Suma de subespacios

Así como la intersección de dos subespacios es un subespacio contenido en ambos, dados dos subespacios $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ de un espacio vectorial $\mathbb{V}$, vamos a contruir un subespacio de $\mathbb{V}$ más "grande" que contenga simultáneamente a $\mathbb{S}$ y a $\mathbb{T}$.
Observamos que si $\mathbb{W}$ es un subespacio al que pertenecen todos los vectores de $\mathbb{S}$ y todos los de $\mathbb{T}$, entonces también pertenecen a $\mathbb{W}$ todas las combinaciones lineales entre esos vectores; en particular, todas las sumas de vectores de $\mathbb{S}$ con vectores de $\mathbb{T}$. Esto es lo que llamamos suma de subespacios.

Suma de subespacios

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial, y sean $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ dos subespacios de $\mathbb{V}$. Definimos la *suma* de $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ como:

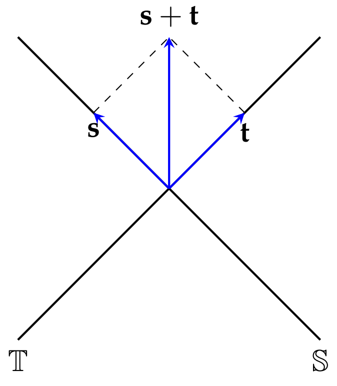
$$\mathbb{S}+\mathbb{T}=\{\mathbf{s}+\mathbf{t} \mid \mathbf{s}\in\mathbb{S} \text{ y } \mathbf{t}\in\mathbb{T}\}.$$

Es decir, la suma de $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ es el conjunto formado por todos los vectores que resultan de sumar un vector de $\mathbb{S}$ y uno de $\mathbb{T}$.

Propiedad

Si $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ son subespacios de un e.v. $\mathbb{V}$, entonces $\mathbb{S}+\mathbb{T}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$. Más aún, es el subespacio "más chico"de $\mathbb{V}$ que contiene a $\mathbb{S}$ y a $\mathbb{T}$.

Observación: Dados dos subespacios $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$, la unión $\mathbb{S}\cup\mathbb{T}=\{\mathbf{v}\in\mathbb{V} \mid \mathbf{v}\in\mathbb{S} \text{ o } \mathbf{v}\in\mathbb{T}\}$ en general **no es** un subespacio de $\mathbb{V}$, con lo cual $\mathbb{S}+\mathbb{T}\neq\mathbb{S}\cup\mathbb{T}$.
Consideremos, por ejemplo, $\mathbb{S}=\langle(1,1)\rangle$ y $\mathbb{T}=\langle(-1,1)\rangle$ en $\mathbb{R}^2$. La unión de $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ es el conjunto de vectores que pertenecen a alguno de los dos. Entonces, $\mathbf{s}=(1,1)$ y $\mathbf{t}=(-1,1)$ pertenecen a $\mathbb{S}\cup\mathbb{T}$. Si los sumamos $(1,1)+(-1,1)=(0,2)$, obtenemos un vector que no pertenece ni a $\mathbb{S}$ ni a $\mathbb{T}$, o sea, que no pertenece a $\mathbb{S}\cup\mathbb{T}$. Por lo tanto, $\mathbb{S}\cup\mathbb{T}$ no es un subespacio.



En este caso, considerando todos los vectores que se obtienen como suma de un vector de $\mathbb{S}$ y otro de $\mathbb{T}$, podemos ver que $\mathbb{S}+\mathbb{T}=\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 1. Sean $\mathbb{S} = \langle (1,1,1,1), (0,-1,1,-2) \rangle$ y $\mathbb{T} = \langle (0,1,1,0), (1,0,2,-1) \rangle$. Hallar una base de $\mathbb{S}+\mathbb{T}$.

Solución. Un vector de $\mathbf{v} \in \mathbb{S}+\mathbb{T}$ tiene la forma:

$$\mathbf{v} = \underbrace{a(1,1,1,1) + b(0,-1,1-2)}_{\mathbf{s}\in\mathbb{S}} + \underbrace{c(0,1,1,0) + d(1,0,2,-1)}_{\mathbf{t}\in\mathbb{T}}.$$

Entonces $\mathbb{S}+\mathbb{T} = \langle (1,1,1,1), (0,-1,1,-2), (0,1,1,0), (1,0,2,-1) \rangle$. Para obtener una base, veamos si los generadores forman un conjunto linealmente independiente. Planteamos

$$a(1,1,1,1) + b(0,-1,1,-2) + c(0,1,1,0) + d(1,0,2,-1) = (0,0,0,0),$$

que nos da el sistema con matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Escalonamos,

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 - F_1 \to F_2 \\ F_3 - F_1 \to F_3 \\ F_4 - F_1 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F_3 + F_2 \to F_3 \\ F_4 - 2F_2 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) F_3 + F_4 \to F_4 \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

y vemos que es un S.C.I. Por lo tanto, los vectores son linealmente dependientes. Observando la matriz escalonada notamos que si nos quedamos con las tres primeras columnas, resulta un S.C.D. Entonces, el conjunto $\{(1,1,1,1), (0,-1,1,-2), (0,1,1,0)\}$ de los vectores correspondientes a esas columnas es una base de $\mathbb{S}+\mathbb{T}$.

Respuesta: $B = \{(1,1,1,1), (0,-1,1,-2), (0,1,1,0)\}$ es una base de $\mathbb{S}+\mathbb{T}$.

Dados subespacios $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ de un e.v. $\mathbb{V}$, es sencillo obtener un conjunto de generadores de $\mathbb{S}+\mathbb{T}$ a partir de un conjunto de generadores de $\mathbb{S}$ y un conjunto de generadores de $\mathbb{T}$:

Generadores de la suma

Si $\mathbb{S} = \langle \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n \rangle$ y $\mathbb{T} = \langle \mathbf{t}_1, \dots \mathbf{t}_m \rangle$, entonces $\mathbb{S}+\mathbb{T} = \langle \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n, \mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_m \rangle$.

Como puede verse en el ejemplo anterior, en general el conjunto $\{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n, \mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_m\}$ no es una base de $\mathbb{S}+\mathbb{T}$, aun cuando $\{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n\}$ y $\{\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_m\}$ sean bases de $\mathbb{S}$ y de $\mathbb{T}$ respectivamente.

Ejemplo 2. Dados los subespacios

$$\mathbb{S} = \langle (1, 1-2, 1), (0, 1, 0, 2) \rangle \,, \ \mathbb{T} = \langle (1, 1, 1, 4), (1, 1, -1, 2) \rangle \quad \text{y}$$
$$\mathbb{H} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \},$$

decidir si $\mathbb{S} + \mathbb{T} = \mathbb{H}$.

Solución: A partir de los conjuntos de generadores de $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ dados, obtenemos que

$$\mathbb{S} + \mathbb{T} = \langle (1, 1-2, 1), (0, 1, 0, 2), (1, 1, 1, 4), (1, 1, -1, 2) \rangle \,.$$

Veamos si los generadores pertenecen a $\mathbb{H}$

$$\begin{aligned} (1, 1-2, 1) \in \mathbb{H} : &\quad 1 + 2 \cdot 1 + (-2) - 1 = 0 \\ (0, 1, 0, 2) \in \mathbb{H} : &\quad 0 + 2 \cdot 1 + 0 - 2 = 0 \\ (1, 1, 1, 4) \in \mathbb{H} : &\quad 1 + 2 \cdot 1 + 1 - 4 = 0 \\ (1, 1, -1, 2) \in \mathbb{H} : &\quad 1 + 2 \cdot 1 + (-1) - 2 = 0 \end{aligned}$$

Esto muestra que $\mathbb{S} + \mathbb{T} \subset \mathbb{H}$. Calculemos $\dim(\mathbb{S} + \mathbb{T})$ y $\dim(\mathbb{H})$.
Analizamos la independencia lineal de los generadores de $\mathbb{S} + \mathbb{T}$:

$$a(1, 1-2, 1) + b(0, 1, 0, 2) + c(1, 1, 1, 4) + d(1, 1, -1, 2) = (0, 0, 0, 0)$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} a & & & + & c & + & d & = & 0 \\ a & + & b & + & c & + & d & = & 0 \\ -2a & & & + & c & - & d & = & 0 \\ a & + & 2b & + & 4c & + & 2d & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} F_2 - F_1 \to F_2 \\ F_3 + 2F_1 \to F_3 \\ F_4 - F_1 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right)$$
$$F_4 - 2F_2 \to F_4 \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) F_4 - F_3 \to F_4 \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

El sistema es compatible indeterminado y la matriz tiene rango 3, con lo cual $\dim(\mathbb{S} + \mathbb{T}) = 3$.
Por otro lado, como $\mathbb{H}$ está definido por una sola ecuación en $\mathbb{R}^4$, $\dim(\mathbb{H}) = \dim(\mathbb{R}^4) - 1 = 3$.
En resumen, tenemos que $\mathbb{S} + \mathbb{T} \subset \mathbb{H}$ y $\dim(\mathbb{S} + \mathbb{T}) = \dim(\mathbb{H})$, de donde podemos concluir que los subespacios son iguales.

$\boxed{\text{Respuesta: } \mathbb{S} + \mathbb{T} = \mathbb{H}.}$

Observación: Si alguno de los subespacios $\mathbb{S}$ o $\mathbb{T}$ está dado por ecuaciones, podemos hallar un conjunto de generadores del subespacio y repetir lo anterior.
Si el subespacio $\mathbb{H}$ está dado por generadores resulta conveniente buscar un sistema de ecuaciones que lo defina para luego proceder como en el ejemplo.

Ejemplo 3. Dados $\mathbb{S} = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \ / \ a_{11} + a_{22} = 0\}$ y $\mathbb{T} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, decidir si $\mathbb{S} + \mathbb{T} = \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Solución. Comenzamos buscando un conjunto de generadores de $\mathbb{S} + \mathbb{T}$. Para esto, primero hallaremos un conjunto de generadores de $\mathbb{S}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{S} \iff a_{11} + a_{22} = 0 \iff a_{11} = -a_{22}$$

Entonces, las matrices $A \in \mathbb{S}$ son las de la forma

$$\begin{pmatrix} -a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{22} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ con } a_{22}, a_{12}, a_{21} \in \mathbb{R},$$

y, por lo tanto, $\mathbb{S} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Con este conjunto de generadores de $\mathbb{S}$ y el conjunto de generadores dado de $\mathbb{T}$, tenemos un conjunto de generadores para $\mathbb{S} + \mathbb{T}$:

$$\mathbb{S} + \mathbb{T} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Para decidir si $\mathbb{S} + \mathbb{T} = \mathbb{R}^{2\times 2}$, calculemos $\dim(\mathbb{S} + \mathbb{T})$. Planteamos:

$$a \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

para extraer una base del conjunto de generadores, lo que nos conduce al sistema

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrrrrr} -a & & & + & d & - & 2e & = & 0 \\ & b & & - & d & + & e & = & 0 \\ & & c & + & 3d & - & e & = & 0 \\ a & & & + & d & + & e & = & 0 \end{array} \right. \longleftrightarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} -1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Escalonamos la matriz del sistema:

$$F_4 + F_1 \to F_4 \quad \left(\begin{array}{rrrrr|r} -1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Vemos que la matriz tiene rango 4 (más aún, que los primeros 4 elementos del conjunto de generadores forman una base de $\mathbb{S} + \mathbb{T}$) y, por lo tanto, $\dim(\mathbb{S} + \mathbb{T}) = 4$. Como $\mathbb{S} + \mathbb{T} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $\dim(\mathbb{R}^{2\times 2}) = 4$, concluimos que vale la igualdad.

$\boxed{\text{Respuesta: } \mathbb{S} + \mathbb{T} = \mathbb{R}^{2\times 2}.}$

Ejemplo 4. Sean $\mathbb{S} = \langle (1,1,0,2),(3,1,1,2),(2,0,1,0)\rangle$ y $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_3 + x_4 = 0;\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0\}$.

a) Hallar $\mathbb{S} + \mathbb{T}$.

b) Hallar una base de $\mathbb{S} + \mathbb{T}$.

c) Hallar una base de $\mathbb{S} + \mathbb{T}$ que contenga simultáneamente una base de $\mathbb{S}$ y una base de $\mathbb{T}$.

Solución:

a) Para aplicar lo anterior de modo de hallar un conjunto de generadores de $\mathbb{S} + \mathbb{T}$ necesitamos un conjunto de generadores de $\mathbb{T}$: resolvemos el sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}\right. \qquad \leftrightarrow \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$F_2 - F_1 \to F_2 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

que, despejando x_1 y x_2, tiene como soluciones a

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_3 - x_4, -x_3, x_3, x_4) = x_3(-1,-1,1,0) + x_4(-1,0,0,1)$, con $x_2, x_4 \in \mathbb{R}$.

Así, el conjunto $\{(-1,-1,1,0),(-1,0,0,1)\}$ es un base de $\mathbb{T}$.

Entonces, a partir del conjunto de generadores dado para $\mathbb{S}$ y el conjunto de generadores obtenido para $\mathbb{T}$, tenemos un conjunto de generadores de $\mathbb{S} + \mathbb{T}$.

$\boxed{\text{Respuesta: } \mathbb{S} + \mathbb{T} = \langle (1,1,0,2),(3,1,1,2),(2,0,1,0),(-1,-1,1,0)(-1,0,0,1)\rangle.}$

b) Veamos si el conjunto de generadores de $\mathbb{S} + \mathbb{T}$ que encontramos en el ítem anterior es linealmente independiente:

$$a(1,1,0,2) + b(3,1,1,2) + c(2,0,1,0) + d(-1,-1,1,0) + e(-1,0,0,1) = (0,0,0,0)$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccccccc} a & + & 3b & + & 2c & - & d & - & e & = & 0 \\ a & + & b & & & - & d & & & = & 0 \\ & & b & + & c & + & d & & & = & 0 \\ 2a & + & 2b & & & & & + & e & = & 0 \end{array}\right. \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} F_2 - F_1 \to F_2 \\ F_4 - 2F_1 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} 2F_3 + F_2 \to F_3 \\ F_4 - 2F_2 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$F_4 - F_3 \to F_4 \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El conjunto de generadores es linealmente dependiente. Podemos extraer un base considerando los vectores asociados a la primera, segunda y cuarta columnas:

Respuesta: El conjunto $\{(1,1,0,2),(3,1,1,2),(-1,-1,1,0)\}$ es una base de $\mathbb{S}+\mathbb{T}$.

c) Observar que los dos primeros vectores de la base obtenida en el ítem anterior no cumplen las ecuaciones de $\mathbb{T}$, por lo tanto esa base no contiene una base de $\mathbb{T}$, ya que $\dim(\mathbb{T}) = 2$ (como vimos en a)) y esa base solo contiene a un vector que pertenece a $\mathbb{T}$.

A partir del desarrollo hecho en el inciso anterior, observamos que los tres generadores con los que tenemos expresado el subespacio $\mathbb{S}$ son linealmente dependientes y que podemos extraer una base de $\mathbb{S}$ considerando los dos primeros $\{(1,1,0,2),(3,1,1,2)\}$; por lo tanto, $\dim(\mathbb{S}) = 2$. También sabemos que $\dim(\mathbb{T}) = 2$.

Como $\dim(\mathbb{S}+\mathbb{T}) = 3$, para la base que buscamos necesitamos tres vectores de $\mathbb{S}+\mathbb{T}$, de los cuales dos tienen que formar una base de $\mathbb{S}$, y dos una base de $\mathbb{T}$: necesitamos un vector que simultáneamente sea parte de estas últimas dos bases, es decir, un vector no nulo $\mathbf{v} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{T}$.

Si $\mathbf{v} \in \mathbb{S}$ entonces existen $a, b, c \in \mathbb{R}$ que cumplen

$$\mathbf{v} = a(1,1,0,2) + b(3,1,1,2) + c(2,0,1,0) = (a+3b+2c, a+b, b+c, 2a+2b).$$

Si además $\mathbf{v} \in \mathbb{T}$ entonces sus coordenadas verifican las ecuaciones de $\mathbb{T}$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} (a+3b+2c) + (b+c) + (2a+2b) & = & 0 \\ (a+3b+2c) + (a+b) + 2(b+c) + (2a+2b) & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3a & + & 6b & + & 3c & = & 0 \\ 4a & + & 8b & + & 4c & = & 0 \end{array}\right. \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 6 & 3 & 0 \\ 4 & 8 & 4 & 0 \end{array}\right) 3F_2 - 4F_1 \to F_2 \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

que tiene como soluciones $a = -2b - c$ con $b, c \in \mathbb{R}$ y

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (-2b-c)(1,1,0,2) + b(3,1,1,2) + c(2,0,1,0) \\ &= (b+c, -b-c, b+c, -2b-2c) \\ &= b(1,-1,1,-2) + c(1,-1,1,-2) \\ &= (b+c)(1,-1,1,-2) \end{aligned}$$

Concluimos que $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \langle (1,-1,1,-2) \rangle$.

Para completar la base extendemos $\{(1,-1,1,-2)\}$ a una base $B_{\mathbb{S}}$ de $\mathbb{S}$ y, por otro lado, extendemos $\{(1,-1,1,-2)\}$ a una base $B_{\mathbb{T}}$ de $\mathbb{T}$.

Como $\dim(\mathbb{S}) = \dim(\mathbb{T}) = 2$, solo nos queda agregar un vector de $\mathbb{S}$ que no sea múltiplo de $(1,-1,1,-2)$, por ejemplo $(1,1,0,2)$, y un vector de $\mathbb{T}$ que tampoco sea múltiplo de $(1,-1,1,-2)$, por ejemplo $(-1,0,0,1)$ (recordar que en a) hallamos generadores para $\mathbb{T}$). En caso que extender la base de $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$ a una base de $\mathbb{S}$ y a una base de $\mathbb{T}$ no nos resulte tan directo, podemos recurrir al método general para extender bases.

Respuesta: El conjunto $B = \{(1,1,0,2),(1,-1,1,-2),(-1,0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{S}+\mathbb{T}$ que contiene a la base $B_{\mathbb{S}} = \{(1,1,0,2),(1,-1,1,-2)\}$ de $\mathbb{S}$ y a la base $B_{\mathbb{T}} = \{(1,-1,1,-2),(-1,0,0,1)\}$ de $\mathbb{T}$.

Verificación:

Veamos que B es linealmente independiente:

$$a(1,1,0,2)+b(1,-1,1,-2)+c(-1,0,0,1) = (0,0,0,0)$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} a & + & b & - & c & = & 0 \\ a & - & b & & & = & 0 \\ & & b & & & = & 0 \\ 2a & - & 2b & + & c & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} F_2 - F_1 \to F_2 \\ F_4 - 2F_1 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \end{array} \right)$$
$$\begin{array}{c} 2F_3 + F_2 \to F_3 \\ F_4 - 2F_2 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) F_4 - F_3 \to F_4 \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Es sistema compatible determinado y, por lo tanto, B es linealmente independiente.

$(1,-1,1,-2) = -2(1,1,0,2) + 1(3,1,1,2) + 0(2,0,1,0) \in \mathbb{S}$. Con esto probamos que $B_{\mathbb{S}}$ es una base de $\mathbb{S}$ pues es linealmente independiente, porque lo es B, $\dim(\mathbb{S}) = 2$ y $(1,1,0,2),(1,-1,1,-2) \in \mathbb{S}$.

$(1,-1,1,-2)$ verifica las ecuaciones de $\mathbb{T}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 1 & & & + & 1 & - & 2 & = & 0 \\ 1 & - & 1 & + & 2 \cdot 1 & - & 2 & = & 0 \end{array} \right.$$

y entonces $B_{\mathbb{T}}$ es una base de $\mathbb{T}$ porque es linealmente independiente, pues B lo es, $\dim(\mathbb{T}) = 2$ y $(1,-1,1,-2),(-1,0,0,1) \in \mathbb{T}$.

Teorema de la dimensión para subespacios

En el ejemplo anterior, aunque tenemos dos subespacios de dimensión 2, resultó que la dimensión de la suma de los subespacios no es 4, debido a la presencia de una intersección de dimensión 1. Un ejemplo más elemental lo tenemos en $\mathbb{R}^3$ para el caso de dos subespacios que sean planos (dimensión 2): la suma de esos subespacios no puede ser de dimensión mayor a 3, y eso hace que la intersección sea de dimensión al menos 1.
En general, dados subespacios $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ de un e.v. $\mathbb{V}$, las dimensiones de $\mathbb{S}$, $\mathbb{T}$, $\mathbb{S}+\mathbb{T}$ y $\mathbb{S}\cap\mathbb{T}$ están relacionadas.

Teorema de la dimensión para subespacios

Sea $\mathbb{V}$ un e.v. de dimensión finita, y sean $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ subespacios de $\mathbb{V}$. Se cumple:

$$\dim(\mathbb{S}+\mathbb{T}) = \dim(\mathbb{S}) + \dim(\mathbb{T}) - \dim(\mathbb{S}\cap\mathbb{T}).$$

Demostración: Procedamos como en el último ítem del ejemplo anterior.

i) Obtenemos una base $B_{int} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ de $\mathbb{S}\cap\mathbb{T}$, con $k = \dim(\mathbb{S}\cap\mathbb{T})$. (Si $\mathbb{S}\cap\mathbb{T} = \{O\}$, $k = 0$ y no hay vectores en B_{int}.)

ii) Extendemos B_{int} a una base $B_{\mathbb{S}}$ de $\mathbb{S}$ con $C_{\mathbb{S}} = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_m\}$; o sea, $B_{\mathbb{S}} = B_{int} \cup C_{\mathbb{S}}$ y $\dim(\mathbb{S}) = k + m$.

iii) Extendemos B_{int} a una base $B_{\mathbb{T}}$ de $\mathbb{T}$ con $C_{\mathbb{T}} = \{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_n\}$; o sea, $B_{\mathbb{T}} = B_{int} \cup C_{\mathbb{T}}$ y $\dim(\mathbb{T}) = k + n$.

Observar que como $\mathbb{S} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_m\rangle$ y $\mathbb{T} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_n\rangle$, entonces

$$C = \{\underbrace{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_m, \overbrace{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k}^{}}_{\text{base de } \mathbb{S}}\overbrace{, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_n}^{\text{base de } \mathbb{T}}\} \quad \text{genera } \mathbb{S}+\mathbb{T}.$$

Para ver si C es linealmente independiente, planteamos al vector nulo como una combinación lineal de C:

$$a_1\mathbf{s}_1 + a_2\mathbf{s}_2 + \cdots + a_m\mathbf{s}_m + b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_k\mathbf{v}_k + c_1\mathbf{t}_1 + c_2\mathbf{t}_2 + \cdots + c_n\mathbf{t}_n = O$$

Veamos que necesariamente todos los coeficientes son nulos.
Sea $\mathbf{v} = a_1\mathbf{s}_1 + a_2\mathbf{s}_2 + \cdots + a_m\mathbf{s}_m \in \mathbb{S}$. Usando la igualdad anterior, podemos despejar a $\mathbf{v}$ en términos de los vectores de la base $B_{\mathbb{T}}$ de $\mathbb{T}$:

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{s}_1 + a_2\mathbf{s}_2 + \cdots + a_m\mathbf{s}_m = -b_1\mathbf{v}_1 - b_2\mathbf{v}_2 - \cdots - b_k\mathbf{v}_k - c_1\mathbf{t}_1 - c_2\mathbf{t}_2 - \cdots - c_n\mathbf{t}_n.$$

Entonces tenemos que $\mathbf{v} \in \mathbb{S}\cap\mathbb{T}$. Como B_{int} genera $\mathbb{S}\cap\mathbb{T}$, existen escalares $d_1, \ldots, d_k$ tales que $\mathbf{v} = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \cdots + d_k\mathbf{v}_k$ y tenemos que

$$\mathbf{v} - \mathbf{v} = (d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \cdots + d_k\mathbf{v}_k) - (a_1\mathbf{s}_1 + a_2\mathbf{s}_2 + \cdots + a_m\mathbf{s}_m) = O,$$

es decir, una combinación lineal de la base $B_{\mathbb{S}}$ que da el vector nulo. Como $B_{\mathbb{S}}$ es linealmente independiente, esto implica que $d_1, \ldots, d_k, a_1, \ldots, a_m$ deben ser todos 0. Entonces, reemplazando $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 0$ en la combinación lineal de C que da O nos queda:

$$b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_k\mathbf{v}_k + c_1\mathbf{t}_1 + c_2\mathbf{t}_2 + \cdots + c_n\mathbf{t}_n = O,$$

es decir, una combinación lineal de la base $B_{\mathbb{T}}$ que da el vector nulo. Como $B_{\mathbb{T}}$ es linealmente independiente, concluimos que $b_1, \ldots, b_k, c_1, \ldots, c_n$ deben ser todos 0.
En resumen, $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_k, c_1, \ldots, c_n$ deben ser todos iguales a 0; por lo tanto, C es linealmente independiente.

Concluimos que C es una base de $\mathbb{S} + \mathbb{T}$. La cantidad de elementos de C es

$$\dim(\mathbb{S} + \mathbb{T}) = k + m + n = (k + m) + (k + n) - k = \dim(\mathbb{S}) + \dim(\mathbb{T}) - \dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{T}).$$

Ejemplo 5. Sean $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ subespacios de $\mathbb{R}^6$ tales que $\dim(\mathbb{S}) = 3$ y $\dim(\mathbb{T}) = 4$. Verificar que $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} \neq \{O\}$.

Solución: Tenemos que ver que, bajo las condiciones del enunciado, independientemente de cuáles sean los subespacios $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$, su intersección no será el subespacio $\{O\}$.
Para esto, analicemos la dimensión de $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$ y veamos que no puede ser 0 (esto es equivalente a decir que $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$ no puede ser el subespacio $\{O\}$). El teorema de la dimensión nos dice que:

$$\dim(\mathbb{S} + \mathbb{T}) = \dim(\mathbb{S}) + \dim(\mathbb{T}) - \dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{T}).$$

De esta igualdad podemos despejar $\dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{T})$:

$$\dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{T}) = \dim(\mathbb{S}) + \dim(\mathbb{T}) - \dim(\mathbb{S} + \mathbb{T}).$$

Sabemos que $\dim(\mathbb{S}) = 3$ y $\dim(\mathbb{T}) = 4$, aunque no conocemos $\dim(\mathbb{S} + \mathbb{T})$. Lo que sí sabemos es que $\mathbb{S} + \mathbb{T}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^6$; por lo tanto, $\dim(\mathbb{S} + \mathbb{T}) \leq 6$. Entonces,

$$\dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{T}) = 3 + 4 - \dim(\mathbb{S} + \mathbb{T}) = 7 - \dim(\mathbb{S} + \mathbb{T}) \geq 7 - 6 = 1.$$

Como $\dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{T}) \geq 1$, entonces $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} \neq \{O\}$.

Ejemplo 6. Dados los subespacios

$$\mathbb{S} = \langle (1, 0, 1), (1, 1, 1) \rangle \quad \text{y} \quad \mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$$

y el vector $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$, decidir si $\mathbb{S} + \mathbb{T} = \mathbb{R}^3$ y hallar, si es posible, dos vectores distintos $\mathbf{s}, \mathbf{s}'$ de $\mathbb{S}$ y dos vectores $\mathbf{t}, \mathbf{t}'$ de $\mathbb{T}$ que verifiquen $\mathbf{s} + \mathbf{t} = \mathbf{v} = \mathbf{s}' + \mathbf{t}'$.

Solución: Calculemos $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$: si $\mathbf{w} \in \mathbb{S}$,

$$\mathbf{w} = a(1, 0, 1) + b(1, 1, 1) = (a + b, b, a + b)$$

y si además $\mathbf{w} \in \mathbb{T}$, se cumple

$$(a + b) - b + (a + b) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b = -2a,$$

con lo cual $\mathbf{w} = (-a, -2a, a) = a(-1, -2, -1)$, con $a \in \mathbb{R}$. Entonces $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \langle (-1, -2, -1) \rangle$ y $\dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{T}) = 1$.

Además, $\dim(\mathbb{S}) = 2$ pues $\{(1,0,1),(1,1,1)\}$ es linealmente independiente. También tenemos que $\dim(\mathbb{T}) = \dim(\mathbb{R}^3) - 1 = 2$, dado que $\mathbb{T}$ está definido por una ecuación en $\mathbb{R}^3$.
Entonces vale

$$\dim(\mathbb{S}+\mathbb{T}) = \dim(\mathbb{S}) + \dim(\mathbb{T}) - \dim(\mathbb{S}\cap\mathbb{T}) = 2+2-1 = 3$$

y, como $\mathbb{S}+\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^3$, podemos concluir que $\mathbb{S}+\mathbb{T} = \mathbb{R}^3$.

Observar que $(1,0,1) \in \mathbb{S}$ y no es múltiplo de $(-1,-2,-1)$. Por otro lado, $(0,1,1) \in \mathbb{T}$, ya que verifica la ecuación $0-1+1=0$, y no es múltiplo de $(-1,-2,-1)$.
Con esto podemos formar una base de $\mathbb{S}+\mathbb{T} = \mathbb{R}^3$ que contiene una base de $\mathbb{S}$ y una base de $\mathbb{T}$:

$$B = \{\underbrace{(1,0,1),\overbrace{(-1,-2,-1)}_{}}_{\text{base de } \mathbb{S}}\!\!{}^{\text{base de } \mathbb{T}}, (0,1,1)\}$$

$$B = \{\underbrace{(1,0,1), (-1,-2,-1)}_{\text{base de } \mathbb{S}}, \ldots\} ,\quad \{\ldots, \overbrace{(-1,-2,-1), (0,1,1)}^{\text{base de } \mathbb{T}}\}$$

Para hallar los vectores $\mathbf{s}, \mathbf{s}', \mathbf{t}$ y $\mathbf{t}'$ planteamos

$$\mathbf{v} = (1,-1,2) = a(1,0,1) + b(-1,-2,-1) + c(0,1,1)$$

que tiene única solución $a = 2, b = 1, c = 1$ pues B es una base de $\mathbb{R}^3$ (podemos hallar esta solución resolviendo el sistema lineal que se obtiene igualando coordenadas).
Tenemos:

$$\mathbf{v} = (1,-1,2) = \underbrace{2(1,0,1) + 1(-1,-2,-1)}_{\in\mathbb{S}} + 1(0,1,1), \qquad \overbrace{1(-1,-2,-1) + 1(0,1,1)}^{\in\mathbb{T}}$$

Como $(1,0,1)$ y $(-1,-2,-1)$ pertenecen a $\mathbb{S}$ y $(0,1,1)$ a $\mathbb{T}$, tenemos:

$\mathbf{s} = 2(1,0,1) + 1(-1,-2,-1) = (1,-2,1) \in \mathbb{S}$ y $\mathbf{t} = 1(0,1,1) \in \mathbb{T}$ que cumplen $\mathbf{s}+\mathbf{t} = (1,-1,2) = \mathbf{v}$.

También podemos considerar $(-1,-2,-1)$ como vector de $\mathbb{T}$ y obtener otro par de vectores:

$\mathbf{s}' = 2(1,0,1) = (2,0,2) \in \mathbb{S}$ y $\mathbf{t}' = 1(-1,-2,-1) + 1(0,1,1) = (-1,-1,0) \in \mathbb{T}$ que cumplen $\mathbf{s}'+\mathbf{t}' = \mathbf{v}$.

Respuesta: $\mathbb{S}+\mathbb{T} = \mathbb{R}^3$ $\mathbf{s} = (1,-2,1) \in \mathbb{S}$, $\mathbf{t} = (0,1,1) \in \mathbb{T}$, $\mathbf{s}' = (2,0,2) \in \mathbb{S}$ y $\mathbf{t}' = (-1,-1,0) \in \mathbb{T}$ cumplen $\mathbf{s}+\mathbf{t} = (1,-1,2) = \mathbf{s}'+\mathbf{t}'$.

Verificación:

$\mathbf{s} = (1,-2,1) \in \mathbb{S}: \quad (1.-2,1) = 3(1,0,1) - 2(1,1,1)$

$\mathbf{t} = (0,1,1) \in \mathbb{T}: \quad$ verifica $0-1+1=0$

$\mathbf{s}+\mathbf{t} = (1.-2,1) + (0,1,1) = (1,-1,2) = \mathbf{v}$

$\mathbf{s}' = (2,0,2) \in \mathbb{S}: \quad (2,0,2) = 2(1,0,1) + 0(1,1,1)$

$\mathbf{t}' = (-1,-1,0) \in \mathbb{T}: \quad$ verifica $-1-(-1)+0=0$

$\mathbf{s}'+\mathbf{t}' = (2,0,2) + (-1,-1,0) = (1,-1,2) = \mathbf{v}$

Observación: En el ejemplo anterior, en realidad hay infinitos pares de vectores para $\mathbf{s} \in \mathbb{S}$ y $\mathbf{t} \in \mathbb{T}$ que verifican $\mathbf{s} + \mathbf{t} = \mathbf{v}$, pues a los vectores de $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$ podemos descomponerlos como parte de $\mathbb{S}$ y de $\mathbb{T}$. Por ejemplo:

$$\mathbf{v} = (1,-1,2) = \underbrace{2(1,0,1) + c(-1,-2,-1)}_{\in\mathbb{S}} + \overbrace{(1-c)(-1,-2,-1) + 1(0,1,1)}^{\in\mathbb{T}} \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

Esto no puede pasar si $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \{O\}$.

Suma directa

Vamos a estudiar ahora la suma de dos subespacios en el caso particular en que la intersección es el subespacio $\{O\}$.

Suma directa

Si $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ son subespacios de un e.v. $\mathbb{V}$ y se cumple que $\mathbb{V} = \mathbb{S} + \mathbb{T}$ y $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \{O\}$, decimos que $\mathbb{V}$ es la *suma directa* de $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ y escribimos $\mathbb{V} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{T}$.

Propiedad

Sean $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ subespacios de un e.v. $\mathbb{V}$. Si $\mathbb{V} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{T}$, para cada $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ existen únicos vectores $\mathbf{s} \in \mathbb{S}$ y $\mathbf{t} \in \mathbb{T}$ que verifican $\mathbf{v} = \mathbf{s} + \mathbf{t}$.

Observación: El teorema de la dimensión aplicado en el caso de suma directa dice que

$$\dim(\mathbb{S} \oplus \mathbb{T}) = \dim(\mathbb{S}) + \dim(\mathbb{T})$$

pues $\dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{T}) = 0$. De esto se deduce que, en este caso, al unir una base de $\mathbb{S}$ y una base de $\mathbb{T}$ resulta un conjunto linealmente independiente.

Ejemplo 7. Dados $\mathbb{S} = \langle(1,1,1,1),(1,2,1,2),(3,1,3,1)\rangle$ y $\mathbb{H} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_3 = 0\}$, hallar, si es posible, dos subespacios distintos $\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2 \subset \mathbb{R}^4$ que verifiquen

$$\mathbb{S} \oplus \mathbb{T}_1 = \mathbb{H} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{T}_2.$$

Solución: Recordar que $\mathbb{S} + \mathbb{T}_1$ incluye tanto a $\mathbb{S}$ como a $\mathbb{T}_1$ por lo que se debe cumplir $\mathbb{S} \subset \mathbb{H}$, de lo contrario no hay solución. Verifiquémoslo con los generadores de $\mathbb{S}$:

$(1,1,1,1) \in \mathbb{H}: \quad 1 - 1 = 0$

$(1,2,1,2) \in \mathbb{H}: \quad 1 - 1 = 0$

$(3,1,3,1) \in \mathbb{H}: \quad 3 - 3 = 0$

y entonces $\mathbb{S} \subset \mathbb{H}$.

Calculemos dimensiones de $\mathbb{S}$ y $\mathbb{H}$ para determinar qué dimensión deben tener $\mathbb{T}_1$ y $\mathbb{T}_2$:

$\dim(\mathbb{H}) = \dim(\mathbb{R}^4) - 1 = 3$, ya que $\mathbb{H}$ está definido por una ecuación.

Para calcular la dimensión de $\mathbb{S}$, analizamos la independencia lineal y extraemos una base del conjunto de generadores $\{(1,1,1,1),(1,2,1,2),(3,1,3,1)\}$:

$$a(1,1,1,1) + b(1,2,1,2) + c(3,1,3,1) = (0,0,0,0) \iff \begin{cases} a + b + 3c = 0 \\ a + 2b + c = 0 \\ a + b + 3c = 0 \\ a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 - F_1 \to F_2 \\ F_3 - F_1 \to F_3 \\ F_4 - F_1 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) F_4 - F_2 \to F_4 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Entonces $\{(1,1,1,1),(1,2,1,2)\}$ es una base de $\mathbb{S}$ y $\dim(\mathbb{S}) = 2$.

El teorema de la dimensión nos dice que

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{H}) = \dim(\mathbb{S} \oplus \mathbb{T}_1) &= \dim(\mathbb{S}) + \dim(\mathbb{T}_1) - \dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{T}_1) \\ 3 &= 2 + \dim(\mathbb{T}_1) - 0 \end{aligned}$$

y tenemos que $\dim(\mathbb{T}_1) = 1$. De la misma manera, $\dim(\mathbb{T}_2) = 1$.
Si buscamos generadores para un subespacio $\mathbb{T}_1$ que cumpla $\mathbb{S} \oplus \mathbb{T}_1 = \mathbb{H}$, necesitamos un vector de $\mathbb{H}$ (porque $\mathbb{T}_1 \subset \mathbb{H}$ y $\dim(\mathbb{T}_1) = 1$) que forme un conjunto linealmente independiente junto con los vectores de una base de $\mathbb{S}$, de modo que la suma de $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}_1$ sea una suma directa. En otras palabras, vamos a extender una base de $\mathbb{S}$ a una base de $\mathbb{H}$, y el vector con el que hagamos esto generará el subespacio $\mathbb{T}_1$.
Tomemos una solución de la ecuación de $\mathbb{H}$, por ejemplo $(0,1,0,0)$, que cumple $0 - 0 = 0$, y veamos si $C = \{(1,1,1,1),(1,2,1,2),(0,1,0,0)\}$ es un conjunto linealmente independiente:

$$a(1,1,1,1) + b(1,2,1,2) + c(0,1,0,0) = (0,0,0,0) \iff \begin{cases} a + b = 0 \\ a + 2b + c = 0 \\ a + b = 0 \\ a + 2b = 0 \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 - F_1 \to F_2 \\ F_3 - F_1 \to F_3 \\ F_4 - F_1 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) F_4 - F_2 \to F_4 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema escompatible determinado; por lo tanto, C es linealmente independiente y resulta una base de $\mathbb{S} + \mathbb{T}_1$, con $\mathbb{T}_1 = \langle (0,1,0,0) \rangle$.
Para hallar $\mathbb{T}_2$ solo necesitamos otro vector de $\mathbb{H}$ que no sea múltiplo de $(0,1,0,0)$, y que nuevamente forme un conjunto linealmente independendiente junto con la base de $\mathbb{S}$. Tomemos,

por ejemplo $(1,0,1,1)$, que cumple $1-1=0$ y veamos si $C' = \{(1,1,1,1),(1,2,1,2),(1,0,1,1)\}$ es linealmente independiente:

$$a(1,1,1,1)+b(1,2,1,2)+c(1,0,1,1)=(0,0,0,0) \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & c & = & 0 \\ a & + & 2b & & & = & 0 \\ a & + & b & + & c & = & 0 \\ a & + & 2b & + & c & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 - F_1 \to F_2 \\ F_3 - F_1 \to F_3 \\ F_4 - F_1 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) F_4 - F_2 \to F_4 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema es compatible determinado y, por lo tanto, C' es linealmente independiente y resulta una base de $\mathbb{S}+\mathbb{T}_2$, con $\mathbb{T}_2 = \langle(1,0,1,1)\rangle$.

$\boxed{\text{Respuesta: } \mathbb{T}_1 = \langle(0,1,0,0)\rangle \text{ y } \mathbb{T}_2 = \langle(1,0,1,1)\rangle \text{ cumplen lo pedido: } \mathbb{S}\oplus\mathbb{T}_1 = \mathbb{H} = \mathbb{S}\oplus\mathbb{T}_2.}$

Verificación:

Ya verificamos que $\mathbb{S} \subset \mathbb{H}$.

$\mathbb{T}_1 \subset \mathbb{H}$: $(0,1,0,0)$ verifica $0-0=0$

Como $C = \{(1,1,1,1),(1,2,1,2),(0,1,0,0)\}$ es linealmente independiente y genera $\mathbb{S}+\mathbb{T}_1$, entonces $\dim(\mathbb{S}+\mathbb{T}_1)=3$ y se cumple $\mathbb{H}=\mathbb{S}+\mathbb{T}_1$.

Además, $\dim(\mathbb{S}\cap\mathbb{T}_1) = \dim(\mathbb{S}+\mathbb{T}_1) - \dim(\mathbb{S}) - \dim(\mathbb{T}_1) = 3-2-1=0$, lo que asegura que la suma es directa.

$\mathbb{T}_2 \subset \mathbb{H}$: $(1,0,1,1)$ verifica $1-1=0$

Como $C' = \{(1,1,1,1),(1,2,1,2),(1,0,1,1)\}$ es linealmente independiente y genera $\mathbb{S}+\mathbb{T}_2$, nuevamente podemos deducir que $\dim(\mathbb{S}+\mathbb{T}_2)=3$ y se cumple $\mathbb{H}=\mathbb{S}+\mathbb{T}_2$.

Además, que $\dim(\mathbb{S}\cap\mathbb{T}_2) = \dim(\mathbb{S}+\mathbb{T}_2) - \dim(\mathbb{S}) - \dim(\mathbb{T}_2) = 3-2-1=0$, con lo cual la suma es directa.

$\mathbb{T}_1 \neq \mathbb{T}_2$, pues no existe $k\in\mathbb{R}$ tal que $(0,1,0,0)=k(1,0,1,1)$.