Operaciones en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Comenzaremos viendo cómo se calcula la suma en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$ y cómo se multiplica un elemento de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ por un número real.

Ejemplo 1. Dados $A = (1,4)$, $B = (3,-2)$ y $C = (-2,4)$, calcular:

i) $2A + 4B - C$

ii) $3A + \frac{1}{2}(2B + C)$

Solución. Para realizar estos cálculos que involucran más de una operación, hay que tener en cuenta que el orden en que se realizan las operaciones está determinado por las mismas reglas que para las operaciones entre números reales.
En el caso i) aparecen productos por escalares y sumas:

$$2A + 4B - C = 2(1,4) + 4(3,-2) - (-2,4)$$

Tanto los productos por escalares como las sumas se realizan ”coordenada a coordenada”.
Primero se realizan los productos por escalares:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (1,4) + 4 \cdot (3,-2) - (-2,4) &= (2 \cdot 1, 2 \cdot 4) + (4 \cdot 3, 4 \cdot (-2)) + ((-1) \cdot (-2), (-1) \cdot 4) \\ &= (2,8) \qquad + (12,-8) \qquad + (2,-4) \end{aligned}$$

Observamos que, por los signos que tienen los números, es necesario que aparezcan paréntesis.
Por último se hacen las sumas. Pueden hacerse simultáneamente gracias a la propiedad asociativa de la suma:

$$(2,8) + (12,-8) + (2,-4) = (2 + 12 + 2, 8 - 8 - 4) = (16,-4)$$

$\boxed{\text{Respuesta: } 2A + 4B - C = (16,-4)}$

En el caso ii) notar que $\frac{1}{2}$ multiplica a los dos términos que están dentro del último paréntesis

$$\begin{aligned} 3A + \frac{1}{2}(2B + C) &= 3 \cdot (1,4) + \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot (3,-2) + (-2,4)) \\ &= (3,12) + \frac{1}{2} \cdot ((6,-4) + (-2,4)) \\ &= (3,12) + \frac{1}{2} \cdot (4,0) \\ &= (3,12) + (2,0) \\ &= (5,12) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Respuesta: } 3A + \frac{1}{2}(2B + C) = (5,12)}$

En $\mathbb{R}^3$, el procedimiento para hacer este tipo de cálculos es el mismo, dado que la suma y el producto por escalares se definen de la misma manera y verifican las mismas propiedades.

Igualdad en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Para comparar elementos de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ hay que tener presente que son pares o ternas ordenadas: A y B son iguales si y sólo si cada coordenada de A coincide con su correspondiente en B.

Ejemplo 2. Hallar, si es posible, k y $l \in \mathbb{R}$ tales que:

i) $(k+1, -3k+4, k-1) = (3, -2, 1)$

ii) $(l+1, -3l+4, l-1) = (3, -6, 1)$

Solución. En el caso i), para que valga la igualdad, el valor de k buscado debe cumplir simultáneamente:

$$k+1 = 3, \quad -3k+4 = -2 \quad \text{y} \quad k-1 = 1$$

Despejando de la primera igualdad, tenemos que

$$k+1 = 3 \iff k = 3-1 \iff k = 2$$

con lo cual, $k = 2$ es el único valor que verifica esta igualdad. Sin embargo, tenemos que ver si para este valor se cumplen también las demás igualdades.
Reemplazamos:

$$-3 \cdot 2 + 4 = -2 \quad \text{y} \quad 2 - 1 = 1$$

Como estas igualdades son ciertas, concluimos que:

$\boxed{\text{Respuesta: } k = 2}$

Verificación: $(2+1, -3 \cdot 2 + 4, 2-1) = (3, -2, 1)$.

En el caso ii), para que valga la igualdad, el valor de l debe cumplir simultáneamente:

$$l+1 = 3, \quad -3l+4 = -6 \quad \text{y} \quad l-1 = 1.$$

Como en el caso anterior, despejando de la primera igualdad, deducimos que $l = 2$ es el único valor posible. Sin embargo, al verificar si para este valor se cumplen las demás igualdades,

$$-3 \cdot 2 + 4 = -2 \neq -6 \quad \text{y} \quad 2 - 1 = 1$$

encontramos que, aunque se cumple la última, hay una que no vale. Es decir, no hay un valor de l para el cual coincidan todas las coordenadas de ambas ternas.

$\boxed{\text{Respuesta: no existe } l \in \mathbb{R} \text{ para que valga la igualdad pedida.}}$

Ejemplo 3. Hallar, si es posible, $x; y \in \mathbb{R}$ tales que:

$$(1, 2x, 3) + (-2, 1, 1) = (-1, 5, y).$$

Solución. Para plantear la igualdad, primero realizamos la suma en el lado izquierdo:

$$(-1, 2x+1, 4) = (-1, 5, y)$$

Ahora estamos en las mismas condiciones que en el ejemplo anterior: se tiene que cumplir

$$-1 = -1, \quad 2x+1 = 5 \quad \text{y} \quad 4 = y.$$

La primera igualdad se verifica, para la segunda necesitamos que $x = 2$ y, para que valga la tercera, $y = 4$.

Respuesta: $x = 2, y = 4$

Verificación:

$$\begin{aligned} (1, 2\cdot 2, 3) + (-2, 1, 1) &= (-1, 5, 4) \\ (1, 4, 3) + (-2, 1, 1) &= (-1, 5, 4) \\ (-1, 5, 4) &= (-1, 5, 4) \end{aligned}$$

Ejemplo 4. Hallar, si es posible, $a; b; c \in \mathbb{R}$ tales que

$$(4, 4, 5) = a(2, 0, 0) + b(0, -1, 1) + c(0, 1, 2).$$

Solución. Como en el ejemplo anterior, primero realizamos las operaciones:

$$\begin{aligned} (4, 4, 5) &= (2a, 0, 0) + (0, -b, b) + (0, c, 2c) \\ &= (2a, -b+c, b+2c) \end{aligned}$$

y luego planteamos las igualdades coordenada a coordenada:

$$4 = 2a, \quad 4 = -b+c \quad \text{y} \quad 5 = b+2c.$$

Como a solo aparece en la primera ecuación, el único valor posible es $a = 2$. En la segunda y en la tercera ecuación aparecen tanto b como c. Podemos despejar, por ejemplo, b en la segunda ecuación

$$4 = -b + c \iff b = c - 4,$$

sustituir la expresión obtenida en la tercera, y despejar el valor de c:

$$5 = (c-4) + 2c \iff 5 = 3c - 4 \iff 9 = 3c \iff c = 3$$

Reemplazando en $b = c - 4$, obtenemos que

$$b = 3 - 4 = -1.$$

Respuesta: $a = 2, b = -1, c = 3$

Verificación:

$$\begin{aligned} (4, 4, 5) &= 2(2, 0, 0) + (-1)(0, -1, 1) + 3(0, 1, 2) \\ (4, 4, 5) &= (4, 0, 0) + (0, 1, -1) + (0, 3, 6) \\ (4, 4, 5) &= (4, 4, 5) \end{aligned}$$

Ejemplo 5. Dados $A = (1, 2, 3)$, $B = (0, -1, 4)$ y $C = (1, 0, 1)$, hallar todos los $X \in \mathbb{R}^3$ tales que
$$A - 2B = 4C + 3X.$$

Solución. Reemplazando y efectuando las operaciones nos queda:

$$\begin{aligned} (1,2,3) - 2(0,-1,4) &= 4(1,0,1) + 3X \\ (1,4,-5) &= (4,0,4) + 3X \end{aligned}$$

Gracias a las propiedades de la suma y el producto por escalares podemos despejar X como lo hacíamos en las ecuaciones con números reales.
Sumamos el opuesto de $(4, 0, 4)$ a ambos lados:

$$\begin{aligned} (1,4,-5) - (4,0,4) &= 3X \\ (-3,4,-9) &= 3X \end{aligned}$$

Para terminar de despejar X solo nos queda multiplicar por $\frac{1}{3}$ (el inverso multiplicativo de 3):

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot (-3,4,-9) &= \frac{1}{3} \cdot (3X) \\ (-1, \frac{4}{3}, -3) &= X \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Respuesta: } X = (-1, \frac{4}{3}, -3)}$

Verificación:

$$\begin{aligned} A - 2B &= 4C + 3X \\ (1,2,3) - 2(0,-1,4) &= 4(1,0,1) + 3(-1, \frac{4}{3}, -3) \\ (1,2,3) + (0,2,-8) &= (4,0,4) + (-3,4,-9) \\ (1,4,-5) &= (1,4,-5) \end{aligned}$$