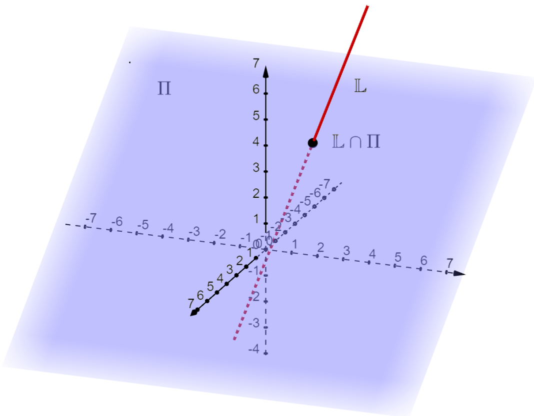
Intersecciones y posiciones relativas entre rectas y planos

Intersección de una recta y un plano

Ejemplo 1. Dados la recta $\mathbb{L} : \lambda(1,1,2) + (-3,1,4)$ y el plano $\Pi : 2x + 3z = 2$, hallar $\mathbb{L} \cap \Pi$.



Solución: Si Q es un punto de la intersección, deberá cumplir simultáneamente:

i) $Q \in \mathbb{L}$: existe algún valor particular de $\lambda \in \mathbb{R}$ que verifica $Q = \lambda(1,1,2) + (-3,1,4)$

ii) $Q \in \Pi$: Q verifica la ecuación de Π

De i) obtenemos que $Q = (\lambda - 3, \lambda + 1, 2\lambda + 4)$. Reemplazando en ii) nos queda una ecuación para λ:

$$2(\lambda - 3) + 3(2\lambda + 4) = 2$$

Despejamos $\lambda = -\frac{1}{2}$, con lo cual:

$$Q = -\frac{1}{2}(1,1,2) + (-3,1,4) = (-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 3).$$

$\boxed{\text{Respuesta: } \mathbb{L} \cap \Pi = \{(-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 3)\}}$

Verificación:

$(-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 3) \in \mathbb{L}$: Con $\lambda = -\frac{1}{2}$ en la ecuación de $\mathbb{L}$ queda $-\frac{1}{2}(1,1,2) + (-3,1,4) = (-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 3)$.

$(-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 3) \in \Pi$: $2(-\frac{7}{2}) + 3 \cdot 3 = 2$ verifica la ecuación del plano.

Podemos asegurarnos que la intersección es solo un punto si vemos que el plano y la recta no son paralelos:
$(1,1,2) \cdot (2,0,3) = 8 \neq 0 \quad \Rightarrow$ la dirección de la recta no es ortogonal a la normal del plano.

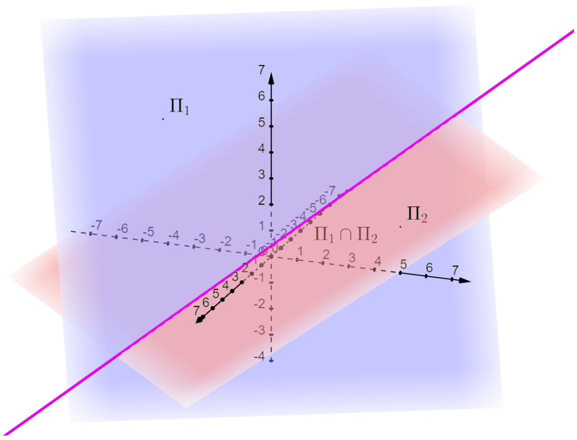
Observación

La ecuación que surgió de reemplazar i) en ii) podría habernos llevado a otras posibilidades. Si quedara una identidad, indicaría que todos los puntos de la recta están en el plano, es decir, que $\mathbb{L} \subset \Pi$. Si quedara un absurdo, no habría ningún punto de la recta que pertenezca al plano, es decir, $\mathbb{L} \cap \Pi = \emptyset$. En $\mathbb{R}^3$, esto último solo puede pasar si la recta y el plano son paralelos y la recta no está incluida en el plano.

Intersección de planos

Ejemplo 2. Hallar la intersección de los planos

$$\Pi_1 : 2x + y + 2z = 4 \text{ y } \Pi_2 : x - y + 3z = 5.$$



Solución: Los puntos $X = (x, y, z)$ de la intersección de Π_1 y Π_2 son los puntos que verifican las ecuaciones de los dos planos simultáneamente:

$$2x + y + 2z = 4 \quad \text{y} \quad x - y + 3z = 5$$

De la primera podemos despejar $y = 4 - 2x - 2z$, sustituir en la segunda

$x - (4 - 2x - 2z) + 3z = 5$, y así obtener $x = 3 - \frac{5}{3}z$.

Reemplazando x en el despeje anterior de y, nos quedan las dos variables x e y en términos de z:

$$x = 3 - \frac{5}{3}z \quad \text{y} \quad y = 4 - 2(3 - \frac{5}{3}z) - 2z = -2 + \frac{4}{3}z \qquad \forall z \in \mathbb{R}$$

Si miramos la expresión resultante para $X = (x, y, z) = (3 - \frac{5}{3}z, -2 + \frac{4}{3}z, z)$, podemos ver que es la de los puntos de un recta con parámetro z:

Si reescribimos esta expresión como suma de dos ternas, una con los términos que son múltiplos de z y la otra con los términos en los que no aparece z, se obtiene:

$$X = \left(3 - \frac{5}{3}z, -2 + \frac{4}{3}z, z\right) = \left(-\frac{5}{3}z, \frac{4}{3}z, z\right) + (3, -2, 0)$$

y si sacamos z como factor escalar de la primera terna

$$\left(-\frac{5}{3}z, \frac{4}{3}z, z\right) + (3, -2, 0) = z\left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 1\right) + (3, -2, 0)$$

nos queda la ecuación paramétrica de una recta.

Respuesta: $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \mathbb{L} : \lambda\left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 1\right) + (3, -2, 0)$.

Verificación:

$\mathbb{L} \subset \Pi_1 :$

$(3, -2, 0) \in \Pi_1 : \quad 2 \cdot 3 + (-2) + 2 \cdot 0 = 4$

$\mathbb{L} \perp N_1(\text{normal de } \Pi_1) : \quad \left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 1\right) \cdot (2, 1, 2) = 0$

$\mathbb{L} \subset \Pi_2 :$

$(3, -2, 0) \in \Pi_2 : \quad 3 - (-2) + 0 = 5$

$\mathbb{L} \perp N_2(\text{normal de } \Pi_2) : \quad \left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 1\right) \cdot (1, -1, 3) = 0$

Podemos asegurarnos que la intersección es una recta si comprobamos que los planos no son paralelos, es decir, que sus vectores normales no son paralelos.
Si son múltiplos, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $(2, 1, 2) = k(1, -1, 3) \Rightarrow 2 = k, \quad 1 = -k \quad \text{y} \quad 2 = 3k$.
Entre la primera y la segunda igualdad obtenemos el absurdo $2 = k = -1$.

Observaciones

En general una recta en $\mathbb{R}^3$ puede describirse como la intersección de dos planos no paralelos que la contienen.
Al conjunto de las ecuaciones de esos planos se lo denomina *ecuaciones implícitas* de la recta. Dada una ecuación paramétrica de una recta, esos planos deberán tener vectores normales perpendiculares a la dirección de la recta, no ser paralelos entre sí y contener algún punto de la recta.

Otros posibles resultados:
Si al resolver las ecuaciones hubiéramos llegado a un absurdo, significaría que los planos no tienen puntos en común, es decir, que los planos son paralelos y distintos.
Si al despejar en las ecuaciones llegamos a una identidad, quedando más de una variable como parámetro, entonces los dos planos son el mismo.

Ejemplo 3. Hallar la intersección de los planos

$$\Pi_1 : -2x + y + 2z = 4 \;\text{ y }\; \Pi_2 : 6x - 3y - 6z = -12.$$

Solución: Como en el Ejemplo 2, los puntos $X = (x, y, z)$ de la intersección deberán verificar las ecuaciones de los dos planos simultáneamente:

$$-2x + y + 2z = 4 \quad \text{y} \quad 6x - 3y - 6z = -12$$

De la primera podemos despejar $y = 4 + 2x - 2z$ y, sustituyendo en la segunda obtenemos

$$6x - 3(4 + 2x - 2z) - 6z = -12 \iff 6x - 12 - 6x + 6z - 6z = -12 \iff -12 = -12$$

que es una identidad y no nos permite despejar más variables. Esto indica que todos los puntos que cumplen la primera ecuación, y por lo tanto pertenecen al plano Π_1, verifican la segunda, y entonces son puntos de Π_2.
Los dos planos coinciden.

Respuesta: $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \Pi_1 = \Pi_2$.

Verificación:

Podemos ver que son paralelos: sus normales son múltiplos
$(6, -3, -6) = -3(-2, 1, 2)$
y que comparten un punto o directamente que la ecuación de Π_2 es la de Π_1 multiplicada por ese factor -3 entre las normales.

> **Ejemplo 4.** Hallar ecuaciones implícitas para la recta $\mathbb{L} : \lambda(1, -2, 4) + (3, 0, -1)$.

Solución: Como observamos antes, estas ecuaciones corresponden a las de dos planos Π_1 y Π_2, no paralelos, cuya intersección es la recta $\mathbb{L}$.
Tomando un punto cualquiera de la recta, tenemos un punto de paso común para estos planos.
Nos queda encontrar dos vectores normales, no paralelos, que sean ortogonales a la dirección de la recta:
Si $N = (a, b, c)$, queremos que

$$(1, -2, 4) \cdot N = a - 2b + 4c = 0.$$

Dos soluciones posibles son, por ejemplo, $N_1 = (4, 0, -1)$ y $N_2 = (0, 2, 1)$ que no son nulos ni múltiplos entre sí.
Con el punto $(3, 0, -1)$ de la recta obtenemos:
$d_1 = (3, 0, -1) \cdot (4, 0, -1) = 13$ para Π_1 y $d_2 = (3, 0, -1) \cdot (0, 2, 1) = -1$ para Π_2.

Respuesta: Un conjunto de ecuaciones implícitas para $\mathbb{L}$ es $\begin{cases} 4x - z = 13 \\ 2y + z = -1 \end{cases}$

Verificación:

$\mathbb{L} \subset \Pi_1$:
$\mathbb{L} \parallel \Pi_1$: $(1, -2, 4) \cdot (4, 0, -1) = 0$
$(3, 0, -1) \in \Pi_1$: $4 \cdot 3 - (-1) = 13$

$\mathbb{L} \subset \Pi_2$:
$\mathbb{L} \parallel \Pi_2$: $(1, -2, 4) \cdot (0, 2, 1) = 0$
$(3, 0, -1) \in \Pi_2$: $0 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + (-1) = -1$
Los planos no son paralelos:
Si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $(4, 0, -1) = k(0, 2, 1)$ tenemos el absurdo $4 = 0$ en la primera coordenada.

Más sobre posiciones relativas de rectas y planos

Ejemplo 5. Dadas las rectas $\mathbb{L}_1 : \lambda(1, 1, 2) + (2, 3, -1)$ y $\mathbb{L}_2 : \lambda(-2, 1, 1) + (3, 3, 2)$ hallar, si es posible, una ecuación implícita para un plano Π que las contenga.

Solución: Para dar una ecuación implícita de un plano Π que cumpla lo pedido necesitamos un vector normal N y un punto de paso que garanticen

$\mathbb{L}_1 \subset \Pi$:

i) $(1, 1, 2) \perp N$

ii) $(2, 3, -1) \in \Pi$

y, simultáneamente, $\mathbb{L}_2 \subset \Pi$:

iii) $(-2, 1, 1) \perp N$

iv) $(3, 3, 2) \in \Pi$

Con i) y iii) obtenemos un vector normal $N = (1, 1, 2) \times (-2, 1, 1) = (-1, -5, 3)$

Verificación de la ortogonalidad del producto vectorial: $(1, 1, 2) \cdot (-1, -5, 3) = 0$
y $(-2, 1, 1) \cdot (-1, -5, 3) = 0$.

Usando la condición ii) obtenemos $d = (2, 3, -1) \cdot (-1, -5, 3) = -20$.
Nos queda entonces la ecuación $-x - 5y + 3z = -20$.
Este plano contiene a la recta $\mathbb{L}_1$ y es paralelo a $\mathbb{L}_2$. Sin embargo, no sabemos si contiene a la recta $\mathbb{L}_2$. Nos queda ver si se verifica iv):

$$-3 - 5 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = -12 \neq -20$$

Como no se verifica, el plano que encontramos no contiene a $\mathbb{L}_2$.
Como $(1, 1, 2)$ y $(-2, 1, 1)$ no son paralelos, el producto vectorial nos da un vector en la única dirección que es ortogonal a las dos rectas simultáneamente. Podemos cambiar el vector normal pero solo por múltiplos no nulos, lo que cambiará la ecuación pero no el plano.
Si en lugar de ii) usamos iv) para calcular d, obtenemos el plano $-x - 5y + 3z = -12$, paralelo al anterior, pero que no cumple ii). Este plano contiene a $\mathbb{L}_2$ y es paralelo a $\mathbb{L}_1$, pero no la contiene.
Estos son los únicos planos paralelos a las dos rectas que contienen a alguna de las dos rectas.

Respuesta: No existe un plano Π que contenga simultáneamente a $\mathbb{L}_1$ y a $\mathbb{L}_2$.

Observaciones

Las rectas $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ no tienen puntos en común porque están incluidas en planos paralelos distintos. Además no son paralelas. Por lo tanto, son alabeadas.
En general, dado cualquier par de rectas alabeadas podemos construir dos planos paralelos (distintos), cada uno de los cuales contiene a una de las rectas, pero no existe un plano que las contenga a ambas simultáneamente.

Ejemplo 6. Para las rectas $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ del ejemplo anterior, hallar ecuaciones implícitas de dos planos Π_1 y Π_2 que verifiquen simultáneamente: $\mathbb{L}_1 \subset \Pi_1$, $\mathbb{L}_2 \subset \Pi_2$ y $\Pi_1 \parallel \Pi_2$.

Solución: Π_1 y Π_2 son los planos que encontramos en la resolución del ejemplo anterior:
$\Pi_1 : -x - 5y + 3z = -20$ que contiene a $\mathbb{L}_1$.
$\Pi_2 : -x - 5y + 3z = -12$ que contiene a $\mathbb{L}_2$.
Estos planos son paralelos.

$\boxed{\text{Respuesta: } \Pi_1 : -x - 5y + 3z = -20 \quad \text{y} \quad \Pi_2 : -x - 5y + 3z = -12}$

Verificación:

$\mathbb{L}_1 \subset \Pi_1$:
$(1,1,2) \perp N$: $(1,1,2) \cdot (-1,-5,3) = 0$
$(2,3,-1) \in \Pi_1$: $-2 - 5 \cdot 3 + 3(-1) = -20$
$\mathbb{L}_2 \subset \Pi_2$:
$(-2,1,1) \perp N$: $(-2,1,1) \cdot (-1,-5,3) = 0$
$(3,3,2) \in \Pi_2$: $-3 - 5 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = -12$
$\Pi_1 \parallel \Pi_2$: Tienen la misma normal.

Ejemplo 7. Dadas las rectas $\mathbb{L}_1 : \lambda(1,3,-1) + (-2,1,4)$ y $\mathbb{L}_2 : \lambda(2,2,1) + (-4,3,0)$ hallar, si es posible, una ecuación implícita para un plano Π que las contenga.

Solución: Podemos ver que las rectas no son paralelas:
si existe $k \in \mathbb{R}$ que cumple $(1,3,-1) = k(2,2,1)$, tenemos que, para que valga la igualdad de las primeras coordenadas $k = \dfrac{1}{2}$ y, para la de las segundas, $k = \dfrac{3}{2}$.
Calculemos la intersección entre $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$. Buscamos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ que verifiquen simultáneamente:

$$\lambda(1,3,-1) + (-2,1,4) = \mu(2,2,1) + (-4,3,0)$$
$$(\lambda - 2, 3\lambda + 1, -\lambda + 4) = (2\mu - 4, 2\mu + 3, \mu)$$

Esto nos lleva a las tres ecuaciones

$$\lambda - 2 = 2\mu - 4\,, \quad 3\lambda + 1 = 2\mu + 3 \quad \text{y} \quad -\lambda + 4 = \mu$$

Reemplazamos la expresión de μ dada por la tercera ecuación en la primera:
$\lambda - 2 = 2(-\lambda + 4) - 4$, y despejamos $\lambda = 2$.
En la tercera ecuación queda entonces $\mu = -2 + 4 = 2$.

Sustituyendo los valores encontrados de λ y μ en la segunda ecuación $3 \cdot 2 + 1 = 2 \cdot 2 + 3 = 7$ vemos que se verifican las tres simultáneamente.
La intersección entre $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ es el punto $Q = 2(1,3,-1) + (-2,1,4) = (0,7,2)$.
Veremos que esta intersección garantiza la existencia de un plano que contiene a las dos rectas.
Para hallar la normal de Π podemos usar los vectores directores de $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$, como en los ejemplos anteriores (N debe ser ortogonal a las direcciones de ambas rectas):

$N = (1,3,-1) \times (2,2,1) = (5,-3,-4)$

Verificación de la ortogonalidad del producto vectorial:
$(1,3,-1) \cdot (5,-3,-4) = 0$ y $(2,2,1) \cdot (5,-3,-4) = 0$.

Con el punto $(0,7,2)$ de $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$ obtenemos $d = (0,7,2) \cdot (5,-3,-4) = -29$
Nos queda la ecuación $5x - 3y - 4z = -29$.
El punto de intersección de las rectas garantiza que el plano encontrado contiene a las dos rectas porque es paralelo a las dos y contiene un punto que pertenece a ambas.

Respuesta: $\Pi : 5x - 3y - 4z = -29$.

Verificación:

$\mathbb{L}_1 \subset \Pi$:
$(1,3,-1) \perp N$: $(1,3,-1) \cdot (5,-3,-4) = 0$
$(-2,1,4) \in \Pi$: $5(-2) - 3 \cdot 1 - 4 \cdot 4 = -29$
$\mathbb{L}_2 \subset \Pi$:
$(2,2,1) \perp N$: $(2,2,1) \cdot (5,-3,-4) = 0$
$(-4,3,0) \in \Pi$: $5(-4) - 3 \cdot 3 - 4 \cdot 0 = -29$

Ejemplo 8. Dadas las rectas $\mathbb{L}_1 : \lambda(1,1,-1) + (0,1,-2)$ y $\mathbb{L}_2 : \lambda(-2,-2,2) + (3,3,1)$, hallar, si es posible, un plano Π que las contenga.

Solución: Observar que las rectas $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ son paralelas, ya que $(-2,-2,2) = (-2)(1,1,-1)$, así que un plano paralelo a una, será también paralelo a la otra.
Buscamos entonces un plano Π que contenga a una de las rectas y que pase por un punto de la otra.
Si tomamos dos puntos de $\mathbb{L}_1$, por ejemplo $A = (0,1,-2)$ y $B = 1(1,1,-1) + (0,1,-2) = (1,2,-3)$, más un punto de $\mathbb{L}_2$, por ejemplo $C = (3,3,1)$, podemos obtener Π como el plano que pasa por los tres puntos.

$$\begin{aligned} N = (B-A) \times (C-A) &= ((1,2,-3) - (0,1,-2)) \times ((3,3,1) - (0,1,-2)) \\ &= (1,1,-1) \times (3,2,3) = (5,-6,-1) \end{aligned}$$

Verificación de la ortogonalidad del producto vectorial:
$(1,1,-1) \cdot (5,-6,-1) = 0$ y $(3,2,3) \cdot (5,-6,-1) = 0$.

Con A calculamos $d = (0,1,-2) \cdot (5,-6,-1) = -4$

Respuesta: $\Pi : 5x - 6y - z = -4$.

Verificación:

$\mathbb{L}_1 \subset \Pi$:
$(1,1,-1) \perp N$: $\quad (1,1,-1)\cdot(5,-6,-1) = 0$
$(0,1,-2) \in \Pi$: $\quad 5\cdot 0 - 6\cdot 1 - (-2) = -4$
$\mathbb{L}_2 \subset \Pi$:
$(-2,-2,2) \perp N$: $\quad (-2,-2,2)\cdot(5,-6,-1) = 0$
$(3,3,1) \in \Pi$: $\quad 5\cdot 3 - 6\cdot 3 - 1 = -4$

Observación

Los ejemplos anteriores ilustran la siguiente propiedad:

Dadas dos rectas, existe un plano que las contiene, si y solo si, las rectas se cortan o son paralelas.