SISTEMAS LINEALES Y MATRICES

DEFINICIONES Y PROPIEDADES

Un *sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas* es un conjunto de *m* ecuaciones lineales en las variables $(x_1, x_2, ..., x_n)$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

donde las *a* y las *b* con subíndices representan constantes.

Cuando $b_i = 0$ para todo *i*, $1 \le i \le m$, se dice que el sistema es *homogéneo*.

Una *n*-upla $(s_1, s_2, ..., s_n)$ es una solución del sistema si y sólo si al reemplazar x_i por s_i, $1 \le i \le n$, se satisface cada una de las *m* ecuaciones.

Un sistema se dice *incompatible* si no tiene ninguna solución.

Un sistema se dice *compatible* si tiene alguna solución.

Si un sistema compatible tiene solución única es *determinado*, y si tiene infinitas soluciones es *indeterminado*.

Por *matriz ampliada* o *matriz aumentada* del sistema, entendemos el arreglo rectangular de números:

$$\left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

En general, dados los números naturales *n* y *m*, se llama *matriz* de *m* filas y *n* columnas con coeficientes reales, al arreglo rectangular $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Abreviadamente $A = \left(a_{ij}\right)$.

Llamamos *filas* de *A* a las *n*-uplas $A_i = \left(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}\right)$ con $i = 1, ..., m$

Llamamos *columnas* de A a las m-uplas $A^j=\left(a_{1j},a_{2j},\ldots,a_{mj}\right)$ con $j=1,\ldots,n$

Con esta notación, $A=\left(A^1,A^2,\cdots,A^n\right)$ y también $A=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$.

Decimos que dos sistemas de ecuaciones son *equivalentes* cuando tienen el mismo conjunto de soluciones.

Propiedad: Las siguientes operaciones sobre las ecuaciones de un sistema dan lugar a un sistema equivalente al dado:

1- Multiplicar una de las ecuaciones por una constante no nula.

2- Intercambiar dos de las ecuaciones.

3- Sumar un múltiplo de una de las ecuaciones a otra ecuación.

Las anteriores operaciones sobre las ecuaciones se corresponden con las siguientes operaciones sobre las filas de la matriz aumentada del sistema. Se denominan *operaciones elementales sobre las filas*:

1- Multiplicar una de las filas por una constante no nula.

2- Intercambiar dos de las filas.

3- Sumar un múltiplo de una de las filas a otra fila.

El *método de eliminación de Gauss* para resolver sistemas lineales, consiste en llevar la matriz aumentada del sistema planteado, vía la aplicación sistemática de operaciones elementales sobre sus filas, a la forma escalonada en las filas reducida, que a continuación describiremos. La resolución del sistema resultante, que es equivalente al original, es inmediata.

Se dice que una matriz se encuentra en la forma *escalonada en las filas reducida*, si se cumplen las siguientes condiciones:

1- Si una fila no consta únicamente de ceros, entonces su primer coeficiente no nulo es un 1 (a este 1 se lo denomina 1 principal).

2. Si existen filas que constan sólo de ceros (filas nulas), se agrupan en la parte inferior de la matriz.

3- Si dos filas sucesivas son no nulas, el 1 principal de la fila inferior se presenta más a la derecha que el 1 principal de la fila superior.

4- Cada columna que contenga un 1 principal tiene ceros en todas las demás posiciones.

Si una matriz tiene sólo las propiedades 1, 2 y 3 se dice que está en la forma *escalonada en las filas*.

Llamamos *rango fila* (o *rango*) de la matriz A al número de filas no nulas que tiene la matriz escalonada en las filas equivalente a A.

En el conjunto de las matrices de m filas y n columnas con coeficientes reales, notado $\mathbb{R}^{m\times n}$, están definidos la *suma* y el *producto por escalares*, de la siguiente manera:

Si $A = \left(a_{ij}\right) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B = \left(b_{ij}\right) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces

$$A+B = \left(a_{ij}+b_{ij}\right) \in \mathbb{R}^{m\times n} \qquad kA = \left(ka_{ij}\right) \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

Es decir, suma y producto por escalares se calculan coordenada a coordenada, en forma análoga a como se hace en $\mathbb{R}^n$.

Si $A = \left(a_{ij}\right) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B = \left(b_{ij}\right) \in \mathbb{R}^{n\times s}$ se define el *producto* de A por B como

$$AB = C = \left(c_{ij}\right) \in \mathbb{R}^{m\times s}$$

donde c_{ij} es igual al producto escalar de la fila i de A por la columna j de B

$$c_{ij} = (\text{fila } i \text{ de } A)\ .\ (\text{columna } j \text{ de } B)$$

Es posible calcular AB sólo si la cantidad de columnas de A coincide con la cantidad de filas de B.

Propiedades del producto.

- Es asociativo: $(AB)C = A(BC)$
- Es distributivo: $A(B+C) = AB + AC$

  $(A+B)C = AC + BC$

- La matriz *identidad* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, verifica $AI = IA$ para toda matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. La matriz I es el elemento neutro para este producto.

Notación: El sistema $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots\dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

puede escribirse $AX = B$, con $A = \left(a_{ij}\right) \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m\times n}}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$.

En adelante identificaremos $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $B \in \mathbb{R}^{mx1}$ con $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Así el sistema se escribirá $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Propiedades: Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$,

$$\mathbb{S}_0 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,/\, A\mathbf{x} = \mathbf{0}\right\} \qquad \mathbb{S}_b = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,/\, A\mathbf{x} = \mathbf{b}\right\}$$

a) Si $\mathbf{x} \in \mathbb{S}_0$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{S}_0$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{S}_0$. Si $\mathbf{x} \in \mathbb{S}_0$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces $k\mathbf{x} \in \mathbb{S}_0$.

Esto dice que la suma de dos soluciones de un sistema homogéneo es también solución del mismo, y que los múltiplos de una solución son también soluciones.

b) Si $\mathbf{x} \in \mathbb{S}_b$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{S}_b$, entonces $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathbb{S}_0$.

Esto es, la diferencia entre dos soluciones de un sistema no homogéneo, es solución del sistema homogéneo asociado.

c) Sea **s** una solución particular del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ($\mathbf{s} \in \mathbb{S}_{\mathrm{b}}$), entonces

$$\mathbb{S}_{\mathrm{b}} = \mathbb{S}_0 + \mathbf{s} = \{\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \ / \ \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{s} \text{ , con } \mathbf{x} \in \mathbb{S}_0 \}.$$

Esto significa que cualquier solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ puede obtenerse sumando una solución particular del sistema con una solución del sistema homogéneo asociado.

Una *matriz cuadrada* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice *inversible* si existe $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $AB = BA = I$.

Cuando B existe, es única y la notamos $B = A^{-1}$.

Propiedad: Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son inversibles, entonces AC es inversible y vale $(AC)^{-1} = C^{-1}A^{-1}$.

Diremos que dos matrices son equivalentes por filas si puede obtenerse una de la otra por medio de una sucesión finita de operaciones elementales sobre las filas.

Propiedad: Si $A \in \mathbb{R}^{n(n}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) A es inversible.

b) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución única, cualquiera sea $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

c) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene únicamente la solución trivial.

d) A es equivalente por filas a $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$.