Producto interno o escalar

Cálculo de productos internos

Para calcular el producto interno o escalar de dos vectores a partir de sus coordenadas se utilizan las siguientes fórmulas:
En $\mathbb{R}^2$, si $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$:

$$A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Similarmente en $\mathbb{R}^3$, si $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$:

$$A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Ejemplo. Dados $A = (1, 3, 1)$, $B = (5, -3, 2)$ y $C = (-3, -4, 2)$, calcular:

i) $A \cdot B$

ii) $(A + 2B) \cdot (C - B)$

iii) $A \cdot B - (B + C) \cdot A + 2A \cdot C$

Solución:

i)

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (1,3,1) \cdot (5,-3,2) \\ &= 1 \cdot 5 + 3(-3) + 1 \cdot 2 \\ &= 5 - 9 + 2 \\ &= -2 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Respuesta: } A \cdot B = -2}$

ii)

$$\begin{aligned} (A + 2B) \cdot (C - B) &= ((1,3,1) + 2(5,-3,2)) \cdot ((-3,-4,2) - (5,-3,2)) \\ &= (11,-3,5) \cdot (-8,-1,0) \\ &= 11.(-8) + (-3).(-1) + 5.0 \\ &= -85 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Respuesta: } (A + 2B) \cdot (C - B) = -85}$

iii) En este caso podemos calcular los productos internos de cada término y luego efectuar la resta y la suma, pero como observamos que tienen el mismo factor A, podemos aplicar propiedades para simplificar:

$$\begin{aligned} A \cdot B - (B + C) \cdot A + 2A \cdot C &= A \cdot B - A \cdot (B + C) + A \cdot (2C) \\ &= A \cdot (B - (B + C) + 2C) \\ &= A \cdot C \\ &= (1,3,1) \cdot (-3,-4,2) \\ &= -13 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Respuesta: } A \cdot B - (B + C) \cdot A + 2A \cdot C = -13}$

Vectores ortogonales

El producto escalar de dos vectores nos permite determinar si sus direcciones son perpendiculares.

Definición. Diremos que dos vectores A y B son *ortogonales*, y lo notaremos $A \perp B$, si $A \cdot B = 0$.

$$A \perp B \iff A \cdot B = 0$$

La igualdad $A \cdot B = 0$ puede darse si alguno de los vectores es nulo o si el ángulo entre A y B es $\frac{\pi}{2}$, lo que indica que las direcciones de los vectores son perpendiculares.

Ejemplo. Determinar si los siguientes pares de vectores son ortogonales.

i) $A = (1,3)$ y $B = (3,1)$

ii) $A = (1,3)$ y $B = (3,-1)$

iii) $A = (1,3)$ y $B = (-6,2)$

iv) $A = (1,3,2)$ y $B = (3,1,-3)$

v) $A = (1,3,2)$ y $B = (0,-2,3)$

Solución: Para determinar si los pares de vectores dados son ortogonales, calculamos los productos escalares y vemos si dan 0.

i) $A \cdot B = (1,3) \cdot (3,1) = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 6 \neq 0$

$\boxed{\text{Respuesta: } A = (1,3) \text{ y } B = (3,1) \text{ no son ortogonales.}}$

ii) $A \cdot B = (1,3) \cdot (3,-1) = 1 \cdot 3 + 3(-1) = 0$

$\boxed{\text{Respuesta: } A = (1,3) \text{ y } B = (3,-1) \text{ son ortogonales.}}$

iii) $A \cdot B = (1,3) \cdot (-6,2) = 1(-6) + 3 \cdot 2 = 0$

$\boxed{\text{Respuesta: } A = (1,3) \text{ y } B = (-6,2) \text{ son ortogonales.}}$

iv) $A \cdot B = (1,3,2) \cdot (3,1,-3) = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 2(-3) = 0$

$\boxed{\text{Respuesta: } A = (1,3,2) \text{ y } B = (3,1,-3) \text{ son ortogonales.}}$

v) $A \cdot B = (1,3,2) \cdot (0,-2,3) = 1 \cdot 0 + 3(-2) + 2 \cdot 3 = 0$

$\boxed{\text{Respuesta: } A = (1,3,2) \text{ y } B = (0,-2,3) \text{ son ortogonales.}}$

Observar que en los tres primeros casos el vector A es el mismo. Por estar en el plano, el hecho que los vectores $B = (3,-1)$ y $B = (-6,2)$ de ii) y iii) hayan resultado ortogonales al mismo vector A indica que dichos vectores tienen la misma dirección: en efecto, $(-6,2) = -2(3,-1)$.
Sin embargo, no sucede lo mismo en iv) y v): aunque los dos vectores $B = (3,1,-3)$ y $B = (0,-2,3)$ son ortogonales al mismo vector A, dichos vectores no tienen la misma dirección. Esto puede ocurrir debido a que en el espacio hay infinitas direcciones ortogonales a una dada.

Ejemplo: Hallar todos los vectores $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que son ortogonales a $A = (-3,2)$.

Solución: De nuestra definición, la condición para x e y para que (x, y) sea ortogonal a A es

$$(x, y) \cdot (-3, 2) = 0 \iff -3x + 2y = 0,$$

que es una ecuación con dos incógnitas de la que solo podemos despejar una variable respecto de la otra. Por ejemplo $(x, y) = (x, \frac{3}{2}x)$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$ con lo que tendremos infinitas soluciones:

Respuesta: Los vectores ortogonales a A son los del conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x, y) = (x, \frac{3}{2}x)$, con $x \in \mathbb{R}\}$.

Notar que, en el ejemplo, si x vale cero, obtenemos $(x, y) = (0, 0) = O$ como solución. El vector O, que llamamos vector nulo, no define una dirección ni sentido. Aunque carece de algunas de las características fundamentales de los vectores, lo consideraremos como tal para poder operar.

Ejemplo. Hallar dos vectores $X \in \mathbb{R}^3$ ortogonales a $A = (1, 2, -1)$ y a $B = (-3, 1, 4)$ simultáneamente.

Solución: Necesitamos que se cumplan simultáneamente las dos condiciones:

$$X \perp A \quad \text{y} \quad X \perp B$$

Si $X = (x_1, x_2, x_3)$, estas condiciones nos dan las ecuaciones:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \quad \text{y} \quad -3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0$$

Podemos despejar en la primera ecuación $x_3 = x_1 + 2x_2$. Sustituimos en la segunda, obtenemos $-3x_1 + x_2 + 4(x_1 + 2x_2) = 0$ que, simplificando, nos da $x_1 + 9x_2 = 0$. Despejamos $x_1 = -9x_2$. Reemplazamos esta expresión en el despeje anterior: $x_3 = -9x_2 + 2x_2 = -7x_2$. Así, concluimos que:

$$x_1 = -9x_2 \quad \text{y} \quad x_3 = -7x_2$$

Como solo necesitamos hallar dos vectores $X = (x_1, x_2, x_3)$, podemos elegir dos valores para x_2 y, para cada uno de ellos, calcular las otras coordenadas de X. Por ejemplo, con $x_2 = 1$, resulta $X = (-9, 1, -7)$ y con $x_2 = -2$, $X = (18, -2, 14)$.

Respuesta: Dos vectores ortogonales a A y B son $X = (-9, 1, -7)$ y $X = (18, -2, 14)$.

Verificación:

Con $x_2 = 1$

$X \cdot A = (-9, 1, -7) \cdot (1, 2, -1) = -9 + 2 + 7 = 0$ y $X \cdot B = (-9, 1, -7) \cdot (-3, 1, 4) = 27 + 1 - 28 = 0$

Con $x_2 = -2$

$X \cdot A = (18, -2, 14) \cdot (1, 2, -1) = 18 - 4 - 14 = 0$ y $X \cdot B = (18, -2, 14) \cdot (-3, 1, 4) = -54 - 2 + 56 = 0$

Es importante notar que en este caso la respuesta no es única: si elegimos otros valores de x_2, obtendremos otros vectores X ortogonales a A y B simultáneamente.