Independencia lineal

Un espacio vectorial puede estar generado por distintos conjuntos de vectores y además, dos conjuntos de generadores del mismo espacio vectorial pueden tener distinta cantidad de elementos.
Por ejemplo, la recta $\mathbb{L}$: $X = \lambda(1, -1, 2)$ la podemos escribir como $\mathbb{L} = \langle(1, -1, 2)\rangle$, pero también como $\mathbb{L} = \langle(1, -1, 2), (2, -2, 4)\rangle$. De hecho, los elementos del subespacio $\langle(1, -1, 2), (2, -2, 4)\rangle$ son los vectores $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ de la forma

$$\mathbf{v} = a(1, -1, 2) + b(2, -2, 4), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Teniendo en cuenta que $(2, -2, 4) = 2(1, -1, 2)$, obtenemos:

$$\mathbf{v} = a(1, -1, 2) + 2b(1, -1, 2) = (a + 2b)(1, -1, 2), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

y concluimos que estos vectores son los puntos de la recta $\langle(1, -1, 2)\rangle$. Es decir,

$$\langle(1, -1, 2), (2, -2, 4)\rangle = \langle(1, -1, 2)\rangle.$$

En otras palabras, podemos suprimir el vector $(2, -2, 4)$ del conjunto de generadores y el subespacio generado es el mismo (en este caso, la recta $\mathbb{L}$). Esto se debe, como vimos, a que $(2, -2, 4) \in \langle(1, -1, 2)\rangle$.
Al analizar $\langle(1, -1, 2), (2, -2, 4)\rangle$ de la misma manera, pero usando que $(1, -1, 2) = \frac{1}{2}(2, -2, 4)$, podemos concluir que $\langle(1, -1, 2), (2, -2, 4)\rangle = \langle(2, -2, 4)\rangle$, o sea, que alternativamente, podemos suprimir $(1, -1, 2)$.

Cuando tenemos un subespacio nos interesa expresarlo de la manera más simple posible. En este contexto, lo que buscamos es trabajar con conjuntos de generadores que sean lo más chicos posible, o sea, en los que no podamos suprimir ningún vector sin perder elementos del subespacio.
En el ejemplo anterior, el haber podido eliminar uno de los vectores del conjunto de generadores $\{(1, -1, 2), (2, -2, 4)\}$ y seguir teniendo el mismo subespacio generado se debe a que los vectores satisfacen una relación de *dependencia lineal*:

$$2 \cdot (1, -1, 2) + (-1) \cdot (2, -2, 4) = (0, 0, 0),$$

la que nos permitió expresar a uno de ellos en función del otro despejando:

$$(2, -2, 4) = 2 \cdot (1, -1, 2) \quad \text{ó} \quad (1, -1, 2) = \frac{1}{2} \cdot (2, -2, 4).$$

En lo que sigue vamos a estudiar las nociones de dependencia e independencia lineal de vectores en un espacio vectorial $\mathbb{V}$, utilizarlas para analizar la minimalidad de los conjuntos de generadores de $\mathbb{V}$ e introducir una noción de *dimensión*.

Dependencia e independencia lineal

Decimos que un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ es *linealmente dependiente* si existen escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ **no todos iguales a** 0 tales que:

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n = O.$$

En caso contrario, decimos que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es *linealmente independiente*; es decir, cuando la **única** manera de escribir al vector O como combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ es con todos los escalares iguales a 0. Así, $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente si dados $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n = O,$$

entonces, necesariamente,

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0.$$

También decimos que los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente dependientes (respectivamente, independientes) cuando el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es linealmente dependiente (respectivamente, independiente).

Observación: Dados vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ siempre es posible escribir al vector nulo O como combinación lineal de esos vectores, simplemente como

$$0 \cdot \mathbf{v}_1 + 0 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{v}_n = O.$$

La diferencia entre vectores linealmente independientes y dependientes es si ésta es la única opción o no.

Por ejemplo, el conjunto $\{(1, -1, 2), (2, -2, 4)\}$ es linealmente dependiente ya que

$$2(1, -1, 2) + (-1)(2, -2, 4) = (0, 0, 0).$$

Escribimos al vector nulo como combinación de ambos vectores usando los escalares 2 y -1. En este caso pudimos verlo a simple vista porque $(1, -1, 2)$ y $(2, -2, 4)$ son múltiplos.

Ejemplo 1. Decidir si $\{(1, 1, 1), (1, 2, 3)\}$ es linealmente independiente.

Solución. Estos dos vectores no son uno múltiplo del otro. Para ver si son linealmente dependientes o linealmente independientes tenemos que ver si podemos escribir al vector nulo como combinación lineal de los vectores involucrados usando escalares distintos de 0 o no. Es decir, primero escribimos a $(0, 0, 0)$ como combinación lineal de ambos vectores,

$$a(1, 1, 1) + b(1, 2, 3) = (0, 0, 0),$$
$$(a + b, a + 2b, a + 3b) = (0, 0, 0).$$

Si igualamos coordenada a coordenada obtenemos un sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} a+b &= 0, \\ a+2b &= 0, \\ a+3b &= 0. \end{cases}$$

Resolviendo ese sistema vemos que la única solución es $a = 0$ y $b = 0$. Es decir, la única forma de escribir al vector nulo como combinación lineal de $(1, 1, 1)$ y $(1, 2, 3)$ es usando escalares a y b iguales a 0. Concluimos que el conjunto es linealmente independiente.

$\boxed{\text{Respuesta: El conjunto } \{(1,1,1),(1,2,3)\} \text{ es linealmente independiente.}}$

Observación: Cuando tenemos sólo dos vectores podemos determinar si son linealmente dependientes viendo si son múltiplos. Esta regla **no** sirve cuando el conjunto tiene más de dos vectores.

Ejemplo 2. Decidir si $\{(1, 0, 1),(1, 2, 3),(0, 2, 2)\}$ es linealmente independiente.

Solución. Nuevamente la idea es analizar cómo son todas las combinaciones lineales posibles que dan como resultado el vector nulo y ver si hay una sola (con todos los escalares iguales a 0) o si hay otra posibilidad. Planteamos entonces,

$$\begin{aligned} a(1,0,1) + b(1,2,3) + c(0,2,2) &= (0,0,0), \\ (a+b, 2b+2c, a+3b+2c) &= (0,0,0). \end{aligned}$$

Igualando cada coordenada,

$$\begin{cases} a + b &= 0, \\ \phantom{a+{}} 2b + 2c &= 0, \\ a + 3b + 2c &= 0. \end{cases}$$

Para resolver el sistema planteamos su matriz ampliada y la escalonamos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \; F_3 - F_1 \to F_3 \; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \; F_3 - F_2 \to F_3 \; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Como tenemos 3 incógnitas y luego de escalonar hay dos ecuaciones no nulas concluimos que es un sistema compatible indeterminado.
Las soluciones de este sistema representan todas las posibles combinaciones lineales de los vectores que dan como resultado $(0, 0, 0)$. Por lo tanto, que el sistema tenga infinitas soluciones quiere decir que hay más de una combinación lineal posible y que los vectores son linealmente dependientes.

$\boxed{\text{Respuesta: El conjunto } \{(1,0,1),(1,2,3),(0,2,2)\} \text{ es linealmente dependiente.}}$

Observación: Cuando tenemos tres o más vectores ya no podemos saber si son linealmente dependientes sólo viendo si alguno es múltiplo de otro o no. En este ejemplo, la combinación lineal que da el vector nulo se forma usando los tres vectores.

Ejemplo 3. Hallar alguna combinación lineal de $(1,0,1),(1,2,3)$ y $(0,2,2)$ que dé $(0,0,0)$ y tal que sus coeficientes no sean todos 0.

Solución: Para encontrar una combinación lineal que dé el vector nulo tendríamos que encontrar alguna solución del sistema que planteamos en el ejemplo anterior. Al escalonar la matriz ampliada del sistema, llegamos a que es equivalente a:

$$\begin{cases} a + b & = 0, \\ \quad 2b + 2c & = 0. \end{cases}$$

De la segunda ecuación tenemos que $b = -c$ y, si reemplazamos esto en la primera, queda $a - c = 0$, es decir, que $a = c$. Entonces, cualquier combinación lineal de los vectores dados con escalares de la forma $(c, -c, c)$, con $c \in \mathbb{R}$, da como resultado $(0,0,0)$. Si tomamos, por ejemplo, $c = 1$ tenemos que

$$1(1,0,1) - 1(1,2,3) + 1(0,2,2) = (0,0,0).$$

Respuesta: Una combinación lineal posible es $1(1,0,1) - 1(1,2,3) + 1(0,2,2) = (0,0,0)$.

Podemos reescribir la combinación lineal de los vectores que nos da el vector nulo en el ejemplo anterior como

$$(1,0,1) + (0,2,2) = (1,2,3).$$

Vemos entonces que $(1,2,3)$ es una combinación lineal de $(1,0,1)$ y $(0,2,2)$. Como estamos trabajando con vectores de $\mathbb{R}^3$, podemos interpretar esto geométricamente: $(1,2,3)$ pertenece al plano que pasa por $(1,0,1),(0,2,2)$ y $(0,0,0)$.
Esto es justamente lo que podemos detectar cuando estudiamos la dependencia o independencia lineal de un conjunto de vectores: si alguno de los vectores dados es una combinación de los restantes o no.

Si un conjunto de vectores es linealmente dependiente alguno de ellos es combinación lineal de otros, y recíprocamente.

En el ejemplo, a partir de la expresión de $(1,2,3)$ como una combinación lineal de $(1,0,1)$ y $(0,2,2)$:

$$(1,2,3) = (1,0,1) + (0,2,2)$$

podemos, despejando, hallar una comabinación lineal de los tres vectores que da el vector nulo:

$$(1,0,1) + (0,2,2) - (1,2,3) = (0,0,0).$$

Observación: Siempre que planteamos una combinación lineal de vectores igualada a cero llegamos a un sistema homogéneo. Para saber si los vectores son linealmente independientes o linealmente dependientes nos interesa saber si este sistema es compatible determinado o compatible indeterminado y no necesitamos resolverlo.

Ejemplo 4. Decidir si el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es linealmente independiente.

Solución: En primer lugar planteamos una combinación lineal del conjunto que dé la matriz nula:

$$\begin{aligned} a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} a-b & a+2b \\ b+c & b+c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Igualar lugar a lugar nos lleva al sistema:

$$\begin{cases} a - b = 0, \\ a + 2b = 0, \\ b + c = 0, \\ b + c = 0, \end{cases}$$

que tiene como matriz ampliada a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Ahora tenemos que decidir si el sistema es compatible determinado o indeterminado. Para esto, escalonamos la matriz. Si hacemos las operaciones $F_2 - F_1 \to F_2$ y $F_4 - F_3 \to F_4$ tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Ahora hacemos $F_3 - \frac{1}{3}F_2 \to F_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Por lo tanto, el sistema es compatible determinado y, como consecuencia, el conjunto dado es linealmente independiente.

Respuesta: El conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es linealmente independiente.

Ejemplo 5. Decidir si $\{(0,0,0),(1,2,3),(1,1,0)\}$ es linealmente independiente.

Solución: Este es un ejemplo muy particular porque uno de los vectores involucrados es el vector nulo. Es muy fácil entonces formarlo como combinación lineal de estos tres vectores usando algún escalar no nulo. Por ejemplo:

$$1(0,0,0) + 0(1,2,3) + 0(1,1,0) = (0,0,0).$$

O sea, el conjunto de vectores es linealmente dependiente.

Respuesta: El conjunto $\{(0,0,0),(1,2,3),(1,1,0)\}$ es linealmente dependiente.

Observación: Si observamos el ejemplo con atención vemos que no importó cuáles eran los vectores no nulos del conjunto: el hecho de que esté el vector nulo alcanzó para ver que son linealmente dependientes.

Si un conjunto de vectores contiene al vector nulo entonces es linealmente dependiente.

Ejemplo 6. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el conjunto

$$\{(1,0-1,0),(1,1,-1,2),(2,3,-2,k)\}$$

es linealmente independiente.

Solución: Para que el conjunto sea linealmente independiente, debemos ver que la única combinación lineal de los vectores que da el vector $(0,0,0,0)$ es con todos los escalares iguales a 0. Planteamos:

$$a(1,0,-1,0) + b(1,1,-1,2) + c(2,3,-2,k) = (0,0,0,0)$$

que, igualando coordenada a coordenada, nos conduce al sistema,

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} a & + & b & + & 2c & = & 0 \\ & & b & + & 3c & = & 0 \\ -a & - & b & - & 2c & = & 0 \\ & & 2b & + & kc & = & 0 \end{array} \right.$$

Buscamos entonces los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales este sistema es compatible determinado. Escribimos la matriz y escalonamos:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & k & 0 \end{array} \right) \quad F_3 + F_1 \to F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & k & 0 \end{array} \right)$$

$$F_4 - 2F_2 \to F_4 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-6 & 0 \end{array}\right) F_3 \leftrightarrow F_4 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & k-6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Mirando la última matriz concluimos que el sistema es compatible determinado si $k-6 \neq 0$, es decir, si $k \neq 6$, mientras que para $k = 6$ es compatible indeterminado.

Respuesta: El conjunto $\{(1,0-1,0),(1,1,-1,2),(2,3,-2,k)\}$ es linealmente independiente si y sólo si $k \neq 6$.

Ejemplo 7. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{V}$. Sabiendo que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es linealmente independiente decidir si $\{2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, -3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3, -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3\}$ lo es.

Solución. De la misma manera que antes, planteamos una combinación lineal de los vectores igualada al vector nulo, al que llamaremos simplemente O:

$$a(2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + b(-3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3) + c(-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) = O.$$

Las propiedades de la suma y el producto por escalares del espacio vectorial $\mathbb{V}$ nos permiten reescribir el lado izquierdo de esta igualdad como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$:

$$\begin{aligned} 2a\mathbf{v}_1 + a\mathbf{v}_2 - 3b\mathbf{v}_2 + 2b\mathbf{v}_3 - c\mathbf{v}_1 + c\mathbf{v}_2 - c\mathbf{v}_3 &= O \qquad \text{EV7 y EV9} \\ 2a\mathbf{v}_1 - c\mathbf{v}_1 + a\mathbf{v}_2 - 3b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_2 + 2b\mathbf{v}_3 - c\mathbf{v}_3 &= O \qquad \text{EV6} \\ (2a-c)\mathbf{v}_1 + (a-3b+c)\mathbf{v}_2 + (2b-c)\mathbf{v}_3 &= O \qquad \text{EV8} \end{aligned}$$

Como tenemos una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ que da O y estos vectores son linealmente independientes, cada uno de los escalares involucrados debe ser 0. Entonces:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2a & & & - & c & = & 0, \\ a & - & 3b & + & c & = & 0, \\ & & 2b & - & c & = & 0. \end{array}\right.$$

Notemos que a, b y c son los coeficientes de la combinación lineal que planteamos en primer lugar. Llegamos a que deben ser soluciones de un sistema lineal homogéneo. Entonces nos queda determinar si este sistema admite una única solución o infinitas. Para eso planteamos la matriz y escalonamos.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) 2F_2 - F_1 \to F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) 3F_3 + F_2 \to F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Como el sistema es compatible indeterminado, los vectores son linealmente dependientes.

Respuesta: $\{2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, -3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3, -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3\}$ es linealmente dependiente.

Bases y dimensión

Como comentamos al comienzo de la sección anterior, de los distintos conjuntos de generadores que puede tener un espacio vectorial, estamos interesados en buscar aquellos que tengan la menor cantidad de vectores que sea posible. La independencia lineal es la propiedad que nos asegurará esta buena característica en un conjunto de generadores.

Bases de un espacio vectorial

Un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una *base* de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ si es linealmente independiente y genera $\mathbb{V}$.

Una base es un conjunto de generadores en el que no "sobra" ninguno.
Por ejemplo $\{(1,-1,2)\}$ es una base de $\langle(1,-1,2)\rangle$, pues lo genera y es linealmente independiente. En cambio, $\{(1,-1,2),(2,-2,4)\}$ no es una base, porque si bien genera el subespacio no es linealmente independiente.

Un mismo espacio vectorial puede tener muchas (infinitas) bases distintas, pero todas tienen la misma cantidad de vectores.

Dimensión de un espacio vectorial

Llamamos *dimensión* de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ a la cantidad de vectores que forman una base de $\mathbb{V}$. Escribimos $\dim(\mathbb{V})$ para referirnos a la dimensión de $\mathbb{V}$.

Por ejemplo, la recta $\langle(1,-1,2)\rangle$ tienen dimensión 1 ya que $\{(1,-1,2)\}$ es una base y está formada por un vector.
Si queremos calcular la dimensión del plano $\mathbb{S} = \langle(1,1,0),(1,2,3)\rangle$ tenemos que dar una base. Los vectores $(1,1,0)$ y $(1,2,3)$ lo generan y además son linealmente independientes (como son sólo dos podemos saberlo porque no son múltiplos). Entonces $\{(1,1,0),(1,2,3)\}$ es una base de $\mathbb{S}$. Por lo tanto, $\dim(\mathbb{S}) = 2$.
¿Es la única base posible? No, cualquier otro par de vectores linealmente independientes que estén en $\mathbb{S}$ formarán una base. Por ejemplo, podemos tomar $\{(1,1,0),(2,3,3)\}$. Lo que nunca podremos conseguir es una base de $\mathbb{S}$ que no tenga 2 vectores.

Consideremos ahora $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$. Para obtener la dimensión de $\mathbb{V}$, tenemos que dar una base. Hay una forma muy fácil de hacerlo. Tomemos

$$E = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}.$$

Veamos que E es una base de $\mathbb{R}^3$. Verifiquemos que $\mathbb{R}^3 = \langle(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\rangle$, es decir, que todo vector de $\mathbb{R}^3$ es combinación lineal de los vectores de E. Dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ es fácil encontrar la combinación lineal, ya que

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1).$$

Falta ver que $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es linealmente independiente. Si planteamos

$$a(1,0,0)+b(0,1,0)+c(0,0,1)=(0,0,0),$$

igualando coordenadas tenemos que

$$\begin{cases} a=0, \\ b=0, \\ c=0. \end{cases}$$

Por lo tanto, E es linealmente independiente. En consecuencia, E es una base de $\mathbb{R}^3$ y, entonces, $\dim(\mathbb{R}^3)=3$. Esta base se llama la base *canónica* de $\mathbb{R}^3$.

Observación: Podemos construir bases similares para $\mathbb{R}^n$, para cualquier n. Por ejemplo, $E_2=\{(1,0),(0,1)\}$ y $E_4=\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ son las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^4$ respectivamente. Por lo tanto, $\dim(\mathbb{R}^n)=n$.

Similarmente podemos hallar bases para $\mathbb{R}^{m\times n}$, para $m,n\in\mathbb{N}$, y calcular su dimensión. Por ejemplo:

- $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ es una base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$,
- $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ es una base de $\mathbb{R}^{2\times 3}$.

De este modo deducimos que $\dim(\mathbb{R}^{m\times n})=mn$.

Ejemplo 1. Hallar una base y la dimensión del subespacio

$$\mathbb{H}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 \ : \ x_1+x_2+x_3+x_4=0\}.$$

Solución: El primer paso es buscar generadores de $\mathbb{H}$. Si despejamos de la ecuación de $\mathbb{H}$, por ejemplo,

$$x_1=-x_2-x_3-x_4,$$

llegamos a que un vector general de $\mathbb{H}$ es de la forma $(-x_2-x_3-x_4,x_2,x_3,x_4)$ con x_2,x_3 y $x_4\in\mathbb{R}$. Entonces,

$$\mathbb{H}=\langle(-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\rangle.$$

Veamos si el conjunto de generadores que hallamos {(-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)} es linealmente independiente. Planteamos:

$$a(-1,1,0,0)+b(-1,0,1,0)+c(-1,0,0,1)=(0,0,0,0),$$

que nos lleva al sistema de matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

De las filas 2, 3 y 4, vemos claramente que es un sistema compatible determinado y, por lo tanto, $\{(-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\}$ es linealmente independiente. Concluimos que:

Respuesta: $\{(-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\}$ es una base de H y $\dim(\mathbb{H}) = 3$.

Observemos que los tres vectores de la base vienen de las tres variables libres que teníamos (x_2, x_3 y x_4). Esto nos da una pauta de cuál es la dimensión de $\mathbb{H}$ antes de encontrar la base.

Propiedad

Si $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = 0\}$ entonces $\dim(\mathbb{S}) = n - \mathrm{rg}(A)$.

Recordar que $\mathrm{rg}(A)$, el rango de A, es la cantidad de filas no nulas de una matriz escalonada obtenida a partir de A.

Ejemplo 2. Sea $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_3 + 2x_4 = 0; x_1 + 3x_2 + x_3 = 0; 3x_2 - 2x_4 = 0\}$. Calcular la dimensión y dar una base de $\mathbb{S}$.

Solución: La matriz asociada a las ecuaciones de $\mathbb{S}$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Para calcular la dimensión de $\mathbb{S}$, escalonamos A y calculamos su rango:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} F_2 - F_1 \to F_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} F_3 - F_2 \to F_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vemos que el rango de A es 2. Entonces, $\dim(\mathbb{S}) = 4 - 2 = 2$.
Conocer la dimensión de un subespacio de antemano es muy útil para calcular una base. En este caso, como ya sabemos que la dimensión de $\mathbb{S}$ es 2, sólo necesitamos encontrar dos vectores que generen a $\mathbb{S}$. Estos vectores serán linealmente independientes porque si no, la dimensión de $\mathbb{S}$ sería menor que 2. Para esto resolvemos el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ & & 3x_2 & & & - & 2x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Tenemos que

$$x_2 = \frac{2}{3}x_4, \quad x_1 = -x_3 - 2x_4.$$

Así, un vector de $\mathbb{S}$ tiene la forma $(-x_3 - 2x_4, \frac{2}{3}x_4, x_3, x_4) = x_3(-1, 0, 1, 0) + x_4(-2, \frac{2}{3}, 0, 1)$, con $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\mathbb{S} = \langle(-1, 0, 1, 0), (-2, \frac{2}{3}, 0, 1)\rangle.$$

Como ya sabemos que $\mathbb{S}$ tiene dimensión 2, concluimos que $B = \{(-1, 0, 1, 0), (-2, \frac{2}{3}, 0, 1)\}$ es una base de $\mathbb{S}$.

Respuesta: $\dim(\mathbb{S}) = 2$ y $\{(-1, 0, 1, 0), (-2, \frac{2}{3}, 0, 1)\}$ es una base de $\mathbb{S}$.

Propiedad

Si $\dim(\mathbb{V}) = n$, para ver que n vectores de $\mathbb{V}$ forman una base sólo hace falta verificar una de las dos condiciones: que son linealmente independientes o que generan $\mathbb{V}$.

Ejemplo 3. Sea $\mathbb{H} = \langle(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\rangle$. Hallar una base de $\mathbb{H}$ formada por vectores cuyas coordenadas sean todas distintas de 0.

Solución: Ya trabajamos con este subespacio en el Ejemplo 1 de esta sección y vimos que el conjunto de vectores $\{(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$ es una base de $\mathbb{H}$. Esta base, claramente, no cumple lo pedido. Como $\dim(\mathbb{H}) = 3$, para formar otra base necesitamos 3 vectores de $\mathbb{H}$ que sean linealmente independientes. Además, necesitamos que esos vectores no tengan ninguna coordenada igual a 0.
Para formar vectores de $\mathbb{H}$ tomamos combinaciones lineales de los generadores. Podemos considerar, por ejemplo:

$$\begin{aligned}
(-1, 1, 0, 0) + (-1, 0, 1, 0) + (-1, 0, 0, 1) &= (-3, 1, 1, 1),\\
(-1, 1, 0, 0) + (-1, 0, 1, 0) - (-1, 0, 0, 1) &= (-1, 1, 1, -1),\\
(-1, 1, 0, 0) + 2(-1, 0, 1, 0) - (-1, 0, 0, 1) &= (-2, 1, 2, -1).
\end{aligned}$$

Estos tres vectores pertenecen a $\mathbb{H}$. Para que formen una base, deben ser linealmente independientes. Planteamos

$$a(-3, 1, 1, 1) + b(-1, 1, 1, -1) + c(-2, 1, 2, -1) = (0, 0, 0, 0),$$

que nos lleva al sistema

$$\begin{cases}
-3a - b - 2c = 0,\\
a + b + c = 0,\\
a + b + 2c = 0,\\
a - b - c = 0.
\end{cases}$$

Escalonamos:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -3 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} 3F_2+F_1 \to F_2 \\ 3F_3+F_1 \to F_3 \\ 3F_4+F_1 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} -3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} F_3-F_2 \to F_3 \\ F_4+2F_2 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} -3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) F_4+F_3 \to F_4 \left(\begin{array}{rrr|r} -3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Como el sistema es compatible determinado el conjunto de vectores es linealmente independiente y, por lo tanto, es una base de $\mathbb{H}$.

Respuesta: $B = \{(-3,1,1,1),(-1,1,1,-1),(-2,1,2,-1)\}$ es una base $\mathbb{H}$ con vectores sin coordenadas iguales a 0.

Observación: Podríamos haber formado otras combinaciones lineales distintas. Hay infinitas bases de $\mathbb{H}$ que tienen la forma pedida.