ESPACIOS VECTORIALES – SUBESPACIOS

DEFINICIONES Y PROPIEDADES

ESPACIOS VECTORIALES

Un *espacio vectorial real* $\mathbb{V}$, o espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, es un conjunto de elementos llamados *vectores*, junto con dos operaciones: *suma* y *producto por un escalar*, que satisfacen las siguientes propiedades.

EV1.- Si $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, entonces la suma $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{V}$.

EV2.- Si $k \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, entonces el producto $k\mathbf{v} \in \mathbb{V}$.

EV3.- Si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{V}$, entonces $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$

EV4.- Existe un elemento en $\mathbb{V}$, notado $\mathbf{0}$, tal que $\mathbf{0}+\mathbf{u} = \mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{u}$ para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$.

EV5.- Para cada elemento $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$ existe $-\mathbf{u} \in \mathbb{V}$ tal que $\mathbf{u}+(-\mathbf{u}) = -\mathbf{u}+\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

EV6.- Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, entonces $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$.

EV7.- Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces $c(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = c\mathbf{u}+c\mathbf{v}$.

EV8.- Si a y $b \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, entonces $(a+b)\mathbf{v} = a\mathbf{v}+b\mathbf{v}$.

EV9.- Si a y $b \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, entonces $(ab)\mathbf{v} = a(b\mathbf{v})$.

EV10.- Si $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$, entonces $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ $\quad (1 \in \mathbb{R})$

Notación: $\mathbf{u}-\mathbf{v} = \mathbf{u}+(-\mathbf{v})$

Si $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial real valen las siguientes propiedades.

a) $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$.

b) $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$ para todo $k \in \mathbb{R}$.

c) $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$.

d) $-(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = -\mathbf{v}-\mathbf{w}$ para todo $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{V}$.

e) $k(\mathbf{v}-\mathbf{w}) = k\mathbf{v}-k\mathbf{w}$ para todo $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{V}$, $k \in \mathbb{R}$.

f) $k\mathbf{v} = \mathbf{0}$ si y sólo si $k = 0$ ó $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

SUBESPACIOS

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial real, y sea $\mathbb{W}$ un subconjunto de $\mathbb{V}$. $\mathbb{W}$ es un *subespacio* de $\mathbb{V}$ si se satisfacen las siguientes tres condiciones:

- El vector $\mathbf{0}$ de $\mathbb{V}$ pertenece a $\mathbb{W}$.

- Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son elementos de $\mathbb{W}$, entonces su suma $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ pertenece a $\mathbb{W}$.

- Si $\mathbf{v}$ es un elemento de $\mathbb{W}$ y c es un número real, entonces el producto $c\mathbf{v}$ pertenece a $\mathbb{W}$.

Observación: $\mathbb{W}$ es un espacio vectorial real.

Propiedad: Si $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ son subespacios de un espacio vectorial $\mathbb{V}$, entonces la intersección $\mathbb{S}\cap\mathbb{T}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

Propiedad: El conjunto de soluciones de un sistema homogéneo con n incógnitas es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

COMBINACIONES LINEALES

Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ elementos de $\mathbb{V}$. Se dice que un vector $\mathbf{w}$ es una *combinación lineal* de $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ si se puede expresar en la forma $\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + ... + k_n\mathbf{v}_n$, donde $k_1, ..., k_n$ son números reales.
Si todo elemento de $\mathbb{V}$ es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ decimos que $\{\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n\}$ *genera* $\mathbb{V}$ o que $\{\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n\}$ es un *conjunto de generadores* de $\mathbb{V}$.
$\mathbb{W} = \left\{ \sum_{i=1}^{r} k_i\mathbf{v}_i \ / \ k_i \in \mathbb{R} \right\}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$ que se denomina *subespacio generado* por $\{\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_r\}$ y se nota $\mathbb{W} = \langle \mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_r \rangle$.

Propiedad: Si $\mathbb{W}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$ y $\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_r$ son vectores de $\mathbb{W}$, entonces $\langle \mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_r \rangle \subseteq \mathbb{W}$. O sea $\langle \mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_r \rangle$ es el menor subespacio de $\mathbb{V}$ que contiene a los vectores $\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_r$.

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, y sean $\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n$ elementos de $\mathbb{V}$.
Decimos que $\{\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n\}$ es *linealmente dependiente* si existen números reales $a_1,...,a_n$, no todos iguales a cero, tales que $a_1\mathbf{v}_1+...+a_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0}$.

Decimos que $\{\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n\}$ es *linealmente independiente* si y sólo si se satisface la siguiente condición: siempre que $a_1,...,a_n$ sean números reales tales que $a_1\mathbf{v}_1+...+a_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0}$, entonces $a_1=...=a_n=0$.

Propiedad: Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, y sean $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4$ vectores de $\mathbb{V}$. Son equivalentes:

a) $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\}$ es linealmente independiente.

b) $\{\mathbf{v}_1,k\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\}$ con $k\in\mathbb{R}, k\neq 0,$ es linealmente independiente.

c) $\{\mathbf{v}_1+k\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\}$ con $k\in\mathbb{R}$, es linealmente independiente.

Propiedad: Si $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente y $\mathbf{w}\notin\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_n\rangle$ entonces $\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_n,\mathbf{w}\rangle$ es linealmente independiente.

Propiedad: Si $\mathbf{w}$ es combinación lineal de $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_k$, entonces $\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_k,\mathbf{w}\rangle=\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_k\rangle$.

El rango fila de una matriz *A* es igual al máximo número de filas linealmente independientes de *A*.

El rango columna de una matriz *A* es igual al máximo número de columnas linealmente independientes de *A*.

Propiedad: El rango fila de *A* es igual al rango columna de *A*, y lo notamos *rgA*.

De aquí en más, cuando decimos espacio vectorial entenderemos espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

BASES

Una *base* de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ es una sucesión de elementos $\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n$ de $\mathbb{V}$ tales que:

a) $\{\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n\}$ genera $\mathbb{V}$

b) $\{\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente

Se dice que un espacio vectorial $\mathbb{V}$, diferente de cero, es de *dimensión finita* si contiene una sucesión finita de vectores que forman una base de $\mathbb{V}$.

Propiedad: Dos bases cualesquiera de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ de dimensión finita tienen el mismo número de vectores.

Si $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial de dimensión finita, la *dimensión* de $\mathbb{V}$ es el número de vectores que tiene cualquier base de $\mathbb{V}$. Si $\mathbb{V}=\{\mathbf{0}\}$, entonces $\mathbb{V}$ no tiene base y se dice que su dimensión es cero.

Propiedad: La dimensión de $\mathbb{S}_0=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{n\times 1} / A\mathbf{x}=0\}$, es igual a $n-rgA$.

SUMA DE SUBESPACIOS

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial, y sean $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ subespacios de $\mathbb{V}$; se define la *suma* de $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ como $\mathbb{S}+\mathbb{T}=\{\mathbf{v}\in\mathbb{V} / \mathbf{v}=\mathbf{s}+\mathbf{t}, \text{ con } \mathbf{s}\in\mathbb{S} \text{ y } \mathbf{t}\in\mathbb{T}\}$.

Propiedades: a) $\mathbb{S}+\mathbb{T}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

b) Si $\dim\mathbb{V}=n$, entonces $\dim(\mathbb{S}+\mathbb{T})=\dim\mathbb{S}+\dim\mathbb{T}-\dim(\mathbb{S}\cap\mathbb{T})$.

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial. Si $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ son subespacios de $\mathbb{V}$ que verifican simultáneamente: $\mathbb{S}+\mathbb{T}=\mathbb{V}$ y $\mathbb{S}\cap\mathbb{T}=\{\mathbf{0}\}$, entonces $\mathbb{V}$ es la *suma directa* de $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$, y se nota $\mathbb{V}=\mathbb{S}\oplus\mathbb{T}$.

En general, si $\mathbb{W}\subseteq\mathbb{V}$ verifica $\mathbb{W}=\mathbb{S}+\mathbb{T}$ y $\mathbb{S}\cap\mathbb{T}=\{\mathbf{0}\}$, se dirá que $\mathbb{W}$ es la suma directa de $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$, y se notará $\mathbb{W}=\mathbb{S}\oplus\mathbb{T}$.

COORDENADAS

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial, y B $=\{\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n\}$ una base de $\mathbb{V}$. Si $\mathbf{v}=a_1\mathbf{v}_1+...+a_n\mathbf{v}_n$, entonces $(a_1,...,a_n)$ son las *coordenadas de* $\mathbf{v}$ *con respecto a la base* B, y notamos $(\mathbf{v})_{\mathrm{B}}=(a_1,...,a_n)$

Observación: Las coordenadas de un vector dependen de la base. Recuerde que cuando se da una base $\{\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n\}$, importa el orden en que se dan los vectores.

ESPACIO EUCLÍDEO

Llamamos *espacio euclídeo* de dimensión n al espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ con el producto interno $(x_1, x_2,..., x_n)\cdot(y_1, y_2,..., y_n)= x_1y_1 + x_2y_2 +...+ x_ny_n$.

Si $\mathbb{S}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, el conjunto $\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n / \mathbf{x}\cdot\mathbf{s}=0 \text{ para todo } \mathbf{s}\in\mathbb{S}\}$ se llama el *complemento ortogonal* de $\mathbb{S}$ y se nota $\mathbb{S}^\perp$.

Propiedades: $\mathbb{S}^\perp$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

$\mathbb{S}\cap\mathbb{S}^\perp=\{\mathbf{0}\}$.

$\dim\mathbb{S}^\perp=n-\dim\mathbb{S}$ y $\mathbb{S}\oplus\mathbb{S}^\perp=\mathbb{R}^n$.

$(\mathbb{S}^\perp)^\perp=\mathbb{S}$

Si $\mathbb{S}=\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_r\rangle$, $\mathbf{w}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v}\in\mathbb{S}$ si y sólo si $\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}_i=0$ para $1\le i\le r$.

Observación: Si $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_r\}$ es una base de $\mathbb{S}$, para hallar $\mathbb{S}^\perp$ basta buscar *n-r* vectores linealmente independientes que sean ortogonales a todos los $\mathbf{v}_i$.

Si $\mathbf{v}=\mathbf{s}_1+\mathbf{s}_2$ con $\mathbf{s}_1\in\mathbb{S}$ y $\mathbf{s}_2\in\mathbb{S}^\perp$, $\mathbf{s}_1$ se llama la *proyección ortogonal* de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbb{S}$.

Propiedad: La proyección ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbb{S}$ es el punto de $\mathbb{S}$ que está a menor distancia de $\mathbf{v}$, es decir que $\|\mathbf{v}-\mathbf{s}_1\|\le\|\mathbf{v}-\mathbf{s}\|\ \ \forall\mathbf{s}\in\mathbb{S}$.