Ecuaciones matriciales

En esta sección trabajaremos con ecuaciones donde la incógnita a despejar es una matriz.

Ejemplo 1. Resolver

$$2A - 3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 3A.$$

Solución. Debemos hallar **todas** las matrices A que satisfacen la ecuación. En primer lugar determinemos qué tamaño debe tener A. Vemos que en el primer miembro se debe poder sumar $2A$ con una matriz de tamaño 3×2 por lo tanto $2A$ también debe ser de tamaño 3×2. Se deduce entonces que $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$.
La ecuación planteada para resolver establece una igualdad entre matrices de $\mathbb{R}^{3\times 2}$. Usamos las propiedades conmutativa, asociativa (y otras) de la suma y el producto por escalar, junto con la propiedad distributiva, para despejar.

$$\begin{aligned}
2A - 3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 3A & \iff \\
2A - \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -3 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 3A & \iff \\
2A + 3A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -3 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} & \iff \\
(2+3)A &= \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} & \iff \\
\tfrac{1}{5} \cdot 5A &= \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} & \iff \\
A &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Respuesta: La ecuación tiene una única solución $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

Ejemplo 2: Hallar todas las matrices $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución. Ya que el enunciado establece que $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, proponemos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y calculamos los productos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -2a+c & -2b+d \end{pmatrix}$$

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2b & b \\ c-2d & d \end{pmatrix}.$$

Para que estos productos coincidan, debe ser

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -2a+c & -2b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2b & b \\ c-2d & d \end{pmatrix},$$

y entonces las matrices deben coincidir lugar a lugar:

$$\begin{cases} a = a-2b & \text{lugar}_{11} \\ b = b & \text{lugar}_{12} \\ -2a+c = c-2d & \text{lugar}_{21} \\ d = -2b+d & \text{lugar}_{22} \end{cases}.$$

Este es un sistema lineal con incógnitas a, b, c, d. Agrupando estas incógnitas en el miembro de la izquierda, resulta ser un sistema homogéneo:

$$\begin{cases} 2b = 0 \\ 0 = 0 \\ -2a + 2d = 0 \\ 2b = 0 \end{cases}.$$

Podemos ver (aún sin escalonar) que se trata de un sistema con infinitas soluciones, equivalente al que sigue:

$$\begin{cases} -2a + 2d = 0 \\ 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = d \\ b = 0 \\ c, d \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

A pesar de haber hallado estos valores mediante la resolución de un sistema, no tendría sentido escribir la solución como una 4-upla dado que la incógnita X es una matriz. Damos la forma paramétrica de la solución recordando que a, b, c, d eran los coeficientes de X. Escribimos

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c, d \in \mathbb{R}$$

para describir todas las soluciones de la ecuación.

Respuesta: La ecuación tiene infinitas soluciones, $X = c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $c, d \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 3. Resolver la ecuación

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Solución. El primer paso es determinar qué tamaño tiene X para que la igualdad tenga sentido:

$$\underset{3\times 4}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}} \quad \underset{m\times n}{X} \quad = \quad \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}}.$$

Vemos que m, la cantidad de filas de X, queda determinada para poder calcular el producto y debe ser igual a 4. Obtenemos en el miembro izquierdo de la igualdad una matriz de $3 \times n$ que solo puede ser igual al miembro de la derecha si n, la cantidad de columnas de X, es 1. Es decir, X es una matriz columna (de 4×1). Proponemos

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \text{y calculamos} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot X$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \\ -3x_2 + x_3 + 5x_4 \end{pmatrix}.$$

Estamos buscando $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ que cumplan

$$\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \\ -3x_2 + x_3 + 5x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Al igualar estas matrices tenemos que x_1, x_2, x_3, x_4 deben ser soluciones del sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 7 \\ -3x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}.$$

Para resolverlo, pasamos a su matriz ampliada para luego escalonar

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -3 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right).$$

Si nos tomamos un momento para releer la ecuación que queremos resolver, vemos que tiene la forma $A \cdot X = b$ y que para hallar X vamos a escalonar la matriz ampliada $(A|b)$. Es decir, si b es una matriz columna entonces

$$A \cdot X = b \text{ se resuelve escalonando la matriz } (A|b).$$

Hagámoslo para este caso:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -3 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-2F_1\to F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_2\to F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Hemos terminado de escalonar; ahora reconstruimos el sistema para despejar:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & & & - & x_4 & = & 2 \\ & - & 3x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_4 & = & 2 \\ & & x_2 & & & = & -1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2(-1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_4) & - & x_4 & = & 2 \\ & & x_2 & & & = & -1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_4 \end{array}\right..$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & 4 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{7}{3}x_4 \\ x_2 & = & -1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_4 \end{array}\right.$$

Para expresar la solución recordamos que la incógnita X era una matriz columna:

$$X = \begin{pmatrix} 4 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{7}{3}x_4 \\ -1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Respuesta: Tenemos infinitas soluciones, $X = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s, t \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 4. Hallar todas las matrices $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ que satisfacen

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución. Proponemos $X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$. Antes de reemplazar manipulamos la ecuación tratando de que la incógnita X aparezca en un solo miembro de la igualdad (como haríamos en una ecuación de números reales):

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \iff \\
\text{(prop. del producto de matrices)} \quad \left[\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right] \cdot X &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \iff \\
\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ahora sí, escribimos $X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ y entonces debe valer

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 & 2y_1 + y_2 \\ -2x_1 - x_2 & -2y_1 - y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nuevamente esta igualdad de matrices conduce a un sistema (de incógitas x_1, x_2, y_1, y_2)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -2 \\ 2y_1 + y_2 = 1 \\ -2x_1 - x_2 = 2 \\ -2y_1 - y_2 = 1 \end{cases}.$$

Vemos que las variables x_1, x_2 (que corresponden a la primera columna de X) aparecen "separadas"de las variables y_1, y_2 (que corresponden a la segunda columna de X). Podemos aprovechar esta característica para considerar dos sistemas independientes

$$S_x : \begin{cases} 2x_1 + x_2 = -2 \\ -2x_1 - x_2 = 2 \end{cases}, \quad S_y : \begin{cases} 2y_1 + y_2 = 1 \\ -2y_1 - y_2 = 1 \end{cases}.$$

Pasamos a las matrices ampliadas asociadas y vemos que

$$S_x \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \end{array}\right), \quad S_y \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Al estar asociadas a la misma matriz podemos resolver simultáneamente:

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Notar que para resolver la ecuación $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ tenemos que escalonar la matriz $\left(\begin{array}{cc|c|c} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$. En en el caso general

$A \cdot X = B$ se resuelve escalonando $(A|B)$.

Volviendo a la resolución, escalonamos:

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad F_2 + F_1 \to F_2 \quad \left(\begin{array}{cc|c|c} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Recordemos que despejamos cada columna de la solución X según la columna correspondiente que amplía el sistema,

$$S'_x \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad S'_y \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

El sistema S'_x tiene infinitas soluciones (es decir, hay infinitas posibilidades para la primera columna de X), pero el sistema S'_y es incompatible (no existe segunda columna para X). Concluimos que:

Respuesta: La ecuación no tiene solución.

Inversa de una matriz

En esta sección trabajaremos únicamente con matrices cuadradas. Hemos mencionado que la matriz identidad $\mathbb{I}_n$ es el elemento neutro del producto en $\mathbb{R}^{n\times n}$. Ahora queremos averiguar si una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tiene *inversa*, es decir, si existe una matriz $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ que cumpla

$$B \cdot A = A \cdot B = \mathbb{I}_n.$$

En caso afirmativo, en lugar de B escribimos A^{-1} para notar a la inversa de A, y decimos que A es *inversible*. Para ver si existe y, en caso afirmativo hallarla, planteamos la ecuación $A \cdot X = \mathbb{I}_n$ y buscamos resolverla.

Ejemplo 1. Hallar, si existe, la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución. Planteamos

$$A \cdot X = \mathbb{I}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Según lo estudiado en la sección anterior hallamos (las columnas de) X escalonando la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad 3F_2 - 2F_1 \to F_2 \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \end{array}\right) \quad 2F_1 + F_2 \to F_1 \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

procurando llegar al 1 principal en cada fila:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \frac{1}{6}F_1 \to F_1 \\ -\frac{1}{2}F_2 \to F_2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -\dfrac{3}{2} \end{array}\right).$$

La ecuación tiene (una única) solución. La solución $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tiene primera columna $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y segunda columna $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Verificamos que esta matriz X también cumple que $X \cdot A = \mathbb{I}_2$ y, por lo tanto, es la inversa de A. Concluimos que:

Respuesta: La matriz A es inversible y $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

Observación. Se puede demostrar (aunque no lo haremos) que, para una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, si existe una solución de $A \cdot X = \mathbb{I}_n$, la matriz solución tambien es solución de $X \cdot A = \mathbb{I}_n$, es decir, es la inversa de A. En este caso A resulta equivalente a $\mathbb{I}_n$ y su inversa puede hallarse escalonando

$$(A \mid \mathbb{I}_n) \quad \rightsquigarrow \quad (\mathbb{I}_n \mid A^{-1}).$$

Ejemplo 2. Mostrar que la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ no es inversible.

Solución. Planteamos la ecuación $A \cdot X = \mathbb{I}_3$ y escalonamos la matriz ampliada $(A|\mathbb{I}_3)$ hasta reducir,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} F_2 + F_1 \to F_2 \\ F_3 + F_1 \to F_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$2F_3 - F_2 \to F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Para hallar cada columna de la solución X debemos estudiar las matrices ampliadas

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

que corresponden a sistemas incompatibles. No es posible hallar X: esto implica que A no es inversible.

Rango de una matriz

El *rango de una matriz* M, que notamos $\text{rg}(M)$, es la cantidad de filas no nulas de una matriz escalonada a la que es equivalente M. Recordemos que dos matrices son equivalentes si se puede llegar de una a la otra aplicando las operaciones entre filas con las que hemos trabajado. Para las matrices de los Ejemplos 1 y 2 de la sección anterior:

$$\text{rg}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix} = 2, \quad \text{ya que } \begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix} \text{ es equivalente a } \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\text{rg}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 9\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix} = 2, \quad \text{ya que } \begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 9\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix} \text{ es equivalente a } \begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 10\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Ejemplo 3. Hallar la matriz inversa de $C = \begin{pmatrix}1 & 4 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y verificar que $\text{rg}(C) = 4$.

Solución. Escalonamos la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{F_2-2F_1\to F_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3F_3+F_2\to F_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 0 & -2 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right).$$

Vemos que la matriz está escalonada y podemos afirmar que $\text{rg}(C) = 4$. Para reducir, ahora vamos a conseguir ceros arriba de los lugares principales:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 0 & -2 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{6F_1+4F_2\to F_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc}6 & 0 & 6 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 0 & -2 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1-F_3\to F_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc}6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0\\ 0 & -6 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 0 & -2 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{6}F_3\to F_3]{\frac{1}{6}F_1\to F_1 \quad -\frac{1}{6}F_2\to F_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right).$$

Hemos calculado

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podemos ver en los ejemplos que una matriz $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inversible si y solo si $\text{rg}(M) = n$.
Observamos que si M es inversible, la ecuación $M \cdot \mathbf{x} = b$ tiene una **única** solución. Despejamos dicha solución multiplicando ambos miembros de la ecuación por la inversa de M (por izquierda),

$$\begin{aligned} M \cdot \mathbf{x} &= b \\ M^{-1} \cdot M \cdot \mathbf{x} &= M^{-1} \cdot b \\ \mathbb{I}_n \cdot \mathbf{x} &= M^{-1} \cdot b \\ \mathbf{x} &= M^{-1} \cdot b\,. \end{aligned}$$

A su vez, si para una matriz cuadrada M, cada sistema $M \cdot \mathbf{x} = b$ tiene (única) solución, entonces M resulta inversible.
Resumimos las propiedades de las matrices cuadradas respecto de su inversa:

Propiedad.

Si $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, son equivalentes:

- M es inversible.
- $M \cdot \mathbf{x} = b$ es un sistema compatible determinado.
- $M \cdot \mathbf{x} = 0$ tiene única solución trivial.
- M es equivalente a $\mathbb{I}_n$.
- El rango de M es n.