Extracción y extensión de bases

Dado un conjunto C de vectores en un subespacio $\mathbb{S}$ de un espacio vectorial $\mathbb{V}$, *extraer* de C una base de $\mathbb{S}$ significa encontrar un subconjunto de C que sea una base de $\mathbb{S}$, es decir, que genere el subespacio $\mathbb{S}$ y sea linealmente independiente.
Para poder hacer esto, es necesario que C sea un conjunto de generadores de $\mathbb{S}$; de lo contrario, ningún subconjunto de C podrá generar $\mathbb{S}$.

Ejemplo 1. Dado el subespacio $\mathbb{S} = \langle(-1,1,2),(1,2,1),(-1,4,5)\rangle$ de $\mathbb{R}^3$, extraer del conjunto $C = \{(-1,1,2),(1,2,1),(-1,4,5)\}$ una base de $\mathbb{S}$.

Solución: Observar que C es un conjunto de generadores de $\mathbb{S}$. Podemos ver que C no es un conjunto linealmente independiente:

$$a(-1,1,2)+b(1,2,1)+c(-1,4,5)=(0,0,0)$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -a & + & b & - & c & = & 0 \\ a & + & 2b & + & 4c & = & 0 \\ 2a & + & b & + & 5c & = & 0 \end{array}\right. \quad \leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

Escalonamos:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2+F_1 \to F_2 \\ F_3+2F_1 \to F_3 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) F_3-F_2 \to F_3 \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

y vemos que el sistema es compatible indeterminado. El conjunto C, entonces, no es una base de $\mathbb{S}$.
Para extraer una base tenemos que quitar elementos de C.
Volvamos a la última matriz:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{-1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sabemos que si les damos valores a las incógnitas que corresponden a las columnas donde *no* están los lugares principales de la matriz (en este caso, a la incógnita c), podemos despejar los valores de las restantes y hallar una solución del sistema. Por ejemplo, si $c=1$, de la segunda ecuación obtenemos $b=-1$ y, reemplazando estos valores en la primera ecuación, despejamos $a=-2$. La solución del sistema que obtuvimos nos da una combinación lineal

$$(-2)(-1,1,2)+(-1)(1,2,1)+1(-1,4,5)=(0,0,0)$$

que permite despejar el vector $(-1,4,5)$, que es el que está multiplicado por el coeficiente al que le dimos el valor $c=1$, en términos de los otros dos (esto podremos hacerlo siempre, independientemente de cuáles sean los valores de a y b obtenidos en la solución con $c=1$; en este caso, como a y b no son 0, también podríamos despejar cualquiera de los otros dos vectores):

$$(-1,4,5)=2(-1,1,2)+1.(1,2,1).$$

Esto significa que

$$(-1,4,5) \in \langle(-1,1,2),(1,2,1)\rangle\,.$$

Recordando que $\langle(-1,1,2),(1,2,1),(-1,4,5)\rangle$ es el menor subespacio que contiene a los vectores de $C = \{(-1,1,2),(1,2,1),(-1,4,5)\}$, resulta que

$$\mathbb{S} = \langle(-1,1,2),(1,2,1),(-1,4,5)\rangle \subset \langle(-1,1,2),(1,2,1)\rangle\,,$$

y como también vale que

$$\langle(-1,1,2),(1,2,1)\rangle \subset \langle(-1,1,2),(1,2,1),(-1,4,5)\rangle = \mathbb{S},$$

concluimos que $C' = \{(-1,1,2),(1,2,1)\}$ genera $\mathbb{S}$.
Para ver si C' es un conjunto linealmente independiente planteamos

$$a(-1,1,2)+b(1,2,1) = (0,0,0) \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} -a & + & b & = & 0\\ a & + & 2b & = & 0\\ 2a & + & b & = & 0\end{array}\right. \leftrightarrow \left(\begin{array}{rr|r} -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{array}\right)$$

Si usamos los mismos pasos para escalonar que en el sistema para los vectores de C, obtenemos

$$\left(\begin{array}{rr|r} -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{array}\right) \begin{array}{c} F_2+F_1 \to F_2\\ F_3+2F_1 \to F_3\end{array} \left(\begin{array}{rr|r} -1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 3 & 0\end{array}\right) F_3-F_2 \to F_3 \left(\begin{array}{rr|r} -1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

El sistema es compatible determinado y, por lo tanto, el conjunto $C' = \{(-1,1,2),(1,2,1)\}$ es linealmente independiente.
En resumen, C' genera $\mathbb{S}$ y es linealmente independiente; entonces, C' es una base de $\mathbb{S}$.

Respuesta: El conjunto $\{(-1,1,2),(1,2,1)\}$ es una base de $\mathbb{S} = \langle(-1,1,2),(1,2,1),(-1,4,5)\rangle$.

Observación: El último sistema que escalonamos equivale a ignorar al tercer vector (el que quitamos) en el planteo para el análisis de la independencia lineal de C:

$$a(-1,1,2)+b(1,2,1)+c(-1,4,5) = (0,0,0) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -a & + & b & - & c & = & 0\\ a & + & 2b & + & 4c & = & 0\\ 2a & + & b & + & 5c & = & 0\end{array}\right.$$

Como usamos los mismos pasos para escalonar en ambos casos, obtenemos

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 4 & 0\\ 2 & 1 & 5 & 0\end{array}\right) \begin{array}{c} F_2+F_1 \to F_2\\ F_3+2F_1 \to F_3\end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 3 & 0\\ 0 & 3 & 3 & 0\end{array}\right) F_3-F_2 \to F_3 \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Ignorando la tercera columna conseguimos el sistema compatible determinado que nos mostró que C' es una base de $\mathbb{S}$.
Además, la matriz del sistema para el problema de la independencia lineal planteado con C' tiene el mismo rango que la matriz del sistema para el problema planteado con C.

Esto sugiere una forma más rápida de extraer una base a partir de un conjunto de generadores:

Ejemplo 2. Dado el conjunto $C = \{(1,2,1,-1),(-2,1,3,1),(0,5,5,-1),(1,-1,1,-1)\}$, extraer una base del subespacio $\mathbb{S}$ generado por C.

Solución: Ya sabemos que C genera $\mathbb{S}$. Veamos si es un conjunto linealmente independiente:

$$a(1,2,1,-1) + b(-2,1,3,1) + c(0,5,5,-1) + d(1,-1,1,-1) = (0,0,0,0)$$

$$\begin{cases} a - 2b + d = 0 \\ 2a + b + 5c - d = 0 \\ a + 3b + 5c + d = 0 \\ -a + b - c - d = 0 \end{cases} \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 - 2F_1 \to F_2 \\ F_3 - F_1 \to F_3 \\ F_4 + F_1 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F_3 - F_2 \to F_3 \\ 5F_4 + F_2 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) F_4 + F_3 \to F_4 \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Obtenemos un sistema compatible indeterminado y, por lo tanto, el conjunto C es linealmente dependiente.

Notar que la última ecuación no nula, $3d = 0$, nos dice que, aunque el sistema tiene soluciones no triviales que relacionan a los vectores, en todas ellas el valor de d es *cero*. Esto significa que en realidad las relaciones existentes involucran a los otros vectores pero no a $(1,-1,1,-1)$, que es el vector asociado a la incógnita d en la combinación lineal. El vector $(1,-1,1,-1)$ ***no es*** una combinación lineal de los otros y si lo quitamos, el subespacio generado se achica.

Como en el ejemplo anterior, si consideramos las columnas que contienen a los lugares principales de la matriz (es decir, los primeros elementos distintos de 0 de cada fila)

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{5} & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

se forma un sistema compatible determinado. Por lo tanto, los vectores asociados a esas columnas forman un subconjunto $C' = \{(1,2,1,-1), (-2,1,3,1), (1,-1,1,-1)\}$ de C que es linealmente independiente.

Para ver que el vector $(0,5,5,-1)$ que suprimimos es combinación lineal de C', podemos hallar una solución no trivial del sistema con $c = 1$ despejando las demás incógnitas a partir de las ecuaciones del sistema escalonado: $d = 0$, $b = -1$ y $a = -2$. Obtenemos:

$$(-2)(1,2,1,-1) + (-1)(-2,1,3,1) + 1\,(0,5,5,-1) + 0(1,-1,1,-1) = (0,0,0,0)$$

De esta combinación lineal con $c = 1$, despejamos el vector en función de los de C':

$$(0,5,5,-1) = 2(1,2,1,-1) + (-2,1,3,1).$$

Entonces, $(0,5,5,-1) \in \langle (1,2,1,-1), (-2,1,3,1), (1,-1,1,-1) \rangle$.

Con el mismo razonamiento que en el ejemplo anterior, deducimos que C' genera el mismo subespacio que C.

Respuesta: $\{(1,2,1,-1), (-2,1,3,1), (1,-1,1,-1)\}$ es una base de $\mathbb{S}$ extraída de C.

Si M es la matriz del sistema planteado al analizar la independencia lineal de un conjunto C de generadores del subespacio $\mathbb{S}$, el subconjunto B de C formado por los vectores correspondientes a las columnas que contienen a los *lugares principales* de una matriz escalonada obtenida a partir de M es una base de $\mathbb{S}$.
La dimensión del subespacio $\mathbb{S}$ es el rango de la matriz M.

La base obtenida a partir de las columnas correspondientes a los lugares principales de la matriz escalonada, en general no es la única base que podemos extraer de C. Por ejemplo, en el caso anterior podemos elegir también las columnas 1, 3 y 4,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Podemos ver que estas columnas dan lugar a un sistema compatible determinado. Esto nos muestra que el conjunto $\{(1,2,1,-1),(0,5,5,-1),(1,-1,1,-1)\}$ es linealmente independiente y, como $\dim(\mathbb{S}) = 3$, es una base de $\mathbb{S}$.
Si elegimos las columnas 2, 3 y 4,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

la matriz aún no está escalonada. Para determinar si los vectores correspondientes forman una base de $\mathbb{S}$ tendríamos que escalonarla y ver si el sistema es compatible determinado para asegurar, como en el caso anterior, la independencia lineal de los vectores.

Ejemplo 3. Extraer de $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ si es posible, dos bases del subespacio $\mathbb{S}$ de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ que genera.

Solución. Como antes, vamos a analizar la independencia lineal de C y, a partir de este planteo, determinar subconjuntos de C que sean bases del subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ que genera:

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} a & & & - & c & + & d & & & = & 0 \\ & & b & + & c & & & + & e & = & 0 \\ & & b & + & c & & & + & e & = & 0 \\ -a & & & + & c & & & + & e & = & 0 \end{array}\right. \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Escalonamos:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_3 - F_2 \to F_3 \\ F_4 + F_1 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$F_3 \leftrightarrow F_4 \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Los lugares principales de la matriz escalonada están en las columnas 1, 2 y 4:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} \boxed{1} & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Como consecuencia, las matrices 1, 2 y 4 del conjunto C forman una base del subespacio $\mathbb{S}$: $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Entonces, $\dim(\mathbb{S}) = 3$.
Para obtener otra base de $\mathbb{S}$, basta elegir otras 3 columnas que den lugar a una matriz de rango 3. Por ejemplo, vemos que las columnas 1, 3 y 5 forman una matriz escalonada de rango 3

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

y, por lo tanto, los elementos correspondientes del conjunto C son linealmente independientes. Deducimos que $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es otra base de $\mathbb{S}$.

Respuesta:
$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ y $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
son dos bases de $\mathbb{S}$ extraídas de C.

Ejemplo 4. Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una base de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ y sea $C = \{2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, -3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3, -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3\}$. Extraer de C, si es posible, dos bases distintas del subespacio $\mathbb{S} = \langle 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, -3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3, -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 \rangle$.

Solución: Notar que C es un conjunto de generadores de $\mathbb{S}$. Veamos si C es linealmente independiente

$$a(2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + b(-3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3) + c(-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) = O$$

Usando propiedades de los espacios vectoriales desarrollamos

$$2a\mathbf{v}_1 + a\mathbf{v}_2 - 3b\mathbf{v}_2 + 2b\mathbf{v}_3 - c\mathbf{v}_1 + c\mathbf{v}_2 - c\mathbf{v}_3 = O$$

y reagrupamos:

$$(2a - c)\mathbf{v}_1 + (a - 3b + c)\mathbf{v}_2 + (2b - c)\mathbf{v}_3 = O$$

Como $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es una base de $\mathbb{V}$, el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es linealmente independiente, es decir, si para $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 = O$$

entonces, necesariamente, debe valer

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0.$$

Esto nos conduce al sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2a & & & - & c & = & 0 \\ a & - & 3b & + & c & = & 0 \\ & & 2b & - & c & = & 0 \end{array}\right. \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Escalonamos

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) 2F_2 - F_1 \to F_2 \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) 3F_3 + F_2 \to F_3 \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Eligiendo las columnas 1 y 2, que contienen a los lugares principales de la matriz,

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

tenemos que $B_1 = \{2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, -3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3\}$ es una base de $\mathbb{S}$ y $\dim(\mathbb{S}) = 2$.
Seleccionando las columnas 1 y 3,

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

obtenemos también una matriz de rango 2, con lo cual $B_2 = \{2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3\}$ es otra base de $\mathbb{S}$.

Respuesta: $B_1 = \{2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, -3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3\}$ y $B_2 = \{2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3\}$ son bases de $\mathbb{S}$ extraídas de C.

Ejemplo 5. Sean $\mathbb{S} = \langle (2,2,2,2), (1,3,0,2) \rangle$ y $\mathbb{H} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}$. Hallar, si es posible, una base de $\mathbb{H}$ que contenga una base de $\mathbb{S}$.

Solución: Como los vectores de una base pertenecen al subespacio que generan, si queremos que una base de $\mathbb{S}$ sea parte de una base de $\mathbb{H}$, necesitamos que los vectores de la base de $\mathbb{S}$ pertenezcan a $\mathbb{H}$ y, por lo tanto, el subespacio $\mathbb{S}$ debe estar contenido en $\mathbb{H}$.
Podemos verificar que esto ocurre viendo que los generadores de $\mathbb{S}$ cumplen la ecuación de $\mathbb{H}$:

$(2,2,2,2) \in \mathbb{H}: \quad -3 \cdot 2 + 2 + 2 \cdot 2 = 0$

$(1,3,0,2) \in \mathbb{H}: \quad -3 \cdot 1 + 3 + 2 \cdot 0 = 0$

Entonces $\mathbb{S} \subset \mathbb{H}$.

Para obtener una base de $\mathbb{S}$ podemos extraerla del conjunto de sus generadores. Como ***solo son dos y no nulos***, para ver que forman un conjunto linealmente independiente alcanza con ver que no son múltiplos: si $k \in \mathbb{R}$ cumple $(2,2,2,2) = k(1,3,0,2)$, tenemos el absurdo $2 = 0$ en la tercera coordenada. Tenemos entonces que $B_{\mathbb{S}} = \{(2,2,2,2),(1,3,0,2)\}$ es una base de $\mathbb{S}$ y $\dim(\mathbb{S}) = 2$.

Podemos encontrar una base de $\mathbb{H}$ resolviendo la ecuación que lo describe pero difícilmente encontremos entre los generadores a los vectores de $B_{\mathbb{S}}$.
Lo que haremos para resolver el problema planteado es *extender* la base $B_{\mathbb{S}}$ a una base de $\mathbb{H}$, esto es, agregar vectores de $\mathbb{H}$ hasta alcanzar un conjunto linealmente independiente con una cantidad de vectores igual a la dimensión de $\mathbb{H}$.
Para saber cuántos vectores necesitamos agregar, calculamos la dimensión de $\mathbb{H}$. Al ser un subespacio de $\mathbb{R}^4$ dado por ecuaciones vale: $\dim(\mathbb{H}) = 4 - \operatorname{rg}(A)$, donde $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz asociada al sistema (en este caso, una ecuación no nula) que define a $\mathbb{H}$. Como $\operatorname{rg}(A) = 1$ tenemos que $\dim(\mathbb{H}) = 3$.

Entonces, para extender la base $B_{\mathbb{S}}$ a una base de $\mathbb{H}$ necesitamos agregar un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{H}$ tal que el conjunto $B = \{(2,2,2,2),(1,3,0,2),\mathbf{v}\}$ sea linealmente independiente.
Tomando los valores $x_1 = 1, x_3 = 1, x_4 = 2$, de la ecuación de $\mathbb{H}$ podemos despejar $x_2 = 1$, que nos da la solución $(1,1,1,2)$.

Verificación $(1,1,1,2) \in \mathbb{H}$: $\quad -3 \cdot 1 + 1 + 2 \cdot 1 = 0$.

Para ver si nos queda un conjunto linealmente independiente planteamos

$$a(2,2,2,2) + b(1,3,0,2) + c(1,1,1,2) = (0,0,0,0)$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2a & + & b & + & c & = & 0 \\ 2a & + & 3b & + & c & = & 0 \\ 2a & & & + & c & = & 0 \\ 2a & + & 2b & + & 2c & = & 0 \end{array} \right. \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} F_2 - F_1 \to F_2 \\ F_3 - F_1 \to F_3 \\ F_4 - F_1 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} 2F_3 + F_2 \to F_3 \\ 2F_4 - F_2 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) F_3 \leftrightarrow F_4 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Como el sistema es compatible determinado, el conjunto es linealmente independiente.

Respuesta: $B = \{(2,2,2,2),(1,3,0,2),(1,1,1,2)\}$ es una base del subespacio $\mathbb{H}$ que contiene a $B_{\mathbb{S}} = \{(2,2,2,2),(1,3,0,2)\}$, que es una base de $\mathbb{S}$.

Para poder extender un conjunto a una base de un subespacio hay que partir de un conjunto linealmente independiente que esté contenido en el subespacio.
El problema de extender una base de un subespacio $\mathbb{S}$ a una base de un subespacio $\mathbb{H}$ tiene solución si y solo si $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{H}$.

En el ejemplo, para extender una base $B_{\mathbb{S}}$ de $\mathbb{S}$ a una base de $\mathbb{H}$, elegimos un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{H}$ arbitrario que resultó formar un conjunto linealmente independiente junto con los de $B_{\mathbb{S}}$. Pero podría haber resultado un conjunto linealmente dependiente.
En forma más general podemos agregar una base completa de $\mathbb{H}$ al conjunto $B_{\mathbb{S}}$ y de ahí extraer la base que necesitamos. Hagamos esto en el ejemplo.

En primer lugar, buscamos una base de $\mathbb{H}$. Despejando x_2 en la ecuación de $\mathbb{H}$ para escribir en forma paramétrica las soluciones, obtenemos la base $B_{\mathbb{H}} = \{(1,3,0,0),(0,-2,1,0),(0,0,0,1)\}$. Ahora, del conjunto $C = B_{\mathbb{S}} \cup B_{\mathbb{H}} = \{(2,2,2,2),(1,3,0,2),(1,3,0,0),(0,-2,1,0),(0,0,0,1)\}$ extraemos una base, tomando la precaución de dejar en ella los vectores de $B_{\mathbb{S}}$ (observamos que siempre podremos hacer esto debido a que los vectores de $B_{\mathbb{S}}$ son linealmente independientes):

$$a(2,2,2,2)+b(1,3,0,2)+c(1,3,0,0)+d(0,-2,1,0)+e(0,0,0,1)=(0,0,0,0)$$

$$\iff \begin{cases} 2a + b + c = 0 \\ 2a + 3b + 3c - 2d = 0 \\ 2a + d = 0 \\ 2a + 2b + e = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 - F_1 \to F_2 \\ F_3 - F_1 \to F_3 \\ F_4 - F_1 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} 2F_3 + F_2 \to F_3 \\ 2F_4 - F_2 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) F_3 \leftrightarrow F_4 \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Para extraer de C una base que contenga a $B_{\mathbb{S}}$ usamos las dos primeras columnas y una de las otras tres (en este caso, con cualquiera de las tres se obtiene una matriz de rango $\dim(\mathbb{H}) = 3$); por ejemplo, las columnas correspondientes a los lugares principales:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Entonces, $\{(2,2,2,2),(1,3,0,2),(1,3,0,0)\}$ es otra base de $\mathbb{H}$ que contiene una base de $\mathbb{S}$.

Ejemplo 6. Extender, si es posible, el conjunto $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ a una base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Solución: El conjunto $C_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es linealmente independiente, ya que tiene sólo dos elementos y no son uno múltiplo del otro. Esto nos asegura que podemos extenderlo a una base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
Como $\dim(\mathbb{R}^{2\times 2}) = 4$, para conseguir una base debemos agregar 2 elementos a C_0 de modo que el nuevo conjunto de 4 elementos continúe siendo linealmente independiente. Para hacer esto, podemos probar con cualquier matriz de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, pero podría resultar un conjunto linealmente dependiente y tendríamos que volver a empezar eligiendo otra matriz, con la que nos podría pasar lo mismo, y así sucesivamente.
Una manera sistemática de resolver el problema es agregar elementos de una *base* de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, por ejemplo, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
Veamos si al agregar a C_0 el primer elemento de B nos queda un conjunto linealmente independiente:

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a+b+c &= 0 \\ b &= 0 \\ 0 &= 0 \\ -a &= 0 \end{cases}$$

La única solución del sistema es $a = 0$, $b = 0$ y $c = 0$. Por lo tanto,
$C_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es linealmente independiente.
Ahora veamos si al agregar a C_1 el segundo elemento de B nos queda un conjunto linealmente independiente:

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a+b+c &= 0 \\ b+d &= 0 \\ 0 &= 0 \\ -a &= 0 \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema son $b(0, 1, -1, -1)$ con $b \in \mathbb{R}$; es decir, tiene solución no trivial y, por lo tanto, el conjunto es linealmente dependiente. Esto significa que **no** podemos agregar $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ al conjunto C_1 (y, además, que esta matriz pertenece al subespacio generado por C_1).
Analizamos entonces si al agregar a C_1 el tercer elemento de B resulta un conjunto linealmente independiente:

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a+b+c &= 0 \\ b &= 0 \\ d &= 0 \\ -a &= 0 \end{cases}$$

Como la única solución del sistema es $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$, el conjunto
$C_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es linealmente independiente.

Respuesta: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ que extiende al conjunto dado.

Ejemplo 7. Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ una base de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ y sea $\mathbb{S}$ el subespacio $\mathbb{S} = \langle \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3 + 2\mathbf{v}_4 \rangle$. Hallar una base de $\mathbb{S}$ y extenderla a una base de $\mathbb{V}$.

Solución: Veamos si los generadores de $\mathbb{S}$ nos sirven como base, es decir, si son linealmente independientes. Planteamos:

$$a(\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_4) + b(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) + c(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3 + 2\mathbf{v}_4) = O$$

que reagrupando queda

$$(b + c)\mathbf{v}_1 + (a + b)\mathbf{v}_2 + (-b - c)\mathbf{v}_3 + (-2a + 2c)\mathbf{v}_4 = O$$

Como $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ es linealmente independiente por ser una base de $\mathbb{V}$, la única posibilidad para que esto ocurra es

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & b & + & c & = & 0 \\ a & + & b & & & = & 0 \\ & - & b & - & c & = & 0 \\ -2a & & & + & 2c & = & 0 \end{array}\right. \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$F_1 \leftrightarrow F_2 \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_3 + F_2 \to F_3 \\ F_4 + 2F_1 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) F_4 - 2F_2 \to F_4 \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Entonces $B_{\mathbb{S}} = \{\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3\}$ es una base de $\mathbb{S}$.
Para extenderla a una base de $\mathbb{V}$ podemos agregar toda la base B y luego extraer una base:
$C = B_{\mathbb{S}} \cup B = \{\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$

$$\begin{aligned} & a(\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_4) + b(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) + c\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_2 + e\mathbf{v}_3 + f\mathbf{v}_4 = O \\ \iff & (b + c)\mathbf{v}_1 + (a + b + d)\mathbf{v}_2 + (-b + e)\mathbf{v}_3 + (-2a + f)\mathbf{v}_4 = O \end{aligned}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} & & b & + & c & & & & & & & = & 0 \\ a & + & b & & & + & d & & & & & = & 0 \\ & - & b & & & & & + & e & & & = & 0 \\ -2a & & & & & & & & & + & f & = & 0 \end{array}\right. \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrrrr|r} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$F_1 \leftrightarrow F_2 \left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_3 + F_2 \to F_3 \\ F_4 + 2F_1 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$F_4 - 2F_2 \to F_4 \left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) F_4 + 2F_3 \to F_4 \left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Respuesta: $B' = \{\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una base de $\mathbb{V}$ que contiene una base de $\mathbb{S}$.

Observación: En este ejemplo, $\dim(\mathbb{S}) = 2$ y $\dim(\mathbb{V}) = 4$. Hay muchos pares de vectores de $\mathbb{V}$ que sirven para extender la base $B_{\mathbb{S}}$ a una base de todo el espacio vectorial (no solo las opciones que surgen al agregar vectores de la base $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$, como en la solución anterior). Podríamos haber elegido dos vectores cualesquiera de $\mathbb{V}$ (combinaciones lineales de los vectores de B) para agregar y, si nos aseguramos que junto con los de $B_{\mathbb{S}}$ queda un conjunto linealmente independiente, tendremos una base de $\mathbb{V}$.

Ejemplo 8. Dados los subespacios $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / x_1 - 4x_2 - 9x_3 = 0\}$ y $\mathbb{T} = \langle (3,3,-1), (1,-2,1), (-1,-7,3) \rangle$, decidir si $\mathbb{S} = \mathbb{T}$.

Solución: Podemos verificar que $\mathbb{T} \subset \mathbb{S}$ viendo que cada uno de los vectores del conjunto de generadores de $\mathbb{T}$ cumple la ecuación de $\mathbb{S}$:

$(3,3,-1) \in \mathbb{S}$: $\quad 3 - 4 \cdot 3 - 9(-1) = 0$

$(1,-2,1) \in \mathbb{S}$: $\quad 1 - 4(-2) - 9 \cdot 1 = 0$

$(-1,-7,3) \in \mathbb{S}$: $\quad -1 - 4(-7) - 9 \cdot 3 = 0$

Notar que, como $\mathbb{T} \subset \mathbb{S}$, se cumple $\dim(\mathbb{T}) \leq \dim(\mathbb{S})$.
Como $\mathbb{S}$ está definido en $\mathbb{R}^3$ por una ecuación de matriz $A = (1 \quad -4 \quad -9)$, entonces $\dim(\mathbb{S}) = 3 - \operatorname{rg}(A) = 3 - 1 = 2$, con lo cual $\dim(\mathbb{T}) \leq 2$.
Por otro lado, podemos ver que $(3,3,-1)$ y $(1,-2,1)$, que son dos de los generadores de $\mathbb{T}$, no son múltiplos: si $k \in \mathbb{R}$ cumple $(3,3,-1) = k(1,-2,1)$, entre la primera y tercera coordenada aparece la contradicción $k = 3$ y $k = -1$. Entonces, tenemos que $\dim(\mathbb{T}) \geq 2$.
Concluimos entonces que $\dim(\mathbb{T}) = 2$ y que $\{(3,3,-1), (1,-2,1)\}$ es una base de $\mathbb{T}$.
Dado que $\mathbb{T} \subset \mathbb{S}$, se puede extender una base de $\mathbb{T}$ a una base de $\mathbb{S}$; pero como $\dim(\mathbb{T}) = \dim(\mathbb{S})$, no necesitamos agregar ningún vector; por lo tanto, $\mathbb{S} = \mathbb{T}$.

Respuesta: $\mathbb{S} = \mathbb{T}$.

En general vale:

Propiedad

Si $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ son dos subespacios de un e.v. $\mathbb{V}$ que cumplen que $\mathbb{S} \subset \mathbb{T}$ y $\dim(\mathbb{S}) = \dim(\mathbb{T})$, entonces $\mathbb{S} = \mathbb{T}$.