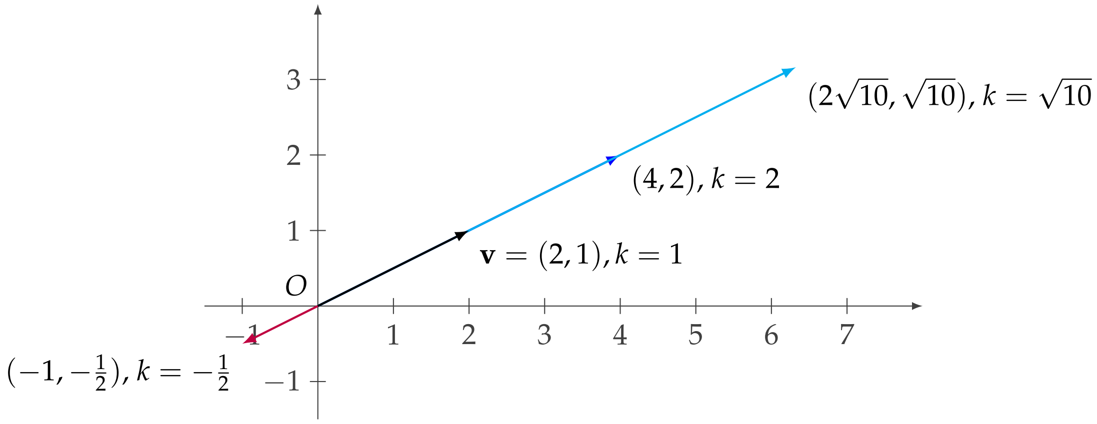
# Rectas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

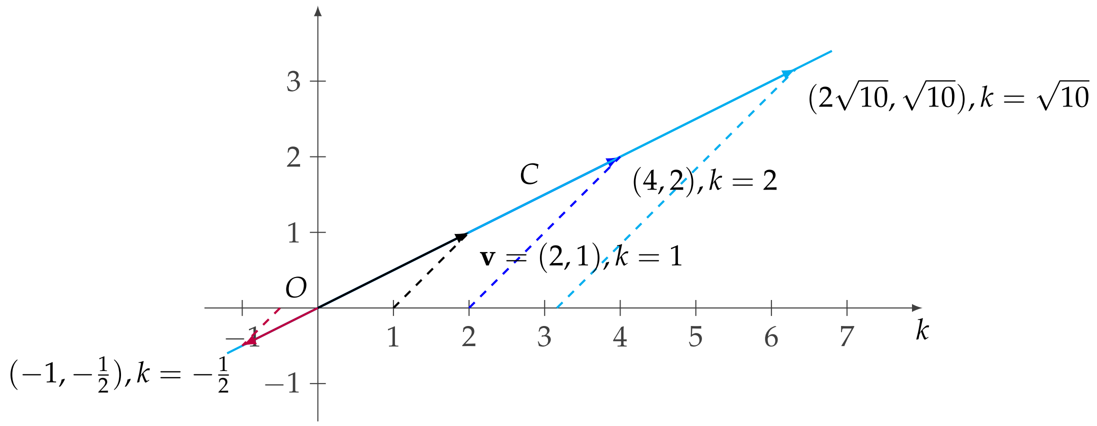
**Ejemplo 1.** Dado el vector $\mathbf{v} = (2, 1)$, graficar el conjunto

$$C = \{X \in \mathbb{R}^2 / X = k\mathbf{v}, k \in \mathbb{R}\}.$$

**Solución:** Como el producto de un escalar por un vector mantiene la dirección, los múltiplos de un vector en el origen están alineados con éste.




En este gráfico se muestran elementos de $C$ para algunos valores de $k$. Para obtenerlos a todos, necesitamos usar todos los $k \in \mathbb{R}$.
Podemos establecer una correspondencia entre los valores de $\mathbb{R}$ del eje horizontal y los puntos del conjunto a través de los valores de $k$.




Respuesta: El conjunto $C$ es una recta con la dirección de $\mathbf{v}$ que pasa por el origen.

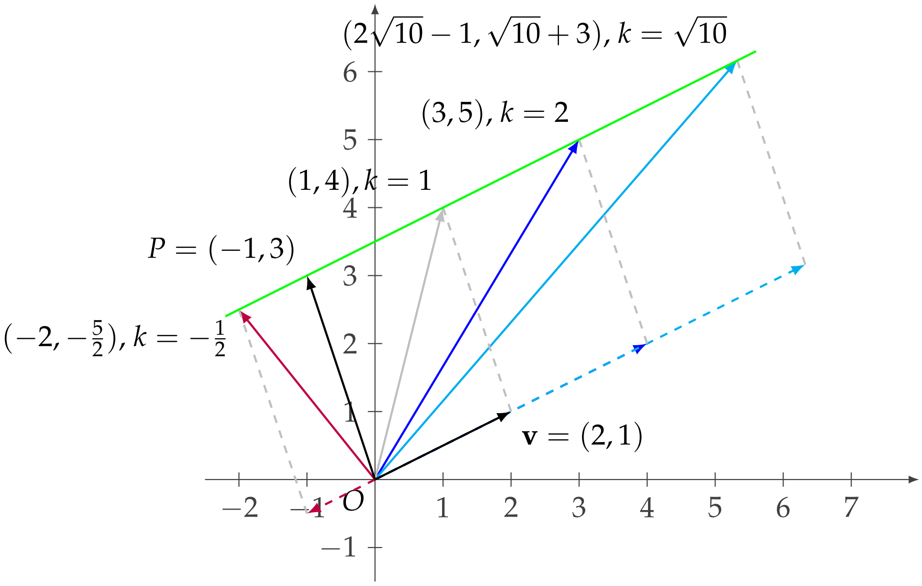
**Observación**

Si $\mathbf{v}$ es el vector nulo, el conjunto $\{X \in \mathbb{R}^2 / X = k\mathbf{v}, k \in \mathbb{R}\}$ se reduce a un punto: el origen $O$.

Para describir rectas que no pasan por el origen veamos el siguiente ejemplo.

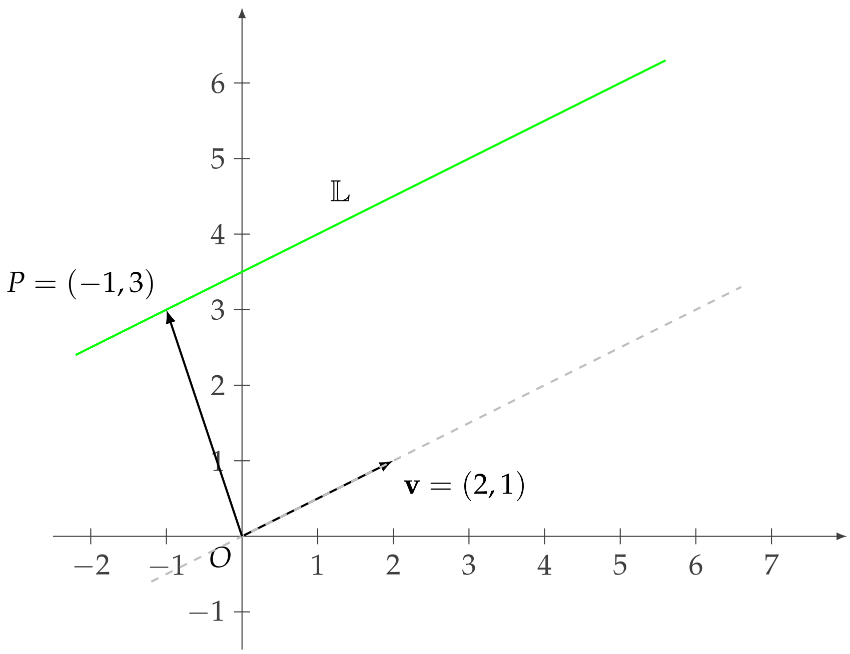
**Ejemplo 2.** Dados el vector $\mathbf{v} = (2, 1)$ y el punto $P = (-1, 3)$, graficar el conjunto $\mathbb{L} = \{X \in \mathbb{R}^2 / X = k\mathbf{v} + P, k \in \mathbb{R}\}$.

**Solución:** Notar que los elementos de este conjunto son los del conjunto $C$ del ejemplo anterior sumados con $P$.




Observar que los extremos de los vectores resultantes están alineados. El conjunto de todos los puntos de la forma $k\mathbf{v} + P$ con $k \in \mathbb{R}$ forma entonces una recta, con la dirección de $\mathbf{v}$, que pasa por el punto $P$ (este punto se obtiene con $k = 0$).

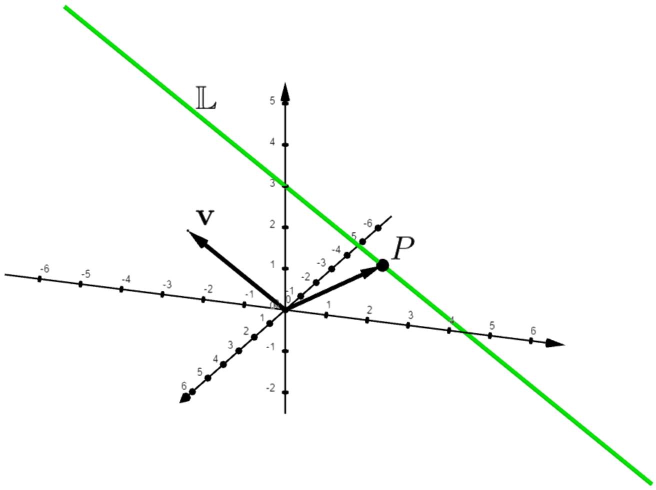
Respuesta:



**Ejemplo 3.** Dados el vector $\mathbf{v} = (1. -2, 2)$ y el punto $P = (-1, 2, 1)$, graficar el conjunto $\mathbb{L} = \{X \in \mathbb{R}^3 / X = k\mathbf{v} + P, k \in \mathbb{R}\}$.

**Solución:** Al igual que en el plano, el conjunto descripto es una recta que pasa por el punto $P$ y con la dirección de $\mathbf{v}$.

Respuesta:




**Ecuación paramétrica de la recta**

Vamos a abreviar la notación para el conjunto

$$\mathbb{L} = \{X \in \mathbb{R}^n / X = \lambda\mathbf{v} + P, \lambda \in \mathbb{R}\} \quad (n = 2 \text{ o } n = 3)$$

escribiendo

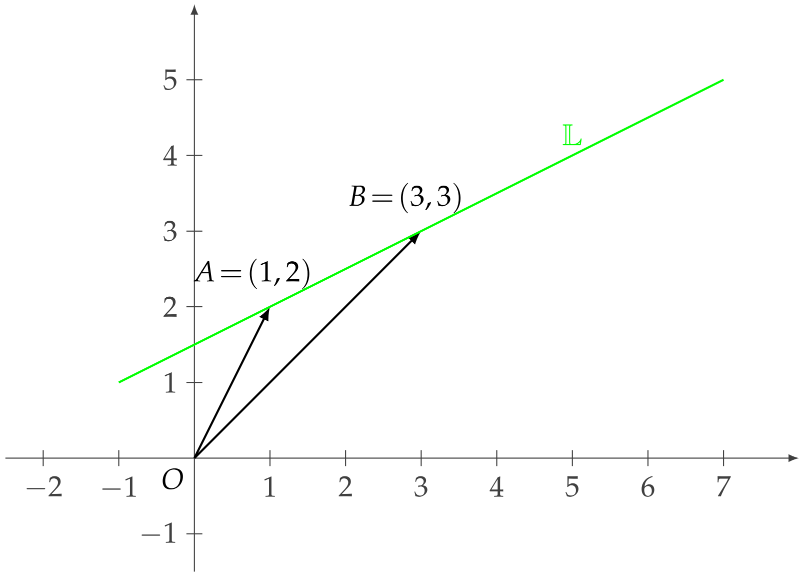
$$\mathbb{L} : X = \lambda\mathbf{v} + P$$

A esta expresión la llamamos *ecuación paramétrica* de la recta que pasa por $P$ en la dirección de $\mathbf{v}$ (si $\mathbf{v} \neq O$). Damos por sobreentendido que la letra $\lambda$ no representa un único número, sino que es una variable que debe tomar todos los valores dentro de un conjunto (en este caso $\mathbb{R}$). A este tipo de variables las llamamos *parámetros*.
Al vector $\mathbf{v}$ se lo llama *vector director* y a $P$ *punto de paso*.

Es importante notar que para una recta determinada, no hay una única ecuación paramétrica. El vector director $\mathbf{v}$ solo determina la dirección de la recta, con lo cual se lo puede reemplazar por cualquier otro vector con la misma dirección, sin importar su sentido o longitud; es decir, si se cambia $\mathbf{v}$ por cualquier múltiplo $k\mathbf{v}$ no nulo ($k \neq 0$), la ecuación paramétrica obtenida continuará describiendo la misma recta. También el punto de paso puede variar; cualquier punto de la recta sirve como punto de paso de la misma.

**Ejemplo 4.** Hallar una ecuación paramétrica para la recta $\mathbb{L}$ que pasa por los puntos $A = (1, 2)$ y $B = (3, 3)$.

**Solución:** Graficando los puntos $A$ y $B$ podemos imaginarnos cómo debería ser esta recta.




Para dar una ecuación paramétrica de la recta necesitamos determinar un vector director y un punto de paso. Vemos que el vector $\overrightarrow{AB}$ tiene la misma dirección que la recta; sin embargo, para la ecuación paramétrica necesitamos un vector con origen en $O$. Podemos tomar como vector director su trasladado $\mathbf{v} = B - A = (3, 3) - (1, 2) = (2, 1)$.
Usando como punto de paso $A = (1, 2)$, nos queda

$\boxed{\text{Respuesta: } \mathbb{L} : X = \lambda(2, 1) + (1, 2)}$

Podemos generalizar:

Una ecuación paramétrica para la recta que pasa por $A$ y $B$ es $X = \lambda(B - A) + A$

Esta fórmula es válida tanto en el plano como en el espacio.

**Observaciones**

En el ejemplo, si usáramos el vector $\overrightarrow{BA}$ en lugar del $\overrightarrow{AB}$, obtendríamos

$\mathbb{L} : X = \lambda(-2, -1) + (1, 2)$

que, aunque es una expresión distinta a la que encontramos, describe la misma recta (solo cambia el sentido del vector director, no su dirección).
También podemos cambiar el punto de paso por $B$:

$\mathbb{L} : X = \lambda(-2, -1) + (3, 3)$

Todas estas respuestas son válidas. Como mencionamos antes, cualquier otro vector director (en el origen) con la misma dirección de $\overrightarrow{AB}$ y cualquier otro punto de la recta como punto de paso nos darían ecuaciones paramétricas para la misma recta.

**Ejemplo 5.** Decidir si los puntos $Q = (0,7,-1)$ y $R = (6,-2,1)$ pertenecen a la recta $\mathbb{L} : X = \lambda(2,-3,1) + (4,1,1)$.

**Solución:** Los puntos de $\mathbb{R}^3$ que pertenecen a la recta son aquellos que se obtienen haciendo los cálculos indicados en la ecuación paramétrica para algún valor $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces, para que se cumpla la condición $Q \in \mathbb{L}$, debe existir algún valor particular de $\lambda$ con el que se verifique la igualdad

$$\begin{aligned}(0,7,-1) &= \lambda(2,-3,1) + (4,1,1)\\ &= (2\lambda,-3\lambda,\lambda) + (4,1,1)\\ &= (2\lambda+4,-3\lambda+1,\lambda+1)\end{aligned}$$

Se deben cumplir

$$0 = 2\lambda + 4, \quad 7 = -3\lambda + 1 \quad \text{y} \quad -1 = \lambda + 1$$

Despejando en la primera ecuación obtenemos $\lambda = -2$.
Reemplazando en las otras, $7 = -3(-2) + 1 \quad \text{y} \quad -1 = -2 + 1$ , vemos que se verifican.

Para el punto $R$, el mismo procedimiento nos lleva a buscar otro valor de $\lambda$ tal que

$$(6,-2,1) = (2\lambda+4,-3\lambda+1,\lambda+1)$$

Se deben cumplir ahora

$$6 = 2\lambda + 4, \quad -2 = -3\lambda + 1 \quad \text{y} \quad 1 = \lambda + 1$$

Despejando en la primera ecuación obtenemos $\lambda = 1$.
Reemplazando en las otras, $-2 = -3 \cdot 1 + 1 \quad \text{y} \quad 1 = 1 + 1$ , vemos que la última no se verifica. En este caso no hay un valor de $\lambda$ para la ecuación paramétrica con el que se obtengan las coordenadas del punto $R$ y por lo tanto $R$ no pertenece a la recta.

Respuesta: $Q \in \mathbb{L}$ y $R \notin \mathbb{L}$

Verificación:

$Q \in \mathbb{L}$: Con $\lambda = -2$ en la ecuación paramétrica de la recta:

$-2(2,-3,1) + (4,1,1) = (0,7,-1) = Q$

**Ejemplo 6.** Hallar un ecuación paramétrica para la recta $\mathbb{L}'$ paralela a $\mathbb{L} : X = \lambda(1,2,3) + (-4,1,3)$ y que pasa por $P = (3,-3,0)$.

**Solución:** El enunciado ya nos indica un punto de paso para la recta $\mathbb{L}'$; para poder dar una ecuación paramétrica nos falta un vector director $\mathbf{v}$.
Recordemos que dos rectas son paralelas si sus direcciones lo son y, para que eso pase, sus vectores directores deben ser múltiplos. Como la dirección de la recta $\mathbb{L}$ está dada por el vector $(1,2,3)$, buscamos entonces $\mathbf{v} = k(1,2,3)$ con algún $k \neq 0$, por ejemplo $k = 1$, y queda:

Respuesta: $\mathbb{L}' : X = \lambda(1,2,3) + (3,-3,0)$

**Ejemplo 7.** Hallar una ecuación paramétrica para la recta $\mathbb{L}'$, perpendicular a $\mathbb{L} : X = \lambda(2,3) + (-4,1)$, que pasa por $P = (1,-3)$.

**Solución:** Nuevamente el enunciado nos muestra un punto de paso para la recta buscada: $P = (1,-3)$. Para hallar una ecuación paramétrica nos queda encontrar un vector director.
Para que las rectas sean perpendiculares sus direcciones tienen que serlo y, para eso, sus vectores directores deben ser ortogonales. Si llamamos $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ al vector director de $\mathbb{L}'$, se deberá cumplir

$$\mathbf{v} \perp (2,3) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (v_1, v_2) \cdot (2,3) = 2v_1 + 3v_2 = 0$$

Una de las soluciones de esta ecuación es $v_1 = 3$ y $v_2 = -2$, es decir, $\mathbf{v} = (3,-2)$ es un vector director para $\mathbb{L}'$.
La recta que buscamos tiene entonces la ecuación paramétrica:

Respuesta: $\mathbb{L}' : X = \lambda(3,-2) + (1,-3)$

Verificación:

Ortogonalidad de los vectores directores:

$(3,-2) \cdot (2,3) = 0$

$P \in \mathbb{L}'$: Lo usamos como punto de paso.

**Observación**

Como la recta $\mathbb{L}'$ pasa por el punto $P$, para los puntos $X \in \mathbb{L}'$, los vectores $\overrightarrow{PX}$ son ortogonales al vector director de $\mathbb{L}$:

$$(X - P) \perp (2,3) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (X - P) \cdot (2,3) = 0$$

lo que nos lleva a la ecuación:

$$\begin{aligned} ((x,y) - (1,-3)) \cdot (2,3) &= 0 \\ (x,y) \cdot (2,3) - (1,-3) \cdot (2,3) &= 0 \\ (x,y) \cdot (2,3) &= (1,-3) \cdot (2,3) \\ 2x + 3y &= -7 \end{aligned}$$

Esta ecuación describe a la recta $\mathbb{L}'$ de una forma distinta a la que encontramos en el problema. Se llama *ecuación implícita de la recta* en $\mathbb{R}^2$.

En general, si una ecuación paramétrica de la recta en $\mathbb{R}^2$ es $\mathbb{L} : X = \lambda(v_1, v_2) + (p_1, p_2)$, podemos construir una ecuación implícita buscando un vector ortogonal a su vector director, por ejemplo $(v_2, -v_1)$, y haciendo la cuenta anterior:

$$\mathbb{L} : v_2 x - v_1 y = d, \qquad \text{con } d = (p_1, p_2) \cdot (v_2, -v_1).$$

Si necesitamos encontrar una ecuación paramétrica a partir de la ecuación implícita solo necesitamos hallar dos puntos que sean solución (por ejemplo dándole valores a $x$ y despejando $y$) y construir la recta que pasa por esos dos puntos.
Al igual que la ecuación paramétrica, la ecuación implícita no es única: podemos cambiar el vector ortogonal por cualquier múltiplo no nulo y describiremos la misma recta ya que en el plano solo hay una única dirección ortogonal a la de $\mathbb{L}$.

**Ejemplo 8.** Hallar dos rectas $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$, perpendiculares a $\mathbb{L} : X = \lambda(1,2,3) + (-4,1,3)$, que pasen por $P = (3,-3,0)$.

**Solución:** Tenemos como dato un punto de paso, $P = (3,-3,0)$ para las dos rectas. Nos falta determinar sus direcciones.
Recordemos que dos rectas son perpendiculares si sus direcciones lo son. Necesitamos hallar entonces, dos vectores $\mathbf{v}$ ortogonales al vector director de $\mathbb{L}$, y que no sean múltiplos entre sí (vimos que no alcanza con que sean distintos; si mantienen la dirección, describirán la misma recta).
La condición de ortogonalidad para los dos es la misma:

$$\mathbf{v} \cdot (1,2,3) = (v_1, v_2, v_3) \cdot (1,2,3) = v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0.$$

Dándole valores, por ejemplo, a $v_2$ y $v_3$, usando la ecuación anterior despejamos la coordenada que falta.

Si $v_2 = 1$ y $v_3 = 1$ nos da $v_1 = -5$ y $\mathbf{v} = (-5,1,1)$.

Si $v_2 = 1$ y $v_3 = 0$ nos da $v_1 = -2$ y $\mathbf{v} = (-2,1,0)$.

Respuesta: $\mathbb{L}_1 : X = \lambda(-5,1,1) + (3,-3,0)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \lambda(-2,1,0) + (3,-3,0)$

Verificación:

$P \in \mathbb{L}$: Lo usamos como punto de paso.

Son rectas: Ningún vector director es nulo.

Perpendicularidad respecto a $\mathbb{L}$:

Con $\mathbb{L}_1$: $(-5,1,1) \cdot (1,2,3) = -5 + 2 + 3 = 0$

Con $\mathbb{L}_2$: $(-2,1,0) \cdot (1,2,3) = -2 + 2 = 0$

$\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ no son la misma recta:
Si lo fueran, sus vectores directores serían múltiplos.

Si $k \in \mathbb{R}$, cumple $(-5,1,1) = k(-2,1,0)$ entonces $-5 = -2k, 1 = k$ y $1 = 0$ (Absurdo)