,1)=0; % 纵坐标y
4 State_Initial(3,1)=pi/6; %航向角phi
```

约束如下，即  $0.8 \leq v - v_r \leq 1.2$ ， $-0.44 \leq \delta - \delta_f \leq 0.44$ ，

```
1 lb=[0.8;-0.44];
2 ub=[1.2;0.44];
```

本次仿真所使用的参考轨迹如下图所示，其中图4为直线路径，图5为抛物线路径。

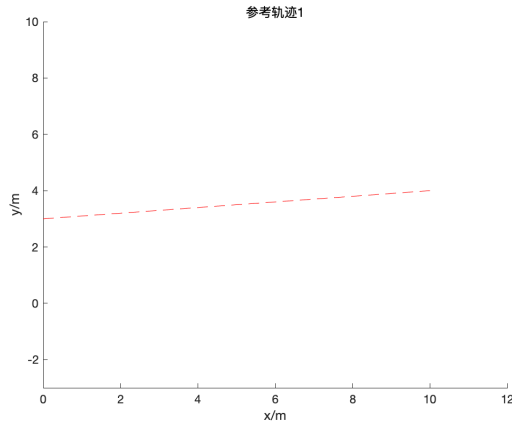


图 4: 参考轨迹 1

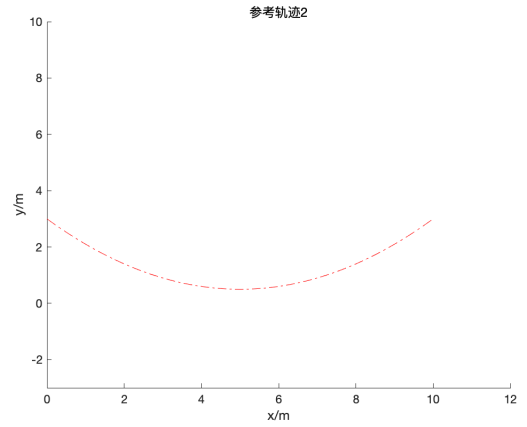


图 5: 参考轨迹 2

在每个仿真时刻  $k$ ，首先需要给出预测时域内的参考轨迹，然后进行滚动优化，求解出最优的控制变量后，根据运动学方程，求解下一时刻的位置状态。

```
1 XOUT=dsolve('Dx-v_actual*cos(z)=0','Dy-v_actual*sin(z)=0',...
2 'Dz-v_actual*tan(deltaf_actual)=0','x(0)=X00(1)','y(0)=X00(2)','z(0)=X00(3)');
3 t=T;
4 State_Initial(1,1)=eval(XOUT.x);
5 State_Initial(2,1)=eval(XOUT.y);
6 State_Initial(3,1)=eval(XOUT.z);
```

## 3.2 结果

通过运行仿真程序，得到如下图的路径跟踪结果。可以看出针对两种轨迹无人驾驶车辆均在 5 秒左右的时间跟上了参考路径，在 5 秒之后基本一致沿着参考轨迹进行行驶，从这两组结果来看，控制的效果基本符合预期，而且两组车辆的实际轨迹都没有静差产生。

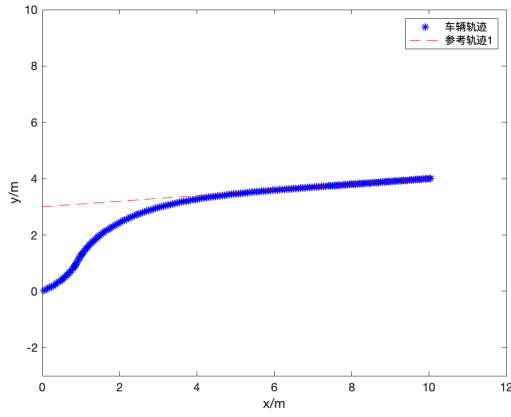


图 6: 实际轨迹与参考轨迹 1

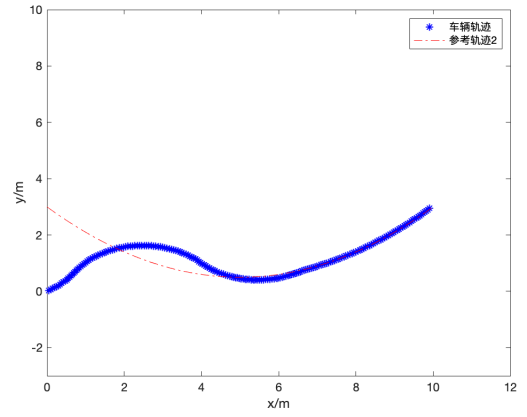


图 7: 实际轨迹与参考轨迹 2

经过测试发现，此模型预测控制算法对于预测时域和控制时域的变化不敏感，在调整预测时域为 5 或控制时域为 10 时，无人驾驶车辆的实际轨迹与上图没有太大差异。但是在改变状态变量中的航向角时发现，设定合适的初始航向角会加快无人驾驶车辆跟上参考轨迹的速度。如下图所示，可以发现当初始航向角  $=2\pi/3$  时，无人驾驶车辆跟上参考轨迹所需要的时间明显要比另外两组结果快。

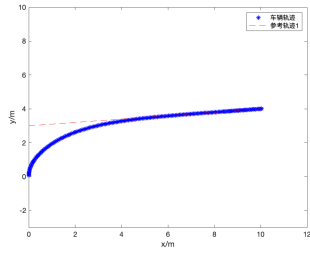


图 8: 初始航向角  $=\pi/2$

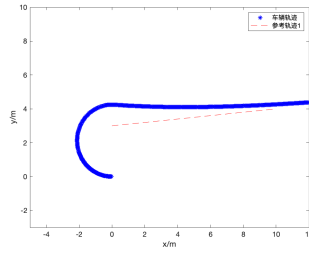


图 9: 初始航向角  $=\pi$

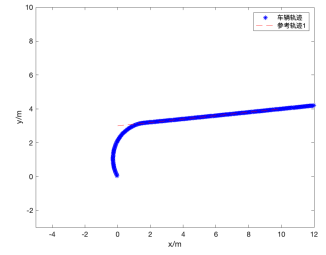


图 10: 初始航向角  $=2\pi/3$

为了验证模型的抗干扰能力，我们假设无人驾驶车辆在行驶到 5 秒时遇到一个撞击扰动，使无人驾驶车辆的航向角突然变为  $-\frac{\pi}{6}$ ，得到如图11所示的车辆轨迹。可以看出无人驾驶车辆在偏离了参考轨迹一段时间之后，再次回到了参考轨迹上，验证了模型预测控制算法的抗扰动能力。

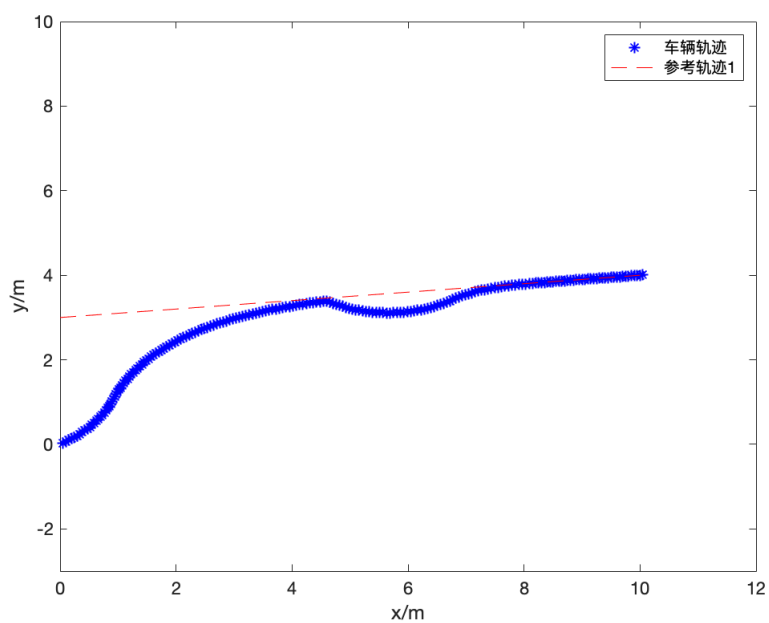


图 11: 模型的抗干扰能力

为了验证模型失配时的鲁棒性，我们假设无人驾驶车辆在行驶到 5 秒到 6.5 秒时模型失配，得到如图12所示的车辆轨迹。可以看出无人驾驶车辆在 5 秒到 6.5 秒距离参考轨迹越来越远，在 6.5 秒之后一段时间，再次回到了参考轨迹上，验证了模型预测控制算法失配时的鲁棒性。

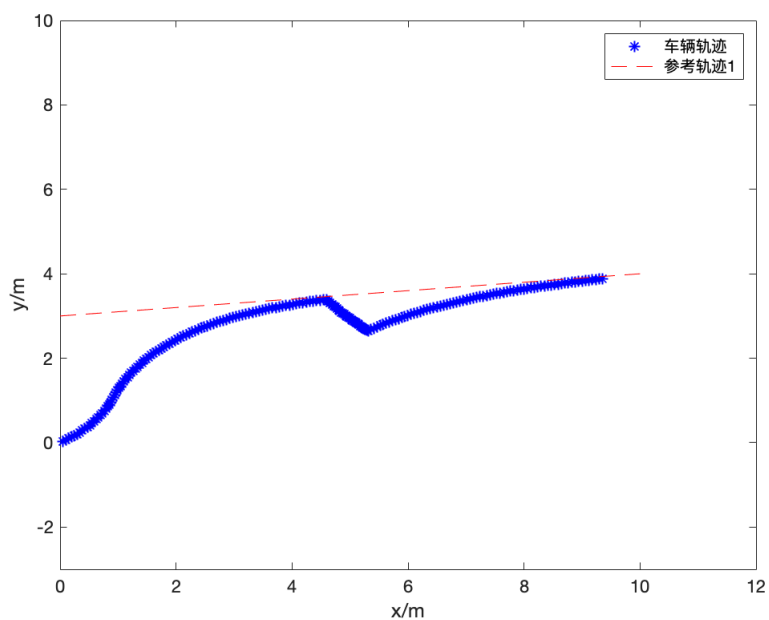


图 12: 模型失配时的鲁棒性



---

## 4 结论

本文基于文献中对无人驾驶车辆进行模型预测控制的例子，对于多变量有约束系统的模型预测控制有了更深的理解，也通过此例子对《预测控制》这门课程进行了回顾。本文根据仿真结果分析了此预测控制系统的性能以及初始设计参数与对稳定性以及快速性的影响。通过此次小结可以看出，预测控制虽然从传统工业过程控制中发展而来，但是也在无人驾驶等新兴领域中有着广泛的应用，它的发展前景是非常乐观的，所以我们应该积极探索预测控制的在各个新兴领域的发展潜力。

## 参考文献

- [1] B. Kouvaritakis and M. Cannon, “Model predictive control,” *Switzerland: Springer International Publishing*, 2016.
- [2] J. B. Rawlings, D. Q. Mayne, and M. Diehl, *Model predictive control: theory, computation, and design*. Nob Hill Publishing Madison, WI, 2017, vol. 2.
- [3] 姜岩, 王琦, 龚建伟, and 陈慧岩, “无人驾驶车辆局部路径规划的时间一致性与鲁棒性研究,” *自动化学报*, vol. 000, no. 3, pp. 518–527, 2015.
- [4] 龚建伟, 姜岩, and 徐威, *无人驾驶车辆模型预测控制*. 北京: 北京理工大学出版社, 2014.
- [5] 席裕庚, *预测控制*. 国防工业出版社, 2013.