Espacios vectoriales

Un espacio vectorial es un conjunto con una operación suma y un producto por escalares que cumplen una serie de propiedades (para más detalles, ver el Apéndice al final).
Las propiedades de la suma y el producto por un escalar definidos en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ y, en general, $\mathbb{R}^n$ hacen que estos conjuntos sean ejemplos de espacios vectoriales reales. También lo son los conjuntos de matrices $\mathbb{R}^{m\times n}$ con la suma y producto por escalares.
En estas notas, cuando nos referimos a un espacio vectorial (en adelante abreviado e.v.) nos referimos a un espacio vectorial real, es decir, a que los escalares están en $\mathbb{R}$. A los elementos de un espacio vectorial los denominamos *vectores*.

Subespacios

Dentro de un espacio vectorial $\mathbb{V}$, nos interesará trabajar con ciertos subconjuntos que cumplen propiedades especiales, relacionadas a la operación de suma y al producto por escalares en $\mathbb{V}$.

Definición

Un subconjunto $\mathbb{W}$ de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ es un *subespacio* de $\mathbb{V}$ si se cumplen:

1) El vector nulo O de $\mathbb{V}$ pertenece a $\mathbb{W}$.
2) Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son elementos de $\mathbb{W}$, entonces su suma $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ pertenece a $\mathbb{W}$.
3) Si $\mathbf{v}$ es un elemento de $\mathbb{W}$ y c es un número real, entonces el producto $c\mathbf{v}$ pertenece a $\mathbb{W}$.

Algunos casos especiales:

- El conjunto vacío no es un subespacio: no verifica 1).
- El conjunto $\mathbb{W} = \{O\}$ es un subespacio de cualquier e.v. $\mathbb{V}$.
  1) $O \in \mathbb{W}$.
  2) Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son elementos de $\mathbb{W}$, la única posibilidad es $\mathbf{u} = O$ y $\mathbf{v} = O$, entonces su suma $\mathbf{u}+\mathbf{v} = O + O = O$ pertenece a $\mathbb{W}$.
  3) Si $\mathbf{v}$ es un elemento de $\mathbb{W}$, la única posibilidad es $\mathbf{v} = O$ y, si $c \in \mathbb{R}$, el producto $c\mathbf{v} = c\,O = O$ pertenece a $\mathbb{W}$.
- El conjunto $\mathbb{V}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

Ejemplo 1. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^2$.

a) $\mathbb{W} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 / x_1 - x_2 = 2\}$
b) $\mathbb{W} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 / x_1 - x_2 = 0\}$
c) $\mathbb{W} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 / x_1 - x_2 \geq 0\}$

Solución: Veamos en cada caso si se verifican las condiciones 1), 2) y 3) de la definición de subespacio.

a) 1) Si $\mathbf{x} = O = (0,0)$ la condición $0 - 0 = 2$ no se verifica.

Como no se cumple una de las condiciones para ser subespacio:

Respuesta: El conjunto $\mathbb{W}$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

b) 1) $0 - 0 = 0 \implies O \in \mathbb{W}$.

2) Si $\mathbf{u} = (2,2)$ y $\mathbf{v} = (-3,-3)$, que pertenecen a $\mathbb{W}$ porque $2 - 2 = 0$ y $-3 - (-3) = 0$, vemos que $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (-1,-1)$ también pertenece a $\mathbb{W}$, dado que $-1 - (-1) = 0$.

Esto no es suficiente para asegurar la validez de la propiedad: la condición 2) debe cumplirse para **todos** los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de $\mathbb{W}$.

Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ pertenecen a $\mathbb{W}$ entonces verifican $u_1 - u_2 = 0$ y $v_1 - v_2 = 0$. Tenemos que ver si se cumple que $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \in \mathbb{W}$, es decir, si se verifica que $(u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) = 0$.

Usando propiedades de las operaciones de números podemos reordenar la cuenta $(u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) = u_1 + v_1 - u_2 - v_2 = (u_1 - u_2) + (v_1 - v_2)$.

Si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{W}$, como dijimos antes, las expresiones en los dos últimos paréntesis valen 0 y entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{W}$.

3) Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{W}$, se cumple que $v_1 - v_2 = 0$, y si $c \in \mathbb{R}$, tenemos que $c\mathbf{v} = (cv_1, cv_2)$ verifica $cv_1 - cv_2 = c(v_1 - v_2) = 0$. Entonces, $c\mathbf{v} \in \mathbb{W}$.

Respuesta: El conjunto $\mathbb{W}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

c) 1) $0 - 0 = 0 \implies O \in \mathbb{W}$.

2) Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ pertenecen a $\mathbb{W}$, se verifican $u_1 - u_2 \geq 0$ y $v_1 - v_2 \geq 0$. Tenemos que $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ cumple $(u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) = (u_1 - u_2) + (v_1 - v_2) \geq 0 + 0 = 0$ y, por lo tanto, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{W}$.

3) Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{W}$, cumple que $v_1 - v_2 \geq 0$. Para $c \in \mathbb{R}$, tenemos que $c\mathbf{v} = (cv_1, cv_2)$ y la cuenta $cv_1 - cv_2 = c(v_1 - v_2)$ cambia de signo si c es negativo.

Contraejemplo para 3):

Si $c = -1$ y $\mathbf{v} = (2,1)$, que verifica $2 - 1 \geq 0$ y por lo tanto pertenece a $\mathbb{W}$, vemos que con $c\mathbf{v} = (-2,-1)$ ocurre que $-2 - (-1) = -1 \ngeq 0$ y entonces $-1\mathbf{v} \notin \mathbb{W}$.

Respuesta: El conjunto $\mathbb{W}$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Observación: En general para ver que un subconjunto de un espacio vectorial es un subespacio necesitamos, además de que valga la condición 1), verificar las condiciones 2) y 3) para todos los elementos del conjunto y para todos los valores de $c \in \mathbb{R}$. En cambio, para mostrar que ***no lo es*** alcanza con encontrar un contraejemplo para alguna de las condiciones.

Ejemplo 2. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^3$.

a) $\mathbb{W} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \mathbf{x} = \lambda(1,2,3), \lambda \in \mathbb{R}\}$

b) $\mathbb{W} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / x_1 - 4x_2 - 9x_3 = -3\}$

c) $\mathbb{W} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / x_1 - 4x_2 - 9x_3 = 0\}$

Solución:

a) 1) Si $\lambda = 0$, entonces $O = 0(1,2,3) \in \mathbb{W}$.

2) Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ pertenecen a $\mathbb{W}$, existen valores $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\mathbf{u} = \lambda_1(1,2,3)$ y $\mathbf{v} = \lambda_2(1,2,3)$. Reescribiendo la suma $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \lambda_1(1,2,3) + \lambda_2(1,2,3) = (\lambda_1+\lambda_2)(1,2,3)$ tenemos que $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ es un múltiplo de $(1,2,3)$. Entonces $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathbb{W}$.

3) Si $\mathbf{v} = \lambda(1,2,3)$ y $c \in \mathbb{R}$ tenemos que $c\mathbf{v} = c(\lambda(1,2,3)) = (c\lambda)(1,2,3)$ es múltiplo de $(1,2,3)$ y, por lo tanto, $c\mathbf{v} \in \mathbb{W}$.

Respuesta: El conjunto $\mathbb{W}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

b) 1) $0 - 4 \cdot 0 - 9 \cdot 0 = 0 \neq -3 \implies O \notin \mathbb{W}$.

Respuesta: El conjunto $\mathbb{W}$ no es subespacio un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

c) 1) $0 - 4 \cdot 0 - 9 \cdot 0 = 0 \implies O \in \mathbb{W}$.

2) Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ pertenecen a $\mathbb{W}$, verifican $u_1 - 4u_2 - 9u_3 = 0$ y $v_1 - 4v_2 - 9v_3 = 0$, entonces $\mathbf{u}+\mathbf{v} = (u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3)$ verifica $(u_1+v_1) - 4(u_2+v_2) - 9(u_3+v_3) = (u_1 - 4u_2 - 9u_3) + (v_1 - 4v_2 - 9v_3) = 0+0 = 0$ y, por lo tanto, $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathbb{W}$.

3) Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{W}$, cumple que $v_1 - 4v_2 - 9v_3 = 0$, y $c \in \mathbb{R}$, entonces $c\mathbf{v} = (cv_1, cv_2, cv_3)$ verifica $cv_1 - 4cv_2 - 9cv_3 = c(v_1 - 4v_2 - 9v_3) = c \cdot 0 = 0$. Entonces, $c\mathbf{v} \in \mathbb{W}$.

Respuesta: El conjunto $\mathbb{W}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Observaciones:

En el caso a) del ejemplo anterior, las condiciones para ser un subespacio se verifican sin importar cuáles son las coordenadas del vector $(1,2,3)$. Es decir, si en lugar de $(1,2,3)$ tenemos un vector fijo $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ y consideramos $\mathbb{W} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \mathbf{x} = \lambda\mathbf{w}, \lambda \in \mathbb{R}\}$, que es el conjunto de todos los múltiplos de $\mathbf{w}$, valen:

1) Si $\lambda = 0$ entonces $O = 0\mathbf{w} \in \mathbb{W}$.

2) Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ pertenecen a $\mathbb{W}$, existen valores $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{w}$ y $\mathbf{v} = \lambda_2\mathbf{w}$. Reescribiendo la suma $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{w} + \lambda_2\mathbf{w} = (\lambda_1+\lambda_2)\mathbf{w}$ tenemos que $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ es un múltiplo de $\mathbf{w}$. Entonces $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathbb{W}$.

3) Si $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{w}$ y $c \in \mathbb{R}$, tenemos que $c\mathbf{v} = c(\lambda\mathbf{w}) = (c\lambda)\mathbf{w}$ es múltiplo de $\mathbf{w}$ y por lo tanto $c\mathbf{v} \in \mathbb{W}$.

Entonces $\mathbb{W}$ resulta ser un subespacio de $\mathbb{R}^3$ cualquiera que sea el vector $\mathbf{w}$.

Algo similar ocurre con el plano que pasa por el origen del ejemplo c). El hecho que $O, \mathbf{u}+\mathbf{v}$ y $c\mathbf{v}$ pertenezcan a $\mathbb{W}$ para $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{W}$, y $c \in \mathbb{R}$, se deduce del mismo modo que en el ejemplo, a partir de que $O, \mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ cumplen la ecuación del plano, independientemente de cuál sea esta ecuación.

En general las rectas y planos ***que pasan por el origen*** forman subespacios en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Es importante destacar que en esos casos, para demostrar que se verifican las condiciones para ser subespacio, se utilizan propiedades de la operación suma y del producto por escalares que son válidas también en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^{mxn}$. Esto hace que conjuntos como

- $\mathbb{W} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / \mathbf{x} = \lambda\mathbf{v}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ con $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ fijo.
- $\mathbb{W} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0\}$ con $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ fijos.

sean subespacios del e.v. correspondiente.

Varios de los ejemplos anteriores consisten en subespacios descriptos por una ecuación lineal homogénea. Veamos qué ocurre, más generalmente, al considerar conjuntos de soluciones de sistemas lineales homogéneos.

Ejemplo 3. Decidir si el conjunto $\mathbb{W} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 / A\mathbf{x} = O\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^5$, para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

1) Como el sistema es homogéneo, la solución trivial pertenece al conjunto:

   $AO = O \implies O \in \mathbb{W}$.

2) Si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{W}$, entonces se cumplen $A\mathbf{u} = O$ y $A\mathbf{v} = O$, con lo cual la suma $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ verifica $A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = O + O = O$ y pertenece a $\mathbb{W}$.

3) Si $\mathbf{v} \in \mathbb{W}$, cumple $A\mathbf{v} = O$, y si $c \in \mathbb{R}$, entonces $c\mathbf{v}$ verifica $A(c\mathbf{v}) = c(A\mathbf{v}) = O$ y pertenece a $\mathbb{W}$.

Respuesta: El conjunto $\mathbb{W}$ de soluciones del sistema homogéneo es un subespacio de $\mathbb{R}^5$.

Observación: En el ejemplo anterior, la verificación de las condiciones para que $\mathbb{W}$ sea un subespacio no depende de cuál es la matriz del sistema. Las condiciones se cumplen gracias a propiedades de las operaciones definidas para matrices y valen en general para el conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo de cualquier tamaño.

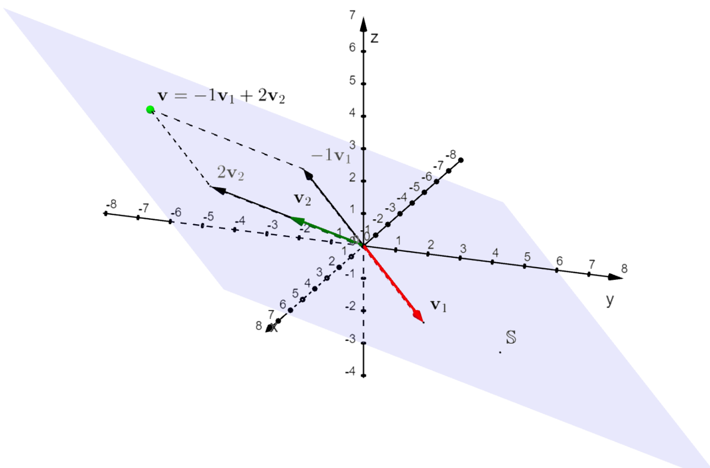
Los conjuntos de la forma $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / A\mathbf{x} = O\}$, con $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ son subespacios de $\mathbb{R}^n$.

Combinaciones lineales y generadores

Como vimos en la sección anterior, un plano que pasa por el origen es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Este hecho lo dedujimos a partir de ver al plano como el conjunto de las soluciones de una ecuación homogénea. Sin embargo, conocemos otra forma de expresar un plano, que es mediante una ecuación paramétrica. Esto nos permite afirmar, por ejemplo, que el conjunto
$\mathbb{W} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \mathbf{x} = \alpha(3,3,-1) + \beta(1,-2,1), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, ya que sabemos que

$$\mathbf{x} = \alpha(3,3,-1) + \beta(1,-2,1), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

es una descripción paramétrica de un plano que pasa por el origen.
En este caso, los vectores de $\mathbb{R}^3$ que pertenecen al plano $\mathbb{W}$ se generan a partir de las dos direcciones $(3,3,-1)$ y $(1,-2,1)$.



En lo que sigue veremos cómo se generaliza la forma paramétrica de rectas y planos que pasan por el origen en $\mathbb{R}^3$ para representar subespacios de otros espacios vectoriales.

Combinaciones lineales

Dados un e.v. $\mathbb{V}$ y $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ elementos de $\mathbb{V}$, se dice que un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ es una *combinación lineal (c.l.)* de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ si existen números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n$ que verifican

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n.$$

Dado un subconjunto finito $C = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de $\mathbb{V}$, al conjunto formado por todas las combinaciones lineales de vectores de C lo escribimos en forma abreviada con la notación $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$. Así,

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle = \{\mathbf{v} \in \mathbb{V} / \mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n, \text{ con } a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

Por ejemplo, el plano $\mathbb{W} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \mathbf{x} = \alpha(3,3,-1) + \beta(1,-2,1), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales del conjunto $C = \{(3,3,-1), (1,-2,1)\}$. En este caso escribimos $\mathbb{W} = \langle (3,3,-1), (1,-2,1) \rangle$.

Propiedad

Dado un espacio vectorial $\mathbb{V}$ y un subconjunto finito $C = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ de $\mathbb{V}$, el conjunto $\mathbb{W} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

Subespacio generado

Al conjunto $\mathbb{W} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ se lo denomina el *subespacio generado* por $C = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ y al conjunto C se lo llama un *conjunto de generadores* de $\mathbb{W}$.

Demostración de la propiedad:

1) $0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\mathbf{v}_n = O \implies O \in \mathbb{W}$ (propiedad del producto por escalar $0\mathbf{v} = O$)

2) Si $\mathbf{u} = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_n\mathbf{v}_n$ y $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$, podemos reescribir $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ usando las propiedades de la suma y el producto por escalares (ver el Apéndice al final) como

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{w} &= (b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_n\mathbf{v}_n) + (c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n) \\ &= (b_1\mathbf{v}_1 + c_1\mathbf{v}_1) + (b_2\mathbf{v}_2 + c_2\mathbf{v}_2) + \cdots + (b_n\mathbf{v}_n + c_n\mathbf{v}_n) \qquad \text{EV3 y EV6} \\ &= (b_1 + c_1)\mathbf{v}_1 + (b_2 + c_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (b_n + c_n)\mathbf{v}_n \qquad \text{EV8} \end{aligned}$$

Esto muestra que, con $a_1 = b_1 + c_1, a_2 = b_2 + c_2, \dots, a_n = b_n + c_n$, tenemos $\mathbf{u} + \mathbf{w} \in \mathbb{W}$.

3) Si $\mathbf{u} = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_n\mathbf{v}_n$ y $c \in \mathbb{R}$, las propiedades EV7 y EV9 implican que

$$\begin{aligned} c\mathbf{u} &= c(b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_n\mathbf{v}_n) \\ &= c(b_1\mathbf{v}_1) + c(b_2\mathbf{v}_2) + \cdots + c(b_n\mathbf{v}_n) \qquad \text{EV7} \\ &= (cb_1)\mathbf{v}_1 + (cb_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (cb_n)\mathbf{v}_n \qquad \text{EV9} \end{aligned}$$

Entonces, con $a_1 = cb_1, a_2 = ca_2, \dots, a_n = cb_n$, se verifica $c\mathbf{u} \in \mathbb{W}$.

Observaciones: Los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ pertenecen al subespacio $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$, ya que

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= 1\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 + \cdots + 0\mathbf{v}_n \\ \mathbf{v}_2 &= 0\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 + \cdots + 0\mathbf{v}_n \\ \dots & \quad \dots \\ \mathbf{v}_n &= 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 + \cdots + 1\mathbf{v}_n \end{aligned}$$

Además, si un subespacio $\mathbb{U}$ de $\mathbb{V}$ contiene a los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ entonces, por cumplir con las condiciones 2) y 3) de la definición de subespacio, tiene que contener a todas las combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$, es decir, a todos los vectores de $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$.
En este sentido el subespacio $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ es el *menor* subespacio que contiene a los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$.

De este modo, podemos definir subespacios a partir de conjuntos de generadores. Por ejemplo:

- $\mathbb{W} = \langle (1,2,3,1), (-3,1,2,1), (4,1,1,0) \rangle$ es un subespacio de $\mathbb{R}^4$.
- Dado un e.v. $\mathbb{V}$, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{V}$ y los vectores
  $\mathbf{w}_1 = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{w}_2 = -3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 \quad \text{y} \quad \mathbf{w}_3 = -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3,$
  el conjunto $\mathbb{W} = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \rangle$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.
  Lo escribiremos directamente como $\mathbb{W} = \langle 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, -3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3, -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 \rangle$.
- $\mathbb{W} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ es un subespacio de $\mathbb{R}^{2x2}$.

Ejemplo 1. Decidir si el vector $\mathbf{v}$ pertenece al subespacio $\mathbb{S}$ en los siguientes casos.

a) $\mathbb{S} = \langle (1,1,1), (2,1,3) \rangle$ y $\mathbf{v} = (0,1,-1)$.

b) $\mathbb{S} = \langle (1,0,1,0), (0,1,0,-1), (1,-1,1,1) \rangle$ y $\mathbf{v} = (3,-1,3,1)$.

c) $\mathbb{S} = \langle (1,0,1,0), (0,1,0,-1), (1,-1,1,1) \rangle$ y $\mathbf{v} = (3,-1,3,0)$.

Solución:

a) Tenemos que ver si $\mathbf{v} = (0,1,-1)$ es una combinación lineal de los generadores de $\mathbb{S}$, es decir, si existen escalares a y b que verifiquen $(0,1,-1) = a(1,1,1) + b(2,1,3)$.

Igualando coordenadas en la expresión

$$(0,1,-1) = a(1,1,1) + b(2,1,3) = (a+2b, a+b, a+3b)$$

nos queda el sistema

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ a + b = 1 \\ a + 3b = -1 \end{cases}$$

Escalonamos su matriz ampliada para determinar si el sistema tiene solución:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 - F_1 \to F_2 \\ F_3 - F_1 \to F_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) F_3 + F_2 \to F_3 \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Encontramos que el sistema es compatible y por lo tanto $\mathbf{v} \in \mathbb{S}$.

$\boxed{\text{Respuesta: } \mathbf{v} \in \mathbb{S}.}$

Verificación:

Si terminamos de resolver el sistema

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ \quad -b = 1 \end{cases}$$

hallamos $b = -1$ y $a = -2b = 2$. Reemplazamos en el planteo original y nos queda:

$2(1,1,1) - 1(2,1,3) = (0,1,-1)$.

b) Como en el caso anterior, queremos determinar si $\mathbf{v}$ es una combinación lineal de los generadores de $\mathbb{S}$. Planteamos:

$$\mathbf{v} = (3,-1,3,1) = a(1,0,1,0) + b(0,1,0,-1) + c(1,-1,1,1) = (a+c, b-c, a+c, -b+c)$$

y el sistema para los escalares a, b y c es

$$\begin{cases} a \quad\quad + c = 3 \\ \quad\; b - c = -1 \\ a \quad\quad + c = 3 \\ \quad -b + c = 1 \end{cases} \text{ con matriz asociada } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Escalonamos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_3 - F_1 \to F_3 \\ F_4 + F_2 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema es compatible; por lo tanto, existe la combinación lineal que da $\mathbf{v}$.

Respuesta: $\mathbf{v} \in \mathbb{S}$.

Verificación:

Como el sistema es compatible, aunque sea indeterminado para verificar que $\mathbf{v} \in \mathbb{S}$ solo necesitamos usar una de las soluciones. Por ejemplo, si $c = 1$, entonces $b = c - 1 = 0$ y $a = 3 - c = 2$. Usando estos valores de a, b y c:

$2(1,0,1,0) + 0(0,1,0,-1) + 1(1,-1,1,1) = (3,-1,3,1)$.

c) Planteamos, como en los ejemplos anteriores,

$$\mathbf{v} = (3,-1,3,0) = a(1,0,1,0) + b(0,1,0,-1) + c(1,-1,1,1) = (a+c, b-c, a+c, -b+c)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a \quad\quad + c = 3 \\ \quad\; b - c = -1 \\ a \quad\quad + c = 3 \\ \quad -b + c = 0 \end{cases} \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Escalonamos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_3 - F_1 \to F_3 \\ F_4 + F_2 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) F_3 \leftrightarrow F_4 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema es incompatible; por lo tanto, no existen a, b, c que cumplan lo requerido.

Respuesta: $\mathbf{v} \notin \mathbb{S}$.

Ejemplo 2. Dados $\mathbb{S} = \langle (2,2,2,2), (1,3,0,2) \rangle$ y $\mathbb{H} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}$, decidir si $\mathbb{S} \subset \mathbb{H}$.

Solución: Como $\mathbb{H}$ es un subespacio, si contiene a los vectores $(2,2,2,2)$ y $(1,3,0,2)$ del conjunto de generadores de $\mathbb{S}$, entonces contiene a todas las combinaciones lineales de estos vectores, es decir, a todos los vectores de $\mathbb{S}$. Entonces, si vemos que los generadores de $\mathbb{S}$ cumplen con la ecuación de $\mathbb{H}$, entonces todos los vectores de $\mathbb{S}$ pertenecerán a $\mathbb{H}$:

$(2,2,2,2) \in \mathbb{H}: \quad -3 \cdot 2 + 2 + 2 \cdot 2 = 0$

$(1,3,0,2) \in \mathbb{H}: \quad -3 \cdot 1 + 3 + 2 \cdot 0 = 0$

Respuesta: $\mathbb{S} \subset \mathbb{H}$

Ejemplo 3. Hallar un conjunto de generadores del subespacio

$$\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / x_1 - 4x_2 - 9x_3 = 0\}.$$

Solución: El subespacio $\mathbb{S}$ está definido por una ecuación lineal homogénea, con lo cual, es un plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen. Sabemos entonces que podemos describirlo, alternativamente, en forma paramétrica. Usaremos una ecuación paramétrica para obtener un conjunto de generadores de $\mathbb{S}$.
A partir de la ecuacion del plano $x_1 - 4x_2 - 9x_3 = 0$, despejamos $x_1 = 4x_2 + 9x_3$. Entonces, los puntos del plano son los $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ de la forma

$$\mathbf{x} = (4x_2 + 9x_3, x_2, x_3) = x_2(4,1,0) + x_3(9,0,1), \quad x_2, x_3 \in \mathbb{R},$$

es decir, son las combinaciones lineales de los vectores $(4,1,0)$ y $(9,0,1)$. Por lo tanto, estos vectores forman un conjunto de generadores de $\mathbb{S}$.

Respuesta: $\{(4,1,0),(9,0,1)\}$ es un conjunto de generadores de $\mathbb{S}$.

Verificación:

Necesitamos asegurarnos que los generadores están en el subespacio $\mathbb{S}$ y son suficientes para formar un plano:

$(4,1,0) \in \mathbb{S}: \quad 4 - 4 \cdot 1 - 9 \cdot 0 = 0$

$(9,0,1) \in \mathbb{S}: \quad 9 - 4 \cdot 0 - 9 \cdot 1 = 0$
Además, $(4,1,0)$ y $(9,0,1)$ no son múltiplos uno del otro.
Entonces, $\alpha(4,1,0) + \beta(9,0,1)$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ es una ecuación paramétrica del plano $\mathbb{S}$.

Observación: Para el subespacio $\mathbb{S}$, $\{(4,1,0),(9,0,1)\}$ no es el único conjunto de generadores. Cualquier par de vectores, no múltiplos entre sí, que pertenezcan a $\mathbb{S}$ forman un conjunto de generadores de este plano.
Por ejemplo, $\{(3,3,-1),(1,-2,1)\}$ es otro conjunto de generadores de $\mathbb{S}$. Reemplazando en la ecuación, verificamos que ambos vectores pertenecen a $\mathbb{S}$. Además, no son múltiplos entre sí: $(3,3,-1) = k(1,-2,1)$ conduce a una contradicción al despejar k.
En consecuencia, vemos que $\mathbb{S}$ coincide con el plano $\mathbb{W} = \langle (3,3,-1),(1,-2,1) \rangle$ con el que trabajamos al comienzo de esta sección.

Ejemplo 4. Hallar un conjunto de generadores del subespacio $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 / A\mathbf{x} = O\}$, con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución: Al igual que con planos que pasan por el origen, la forma paramétrica de las soluciones del sistema $A\mathbf{x} = O$ nos sirve para encontrar generadores de $\mathbb{S}$.
(Nota: Para explicitar que estamos trabajando con un sistema de ecuaciones, escribiremos la última columna de 0 en la matriz ampliada del sistema homogéneo.)
Resolvamos el sistema

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & -5 & 0 & 0 \end{array}\right) F_2 - 2F_1 \to F_2 \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & -5 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$F_3 + F_2 \to F_3 \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Observemos que el rango de esta matriz es 2. Como hay 5 incógnitas, quedarán 3 variables libres. Volviendo a las ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ \quad - 5x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

despejamos

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 = -\frac{2}{5}x_3 + x_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2\left(-\frac{2}{5}x_3 + x_4\right) + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 = -\frac{2}{5}x_3 + x_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{5}x_3 - x_5 \\ x_2 = -\frac{2}{5}x_3 + x_4 \end{cases}$$

Las soluciones del sistema son los $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5$ de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \left(-\frac{1}{5}x_3 - x_5, -\frac{2}{5}x_3 + x_4, x_3, x_4, x_5\right) \\ &= x_3\left(-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, 1, 0, 0\right) + x_4\,(0, 1, 0, 1, 0) + x_5\,(-1, 0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

con $x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$.

Respuesta: $\left\{\left(-\frac{1}{5},-\frac{2}{5},1,0,0\right),(0,1,0,1,0),(-1,0,0,0,1)\right\}$ es un conjunto de generadores para el subespacio $\mathbb{S}$.

Verificación:

Más adelante veremos una verificación completa. Por ahora podemos corroborar que los generadores que encontramos pertenecen al subespacio verificando que cumplen las ecuaciones:

$\left(-\frac{1}{5},-\frac{2}{5},1,0,0\right)\in\mathbb{S}$:

$$A\begin{pmatrix}-1/5\\-2/5\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1&-2&1\\2&-1&0&1&2\\0&5&2&-5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/5\\-2/5\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$(0,1,0,1,0)\in\mathbb{S}$:

$$A\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1&-2&1\\2&-1&0&1&2\\0&5&2&-5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$(-1,0,0,0,1)\in\mathbb{S}$:

$$A\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1&-2&1\\2&-1&0&1&2\\0&5&2&-5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Observación: Como mencionamos antes estos generadores no son únicos. Por ejemplo podemos usar múltiplos no nulos: $\{(-1,-2,5,0,0),(0,1,0,1,0),(-1,0,0,0,1)\}$ también es un conjunto de generadores de $\mathbb{S}$.

Ejemplo 5. Hallar un conjuto de generadores del subespacio

$$\mathbb{S}=\left\{X\in\mathbb{R}^{2\times 2}/\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}.X=X.\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}\right\}.$$

Solución: Como en los ejemplos anteriores, vamos a resolver la ecuación que define $\mathbb{S}$ y escribir sus soluciones en forma paramétrica.

Si escribimos $X=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ la ecuación queda:

$$\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_{11}-x_{21}&x_{12}-x_{22}\\2x_{21}&2x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11}&-x_{11}+2x_{12}\\x_{21}&-x_{21}+2x_{22}\end{pmatrix}$$

Igualamos lugar a lugar y reescribimos las ecuaciones como un sistema lineal homogéneo en las incógnitas $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$:

$$\begin{cases} x_{11} - x_{21} &= x_{11} \\ x_{12} - x_{22} &= -x_{11} + 2x_{12} \\ 2x_{21} &= x_{21} \\ 2x_{22} &= -x_{21} + 2x_{22} \end{cases} \iff \begin{cases} & & -x_{21} & & = 0 \\ x_{11} - x_{12} & & & - x_{22} & = 0 \\ & & x_{21} & & = 0 \\ & & x_{21} & & = 0 \end{cases}$$

Este sistema es equivalente a

$$\begin{cases} x_{11} - x_{12} - x_{22} = 0 \\ x_{21} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_{11} = x_{12} + x_{22} \\ x_{21} = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, las soluciones $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ son de la forma

$$X = \begin{pmatrix} x_{12} + x_{22} & x_{12} \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix} = x_{12} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_{22} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_{12}, x_{22} \in \mathbb{R},$$

es decir, los elementos de $\mathbb{S}$ son las combinaciones lineales de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Respuesta: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es un conjunto de generadores para el subespacio $\mathbb{S}$.

En $\mathbb{R}^n$ también se puede hacer el camino inverso: dado un subespacio por medio de un conjunto de generadores podemos hallar un sistema homogéneo de ecuaciones cuyas soluciones forman el mismo subespacio.
Esto ya lo sabemos hacer, por ejemplo, en el caso de planos en $\mathbb{R}^3$: a partir de una ecuación paramétrica del plano, podemos hallar una ecuación implícita. Veámoslo ahora con mayor generalidad.

Ejemplo 6. Hallar un sistema de ecuaciones cuyo conjunto de soluciones sea el subespacio $\mathbb{S} = \langle (1, 0, 1, -2, 2), (1, 2, 3, 1, -2) \rangle$.

Solución: Los puntos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5$ que pertenecen al subespacio $\mathbb{S}$ son aquellos para los cuales existen escalares $a, b \in \mathbb{R}$ que verifican

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = a(1, 0, 1, -2, 2) + b(1, 2, 3, 1, -2) = (a + b, 2b, a + 3b, -2a + b, 2a - 2b)$$

lo que equivale a que sea compatible el sistema

$$\begin{cases} a + b = x_1 \\ 2b = x_2 \\ a + 3b = x_3 \\ -2a + b = x_4 \\ 2a - 2b = x_5 \end{cases}$$

Observar que, aunque estamos buscando condiciones para las coordenadas de $\mathbf{x}$, las incógnitas en este sistema son las variables a y b. Las coordenadas x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 actúan como parámetros del sistema. Escalonamos:

$$\left(\begin{array}{rr|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 2 & x_2 \\ 1 & 3 & x_3 \\ -2 & 1 & x_4 \\ 2 & -2 & x_5 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_3 - F_1 \to F_3 \\ F_4 + 2F_1 \to F_4 \\ F_5 - 2F_1 \to F_5 \end{array} \left(\begin{array}{rr|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 2 & x_2 \\ 0 & 2 & x_3 - x_1 \\ 0 & 3 & x_4 + 2x_1 \\ 0 & -4 & x_5 - 2x_1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F_3 - F_2 \to F_3 \\ 2F_4 - 3F_2 \to F_4 \\ F_5 + 2F_2 \to F_5 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 2 & x_2 \\ 0 & 0 & (x_3 - x_1) - (x_2) \\ 0 & 0 & 2(x_4 + 2x_1) - 3(x_2) \\ 0 & 0 & (x_5 - 2x_1) + 2(x_2) \end{array}\right)$$

Para que el sistema sea compatible es necesario y suficiente que se anulen los coeficientes de la última columna en las filas donde todas las incógnitas (a y b) tienen coeficientes 0:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 2 & x_2 \\ 0 & 0 & (x_3 - x_1) - (x_2) \\ 0 & 0 & 2(x_4 + 2x_1) - 3(x_2) \\ 0 & 0 & (x_5 - 2x_1) + 2(x_2) \end{array}\right)$$

Es decir, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5$ pertenece al subespacio $\mathbb{S}$ si y solo si las coordenadas de $\mathbf{x}$ cumplen simultáneamente las ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcl} (x_3 - x_1) - (x_2) & = & 0 \\ 2(x_4 + 2x_1) - 3(x_2) & = & 0 \\ (x_5 - 2x_1) + 2(x_2) & = & 0 \end{array}\right.$$

que, reordenadas, nos dan un sistema de ecuaciones para $\mathbb{S}$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 0 \\ 4x_1 & - & 3x_2 & & & + & 2x_4 & & & = & 0 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & & & & & + & x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Respuesta: } \mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 / -x_1 - x_2 + x_3 = 0; 4x_1 - 3x_2 + 2x_4 = 0; -2x_1 + 2x_2 + x_5 = 0\}.}$$

Verificación:

Más adelante veremos una verificación completa.
Por el momento, corroboremos que los generadores de $\mathbb{S}$ son soluciones del sistema encontrado:

$(1, 0, 1, -2, 2):$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} -1 & - & 0 & + & 1 & & & & & = & 0 \\ 4 \cdot 1 & - & 3 \cdot 0 & & & + & 2(-2) & & & = & 0 \\ -2 \cdot 1 & + & 2 \cdot 0 & & & & & + & 2 & = & 0 \end{array}\right.$$

$(1, 2, 3, 1, -2):$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} -1 & - & 2 & + & 3 & & & & & = & 0 \\ 4 \cdot 1 & - & 3 \cdot 2 & & & + & 2 \cdot 1 & & & = & 0 \\ -2 \cdot 1 & + & 2 \cdot 2 & & & & & + & (-2) & = & 0 \end{array}\right.$$

Observaciones: En $\mathbb{R}^n$ tenemos dos formas de describir un subespacio: como el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas o a través de un conjunto de generadores, y podemos, cuando sea necesario, pasar de una descripción a la otra.

Si en un ejemplo como el anterior, al escalonar el sistema planteado obtenemos un sistema que es compatible independientemente de las coordenadas de $\mathbf{x}$, podemos concluir que cualquier $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es una combinación lineal de los vectores considerados, es decir, que el subespacio generado por esos vectores es todo el espacio $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 7. Hallar un sistema de ecuaciones para el subespacio

$$\mathbb{S} = \langle (1,0), (1,2), (-3,1) \rangle .$$

Solución: Un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ pertenece al subespacio $\mathbb{S}$ si existen $a, b, c \in \mathbb{R}$ que verifican

$$(x_1, x_2) = a(1,0) + b(1,2) + c(-3,1),$$

lo que equivale a que sea compatible el sistema

$$\begin{cases} a + b - 3c = x_1 \\ 2b + c = x_2 \end{cases}$$

Como este sistema es compatible independientemente de $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ concluimos que cualquier $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ pertenece al subespacio $\mathbb{S}$, es decir, $\mathbb{S} = \mathbb{R}^2$.

Respuesta: $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 / 0 = 0\}$

Ejemplo 8. Decidir si el conjunto $C = \{(-2,2,3), (1,0,1), (4,-2,-1)\}$ genera $\mathbb{R}^3$.

Solución: Veamos si todos los vectores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ se pueden escribir como combinación lineal de los vectores de C, es decir, si para todo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ existen $a, b, c \in \mathbb{R}$ que cumplen

$$(x_1, x_2, x_3) = a(-2,2,3) + b(1,0,1) + c(4,-2,-1).$$

Esto equivale a que sea compatible el sistema

$$\begin{cases} -2a + b + 4c = x_1 \\ 2a - 2c = x_2 \\ 3 + b - c = x_3 \end{cases} \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 4 & x_1 \\ 2 & 0 & -2 & x_2 \\ 3 & 1 & -1 & x_3 \end{array}\right)$$

Escalonamos:

$$\begin{array}{c} F_2 + F_1 \to F_2 \\ 2F_3 + 3F_1 \to F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 4 & x_1 \\ 0 & 1 & 2 & x_2 + x_1 \\ 0 & 5 & 10 & 2x_3 + 3x_1 \end{array}\right) F_3 - 5F_2 \to F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 4 & x_1 \\ 0 & 1 & 2 & x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & 0 & -2x_1 - 5x_2 + 2x_3 \end{array}\right)$$

Encontramos que el sistema no es compatible para todos los valores $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Solo lo es cuando se cumple $-2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0$.

Respuesta: El conjunto C no genera $\mathbb{R}^3$.

Observación: En el ejemplo anterior, al analizar la compatibilidad del sistema, encontramos que el conjunto C genera el subespacio $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / -2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0\}$.

Apéndice: Definición de espacio vectorial real

Espacio vectorial real

Un *espacio vectorial real*, o espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, es un conjunto $\mathbb{V}$ de elementos llamados *vectores*, junto con una operación *suma* y un *producto por escalares*, que satisfacen las siguientes propiedades:

EV1. Si $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, entonces la suma $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{V}$.

EV2. Si $k \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, entonces el producto $k \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{V}$.

EV3. Si $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{V}$, entonces $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.

EV4. Existe un elemento en $\mathbb{V}$, notado O, tal que $O + \mathbf{u} = \mathbf{u} + O = \mathbf{u}$ para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$.

EV5. Para cada elemento $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$, existe $-\mathbf{u} \in \mathbb{V}$ tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = -\mathbf{u} + \mathbf{u} = O$.

EV6. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.

EV7. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces $c \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c \cdot \mathbf{u} + c \cdot \mathbf{v}$.

EV8. Si a y $b \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, entonces $(a + b) \cdot \mathbf{v} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{v}$.

EV9. Si a y $b \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, entonces $(ab) \cdot \mathbf{v} = a \cdot (b \cdot \mathbf{v})$.

EV10. Si $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$, entonces $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$ $(1 \in \mathbb{R})$.

Notación: $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$, para $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}$.

Si $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial real, valen las siguientes propiedades.

- $0 \cdot \mathbf{v} = O$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$.
- $k \cdot O = O$ para todo $k \in \mathbb{R}$.
- $(-1) \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$.
- $-(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = -\mathbf{v} - \mathbf{w}$ para todos $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{V}$.
- $k \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = k \cdot \mathbf{v} - k \cdot \mathbf{w}$ para todos $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{V}$, $k \in \mathbb{R}$.
- $k \cdot \mathbf{v} = O$ si y sólo si $k = 0$ ó $\mathbf{v} = O$.