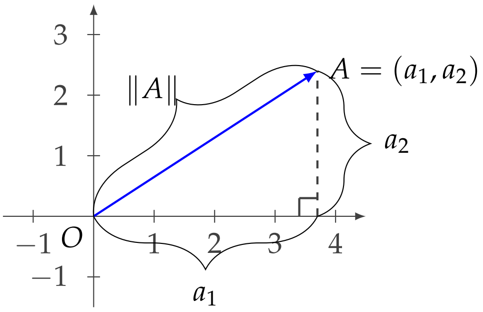
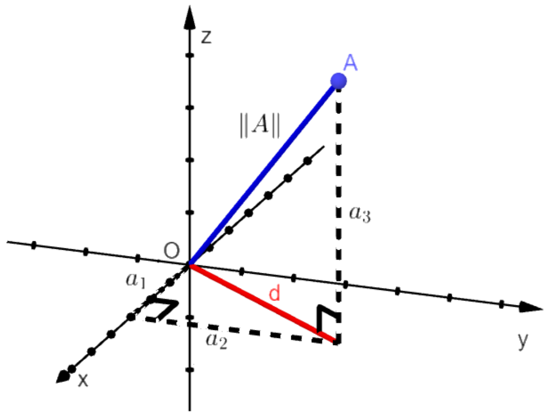
Norma de un vector

Para calcular la *longitud* o *norma* de un vector en $\mathbb{R}^2$ utilizamos el teorema de Pitágoras



$$\|A\| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$$

Análogamente en $\mathbb{R}^3$ podemos aplicar el teorema a los dos triángulos rectángulos de la figura



y obtenemos:

$$\|A\| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$$

Ejemplo 1. Calcular la norma de los vectores $A = (3, 4)$ y $B = (-2, -1, 4)$.

Solución: Para el vector $A \in \mathbb{R}^2$, aplicando la primera fórmula obtenemos:

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Respuesta: $\|A\| = 5$

En el caso de $B \in \mathbb{R}^3$, aplicamos la segunda fórmula. Tenemos que tener cuidado con las coordenadas que son negativas; se hace necesario usar paréntesis al elevar al cuadrado:

$$\begin{aligned} \|B\| &= \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{21} \end{aligned}$$

Respuesta: $\|B\| = \sqrt{21}$

Las mismas fórmulas pueden usarse para calcular la longitud de un segmento:

Ejemplo 2. Hallar la longitud del segmento de extremos $A = (1, -2, 3)$ y $B = (-2, 1, 3)$.

Solución: Si le asignamos un sentido al segmento, podemos verlo como un vector, digamos $\overrightarrow{AB}$. Sin importar cuál de los puntos elijamos como origen y cuál como extremo, la longitud de este vector es la del segmento de extremos A y B.
Tenemos el vector $\overrightarrow{AB}$ que no tiene el origen en O. Para usar las fórmulas anteriores para calcular su longitud tendremos que trasladarlo al origen.

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{AB}\| &= \|B - A\| \\ &= \|(-2, 1, 3) - (1, -2, 3)\| \\ &= \|(-3, 3, 0)\| \\ &= \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{18} \end{aligned}$$

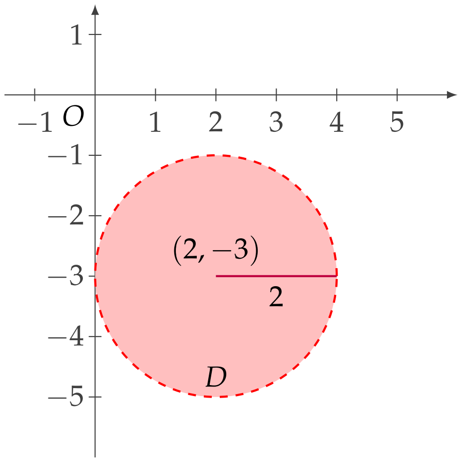
Respuesta: La longitud del segmento de extremos A y B es $\sqrt{18}$.

Este ejemplo nos muestra una forma general para calcular la distancia entre dos puntos: la distancia entre A y B, que escribimos $d(A, B)$, se calcula como

$$d(A, B) = \|B - A\|$$

Ejemplo 3. Representar gráficamente el conjunto $D = \{X \in \mathbb{R}^2 / d(X, (2, -3)) < 2\}$.

Solución: Los puntos de D son los puntos del plano que están a distancia menor que 2 del punto $(2, -3)$. Esta es la descripción de un disco de radio 2 con centro en $(2, -3)$, sin incluir el borde.



Con la línea punteada damos a entender que el borde no es parte del conjunto.

Ejemplo 4. Si $A = (-1, 1, 0)$ y $B = (1, -2, k)$, hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $d(A, B) = 7$.

Solución: Sabemos que $d(A, B) = \|B - A\|$; en este caso:

$$\begin{aligned} d(A,B) &= \|(1,-2,k) - (-1,1,0)\| \\ &= \|(2,-3,k)\| \\ &= \sqrt{2^2 + (-3)^2 + k^2} \\ &= \sqrt{13 + k^2}. \end{aligned}$$

En consecuencia, el valor de $k \in \mathbb{R}$ tiene que cumplir

$$\begin{aligned} \sqrt{13 + k^2} &= 7 \\ 13 + k^2 &= 7^2 \\ k^2 &= 49 - 13 \\ k^2 &= 36 \\ \sqrt{k^2} &= \sqrt{36} \end{aligned}$$

Hay que tener cuidado con la última ecuación. Como la potencia k^2 está dentro de la raíz, esta parte se simplifica como $\sqrt{k^2} = |k|$. Entonces $|k| = 6$ y, por lo tanto, $k = 6$ o $k = -6$.

Respuesta: $k = 6$ y $k = -6$

Verificación:

Con $k = 6$, $B = (1, -2, 6)$:
$d(A, B) = \|(1, -2, 6) - (-1, 1, 0)\| = \|(2, -3, 6)\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$
Con $k = -6$, $B = (1, -2, -6)$:

$$d(A,B) = \|(1,-2,-6) - (-1,1,0)\| = \|(2,-3,-6)\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{49} = 7$$

Ejemplo 5. Hallar todos los vectores A paralelos a $B = (1,2,-2)$, de sentido opuesto a B y de longitud 12.

Solución: Para que los vectores sean paralelos es necesario que estén alineados, lo que equivale a que exista $k \in \mathbb{R}$ que verifique $A = kB$ (es decir, que sean múltiplos). Además, para que tengan sentidos opuestos, debe ser $k < 0$
Resumimos las condiciones del problema:

i) $A = kB$ con $k \in \mathbb{R}$ (para que A y B sean paralelos)

ii) $k < 0$ (para que A y B tengan sentidos opuestos)

iii) $\|A\| = 12$ (longitud)

Buscamos que se cumplan las tres condiciones simultáneamente:
Por las condiciones i) y ii),

$$A = k(1,2,-2) = (k, 2k, -2k) \text{ con } k < 0.$$

Reemplazamos en la condición iii),

$$\|A\| = \sqrt{k^2 + (2k)^2 + (-2k)^2} = \sqrt{9k^2} = \sqrt{9}\sqrt{k^2} = 3|k| = 12 \quad \Longleftrightarrow \quad |k| = 4$$

Las soluciones de esta ecuación son $k = 4$ y $k = -4$. Teniendo en cuenta que por la condición ii) debe ser $k < 0$, nos queda una única solución: $k = -4$.
Con este valor de k obtenemos el único vector A que cumple lo pedido: $A = (-4, -8, 8)$.

Respuesta: $A = (-4,-8,8)$

Verificación:

- Paralelismo: $A = -4(1,2,-2) = -4B$
- Sentido: $-4 < 0$
- Longitud: $\|A\| = \|(-4,-8,8)\| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2 + 8^2} = \sqrt{144} = 12$

Un procedimiento similar al del ejemplo nos permite encontrar vectores unitarios (también llamados *versores*) en una dirección determinada.
Si queremos un vector unitario A con la dirección de un vector dado B, debe valer:

$$A = kB \quad (k \in \mathbb{R}) \quad \text{y} \quad \|A\| = 1.$$

Como $\|A\| = \|kB\| = |k| \cdot \|B\|$, igualando a 1 y despejando, nos queda que $|k| = \frac{1}{\|B\|}$; es decir, hay dos soluciones $k = \frac{1}{\|B\|}$ y $k = -\frac{1}{\|B\|}$. Estas dos soluciones corresponden a los dos vectores unitarios que tienen la misma direción que B: el que tiene el mismo sentido que B se obtiene con $k = \frac{1}{\|B\|}$, y el que tiene sentido contrario, con $k = -\frac{1}{\|B\|}$.

Nota: La norma de una suma de vectores no solo depende de sus normas sino también del ángulo entre ellos. Por ejemplo, en las figuras siguientes los vectores A y B tienen las mismas normas respectivamente, pero sus sumas no.