Sistemas lineales asociados a una matriz A

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$, considerar la ecuación $A \cdot X = b$ es equivalente a considerar el sistema asociado a la matriz ampliada $(A|b)$, un sistema de m ecuaciones en n incógnitas. Identificamos las soluciones de la ecuación, que son matrices columna de $\mathbb{R}^{n\times 1}$ y las soluciones del sistema, que son n-uplas.
Usando la notación matricial para sistemas lineales, vamos a deducir algunas propiedades que relacionan soluciones de $A \cdot X = b$ con soluciones del sistema homogéneo asociado $A \cdot X = \mathbf{0}$.

Ejemplo 1. Sean $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ y $b \in \mathbb{R}^{2\times 1}$, $b \neq 0$. Se sabe que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ son soluciones de $A \cdot X = b$, y que $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es solución de $A \cdot X = 0$. Verificar que:

(a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es solución de $A \cdot X = 0$,

(b) $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ es solución de $A \cdot X = 0$,

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es solución de $A \cdot X = b$,

(d) $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ es solución de $A \cdot X = 0$.

Solución. En cada caso, para ver que la matriz columna dada es una solución de la ecuación, reemplazamos X por dicha matriz y vemos que se cumple la igualdad.

(a) $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = A \cdot 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3.\, A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ es solución de $A \cdot X = \mathbf{0}$.

Observar que en la penúltima igualdad usamos que $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es solución de $A \cdot X = \mathbf{0}$.

De la misma manera se puede deducir que:

Los múltiplos de una solución de un sistema *homogéneo* $A \cdot X = \mathbf{0}$ son también soluciones del sistema homogéneo.

(b) $A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = A \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = b - b = 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ es solución de $A \cdot X = \mathbf{0}$.

Observar que usamos que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ son dos soluciones de $A \cdot X = b$.

En forma similar a lo hecho en este ejemplo, se puede verificar que:

La diferencia entre dos soluciones de un sistema $A \cdot X = b$ es una solución del sistema *homogéneo* asociado $A \cdot X = 0$.

(c) $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = A \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = b + \mathbf{0} = b.$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ es solución de $A \cdot X = b$.

En este caso usamos que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es solución de $A \cdot X = b$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es solución de $A \cdot X = \mathbf{0}$.

De la misma manera se puede mostrar, en general, que:

Al sumar una solución del sistema $A \cdot X = b$ con una del sistema homogéneo asociado $A \cdot X = \mathbf{0}$ se obtiene una solución de $A \cdot X = b$.

(d) $A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = A \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ es solución de $A \cdot X = \mathbf{0}$.

En esta verificación usamos que $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ son soluciones de $A \cdot X = 0$ (lo sabemos por los incisos (a) y (c) respectivamente).

Con una verificación similar, se puede probar que:

La suma de dos soluciones de un sistema *homogéneo* $A \cdot X = \mathbf{0}$ es una solución del mismo sistema homogéneo.

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Para cada $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$, anotamos como S_b al conjunto de las soluciones del sistema $A \cdot X = b$; en particular, escribimos S_0 para el conjunto de soluciones del sistema homogéneo asociado a A. Resumimos las relaciones entre los elementos de estos conjuntos vistas a partir del ejemplo:

(I) $\mathbf{v} \in S_0,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot \mathbf{v} \in S_0$

(II) $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in S_0 \Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{w} \in S_0$

(III) $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in S_b \Rightarrow \mathbf{v} - \mathbf{w} \in S_0$

(IV) $\mathbf{v} \in S_b,\ \mathbf{w} \in S_0 \Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{w} \in S_b$

De estas propiedades se deduce que si $\mathbf{v}$ es una solución particular de $A \cdot X = b$, entonces:

$$S_b = S_0 + \mathbf{v} = \{\mathbf{h} + \mathbf{v} \mid \mathbf{h} \in S_0\}$$

es decir, que todas las soluciones del sistema $A \cdot X = b$ son las soluciones del sistema homogéneo asociado sumadas con una solución particular.

Resolvamos algunos ejercicios para familiarizarnos con estas propiedades.

Ejemplo 2. Sean $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $b \in \mathbb{R}^{3\times 1}$. Si $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ son soluciones de $A \cdot X = b$, hallar:

(a) Tres soluciones del sistema homogéneo asociado a A.

(b) Tres soluciones, distintas de las dadas, del sistema $A \cdot X = b$.

Solución.

(a) Por la propiedad (III), la resta de dos soluciones del sistema $A \cdot X = b$ será solución del sistema homogéneo asociado $A \cdot X = 0$:

$$\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix} \in S_0.$$

Según la propiedad (I), cualquier múltiplo de $\mathbf{h}_1$ será otra solución del sistema homogéneo. Proponemos

$$\mathbf{h}_2 = 2 \cdot \mathbf{h}_1 = 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-4\\-2\end{pmatrix} \in S_0$$

$$\mathbf{h}_3 = (-4) \cdot \mathbf{h}_1 = (-4) \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\8\\4\end{pmatrix} \in S_0\ .$$

Más aún, podemos hallar infinitas soluciones del sistema $A \cdot X = 0$:

$$\mathbf{h} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(b) Por la propiedad (IV), para obtener una solución de $A \cdot X = b$ podemos sumar una solución de ese sistema con una solución del sistema homogéneo $A \cdot X = 0$. Considerando $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in S_b$ y las soluciones $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3$ del inciso (a), proponemos:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v} + \mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \in S_b$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v} + \mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \in S_b$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v} + \mathbf{h}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \in S_b$$

De hecho, a partir de las infinitas soluciones de $A \cdot X = 0$ que hallamos en el inciso anterior, podemos exhibir infinitas soluciones del sistema $A \cdot X = b$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Como en el ejemplo anterior, a partir de dos soluciones distintas $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ del sistema $A \cdot X = b$, podemos dar infinitas soluciones:

$$X = \mathbf{v} + \lambda \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \ \in S_b \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Algunas veces se hace referencia a este conjunto como una *recta de soluciones* del sistema $A \cdot X = b$ aunque X no sea de $\mathbb{R}^2$ ni de $\mathbb{R}^3$ (porque su expresión recuerda la ecuación paramétrica de la recta que pasa por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$).

Ejemplo 3. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Se sabe que $(1, 1, -4)$ es solución del sistema $2AX = b$ y $(0, 1, 4)$ es solución del sistema $AX = -b$. Hallar una recta de soluciones del sistema $AX = b$ y, si es posible, alguna solución con última coordenada nula.

Solución. Como vimos, podemos formar una recta de soluciones del sistema $AX = b$ si conocemos dos soluciones distintas de dicho sistema. En este ejercicio las soluciones que conocemos

no son soluciones del sistema $AX = b$. Sin embargo podremos trabajar a partir de la información dada:

$$(1,1,-4) \text{ es solución del sistema } 2AX = b \iff 2A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = b$$

$$(0,1,4) \text{ es solución del sistema } AX = -b \iff A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = -b$$

En la primera identidad podemos reescribir el producto $2A.X = A.2X$ y obtener

$$2A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = A \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = b \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = (2,2,-8) \in S_b.$$

En la segunda identidad podemos multiplicar ambos miembros por -1 y obtener

$$(-1)A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = (-1) \cdot (-b) \quad \Rightarrow \quad A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = b \quad \Rightarrow \quad \mathbf{w} = (0,-1,-4) \in S_b.$$

Podemos afirmar que la recta que pasa por **v** y **w** está contenida en el conjunto solución S_b:

$$\lambda[(2,2,-8) - (0,-1,-4)] + (2,2,-8) = \lambda(2,3,-4) + (2,2,-8), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Buscamos entre estas soluciones un valor del parámetro λ de modo que la coordenada x_3 resulte ser nula:

$$x_3 = 0 \iff -4\lambda - 8 = 0 \iff \lambda = -2.$$

Luego,

$$X = (-2)(2,3,-4) + (2,2,-8) = (-2,-4,0)$$

es una solución del sistema con última coordenada nula.

Respuesta: $\lambda(2,3,-4) + (2,2,-8)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, es una recta de soluciones del sistema y $(-2,-4,0)$ es una solución con última coordenada nula.

Ejemplo 4. Sean $A \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ y $b, c \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ tales que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ son soluciones de } AX = b \text{ y } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ es solución de } AX = c.$$

Hallar tres soluciones del sistema $AX = b + 2c$.

Solución. Comencemos hallando una solución de $AX = b + 2c$. Para esto, observamos que si

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b \quad \text{y} \quad A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = c,$$

entonces

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\, A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = b + 2c.$$

Como

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\, A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = A \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix},$$

deducimos que

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = b + 2c,$$

es decir, que $(1, 2, 4, 7)$ es una solución del sistema $AX = b + 2c$.
Podemos obtener otra solución de $AX = b + 2c$ repitiendo este procedimiento con la otra solución que conocemos de $AX = b$. Pero necesitamos hallar tres soluciones.

Otra forma de construir más soluciones de $AX = b + 2c$ es hallando soluciones del sistema homogéneo asociado a A. Para esto, restamos las dos soluciones que conocemos del sistema $AX = b$ y tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in S_0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in S_0 \ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Concluimos que $X = \lambda(1, 1, -1, -1) + (1, 2, 4, 7) \in S_{b+2c}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces, conseguimos tres soluciones del sistema asignándole distintos valores a λ. Por ejemplo,

- $\lambda = 0 \Rightarrow X = (1, 2, 4, 7) \in S_{b+2c}$
- $\lambda = 1 \Rightarrow X = (2, 3, 3, 6) \in S_{b+2c}$
- $\lambda = -2 \Rightarrow X = (-1, 0, 6, 9) \in S_{b+2c}$