Producto interno o escalar

Cálculo de productos internos

Para calcular el producto interno o escalar de dos vectores a partir de sus coordenadas se utilizan las siguientes fórmulas:
En $\mathbb{R}^2$, si $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$:

$$A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Similarmente en $\mathbb{R}^3$, si $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$:

$$A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Ejemplo 1. Dados $A = (1, 3, 1)$, $B = (5, -3, 2)$ y $C = (-3, -4, 2)$, calcular:

i) $A \cdot B$

ii) $(A + 2B) \cdot (C - B)$

iii) $A \cdot B - (B + C) \cdot A + 2A \cdot C$

Solución:

i)

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (1, 3, 1) \cdot (5, -3, 2) \\ &= 1 \cdot 5 + 3(-3) + 1 \cdot 2 \\ &= 5 - 9 + 2 \\ &= -2 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Respuesta: } A \cdot B = -2}$

ii)

$$\begin{aligned} (A + 2B) \cdot (C - B) &= ((1, 3, 1) + 2(5, -3, 2)) \cdot ((-3, -4, 2) - (5, -3, 2)) \\ &= (11, -3, 5) \cdot (-8, -1, 0) \\ &= 11.(-8) + (-3).(-1) + 5.0 \\ &= -85 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Respuesta: } (A + 2B) \cdot (C - B) = -85}$

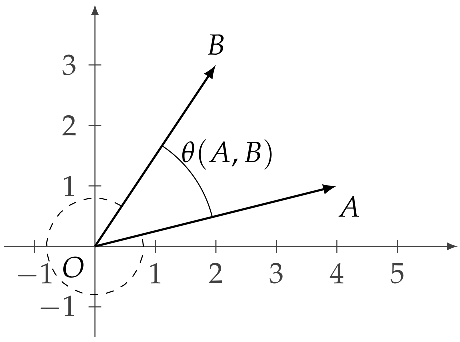
iii) En este caso podemos calcular los productos internos de cada término y luego efectuar la resta y la suma, pero como observamos que tienen el mismo factor A, podemos aplicar propiedades para simplificar:

$$\begin{aligned} A \cdot B - (B + C) \cdot A + 2A \cdot C &= A \cdot B - A \cdot (B + C) + A \cdot (2C) \\ &= A \cdot (B - (B + C) + 2C) \\ &= A \cdot C \\ &= (1, 3, 1) \cdot (-3, -4, 2) \\ &= -13 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Respuesta: } A \cdot B - (B + C) \cdot A + 2A \cdot C = -13}$

Ángulo entre dos vectores

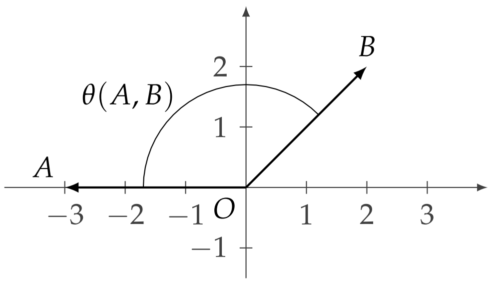
Para comparar direcciones entre vectores podemos utilizar el ángulo entre ellos. Definimos como *ángulo* entre dos vectores A y B, y lo notamos $\theta(A, B)$, al menor de los dos ángulos determinados por A y B, es decir, el que satisface $0 \leq \theta(A, B) \leq \pi$.



Para calcular este ángulo podemos usar la siguiente expresión del producto escalar:

$$A \cdot B = \|A\| \, \|B\| \cos(\theta(A, B))$$

Ejemplo 2. Hallar el ángulo entre $A = (-3, 0)$ y $B = (2, 2)$.



Solución: Combinemos las dos expresiones para el producto escalar:

$$\|A\|\|B\|\cos(\theta) = A \cdot B = a_1b_1 + a_2b_2.$$

En esta igualdad, θ es la medida del ángulo entre A y B. Como ninguno de los vectores es nulo, podemos despejar $\cos(\theta)$:

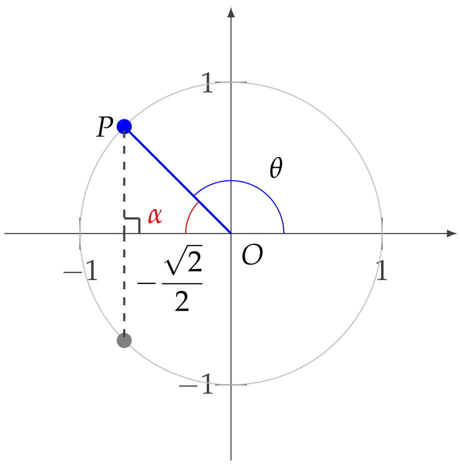
$$\begin{aligned}
\cos(\theta) &= \frac{A \cdot B}{\|A\|\|B\|} \\
&= \frac{(-3,0)\cdot(2,2)}{\sqrt{(-3)^2+0^2}\sqrt{2^2+2^2}} \\
&= \frac{-3\cdot 2 + 0\cdot 2}{\sqrt{9}\sqrt{8}} \\
&= \frac{-6}{3\sqrt{8}}
\end{aligned}$$

Esta última expresión se puede racionalizar como $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Queda por determinar el ángulo θ tal que $0 \leq \theta \leq \pi$ y $\cos(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Para hacer esto podemos, por ejemplo, valernos de la circunferencia trigonométrica y la tabla de valores de las funciones seno y coseno elaborada en la Práctica 0.

El valor $\cos(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ que obtuvimos es negativo; por lo tanto, en la circunferencia trigonométrica, el ángulo θ corresponde a un punto en el segundo o en el tercer cuadrante. Como $0 \leq \theta \leq \pi$, corresponderá a un punto del segundo cuadrante.



Buscamos en la tabla de valores el ángulo que tiene coseno igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (positivo), que es $\frac{\pi}{4}$. Esta medida corresponde a la del ángulo α en el dibujo. La medida del ángulo buscado se consigue con la relación:

$$\theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$$

$\boxed{\text{Respuesta: } \theta(A,B) = \frac{3}{4}\pi}$

Nota: Otra forma de hallar el ángulo θ tal que $0 \leq \theta \leq \pi$ a partir de $\cos(\theta)$ es utilizando la calculadora. En nuestro caso en que $\cos(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, por ejemplo, con la calculadora con ángulos en grados, se calcula

$$\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 135^\circ$$

y al resultado se lo convierte a radianes:

$$135^\circ \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{3}{4}\pi.$$

De la misma manera que en el ejemplo anterior se puede calcular el ángulo entre dos vectores en $\mathbb{R}^3$:

Ejemplo 3. Hallar el ángulo entre $A = (-2, 1, 1)$ y $B = (-1, 0, 1)$.

Solución: Calculamos el coseno del ángulo $\theta = \theta(A, B)$:

$$\begin{aligned}
\cos(\theta) &= \frac{A \cdot B}{\|A\|\|B\|} \\
&= \frac{(-2,1,1) \cdot (-1,0,1)}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 1^2}\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2}} \\
&= \frac{-2 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Ahora buscamos el ángulo θ tal que $0 \leq \theta \leq \pi$ y que cumple $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
En este caso, como $\cos(\theta) > 0$, la condición $0 \leq \theta \leq \pi$ asegura que el ángulo θ corresponde a un punto en el primer cuadrante de la circunferencia trigonométrica. Buscamos entonces en la tabla de valores de la función coseno elaborada en la Práctica 0 el ángulo θ tal que $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y obtenemos $\theta = \frac{\pi}{6}$.

$\boxed{\text{Respuesta: } \theta(A, B) = \frac{\pi}{6}}$

El producto escalar de dos vectores nos permite determinar si sus direcciones son perpendiculares.

Definición. Diremos que dos vectores A y B son *ortogonales*, y lo notaremos $A \perp B$, si vale $A \cdot B = 0$.

$$A \perp B \iff A \cdot B = 0$$

La igualdad $A \cdot B = 0$ puede darse si alguno de los vectores es nulo o si se anula el coseno del ángulo θ entre A y B. Esto último ocurre justamente cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$, lo que indica que las direcciones de los vectores son perpendiculares.

Ejemplo 4. Determinar si los siguientes pares de vectores son ortogonales.

i) $A = (1,3)$ y $B = (3,1)$

ii) $A = (1,3)$ y $B = (3,-1)$

iii) $A = (1,3)$ y $B = (-6,2)$

iv) $A = (1,3,2)$ y $B = (3,1,-3)$

v) $A = (1,3,2)$ y $B = (0,-2,3)$

Solución: Para determinar si los pares de vectores dados son ortogonales, calculamos los productos escalares y vemos si dan 0.

i) $A \cdot B = (1,3) \cdot (3,1) = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 6 \neq 0$

Respuesta: $A = (1,3)$ y $B = (3,1)$ no son ortogonales.

ii) $A \cdot B = (1,3) \cdot (3,-1) = 1 \cdot 3 + 3(-1) = 0$

Respuesta: $A = (1,3)$ y $B = (3,-1)$ son ortogonales.

iii) $A \cdot B = (1,3) \cdot (-6,2) = 1(-6) + 3 \cdot 2 = 0$

Respuesta: $A = (1,3)$ y $B = (-6,2)$ son ortogonales.

iv) $A \cdot B = (1,3,2) \cdot (3,1,-3) = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 2(-3) = 0$

Respuesta: $A = (1,3,2)$ y $B = (3,1,-3)$ son ortogonales.

v) $A \cdot B = (1,3,2) \cdot (0,-2,3) = 1 \cdot 0 + 3(-2) + 2 \cdot 3 = 0$

Respuesta: $A = (1,3,2)$ y $B = (0,-2,3)$ son ortogonales.

Observar que en los tres primeros casos el vector A es el mismo. Por estar en el plano, el hecho que los vectores $B = (3,-1)$ y $B = (-6,2)$ de ii) y iii) hayan resultado ortogonales al mismo vector A indica que dichos vectores tienen la misma dirección: en efecto, $(-6,2) = -2(3,-1)$. Sin embargo, no sucede lo mismo en iv) y v): aunque los dos vectores $B = (3,1,-3)$ y $B = (0,-2,3)$ son ortogonales al mismo vector A, dichos vectores no tienen la misma dirección. Esto puede ocurrir debido a que en el espacio hay infinitas direcciones ortogonales a una dada.

Ejemplo 5. Hallar todos los vectores $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ que son ortogonales a $A = (-3,2)$.

Solución: De nuestra definición, la condición para x e y para que (x,y) sea ortogonal a A es

$$(x,y) \cdot (-3,2) = 0 \iff -3x + 2y = 0,$$

que es una ecuación con dos incógnitas de la que solo podemos despejar una variable respecto de la otra. Por ejemplo $(x,y) = (x, \frac{3}{2}x)$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$ con lo que tendremos infinitas soluciones:

Respuesta: Los vectores ortogonales a A son los del conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/(x,y) = (x, \frac{3}{2}x)$, con $x \in \mathbb{R}\}$.

Notar que, en el ejemplo, si x vale cero, obtenemos $(x,y) = (0,0) = O$ como solución. El vector O, que llamamos vector nulo, no define una dirección ni sentido. Aunque carece de algunas de las características fundamentales de los vectores, lo consideraremos como tal para poder operar.

Ejemplo 6. Hallar dos vectores $X \in \mathbb{R}^3$ ortogonales a $A = (1,2,-1)$ y a $B = (-3,1,4)$ simultáneamente.

Solución: Necesitamos que se cumplan simultáneamente las dos condiciones:

$$X \perp A \quad \text{y} \quad X \perp B$$

Si $X = (x_1, x_2, x_3)$, estas condiciones nos dan las ecuaciones:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \quad \text{y} \quad -3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0$$

Podemos despejar en la primera ecuación $x_3 = x_1 + 2x_2$. Sustituimos en la segunda, obtenemos $-3x_1 + x_2 + 4(x_1 + 2x_2) = 0$ que, simplificando, nos da $x_1 + 9x_2 = 0$. Despejamos $x_1 = -9x_2$. Reemplazamos esta expresión en el despeje anterior: $x_3 = -9x_2 + 2x_2 = -7x_2$. Así, concluimos que:

$$x_1 = -9x_2 \quad \text{y} \quad x_3 = -7x_2$$

Como solo necesitamos hallar dos vectores $X = (x_1, x_2, x_3)$, podemos elegir dos valores para x_2 y, para cada uno de ellos, calcular las otras coordenadas de X. Por ejemplo, con $x_2 = 1$, resulta $X = (-9,1,-7)$ y con $x_2 = -2$, $X = (18,-2,14)$.

Respuesta: Dos vectores ortogonales a A y B son $X = (-9,1,-7)$ y $X = (18,-2,14)$.

Verificación:

Con $x_2 = 1$

$X \cdot A = (-9,1,-7) \cdot (1,2,-1) = -9 + 2 + 7 = 0$ y $X \cdot B = (-9,1,-7) \cdot (-3,1,4) = 27 + 1 - 28 = 0$

Con $x_2 = -2$

$X \cdot A = (18,-2,14) \cdot (1,2,-1) = 18 - 4 - 14 = 0$ y $X \cdot B = (18,-2,14) \cdot (-3,1,4) = -54 - 2 + 56 = 0$

Es importante notar que en este caso la respuesta no es única: si elegimos otros valores de x_2, obtendremos otros vectores X ortogonales a A y B simultáneamente.

El próximo ejemplo muestra cómo hallar vectores que forman determinado ángulo (no necesariamente recto) con una dirección dada.

Ejemplo 7. Dado $A = (1, \sqrt{3})$, hallar todos los B tales que $\theta(A,B) = \dfrac{\pi}{6}$ y $\|B\| = 3$.

Solución: Tenemos dos condiciones:

a) La relación $A \cdot B = \|A\| \|B\| \cos(\frac{\pi}{6})$

b) $\|B\| = 3$

Si llamamos (x, y) a las coordenadas de B, de a) obtenemos

$$x + \sqrt{3} \cdot y = 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

y de b),

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 3 \iff x^2 + y^2 = 9.$$

Entonces, debemos encontrar los valores x, y para los cuales se cumplen simultáneamente:

$$x + \sqrt{3} \cdot y = 3\sqrt{3} \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 = 9.$$

Como la segunda ecuación es cuadrática, conviene despejar en la primera

$$x = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot y$$

y luego reemplazar en la segunda:

$$\begin{aligned} (3\sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot y)^2 + y^2 &= 9 \\ (3\sqrt{3})^2 + 2(3\sqrt{3})(-\sqrt{3} \cdot y) + (-\sqrt{3} \cdot y)^2 + y^2 &= 9 \\ 27 - 18 \cdot y + 4 \cdot y^2 &= 9 \end{aligned}$$

Igualando a 0 y reordenando los términos obtenemos:

$$4 \cdot y^2 - 18 \cdot y + 18 = 0$$

Esta es una ecuación cuadrática de la forma $ay^2 + by + c = 0$, donde la incógnita es y y los coeficientes son $a = 4$, $b = -18$ y $c = 18$. Usamos la fórmula resolvente para hallar sus ceros:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 18}}{2 \cdot 4} = \frac{18 \pm \sqrt{36}}{8} = \frac{18 \pm 6}{8}.$$

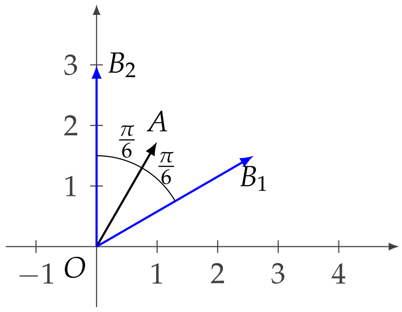
De este modo, hallamos las dos soluciones de la ecuación:

$$y = \frac{18 - 6}{8} = \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{18 + 6}{8} = 3$$

Para encontrar los vectores B correspondientes, reemplazamos en el despeje de x en función de y;

Con $y = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad B_1 = \left(\frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$

Con $y = 3 \Rightarrow x = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_2 = (0, 3)$



Respuesta: Hay dos soluciones $B_1 = \left(\frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$ y $B_2 = (0, 3)$.