Límite y continuidad

Guía de Estudio N°2
MATEMÁTICA III – Curso 2019
FCAI-UNCuyo

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

*Estudie -en la siguiente tabla de valores- el comportamiento de **f(x,y)** cuando **(x,y)** tiende a **(0,0)***

$$f(x,y) = \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$$

x \ y	-1	-0,5	-0,2	0	0,2	0,5	1
-1	-1,500	-1,200	-0,577	0,000	0,577	1,200	1,500
-0,5	-0,600	-0,750	-0,517	0,000	0,517	0,750	0,600
-0,2	-0,115	-0,207	-0,300	0,000	0,300	0,207	0,115
0	0,000	0,000	0,000	#######	0,000	0,000	0,000
0,2	-0,115	-0,207	-0,300	0,000	0,300	0,207	0,115
0,5	-0,600	-0,750	-0,517	0,000	0,517	0,750	0,600
1	-1,500	-1,200	-0,577	0,000	0,577	1,200	1,500

Se demuestra la existencia de este límite doble por definición en J.Stewart 4ed. Sección 14-2 p891

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

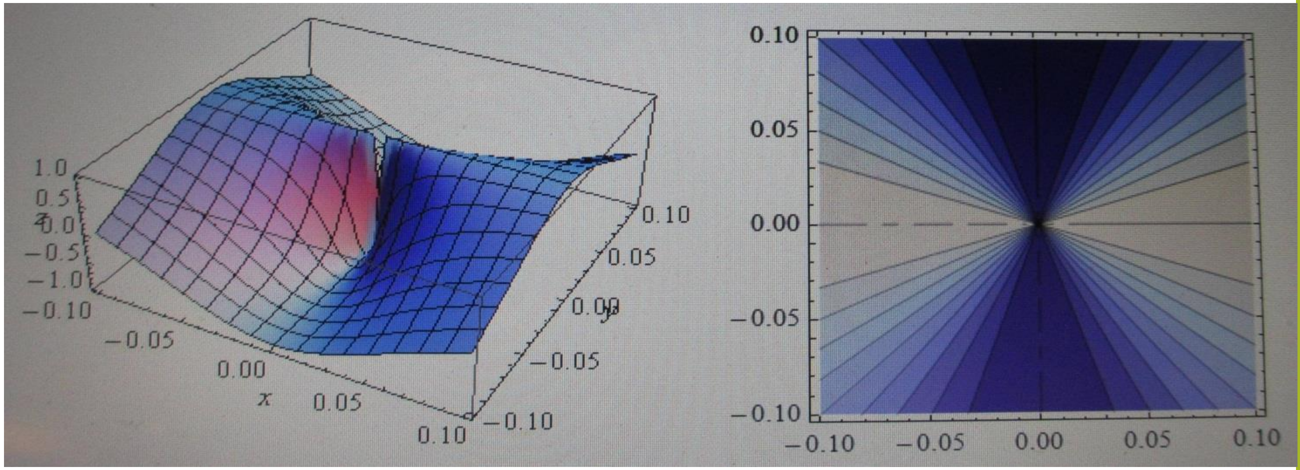
TABLA 2 Valores de $g(x, y)$

$x \backslash y$	-1.0	-0.5	-0.2	0	0.2	0.5	1.0
-1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000
-0.5	-0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	-0.600
-0.2	-0.923	-0.724	0.000	1.000	0.000	-0.724	-0.923
0	-1.000	-1.000	-1.000		-1.000	-1.000	-1.000
0.2	-0.923	-0.724	0.000	1.000	0.000	-0.724	-0.923
0.5	-0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	-0.600
1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000

Estudie -en la siguiente tabla de valores- el comportamiento de ***g(x,y)*** *cuando* ***(x,y)*** *tiende a* ***(0,0)***

$$g(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

en Stewart, J, Obr.cit.



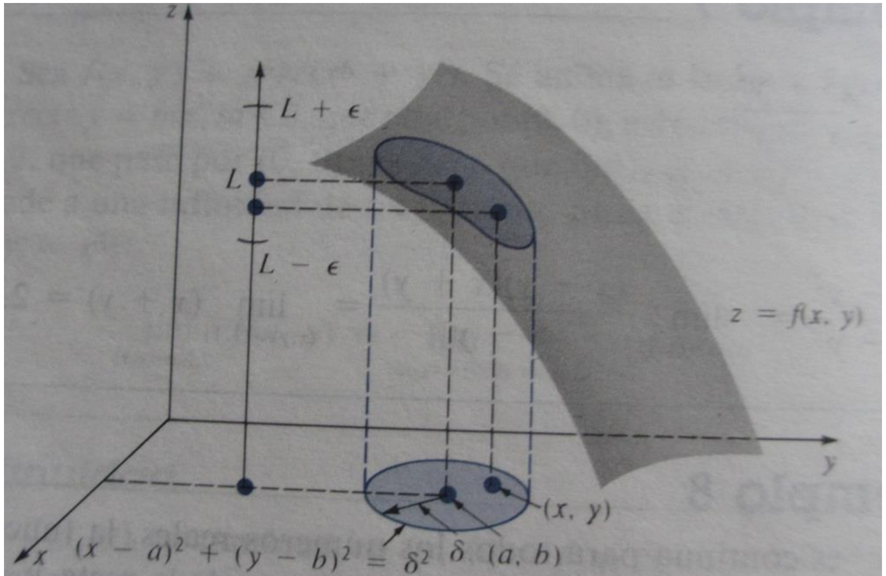
Límites y continuidad **OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE**

1 DEFINICIÓN Sea f una función de dos variables cuyo dominio D contiene, entre otros, puntos arbitrariamente cercanos a (a, b). Entonces, el **límite de $f(x, y)$ cuando (x, y) tiende a (a, b)** es L por lo que se escribe

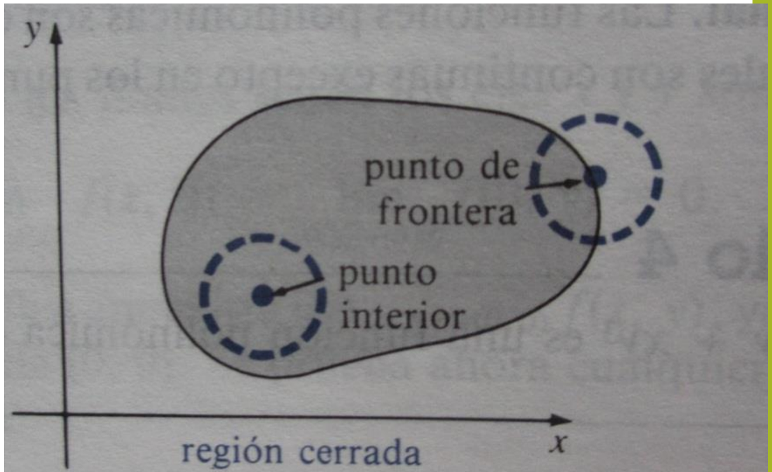
$$\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y) = L$$

si para todo número $\varepsilon > 0$ hay un número correspondiente $\delta > 0$ tal que

si $(x, y) \in D$ y $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ en ese caso $|f(x, y) - L| < \varepsilon$



en Zill D.G.. Obr.cit.



en Zill D.G.. Obr.cit.

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

Definición

El número real ℓ es el límite de la función F en el punto $\bar{a} = (x_0;y_0)$ de acumulación de su dominio, si y sólo si, para cualquier número positivo ϵ, existe un número positivo δ (en general dependiente de ϵ) tal que, para todo punto $(x;y)$, que pertenece simultáneamente al dominio de F y al entorno reducido de centro $\bar{a}$ y radio δ, el valor $F(x;y)$ pertenece al entorno de centro ℓ y radio ϵ prefijado.

Siendo $\bar{x} = (x;y)$ y $\bar{a} = (x_0;y_0)$, la definición dada puede esquematizarse así:

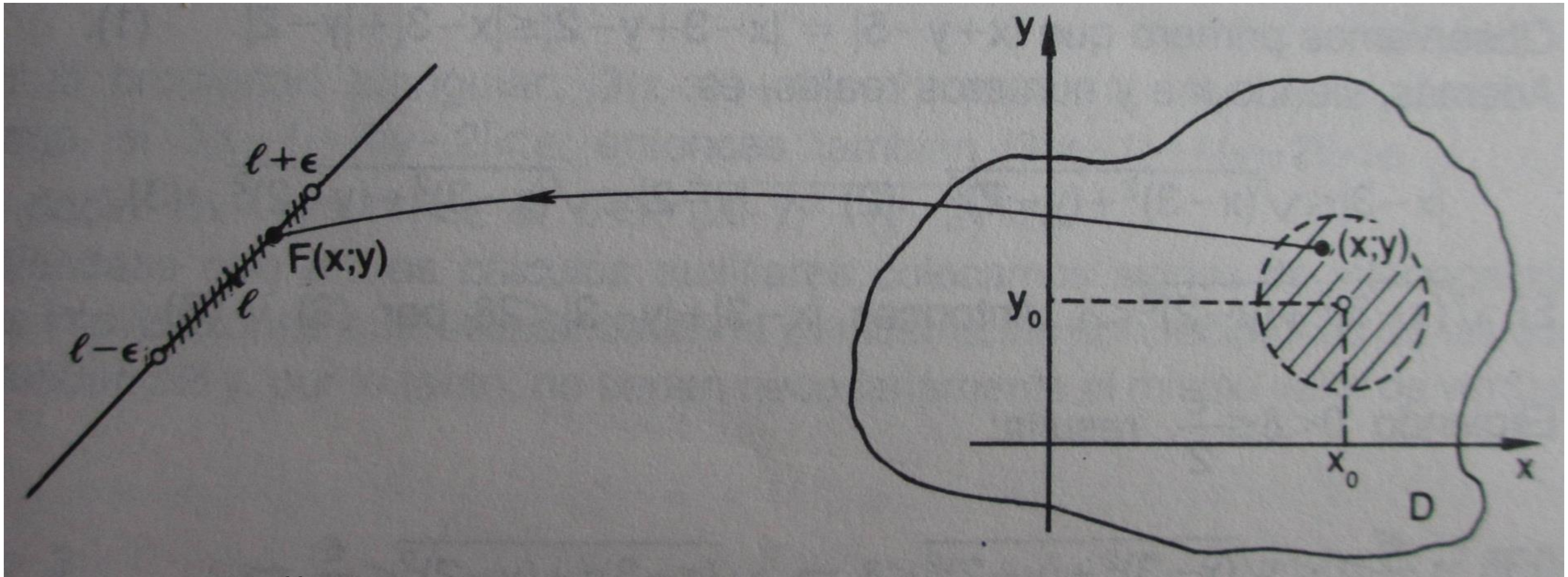
$$\text{lím}_{\bar{a}} F(x;y) = \ell \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 \forall \bar{x} : (\bar{x} \epsilon D_F \wedge 0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta \Rightarrow |F(\bar{x}) - \ell| < \epsilon).$$

en Rabuffetti, H.T. Obr.cit.

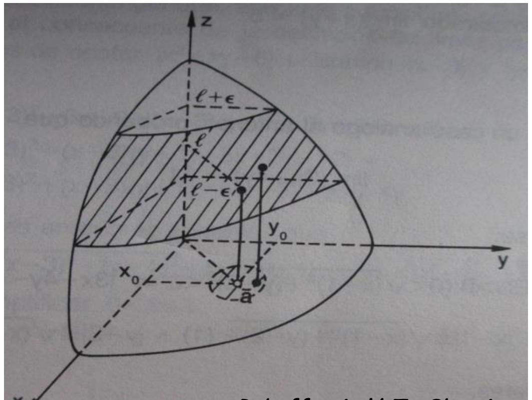
Debe entenderse que el único método que permite asegurar la existencia de límite finito para una función, es demostrar que se cumple la definición. Ello no es simple, salvo para funciones determinadas por reglas sencillas. Daremos algunos ejemplos de este tipo.

en Rabuffetti, H.T. Obr.cit.

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE



en Rabuffetti, H.T. Obr.cit.



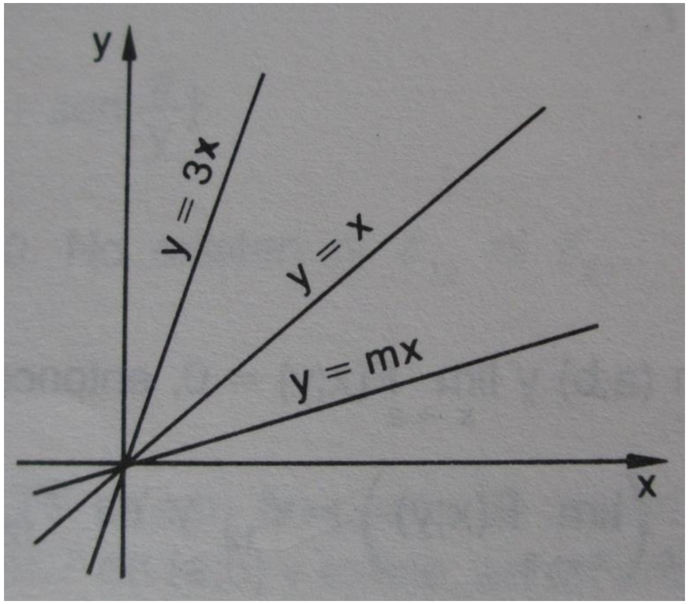
en Rabuffetti, H.T. Obr.cit.

Límites en función multivariable

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

Si el LÍMITE DOBLE existe, dicho límite es ÚNICO

LÍMITES DIRECCIONALES



LÍMITES REITERADOS

$$l_{12} = \lim_{y\to b}\left[\lim_{x\to a} f(x,y)\right]$$

$$l_{21} = \lim_{x\to a}\left[\lim_{y\to b} f(x,y)\right]$$

LÍMITES RADIALES

LÍMITES EN OTRAS DIRECCIONES

USO PARA VERIFICAR NO EXISTENCIA

Si $f(x, y) \to L_1$ cuando $(x, y) \to (a, b)$ a lo largo de una trayectoria C_1 y $f(x, y) \to L_2$ cuando $(x, y) \to (a, b)$ en la trayectoria C_2, donde $L_1 \neq L_2$, entonces no existe $\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y)$.

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

4 DEFINICIÓN Se dice que una función f de dos variables es **continua en** (a, b) si

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = f(a, b)$$

f es **continua en** D si f es continua en todos los puntos (a, b) de D.

en Stewart, J, Obr.cit.

1) $\exists F(\bar{a})$.
2) $\exists \lim_{\bar{a}} F(\bar{x})$.
3) $\lim_{\bar{a}} F(\bar{x}) = F(\bar{a})$.

en Rabuffetti, H.T. Obr.cit.

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

TABLA 1 Valores de $f(x, y)$

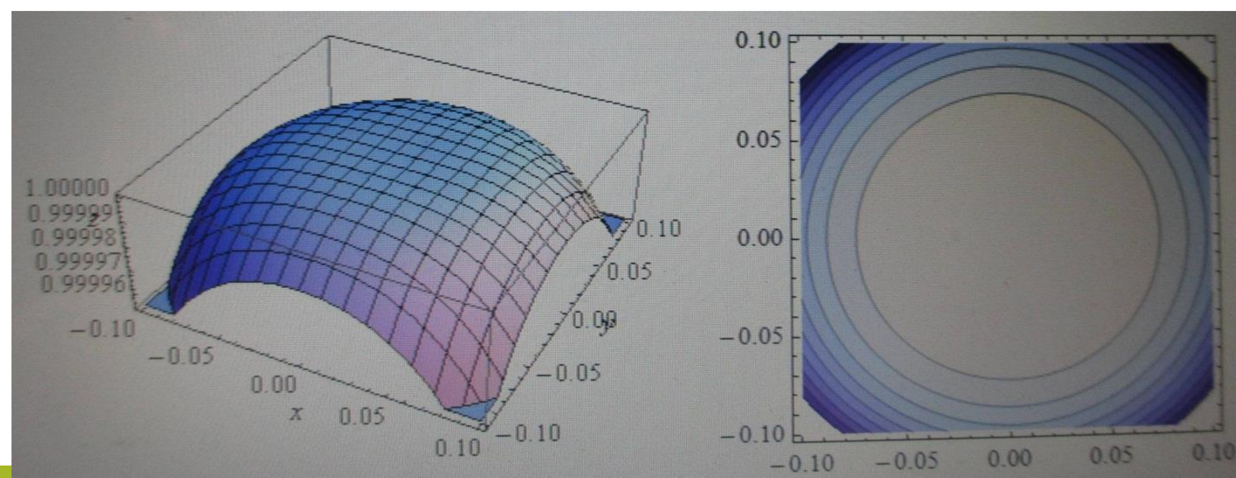
x \ y	−1.0	−0.5	−0.2	0	0.2	0.5	1.0
−1.0	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455
−0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
−0.2	0.829	0.986	0.999	1.000	0.999	0.986	0.829
0	0.841	0.990	1.000		1.000	0.990	0.841
0.2	0.829	0.986	0.999	1.000	0.999	0.986	0.829
0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
1.0	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455

en Stewart, J, Obr.cit.

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

en Stewart, J, Obr.cit.

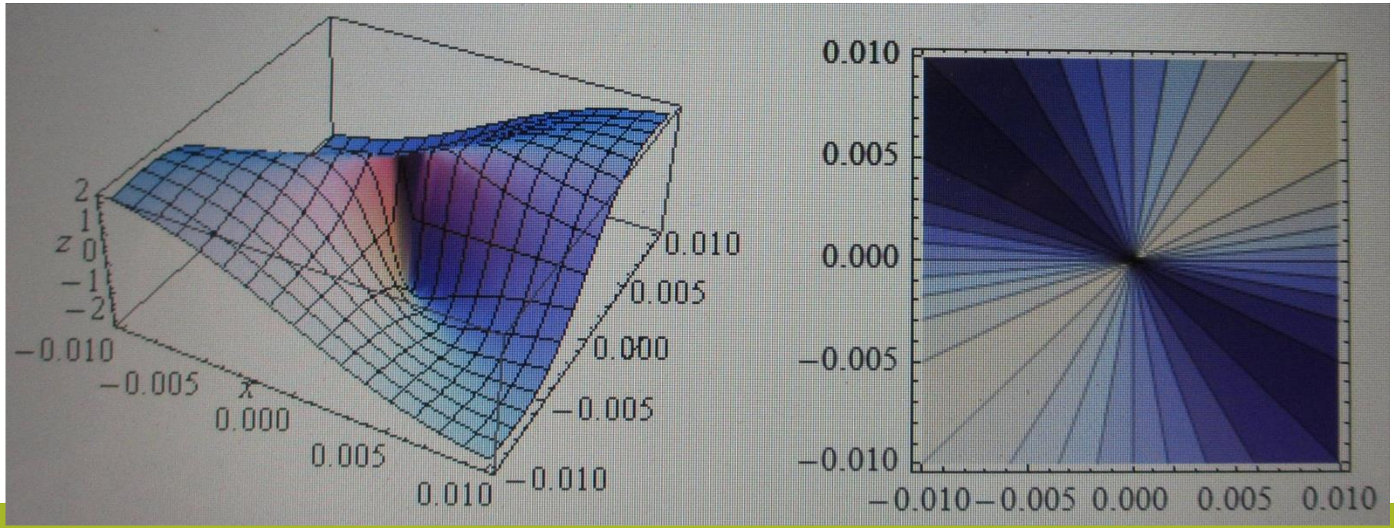
*Estudie -en la tabla de valores- el comportamiento de **f(x,y)** cuando **(x,y)** se acercan y tienden a **(0,0)**. Analice dominio y continuidad*



OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

$$f(x,y)=\frac{6xy}{x^2+2y^2}$$

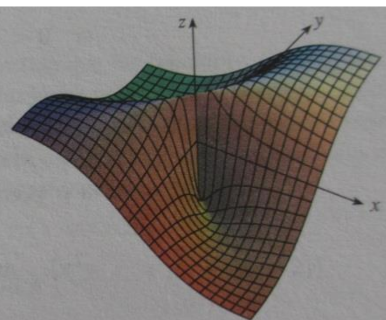
	-0.0100	-0.0010	-0.0001	0.0000	0.0001	0.0010	0.0100
0.0100	-2.0000	-0.2985	-0.0300	0.0000	0.0300	0.2985	2.0000
0.0010	-0.5882	-2.0000	-0.2985	0.0000	0.2985	2.0000	0.5882
0.0001	-0.0600	-0.5882	-2.0000	0.0000	2.0000	0.5882	0.0600
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	#¡DIV/0!	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0001	0.0600	0.5882	2.0000	0.0000	-2.0000	-0.5882	-0.0600
-0.0010	0.5882	2.0000	0.2985	0.0000	-0.2985	-2.0000	-0.5882
-0.0100	2.0000	0.2985	0.0300	0.0000	-0.0300	-0.2985	-2.0000



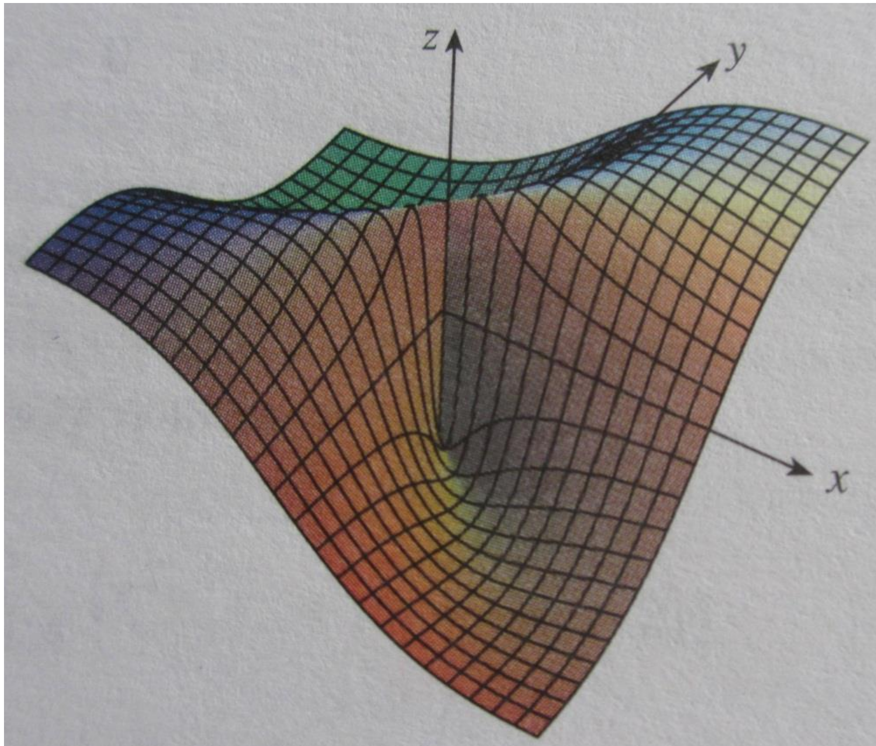
OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

Evalúe algunos límites radiales sencillos en (0,0)

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$



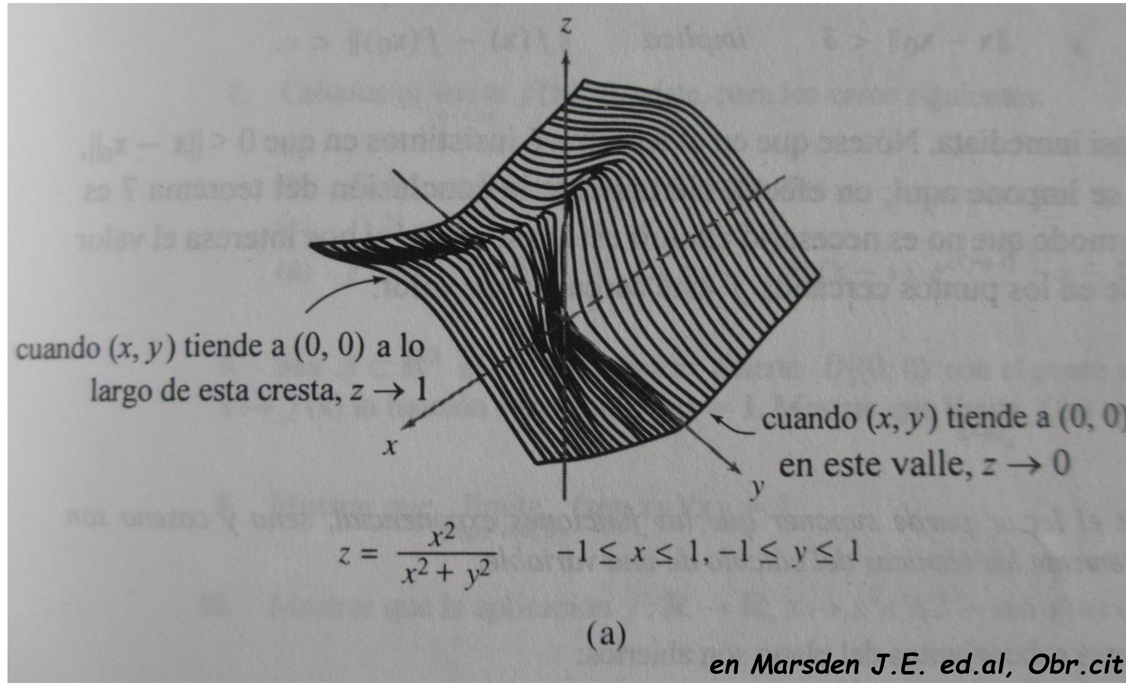
EJEMPLO 3 Si $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$, ¿existe $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)$?



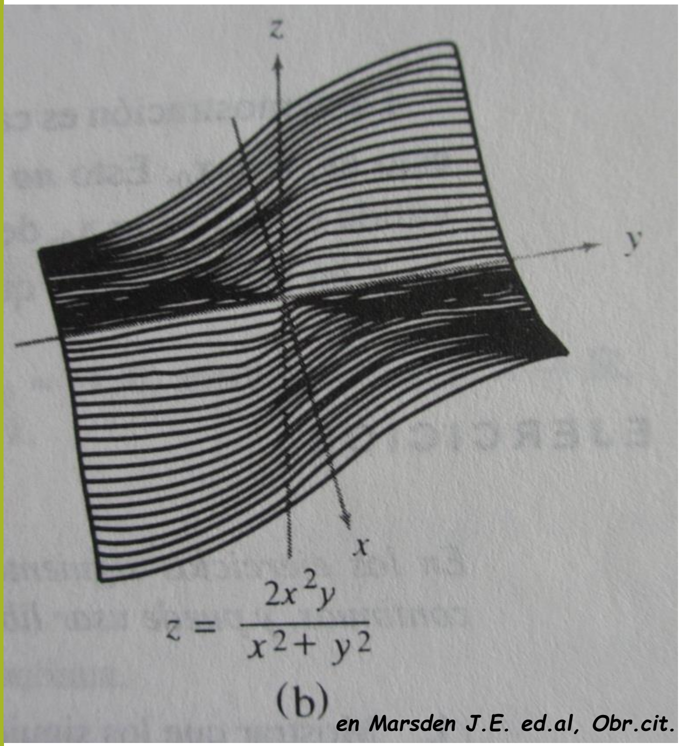
en Stewart, J, Obr.cit.

Límites y continuidad en función multivariable

OBSERVE y/ó LEA, EVALÚE e INTERPRETE



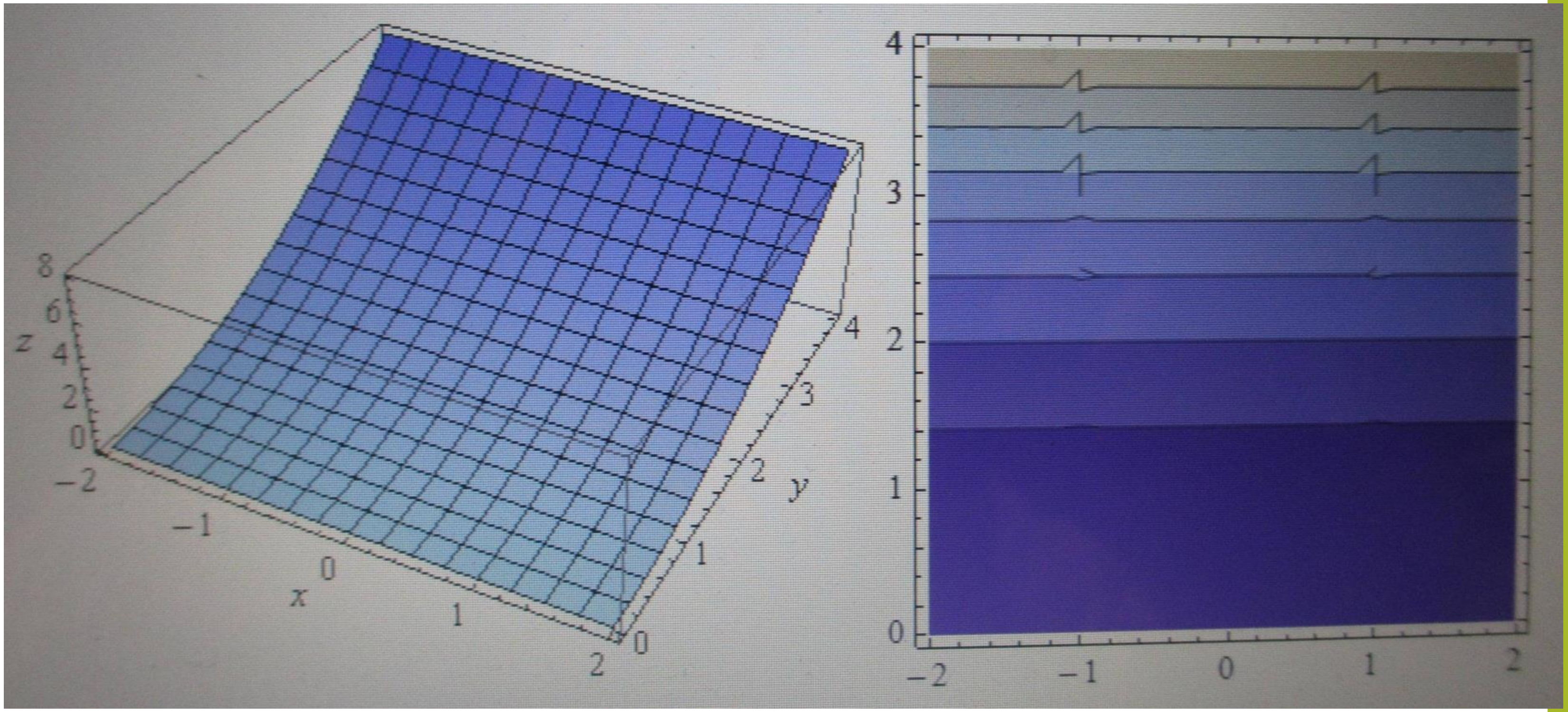
en Marsden J.E. ed.al, Obr.cit.



en Marsden J.E. ed.al, Obr.cit.

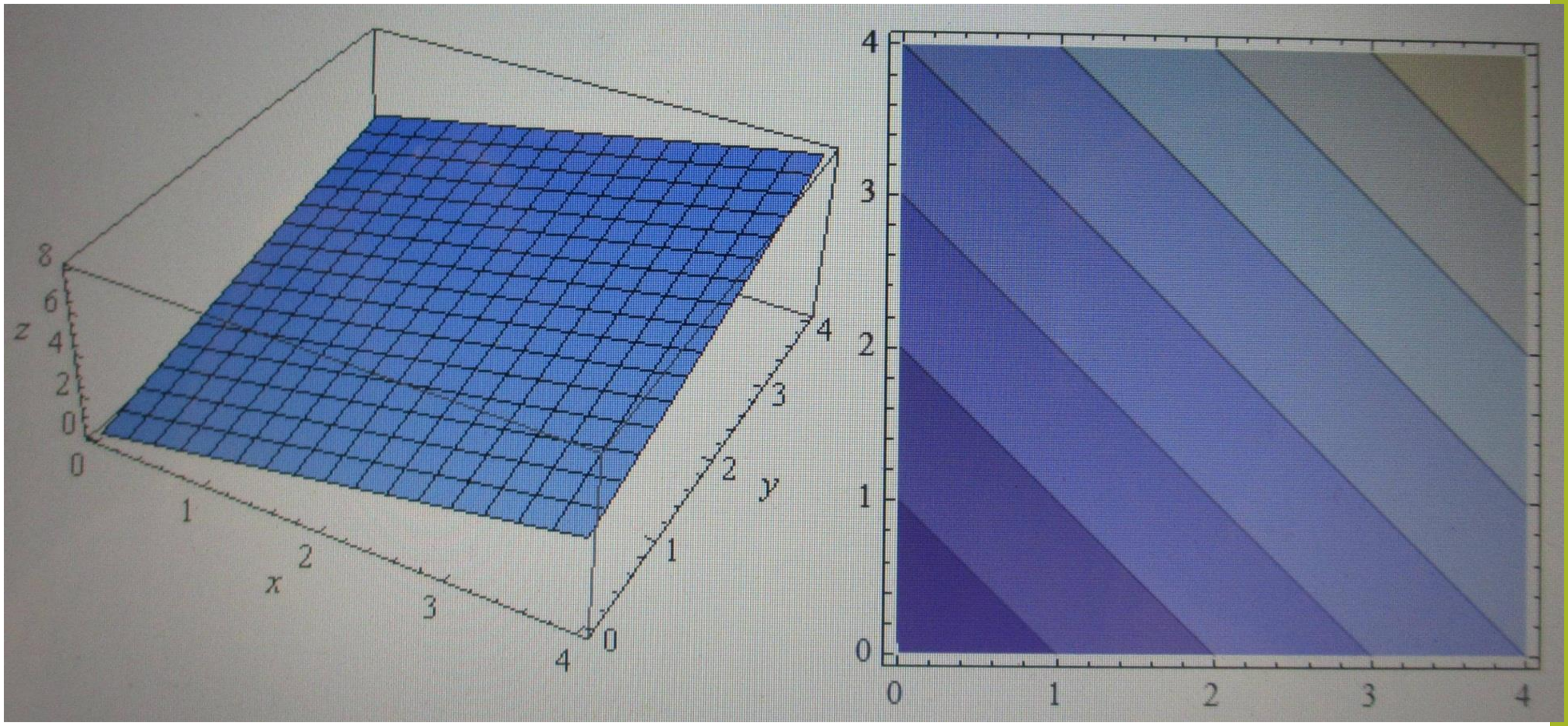
OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2+y^2}{2x^2-2}\,en(1,2)$$



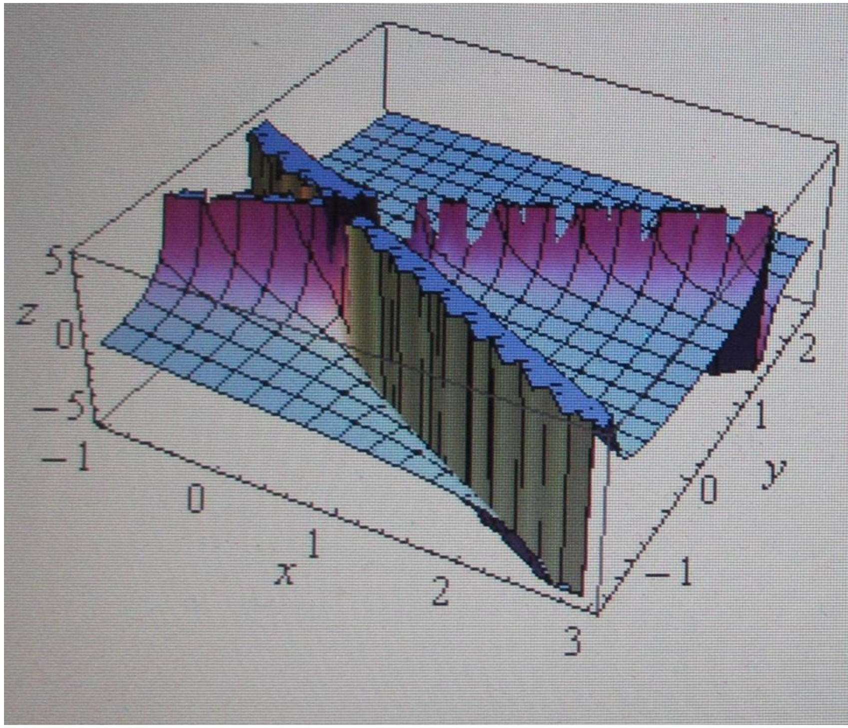
OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

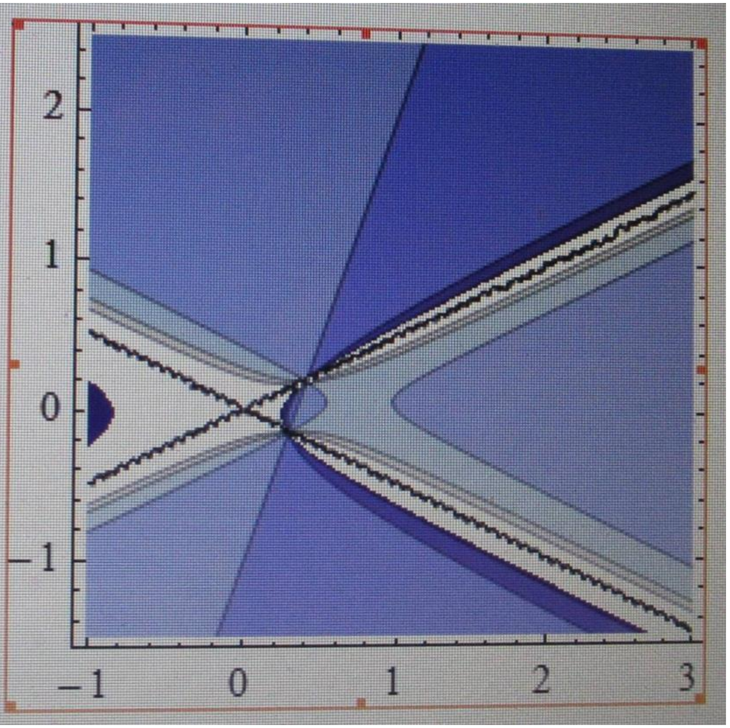
$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x-y}\,en(2,2)$$



OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

$$f(x,y)=\frac{3x-y-1}{x^2-4y^2}\ en\left(1,\ {}^{1}\!/_{2}\right)$$





Fin de la presentación …

… gracias por su seguimiento

… gracias por su participación