3e exercice

Madame Lacraie, professeur de Mathématiques, enseigne dans deux classes de même niveau ayant chacune deux heures de Mathématiques par semaine. La classe A a une heure le lundi et une heure le jeudi. La classe B a une heure le mardi et une heure le vendredi. Normalement Madame Lacraie traite un paragraphe par heure, mais lorsqu'elle refait un cours pour la deuxième fois, elle va deux fois plus vite. Au bout de dix semaines de classe combien de paragraphes auront été traités dans chaque classe ?

SOLUTION :

. Dans chaque classe Madame Lacraie traite d'abord à vitesse double la partie de cours qu'elle a faite une première fois dans l'autre classe, puis elle traite à vitesse normale une nouvelle partie de cours pendant le temps qu'il lui reste. La quantité de cours faite à vitesse double correspond à la quantité faite à vitesse normale pendant l'heure précédente dans l'autre classe.

. Si on appelle u_n la quantité de nouveau cours traitée par Mme Lacraie à la $n^{\text{ième}}$ heure on a :

$$u_n = 1 - \frac{u_{n-1}}{2}$$

(la quantité u_{n-1} est traitée à vitesse double, donc le temps restant est $1 - \frac{u_{n-1}}{2}$)

Et on a $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$

. On peut programmer la calculatrice pour calculer les premiers termes :

$u_1 = 1$; $u_2 = \frac{1}{2}$; $u_3 = \frac{3}{4}$; $u_4 = \frac{5}{8}$; etc...

On constate en continuant les calculs que u_n s'approche de 0,666 ... c'est-à-dire $\frac{2}{3}$.

. Considérons alors la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \frac{2}{3}$ on aura

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{3} = (1 - \frac{u_n}{2} - \frac{2}{3})$$

$$= \frac{1}{2}\,(\frac{2}{3} - u_n) = -\frac{1}{2}\,(u_n - \frac{2}{3}) = -\frac{1}{2}\,v_n$$

(v_n) est donc une suite géometrique de raison $(-\frac{1}{2})$ et de premier terme $v_0 = u_0 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$ et par conséquent $v_n = -\frac{2}{3} \times (-\frac{1}{2})^n$ et $u_n = v_n + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\,(1 - (-\frac{1}{2})^n)$

. Cherchons maintenant la quantité totale de cours traité par Mme Lacraie ;
dans la classe A : à sa 1ère heure, elle traite u_1

à sa 3ème heure, elle traite $u_2 + u_3$

à sa 5ème heure, elle traite $u_4 + u_5$

à sa (2n + 1) ème heure, elle traite $u_{2n} + u_{2n+1}$

Au bout de 10 semaines, sa dernière heure dans la classe A sera sa 39ème heure, elle aura donc traité :
$(u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{38} + u_{39})$ paragraphes dans la classe A

Dans la classe B : à sa 2ème heure, elle traite $u_1 + u_2$

à sa 4ème heure, elle traite $u_3 + u_4$

à sa 40ème heure, elle traite $u_{39} + u_{40}$

Au bout de 10 semaines, elle aura donc traité :

$(u_1 + u_2 + ... + u_{39} + u_{40})$ paragraphes.

$$\sum_{k=1}^{39} u_k = \sum_{k=1}^{39}\left(\frac{2}{3} + v_k\right) = 39 \times \frac{2}{3} + \sum_{k=1}^{39} v_k = 26 + v_1 \sum_{k=1}^{39}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= 26 + \frac{1}{3}\,\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{39}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = 26 + \frac{1}{3}\,\frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{39}}{\frac{3}{2}} = 26 + \frac{2}{9} + \frac{1}{9 \times 2^{38}}$$

$$\approx 26{,}222$$

$$\sum_{k=1}^{40} u_k = \sum_{k=1}^{40}\left(\frac{2}{3} + v_k\right) = 40 \times \frac{2}{3} + \sum_{k=1}^{40} v_k = 26 + \frac{2}{3} + v_1 \sum_{k=0}^{39}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= 26 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\,\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{40}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = 26 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{40}}{\frac{3}{2}} =$$

$$= 26 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} - \frac{1}{9 \times 2^{39}} \approx 26{,}888$$

Conclusion : Dans la classe A : $26 + \frac{2}{9} + \frac{1}{9 \times 2^{38}} \approx 26{,}222$

Dans la classe B : $26 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} - \frac{1}{9 \times 2^{39}} \approx 26{,}889$