Matrices

Una matriz es un arreglo rectangular de números reales. Consideramos el conjunto $\mathbb{R}^{m\times n}$ de todas las matrices de m filas y n columnas (siempre anotamos $filas \times columnas$ en ese orden). Mostramos algunos ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 4}\,;\ \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}\,;\ \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 8 & 7 \\ -4 & -5 & -6 & 9 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 6 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 5}\,.$$

Distinguimos las *matrices fila* y las *matrices columna*:

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 4}\,;\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}\,;\ \begin{pmatrix} 15 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}\,;\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}\,.$$

Las *matrices cuadradas* son aquellas que tienen la misma cantidad de filas que de columnas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & \sqrt{7} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2};\ \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3};\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

En cada conjunto $\mathbb{R}^{m\times n}$, tenemos la *matriz cero*, que notamos $\mathbb{O}_{m\times n}$, con todos sus lugares iguales a 0. En $\mathbb{R}^{n\times n}$, la *matriz identidad*, por ejemplo:

$$\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,;\ \mathbb{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,;\ \mathbb{I}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Estas matrices cumplirán un papel importante respecto de las operaciones entre matrices.

Para referirnos a los lugares de una matriz, usaremos subíndices dobles: el primero para indicar la fila y el segundo para la columna. Veamos un ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{array}{ll} a_{11} = 2 & \text{coeficiente de la fila 1 y la columna 1} \\ a_{23} = 4 & \text{coeficiente de la fila 2 y la columna 3} \\ a_{35} = 0 & \text{coeficiente de la fila 3 y la columna 5.} \end{array}$$

Operaciones con matrices

Suma y resta. La primera operación que presentamos es la suma (y la resta) de matrices de $\mathbb{R}^{m\times n}$, que se calcula lugar a lugar tal como para vectores.

Por ejemplo: si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ entonces,

$$A + B = \begin{pmatrix} 10+1 & 2+(-2) \\ -2+1 & 0+1 \\ 3+(-2) & 3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix},$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 10-1 & 2-(-2) \\ -2-1 & 0-1 \\ 3-(-2) & 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -3 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observamos que para poder sumar dos matrices A y B, deben tener la misma cantidad de filas y de columnas.
La matriz $\mathbb{O}$ es elemento neutro de la suma de matrices, es decir $M + \mathbb{O} = M$ para cada matriz M.

Producto por un escalar. El producto de una matriz por un número real también se efectúa lugar a lugar, como en el caso de vectores. Por ejemplo, para las matrices A y B anteriores,

$$3A = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 \\ 3\cdot(-2) & 3\cdot 0 \\ 3\cdot 3 & 3\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -6 & 0 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{2}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot 10 & \frac{1}{2}\cdot(-2) \\ \frac{1}{2}\cdot 1 & \frac{1}{2}\cdot 1 \\ \frac{1}{2}\cdot(-2) & \frac{1}{2}\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Producto de matrices. El producto $A \cdot B$ de dos matrices A y B está definido únicamente si la cantidad de columnas de A es igual a la cantidad de filas de B.
Por ejemplo, podremos calcularlo para $A \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, una matriz fila por una matriz columna. Recurrimos al producto interno o producto escalar de $\mathbb{R}^3$ para definir este producto de matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (1,2,3)\cdot(-1,0,2) = 1\cdot(-1) + 2\cdot 0 + 3\cdot 2 = 5$$

Caso general:

si $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$ y $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$ podemos calcular $A \cdot B$, que será una matriz de tamaño $m \times n$.

Ejemplo 1. Sean

$$\underset{2\times 4}{A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}}, \quad \underset{4\times 3}{B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}} \quad \Rightarrow \quad \text{se puede calcular} \quad \underset{2\times 3}{A\cdot B}.$$

Solución. Para calcular $A \cdot B$, multiplicamos cada fila de A por cada columna de B; más precisamente,

para obtener el lugar ij de $A \cdot B$, multiplicamos la fila i de A por la columna j de B.

Por ejemplo, para obtener

el lugar 11 de $A \cdot B$, multiplicamos la fila 1 de A por la columna 1 de B,
el lugar 12 de $A \cdot B$, multiplicamos la fila 1 de A por la columna 2 de B, etc.

De esta forma resulta

$$(A \cdot B)_{11} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (1, -1, 0, 2) \cdot (1, -1, 2, 0) = 2.$$

Continuamos calculando cada uno de los lugares de la matriz $A \cdot B$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} 2 & & \\ \hline & & \end{array}\right)$$

$$(1, -1, 0, 2) \cdot (1, -1, 2, 0) = 2$$

Para obtener el elemento en la fila 1 columna 2 del producto multiplicamos la primera fila de A por la segunda columna de B, y queda

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} 2 & -1 & \\ \hline & & \end{array}\right).$$

$$(1, -1, 0, 2) \cdot (0, 1, 4, 0) = -1$$

Para obtener el elemento de la fila 1 columna 3, calculamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} 2 & -1 & 8 \\ \hline & & \end{array}\right)$$

$$(1, -1, 0, 2) \cdot (1, 3, 1, 5) = 8$$

Y ahora trabajamos con la segunda fila de A, para calcular similarmente los elementos de la segunda fila de $A \cdot B$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} 2 & -1 & 8 \\ \hline 11 & & \end{array}\right)$$

$$(3, 0, 4, -2) \cdot (1, -1, 2, 0) = 11$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} 2 & -1 & 8 \\ \hline 11 & 16 & \end{array}\right)$$

$$(3, 0, 4, -2) \cdot (0, 1, 4, 0) = 16$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} 2 & -1 & 8 \\ \hline 11 & 16 & -3 \end{array}\right)$$

$$(3, 0, 4, -2) \cdot (1, 3, 1, 5) = -3$$

Hemos calculado:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 11 & 16 & -3 \end{pmatrix}.$$

Notemos que en este caso **no se puede calcular** (no está definido) el producto $B \cdot A$, ya que la cantidad de columnas de B no coincide con la cantidad de filas de A.

Observación. Al considerar la primera columna de B como una matriz de 4×1 y multiplicar resulta

$$\underset{2\times 4}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{4\times 1}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix}}.$$

De la misma manera, las demás columnas de $A \cdot B$ son el resultado del producto de A por la columna correspondiente de B:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 16 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2. Calcular el producto $M \cdot N$ y el producto $N \cdot M$ para

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución. Observemos que

$$\underset{2\times 3}{M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}, \quad \underset{3\times 2}{N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}} \Rightarrow \text{podemos calcular} \quad \underset{2\times 2}{M \cdot N}.$$

Procedemos como en el ejemplo anterior:

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \\ & \end{pmatrix}$$

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ & \end{pmatrix}$$

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & \end{pmatrix}$$

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Volvemos a copiar las matrices M y N para calcular $N \cdot M$

$$N = \underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}, \quad M = \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \Rightarrow \quad \text{podemos calcular} \quad \underset{3\times 3}{N \cdot M}.$$

Repitiendo el procedimiento (agrupamos algunos pasos) tenemos

$$N \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$N \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ & & \end{pmatrix}$$

$$N \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Respuesta: $M \cdot N = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ y $N \cdot M = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 3. Calcular el producto $S \cdot T$ y el producto $T \cdot S$ para

$$S = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solución. Si S y T son matrices cuadradas de $n \times n$ podemos calcular $S \cdot T$, que será una matriz de $n \times n$, y también $T \cdot S$, que será del mismo tamaño. Haciendo los cálculos obtenemos:

$$S \cdot T = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$T \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Respuesta: $S \cdot T = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $T \cdot S = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Podemos observar que $S \cdot T$ y $T \cdot S$ no son iguales. Como muestra este ejemplo, el producto de matrices **no es conmutativo**.

Para terminar, señalamos la relación entre la matriz identidad y el producto: para cada matriz A se tiene que

$$A \cdot \mathbb{I} = \mathbb{I} \cdot A = A.$$

Decimos que la matriz $\mathbb{I}$ es el *elemento neutro* del producto de matrices (como lo es el número 1 para el producto de números reales).