Planos

Ejemplo 1. Hallar el conjunto C de vectores $X \in \mathbb{R}^3$ ortogonales a $N = (1, -2, 4)$.

Solución: Recordemos nuestra definición de ortogonalidad:

$$X \perp N \iff X \cdot N = 0$$

Si escribimos $X = (x, y, z)$, la condición para que X esté en el conjunto C es:

$$X \cdot N = (x, y, z) \cdot (1, -2, 4) = x - 2y + 4z = 0$$

$\boxed{\text{Respuesta: } C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + 4z = 0\}.}$

Observaciones

$O = (0, 0, 0)$ pertenece a C.

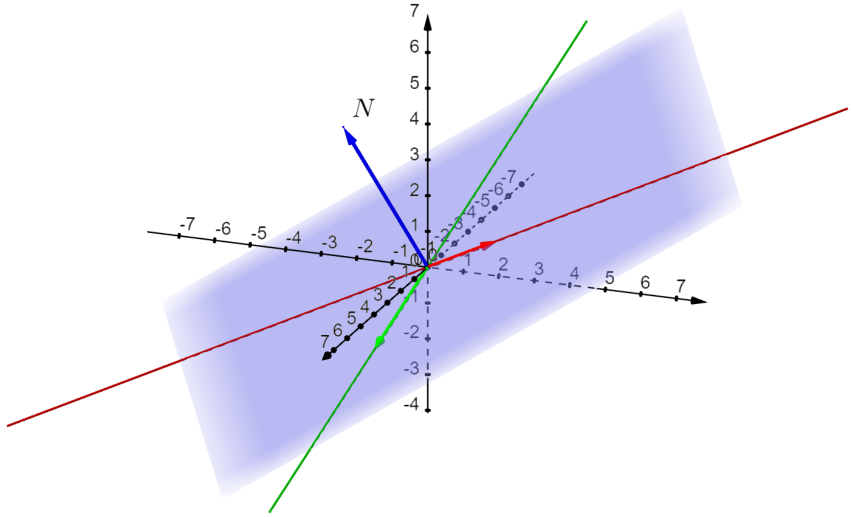
Como la condición para pertenecer a C es solo una ecuación con tres incógnitas, el conjunto tendrá infinitos elementos:
Podemos ver que, por ejemplo, $(0, 2, 1)$ y $(4, 0, -1)$ están en C:

$$(0, 2, 1) \cdot (1, -2, 4) = 0 \quad \text{y} \quad (4, 0, -1) \cdot (1, -2, 4) = 0$$

Al estar en el conjunto, todos sus múltiplos también lo están:

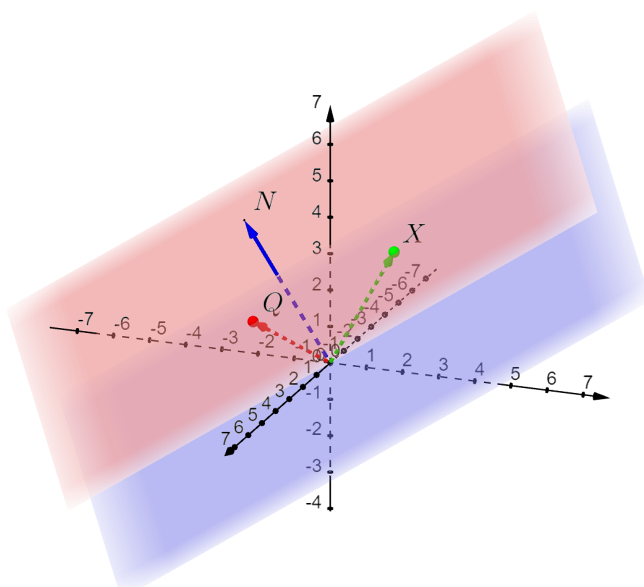
$$\text{Si } A = \lambda(0, 2, 1) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad A \cdot N = (\lambda(0, 2, 1)) \cdot N = \lambda((0, 2, 1) \cdot N) = 0$$

Lo mismo se aplica a los múltiplos de $(4, 0, -1)$.
Hemos visto que estos múltiplos forman rectas que pasan por el origen (observar que las rectas generadas por los múltiplos de $(0, 2, 1)$ y $(4, 0, -1)$ no son paralelas).
Además, estas rectas son ortogonales al vector N. Lo mismo ocurre con todos los elementos de C.
Recíprocamente, si una recta que pasa por el origen es ortogonal a N, entonces cualquier vector director de la misma es ortogonal a N y por tanto está en el conjunto C.
El conjunto C está formado entonces por todas las rectas que pasan por el origen y son perpendiculares a la dirección de N. Todas estas rectas forman un plano cuya inclinación está determinada por la dirección del vector N y que pasa por el origen.

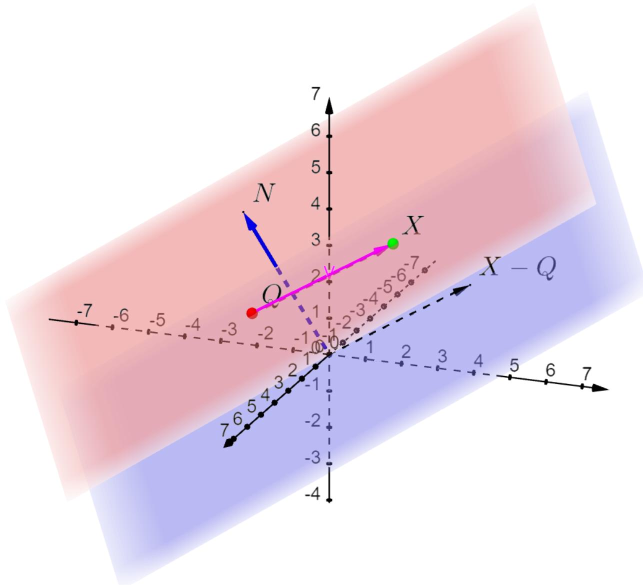


Ejemplo 2. Hallar el plano, paralelo al plano C del Ejemplo 1, que pasa por $Q = (3, -1, 2)$.

Solución: Gráficamente podemos imaginarnos cómo es este plano:



Podemos ver que los vectores que van desde el origen hasta los puntos de este plano no son ahora ortogonales a N como ocurría en el ejemplo anterior. Sí lo son los vectores con origen y extremo en el plano que buscamos, o sea, los que están contenidos en este plano (sus trasladados al origen quedan en el plano C del ejemplo anterior).



Para un punto X en el plano solución, el vector $\overrightarrow{QX}$ es entonces ortogonal a N. Si escribimos $X = (x, y, z)$, la condición para estar en el conjunto es ahora:

$$(X - Q) \cdot N = 0$$

que podemos reescribir

$$\begin{aligned}
(X - Q) \cdot N &= 0 \\
X \cdot N - Q \cdot N &= 0 \\
X \cdot N &= Q \cdot N \\
x - 2y + 4z &= (3, -1, 2) \cdot (1, -2, 4) \\
x - 2y + 4z &= 13
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Respuesta: El plano paralelo a } C \text{ que pasa por } Q \text{ es } \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + 4z = 13\}.}$

Ecuación implícita del plano

Dados un vector $N = (a, b, c)$, no nulo, y un punto $Q \in \mathbb{R}^3$, el plano Π que es perpendicular a N y pasa por Q es el conjunto

$$\begin{aligned}
\Pi &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) \cdot N = Q \cdot N\} \\
&= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / ax + by + cz = d\} \quad (\text{con } d = Q \cdot N)
\end{aligned}$$

Vamos a abreviar la notación escribiendo

$$\Pi : ax + by + cz = d \quad (\text{con } d = Q \cdot N)$$

Esta ecuación es una *ecuación implícita* del plano Π que pasa por Q y es perpendicular a N. Diremos que el vector N es *normal* al plano.

Observaciones

El producto escalar $(x, y, z) \cdot N$ hace que las coordenadas del vector normal se conviertan en los coeficientes de x, y y z en la ecuación del plano.
El vector normal N no es único, cualquier múltiplo no nulo tiene la misma dirección así que la condición de ortogonalidad se mantiene: si $k \neq 0$,

$$(X - Q) \cdot N = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (X - Q) \cdot (kN) = k((X - Q) \cdot N) = 0$$

y la recta de dirección N (que pasa por el origen) es perpendicular al plano. Por este motivo, cualquier múltiplo de N puede tomarse como vector normal al plano.

Si el vector N fuera nulo, la ecuación se reduciría a $0 = 0$ que, al ser una identidad, la verifican todos los puntos de $\mathbb{R}^3$ y el conjunto ya no es un plano.

Ejemplo 3. Hallar una ecuación implícita para el plano Π perpendicular a $N = (3, -2, 2)$ que pasa por $Q = (1, 2, 1)$.

Solución: Para una ecuación implícita del plano necesitamos hallar valores para a, b, c y d en la ecuación $ax + by + cz = d$ que vimos más arriba. Como observamos antes, los coeficientes a, b y c corresponden a las coordenadas de un vector normal al plano. El enunciado ya nos indica uno que podemos usar: $(a, b, c) = (3, -2, 2)$.
Para hallar d usamos el punto de paso Q:
Como $d = Q \cdot N = (1, 2, 1) \cdot (3, -2, 2) = 1$, una ecuación implícita del plano Π es

$\boxed{\text{Respuesta: } \Pi : 3x - 2y + 2z = 1.}$

Observación

Si usamos como normal a $N' = 2(3, -2, 2) = (6, -4, 4)$ y calculamos $d' = Q \cdot N' = (1, 2, 1) \cdot (6, -4, 4) = 2$ nos queda la ecuación:

$\Pi : 6x - 4y + 4z = 2$

que describe el mismo plano (observar que es la ecuación de la respuesta anterior multiplicada por 2).
Al igual que con rectas, podemos tener distintas expresiones que describan un mismo plano.

Ejemplo 4. Decidir si los puntos $A = (1, -3, 2)$ y $B = (1, 3, 2)$ pertenecen al plano de ecuación $\Pi : 3x - 2y + 4z = 5$.

Solución: Un punto pertenece al plano Π si, y solo si, sus coordenadas verifican la ecuación de Π.
Si reemplazamos las coordenadas de A en la ecuación nos queda

$$3 \cdot 1 - 2(-3) + 4 \cdot 2 = 17 \neq 5$$

Haciendo lo mismo con B:

$$3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 5$$

$\boxed{\text{Respuesta: } A \notin \Pi \text{ y } B \in \Pi.}$

Ejemplo 5. Hallar tres puntos no alineados del plano $\Pi : 2x - 2y - 4z = 3$.

Solución: Para hallar puntos del plano Π, podemos despejar una variable, por ejemplo y, de la ecuación del plano

$$y = -\frac{1}{2}(3 - 2x + 4z) = -\frac{3}{2} + x - 2z$$

y dar valores arbitrarios a las otras, en este caso x y z, para calcular y.

Si $x = 0,\ z = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{3}{2} + 0 - 0 = -\frac{3}{2}$

Si $x = 1,\ z = 1 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{3}{2} + 1 - 2 = -\frac{5}{2}$

si $x = 2,\ z = 1 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{3}{2} + 2 - 2 = -\frac{3}{2}$

Los puntos que encontramos son $\left(0, -\frac{3}{2}, 0\right)$, $\left(1, -\frac{5}{2}, 1\right)$ y $\left(2, -\frac{3}{2}, 1\right)$.

Veamos si están alineados, es decir, si pertenecen a una misma recta.
Llamemos A, B y C a los tres puntos.
Si consideramos la recta que pasa por A y B y la recta que pasa por A y C, para que los puntos estén alineados necesitamos que estas rectas sean la misma. Como las dos pasan por el punto A, es suficiente que tengan la misma dirección o, equivalentemente, que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, como vectores directores, sean paralelos y por lo tanto sus trasladados al origen deben ser múltiplos. Para que esto ocurra debe existir $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$B - A = k(C - A)$$

Tomando $A = \left(0, -\frac{3}{2}, 0\right)$, $B = \left(1, -\frac{5}{2}, 1\right)$ y $C = \left(2, -\frac{3}{2}, 1\right)$ nos queda la igualdad

$$\left(1, -\frac{5}{2}, 1\right) - \left(0, -\frac{3}{2}, 0\right) = k\left(\left(2, -\frac{3}{2}, 1\right) - \left(0, -\frac{3}{2}, 0\right)\right)$$
$$(1, -1, 1) = k\,(2, 0, 1)$$

La igualdad de las segundas coordenadas requiere que $-1 = 0$, lo que no se cumple para ningún valor de k.

Respuesta: $\left(0, -\frac{3}{2}, 0\right)$, $\left(1, -\frac{5}{2}, 1\right)$ y $\left(2, -\frac{3}{2}, 1\right)$ son tres puntos no alineados del plano Π.

Verificación:

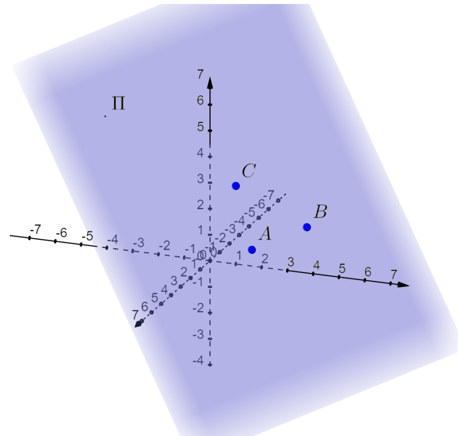
Ya vimos que no están alineados. Solo falta ver que están en Π

$\left(0, -\frac{3}{2}, 0\right) \in \Pi : \quad 2 \cdot 0 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 4 \cdot 0 = 3$

$\left(1, -\frac{5}{2}, 1\right) \in \Pi : \quad 2 \cdot 1 - 2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) - 4 \cdot 1 = 3$

$\left(2, -\frac{3}{2}, 1\right) \in \Pi : \quad 2 \cdot 2 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 4 \cdot 1 = 3$

Ejemplo 6. Dar una ecuación implícita de un plano Π que pasa por los puntos $A = (1,2,1)$, $B = (-2,3,1)$ y $C = (0,1,3)$.



Solución: Ya vimos que A, B y C, como vectores, no tienen por qué estar contenidos en el plano (esto ocurre solo si el plano pasa por O). Los que sí lo están son los vectores que tienen origen y extremo en dichos puntos: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ y sus opuestos. La dirección del vector normal deberá ser ortogonal a todos ellos. Si elegimos dos, por ejemplo $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, el producto vectorial nos servirá para calcular un vector normal N:

$$\begin{aligned} N = (B-A)\times(C-A) &= ((-2,3,1)-(1,2,1))\times((0,1,3)-(1,2,1)) \\ &= (-3,1,0)\times(-1,-1,2) = (2,6,4) \end{aligned}$$

Con esta normal y alguno de los puntos, por ejemplo A, formamos la ecuación del plano

$$2x + 6y + 4z = (2,6,4)\cdot(1,2,1) = 18$$

$\boxed{\text{Respuesta: } \Pi : 2x + 6y + 4z = 18.}$

Verificación:

$A \in \Pi : \quad 2\cdot 1 + 6\cdot 2 + 4\cdot 1 = 18$
$B \in \Pi : \quad 2(-2) + 6\cdot 3 + 4\cdot 1 = 18$
$C \in \Pi : \quad 2\cdot 0 + 6\cdot 1 + 4\cdot 3 = 18$

Observaciones

Dados tres puntos A, B y C en $\mathbb{R}^3$, si los puntos no están alineados hay un único plano que los contiene.
En el ejemplo, si en lugar de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ usamos $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{CB}$, el vector normal que obtenemos es

$$\begin{aligned} N' = (C-A)\times(B-C) &= ((0,1,3)-(1,2,1))\times((-2,3,1)-(0,1,3)) \\ &= (-1,-1,2)\times(-2,2,-2) = (-2,-6,-4) \end{aligned}$$

con lo que cambia la ecuación del plano aunque sigue siendo el mismo (N' y N tienen la misma dirección).

Si los tres puntos de los datos están alineados, el producto vectorial nos da $(0,0,0)$, que no sirve como vector normal. Esto no significa que no exista un plano que los contenga. Al estar contenidos en una recta, hay muchos planos posibles. En caso de querer hallar uno, solo tendremos que elegir como normal un vector perpendicular a esa recta.

Ejemplo 7. Dar una ecuación implícita de un plano Π que pase por los puntos $A = (2,3,3)$, $B = (0,-1,-3)$ y $C = (3,5,6)$.

Solución: Planteemos lo mismo que en el ejemplo anterior:

$$\begin{aligned} N = (B - A) \times (C - A) &= ((0,-1,-3) - (2,3,3)) \times ((3,5,6) - (2,3,3)) \\ &= (-2,-4,-6) \times (1,2,3) = (0,0,0) \end{aligned}$$

Como comentamos antes, este resultado indica que los tres puntos están alineados. Para la normal solo necesitamos un vector ortogonal a la dirección de la recta que pasa por los tres puntos. Por ejemplo, si $N = (a,b,c)$, la condición para $N \perp \overrightarrow{AB}$ nos lleva a la ecuación

$$\begin{aligned} (a,b,c) \cdot ((0,-1,-3) - (2,3,3)) &= 0 \\ (a,b,c) \cdot (-2,-4,-6) &= 0 \\ -2a - 4b - 6c &= 0 \end{aligned}$$

Eligiendo $a = b = 1$, se despeja $c = -1$ y se obtiene una solución posible: $N = (1,1,-1)$.
Por lo tanto $d = A \cdot N = (2,3,3) \cdot (1,1,-1) = 2$ nos da la ecuación de un plano posible:

$\boxed{\text{Respuesta: } \Pi : x + y - z = 2}$

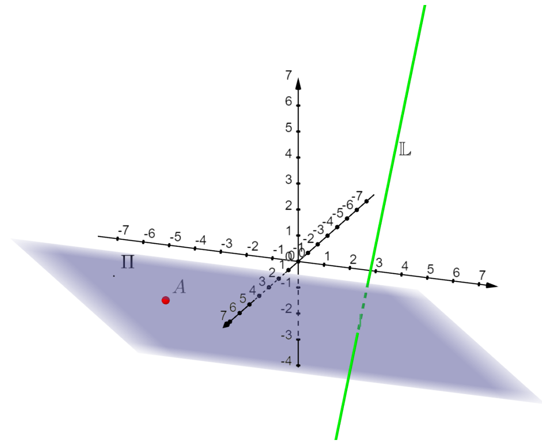
Verificación:

$A \in \Pi: \quad 2 + 3 - 3 = 2$
$B \in \Pi: \quad 0 - 1 - (-3) = 2$
$C \in \Pi: \quad 3 + 5 - 6 = 2$

Observación

En este problema no hay una única dirección para la normal así que habrá muchos planos distintos como posibles respuestas.

Ejemplo 8. Dados el punto $A = (3,-4,-1)$ y la recta $\mathbb{L} : \lambda(-2,0,3) + (2,3,-2)$, hallar una ecuación implícita para el plano Π perpendicular a $\mathbb{L}$ que pasa por A.

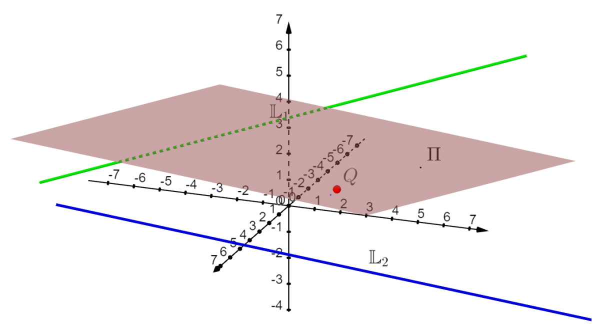


Solución: Como la recta tiene que ser perpendicular al plano, su vector director (o cualquier múltiplo no nulo), sirve como vector normal. Con $N = (-2, 0, 3)$, por ejemplo, y con el punto de paso A hallamos la ecuación

$$(x, y, z) \cdot (-2, 0, 3) = d = (3, -4, -1) \cdot (-2, 0, 3) = -9$$

$\boxed{\text{Respuesta: } \Pi : -2x + 3z = -9.}$

Ejemplo 9. Dadas las rectas $\mathbb{L}_1 : \lambda(1, 2, 1) + (0, -1, 3)$, $\mathbb{L}_2 : \lambda(2, -2, 1) + (3, 4, -1)$ y el punto $Q = (3, 3, 2)$, hallar la ecuación de un plano Π paralelo a las dos rectas y que pase por Q.



Solución: Como las rectas tienen que ser paralelas al plano, sus direcciones deben ser ortogonales a la normal del plano. Entonces, el producto vectorial entre sus vectores directores nos da un vector normal.

$$N = (1, 2, 1) \times (2, -2, 1) = (4, 1, -6)$$

y además, para que el plano pase por $Q = (3, 3, 2)$,

$$d = (3, 3, 2) \cdot (4, 1, -6) = 3$$

$\boxed{\text{Respuesta: } \Pi : 4x + y - 6z = 3}$

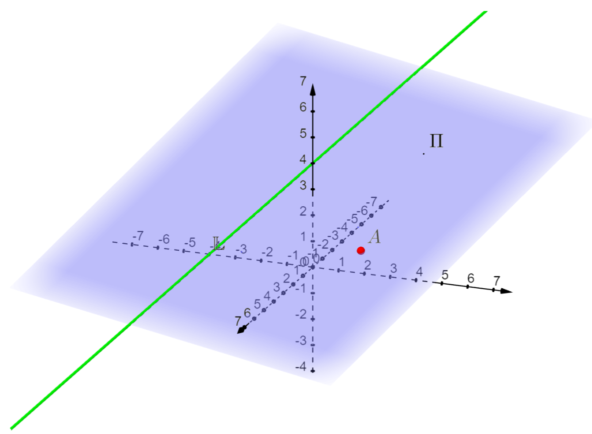
Verificación:

$Q \in \Pi: \quad 4 \cdot 3 + 3 - 6 \cdot 2 = 3$
Perpendicularidad entre vector director de las rectas y normal del plano:
$\mathbb{L}_1 // \Pi: \quad (1, 2, 1) \cdot (4, 1, -6) = 0$
$\mathbb{L}_2 // \Pi: \quad (2, -2, 1) \cdot (4, 1, -6) = 0$

Observación

Notar que una recta y un plano son paralelos si el vector director de la recta es perpendicular a la normal al plano.

Ejemplo 10. Dados el punto $A = (1, -3, -4)$ y la recta $\mathbb{L} : \lambda(-2, 1, 1) + (3, -3, 1)$, hallar un plano Π que los contenga.



Solución: Para contener a la recta, alcanza con que el plano contenga a dos de sus puntos: por ejemplo

con $\lambda = 0$, $B = 0(-2, 1, 1) + (3, -3, 1) = (3, -3, 1) \in \mathbb{L}$

con $\lambda = 1$, $C = 1(-2, 1, 1) + (3, -3, 1) = (1, -2, 2) \in \mathbb{L}$

Como el plano también tiene que contenera a A, el problema se reduce a encontrar el plano que pasa por los tres puntos A, B y C. Para hallarlo, procedemos como en el Ejemplo 7.

$$\begin{aligned} N = (B - A) \times (C - A) &= ((3, -3, 1) - (1, -3, -4)) \times ((1, -2, 2) - (1, -3, -4)) \\ &= (2, 0, 5) \times (0, 1, 6) = (-5, -12, 2) \end{aligned}$$

Verificación de la ortogonalidad del producto vectorial:
$(2, 0, 5) \cdot (-5, -12, 2) = 0$ y $(0, 1, 6) \cdot (-5, -12, 2) = 0$

Con esta normal y el punto A, formamos la ecuación del plano

$$-5x - 12y + 2z = (-5, -12, 2) \cdot (1, -3, -4) = 23$$

$\boxed{\text{Respuesta: } \Pi : -5x - 12y + 2z = 23.}$

Verificación:

$A \in \Pi: \quad -5 \cdot 1 - 12(-3) + 2(-4) = 23$

$\mathbb{L} \subset \Pi$: Para que la recta esté incluida en el plano basta verificar que dos de sus puntos pertenezcan al plano

$B \in \Pi: \quad -5 \cdot 3 - 12 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 = 23$

$C \in \Pi: \quad -5 \cdot 1 - 12 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 = 23$

Notar que la condición $\mathbb{L} \subset \Pi$ también se puede verificar mostrando que la dirección de la recta es ortogonal a la normal (lo que indica que $\mathbb{L} // \Pi$) y que tienen algún punto en común.

Ecuación paramétrica del plano

La ecuación implícita de un plano nos da una relación que deben cumplir las coordenadas de sus puntos. Por ejemplo en el plano de ecuación implícita $\Pi : 2x + z = 7$ podemos despejar $z = -2x + 7$. Esto nos permite escribir las coordenadas de los puntos del plano como:

$$X = (x, y, z) \in \Pi \quad \Leftrightarrow \quad X = (x, y, -2x + 7) \quad (\text{con } x, y \in \mathbb{R})$$

Si separamos esta expresión en una suma de tres ternas (separando las variables entre sí y de los términos sin variables):

$$\begin{aligned} X = (x, y, -2x + 7) &= (0, 0, 7) + (x, 0, -2x) + (0, y, 0) \\ &= (0, 0, 7) + x(1, 0, -2) + y(0, 1, 0) \quad (\text{con } x, y \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

llegamos a una expresión similar a la ecuación paramétrica de una recta pero esta vez con dos parámetros. Esta es otra forma de describir a los planos llamada *ecuación paramétrica*. La orientación del plano está controlada por los vectores $(1, 0, -2)$ y $(0, 1, 0)$, que son paralelos al plano, y el punto $(0, 0, 7)$ es un punto del plano.

En general, dados dos vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ (no paralelos ni nulos) y un punto P, el conjunto de todos los X que cumplen

$$X = \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 + P \quad (\text{con } \alpha \text{ y } \beta \in \mathbb{R})$$

es el plano que pasa por P y es paralelo a las direcciones de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.
Dado un plano, al igual que con rectas, no hay una única ecuación paramétrica para describirlo. Notar que si los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ fueran paralelos determinarían una única dirección y la expresión anterior describiría una recta con esa dirección.

Ejemplo 11. Hallar una ecuación implícita del plano $\Pi : X = \alpha(1, 2, 3) + \beta(1, 0, -1) + (0, -2, 1)$

Solución: Como el plano es paralelo a los vectores $(1,2,3)$ y $(1,0,-1)$, un vector normal debe ser ortogonal a los dos.
Podemos usar $N = (1,2,3) \times (1,0,-1) = (-2,4,-2)$.

Verificación de la ortogonalidad del producto vectorial:
$(1,2,3) \cdot (-2,4,-2) = 0$ y $(1,0,-1) \cdot (-2,4,-2) = 0$.

Con el punto de paso $(0,-2,1)$ obtenemos $d = (0,-2,1) \cdot (-2,4,-2) = -10$.

$\boxed{\text{Respuesta: Una ecuación implícita para el plano es } \Pi : -2x + 4y - 2z = -10}$

Verificación:
Ya verificamos la ortogonalidad de la normal.
$(0,-2,1) \in \Pi$: $-2 \cdot 0 + 4(-2) - 2 \cdot 1 = -10$

Para decidir si un punto pertenece o no a un plano definido por una ecuación paramétrica, se procede de forma similar a lo visto para una recta dada por una ecuación paramétrica:

Ejemplo 12. Dados el punto $A = (-3,1,2)$ y el plano $\Pi : X = \alpha(3,1,3) + \beta(2,0,-2) + (4,2,1)$, decidir si A pertenece a Π.

Solución: Queremos ver si existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ que verifiquen:

$$(-3,1,2) = \alpha(3,1,3) + \beta(2,0,-2) + (4,2,1)$$

Procedemos igual que en el caso de ecuaciones paramétricas de rectas

$$\begin{aligned}(-3,1,2) &= \alpha(3,1,3) + \beta(2,0,-2) + (4,2,1) \\ &= (3\alpha + 2\beta + 4, \alpha + 2, 3\alpha - 2\beta + 1)\end{aligned}$$

Se deben cumplir simultáneamente las tres ecuaciones:

$$-3 = 3\alpha + 2\beta + 4 \quad , \quad 1 = \alpha + 2 \quad \text{y} \quad 2 = 3\alpha - 2\beta + 1$$

Si despejamos $\alpha = -1$ en la segunda ecuación y sustituimos el valor en la primera, $-3 = 3(-1) + 2\beta + 4$, podemos despejar $\beta = -2$.
Sustituyendo los valores hallados de α y β en la tercera ecuación

$$2 = 3(-1) - 2(-2) + 1 = 2$$

vemos que se verifica, por lo tanto, el punto A pertenece al plano Π.

$\boxed{\text{Respuesta: } A = (-3,1,2) \in \Pi.}$

Verificación:

$A \in \Pi$:
Reemplazando los valores hallados de $\alpha = -1$ y $\beta = -2$ en la ecuación paramétrica de Π
$-1(3,1,3) + -2(2,0,-2) + (4,2,1) = (-3-4+4, -1+0+2, -3+4+1) = (-3,1,2)$
obtenemos el punto A.