DETERMINANTES

DEFINICIONES Y PROPIEDADES

Una *permutación* del conjunto $\{1,2,...,n\}$ es un arreglo de estos números en cierto orden, sin omisiones ni repeticiones. Para denotar una permutación cualquiera se escribirá $(j_1, j_2, ..., j_n)$, donde j_i es el i-ésimo elemento de la permutación. Se dice que ocurre una *inversión* en una permutación $(j_1, j_2, ..., j_n)$ siempre que un entero mayor precede a uno menor. Diremos que una permutación es *par*, si el número total de inversiones es un número par, y diremos que es *impar* si el número total de inversiones es impar.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Por *producto elemental tomado de A* se entiende cualquier producto de n elementos tomados de A, sin que dos cualesquiera de ellos provengan de una misma fila ni de una misma columna.

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ admite $n!$ ($n!=n(n-1)(n-2)...3.2.1$) productos elementales. Estos son de la forma $a_{1j_1}a_{2j_2}.....a_{nj_n}$ donde $(j_1, j_2, ..., j_n)$ es una permutación de $\{1,2,...,n\}$.

Se denomina *producto elemental con signo tomado de A* a un producto elemental $a_{1j_1}a_{2j_2}.....a_{nj_n}$ multiplicado por +1 ó por -1 según la permutación $(j_1, j_2, ..., j_n)$ sea respectivamente par o impar.

Se define el *determinante* de A como la suma de todos los productos elementales con signo tomados de A.

Notamos $\det(A) = |A| = \sum \pm\ a_{1j_1}a_{2j_2}.....a_{nj_n}$

Propiedades: Si A es una matriz cuadrada que contiene una fila de ceros, $\det(A) = 0$.

Si A es una matriz triangular de $n\times n$, $\det(A)$ es el producto de los elementos de la diagonal, es decir $\det(A) = a_{11}a_{22}.....a_{nn}$.

Propiedad: Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

- Si A' es la matriz que se obtiene cuando una sola fila de A se multiplica por una constante k, entonces $\det(A') = k\det(A)$.
- Si A' es la matriz que se obtiene al intercambiar dos filas de A, entonces $\det(A') = -\det(A)$.
- Si A' es la matriz que se obtiene al sumar un múltiplo de una de las filas de A a otra fila, entonces $\det(A') = \det(A)$.

Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, la matriz *transpuesta* de A es la matriz $A^t \in \mathbb{R}^{n\times m}$ que tiene como filas a las columnas de A.

Propiedades: Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces $\det(A^t) = \det(A)$.

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces $\det(kA) = k^n \det(A)$

$\det(AB) = \det(A)\det(B)$

A es inversible si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

Si A es inversible, entonces $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

DESARROLLO DEL DETERMINANTE POR COFACTORES.

Si A es una matriz cuadrada, entonces el *menor del elemento* a_{ij} se denota M_{ij} y se define como el determinante de la submatriz que queda al eliminar de A la i-ésima fila y la j-ésima columna. El número $(-1)^{i+j}M_{ij}$ se denota C_{ij} y se conoce como *cofactor del elemento* a_{ij}.

Se puede calcular el determinante de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ multiplicando los elementos de cualquier fila (o columna) por sus cofactores y sumando los productos que resulten.

Es decir: para cada $1 \le i \le n$ y $1 \le j \le n$,

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj}$$

(desarrollo por cofactores a lo largo de la j-ésima columna)

y

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$$

(desarrollo por cofactores a lo largo de la i-ésima fila)

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y C_{ij} es el cofactor de a_{ij} entonces la matriz

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

se conoce como *matriz de cofactores tomados de A*. La transpuesta de esta matriz se denomina *adjunta de A* y se denota $\text{adj}(A)$.

Propiedad: Si A es una matriz inversible, entonces $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\text{adj}(A)$.

REGLA DE CRAMER.

Si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es un sistema de n ecuaciones con n incógnitas tal que $\det(A) \neq 0$, entonces la única solución del sistema es $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} \;,\; x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} \;, \ldots\ldots ,\; x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

donde A_j es la matriz que se obtiene al reemplazar la *j*-ésima columna de *A* por $\mathbf{b}$.