Coordenadas en una base

Comencemos recordando la definición de base de un espacio vectorial.
Un conjunto de vectores $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ si cumple

- B es un conjunto linealmente independiente.
- B genera $\mathbb{V}$.

La segunda condición significa que para cada vector $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ existen escalares $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ que cumplen $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$.
Además, si $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ cumplen $\mathbf{v} = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_n\mathbf{v}_n$, restando las dos igualdades obtenemos una combinación lineal de los vectores de la base B igualada al vector nulo:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} - \mathbf{v} &= (a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n) - (b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_n\mathbf{v}_n) \\ O &= (a_1 - b_1)\mathbf{v}_1 + (a_2 - b_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (a_n - b_n)\mathbf{v}_n \end{aligned}$$

Como B es un conjunto linealmente independiente, la única solución de la última igualdad es $a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = \cdots = a_n - b_n = 0$ que nos dice que $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$.
Esto significa que para cada vector $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ existen ***únicos*** escalares $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ que cumplen $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$. Decimos que $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ son las *coordenadas de* $\mathbf{v}$ *con respecto a la base* B y escribimos $(\mathbf{v})_B = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. En resumen:

$$(\mathbf{v})_B = (a_1, a_2, \dots, a_n) \iff \mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$$

Observar que las coordenadas de un vector dependen de la base, en particular, del orden de los vectores que la forman. En adelante, una base de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ es un conjunto ***ordenado*** de vectores linealmente independientes que genera $\mathbb{V}$.

Ejemplo 1. Hallar las coordenadas de $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ con respecto a las siguientes bases de $\mathbb{R}^3$.

a) $B_1 = \{(1, 1, -1), (-1, 1, 0), (0, 1, -1)\}$

b) $B_2 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

c) $B_3 = \{(-1, 1, 0), (0, 1, -1), (1, 1, -1)\}$

Solución: Usando la definición de coordenadas, planteamos las combinaciones lineales con cada base y resolvemos el sistema lineal que resulta.

a)

$$(1,2,3)_{B_1} = (a,b,c) \iff (1,2,3) = a(1,1,-1) + b(-1,1,0) + c(0,1,-1)$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} a & - & b & & & = & 1 \\ a & + & b & + & c & = & 2 \\ -a & & & - & c & = & 3 \end{array} \right. \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} F_2 - F_1 \to F_2 \\ F_3 + F_1 \to F_3 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{array} \right) 2F_3 + F_2 \to F_3 \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \end{array} \right)$$

que tiene como solución $a = 6, b = 5$ y $c = -9$

Respuesta: Las coordenadas de $(1,2,3)$ con respecto a B_1 son $(1,2,3)_{B_1} = (6,5,-9)$.

Verificación:

Hagamos la combinación lineal de los vectores de la base B_1 con las coordenadas halladas:

$6(1,1,-1) + 5(-1,1,0) - 9(0,1,-1) = (1,2,3)$.

b)

$$(1,2,3)_{B_2} = (a,b,c) \iff (1,2,3) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$$

De esta igualdad se puede despejar como solución $a = 1, b = 2$ y $c = 3$.

Respuesta: Las coordenadas de $(1,2,3)$ con respecto a B_2 son $(1,2,3)_{B_2} = (1,2,3)$.

Verificación:

Hagamos la combinación lineal de los vectores de la base B_2 con las coordenadas halladas:

$1(1,0,0) + 2(0,1,0) + 3(0,0,1) = (1,2,3)$

c)

$$(1,2,3)_{B_3} = (a,b,c) \iff (1,2,3) = a(-1,1,0) + b(0,1,-1) + c(1,1,-1)$$

Notar que los vectores de la base B_3 son los mismos que los de la base B_1 pero en otro orden; por lo tanto, ya sabemos cuál es la combinación lineal de estos vectores que da como resultado $(1,2,3)$. Entonces $a = 5, b = -9$ y $c = 6$.

Respuesta: Las coordenadas de $(1,2,3)$ con respecto a B_3 son $(1,2,3)_{B_3} = (5,-9,6)$.

Verificación:

Hagamos la combinación lineal de los vectores de la base B_3 con las coordenadas halladas:

$5(-1,1,0) - 9(0,1,-1) + 6(1,1,-1) = (1,2,3)$

Observación: En el ejemplo anterior, B_2 es la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y, para esta base, nuestra definición de coordenadas coincide con la que ya veníamos usando: $(1,2,3)_{B_2} = (1,2,3)$.
Lo mismo ocurre para la base canónica de $\mathbb{R}^n$ para cualquier n: si $\mathbf{v} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y E es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, entonces $(\mathbf{v})_E = (x_1, \ldots, x_n)$.

Ejemplo 2. Sea $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

a) Hallar la matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ cuyas coordenadas con respecto a la base B son $(4,0,1,-3)$.

b) Hallar las coordenadas de $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ con respecto a la base B.

Solución:

a) A partir de la definición de coordenadas, sabemos que la matriz A se obtiene calculando la combinación lineal de los elementos de la base B con los escalares dados por las coordenadas de A con respecto a la base:

$$(A)_B = (4,0,1,-3)$$

$$\iff A = 4 \,.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 0 \,.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \,.\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + (-3) .\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Respuesta: La matriz A tal que $(A)_B = (4,0,1,-3)$ es $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$.

b) Como en el Ejemplo 1, para hallar las coordenadas de la matriz dada con respecto a la base B usamos la definición de coordenadas, que nos conduce a un sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}_B = (a,b,c,d)$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a + 2c = 0 \\ -a + b - c - d = -3 \\ 2a - b + 4c + d = 2 \\ a + 2c + d = 3 \end{cases} \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Escalonamos para resolver el sistema:

$$\begin{array}{c} F_2 + F_1 \to F_2 \\ F_2 - 2F_1 \to F_3 \\ F_4 - F_1 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad F_3 + F_2 \to F_3 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Finalmente calculamos la solución del sistema: $a = 2$, $b = 1$, $c = -1$, $d = 3$.

Respuesta: Las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ con respecto a la base B son $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}_B = (2, 1, -1, 3)$.

Verificación:

Comprobemos que al hacer la combinación lineal de B con las coordenadas halladas el resultado es la matriz dada.

$$2 \,.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 1 \,.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + (-1) .\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 3 \,.\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 3. Sean $\mathbb{V}$ un e.v., $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, $B' = \{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3, 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\}$ y $B'' = \{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3\}$ bases $\mathbb{V}$, y sea $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ tal que $(\mathbf{v})_{B'} = (4, 2, 1)$. Hallar $(\mathbf{v})_{B''}$.

Solución: Por la definición de coordenadas con respecto a la base B',

$$\begin{aligned} (\mathbf{v})_{B'} = (4, 2, 1) \iff \mathbf{v} &= 4(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3) + 2(2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + 1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) \\ &= 9\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

Buscamos ahora las coordenadas de $\mathbf{v} = 9\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3$ con respecto a la base B''. Nuevamente, la definición nos dice que:

$$(\mathbf{v})_{B''} = (a, b, c) \iff \mathbf{v} = a(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) + b(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3) + c(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3).$$

Podemos igualar las dos combinaciones lineales que dan $\mathbf{v}$:

$$9\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3 = a(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) + b(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3) + c(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3).$$

Igualando a O y reagrupando, obtenemos una combinación lineal de los vectores de la base B igualada al vector nulo

$$\begin{aligned} O &= a(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) + b(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3) + c(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3) - (9\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3) \\ O &= (b + c - 9)\mathbf{v}_1 + (a + b - 1)\mathbf{v}_2 + (-a - 2b + c + 3)\mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

Como B es un conjunto linealmente independiente, por ser una base de $\mathbb{V}$, la única solución para esta última combinación lineal es la que tiene sus coeficientes iguales a 0, es decir

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} & & b & + & c & - & 9 & = & 0 \\ a & + & b & & & - & 1 & = & 0 \\ -a & - & 2b & + & c & + & 3 & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} & & b & + & c & = & 9 \\ a & + & b & & & = & 1 \\ -a & - & 2b & + & c & = & -3 \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \end{array} \right) F_2 \leftrightarrow F_1 \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

$$F_3 + F_1 \to F_3 \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right) F_3 + F_2 \to F_3 \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{array} \right)$$

La solución del sistema es $a = -\frac{9}{2}, b = \frac{11}{2}, c = \frac{7}{2}$.

Respuesta: $(\mathbf{v})_{B''} = \left(-\frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

Verificación:
Usamos las coordenadas en la combinación lineal con la base B'':

$$-\frac{9}{2}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) + \frac{11}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3) + \frac{7}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3) = 9\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}$$

Observación: En este ejemplo no conocemos cómo son los elementos del espacio vectorial $\mathbb{V}$ ni cuáles son los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ que definen las bases. Las propiedades utilizadas en la resolución son las de la suma y del producto por escalares que valen en todos los espacios vectoriales. De las hipótesis del enunciado podemos deducir que $\dim(\mathbb{V}) = 3$, pero eso no significa que el espacio vectorial sea $\mathbb{R}^3$. Lo que sí ocurre es que las coordenadas de los vectores de este espacio vectorial son ternas de números reales.
En general, para un espacio vectorial $\mathbb{V}$ de dimensión n, las coordenadas de los elementos de $\mathbb{V}$ con respecto a una base son n-uplas, aunque dichos elementos no lo sean.

Ejemplo 4. Sea $B = \{(1,0,1,-1),(1,1,0,1),(0,1,0,1),(1,0,1,0)\}$ base de $\mathbb{R}^4$ y sea $\mathbb{S}$ el subespacio $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0; 2x_1 + x_2 + x_4 = 0; 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0\}$. Hallar todos los vectores $\mathbf{v} \in \mathbb{S}$ cuyas coordenadas con respecto a la base B son de la forma (a,b,b,a).

Solución: Veamos cómo son los vectores $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ que cumplen $(\mathbf{v})_B = (a,b,b,a)$ con $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{v})_B = (a,b,b,a) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{v} &= a(1,0,1,-1) + b(1,1,0,1) + b(0,1,0,1) + a(1,0,1,0) \\ &= (2a+b, 2b, 2a, -a+2b) \end{aligned}$$

Ahora veamos cuáles de estos vectores pertenecen al subespacio $\mathbb{S}$ reemplazando en las ecuaciones de $\mathbb{S}$ y despejando:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -2\cdot(2a+b) & + & 2b & + & 2\cdot(2a) & & & = & 0 \\ 2\cdot(2a+b) & + & 2b & & & + & (-a+2b) & = & 0 \\ & & 2\cdot(2b) & + & 2\cdot(2a) & + & (-a+2b) & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} & & 0 & = & 0 \\ 3a & + & 6b & = & 0 \\ 3a & + & 6b & = & 0 \end{array}\right.$$

Este sistema tiene como soluciones $a = -2b$ para todo $b \in \mathbb{R}$; entonces

$$\mathbf{v} = -2b(1,0,1,-1) + b(1,1,0,1) + b(0,1,0,1) - 2b(1,0,1,0) = b(-3,2,-4,4), \quad \text{con } b \in \mathbb{R}.$$

Respuesta: Los vectores de $\mathbb{S}$ cuyas coordenadas en la base B son de la forma (a,b,b,a) son los de la forma $\mathbf{v} = b(-3,2,-4,4)$, con $b \in \mathbb{R}$, es decir, los del subespacio $\langle(-3,2,-4,4)\rangle$.

Ejemplo 5. Sean $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ y $B' = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3\}$ bases de un e.v. $\mathbb{V}$. Hallar todos los $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ que tienen las mismas coordenadas en ambas bases.

Solución: Buscamos los vectores $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ que cumplan $(\mathbf{v})_B = (\mathbf{v})_{B'}$, es decir, si $(\mathbf{v})_B = (a, b, c)$ también debe valer $(\mathbf{v})_{B'} = (a, b, c)$. Como

$$\begin{aligned} (\mathbf{v})_B = (a,b,c) &\iff \mathbf{v} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3 \qquad \text{y} \\ (\mathbf{v})_{B'} = (a,b,c) &\iff \mathbf{v} = a(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + b(2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + c(-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3) \end{aligned}$$

podemos igualar las combinaciones lineales:

$$a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3 = a(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + b(2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + c(-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3).$$

Pasando todo al mismo lado y reagrupando

$$\begin{aligned} a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3 - a(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) - b(2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) - c(-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3) &= O \\ c\mathbf{v}_1 + (-a-b)\mathbf{v}_2 + (-a-b)\mathbf{v}_3 &= O \end{aligned}$$

obtenemos una combinación lineal de los vectores de la base B igualada al vector nulo. Por la independencia lineal de B, la única solución es con todos los coeficientes iguales a 0, es decir:

$$\begin{cases} & & & c & = & 0 \\ -a & - & b & & = & 0 \\ -a & - & b & & = & 0 \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema son $b = -a$, con $a \in \mathbb{R}$ y $c = 0$, con lo cual,

$$(\mathbf{v})_B = (a, -a, 0) \iff \mathbf{v} = a\mathbf{v}_1 - a\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 = a(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Respuesta: Los vectores de $\mathbb{V}$ que tienen las mismas coordenadas en B y en B' son los de la forma $\mathbf{v} = a(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$ con $a \in \mathbb{R}$, es decir, los del subespacio $\langle \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \rangle$.

Verificación:

Hagamos la combinación lineal con la base B':

$(\mathbf{v})_{B'} = (a, -a, 0) \iff \mathbf{v} = a(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) - a(2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + 0(-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3) = a(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2).$