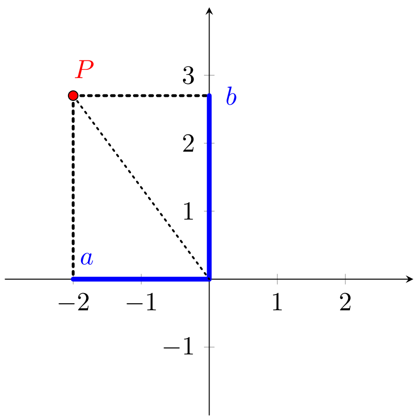
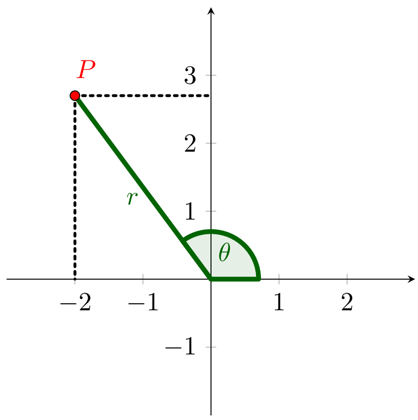
Números complejos - Forma trigonométrica

Usando la representación en el plano que vimos en la primera parte, podemos introducir una manera alternativa de expresar a los números complejos: la *forma trigonométrica*.
Dado un punto $P \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ podemos identificarlo a través de sus coordenadas cartesianas o a través de sus *coordenadas polares*, que son la distancia del punto al origen y el ángulo que forma el vector $\overrightarrow{OP}$ con el semieje positivo de las x.



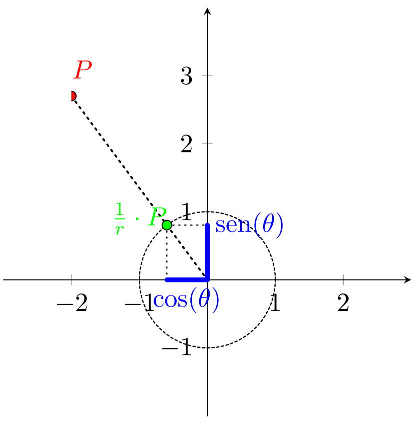


¿Cómo se relacionan a y b con r y θ?

Sabemos que r es la longitud del vector:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \|P\|$$

Si multiplicamos a P por $\frac{1}{r}$ tenemos un vector de norma 1 y que forma el mismo ángulo con el semieje positivo de las x, por lo tanto $\frac{1}{r} \cdot P$ es un punto de la circunferencia de centro 0 y radio 1.



Como vimos en el apunte de **Trigonometría**, existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$\frac{1}{r} \cdot P = (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta))$.

Multiplicando por r,

$P = r \cdot (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta))$.

Entonces:

$(a, b) = P = (r\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\theta))$.

Luego, podemos reescribir al número complejo $z = a + b\,i$ de la siguiente forma:

$$z = a + b\,i = r\cos(\theta) + r\operatorname{sen}(\theta)\,i$$

$$z = r(\cos(\theta) + i\,\operatorname{sen}(\theta))$$

donde $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ y θ es el ángulo que forma z con el semieje positivo de las x en su representación en el plano complejo.
Conseguimos así una nueva expresión que pone dos nuevos valores en juego. Como las funciones *seno* y *coseno* son periódicas, hay muchos valores de $\theta \in \mathbb{R}$ que dan el mismo resultado z. Para tener unicidad en la escritura tomamos un representante $\theta \in [0, 2\pi)$ y lo llamamos el *argumento de z*.

Definición. Dado $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, llamamos la *forma trigonométrica* de z a la expresión:

$$z = |z|\,(\cos(\theta) + i\ \mathrm{sen}(\theta)), \qquad \text{con } \theta \in [0, 2\pi).$$

Ejemplos.

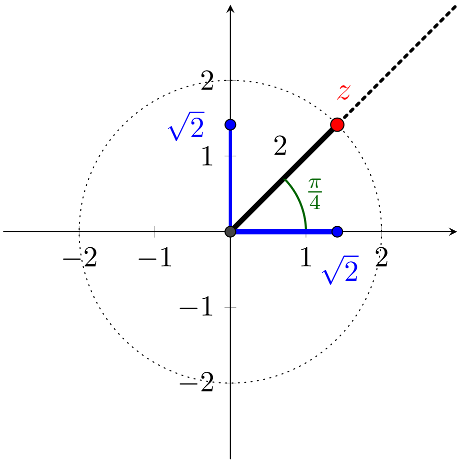
- $z = 2(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{4}))$.

  Es el número complejo que tiene módulo 2 y argumento $\frac{\pi}{4}$.
  Si queremos conocer sus coordenadas cartesianas calculamos:

  $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\mathrm{sen}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

  $2(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{4})) = 2(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$

  $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}\ i$



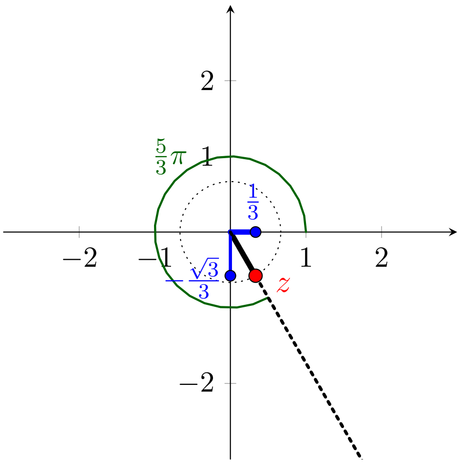
- $z = \frac{2}{3}(\cos(\frac{5}{3}\pi) + i\ \ \mathrm{sen}(\frac{5}{3}\pi))$

  Es el número complejo que tiene módulo $\frac{2}{3}$ y argumento $\frac{5}{3}\pi$.
  Podemos calcular:

  $\cos(\frac{5}{3}\pi) = -\frac{1}{2}$ y $\mathrm{sen}(\frac{5}{3}\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

  $\frac{2}{3}(\cos(\frac{5}{3}\pi) + i\,\mathrm{sen}(\frac{5}{3}\pi)) = \frac{2}{3}(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$

  $z = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i.$

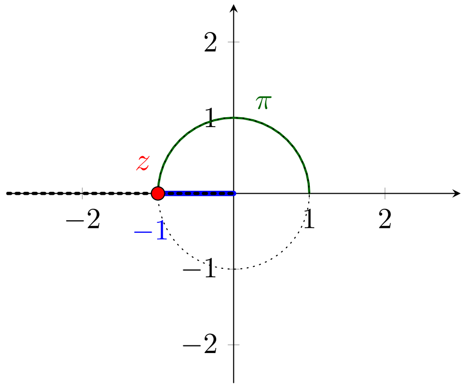


- $z = (\cos(\pi) + i\,\text{sen}(\pi))$

  En este caso, z tiene módulo 1 y argumento π.

  Podemos calcular *coseno* y *seno* o bien ubicarlo en el plano y ver sus coordenadas cartesianas.

  $z = -1$.



Si z es un número complejo y $z = |z|\,(\cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta))$ es su forma trigonométrica, z también puede expresarse en la *notación exponencial* como $z = |z|\,e^{i\theta}$.

Observación.
Si z está expresado en su *forma binómica* y queremos escribirlo en su *forma trigonométrica* tenemos que tener presente la relación de a y b con $r = |z|$ y θ que se obtiene a partir de la igualdad

$$z = a + b\,i = |z|\,(\cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta)) = |z|\cos(\theta) + i\,|z|\,\text{sen}(\theta),$$

$$\begin{cases} a = |z|\cos(\theta) \\ b = |z|\,\text{sen}(\theta) \end{cases}$$

En esta sección será útil la siguiente tabla de valores de *seno* y *coseno*:

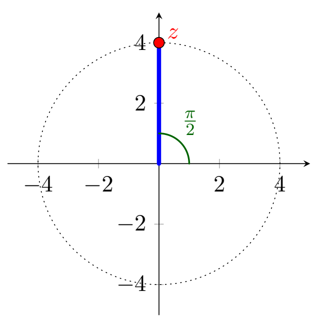
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\text{sen}(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

y recordar los signos de *seno* y *coseno* de acuerdo al cuadrante donde se ubica el punto.

Ejemplos.

- $z = 4i$

  Podemos ubicar el número z en el plano y observar que su distancia al origen es 4 (y por lo tanto su módulo es 4) y que su argumento es $\frac{\pi}{2}$ porque z se ubica en el semieje positivo de las y.



  O bien podemos calcular $|z|$ y θ. En este caso $a = 0$ y $b = 4$.

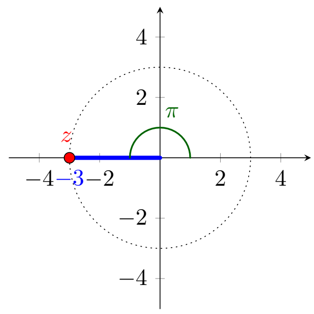
Calculamos $|z| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$, y luego buscamos el argumento θ:

$$\begin{cases} a = |z|\cos(\theta) \\ b = |z|\operatorname{sen}(\theta) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 = 4\cos(\theta) \\ 4 = 4\operatorname{sen}(\theta) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{0}{4} = 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) = \frac{4}{4} = 1 \end{cases}$$

El único $\theta \in [0, 2\pi)$ que cumple las ecuaciones es $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

$$z = 4(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})) \quad \text{y} \quad z = 4e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

- $z = -3$



Nuevamente es más sencillo observar su representación en el plano. Su distancia al origen es 3 y como z se encuentra en el semieje negativo de las x su argumento es π.

$$-3 = 3(\cos(\pi) + i\operatorname{sen}(\pi))$$

$$z = 3(\cos(\pi) + i\operatorname{sen}(\pi)) \quad \text{y} \quad z = 3e^{i\pi}.$$

- $z = 1 - i$

En este caso $a = 1$ y $b = -1$.

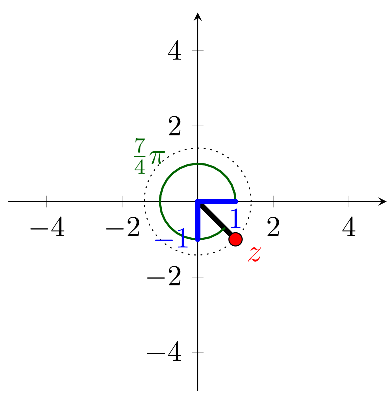
El módulo de z no es evidente, lo calculamos:

$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

Para hallar el argumento tenemos dos opciones. Una opción es observar que el valor absoluto de la parte real y de la parte imaginaria coinciden y, por lo tanto, el complejo se ubica en la mitad del cuarto cuadrante y su argumento es $\theta = 2\pi - \dfrac{\pi}{4}$. La otra opción es usar las ecuaciones:

$$\begin{cases} a = |z|\cos(\theta) \\ b = |z|\operatorname{sen}(\theta) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1 = \sqrt{2}\cos(\theta) \\ -1 = \sqrt{2}\operatorname{sen}(\theta) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}(\theta) = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Observamos que los valores de *seno* y *coseno* están en la tabla (son los correspondientes a $\dfrac{\pi}{4}$) pero con distinto signo, debido a que el número z se encuentra en el cuarto cuadrante y no en el primero. Buscamos el ángulo del cuarto cuadrante para el cual nos dan esos resultados.



$$\cos(\frac{7}{4}\pi) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{sen}(\frac{7}{4}\pi) = -\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por lo tanto, $\theta = \frac{7}{4}\pi$. Recordando que el módulo de z es $\sqrt{2}$, concluimos que

$$z = 1 - \ i = \sqrt{2}(\cos(\frac{7}{4}\pi) + i\,\mathrm{sen}(\frac{7}{4}\pi)) \;\text{ y }\; z = \sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi}.$$

La forma binómica y la forma trigonométrica son dos formas de expresar el mismo número complejo. La forma trigonométrica pone de manifiesto otras características, que son su módulo y su argumento. Esta representación nos va a ser útil para calcular productos, potencias y raíces de números complejos.

Ejercicios.

1. Escribir a $z = -1 + \sqrt{3}\,i$ en forma trigonométrica.

   Solución. Sabemos que $a = -1$ y $b = \sqrt{3}$, entonces z está en el segundo cuadrante.

   Calculamos:

   $|z| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = 2$

   $$\begin{cases} a = |z|\cos(\theta) \\ b = |z|\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases} \iff \begin{cases} -1 = 2\cos(\theta) \\ \sqrt{3} = 2\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{-1}{2} \\ \mathrm{sen}(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

   Si miramos los valores de $\cos(\theta)$ y $\mathrm{sen}(\theta)$ sin signo, en la tabla se corresponden con la columna de $\frac{\pi}{3}$. Ahora buscamos el ángulo θ en el segundo cuadrante. Tenemos:

   $\cos(\frac{2}{3}\pi) = -\cos(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$

   $\mathrm{sen}(\frac{2}{3}\pi) = \mathrm{sen}(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

   Por lo tanto, $\theta = \frac{2}{3}\pi$ y $|z| = 2$.

   Respuesta. La forma trigonométrica de z es $z = 2(\cos(\frac{2}{3}\pi) + i\,\mathrm{sen}(\frac{2}{3}\pi))$.

2. Escribir a $z = 5\,i(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{3}))$ en forma trigonométrica.

   Solución. Parece ya estar resuelto, pero... Recordemos que en la forma trigonométrica aparece como factor el módulo de z que es un número **real positivo** ($5i$ no puede ser el módulo).

   Luego, ésta no es la forma trigonométrica de z. Para poder expresarla, necesitamos conocer los valores de la parte real a y de la parte imaginaria b. Aplicando la propiedad distributiva y calculando los valores de *seno* y *coseno*, resulta:

   $$z = 5i(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{3})) = 5i(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 5\frac{1}{2}i + 5i^2\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$$

Tenemos entonces que la parte real y la parte imaginaria de z son: $a = -\frac{5\sqrt{3}}{2}$ y $b = \frac{5}{2}$, y, por lo tanto, z se encuentra en el segundo cuadrante.

Ahora sí calculamos el módulo (sacando $\frac{5}{2}$ de factor común) y el argumento de z:

$$|z| = \left|\frac{5}{2}(-\sqrt{3}+i)\right| = \frac{5}{2}\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2} = \frac{5}{2}\cdot 2 = 5.$$

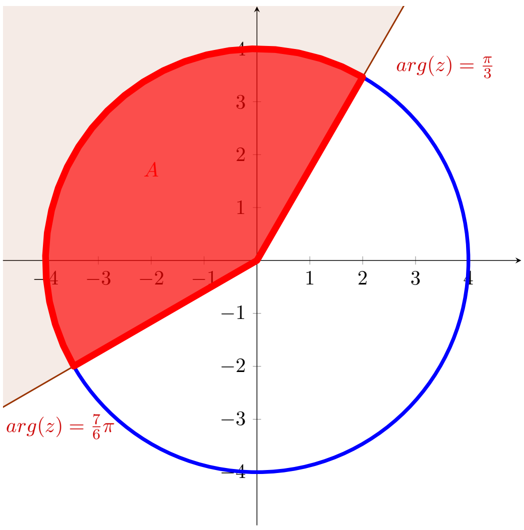
$$\begin{cases} a = |z|\cos(\theta) \\ b = |z|\operatorname{sen}(\theta) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -\frac{5\sqrt{3}}{2} = 5\cos(\theta) \\ \frac{5}{2} = 5\operatorname{sen}(\theta) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \cos(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{sen}(\theta) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Los valores de *seno* y *coseno*, sin considerar el signo, se encuentran en la tabla en la columna de $\frac{\pi}{6}$. En el segundo cuadrante, los valores corresponden a $\theta = \frac{5}{6}\pi$.

Respuesta. La forma trigonométrica de z es $z = 5(\cos(\frac{5}{6}\pi) + i\operatorname{sen}(\frac{5}{6}\pi))$.

3. Representar en el plano el conjunto $A = \{z \in \mathbb{C}/\ |z| \leq 4 \text{ y } \frac{\pi}{3} \leq arg(z) \leq \frac{7}{6}\pi\}$.

Solución. La condición para el módulo ya la analizamos en los primeros ejercicios y vimos que convenía pensar en $|z|$ como la *distancia de z al origen.* Por lo tanto los números complejos que cumplen $|z| \leq 4$ son aquellos que se ubican dentro de la circunferencia de centro el origen y radio 4.



Por otro lado, hay una restricción para el argumento, que, recordemos, es el ángulo que forma con el semieje positivo de las x. Ubicamos como siempre primero "los iguales": $arg(z) = \frac{\pi}{3}$ y $arg(z) = \frac{7}{6}\pi$, que son semirrectas que comienzan en el origen ("rayos"). Y luego, pintamos la región que encierran esos "rayos".

Operaciones en forma trigonométrica

A un número complejo $z \neq 0$ podemos representarlo con su módulo y su argumento, que es un valor entre 0 y 2π. Pero sabemos que *coseno* y *seno* son funciones periódicas con período 2π.

Por ejemplo, $\cos(\pi) = \cos(3\pi) = \cos(21\pi) = \cos(-5\pi)$.

A la hora de operar es más cómodo permitirnos variar el valor de θ y, de ser necesario, al final de las operaciones tomar un representante en $[0, 2\pi)$ para dar el argumento.
Sobre todo cuando resolvemos ecuaciones, es necesario poder determinar cuándo dos expresiones con *seno* y *coseno* son iguales.

Igualdad. Si $z = r(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))$ y $w = t(cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha))$, con $r, t > 0$, y $\theta, \alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$z = w \Longleftrightarrow \begin{cases} r &= t \\ \theta &= \alpha + 2k\pi, \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Por ejemplo,

$3(\cos(\pi) + i\,\mathrm{sen}(\pi)) = 3(\cos(21\pi) + i\,\mathrm{sen}(21\pi))$ (con $k = 10$),
$3(\cos(\pi) + i\,\mathrm{sen}(\pi)) = 3(\cos(-\pi) + i\,\mathrm{sen}(-\pi))$ (con $k = -1$),

y, expresado en forma binómica, es el número -3.

Para calcular el producto de dos números complejos no nulos usaremos el siguiente teorema que se deduce de las fórmulas para el seno y el coseno de la suma de dos ángulos:

Teorema de De Moivre. Sean z y w dos números complejos no nulos, $z = |z|\,(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))$ y $w = |w|\,(\cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha))$, con $\theta, \alpha \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$z.w = |z|\,|w|\,(\cos(\theta + \alpha) + i\,\mathrm{sen}(\theta + \alpha)).$$

En la notación exponencial, si $z = |z|\,e^{i\theta}$ y $w = |w|\,e^{i\alpha}$, entonces $z \cdot w = |z|\,|w|\,e^{i(\theta+\alpha)}$

Observamos que, en este enunciado, θ y α no son necesariamente los argumentos de z y w (es decir, pueden no estar en el intervalo $[0, 2\pi)$).

A partir del Teorema de De Moivre se deducen fórmulas para las potencias, el conjugado y el inverso multiplicativo de un número complejo no nulo: si $z = |z|\,(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))$, entonces

- $z^n = |z|^n\,(\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta))$ para todo $n \in \mathbb{N}$
- $\overline{z} = |z|\,(\cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta))$
- $z^{-1} = |z|^{-1}\,(\cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta))$

Por lo tanto, se deduce también una fórmula para el cociente de dos números complejos $z = |z|\,(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))$ y $w = |w|\,(\cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha))$:

- $\dfrac{z}{w} = \dfrac{|z|}{|w|}(\cos(\theta - \alpha) + i\,\mathrm{sen}(\theta - \alpha))$

Ejemplos. Si $z = \frac{1}{2}(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2}))$ y $w = 3(\cos(\frac{5}{3}\pi) + i\,\mathrm{sen}(\frac{5}{3}\pi))$, escribamos en forma trigonométrica:

- zw

  Usando el teorema de De Moivre:

  $$zw = \frac{1}{2} \cdot 3(\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{5}{3}\pi) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2} + \frac{5}{3}\pi)) = \frac{3}{2}(\cos(\frac{13}{6}\pi) + i\,\mathrm{sen}(\frac{13}{6}\pi)).$$

  Observar que $\frac{13}{6}\pi > 2\pi$, por lo que para dar el argumento restamos 2π: $\frac{13}{6}\pi - 2\pi = \frac{1}{6}\pi$.

  $$zw = \frac{3}{2}(\cos(\frac{1}{6}\pi) + i\,\mathrm{sen}(\frac{1}{6}\pi)).$$

- z^{-1}

$$z^{-1} = (\frac{1}{2})^{-1}(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(-\frac{\pi}{2})) = 2(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(-\frac{\pi}{2})).$$

Ahora, como $-\frac{\pi}{2} < 0$, sumamos 2π para poder dar el argumento: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3}{2}\pi$.

$$z^{-1} = 2(\cos(\frac{3}{2}\pi) + i\,\mathrm{sen}(\frac{3}{2}\pi)).$$

- w^4

$$w^4 = 3^4(\cos(4\cdot\frac{5}{3}\pi) + i\,\mathrm{sen}(4\cdot\frac{5}{3}\pi)) = 81(\cos(\frac{20}{3}\pi) + i\,\mathrm{sen}(\frac{20}{3}\pi)).$$

Ahora, el ángulo $\frac{20}{3}\pi$ es bastante mayor que 2π, ya que $\frac{20}{3} \approx 6,7$. ¿Cuánto hay que restarle para obtener el argumento de w^4? Recordemos que $\cos(\frac{20}{3}\pi) = \cos(\frac{20}{3}\pi + 2k\pi)$ para cualquier valor entero de k, y lo mismo ocurre para *seno*. Es decir, se suman o restan múltiplos de 2π.

En este caso, con $k = -3$ queda $\frac{20}{3}\pi + 2(-3)\pi = \frac{2}{3}\pi$.

$$w^4 = 81(\cos(\frac{2}{3}\pi) + i\,\mathrm{sen}(\frac{2}{3}\pi)).$$

Observación. El cálculo de potencias se facilita considerablemente al usar la forma trigonométrica (imaginemos calcular w^4 usando la forma binómica...) Pero no tenemos una fórmula para la suma ni para la resta de números complejos expresados en esta forma.
Por ejemplo, $z + w$ queda:

$$z + w = \frac{1}{2}(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2})) + 3(\cos(\frac{5}{3}\pi) + i\,\mathrm{sen}(\frac{5}{3}\pi))$$

Para sumarlos, nos conviene expresarlos en forma binómica. Dependiendo de la operación que queramos realizar usaremos la forma binómica o la forma trigonométrica.
En este caso, $z = \frac{1}{2}(0 + i\,1) = \frac{1}{2}i$ y $w = 3(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ y, entonces,

$$z + w = \frac{1}{2}i + \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i = \frac{3}{2} + (\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2})i.$$

Ejercicio. Calcular parte real yla parte imaginaria de $z = \frac{(1+i)^8}{(\sqrt{3}+i)^3}$.

Solución. Para calcular potencias de números complejos es conveniente expresarlos en forma trigonométrica.
Trabajemos con $1 + i$:

$$|1 + i| = \sqrt{2}$$

y, ubicando al punto en el plano, notamos que está en la mitad del primer cuadrante. Por lo tanto el argumento es $\frac{\pi}{4}$. Entonces,

$$1 + i = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{4})).$$

Aplicando el teorema de De Moivre,

$$(1+i)^8 = (\sqrt{2})^8(\cos(8.\frac{\pi}{4}) + i\,\mathrm{sen}(8\frac{\pi}{4})) = 2^4(\cos(2\pi) + i\,\mathrm{sen}(2\pi)).$$

Ahora trabajamos con $\sqrt{3}+i$:

$$\left|\sqrt{3}+i\right| = \sqrt{3+1} = 2.$$

Para determinar su argumento, buscamos θ que cumpla las ecuaciones:

$$\begin{cases} 2\cos(\theta) = \sqrt{3} \\ 2\,\mathrm{sen}(\theta) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \mathrm{sen}(\theta) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Estos resultados se hallan en la tabla en la columna de $\theta = \frac{\pi}{6}$. Entonces,

$$\sqrt{3}+i = 2(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{6})).$$

Aplicando el teorema de De Moivre,

$$(\sqrt{3}+i)^3 = 2^3(\cos(3\frac{\pi}{6}) + i\,\mathrm{sen}(3\frac{\pi}{6})) = 2^3(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2})).$$

Por último usamos la fórmula que dedujimos del teorema de De Moivre para calcular el cociente:

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1+i)^8}{(\sqrt{3}+i)^3} = \frac{2^4(\cos(2\pi) + i\,\mathrm{sen}(2\pi))}{2^3(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2}))} = \frac{2^4}{2^3}(\cos(2\pi - \frac{\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(2\pi - \frac{\pi}{2}) \\ &= 2(\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{3\pi}{2})) = 2(0 + i(-1)\,0) = -2i \end{aligned}$$

Nos dio como resultado un número imaginario puro; por lo tanto,

Respuesta. La parte real de z es 0 y la parte imaginaria de z es -2.

Observación.
Ahora que vimos la forma trigonométrica, podemos apreciar el efecto geométrico del producto entre números complejos. Sabemos que sumar y restar produce *traslaciones* y que multiplicar por un escalar produce *dilataciones*.
Cuando multiplicamos dos números complejos los módulos se multiplican y los argumentos se suman. De este modo, la multiplicación por un número $z = |z|(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))$ produce una dilatación por un factor $|z|$ y una *rotación* de ángulo θ.

Por ejemplo, observemos la multiplicación de $3i$ por $1+i$.

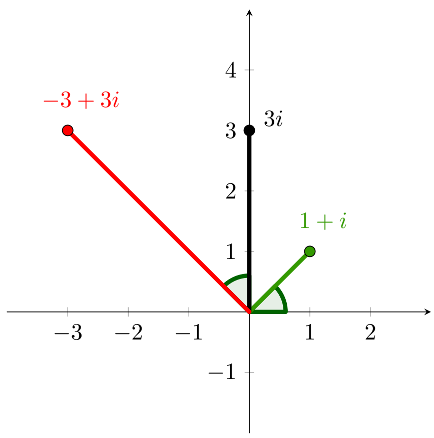
En forma binómica,

$3i(1+i) = 3i + 3i^2 = -3+3i.$

Si los escribimos en forma trigonométrica, tenemos:

$3i = 3(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2}))$

$1+i = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{4}))$

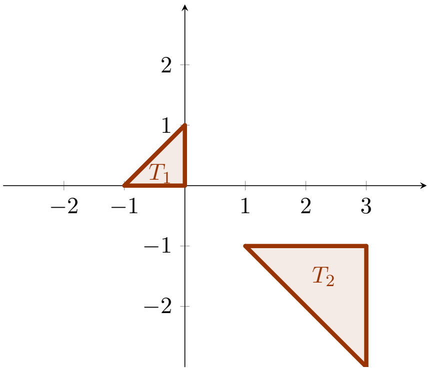


Entonces,

$$3i(1+i) = 3\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})).$$

Vemos que $3i$ se "estiró" por un factor $\sqrt{2} \approx 1,4$ y rotó en un ángulo de $\frac{\pi}{4}$.

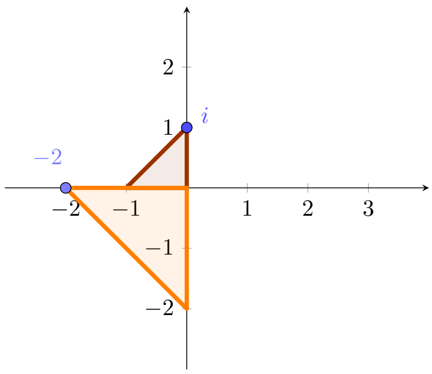
Ejercicio. Dado el triángulo T_1 de vértices -1, 0 y i, determinar qué operaciones se deben realizar para transformarlo en el triángulo T_2 de vértices $1-i$, $3-i$ y $3-3i$.



Al dibujarlo observamos que el triángulo está rotado, "estirado" y trasladado.
La rotación y la dilatación las podemos conseguir multiplicando por un número complejo. ¿Cuál?

Vemos que el triángulo está rotado en 90° ó $\frac{\pi}{2}$ y que los lados iguales inicialmente medían 1 y finalmente miden 2.
Debemos entonces multiplicar por un número de módulo 2 para duplicar su longitud y de argumento $\frac{\pi}{2}$ para rotarlo.
Por lo tanto, multiplicamos primero todos los puntos del triángulo por el número:

$$z = 2(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2})) = 2i.$$



Por ejemplo, el vértice i en forma trigonométrica es:

$$i = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2}).$$

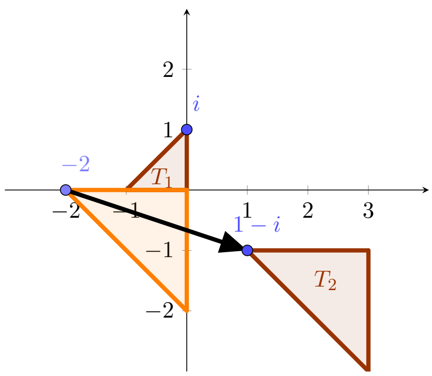
Al multiplicarlo por z queda:

$$i.z = 2(\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})) = 2(\cos(\pi) + \mathrm{sen}(\pi)) = -2.$$

Ahora sólo nos falta trasladarlo rígidamente 3 unidades a la derecha y una unidad hacia abajo.
Por lo que debemos sumar a todos los puntos del triángulo el número $w = 3 - i$.
Por ejemplo, al sumarle w al vértice -2 queda:

$$-2 + w = -2 + 3 - i = 1 - i.$$

Por lo tanto, las dos operaciones son multiplicar primero por $z = 2i$ y luego sumar $w = 3 - i$. (Observar que el orden es importante).



Concluimos que si x pertenece al triángulo T_1, entonces $x.z + w$ pertenece al triángulo T_2.

Raíces

Con la forma binómica llegamos a resolver ecuaciones cuadráticas. Ahora con la forma trigonométrica podremos resolver algunas ecuaciones de mayor grado.
Por ejemplo, la ecuación $x^3 - 8 = 0$, que es equivalente a $x^3 = 8$, tiene una sola solución en el conjunto de los números reales, que es $x = \sqrt[3]{8} = 2$.
En el conjunto de los números complejos tendremos dos soluciones más y por eso diremos que hay *tres raíces cúbicas* del número 8. El símbolo $\sqrt{\ }$ resulta insuficiente y no lo usaremos.

Busquemos todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^3 = 8$.

Ponemos nuestra incógnita en forma trigonométrica:

$$z = |z|\,(\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)).$$

Expresamos también al 8 en forma trigonométrica:

$$8 = 8(\cos(0) + i\operatorname{sen}(0))$$

Tenemos entonces una igualdad en forma trigonométrica:

$$z^3 = 8 \Longleftrightarrow (|z|\,(\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)))^3 = 8(\cos(0) + i\operatorname{sen}(0)).$$

Aplicamos el teorema de De Moivre del lado izquierdo de la igualdad, y el problema se traduce en encontrar $|z|$ y θ tales que:

$$|z|^3\,(\cos(3\theta) + i\operatorname{sen}(3\theta)) = 8(\cos(0) + i\operatorname{sen}(0)).$$

Finalmente planteamos la igualdad de los números en términos de sus módulos y ángulos:

$$z^3 = 8 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} |z|^3 & = & 8 \\ 3\theta & = & 0 + 2k\pi, \qquad \text{con } k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Resolvemos primero la ecuación para el módulo:

$$|z|^3 = 8 \Longleftrightarrow |z| = \sqrt[3]{8} = 2$$

El módulo de z es un número **real**, acá tiene sentido el símbolo $\sqrt{\ }$.

Sabemos entonces que $|z| = 2$.

Pasamos el 3 dividiendo en la ecuación para θ. Queda:

$$\theta = \frac{0 + 2k\pi}{3} = \frac{2k\pi}{3}$$

Para cada valor de $k \in \mathbb{Z}$, tenemos un valor de θ diferente. Sin embargo, veremos que hay sólo tres valores que dan lugar a números complejos distintos (es decir, hay sólo tres posibles argumentos distintos para z). Si le damos valores enteros a k, tenemos:

- Si $k = 0$, entonces $\theta = \dfrac{2.0.\pi}{3} = 0$. Con $|z| = 2$, formamos el complejo

$$z_0 = 2(\cos(0) + i\operatorname{sen}(0)) \Longrightarrow z_0 = 2(1 + 0i) = 2$$

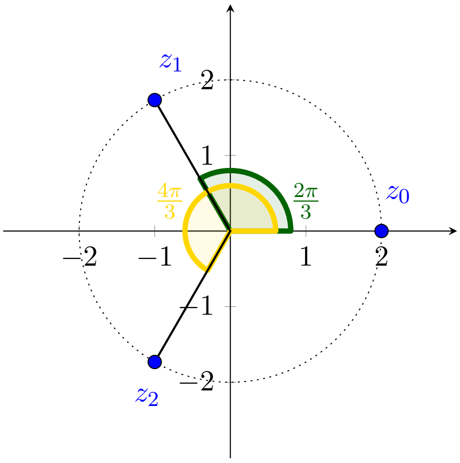
- Si $k = 1$, entonces $\theta = \dfrac{2.1.\pi}{3}$. Con $|z| = 2$, formamos el complejo

$$z_1 = 2(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{3})) \Longrightarrow z_1 = 2(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = -1 + \sqrt{3}i$$

- Si $k=2$, $\theta = \dfrac{2.2.\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3}$. Con $|z|=2$, formamos el complejo

$$z_2 = 2(\cos(\frac{4\pi}{3}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{4\pi}{3})) \Longrightarrow z_2 = 2(-\frac{1}{2} + i(-\frac{\sqrt{3}}{2})) = -1-\sqrt{3}i$$

Observación. Cualquier otro valor de k dará un resultado diferente de θ pero un valor repetido de z. Por ejemplo, con $k=3$, $\theta = \dfrac{2.3.\pi}{3} = 2\pi$. Pero en este caso el número z queda $z = 2(\cos(2\pi) + i\,\mathrm{sen}(2\pi)) = 2$, que es el mismo resultado que con $k=0$.
Y si tomamos $k=4$ obtenemos z_1. Los resultados comienzan a repetirse.



Obtuvimos tres soluciones de la ecuación

$$z^3 = 8$$

Por lo tanto hay tres números complejos que elevados al cubo dan como resultado 8.
Uno es $z=2$ (la raíz cúbica *real*) y obtuvimos, además, dos raíces cúbicas no reales, que son $z=-1+\sqrt{3}i$ y $z=-1-\sqrt{3}i$.
Podemos corroborar:
$2^3 = 8$
$(-1+\sqrt{3}i)^3 = 8$
$(-1-\sqrt{3}i)^3 = 8$.

Ejercicio. Hallar las raíces sextas de -1.

Las raíces sextas del número -1 son todos los números complejos que elevados a la sexta dan como resultado -1, es decir, todos los $z \in \mathbb{C}$ que verifican la ecuación:

$$z^6 = -1.$$

En este caso no hay soluciones reales, ya que ningún número real elevado a la sexta da un resultado negativo. De haber soluciones, serán todas complejas. Las buscamos trabajando en forma trigonométrica.

$$z = |z|(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)) \Longrightarrow z^6 = |z|^6(\cos(6\theta) + i\,\mathrm{sen}(6\theta))$$

$$-1 = \cos(\pi) + i\,\mathrm{sen}(\pi).$$

Luego,

$$z^6 = -1 \Longleftrightarrow |z|^6(\cos(6\theta) + i\,\mathrm{sen}(6\theta)) = (\cos(\pi) + i\,\mathrm{sen}(\pi))$$

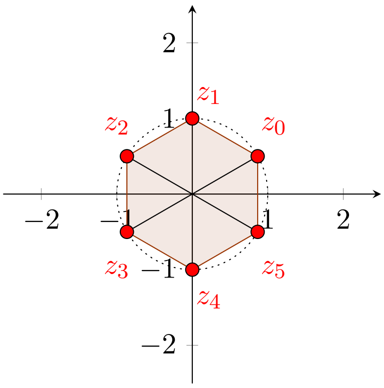
Buscamos los valores de $|z|$ y de θ tales que:

$$|z|^6(\cos(6\theta) + i\,\mathrm{sen}(6\theta)) = (\cos(\pi) + i\,\mathrm{sen}(\pi)) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} |z|^6 & = & 1, \\ 6\theta & = & \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} |z| & = & \sqrt[6]{1} = 1, \\ \theta & = & \dfrac{\pi + 2k\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Todas las soluciones tienen módulo 1 y, por lo tanto, están sobre la circunferencia de radio 1. Si vamos tomando valores enteros consecutivos de k, vemos que los resultados se ditribuyen regularmente en la circunferencia. De un ángulo al siguiente se avanza en $\dfrac{2}{6}\pi$.

- Si $k=0$, entonces $\theta = \dfrac{\pi+0}{6} = \dfrac{\pi}{6}$. Teniendo en cuenta que $|z|=1$, se obtiene el complejo: $z_0 = 1.(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{6})) = \cos(\frac{\pi}{6}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{6})$.
- Si $k=1$, entonces $\theta = \dfrac{\pi+2\pi}{6} = \dfrac{3\pi}{6}$ y resulta $z_1 = \cos(\dfrac{3\pi}{6}) + i\,\mathrm{sen}(\dfrac{3\pi}{6})$
- Si $k=2$, entonces $\theta = \dfrac{\pi+4\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$ y resulta $z_2 = \cos(\dfrac{5\pi}{6}) + i\,\mathrm{sen}(\dfrac{5\pi}{6})$
- Si $k=3$, entonces $\theta = \dfrac{\pi+6\pi}{6} = \dfrac{7\pi}{6}$ y resulta $z_3 = \cos(\dfrac{7\pi}{6}) + i\,\mathrm{sen}(\dfrac{7\pi}{6})$
- Si $k=4$, entonces $\theta = \dfrac{\pi+8\pi}{6} = \dfrac{9\pi}{6}$ y resulta $z_4 = \cos(\dfrac{9\pi}{6}) + i\,\mathrm{sen}(\dfrac{9\pi}{6})$
- Si $k=5$, entonces $\theta = \dfrac{\pi+10\pi}{6} = \dfrac{11\pi}{6}$ y resulta $z_5 = \cos(\dfrac{11\pi}{6}) + i\,\mathrm{sen}(\dfrac{11\pi}{6})$



Obtuvimos 6 raíces sextas del número -1, que son las 6 raíces de la ecuación:

$$z^6 + 1 = 0$$

Todas las soluciones están inscriptas en la circunferencia de radio 1 y se distribuyen regularmente. Podemos pensarlas como los vértices de un polígono regular de 6 lados (hexágono).

Raíces n-ésimas

Podemos generalizar el procedimiento realizado en los ejemplos anteriores. Dado un número complejo w no nulo, buscamos todos los $z \in \mathbb{C}$ que cumplen:

$$z^n = w$$

A las soluciones de esta ecuación las llamamos las *raíces n-ésimas de w*.

Planteamos la igualdad en forma trigonométrica como en los ejercicios anteriores:

$$z = |z|\,(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)) \Longrightarrow z^n = |z|^n\,(\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta))$$

$$w = |w|\,(\cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha))$$

$$z^n = w \Longleftrightarrow |z|^n\,(\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)) = |w|\,(\cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha))$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} |z|^n &= |w|, \\ n\theta &= \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Pidiendo que $0 \le \theta < 2\pi$ (ésta es la condición para que θ sea un *argumento*), obtenemos n soluciones diferentes, que son:

$$z_k = |w|^{1/n}\,(\cos(\frac{\alpha+2k\pi}{n}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\alpha+2k\pi}{n})), \quad 0 \le k \le n-1.$$

En el plano complejo, las n soluciones están inscriptas en la circunferencia de centro en el origen y radio $|w|^{1/n}$ y se distribuyen regularmente. Podemos pensarlas como los vértices de un polígono regular de n lados centrado en el origen.

Ejercicios

1. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^3 + 2\overline{z}^2 = 0$.

Solución.

Tenemos que resolver una ecuación que involucra potencias, por lo que conviene expresar a z en forma trigonométrica. Sin embargo, la forma trigonométrica no es la más conveniente para trabajar con sumas. En este caso lo podemos evitar pasando un término del otro lado de la ecuación.

$$z^3 + 2\overline{z}^2 = 0 \iff z^3 = -2\overline{z}^2.$$

En primer lugar, observemos que $z = 0$ es una solución de la ecuación. Buscamos ahora las soluciones $z \neq 0$ trabajando en forma trigononétrica.

Usamos el Teorema de De Moivre:

$$z = |z|\,(\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)) \Longrightarrow z^3 = |z|^3\,(\cos(3\theta) + i\operatorname{sen}(3\theta)),$$

$$\overline{z} = |z|\,(\cos(-\theta) + i\operatorname{sen}(-\theta)) \Longrightarrow \overline{z}^2 = |z|^2\,(\cos(-2\theta) + i\operatorname{sen}(-2\theta)),$$

$$-2 = 2(\cos(\pi) + i\operatorname{sen}(\pi)) \Longrightarrow -2\overline{z}^2 = 2\,|z|\,(\cos(-2\theta + \pi) + i\operatorname{sen}(-2\theta + \pi)).$$

Es fundamental escribir a -2 en forma trigonométrica. Recordar para ello que los números reales positivos tienen argumento 0 y los números reales negativos tienen argumento π.

$$z^3 = -2\overline{z}^2 \iff |z|^3\,(\cos(3\theta) + i\operatorname{sen}(3\theta)) = 2\,|z|\,(\cos(-2\theta + \pi) + i\operatorname{sen}(-2\theta + \pi))$$

Buscamos $|z|$ y $\theta \in [0, 2\pi)$ tales que:

$$\begin{cases} |z|^3 &= 2\,|z|^2, \\ 3\theta &= -2\theta + \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \iff \begin{cases} |z|^3 - 2\,|z|^2 &= 0, \\ 3\theta + 2\theta &= \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} |z|^2\,(|z| - 2) &= 0, \\ 5\theta &= \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Trabajamos primero con la ecuación para el módulo.

Para que el producto sea 0 o bien $|z|^2 = 0$ o bien $|z| - 2 = 0$. Por lo tanto,

$$|z| = 0 \quad \text{ó} \quad |z| = 2$$

Como $|z| = 0 \iff z = 0$, volvemos a obtener $z = 0$ (Ya habíamos deducido a simple vista que es una solución de la ecuación).

Para los z de módulo 2 bucamos el argumento con la ecuación para θ. Despejando:

$$\theta = \frac{\pi + 2k\pi}{5}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Si $k = 0$, $\theta = \frac{\pi}{5} \Longrightarrow z_0 = 2(\cos(\frac{\pi}{5}) + i\operatorname{sen}(\frac{\pi}{5}))$
- Si $k = 1$, $\theta = \frac{3\pi}{5} \Longrightarrow z_1 = 2(\cos(\frac{3\pi}{5}) + i\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{5}))$

- Si $k = 2$, $\theta = \dfrac{5\pi}{5} = \pi \Longrightarrow z_2 = 2(\cos(\pi) + i\,\text{sen}(\pi)) = -2$
- Si $k = 3$, $\theta = \dfrac{7\pi}{5} \Longrightarrow z_3 = 2(\cos(\dfrac{7\pi}{5}) + i\,\text{sen}(\dfrac{7\pi}{5}))$
- Si $k = 4$, $\theta = \dfrac{9\pi}{5} \Longrightarrow z_4 = 2(\cos(\dfrac{9\pi}{5}) + i\,\text{sen}(\dfrac{9\pi}{5}))$

Observar que si $k = 5$, entonces $\theta = \dfrac{11\pi}{5} = \dfrac{\pi}{5} + 2\pi$; por lo tanto $z_5 = z_0$ y comienzan a repetirse las soluciones.

Una forma sistemática de hallar todos los valores de k para los cuales se obtienen las distintas soluciones es determinar todos los $k \in \mathbb{Z}$ para los cuales $\theta = \dfrac{\pi + 2k\pi}{5}$ es el argumento de un número complejo, es decir, verifica $\theta \in [0, 2\pi)$. Planteamos:

$$0 \leq \frac{\pi + 2k\pi}{5} < 2\pi$$

Para despejar k, en primer lugar, multiplicamos cada miembro de la desigualdad por 5 (que como es positivo no modifica las desigualdades)

$$0 \leq \pi + 2k\pi < 10\pi$$

Observamos que $\pi + 2k\pi = (1 + 2k)\pi$. Entonces, dividimos cada miembro por π (y como $\pi > 0$ no se modifican los signos de las desigualdades):

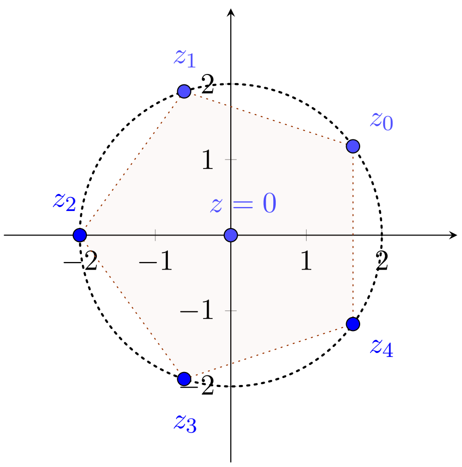
$$0 \leq 1 + 2k < 10$$

Finalmente, restamos 1 y dividimos por 2 en cada miembro:

$$-\frac{1}{2} \leq k < \frac{9}{2}$$

De este modo, concluimos que los valores de k que nos dan los argumentos de las soluciones de la ecuación son todos los números **enteros** que están en el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$, es decir,

$$k = 0, 1, \ldots, 4.$$



La ecuación $z^3 + 2\overline{z}^2 = 0$ tiene 6 soluciones. Una es $z = 0$ y las otras 5 están inscriptas en la circunferencia de radio 2. Se distribuyen regularmente cada $\dfrac{2\pi}{5} = 36°$. Para graficarlas dividimos π en quintos y ubicamos la primera solución que encontramos que es z_0. Luego avanzamos de a $\dfrac{2}{5}\pi$.

Observar que obtuvimos dos soluciones reales que son 0 y -2 y las otras cuatro son complejas no reales.

Respuesta. Las soluciones son $\{0, \quad z_0, \quad z_1, \quad z_2, \quad z_3, \quad z_4\}$

2. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que:
$$z^4 = 9i\,|z|^2 \quad \text{y} \quad Re(z) < 0.$$

Solución. Trabajamos primero con la ecuación que, como tiene exponentes altos, la escribimos en forma trigonométrica. Observemos que, si bien $z = 0$ es solución de la ecuación, no satisface la condición $Re(z) < 0$. Buscamos entonces $z \neq 0$:
$$z = |z|\,(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)) \Longrightarrow z^4 = |z|^4\,(\cos(4\theta) + i\,\mathrm{sen}(4\theta)).$$

¡$|z|^2$ es un número real positivo! Por lo tanto, $9i\,|z|^2$ es imaginario puro y se ubica en el semieje positivo de las y. Tiene entonces módulo $9\,|z|^2$ y argumento $\frac{\pi}{2}$.

$$9i\,|z|^2 = 9\,|z|^2\,(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2}))$$

Buscamos entonces $|z|$ y θ tales que:
$$|z|^4\,(\cos(4\theta) + i\,\mathrm{sen}(4\theta)) = 9\,|z|^2\,(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2})).$$

Esto equivale a que:
$$\begin{cases} |z|^4 = 9\,|z|^2, \\ 4\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} |z|^4 - 9\,|z|^2 = 0, \\ \theta = \dfrac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Para el módulo tenemos:
$$|z|^4 - 9\,|z|^2 = 0 \Longleftrightarrow |z|^2\,(|z|^2 - 9) = 0 \Longleftrightarrow |z| = 0 \quad \text{ó} \quad |z|^2 = 9$$

Descartamos $|z| = 0$ porque estamos buscando $z \neq 0$. Tenemos entonces que $|z|^2 = 9$ y, por lo tanto, $|z| = 3$.

Trabajamos ahora con el argumento:
$$\theta = \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{2k\pi}{4} = \frac{\pi + 4k\pi}{8}.$$

Para que z cumpla la condición $Re(z) < 0$ debe estar en el segundo o en el tercer cuadrante. Busquemos los valores de $k \in \mathbb{Z}$ para que se verifique:
$$Re(z) < 0 \Longleftrightarrow \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \Longleftrightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{\pi + 4k\pi}{8} < \frac{3\pi}{2}$$

Despejamos las dos inecuaciones en simultáneo, pasamos el 8 multiplicando (que como es positivo no modifica las inecuaciones) y luego pasamos π restando en ambas inecuaciones:
$$8\frac{\pi}{2} < \pi + 4k\pi < 8\frac{3\pi}{2} \Longleftrightarrow 4\pi < \pi + 4k\pi < 12\pi \Longleftrightarrow 4\pi - \pi < 4k\pi < 12\pi - \pi$$
$$\Longleftrightarrow 3\pi < 4k\pi < 11\pi \underset{4\pi>0}{\Longleftrightarrow} \frac{3\pi}{4\pi} < k < \frac{11\pi}{4\pi} \Longleftrightarrow \frac{3}{4} < k < \frac{11}{4}.$$

Los valores enteros de k que se encuentran entre $\frac{3}{4}$ y $\frac{11}{4}$ son $k = 1$ y $k = 2$, por lo tanto:

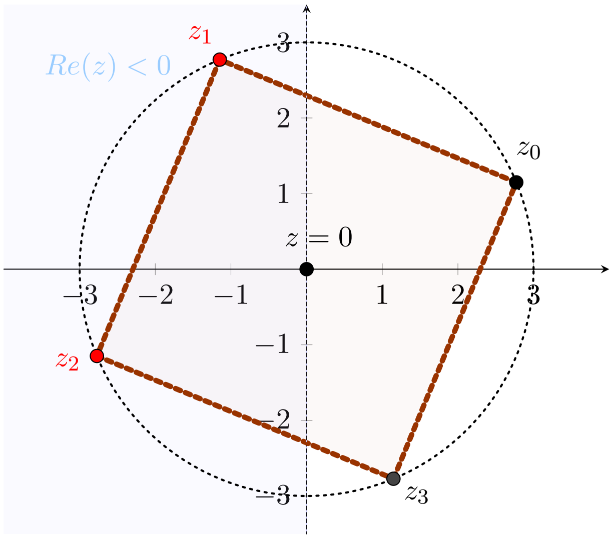
- Con $k = 1$, $\theta = \frac{5\pi}{8} \Longrightarrow z_1 = 3(\cos(\frac{5\pi}{8}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{5\pi}{8}))$.
- Con $k = 2$, $\theta = \frac{9\pi}{8} \Longrightarrow z_2 = 3(\cos(\frac{9\pi}{8}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{9\pi}{8}))$.

Respuesta. Las soluciones son $z_1 = 3(\cos(\frac{5\pi}{8}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{5\pi}{8}))$ y $z_2 = 3(\cos(\frac{9\pi}{8}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{9\pi}{8}))$.

Observación.

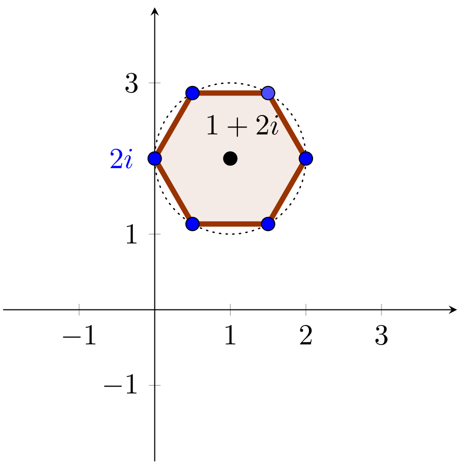
Se puede verificar calculando
$Re(z_1) = 3\cos(\frac{5\pi}{8}) \approx -1,1 < 0$ y
$Re(z_2) = 3\cos(\frac{9\pi}{8}) \approx -2,7 < 0.$

Otra opción es calcular las cuatro soluciones no nulas de la ecuación y representarlas en un gráfico para observar cuáles "caen" en el segundo o tecer cuadrante. En ese caso, z_0 y z_4 se descartan por estar en el primer y cuarto cuadrante respectivamente y tener parte real positiva.



3. Hallar los vértices de un hexágono de centro $1 + 2i$, inscripto en una circunferencia de radio 1 y tal que uno de sus vértices es $2i$.

Solución. Hagamos un gráfico para comprender mejor lo que buscamos.



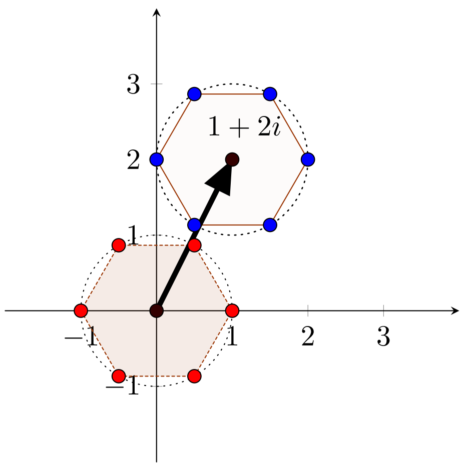
Uno de los 6 vértices ya lo tenemos, es el $2i$.

Con el gráfico tal vez podemos ver el vértice opuesto, que es el $2 + 2i$, pero no es sencillo identificar los otros cuatro vértices.

Sabemos que las raíces sextas de un número complejo se distribuyen como vértices de un hexágono, pero centrado en el origen.

Busquemos primero los vértices del hexágono centrado en el origen y luego traslademos rígidamente sumando $1 + 2i$ a todos los vértices.

¿Los vértices rojos son las raíces sextas de qué número?
Pensemos que son las soluciones de $z^6 = w$. Tomamos entonces uno de los vértices, por ejemplo $z = 1$, y lo reemplazamos en la ecuación: $1^6 = 1$. Por lo tanto, son las 6 raíces sextas del número 1 (también decimos raíces sextas de *la unidad*). Observar que -1 es una de las raíces sextas de 1.



Buscamos primero los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^6 = 1$.

Observamos que $z = 0$ no es solución. Resolvemos en forma trigonométrica, buscando $|z|$ y θ:

$$z = |z|\left(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)\right) \quad \text{y} \quad 1 = 1(\cos(0) + i\,\mathrm{sen}(0)) \Longrightarrow$$

$$z^6 = 1 \Longleftrightarrow |z|^6\left(\cos(6\theta) + i\,\mathrm{sen}(6\theta)\right) = \cos(0) + i\,\mathrm{sen}(0).$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} |z|^6 & = & 1, \\ 6\theta & = & 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} |z| & = & 1, \\ \theta & = & \dfrac{2k\pi}{6}, \quad 0 \leq k \leq 6-1. \end{array} \right.$$

$$z_k = \cos(\frac{2k\pi}{6}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{2k\pi}{6}), \quad 0 \leq k \leq 5.$$

Para conseguir los vértices azules debemos sumar $1+2i$. Expresamos entonces los 6 vértices z_k en forma binómica y luego les sumamos $1+2i$ para trasladarlos.

$$z_0 = 1 \Longrightarrow w_0 = 1 + 1 + 2i = 2 + 2i.$$

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Longrightarrow w_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 + 2i = \frac{3}{2} + (\frac{\sqrt{3}}{2} + 2)i.$$

$$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Longrightarrow w_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 + 2i = \frac{1}{2} + (\frac{\sqrt{3}}{2} + 2)i.$$

$$z_3 = -1 \Longrightarrow w_3 = -1 + 1 + 2i = 2i.$$

$$z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \Longrightarrow w_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 + 2i = \frac{1}{2} + (-\frac{\sqrt{3}}{2} + 2)i.$$

$$z_5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \Longrightarrow w_5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 + 2i = \frac{3}{2} + (-\frac{\sqrt{3}}{2} + 2)i.$$

Respuesta. Los vértices son $\{w_0, \quad w_1, \quad w_2, \quad w_3, \quad w_4, \quad w_5\}$.