Sistemas lineales

Ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones

Una *ecuación lineal* en las variables $x_1,\ x_2,\dots,x_n$ es de la forma

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \cdots + a_n \cdot x_n = b$$

donde $a_1,\ a_2,\dots,a_n$ son números reales (que llamamos *coeficientes de la ecuación*) y b es también un número real. Un ejemplo conocido para nosotros es la ecuación implícita de un plano, como puede ser

$$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 8.$$

Una solución de esta ecuación será una terna $X = (x_1, x_2, x_3)$ para la cual se cumpla la igualdad. Por ejemplo, $(1,0,1)$ es una de estas soluciones ya que $3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 + 5 \cdot 1 = 8$.

En el caso general, una ecuación con n variables tendrá soluciones que son n-uplas. Así la ecuación en cuatro variables

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0$$

tiene soluciones que son 4-uplas, es decir $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Es fácil chequear que $X = (2,0,4,0)$ es una de estas soluciones y que $X = (1,2,0,-1)$ no es solución reemplazando los valores en la ecuación: $2 \cdot 2 + 0 - 4 + 3 \cdot 0 = 0$, mientras que $2 \cdot 1 + 2 - 0 + 3 \cdot (-1) = 1 \neq 0$.

Cuando $b = 0$, como en este último caso, se dice que la ecuación es *homogénea*. Para cualquier ecuación homogénea, el punto $(0,\dots,0)$ satisface la ecuación. Se lo llama la *solución trivial*.

Un *sistema de ecuaciones* reúne varias ecuaciones en las variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ y en este caso una n-upla será solución del sistema si satisface cada una de ellas.

Por ejemplo, para el sistema

$$S : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4 \\ & & & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \end{array} \right. ,$$

vemos que $X = (1,1,3,0)$ es solución, mientras que $X = (2,0,4,0)$ no lo es (ya que no verifica, por ejemplo, la segunda ecuación).

Cuando todas las ecuaciones del sistema son homogéneas diremos que es un *sistema homogéneo*; en caso contrario, diremos que es *no homogéneo*. Como $X = (0,\dots,0)$ es solución de cualquier ecuación homogénea, tenemos que:

> Un sistema homogéneo siempre tiene (al menos) una solución, la solución trivial.

Sistemas escalonados

En este curso resolver un sistema con n incógnitas quiere decir hallar el conjunto de **todos** los $X \in \mathbb{R}^n$ que lo satisfacen. Algunos sistemas se podrán resolver despejando de la última ecuación alguna variable en función de otras y sustituyendo esta relación en las demás ecuaciones. Estos son los *sistemas escalonados*.

Por ejemplo, el sistema

$$S : \begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ 3x_2 = -6 \end{cases}$$

es escalonado. De la segunda ecuación despejamos $x_2 = -2$ y, sustituyendo este valor en la primera, nos queda que $x_1 + (-2) = 5$. De aquí despejamos $x_1 = 7$ y concluimos que la única solución del sistema es $(x_1, x_2) = (-2, 7)$.

El mismo procedimiento se aplica para resolver sistemas escalonados con más incógnitas.

Ejemplo 1. Resolver el sistema

$$S : \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ - x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases} .$$

Solución. Despejamos la variable x_3 de la última ecuación:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_3 = 2x_4 + 3 \end{cases} ,$$

y luego sustituimos la expresión para x_3 en función de la variable x_4 en cada una de las ecuaciones de arriba:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - (2x_4 + 3) + 3x_4 = 0 \\ x_2 + (2x_4 + 3) - x_4 = 4 \\ x_3 = 2x_4 + 3 \end{cases} .$$

Podemos despejar también (mirando la ecuación central) la variable x_2 en función de x_4:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - (2x_4 + 3) + 3x_4 = 0 \\ x_2 = -x_4 + 1 \\ x_3 = 2x_4 + 3 \end{cases} .$$

Ahora sustituimos la expresión obtenida para x_2 en función de x_4 en la primera ecuación:

$$\begin{cases} 2x_1 + (-x_4 + 1) - (2x_4 + 3) + 3x_4 = 0 \\ x_2 = -x_4 + 1 \\ x_3 = 2x_4 + 3 \end{cases} .$$

Por último despejamos la variable x_1:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -x_4 + 1 \\ x_3 = 2x_4 + 3 \end{cases} .$$

Esto significa que las 4-uplas que son soluciones de este sistema tienen sus coordenadas restringidas por las 3 ecuaciones obtenidas. El hecho que la variable x_4 no aparezca despejada quiere decir que x_4 está *libre*, es decir, que puede tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$, y con ese valor obtenerse una solución. Escribimos:

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ es solución de } S \quad \Leftrightarrow \quad X = (1, -x_4 + 1, 2x_4 + 3, x_4) \text{ con } x_4 \in \mathbb{R}.$$

La expresión final que adoptamos para el conjunto solución es similar a la ecuación paramétrica de una recta. Cambiamos la variable por un parámetro λ y tenemos que:

$$X = (1, -\lambda + 1, 2\lambda + 3, \lambda) = (0, -\lambda, 2\lambda, \lambda) + (1, 1, 3, 0)$$

$$X = \lambda \cdot (0, -1, 2, 1) + (1, 1, 3, 0) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Esto quiere decir que para cada valor de λ que elijamos, obtendremos una solución de S:

$$\begin{array}{ll} \lambda = 1 & \Rightarrow X = 1 \cdot (0, -1, 2, 1) + (1, 1, 3, 0) = (1, 0, 5, 1) \text{ es solución de } S \\ \lambda = -2 & \Rightarrow X = (-2) \cdot (0, -1, 2, 1) + (1, 1, 3, 0) = (1, 3, -1, -2) \text{ es solución de } S \\ \lambda = \cdots & \Rightarrow X = \cdots \end{array}$$

Este sistema tiene infinitas soluciones; decimos entonces que S es un *sistema compatible indeterminado*, y lo abreviamos S.C.I.

Respuesta: El conjunto solución del sistema es $\{\lambda \cdot (0, -1, 2, 1) + (1, 1, 3, 0) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Matriz ampliada asociada a un sistema

El método que usaremos para resolver sistemas lineales consiste en transformar el sistema dado en otro que sea escalonado y tenga las mismas soluciones que el original, haciendo ciertas operaciones con las ecuaciones del sistema. Estas operaciones involucrarán únicamente hacer cuentas con los coeficientes de las ecuaciones.

Por este motivo, a un sistema lineal le asociaremos una matriz (esto es, un arreglo rectangular de números) construida a partir de los coeficientes del sistema. Recíprocamente, a cada matriz le asociaremos un sistema de ecuaciones lineales.

Más precisamente, dado un sistema lineal le asociamos una *matriz ampliada*. Esta matriz tiene una fila por cada ecuación del sistema y una columna por cada incógnita, más una columna adicional para los términos constantes de cada ecuación. En cada fila de la matriz se ubican los coeficientes de las incógnitas $x_1, \ldots, x_n$ en las columnas correspondientes y, en la última columna, se escribe la constante b que aparece a la derecha en la ecuación. Cuando una incógnita no aparece explícitamente en una ecuación, el coeficiente correspondiente es 0.

Por ejemplo, para el sistema

$$S_1 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} & & x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ x_1 & & & + & 2x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & & & + & 3x_3 & = & 8 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

la matriz ampliada del sistema es:

$$\begin{array}{cl} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & b \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) & \begin{array}{l} \leftarrow \text{ecuación 1} \\ \leftarrow \text{ecuación 2} \\ \leftarrow \text{ecuación 3} \\ \leftarrow \text{ecuación 4} \end{array} \end{array}.$$

Recíprocamente, dada la matriz ampliada de un sistema S_2

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix},$$

reconstruimos el sistema armando una ecuación por cada fila de la matriz:

$$S_2 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} & & & - & 2x_3 & & & + & 7x_5 & = & 12 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 10x_3 & + & 6x_4 & + & 12x_5 & = & 28 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 5x_3 & + & 6x_4 & - & x_5 & = & -1 \end{array} \right. .$$

Veamos ejemplos de matrices ampliadas asociadas a algunos sistemas:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Estas matrices tienen más ceros que las de los ejemplos anteriores, más aún, los tienen repartidos de una forma especial: son matrices escalonadas,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En cada fila, el primer número distinto de cero es un 1; este número resaltado se llama el 1 *principal de la fila* (en la práctica no seremos tan estrictos, podemos trabajar con el primer lugar no nulo de cada fila).

Al mirar dos filas consecutivas, sus unos principales forman un escalón hacia la derecha (no pueden estar a la misma altura). Es decir, la de abajo debe empezar con más ceros que la de arriba. Si una fila tiene todos sus lugares iguales a cero, se ubica al final de la matriz, como en el tercer ejemplo.

Estas matrices corresponden a sistemas escalonados.

Método de eliminación de Gauss

Vamos a aplicar el método de eliminación de Gauss para llevar un sistema lineal a un sistema equivalente escalonado. Las operaciones que se realizan sobre las ecuaciones de un sistema al aplicar este método, que no cambian su conjunto solución, son operaciones que se reflejan sobre la matriz ampliada. Al hacerlo tendremos matrices ampliadas *equivalentes* entre sí. Las operaciones permitidas sobre una matriz para obtener una matriz equivalente en las filas las abreviamos de la siguiente manera:

(1)	F_i	$\leftrightarrow F_j$		(intercambiar dos filas)
(2)	$F_i + \alpha F_j$	$\rightarrow F_i$	$\alpha \in \mathbb{R}$	(a una fila sumarle un múltiplo de otra)
(3)	βF_i	$\rightarrow F_i$	si $\beta \neq 0$	(multiplicar una fila por un número $\neq 0$)

Revisamos su significado y notación trabajando con ejemplos.

Ejemplo 2. Resolver el sistema

$$S : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & & & + & 3x_3 & = & 2 \\ & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array} \right.$$

Solución. Veamos cómo resolver el sistema trabajando con su matriz ampliada

$$S : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & & & + & 3x_3 & = & 2 \\ & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz no está escalonada, pero podemos operar con las filas para conseguir un cero debajo del 1 principal de la primera fila (resaltado debajo). Calculamos lugar a lugar la Fila 2 menos el doble de la Fila 1, y lo reemplazamos en la segunda fila:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \, F_2 - 2 \cdot F_1 \rightarrow F_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La segunda matriz todavía no está escalonada, pero podemos repetir el procedimiento para conseguir que la tercera fila empiece con más ceros que la segunda. Con la misma notación que antes operamos sobre la tercera fila:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \, F_3 + F_2 \rightarrow F_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora sí, la matriz resulta escalonada (no exigimos un 1 en el lugar principal). Veamos a qué sistema está asociada:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 1 \end{array} \right. .$$

La última ecuación de este sistema proviene de reconstruir $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 1$, que es equivalente a $0 = 1$. Esta ecuación en las incógnitas $x_1,\ x_2,\ x_3$ no tiene solución. Por lo tanto, el sistema S (que es equivalente a éste) no admite solución: ninguna terna (x_1, x_2, x_3) lo satisface. Decimos que es un *sistema incompatible* o S.I. para abreviar.

Respuesta: El sistema no tiene soluciones.

Habíamos mencionado que una ecuación de 3 incógnitas se podía relacionar con la ecuación implícita de un plano. Un sistema de tres de estas ecuaciones, como el del ejemplo anterior, se puede reinterpretar como la intersección de tres planos, ya que buscamos puntos que satisfagan las tres ecuaciones. En este caso, la intersección es vacía.

Ejemplo 3. Resolver el sistema

$$S : \begin{cases} & & & - & 2x_3 & & & + & 7x_5 & = & 12 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 10x_3 & + & 6x_4 & + & 12x_5 & = & 28 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 5x_3 & + & 6x_4 & - & 5x_5 & = & -1 \end{cases}$$

Solución. La matriz ampliada de este sistema es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

No está escalonada, pero mejora si intercambiamos sus dos primeras filas. Anotamos esta operación como se muestra:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix} . F_1 \leftrightarrow F_2 \begin{pmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para ir hacia la forma escalonada necesitamos que la última fila empiece con 0, para lograr esto la modificamos "usando"la primera fila:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix} . F_3 - F_1 \rightarrow F_3 \begin{pmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{pmatrix}.$$

Queremos que la última fila empiece con al menos tres 0. Para lograrlo, observamos que debemos recurrir a la fila 2 (si involucramos a la fila 1 arruinamos todo lo hecho).

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{pmatrix} . 2F_3 + 5F_2 \rightarrow F_3 \begin{pmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(Este útimo paso es una combinación de la propiedad (3), $2F_3 \rightarrow F_3$, y la propiedad (2), $F_3 + 5F_2 \rightarrow F_3$.)

Si bien dijimos que no íbamos a ser tan estrictos, esta vez vamos a buscar cómo llegar a los 1 principales. Podemos cambiar cada fila por un múltiplo de ella misma:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}F_1 & \rightarrow & F_1 \\ & & \\ -\frac{1}{2}F_2 & \rightarrow & F_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ahora que tenemos la matriz escalonada, reconstruimos el sistema y lo resolvemos despejando de abajo hacia arriba:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \to \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & 3x_4 & + & 6x_5 & = & 14 \\ & & & & x_3 & & & - & \frac{7}{2}x_5 & = & -6 \\ & & & & & & & & x_5 & = & 2 \end{array} \right. .$$

Reemplazamos $x_5 = 2$ en las primeras ecuaciones y obtenemos

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrcr} x_1+ & 2x_2- & 5x_3+ & 3x_4+ & 6\cdot 2 & = & 14 \\ & & x_3- & & \frac{7}{2}\cdot 2 & = & -6 \\ & & & & x_5 & = & 2 \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{rrrrrcr} x_1+ & 2x_2- & 5x_3+ & 3x_4+ & 12 & = & 14 \\ & & x_3- & & 7 & = & -6 \\ & & & & x_5 & = & 2 \end{array} \right.$$

Después de despejar la variable x_3, también se la puede sustituir en la primera ecuación:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 5\cdot 1 & + & 3x_4 & + & 12 & = & 14 \\ & & & & x_3 & & & & & = & 1 \\ & & & & & & & & x_5 & = & 2 \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{rrrcl} x_1 & & & = & -2x_2 - 3x_4 + 7 \\ & x_3 & & = & 1 \\ & & x_5 & = & 2 \end{array} \right.$$

Si bien hubiéramos podido despejar de otras formas, siempre se prodrán despejar en función de las demás, aquellas variables que se corresponden con los unos principales. Las variables x_2 y x_4 que no están despejadas, están *libres*, es decir, pueden tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$. Así, las soluciones de S_2 son de la forma:

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-2x_2 - 3x_4 + 7, x_2, 1, x_4, 2) \ \text{ con } \ x_2, x_4 \ \in \mathbb{R}.$$

Si cambiamos las variables libres por los parámetros s y t, la forma paramétrica del conjunto solución es

$$X = (-2s - 3t + 7, s, 1, t, 2) = s(-2, 1, 0, 0, 0) + t(-3, 0, 0, 1, 0) + (7, 0, 1, 0, 2), \ \text{con } s, t \ \in \mathbb{R}.$$

El sistema tiene infinitas soluciones, es un S.C.I.

Respuesta: El sistema es compatible indeterminado y su conjunto solución es

$$\{s(-2, 1, 0, 0, 0) + t(-3, 0, 0, 1, 0) + (7, 0, 1, 0, 2), \ \text{con } s, t \ \in \mathbb{R}\}.$$

Ejemplo 4. Resolver el sistema

$$S : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} & & x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ x_1 & & & + & 2x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & & & + & 3x_3 & = & 8 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Solución. La matriz ampliada asociada a este sistema es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como en los ejemplos anteriores, para resolver el sistema escalonamos su matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} F_3 - 2F_1 \to F_3 \\ F_4 + F_1 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

$$F_4 - F_2 \to F_4 \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) F_4 + F_3 \to F_4 \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ahora volvemos al sistema de ecuaciones

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 5 \\ x_2 + 4x_3 = 3 \\ - x_3 = -2 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Observemos que la última ecuación (que es la ecuación $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0$) no impone ninguna restricción en las variables, y entonces la podemos omitir. En particular, vemos que el sistema de cuatro ecuaciones que vinculaba estas variables contenía información redundante, ya que el sistema resulta equivalente a otro con tres ecuaciones. Además, en este caso, al despejar de abajo hacia arriba no queda ninguna variable libre:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 5 \\ x_2 + 4x_3 = 3 \\ -x_3 = -2 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 + 2 \cdot 2 = 5 \\ x_2 + 4 \cdot 2 = 3 \\ x_3 = 2 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

El sistema tiene una única solución, la terna $X = (1, -5, 2)$. Se trata entonces de un *sistema compatible determinado* o S.C.D. para abreviar.

$\boxed{\text{Respuesta: El sistema es compatible determinado y su única solución es } X = (1,-5,2).}$

Resolución simultánea de sistemas

Ejemplo 5. Resolver los sistemas lineales asociados a las matrices $(A|b_1)$, $(A|b_2)$ y $(A|b_3)$ con:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \; ; \; b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \; ; \; b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Solución. A partir de las matrices ampliadas, construimos los sistemas a resolver:

$$S_I : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$$

$$S_{II}: \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & & & = & 2 \end{array} \right.$$

$$S_{III}: \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & & & = & 0 \end{array} \right.$$

Si bien estos sistemas son distintos, se resuelven (respectivamente) escalonando las matrices ampliadas dadas por:

$$\begin{array}{ccccc} (A|b_1) & & (A|b_2) & & (A|b_3) \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}. & ; & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}. & ; & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

En la tercera matriz, observamos que, como la última columna tiene todos los coeficientes iguales a 0 (el sistema era homogéneo), cualquier operación que hagamos en las filas dará lugar a una matriz cuya última columna tendrá todos 0. Por este motivo, al escalonarla podemos omitir esta última columna y trabajar simplemente con la matriz A. (Esta observación es válida para cualquier sistema homogéneo.)
Para conseguir matrices equivalentes que sean escalonadas, podemos ver que basta hacer las mismas operaciones para las tres matrices anteriores. Por ejemplo:

$$(A|b_1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad F_2 - 2F_1 \to F_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$(A|b_2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad F_2 - 2F_1 \to F_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad .$$

$$A \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad F_2 - 2F_1 \to F_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Los cambios en las matrices coinciden en los tres casos, excepto por la última columna. Para resumir la resolución de estos tres sistemas anotamos:

$$(A|b_1|b_2) \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

(no escribimos la columna b_3 de resultados que está formada sólo por 0) y llevamos a cabo las operaciones sobre las filas simultáneamente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}. F_2 - 2F_1 \to F_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$F_3 - 2F_1 \to F_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -6 & 4 & -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}. F_3 - 2F_2 \to F_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Finalmente al ver la matriz escalonada se reconstruyen los tres sistemas asociados S'_I, S'_{II} y S'_{III} equivalentes a los sistemas que se quiere resolver:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \to \quad S'_I : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ \quad - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ \quad 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}. \quad \to \quad S'_{II} : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ \quad - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ \quad 0 = -4 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad S'_{III} : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ \quad - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ \quad 0 = 0 \end{cases},$$

y cada uno de ellos se resuelve sustituyendo de abajo hacia arriba:

$$S'_I : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 = \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3} \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Podemos omitir la última ecuación y sustituir hacia arriba

$$\begin{cases} x_1 + (\frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}) - x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 = \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3} \end{cases},$$

y al terminar de despejar nos queda

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3} \end{cases}$$

es decir,

$$X = \left(\frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}, \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}, x_3, x_4\right) \quad x_3, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Concluimos escribiendo las soluciones de S_I en función de dos parámetros s y t:

$$X = s\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0\right) + t\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 1\right) + \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0\right) \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Al proceder con el segundo sistema,

$$S'_{II} : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ \quad - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ \quad 0 = -4 \end{cases}$$

vemos que su última ecuación "$0 = -4$"no se satisface para ninguna 4-upla, y así concluimos que no tiene solución o, dicho de otra forma, que su conjunto de soluciones es vacío. Es decir, el sistema S_{II} es incompatible.

El sistema S'_{III} es homogéneo:

$$S'_{III} : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & - & 3x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Su última ecuación se puede omitir y tendrá, como en el caso de S_I, infinitas soluciones. Queda como ejercicio hallarlas y verificar que una expresión posible para dichas soluciones es

$$X = s\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0\right) + t\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 1\right) \quad s, t \in \mathbb{R}.$$