Polinomios

La resolución de ecuaciones es uno de los problemas con más historia dentro de la matemática. El interés por resolver estos problemas dio origen al estudio de los polinomios. En esta sección estudiaremos propiedades que nos permitirán, entre otras cosas, encontrar soluciones de ecuaciones polinomiales.

Una expresión que está formada por una combinación de sumas, productos y restas entre una *indeterminada* x y diferentes números se llama un **polinomio**. En general:

Un polinomio con coeficientes en $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ es una expresión de la forma:

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = \sum_{j=0}^{n} a_jx^j$$

con $n \in \mathbb{N}$ y $a_j \in \mathbb{K}$. Los a_j son los *coeficientes* de P.

Notamos $\mathbb{K}[x] = \{P \ / \ P \text{ es un polinomio con coeficientes en } \mathbb{K}\}$.
Es decir, $\mathbb{K}[x]$ es el conjunto formado por todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$.

Por ejemplo, las siguientes expresiones son polinomios.

- $P(x) = 2x - 1$, $P \in \mathbb{Q}[x]$
- $Q(x) = 2x^3 + (2 + i)x^2 + 1$, $Q \in \mathbb{C}[x]$
- $R(x) = x^2 + \sqrt{2}x - 1$, $R \in \mathbb{R}[x]$

Operaciones en $\mathbb{K}[x]$

Ejemplo 1. Sean $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $Q(x) = x^5 - 1$ y $R(x) = -x^3 + 2x - 5$. Calcular:

i. $P.Q$

ii. $P + R$

iii. $P^2 - xQ$

Solución. Para hacer estos cálculos vamos a utilizar las propiedades de las operaciones que conocemos (distributiva, conmutativa y asociativa). También vamos a agrupar los términos con el mismo exponente. Es decir, vamos a trabajar con la indeterminada x como si fuera un número.

i.

$$\begin{aligned}(P.Q)(x) &= (2x^2 - 3x + 1).(x^5 - 1) = 2x^2x^5 - 3xx^5 + x^5 - 2x^2 + 3x - 1 \\ &= 2x^7 - 3x^6 + x^5 - 2x^2 + 3x - 1\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Respuesta: } (P.Q)(x) = 2x^7 - 3x^6 + x^5 - 2x^2 + 3x - 1}$

ii.

$$\begin{aligned}(P+R)(x) &= (2x^2-3x+1)+(-x^3+2x-5) = -x^3+2x^2+(-3+2)x+(1-5)\\ &= -x^3+2x^2-x-4\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Respuesta: } (P+R)(x) = -x^3+2x^2-x-4}$

iii. En este caso, calculemos primero P^2:

$$P^2(x) = (2x^2-3x+1)^2 = (2x^2-3x+1).(2x^2-3x+1) = 4x^4-12x^3+13x^2-6x+1$$

Calculemos ahora xQ:

$$(xQ)(x) = x(x^5-1) = x^6-x$$

Por lo tanto,

$$(P^2-xQ)(x) = 4x^4-12x^3+13x^2-6x+1-(x^6-x) = -x^6+4x^4-12x^3+13x^2-5x+1$$

$\boxed{\text{Respuesta: } (P^2-xQ)(x) = -x^6+4x^4-12x^3+13x^2-5x+1}$

Como vimos, las operaciones entre polinomios se realizan utilizando las propiedades y reglas que conocemos de las operaciones entre números.
En cuanto a la igualdad de polinomios, tenemos siguiente definición:

Dos polinomios $P(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j x^j$ y $Q(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} b_j x^j$ en $\mathbb{K}[x]$ son iguales si y sólo si

$$a_j = b_j \ \ \forall\, 0 \leq j \leq n.$$

Ejemplo 2. Sean $P(x) = a^2x^2-(3-a)x-1$ y $Q(x) = (3x-1)(3x+1)$. Determinar todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que $P = Q$.

Solución. Observemos primero que el polinomio Q se puede escribir como $Q(x) = 9x^2-1$ (es decir, como una diferencia de cuadrados). Esto se puede comprobar desarrollando el producto $(3x-1)(3x+1)$. Luego, para que $P = Q$, todos los coeficientes tiene que ser iguales, es decir:

- $-1 = -1$
- $3-a = 0$
- $a^2 = 9$

La primera condición se verifica para todo $a \in \mathbb{R}$; la segunda, únicamente para $a = 3$, y la tercera, para $a = 3$ o $a = -3$. Por lo tanto, el único valor de a para el cual los polinomios son iguales es:

$\boxed{\text{Respuesta: } a = 3}$

Observemos que si $P \in \mathbb{K}[x]$ no es el polinomio nulo, es decir si $P \neq 0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que el polinomio se puede escribir de la forma:

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \ \text{ con } \ a_n \neq 0.$$

En ese caso, n es el *grado de* P y se nota $\mathrm{gr}(P) = n$. Además, a_n se llama el *coeficiente principal* de P. Por definición, el polinomio nulo no tiene grado.
Cuando el coeficiente principal es igual a 1, se dice que el polinomio es *mónico*.

Ejemplo 3. Sean $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $Q(x) = x^5 - 1$ y $R(x) = -2x^2 + x$. Determinar los grados de los polinomios P, Q, $P + Q$, $P + R$ y $P.Q$.

Solución.

- $\mathrm{gr}(P) = 2$
- $\mathrm{gr}(Q) = 5$
- $\mathrm{gr}(P + Q) = \mathrm{gr}(x^5 + 2x^2 - 3x) = 5$
- $\mathrm{gr}(P + R) = \mathrm{gr}(-2x + 1) = 1$
- $\mathrm{gr}(P.Q) = \mathrm{gr}(2x^7 - 3x^6 + x^5 - 2x^2 + 3x - 1) = 7$

Observemos que si $P, Q \in \mathbb{K}[x]$ son no nulos, entonces

- si $P + Q \neq 0$, entonces $\mathrm{gr}(P + Q) \leq \text{máx}\{\mathrm{gr}(P), \mathrm{gr}(Q)\}$.
  Más aún, si $\mathrm{gr}(P) \neq \mathrm{gr}(Q)$, entonces $\mathrm{gr}(P + Q) = \text{máx}\{\mathrm{gr}(P), \mathrm{gr}(Q)\}$.
- $\mathrm{gr}(P.Q) = \mathrm{gr}(P) + \mathrm{gr}(Q)$.

Ejemplo 4. Sea Q un polinomio de grado 4. Sabiendo que el polinomio $(x^5Q + 1)x^2P$ tiene grado 12, determinar el grado del polinomio P.

Solución. Observemos primero que

$$\mathrm{gr}(x^5Q + 1) = 9$$

En efecto,

$$\mathrm{gr}(x^5.Q) = \mathrm{gr}(x^5) + \mathrm{gr}(Q) = 5 + 4 = 9$$

y

$$\mathrm{gr}(x^5Q + 1) = \text{máx}\left\{\mathrm{gr}(x^5Q), \mathrm{gr}(1)\right\} = \text{máx}\{9, 0\} = 9.$$

Luego tenemos que

$$\mathrm{gr}(x^2P) = \mathrm{gr}(x^2) + \mathrm{gr}(P) = 2 + \mathrm{gr}(P)$$

de lo que se deduce que

$$12 = \mathrm{gr}((x^5Q + 1)x^2P) = \mathrm{gr}(x^5Q + 1) + \mathrm{gr}(x^2P) = 9 + 2 + \mathrm{gr}(P).$$

Por lo tanto, despejando, $\mathrm{gr}(P) = 1$.

$\boxed{\text{Respuesta: } \mathrm{gr}(P) = 1}$

Especialización y raíces

Dado un polinomio podemos reemplazar la indeterminada x por un número. Este procedimiento se llama *especializar* el polinomio.

Ejemplo 5. Sean $P(x) = 2x + 1$, $Q(x) = 2x^3 + (2 + i)x^2 + 1$, $R(x) = 1$ y $S(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$. Calcular $P(1)$, $Q(i)$, $R(-1)$ y $S(0)$.

Solución.

- $P(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$
- $Q(i) = 2i^3 + (2 + i)i^2 + 1 = -2i - (2 + i) + 1 = -1 - 3i$
- $R(-1) = 1$
- $S(0) = \frac{1}{2} \cdot 0^2 + 2 = 2$

> Dado un polinomio $P \in \mathbb{K}[x]$ y un número $z \in \mathbb{K}$, decimos que z es una *raíz de P* si $P(z) = 0$.

Ejemplo 6. Hallar las raíces de los siguientes polinomios:

i. $P(x) = 4x - 8$

ii. $Q(x) = 2ix - 8$

iii. $R(x) = x^2 - 2x + 1$

iv. $S(x) = 2x^2 + (-1 + i)x + i$

v. $T(x) = x^5 - 1$

Solución. Calcular las raíces de un polinomio P es resolver la ecuación $P(x) = 0$. Es decir, encontrar todos los números z tales que, al especializar P en z, el resultado da 0. ¿A qué conjunto de números tiene que pertenecer z? Cuando no se indique lo contrario, vamos a buscar las raíces en $\mathbb{C}$. Es decir, cuando el problema pida encontrar las raíces de un polinomio P, vamos a buscar todos los $z \in \mathbb{C}$ que verifican $P(z) = 0$.

i. Para encontrar las raíces de P, despejamos: $4x - 8 = 0 \Longleftrightarrow 4x = 8 \Longleftrightarrow x = 2$.
La única raíz de P es $\boxed{z = 2}$

ii. Para encontrar las raíces de Q, también despejamos:
$2ix - 8 = 0 \Longleftrightarrow 2ix = 8 \Longleftrightarrow ix = 4 \Longleftrightarrow i^2x = 4i \Longleftrightarrow -x = 4i$.
La única raíz de Q es $\boxed{z = -4i}$

iii. Tenemos que resolver la ecuación cuadrática $x^2 - 2x + 1 = 0$. Para eso, utilizamos la *fórmula resolvente* o podemos ver que $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$. Entonces la única raíz de R es: $\boxed{z = 1}$

iv. Para hallar las raíces de S, también tenemos que resolver una ecuación cuadrática, pero a diferencia de la anterior, el polinomio S tiene coeficientes complejos. Aplicamos la *fórmula resolvente* (versión compleja):

$$az^2 + bz + c = 0 \text{ con } a, b, c \in \mathbb{C} \Longleftrightarrow z = \frac{-b + w}{2a}$$

donde w es un número complejo tal que $w^2 = b^2 - 4ac$.

En este caso, $a = 2$, $b = -1 + i$ y $c = i$. Al aplicar la fórmula obtenemos:

$$z = \frac{1 - i + w}{4}$$

donde w es un número complejo tal que $w^2 = (-1 + i)^2 - 4 \cdot 2 \cdot i = -10i$.

Si $w = a + bi$:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = -10 \end{cases}$$

De la segunda ecuación, deducimos que a y b tienen signos opuestos. Como $b = 0$ no es solución de la segunda ecuación, podemos despejar de esa ecuación $a = -\dfrac{5}{b}$ y, sustituyendo en la primera,

$$\frac{25}{b^2} - b^2 = 0 \Longleftrightarrow 25 - b^4 = 0 \Longleftrightarrow b = \pm\sqrt{5}$$

Reemplazando en la expresión de a:

$$a = \mp\sqrt{5}.$$

Entonces, los dos números complejos w tales que $w^2 = -10i$ son $w_1 = \sqrt{5} - \sqrt{5}i$ y $w_2 = -\sqrt{5} + \sqrt{5}i$. Por lo tanto, $z_1 = \dfrac{1 - i + \sqrt{5} - \sqrt{5}i}{4}$ y $z_2 = \dfrac{1 - i - \sqrt{5} + \sqrt{5}i}{4}$.

Las raíces de S son:

$$\boxed{\text{Respuesta: } z_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} - \frac{1 + \sqrt{5}}{4}i \quad \text{y} \quad z_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} - \frac{1 - \sqrt{5}}{4}i}$$

v. Ahora tenemos que resolver la ecuación $x^5 - 1 = 0$. Es decir, tenemos que encontrar los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^5 = 1$. Por lo tanto, las raíces de T son las raíces quintas de la unidad. Recordemos que una forma de resolver este problema es escribiendo a z en forma trigonométrica $z = |z|(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))$, con $\theta = \arg(z)$, y utilizando el teorema de De Moivre. Entonces, buscamos los $z \in \mathbb{C}$ tales que

$$|z|^5 (\cos(5\theta) + i \operatorname{sen}(5\theta)) = 1$$

Es decir:

$$\begin{cases} |z|^5 = 1 \\ 5\theta = 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{5}, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Como buscamos que $0 \leq \theta < 2\pi$, las cinco raíces de T son:

$$\boxed{\begin{array}{l} z_1 = 1 \\ z_2 = \cos(\frac{2\pi}{5}) + i \operatorname{sen}(\frac{2\pi}{5}) \\ z_3 = \cos(\frac{4\pi}{5}) + i \operatorname{sen}(\frac{4\pi}{5}) \\ z_4 = \cos(\frac{6\pi}{5}) + i \operatorname{sen}(\frac{6\pi}{5}) \\ z_5 = \cos(\frac{8\pi}{5}) + i \operatorname{sen}(\frac{8\pi}{5}) \end{array}}$$

En lo que sigue, vamos a ver otras herramientas que nos servirán para hallar raíces de polinomios. Un resultado útil en el caso de polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ es el siguiente:

Si $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \in \mathbb{R}[x]$ y $z \in \mathbb{C}$ es una raíz de P, entonces $\overline{z}$ es raíz de P.

Esto se da porque si

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

entonces

$$\overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = 0.$$

Usando que, para w_1 y w_2 en $\mathbb{C}$, vale que $\overline{w_1 w_2} = \overline{w_1} \cdot \overline{w_2}$ y $\overline{w_1 + w_2} = \overline{w_1} + \overline{w_2}$, resulta que

$$a_n \overline{z}^n + a_{n-1} \overline{z}^{n-1} + \cdots + a_1 \overline{z} + a_0 = 0.$$

Observemos que la última igualdad es válida porque los coeficientes del polinomio son números reales, es decir, $\overline{a_i} = a_i$. Este razonamiento no se hubiera podido aplicar si $P \notin \mathbb{R}[x]$.

Algoritmo de división

Al igual que definimos la suma y el producto entre polinomios inspirados en la aritmética, vamos a extender la noción de divisibilidad de números a la divisibilidad de polinomios.
Sabemos, por ejemplo, que el polinomio $P(x) = x^2 - 9$ se puede escribir como producto de dos polinomios: $P(x) = x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$. Esto da lugar a decir que el polinomio P es divisible por $x - 3$ y por $x + 3$.
Se puede probar que si P y Q son dos polinomios en $\mathbb{K}[x]$, $Q \neq 0$, existen únicos polinomios $C, R \in \mathbb{K}[x]$ tales que

$$P(x) = Q(x)C(x) + R(x)$$

con $R = 0$ o $\operatorname{gr}(R) < \operatorname{gr}(Q)$. En este caso, C y R se llaman, respectivamente, el *cociente* y el *resto* de la división de P por Q.

Se dice que Q divide a P (o que P es divisible por Q) si el resto de la división de P por Q es el polinomio nulo. En este caso notamos $Q \mid P$.

Ejemplo 7. Sean $P(x) = x^2 - 2x + 1$, $Q(x) = x - 1$, $S(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1$. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

i. $Q \mid P$

ii. $Q \mid S$

iii. $P \mid S$

Solución Calculemos los cocientes y los restos en cada caso. En esta ocasión, utilizaremos un algoritmo similar al que se puede utilizar en la división de números enteros:

i. $$\begin{array}{r|l}
x^2-2x+1 & x-1 \\ \cline{2-2}
-x^2+x & x-1 \\ \cline{1-1}
-x+1 & \\
x-1 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Entonces, $C(x)=x-1$ y $R(x)=0$. $\boxed{\text{Por lo tanto, la afirmación es verdadera.}}$

ii. $$\begin{array}{r|l}
x^4-x^3+2x^2+x+1 & x-1 \\ \cline{2-2}
-x^4+x^3 & x^3+2x+3 \\ \cline{1-1}
2x^2+x & \\
-2x^2+2x & \\ \cline{1-1}
3x+1 & \\
-3x+3 & \\ \cline{1-1}
4 &
\end{array}$$

Entonces, $C(x)=x^3+2x+3$ y $R(x)=4$. $\boxed{\text{Por lo tanto, la afirmación es falsa.}}$

iii. $$\begin{array}{r|l}
x^4-x^3+2x^2+x+1 & x^2-2x+1 \\ \cline{2-2}
-x^4+2x^3-x^2 & x^2+x+3 \\ \cline{1-1}
x^3+x^2+x & \\
-x^3+2x^2-x & \\ \cline{1-1}
3x^2+1 & \\
-3x^2+6x-3 & \\ \cline{1-1}
6x-2 &
\end{array}$$

Entonces, $C(x)=x^2+x+3$ y $R(x)=6x-2$. $\boxed{\text{Por lo tanto, la afirmación es falsa.}}$

Una consecuencia importante del algoritmo de la división es la siguiente: si $P \in \mathbb{K}[x]$ y $z \in \mathbb{K}$, entonces
$$P(x) = (x-z)S(x) + R$$
donde $R = 0$ ó $\operatorname{gr}(R) < 1$, es decir $R \in \mathbb{K}$ (es constante).
Especializando el polinomio en z,
$$P(z) = (z-z)S(z) + R = R.$$

Es decir, el resto de dividir un polinomio P por $x-z$ es $P(z)$.

Teorema del resto. Si $P \in \mathbb{K}[x]$ y $z \in \mathbb{K}$, entonces
$$P(x) = (x-z)S(x) + P(z)$$

En particular, se deduce que:

> Si $P \in \mathbb{K}[x]$ y $z \in \mathbb{K}$, entonces
> $$z \text{ es raíz de } P \iff (x-z) \mid P.$$

Ejemplo 8. Sea $P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$. Sabiendo que i es una raíz de P, determinar todas raíces de P en $\mathbb{C}$.

Solución. Como i es raíz de P y $P \in \mathbb{R}[x]$, $\bar{i} = -i$ también es raíz de P. Entonces, $x - i$ y $x + i$ son polinomios que dividen a P. Luego, $(x - i)(x + i) = x^2 + 1$ divide a P. Realizando la división,

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4 = (x^2 + 1)(x^2 - 4x + 4) = (x - i)(x + i)(x^2 - 4x + 4)$$

Tenemos entonces que

$$P(x) = 0 \iff x = i \quad \text{ó} \quad x = -i \quad \text{ó} \quad x^2 - 4x + 4 = 0.$$

Finalmente buscamos las raíces de $x^2 - 4x + 4$. Este polinomio tiene una única raíz $x = 2$; de hecho, $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$.

Respuesta: Todas las raíces de P son i, $-i$ y 2.

Sabemos que no todo polinomio en $\mathbb{R}[x]$ tiene una raíz en $\mathbb{R}$; por ejemplo, conocemos polinomios de grado 2, como ser $x^2 + 1$, sin raíces reales. Sin embargo, también vimos que para estos polinomios de grado 2 siempre podemos hallar raíces en $\mathbb{C}$. Estas observaciones nos hacen plantearnos la siguiente pregunta: ¿existen polinomios no constantes que no tengan raíces en $\mathbb{C}$? Esta pregunta inquietó a muchos matemáticos a lo largo de la historia. Al parecer, Augustin Louis Cauchy fue el primero que pudo demostrar el siguiente resultado:

Teorema Fundamental del Álgebra. (T.F.A.)
Sea $P \in \mathbb{C}[x]$ tal que $\operatorname{gr}(P) \geq 1$. Entonces existe $z \in \mathbb{C}$ tal que z es raíz de P.

Del teorema también se puede deducir que si $\operatorname{gr}(P) = n$, con $n \geq 1$, el polinomio P tiene (a lo sumo) n raíces en $\mathbb{C}$ y se puede escribir como un producto de n polinomomios de grado 1.
En efecto, si $z_1 \in \mathbb{C}$ es una raíz de P (el T.F.A asegura su existencia), podemos escribir $P(x) = (x - z_1)Q_1(x)$, donde $\operatorname{gr}(Q_1) = n - 1$. Si $\operatorname{gr}(Q_1) \neq 0$, entonces Q_1 también tiene una raíz $z_2 \in \mathbb{C}$. Es decir, $Q_1(x) = (x - z_2)Q_2(x)$ y, entonces, $P(x) = (x - z_1)(x - z_2)Q_2(x)$, donde $\operatorname{gr}(Q_2) = n - 2$. Si seguimos haciendo lo mismo hasta que el cociente sea un polinomio de grado cero, llegamos a escribir a P como

$$P(x) = a(x - z_1)(x - z_2) \dots (x - z_n),$$

donde a es el coeficiente principal de P. Observamos que en esta expresión puede haber factores repetidos, es decir, raíces repetidas (como ocurre para el polinomio del Ejemplo 8). Volveremos sobre esto más adelante, al introducir la noción de *multiplicidad*.

Saber que un polinomio tiene al menos una raíz no es suficiente para encontrarla. Hasta ahora vimos que si el polinomio $P \in \mathbb{K}[x]$ es de grado 1, podemos, despejando, encontrar la única raíz:

$$\text{si } \ P(x) = a_1 x + a_0, \ \text{ entonces } \ z = -\frac{a_0}{a_1}$$

También vimos que si $P \in \mathbb{K}[x]$ es de grado 2, podemos encontrar las raíces aplicando la fórmula resolvente. Pero, ¿qué pasa si $\operatorname{gr}(P) > 2$? ¿Podemos hallar raíces de P?
Lamentablemente, en el siglo XIX los matemáticos Abel y Galois, probaron que no hay fórmulas generales para hallar las raíces en $\mathbb{C}$ de cualquier polinomio (salvo en situaciones particulares, como ser polinomios de grado bajo). Trabajaremos con métodos que nos permitirán resolver el problema en algunos casos.

Cálculo de raíces de polinomios

El siguiente resultado nos brinda una herramienta para saber si un polinomio con coeficientes enteros tiene raíces racionales y, en caso afirmativo, hallarlas:

Lema de Gauss. Sea $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \in \mathbb{Z}[x]$, tal que $a_n \neq 0$ y $a_0 \neq 0$. Si $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ es una raíz de P, con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$ sin factores primos en común, entonces p divide a a_0 y q divide a a_n ($p \mid a_0$ y $q \mid a_n$).

Observemos que el Lema de Gauss no nos dice cuáles son las raíces racionales de P, pero nos propone una lista finita con las candidatas. Es decir, nos permite afirmar que los números racionales que quedan afuera de la lista no son raíces de P. De este modo, si queremos hallar todas las raíces racionales de P, basta hacer la lista de todos los números candidatos y especializar P en cada uno de ellos para ver si es raíz o no.

Ejemplo 9. En cada uno de los siguientes casos, hallar todas las raíces racionales de P.

i. $P(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$

ii. $P(x) = x^3 - 2x - \frac{7}{8}$

Solución.

i. El polinomio $P(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$ tiene coeficientes enteros. El Lema de Gauss nos dice que si $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ es una raíz de P, con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$ sin factores primos en común (es decir, una fracción irreducible donde el numerador tiene el signo), entonces $p \mid -1$ (coeficiente constante de P) y $q \mid 2$ (coeficiente principal de P). Es decir, el numerador es $p = 1$ ó $p = -1$ y el denominador es $q = 1$ ó $q = 2$. Entonces, las posibles raíces racionales de P son:

$$1, \quad -1, \quad \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2}.$$

Al especializar P en cada una de ellas obtenemos:

- $P(1) = 3 \neq 0$
- $P(-1) = -3 \neq 0$
- $P(\frac{1}{2}) = 0$
- $P(-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2} \neq 0$

con lo cual podemos afirmar que la única raíz racional de P es $\frac{1}{2}$.

Respuesta: La única raíz racional de P es $z = \frac{1}{2}$.

ii. Para poder utilizar el Lema de Gauss, el polinomio debe tener los coeficientes en $\mathbb{Z}$. No es el caso de P ya que $a_0 = -\frac{7}{8}$. Sin embargo, las raíces de P son las mismas que las del polinomio

$$Q(x) = 8.P(x) = 8x^3 - 16x - 7.$$

Ahora sí estamos en condiciones de aplicar el lema:
Si $\frac{p}{q}$ es una raíz de Q con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$ sin factores primos en común, entonces $p \mid -7$ y $q \mid 8$. Es decir, $p = \pm 1$ o $p = \pm 7$ y $q = 1$ o $q = 2$ o $q = 4$ o $q = 8$. Luego, las posibles raíces racionales de Q son:

- ± 1
- $\pm \frac{1}{2}$
- $\pm \frac{1}{4}$
- $\pm \frac{1}{8}$
- ± 7
- $\pm \frac{7}{2}$
- $\pm \frac{7}{4}$
- $\pm \frac{7}{8}$

Especializando en cada uno de los 16 números, comprobamos que la única raíz racional de Q y, por lo tanto también de P, es

$$z = -\frac{1}{2}$$

Respuesta: La única raíz racional de P es $z = -\frac{1}{2}$

Ejemplo 10. Calcular todas las raíces de $P(x) = x^3 - 2x - \frac{7}{8}$ y escribirlo como producto de polinomios de grado 1.

Solución. Por lo realizado anteriormente, sabemos que $z = -\frac{1}{2}$ es una de las raíces (la única racional). Sabemos que, entonces, $(x + \frac{1}{2}) \mid P$. De este modo, para encontrar las otras raíces, vamos primero a hallar el polinomio $C \in \mathbb{R}[x]$ tal que

$$P(x) = (x + \frac{1}{2})C(x).$$

Dividiendo, llegamos a escribir al polinomio P como:

$$P(x) = (x + \frac{1}{2})(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{7}{4})$$

Para finalizar, busquemos las raíces de $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}$.
Utilizando la fórmula resolvente,

$$x_{1,2} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 7}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{29}{4}}}{2} = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{29}}{4}$$

y, entonces,

$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{7}{4} = (x - \frac{1+\sqrt{29}}{4})(x - \frac{1-\sqrt{29}}{4}).$$

Por lo tanto, las raíces de P son $z_1 = -\frac{1}{2}$, $z_2 = \frac{1+\sqrt{29}}{4}$ y $z_3 = \frac{1-\sqrt{29}}{4}$ y P se escribe como producto de polinomios de grado 1 como:

$$P(x) = (x + \frac{1}{2})(x - \frac{1+\sqrt{29}}{4})(x - \frac{1-\sqrt{29}}{4}).$$

Multiplicidad

Una característica de las raíces de un polinomio es su *multiplicidad*.
Miremos el polinomio $P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$ con el que trabajamos en el Ejemplo 8. Vimos que las raíces de P en $\mathbb{C}$ son $i, -i$ y 2; más aún, a partir de lo hecho en el ejemplo, podemos escribir a P como producto de polinomios de grado 1 en $\mathbb{C}[x]$:

$$P(x) = (x - i)(x + i)(x - 2)^2.$$

En este caso aparece un único factor $x - i$, correspondiente a la raíz $z = i$, y un único factor $x + i$, correspondiente a $z = -i$. Asociado a la raíz $z = 2$ aparece el factor $x - 2$ dos veces, o sea, $(x - 2)^2$.
Diremos entonces que $z = 2$ es una raíz *doble* de P, o que la multiplicidad de $z = 2$ como raíz de P es 2, y que $z = i$ y $z = -i$ son raíces *simples* de P, o que la multiplicidad de $z = i$ o de $z = -i$ como raíz de P es 1. En general,

> Dados $P \in \mathbb{K}[x]$, y $z \in \mathbb{K}$ raíz de P, decimos que la *multiplicidad* de z como raíz de P es $k \in \mathbb{N}$ si $P(x) = (x - z)^k Q(x)$ con $Q \in \mathbb{K}[x]$ y $Q(z) \neq 0$.

Si la multiplicidad de una raíz z de P es 1, decimos que z es *raíz simple* de P, mientras que si la multiplicidad es mayor que 1, decimos que z es *raíz múltiple* de P.

Ejemplo 11. Determinar la multiplicidad de $z = 3$ como raíz de $P(x) = (x^2-9)^3(x+3)(x-3)^2$.

Solución. Factorizamos $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$. Luego, el polinomio P se puede escribir como:

$$P(x) = [(x - 3)(x + 3)]^3(x + 3)(x - 3)^2$$

Distribuyendo la potencia,

$$P(x) = (x - 3)^3(x + 3)^3(x + 3)(x - 3)^2$$

y, agrupando,

$$P(x) = (x - 3)^5(x + 3)^4$$

El factor $x - 3$ correspondiente a la raíz $z = 3$ aparece elevado al exponente 5, y el polinomio $(x + 3)^4$ no se anula en $z = 3$. Por lo tanto,

$\boxed{\text{Respuesta: la multiplicidad de } z = 3 \text{ como raíz de } P \text{ es 5.}}$

Veamos ahora el siguiente ejemplo:

Ejemplo 12. Hallar $P \in \mathbb{C}[x]$ de grado mínimo que tenga a 2 como raíz, a $3i$ como raíz múltiple y que verifique $P(0) = 36$.

Solución. Para empezar, listemos las características que debe tener el polinomio P:

- Los coeficientes de P son números complejos.
- $(x - 2) \mid P$ (porque 2 es raíz).
- $(x - 3i)^k \mid P$ para algún $k > 1$ (porque $3i$ es raíz múltiple).

- $P(0) = 36$.
- Si Q es otro polinomio que verifica las condiciones anteriores, entonces $\text{gr}(Q) \geq \text{gr}(P)$.

Mirando las tres primeras características, proponemos:

$$P(x) = A(x-2)(x-3i)^k \ \text{ con } \ A \in \mathbb{C}$$

y, para que se cumpla la última (es decir, que el polinomio tenga el menor grado posible), proponemos $k = 2$. Como además debe valer $P(0) = 36$,

$$A(0-2)(0-3i)^2 = 36 \iff A(-2)(-3i)^2 = 36 \iff 18A = 36 \iff A = 2$$

$\boxed{\text{Respuesta: } P(x) = 2(x-2)(x-3i)^2 = 2x^3 - (4+12i)x^2 - (18-24i)x + 36}$

¿Cómo cambiaría la resolución anterior si buscáramos un polinomio con coeficientes en $\mathbb{R}$?

Ejemplo 13. Hallar $P \in \mathbb{R}[x]$ de grado mínimo que tenga a 2 como raíz, a $3i$ como raíz múltiple y que verifique $P(0) = 36$.

Solución. En primer lugar, observemos que el polinomio de la respuesta anterior no nos sirve, porque no tiene todos los coeficientes en $\mathbb{R}$. Para encontrar un polinomio que cumpla lo pedido, debemos tener en cuenta que si $z \in \mathbb{C}$ es raíz de P, $\bar{z}$ también lo es. Entonces, el polinomio P debe cumplir:

- Los coeficientes de P son números reales.
- $(x-2) \mid P$ (porque 2 es raíz).
- $(x-3i)^k \mid P$ para algún $k > 1$ (porque $3i$ es raíz múltiple).
- $(x+3i) \mid P$ (porque $\overline{3i} = -3i$ es raíz de P).
- $P(0) = 36$.
- Si Q es otro polinomio que verifica las condiciones anteriores, entonces $\text{gr}(Q) \geq \text{gr}(P)$.

Si propusiéramos como respuesta el polinomio $P(x) = A(x-2)(x-3i)^2(x+3i)$, sus coeficientes no serían todos reales: como $P(0) = 36$, el número A debería ser igual a $-\frac{2}{3}i$. Es decir, el coeficiente principal de P sería $-\frac{2}{3}i \notin \mathbb{R}$.
Entonces, debemos "agregarle" otra raíz. Tomando $-3i$, el producto $(x-3i)(x+3i)$ queda igual a x^2+9, que tiene coeficientes en $\mathbb{R}$. Proponemos entonces

$$P(x) = A(x-2)(x-3i)^2(x+3i)^2.$$

Como $P(0) = 36$, deducimos que $A = -\frac{2}{9}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(x) &= -\frac{2}{9}(x-2)(x-3i)^2(x+3i)^2 \\ &= -\frac{2}{9}(x-2)(x^2+9)^2 = -\frac{2}{9}x^5 + \frac{4}{9}x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 18x + 36 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Respuesta: } P(x) = -\frac{2}{9}x^5 + \frac{4}{9}x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 18x + 36.}$

Lo que vimos en el ejemplo anterior, vale en general: si $P \in \mathbb{R}[x]$ y $z \in \mathbb{C}$, entonces z es una raíz de P de multiplicidad k si y sólo si $\bar{z}$ es una raíz de P de multiplicidad k.

Una propiedad muy útil para determinar la multiplicidad de una raíz de un polinomio $P \in \mathbb{K}[x]$ es la siguiente:

> Sean $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \in \mathbb{K}[x]$ y $z \in \mathbb{K}$ una raíz de P. Entonces,
>
> $$z \text{ tiene multiplicidad } k \iff P(z) = 0,\ \partial P(z) = 0,\ \partial^2 P(z) = 0, \dots, \partial^{k-1} P(z) = 0 \text{ y } \partial^k P(z) \neq 0.$$
>
> donde $\partial P \in \mathbb{K}[x]$ es el *polinomio derivado* de P, definido por $\partial P(x) = \sum_{j=1}^{n} j a_j x^{j-1}$, $\partial^2 P = \partial(\partial P)$, $\partial^3 P = \partial(\partial^2 P), \dots, \partial^k P = \partial(\partial^{k-1} P)$.

Ejemplo 14. Determinar la multiplicidad de $z = 1$ como raíz de

$$P(x) = x^5 - \frac{3}{2}x^4 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{13}{2}x^2 - \frac{9}{2}x + 1$$

Solución. Calculemos:

- $P(1) = 1 - \frac{3}{2} - \frac{5}{2} + \frac{13}{2} - \frac{9}{2} + 1 = 0$
- $\partial P(x) = 5x^4 - 6x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 13x - \frac{9}{2}$ y $\partial P(1) = 5 - 6 - \frac{15}{2} + 13 - \frac{9}{2} = 0$
- $\partial^2 P(x) = 20x^3 - 18x^2 - 15x + 13$ y $\partial^2 P(1) = 20 - 18 - 15 + 13 = 0$
- $\partial^3 P(x) = 60x^2 - 36x - 15$ y $\partial^3 P(1) = 60 - 36 - 15 \neq 0$

$\boxed{\text{Respuesta: } z = 1 \text{ es una raíz de } P \text{ de multiplicidad } 3}$.