Sistemas con parámetros

Llamamos *sistemas con parámetros* a aquellos sistemas donde algunos de los coeficientes dependen de uno o más parámetros. Por ejemplo,

$$S: \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ & & (k^2-1)x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ & & & & (k-2)x_3 & = & -3 \end{array} \right. .$$

es un sistema con un parámetro $k \in \mathbb{R}$.

Usamos esta expresión para describir muchos sistemas, uno para cada valor de $k \in \mathbb{R}$. Por ejemplo para $k = 0$, el sistema es

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ & - & x_2 & & 3x_3 & = & 3 \\ & & & - & 2x_3 & = & -3 \end{array} \right.$$

y, para $k = -2$, resulta

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ & & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ & & & - & 4x_3 & = & -3 \end{array} \right. .$$

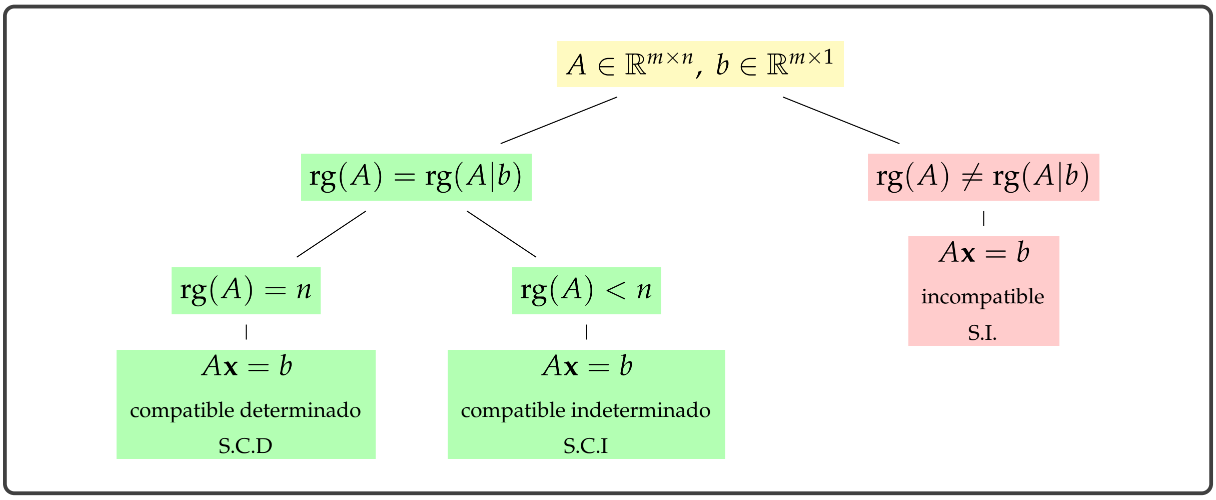
Cada uno de estos sistemas tiene su correspondiente conjunto solución. Buscamos clasificar estos sistemas, para cada valor del parámetro k, respecto de sus conjuntos solución como: sistema incompatible, sistema compatible indeterminado o sistema compatible determinado.

Tendremos como herramienta primordial el **Teorema de Rouché-Frobenius** y sus consecuencias:

Teorema

El sistema lineal de matriz ampliada $(A|b)$ es compatible si y solo si el rango de $(A|b)$ es igual al rango de A. Además, el sistema es compatible determinado si y sólo si los rangos de $(A|b)$ y de A son ambos iguales a la cantidad de incógnitas (que coincide con la cantidad de columnas de A).

Podemos visualizar las posibilidades en el siguiente diagrama:



Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1. Clasificar el sistema para cada valor de $k \in \mathbb{R}$:

$$S : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ (k^2-1)x_2 + 3x_3 = 3 \\ (k-2)x_3 = -3 \end{cases}.$$

Solución. Para cada valor de k, debemos estudiar $\text{rg}(A)$ y $\text{rg}(A|b)$, es decir debemos escalonar estas matrices para determinar la cantidad de filas no nulas en una matriz escalonada equivalente. Trabajamos sobre el ejemplo, pasando a la matriz ampliada $(A|b)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & k^2-1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & k-2 & -3 \end{array}\right).$$

Esta matriz parece estar escalonada; sin embargo, esto no es cierto para algunos valores de k. Solo podemos afirmar que si $k^2 - 1 \neq 0$ y $k - 2 \neq 0$, la matriz está escalonada y $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$. Entonces, el sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ (k^2-1)x_2 + 3x_3 = 3 \\ (k-2)x_3 = -3 \end{cases}$$

es compatible determinado si $k^2 - 1 \neq 0$ y $k - 2 \neq 0$.

Falta analizar $\text{rg}(A)$ y $\text{rg}(A|b)$ para los casos en que $k^2 - 1 = 0$ ó $k - 2 = 0$.

$k = -1$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+F_2 \to F_3]{\text{no está escalonada}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ está escalonada.}$$

Como $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 2$, se trata de un sistema compatible indeterminado.

$k = 1$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[3F_3+F_2 \to F_3]{\text{no está escalonada.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right) \text{ está escalonada.}$$

Podemos afirmar que $\text{rg}(A) = 2$ y $\text{rg}(A|b) = 3$, luego se trata de un sistema incompatible.

$k = 2$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \text{ está escalonada,}$$

entonces $\text{rg}(A) = 2$ y $\text{rg}(A|b) = 3$. El sistema es incompatible.

Hemos clasificado este sistema para cada posible valor del parámetro k, según sus posibles conjuntos solución.

Respuesta:

$$S \text{ es un sistema } \begin{array}{c} \nearrow \\ \rightarrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} \text{compatible determinado } \forall k \in \mathbb{R} - \{-1, 1, 2\}. \\ \text{incompatible si } k = 1 \text{ ó } k = 2. \\ \text{compatible indeterminado si } k = -1. \end{array}$$

Ejemplo 2. Clasificar, para cada valor de $a \in \mathbb{R}$, el sistema asociado a la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 1 & a & -5 \\ 6 & 5 & -3 & 5 & 10 \\ a & 0 & a & -(3a+2) & -1 \end{array}\right),$$

y resolverlo para aquellos valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que resulte ser un sistema compatible indeterminado.

Solución. Para clasificar el sistema debemos hallar el rango de la matriz ampliada (en función del parámetro a). Tendremos que escalonar la matriz. Recordamos que las operaciones permitidas para obtener una matriz equivalente en las filas son

$$\begin{array}{lrll} (1) & F_i & \leftrightarrow F_j & \\ (2) & F_i + \alpha F_j & \rightarrow F_i & \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ (3) & \beta F_i & \rightarrow F_i & \text{si } \beta \neq 0 \end{array}$$

Al escalonar procuramos usar la propiedad (2) antes que la propiedad (3) ya que esta última tiene la restricción $\beta \neq 0$ (hay que tener cuidado de no multiplicar una fila por cero). Comenzamos

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 1 & a & -5 \\ 6 & 5 & -3 & 5 & 10 \\ a & 0 & a & -(3a+2) & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ F_2 + 3F_1 \rightarrow F_2 \\ F_3 - 6F_1 \rightarrow F_3 \\ F_4 - aF_1 \rightarrow F_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & a+3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -a & 2a & -4a-2 & -1-2a \end{array}\right).$$

Observamos que la operación $F_4 - aF_1 \rightarrow F_4$ es lícita ya que sigue la forma de la propiedad (2). Continuamos escalonando:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & a+3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -a & 2a & -4a-2 & -1-2a \end{array}\right) \begin{array}{c} F_3 + F_2 \rightarrow F_3 \\ F_4 + aF_2 \rightarrow F_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & a+3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a+2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \underbrace{a^2-a-2}_{-4a-2+a(a+3)} & \underbrace{-1-a}_{-1-2a+a\cdot 2} \end{array}\right).$$

La matriz está escalonada. Como en el ejemplo anterior, analizamos primero el caso en que $a^2-a-2 \neq 0$: para los valores de a que cumplen esto, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b) = 4$.

Concluimos que $(A|b)$ resulta ser un sistema compatible determinado si $a \neq 2, -1$ (soluciones de la ecuación $a^2-a-2=0$).

Estudiamos los casos $a=2$ y $a=-1$ por separado volviendo a la matriz escalonada

$a = 2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & a+3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a+2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-a-2 & -1-a \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \mathrm{rg}(A)=3,\ \mathrm{rg}(A|b)=4.$$

Para $a=2$ el sistema es incompatible.

$a = -1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & a+3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a+2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-a-2 & -1-a \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}(A|b)=3<4.$$

Para $a=-1$ el sistema es compatible indeterminado. Hallamos sus soluciones despejando del sistema escalonado

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & -1 \end{array}\right. .$$

De la tercera ecuación despejamos la variable $x_3 = -1-x_4$ y reemplamos esta expresión en las ecuaciones superiores

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & (-1-x_4) & + & x_4 & = & 2 \\ & & x_2 & - & 2(-1-x_4) & + & 2x_4 & = & 1 \\ & & & & & & x_3 & = & -1-x_4 \end{array}\right.$$

Reescribimos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & + & 4x_4 & = & -1 \\ & & & & x_3 & = & -1-x_4 \end{array}\right. .$$

De la segunda ecuación despejamos la variable $x_2 = -1-4x_4$, la reemplazamos en la primera ecuación

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & (-1-4x_4) & + & 2x_4 & = & 1 \\ & & & & x_2 & = & -1-4x_4 \\ & & & & x_3 & = & -1-x_4 \end{array}\right. .$$

y, finalmente, despejamos x_1 en función de x_4:

$$\begin{cases} x_1 &=& 2+2x_4 \\ x_2 &=& -1-4x_4 \\ x_3 &=& -1-x_4 \end{cases} \Rightarrow \quad X=(2+2x_4,-1-4x_4,-1-x_4,x_4).$$

Escribimos las soluciones del sistema correspondiente a $a=-1$ en forma paramétrica

$$S: \quad X=\lambda(2,-4,-1,1)+(2,-1,-1,0), \quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Resumimos la clasificación del sistema para los distintos valores de $a\in\mathbb{R}$:

Respuesta:

$$S \text{ es un sistema } \begin{array}{l} \nearrow \text{ compatible determinado } \forall a\in\mathbb{R}-\{-1,2\}. \\ \rightarrow \text{ incompatible si } a=2. \\ \searrow \text{ compatible indeterminado si } a=-1. \end{array}$$

Para el valor $a=-1$, para el cual es compatible indeterminado, las soluciones del sistema son $X=\lambda(2,-4,-1,1)+(2,-1,-1,0), \quad \lambda\in\mathbb{R}$.

Ejemplo 3. Hallar todos los a y $b\in\mathbb{R}$ tales que $(-3,1,0)$ es una de las infinitas soluciones del sistema

$$S:\begin{cases} -2x - ay + 2z = 4 \\ -x + y - bz = 4 \\ 2y + 5z = 2 \end{cases}$$

Solución. En primer lugar veamos cómo tienen que ser a y b para que $(-3,1,0)$ sea solución de este sistema, es decir, que cumpla todas las ecuaciones

$$\begin{cases} -2\cdot(-3) - a\cdot 1 + 2\cdot 0 = 4 \\ -(-3) + 1 - b\cdot 0 = 4 \\ 2\cdot 1 + 5\cdot 0 = 2 \end{cases} \iff \quad a=2.$$

Entonces, $(-3,1,0)$ es solución para $a=2$ y para cualquier valor de b. Ahora sí, con $a=2$ analizamos para qué valores de b resulta ser un sistema compatible indeterminado (con infinitas soluciones). Lo hacemos buscando que el rango de la matriz del sistema sea menor que 3 (es decir, que se anule alguna fila al escalonar),

$$S:\begin{cases} -2x - 2y + 2z = 4 \\ -x + y - bz = 4 \\ 2y + 5z = 2 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -b & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

$$2F_2-F_1\rightarrow F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -2b-2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \end{array}\right) 2F_3-F_2\rightarrow F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -2b-2 & 4 \\ 0 & 0 & 12+2b & 0 \end{array}\right)$$

Para que el rango de $(A|b)$ sea igual al de A y menor que 3, la única posibilidad es que la tercera fila sea nula; esto solo ocurre si $b = -6$.
Por lo tanto,

$\boxed{\text{Respuesta: } (-3, 1, 0) \text{ es una de las infinitas soluciones del sistema si y solo si } a = 2 \text{ y } b = -6.}$

Ejemplo 4. Clasificar el sistema para cada $c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} c & -1 & 1 & 1 \\ 0 & c^2-1 & c+1 & -1 \\ c & c^2-1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Solución. Pasamos a la matriz ampliada para estudiar su rango

$$\left(\begin{array}{cccc|c} c & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & c^2-1 & c+1 & -1 & 0 \\ c & c^2-1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) F_3 - F_1 \to F_3 \left(\begin{array}{cccc|c} c & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & c^2-1 & c+1 & -1 & 0 \\ 0 & c^2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Para seguir escalonando, si $c^2 - 1 \neq 0$, podríamos hacer

$$(c^2-1)F_3 - c^2F_2 \to F_3$$

y conseguir un 0 en el lugar 32 de la matriz. Observemos que ésta es una combinación de la operación (3) con $\beta = c^2 - 1$ (para aplicarla es necesario que $c^2 - 1 \neq 0$) y la operación (2) con $\alpha = -c^2$. Si procedemos de este modo, tendríamos que analizar, separadamente, los valores de c tales que $c^2 - 1 = 0$, para los cuales la operación anterior no es válida.
Mostramos una alternativa que, si bien en el primer paso no logra escalonar la matriz, en el segundo sí. Procuramos que el parámetro no aparezca en el lugar principal de la segunda fila

$$\left(\begin{array}{cccc|c} c & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & c^2-1 & c+1 & -1 & 0 \\ 0 & c^2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) F_2 - F_3 \to F_2 \left(\begin{array}{cccc|c} c & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & c+1 & 0 & -1 \\ 0 & c^2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right),$$

y ahora sí operamos usando la propiedad (2) para escalonar

$$F_3 + c^2F_2 \to F_3 \left(\begin{array}{cccc|c} c & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & c+1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & c^3+c^2 & -1 & 1-c^2 \end{array}\right).$$

Podemos asegurar que la matriz está escalonada si $c \neq 0$ y $c^3 + c^2 \neq 0$. Para estos valores de c tenemos que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ y así el sistema resulta compatible indeterminado.
Los valores que nos resta analizar por separado son $c = 0$ y $c = -1$ (las soluciones de $c = 0$ y de $c^3 + c^2 = 0$).

$c = -1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \text{ está escalonada } \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3.$$

Entonces, para $c = -1$ el sistema es compatible indeterminado.

$c = 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \text{no está escalonada} \\ F_2 - F_1 \to F_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$F_3 - F_2 \to F_3 \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Para $c = 0$ resulta $\mathrm{rg}(A) = 2$ y $\mathrm{rg}(A|b) = 3$; luego, el sistema es incompatible.

Resumimos la clasificación completa del sistema:

Respuesta:

compatible indeterminado $\forall c \in \mathbb{R} - \{0\}$.

$\nearrow$

S es un sistema

$\searrow$

incompatible si $c = 0$.