Números complejos - Forma binómica

Los números complejos son un conjunto de números que extiende a los números reales. Se crearon para resolver problemas de diversas áreas de la física, la ingeniería y la matemática.

Forma binómica

Notamos con la letra $\mathbb{C}$ al conjunto de los números complejos y usamos la letra z para referirnos a ellos:

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi, \text{ con } a, b \in \mathbb{R} \text{ y } i^2 = -1\}.$$

La expresión $a + bi$ es la forma binómica del número complejo z. A a lo llamamos *parte real* del número z y a b lo llamamos *parte imaginaria* del número z y escribimos $Re(z) = a$ e $Im(z) = b$.

Ejemplos.

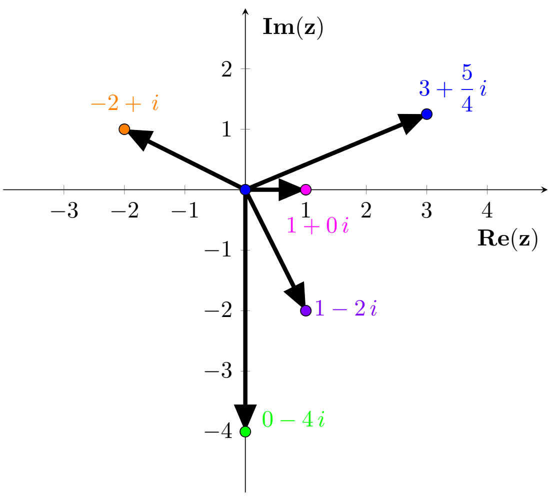
- $z = 1 - 2i$ $\qquad Re(z) = 1,\ Im(z) = -2$
- $z = 3 + \frac{5}{4}i$ $\qquad Re(z) = 3,\ Im(z) = \frac{5}{4}$
- $z = -4i$ $\qquad Re(z) = 0,\ Im(z) = -4$
- $z = 1$ $\qquad Re(z) = 1,\ Im(z) = 0$
- $z = 0$ $\qquad Re(z) = 0,\ Im(z) = 0$

Observar que la parte imaginaria es un número real, no tiene la i.
$Im(1 - 2i) = -2$
$\cancel{Im(1 - 2i) = -2i}$

Observación.
Los números reales también son números complejos (son los que tienen parte imaginaria nula, o sea $a \in \mathbb{R}, b = 0$): $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Representación en el plano complejo

Podemos representar a los números complejos en el plano cartesiano ubicando la parte real del número en el eje x y la parte imaginaria en el eje y, lo que nos permitirá darle un sentido geométrico a las operaciones.
Identificamos a $z = a + b\,i$ con el punto $P = (a, b)$ de $\mathbb{R}^2$ o bien con el vector $\overrightarrow{OP}$.



Observar que los números reales se ubican sobre el eje x. Sobre el eje y se ubican los que tiene parte real nula, a los que llamamos *imaginarios puros*.

Asociamos por ejemplo:

- $z = 1 - 2\,i \ \sim\ (1, -2)$
- $z = 1 = 1 + 0\,i \ \sim\ (1, 0)$
- $z = 3 + \frac{5}{4}\,i \ \sim\ (3, \frac{5}{4})$
- $z = -2 + i \ \sim\ (-2, 1)$
- $z = -4\,i = 0 - 4\,i \ \sim\ (0, -4)$

Operaciones

1. **Suma**

   Si $z = a + bi$ y $w = c + di$ son dos números complejos, la suma se define como:

   $$z + w = (a + c) + (b + d)\, i \ .$$

   Por ejemplo,

   $$(-2 + i) + (3 + 4\, i) = (-2 + 3) + (1 + 4)\, i = 1 + 5\, i$$

   y se corresponde en el plano complejo con la suma de vectores.

2. **Producto por escalares**

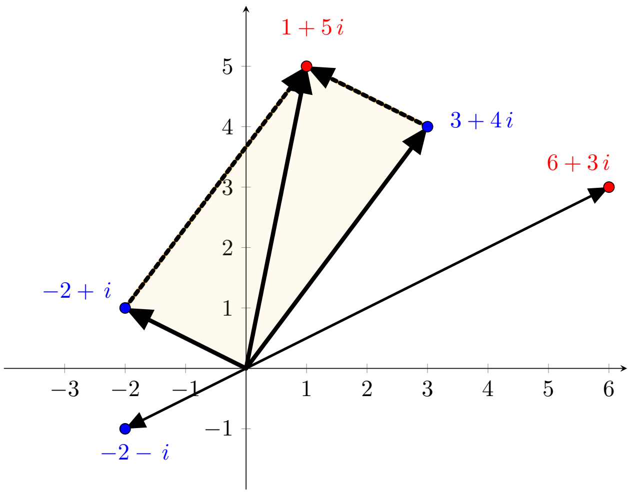
   Si $z = a + b\, i$ es un número complejo y $k \in \mathbb{R}$ es un escalar, el producto se define como:

   $$k.z = (k.a) + (k.b)\, i \ .$$

   Por ejemplo,

   $$-3.(-2 - \ i) = -3.(-2) + (-3).(-1)\, i = 6 + 3\, i$$

   y también se corresponde en el plano complejo con el producto de un vector por un escalar.



Observar que se verifica la *ley del paralelogramo* de la suma de vectores. También se observa el efecto de *dilatación* del producto por escalares.

3. **Producto de números complejos**

   Dados dos números complejos $z = a + b\, i$ y $w = c + d\, i$ se define el producto entre z y w como:

   $$z \cdot w = (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)\, i \ .$$

   Parece una fórmula complicada, pero no hace falta memorizarla gracias a que este producto cumple la propiedad distributiva con la suma.
   Sabemos que $i^2 = -1$, que se corresponde con hacer $z \cdot z$ cuando $z = i$. Podemos, entonces, multiplicar dos números complejos de la siguiente forma:

   $$\begin{aligned}(a + b\, i) \cdot (c + d\, i) &= a \cdot c + a \cdot d\, i + b \cdot c\, i + b \cdot d\, i^2 = a \cdot c + (a \cdot d + b \cdot c)\, i + b \cdot d(-1) \\ &= a \cdot c - b \cdot d + (a \cdot d + b \cdot c)\, i\end{aligned}$$

   Ejemplos.

   - $$\begin{aligned}(3 - 2\, i) \cdot (4 + \ i) &= 3 \cdot 4 + 3 \cdot \ i + (-2) \cdot 4\, i + (-2)\, i^2 = 12 + 3\, i - 8\, i - 2(-1) \\ &= 12 + 2 - 5\, i = 14 - 5\, i\end{aligned}$$

- $(3+4\,i)^2 = (3+4\,i)(3+4\,i) = 3\cdot 3 + 3\cdot 4\,i + 4\cdot 3\,i + 4\cdot 4\,i^2$
  $= 9 - 16 + 24\,i = -7 + 24\,i$
- $(3\,i)^3 = 3^3\,i^3 = 27\,(i^2)\,i = 27\cdot(-1)\,i = -27\,i$

Observaciones.

1. Si $z = a + b\,i$, podemos generalizar

$$z^2 = a^2 - b^2 + 2ab\,i$$

   Así también podríamos calcular cualquier potencia de z, pero un exponente alto involucra muchas cuentas. La forma binómica es cómoda para sumar y restar pero no lo es para hacer potencias grandes.

2. Algo curioso sucede con las potencias de i:

$$\begin{cases} i^1 = & i \\ i^2 = & -1 \\ i^3 = & (i^2)\cdot i = \quad -i \\ i^4 = & (i^2)^2 = \quad 1 \end{cases}$$

   Luego, $i^5 = (i^4)\cdot i = i$, y comienzan a repetirse esos 4 resultados: $i,\ -1,\ -i$ y 1.

   Por ejemplo $i^{18} = (i^4)^4 \cdot i^2 = 1^4(-1) = -1$.

   Notamos entonces que el resultado depende del resto de dividir el exponente por 4, así sabiendo que $139 = 4.34 + 3$, calculamos:

$$i^{139} = (i^4)^{34}\cdot i^3 = i^3 = -i.$$

Módulo

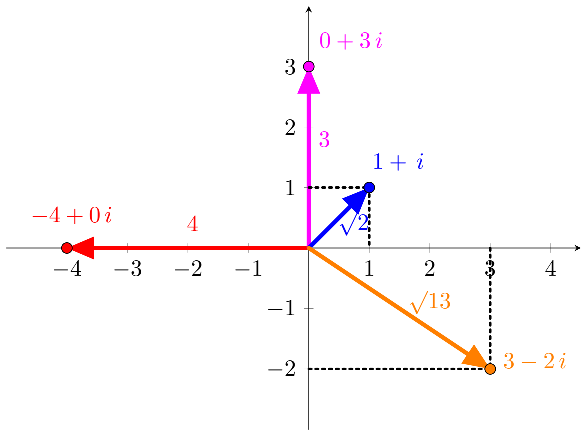
Dado $z = a + b\,i$ llamamos *módulo de* z al número real no negativo

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}\ .$$

Si representamos a z en el plano complejo, el módulo coincide con la longitud del vector, o bien con la distancia de (a,b) al origen.

Ejemplos.

- $|3-2\,i| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$
- $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$
- $|3i| = \sqrt{0^2+3^2} = 3$
- $|-4| = \sqrt{(-4)^2+0^2} = 4$

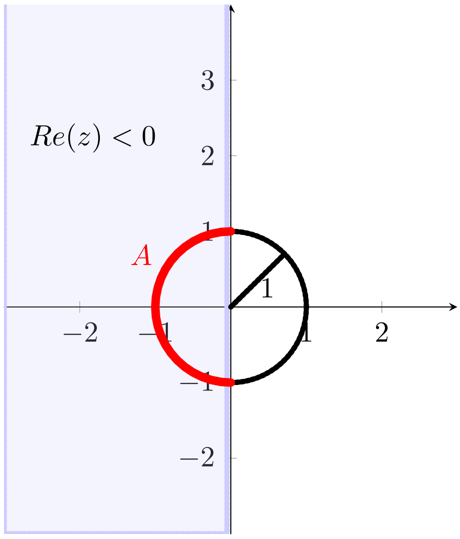


Ejercicios.

1. Representar el siguiente conjunto en el plano complejo:

$$A = \{z \in \mathbb{C} / \, |z| = 1 \text{ y } Re(z) < 0\}.$$

Solución.

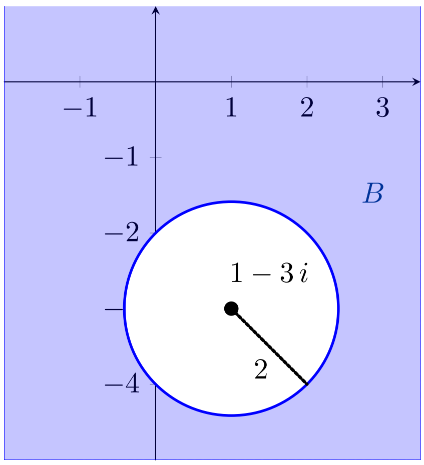


Si quisiéramos resolver la ecuación $|z| = 1$ deberíamos plantear $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$. Pero no se podría despejar de ahí ni a ni b.
Como se pide representar en el plano, resulta útil pensar a $|z|$ como la distancia de z al origen.
El conjunto A resulta ser entonces el conjunto de todos los puntos del plano complejo que distan 1 del origen y tienen parte real negativa.

2. Representar en el plano complejo el conjunto:

$$B = \{z \in \mathbb{C} / \, |z - 1 + 3\,i| \geq 2\}$$

Solución.



Nuevamente interpretemos la inecuación pensando al módulo como una distancia. Acá es útil la siguiente observación, equivalente a la que vimos vimos con vectores de $\mathbb{R}^2$:
$|z - w| =$ distancia entre z y w
Reescribimos entonces:
$|z - 1 + 3\,i| = |z - (1 - 3\,i)|$
para poder interpretar al conjunto B como el conjunto de todos los puntos del plano complejo que distan 2 o más de $1 - 3\,i$.

Conjugado

Dado $z = a + b\,i$ llamamos *conjugado de* z al número complejo:

$$\overline{z} = a - b\,i.$$

Ejemplos.

- $\overline{4 - 5\,i} = 4 + 5\,i$

- $\overline{3\,i} = -3\,i$
- $\overline{-1 + i} = -1 - i$
- $\overline{5} = 5$

Geométricamente, conjugar es reflejar con respecto al eje x. Observar que los números reales son los únicos números complejos que quedan igual cuando los conjugamos, es decir

$$z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}.$$

Propiedad. Si $z = a + b\,i \in \mathbb{C}$ entonces:

$$z.\overline{z} = |z|^2\,.$$

Esta propiedad se ve haciendo el producto:
$(a + b\,i) \cdot (a - b\,i) = a^2 + abi - ab\,i - b^2 i^2 = a^2 + b^2$, que es el módulo de z elevado al cuadrado.

Por ejemplo,

$$(3 - 2\,i) \cdot \overline{(3 - 2\,i)} = (3 - 2\,i) \cdot (3 + 2\,i) = 3^2 - 6\,i + 6\,i - 2^2 i^2 = 3^2 + 2^2 = 13.$$

Observar que lo importante es que obtuvimos un número real, “sin la i”.
Y si $z \neq 0$, $|z|$ es un número real estrictamente positivo y podemos pasarlo dividiendo.

Observación.
Si $z \neq 0$, $z.\overline{z} = |z|^2 \iff \dfrac{z.\overline{z}}{|z|^2} = 1 \iff z.\left(\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}\right) = 1$
Por lo tanto, $\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ es el inverso multiplicativo de z.

Notación. Si $z \neq 0$, el inverso de z es

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Con esta observación podemos presentar el cociente de números complejos.

División

Si z y w son dos números complejos y $w \neq 0$, definimos el cociente de z por w como:

$$\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1} = z \cdot \frac{\overline{w}}{|w|^2} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}}\,.$$

Por ejemplo,

$$\frac{3 + 5\,i}{2 - i} = \left(\frac{3 + 5\,i}{2 - i}\right) \cdot \left(\frac{2 + i}{2 + i}\right) = \frac{(3 + 5\,i) \cdot (2 + i)}{(2 - i) \cdot (2 + i)} = \frac{6 + 3\,i + 10\,i + 5\,i^2}{2^2 + 1^2} = \frac{1}{5} + \frac{13}{5}\,i.$$

Ejercicios.

1. Calcular el módulo de z, siendo
$$z = \frac{(3 - i)^6 \cdot (-i)^{15} \cdot \overline{(2 + 2\,i)}}{(1 - i)^3}.$$

Solución.

La idea es usar las propiedades de módulo para no calcular las potencias de los números complejos que en forma binómica son muy costosas.
Sabemos:

$$|z.w| = |z|\,|w| \Longrightarrow |z^n| = |z|^n,$$
$$|\overline{z}| = |z| \text{ y } \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}.$$

Luego,

$$|z| = \left|\frac{(3-\ i)^6(-i)^{15}\overline{(2+2\,i)}}{(1-\ i)^3}\right| = \frac{|3-\ i|^6\,|-i|^{15}\,\left|\overline{2+2\,i}\right|}{|1-\ i|^3} =$$
$$= \frac{\left(\sqrt{3^2+(-1)^2}\right)^6\ 1^{15}\,|2+2\,i|}{(\sqrt{1^2+1^2})^3} = \frac{(10^{\frac{1}{2}})^6\cdot 1\cdot\ 2\sqrt{1^2+1^2}}{(\sqrt{2})^3} = \frac{10^3.\cancel{2\sqrt{2}}}{\cancel{2\sqrt{2}}} = 1000$$

2. Dar la forma binómica de $z = \dfrac{3+3i}{(1+i)^2}$

   Solución.

   Primero desarrollamos el cuadrado y luego multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador.

$$z = \frac{3+3i}{(1+i)^2} = \frac{3+3i}{1+2i-1} = \frac{3+3i}{2i} = \frac{(3+3i)\cdot(-2i)}{(2i)(-2i)} =$$
$$= \frac{(3+3i)\cdot(-2i)}{4} = \frac{-6i+6}{4} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$$

3. Dar la forma binómica de los $z \in \mathbb{C}$ que verifican la ecuación:
$$(1-\ i)z = \overline{3-2\,i} - 3z - \frac{1}{i}.$$

   Solución.

   Realizamos el despeje de la ecuación igual que con los números reales. En los cocientes multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador.

$$(1-\ i)z + 3z = 3+2\,i - \frac{1\,(-i)}{i\,(-i)} \iff (1+3-\ i)z = 3+2\,i - (\frac{-i}{1})$$
$$\iff (4-\ i)z = 3(1+\ i) \iff z = 3.\frac{1+\ i}{4-\ i} = 3.\frac{(1+\ i)(4+\ i)}{(4-\ i)(4+\ i)} = 3.\frac{3+5\,i}{16+1} = \frac{9}{17} + \frac{15}{17}i$$

4. Dar la forma binómica de los $z \in \mathbb{C}$ que verifican la ecuación:
$$z\cdot(\overline{z}+1) = 10+2i.$$

   Solución. Comenzamos planteando $z = a+bi$ y reescribiendo la ecuación que deben cumplir los z complejos que estamos buscando:
$$z\cdot(\overline{z}+1) = (a+bi)\cdot(a-bi+1) = 10+2i$$

   Si desarrollamos el producto de la izquierda, tenemos
$$a\cdot(a+1) + b^2 + bi = a^2 + a + b^2 + bi = 10+2i.$$

Como dos números complejos son iguales si y sólo si lo son su parte real y su parte imaginaria, el problema consiste en encontrar a y $b \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\begin{cases} a^2 + a + b^2 & = & 10 \\ b & = & 2 \end{cases}$$

Reemplacemos el valor de b en la primera ecuación:

$$a^2 + a + 4 = 10 \iff a^2 + a - 6 = 0 \iff a = -3 \text{ ó } a = 2$$

Así, todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen la ecuación son $z = -3 + 2i$ y $z = 2 + 2i$.

Ecuaciones cuadráticas

Veamos ahora cómo, con los números complejos, podemos resolver ecuaciones de grado 2.

Ejemplos.

- Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ que verifican $z^2 - 4 = 0$.

  Buscamos las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 - 4 = 0$. Que la "incógnita" se llame z sólo nos sugiere que las soluciones pueden ser complejas.

  $$z^2 - 4 = 0 \iff z^2 = 4 \iff z = 2 \quad \text{ó} \quad z = -2$$

- Hallar los $z \in \mathbb{C}$ que verifican $z^2 + 1 = 0$.

  $z^2 + 1 = 0 \iff z^2 = -1$, que no tiene solución para los números reales.

  Pero en $\mathbb{C}$ tenemos dos soluciones:

  $$z = i \quad \text{y} \quad z = -i$$

  pues $i^2 = -1$ y $(-i)^2 = -1$.

  Observación. Al incorporar el objeto i conseguimos dos soluciones de la ecuación $x^2 + 1 = 0$ y ahora todas las ecuaciones cuadráticas tendrán dos raíces (eventualmente repetidas).

- Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ que verifican $z^2 + 9 = 0$.

  $$z^2 + 9 = 0 \iff z^2 = -9 \iff z = 3i \quad \text{ó} \quad z = -3i$$

- Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ que verifican $z^2 - 3 + 4i = 0$.

  Esto equivale a resolver $z^2 = 3 - 4\,i$, pero ahora la solución no es tan inmediata.

  Buscamos a y $b \in \mathbb{R}$ tales que:

  $$(a + b\,i)^2 = 3 - 4\,i$$

  Desarrollamos el cuadrado y llegamos a:

  $$a^2 - b^2 + 2ab\,i = 3 - 4\,i.$$

  Como dos números complejos son iguales si y sólo si lo son su parte real y su parte imaginaria, el problema consiste en encontrar a y $b \in \mathbb{R}$ tales que:

  $$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = -4 \end{cases}.$$

Para poder despejar a y b de este sistema de ecuaciones de manera más sencilla, agregamos una tercera ecuación que también verifican los números reales a y b que buscamos.

Como $z^2 = 3 - 4\,i$, tomando módulo a cada lado, tenemos:

$$|z|^2 = |3 - 4\,i| \Longrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{3^3 + (-4)^2} = 5.$$

La agregamos a nuestro sistema:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 & (1) \\ 2ab = -4 & (2) \\ a^2 + b^2 = 5 & (3) \end{cases}$$

Observar que estas ecuaciones tienen incógnitas reales, “¡no hay i!” a y b son números reales.

Con (1) y (3) despejamos a^2 y b^2, por ejemplo sumando las ecuaciones:

$$2a^2 = 8 \Longleftrightarrow a^2 = 4 \Longleftrightarrow a = 2 \text{ ó } a = -2.$$

Volviendo a (3):

$$4 + b^2 = 5 \Longleftrightarrow b^2 = 1 \Longleftrightarrow b = 1 \text{ ó } b = -1.$$

Por último, con la ecuación (2) terminamos de determinar a y b usando la regla de los signos. Como $2ab < 0$, a y b tienen distinto signo.

Luego, o bien $a = 2$ y $b = -1$ o bien $a = -2$ y $b = 1$.

Se tiene entonces que los $z \in \mathbb{C}$ que verifican $z^2 - 3 + 4i = 0$ son

$$z = 2 - i \quad \text{y} \quad z = -2 + i.$$

Ejercicios.

1. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que:
$$z^2 - 2z + 3 = 0$$

Solución. Vemos que a diferencia de los ejemplos anteriores tenemos tres términos y no podemos despejar directamente z de ahí. Completando cuadrados se puede reescribir la ecuación cuadrática en su *forma canónica*:

$$(z - 1)^2 + 2 = 0.$$

$$(z-1)^2 = -2 \Longleftrightarrow z - 1 = \sqrt{2}\,i \quad \text{ó} \quad z - 1 = -\sqrt{2}\,i$$
$$\Longleftrightarrow z = 1 + \sqrt{2}\,i \quad \text{ó} \quad z = 1 - \sqrt{2}\,i$$

Observación.
Cualquier ecuación cuadrática se puede expresar en su *forma canónica.*

$$ax^2 + bx + c = 0 \Longleftrightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0 \underset{a\neq 0}{\Longleftrightarrow} \left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

De esta expresión se deduce la fórmula resolvente para hallar las raíces de una cuadrática.

Fórmula.
Versión compleja de la resolvente: las soluciones en $\mathbb{C}$ de la ecuación $az^2+bz+c=0$ son

$$z = \frac{-b+w}{2a},$$

donde w es un número complejo que cumple $w^2 = b^2 - 4ac.$

Apliquemos la fórmula resolvente a la ecuación de este ejercicio:

$$z^2 - 2z + 3 = 0$$

Tenemos que los coeficientes de la ecuación son $a = 1$, $b = -2$ y $c = 3$.
Como $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4.1.3 = -8$ es un número real negativo,

$$z = \frac{-b+w}{2a} = \frac{-(-2)+w}{2.1} = \frac{2+w}{2}$$

con $w \in \mathbb{C}$ que cumple:

$$w^2 = -8,$$

que tiene soluciones:

$$w = \sqrt{8}\,i = 2\sqrt{2}\,i \quad \text{y} \quad w = -\sqrt{8}\,i = -2\sqrt{2}\,i.$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación son:

$$z = \frac{2+2\sqrt{2}\,i}{2} \quad \text{y} \quad z = \frac{2-2\sqrt{2}\,i}{2}$$

que, simplificando el 2, vemos que son las mismas que obtuvimos arriba.

2. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que

$$z^2 - z + 1 + i = 0.$$

Solución. Tenemos una ecuación cuadrática con incógnita z con los tres términos. Para aplicar la fórmula resolvente, reconocemos los coeficientes:

$$a = 1,\ b = -1 \text{ y } c = 1 + i.$$

Calculamos $b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4.1.(1+i) = -3 - 4\,i$, que es un número no real.
Usamos entonces la *versión compleja* de la fórmula resolvente:

$$z = \frac{-b+w}{2a} = \frac{-(-1)+w}{2.1} = \frac{1+w}{2},$$

donde $w \in \mathbb{C}$ cumple $w^2 = b^2 - 4ac = -3 - 4\,i$.
Ahora para hallar w usamos la técnica de las tres ecuaciones como en el último ejemplo más arriba.
Resolviendo las tres ecuaciones, se llega a:

$$w = -1 + 2\,i \quad \text{ó} \quad w = 1 - 2\,i.$$

Por lo tanto,

$$z = \frac{1+(-1+2\,i)}{2} \quad \text{ó} \quad z = \frac{1+(1-2\,i)}{2} \Longleftrightarrow z = \frac{2\,i}{2} \quad \text{ó} \quad z = \frac{2-2\,i}{2}.$$

Luego, las soluciones de la ecuación son:

$$z = i \quad \text{y} \quad z = 1 - i.$$