Producto vectorial

Si $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$ son vectores de $\mathbb{R}^3$, el *producto vectorial* $A \times B$ se define como el vector

$$A \times B = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Notar que el producto vectorial de dos vectores en $\mathbb{R}^3$ es también un vector en $\mathbb{R}^3$.
El vector $A \times B$ definido por esta fórmula cumple las siguientes propiedades:

i) $A \times B$ es un vector ortogonal a los dos factores A y B simultáneamente.

ii) Su norma verifica la relación

$$\|A \times B\| = \|A\|\|B\| \text{sen}(\theta(A, B))$$

iii) Forma *terna derecha* junto con A y B (si vemos los vectores A, B y $A \times B$, en ese orden, su disposición debe semejar a la de los ejes x, y y z, en ese orden).

Podemos ver que en la fórmula del producto vectorial, la primera coordenada del resultado no depende de las primeras coordenadas de los vectores (no hay subíndices 1), es una cuenta que involucra a las demás. Lo mismo ocurre en las demás coordenadas del resultado: en la segunda no hay subíndices 2 y en la tercera no hay subíndices 3.
Una forma de recordar esta fórmula consiste en poner un vector sobre el otro. Arriba el vector a la izquierda del símbolo de producto y abajo el otro.

$$\times \begin{matrix} (a_1, & a_2, & a_3) \\ (b_1, & b_2, & b_3) \end{matrix}$$

Cada coordenada del vector resultante se calcula haciendo las siguientes operaciones:

$$\times \begin{matrix} (a_1, & a_2, & a_3) \\ (b_1, & b_2, & b_3) \end{matrix} = \left(\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \quad , \quad \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \quad , \quad \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \right)$$

Se ignoran las coordenadas verdes (es lo que mencionamos recién), y se hacen los productos rojos menos los azules.

$$\times \quad \begin{matrix} (a_1, & a_2, & a_3) \\ (b_1, & b_2, & b_3) \end{matrix} = \left(\begin{matrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{matrix} \quad , \quad \begin{matrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{matrix} \quad , \quad \begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix} \right)$$

$$\times \begin{matrix} (a_1, & a_2, & a_3) \\ (b_1, & b_2, & b_3) \end{matrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Observar que en la segunda coordenada los productos se restan en orden distinto comparado con las otras dos coordenadas.

Ejemplo 1. Dados $A = (-2, 2, -1)$ y $B = (-3, 1, 4)$, calcular el producto $A \times B$.

Solución: Si directamente ignoramos las coordenadas que no se usan:

$$\times \begin{matrix} (-2, & 2, & -1) \\ (-3, & 1, & 4) \end{matrix} = \left(\begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{matrix} \; , \; \begin{matrix} -2 & -1 \\ -3 & 4 \end{matrix} \; , \; \begin{matrix} -2 & 2 \\ -3 & 1 \end{matrix} \right)$$

$$\times \begin{matrix} (-2, & 2, & -1) \\ (-3, & 1, & 4) \end{matrix} = (2 \cdot 4 - (-1) \cdot 1, (-1)(-3) - (-2) \cdot 4, (-2) \cdot 1 - 2(-3)) = (9, 11, 4)$$

$\boxed{\text{Respuesta: } A \times B = (9, 11, 4).}$

Verificación:

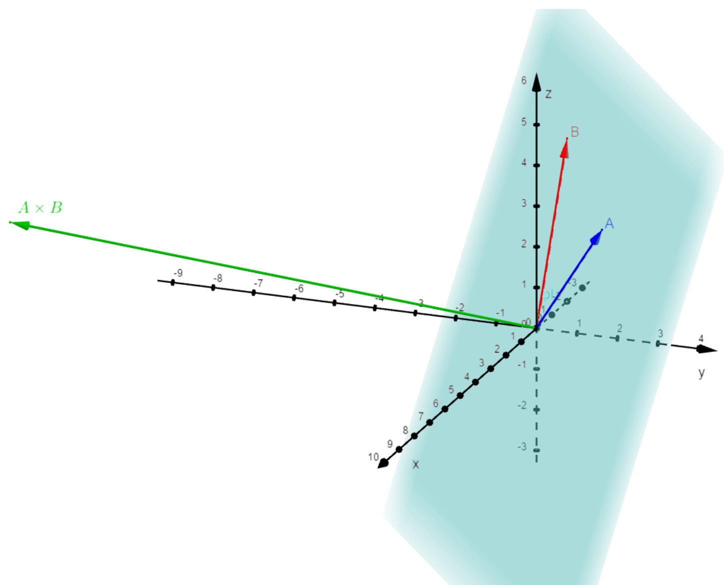
No es del todo una verificación pero al menos podemos comprobar que el resultado es ortogonal a los vectores dados:

$A \perp (A \times B)$: $\quad (-2, 2, -1) \cdot (9, 11, 4) = -18 + 22 - 4 = 0$

$B \perp (A \times B)$: $\quad (-3, 1, 4) \cdot (9, 11, 4) = -27 + 11 + 16 = 0$

Ejemplo 2. Hallar todos los vectores C de norma $3\sqrt{5}$, ortogonales a $A = (1, 2, 3)$ y a $B = (-2, 0, 4)$ simultáneamente.

Solución: Como A y B no son paralelos, habrá una única dirección ortogonal a los dos.



El producto vectorial nos da un vector en esa dirección:

$$D = (1, 2, 3) \times (-2, 0, 4) = (8, -10, 4)$$

pero este vector no cumple lo pedido ya que

$$\|D\| = \sqrt{8^2 + (-10)^2 + 4^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5} \neq 3\sqrt{5}.$$

Podemos buscar $k \in \mathbb{R}$ para que $\|C\| = \|k(8, -10, 4)\| = 3\sqrt{5}$ o, combinar cosas que ya sabemos.

Recordemos que los vectores de longitud 1 en la dirección de D, son:

$$\frac{1}{\|D\|}D \quad \text{y} \quad -\frac{1}{\|D\|}D$$

Para cambiar la longitud de estos a $3\sqrt{5}$, los multiplicamos por este escalar:

$$C_1 = \frac{3\sqrt{5}}{6\sqrt{5}}(8,-10,4) = \frac{1}{2}(8,-10,4) \quad \text{y} \quad C_2 = -\frac{3\sqrt{5}}{6\sqrt{5}}(8,-10,4) = -\frac{1}{2}(8,-10,4)$$

$\boxed{\text{Respuesta: Los únicos } C \text{ posibles son } C_1 = (4,-5,2) \text{ y su opuesto } C_2 = (-4,5,-2)}$

Verificación:

Con C_1:
Ortogonalidad:

$(1,2,3)\cdot(4,-5,2) = 1\cdot 4 + 2\cdot(-5) + 3\cdot 2 = 0$

$(-2,0,4)\cdot(4,-5,2) = (-2)\cdot 4 + 0\cdot(-5) + 4\cdot 2 = 0$

Norma: $\|(4,-5,2)\| = \sqrt{4^2+(-5)^2+2^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

Con C_2:
Ortogonalidad:
$(1,2,3)\cdot(-4,5,-2) = 1\cdot(-4) + 2\cdot 5 + 3\cdot(-2) = 0$

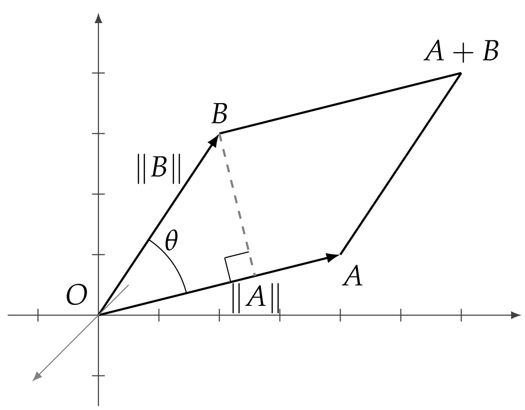
$(-2,0,4)\cdot(-4,5,-2) = (-2)(-4) + 0\cdot 5 + 4\cdot(-2) = 0$

Norma: $\|(-4,5,-2)\| = \sqrt{(-4))^2+5^2+(-2)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

Cálculo de áreas mediante producto vectorial

La norma del producto vectorial se relaciona con el ángulo entre los vectores A y B mediante la propiedad:

$$\|A\times B\| = \|A\|\|B\|\operatorname{sen}(\theta) \quad (\text{donde } \theta = \theta(A,B)))$$



En el triángulo rectángulo de la figura, el cateto opuesto al ángulo θ mide $\|B\|\operatorname{sen}(\theta)$ y coincide con la altura del paralelogramo de vértices O, A, $A+B$ y B.
En la norma del producto vectorial de A con B tenemos entonces el producto entre la longitud de la base, $\|A\|$, y la altura del paralelogramo, $\|B\|\operatorname{sen}(\theta)$, lo que nos da su área.

Ejemplo 3. Hallar el área del paralelogramo de la figura anterior sabiendo que $A = (-1, 4, 1)$ y $B = (0, 2, 3)$.

Solución: Calculemos primero el producto vectorial

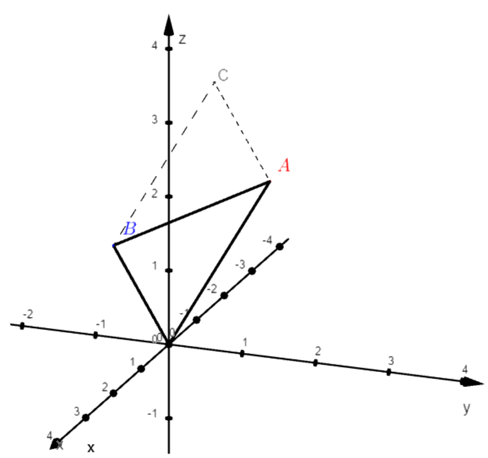
$$(-1, 4, 1) \times (0, 2, 3) = (10, 3, -2)$$

El área del paralelogramo es $\|(10, 3, -2)\| = \sqrt{10^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{113}$.

Respuesta: El área del paralelogramo de vértices O, A, $A + B$ y B es $\sqrt{113}$.

Ejemplo 4. Hallar el área del triángulo de vértices O, $A = (-1, 1, 2)$ y $B = (2, 0, 2)$.

Solución: Con la suma $C = A + B$, completamos un paralelogramo de vértices $OACB$. Su área se calcula con la norma del producto vectorial entre A y B como en el problema anterior. El área del triángulo que buscamos es la mitad de la del paralelogramo.

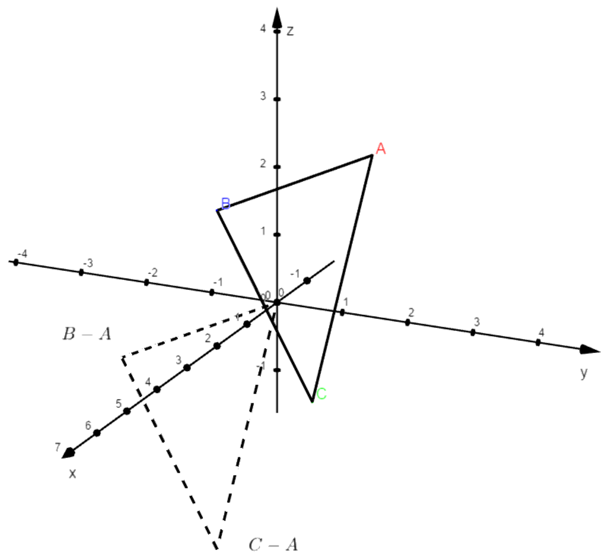


$$\textit{Área} = \frac{1}{2}\|(-1, 1, 2) \times (2, 0, 2)\| = \frac{1}{2}\|(2, 6, -2)\| = \sqrt{11}$$

Respuesta: El área del triángulo de vértices O, A y B es $\sqrt{11}$.

Ejemplo 5. Hallar el área del triángulo de vértices $A = (-1, 1, 2)$, $B = (2, 0, 2)$ y $C = (1, 1, -1)$.

Solución: A diferencia del ejemplo anterior, ninguno de los vectores A, B o C coinciden con un lado del triángulo, ya que el origen O no es un vértice del triángulo. Para que esto ocurra, trasladamos el triángulo al origen. Por ejemplo, podemos elegir los lados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ (vistos como vectores). Sus trasladados tendrán extremos en $B - A$ y $C - A$ respectivamente.



El área del triángulo trasladado (que es la misma del original) se calcula como en el ejemplo anterior:

$$\acute{A}rea = \frac{1}{2}\|(B - A) \times (C - A)\|$$

En nuestro ejemplo:

$$\acute{A}rea = \frac{1}{2}\|((2,0,2) - (-1,1,2)) \times ((1,1,-1) - (-1,1,2))\| = \frac{1}{2}\|(3,9,2)\| = \frac{\sqrt{94}}{2}$$

Respuesta: El área del triángulo de vértices A, B y C es $\dfrac{\sqrt{94}}{2}$.