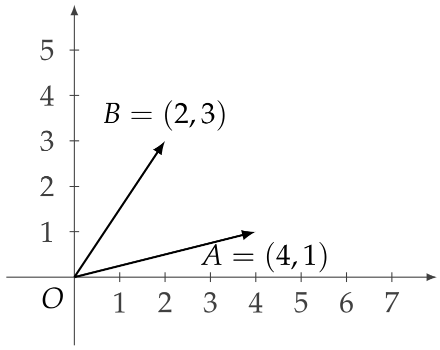
Vectores en el plano y el espacio

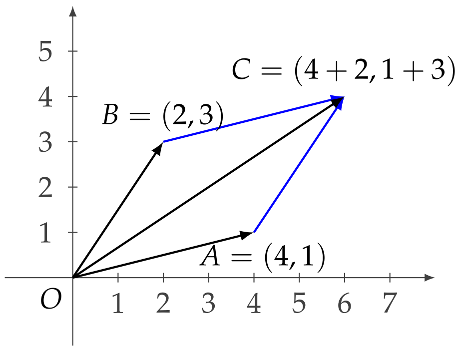
En esta sección vamos a enfocarnos en cómo aprovechar las operaciones vistas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ para operar con vectores en el plano o el espacio.

Ejemplo 1. Dados los puntos $A = (4, 1)$ y $B = (2, 3)$, hallar la suma de los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.

Solución.



La regla del paralelogramo nos permite construir geométricamente esta suma completando los lados paralelos a los vectores a partir de sus extremos. Llamemos C al extremo del vector suma que queda en la diagonal desde el origen de coordenadas.



Si prestamos atención a los lados que agregamos, vemos que son paralelos y de la misma longitud que los lados opuestos (los vectores). Por ejemplo, para moverse desde A hasta C hay que desplazarse lo mismo (en la dirección de cada eje) que para ir de O hasta B. Esto hace que las coordenadas del punto C sean las sumas, por separado, de las coordenadas horizontales y de las verticales de A y B.

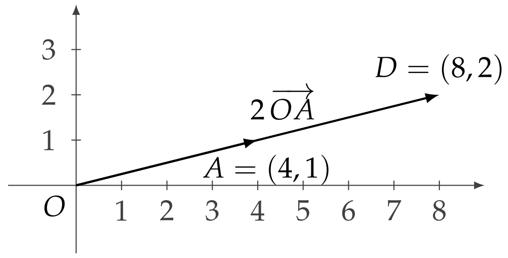
Esto nos da una forma analítica de calcular la suma de vectores:

$$\text{Si } \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}, \text{ entonces } C = A + B$$

En nuestro ejemplo, $C = (4, 1) + (2, 3) = (6, 4)$.

Respuesta: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ con $C = (6, 4)$.

Similarmente, para multiplicar un vector $\overrightarrow{OA}$, por ejemplo por $k = 2$,



lo único que necesitamos hacer es el producto por escalar con las coordenadas de su extremo:

$$\text{Si } \overrightarrow{OD} = k \cdot \overrightarrow{OA} \text{ entonces } D = kA.$$

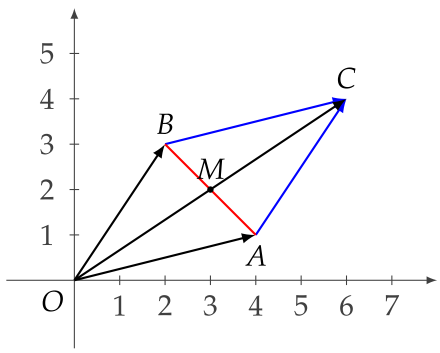
En el ejemplo con $A = (4,1)$, obtenemos $D = (8,2)$.

Observar que al multiplicar un vector por un escalar el vector resultante tiene su misma dirección; sólo se modifican la longitud y el sentido (esto último, si el escalar es negativo). Es decir, todos los múltiplos de un vector dado quedan alineados.

Como vemos, tanto para la suma como para el producto por escalares de vectores con origen en O, las operaciones se transfieren directamente a las coordenadas de sus extremos. Es por esto que identificamos a cada punto con el vector con origen en O y extremo en ese punto.

Aplicación: Punto medio de un segmento

Dado un segmento de extremos A y B podemos calcular analíticamente su punto medio M aprovechando lo que hemos visto.
Sabemos que la suma de los vectores $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ completa un paralelogramo, una de cuyas diagonales es el segmento $\overline{AB}$.



La otra diagonal la da el propio vector suma. Como las diagonales de un paralelogramo se cortan en sus puntos medios, el punto que estamos buscando es también en el punto medio del vector suma:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

o, directamente,

$$M = \frac{1}{2}(A + B)$$

Ejemplo 2. Dado $A = (1, 2, 3)$, hallar $C \in \mathbb{R}^3$, paralelo a $B = (3, -2, 1)$, de tal forma que el punto medio del segmento entre A y C tenga tercera coordenada igual a -1.

Solución. Para que C sea paralelo a B deberá existir $k \in \mathbb{R}$ tal que $C = kB$, así que tenemos:

$$C = (3k, -2k, k).$$

Calculamos el punto medio entre A y C usando la fórmula vista más arriba:

$$\frac{1}{2}((1, 2, 3) + (3k, -2k, k)) = (\frac{1}{2}(1 + 3k), \frac{1}{2}(2 - 2k), \frac{1}{2}(3 + k))$$

Para que este punto tenga tercera coordenada igual a -1, debe valer:

$$\frac{1}{2}(3 + k) = -1 \iff k = -5.$$

Reemplazando el valor de k, obtenemos $C = (-15, 10, -5)$.

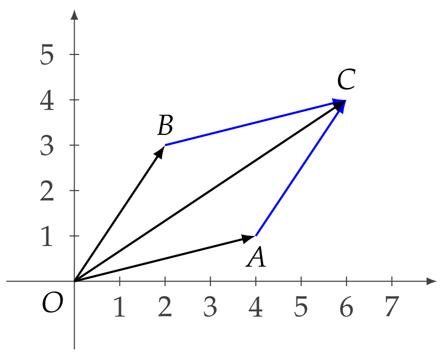
$\boxed{\text{Respuesta: } C = (-15, 10, -5)}$

Verificación:

- $(-15, 10, -5) = (-5) \cdot (3, -2, 1)$, con lo cual $C = (-15, 10, -5)$ es paralelo a $B = (3, -2, 1)$.
- $\frac{1}{2}((1, 2, 3) + (-15, 10, -5)) = (-7, 6, -1)$ tiene tercera coordenada igual a -1.

Aplicación: Cómo operar con vectores que no están en el origen

Como vimos, las operaciones con vectores con origen en O se convierten en cuentas con las coordenadas de sus extremos. Para hacer esas mismas operaciones con vectores que no tengan el origen en O lo que haremos primero es trasladarlos al origen. Esto significa encontrar un vector equivalente (es decir, con la misma longitud, dirección y sentido), pero con origen en el origen de coordenadas O. Para ver cómo hacerlo, volvamos a mirar el gráfico que nos dio la receta para la suma de vectores.



Obtuvimos la relación $C = A + B$ para hallar el vector suma.
Ahora, si conocemos el vector $\overrightarrow{BC}$ (para nosotros esto es conocer las coordenadas de B y de C), el mismo razonamiento que hicimos para la suma nos dice que tiene la misma dirección y

longitud que $\overrightarrow{BC}$, además del mismo sentido. Por lo tanto, el vector $\overrightarrow{OA}$ es equivalente al vector $\overrightarrow{BC}$. A partir de la relación $C = A + B$, despejando A resulta

$$A = C - B$$

En general, para vectores en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$:

El trasladado al origen de un vector $\overrightarrow{PQ}$ tiene su extremo en $Q - P$.

Ejemplo 3. Dados $P = (3, 1, -1)$ y $Q = (5, 6, -3)$, hallar un vector equivalente a $\overrightarrow{PQ}$ con origen en O.

Solución. Si llamamos R al extremo del vector trasladado al origen O, será

$$R = Q - P = (5, 6, -3) - (3, 1, -1) = (2, 5, -2).$$

Respuesta: el vector equivalente a $\overrightarrow{PQ}$ con origen en O tiene extremo en $(2, 5, -2)$