Integrales dobles y triples

Guía de Estudio N°6
MATEMÁTICA III – Curso 2019
FCAI-UNCuyo

¿QUÉ APRENDIERON DE INTEGRALES EN MATEMÁTICA II ?

Problema del área y las integrales definidas.

El área y las sumatorias de Riemann.

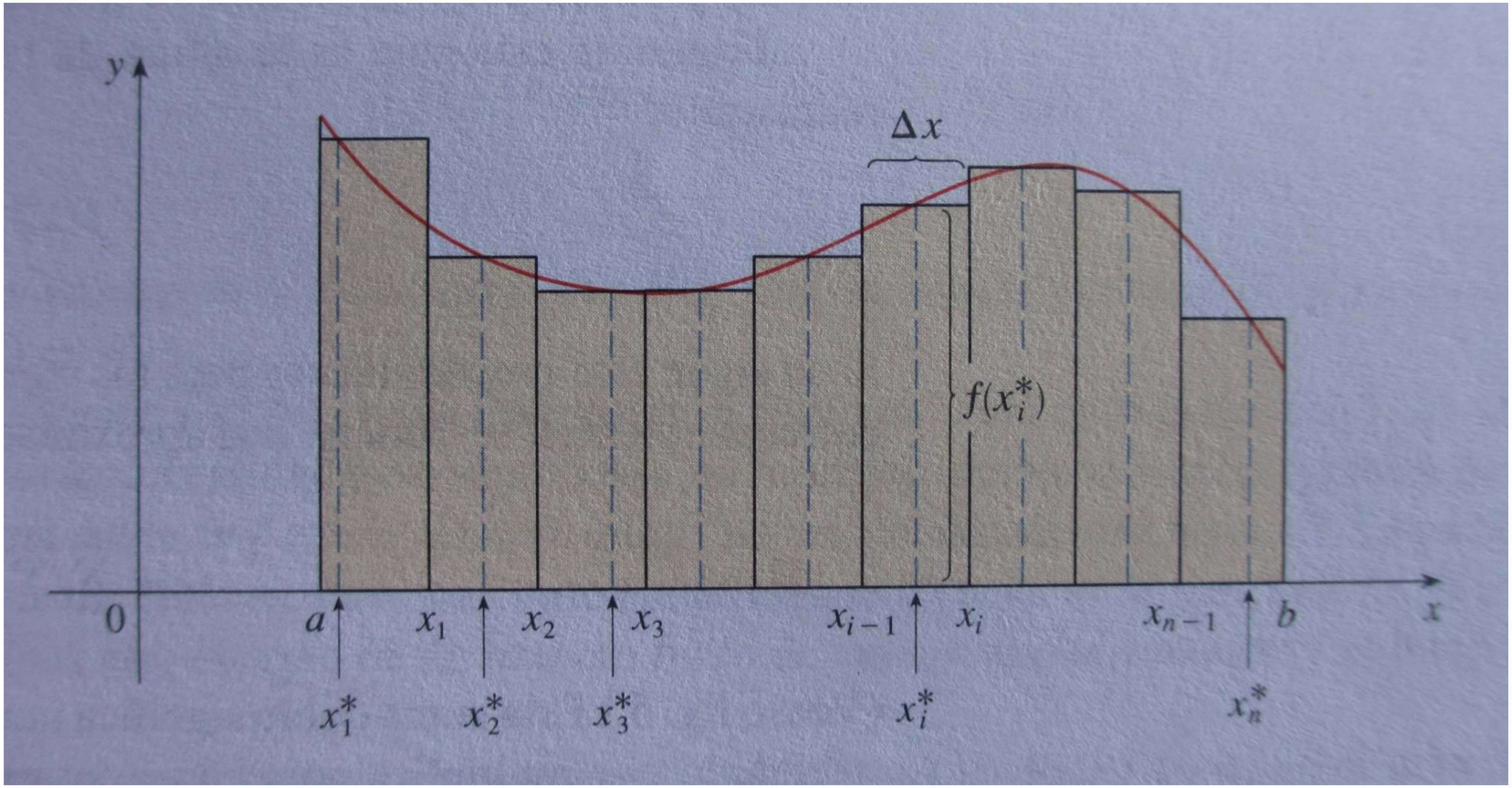
Las sumatorias de Riemann y su límite.

La integral definida y la integral indefinida para su cálculo.

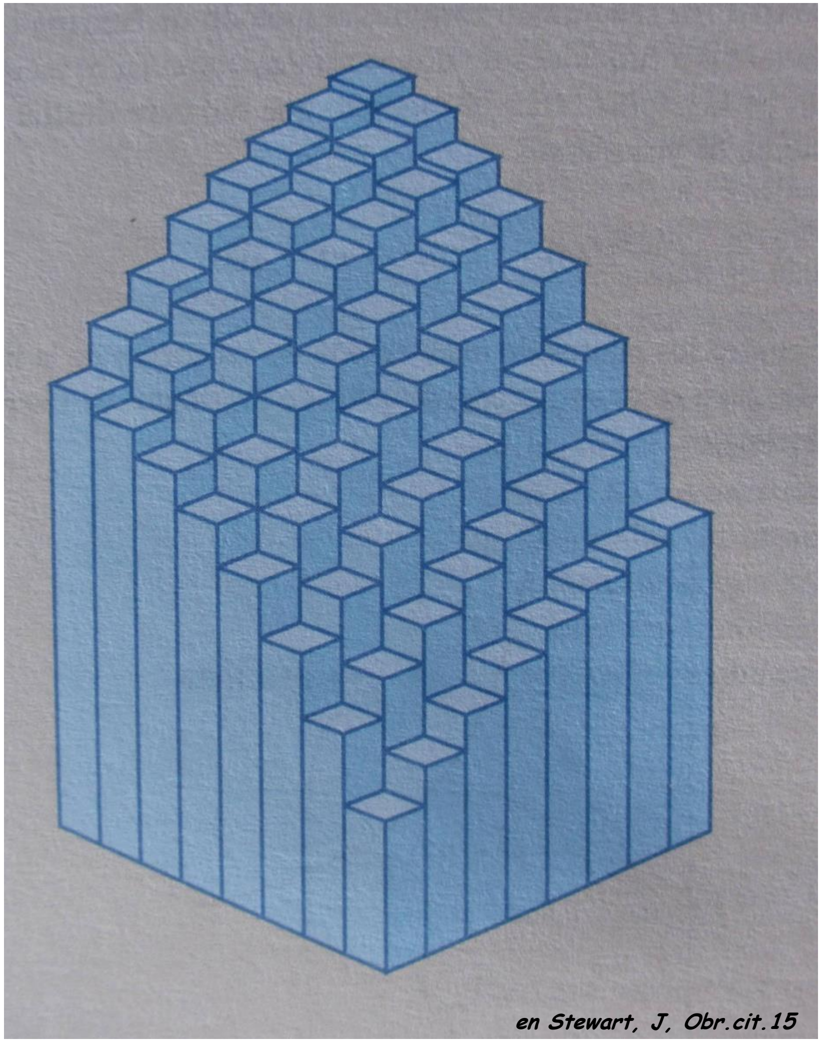
OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

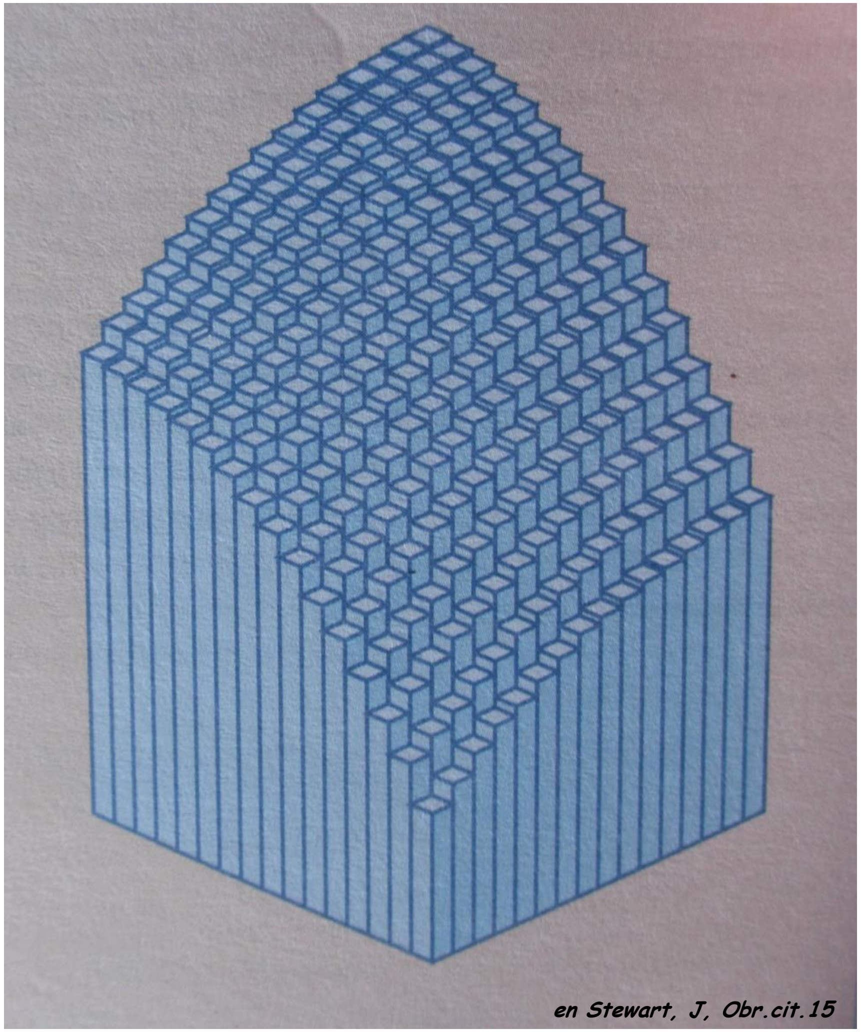
$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$ si el límite existe



OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE



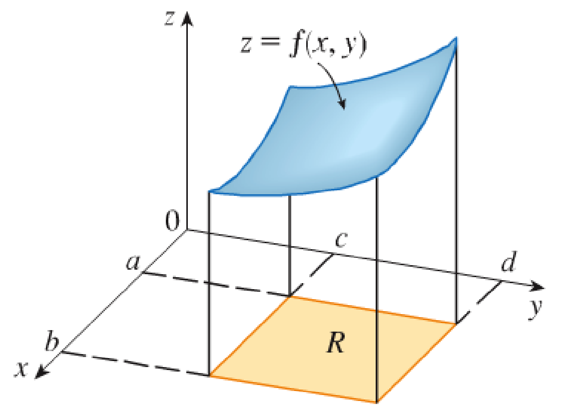


OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

$f(x,y)$ ***definida en*** $R = [a,b] \times [c,d]$

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d$



$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x,y) / x_{i-1} \le x \le x_i,\ y_{j-1} \le y \le y_j\}$

en Stewart, J, Obr.cit.15

$i = 1, \ldots., n; \quad j = 1, \ldots, m$

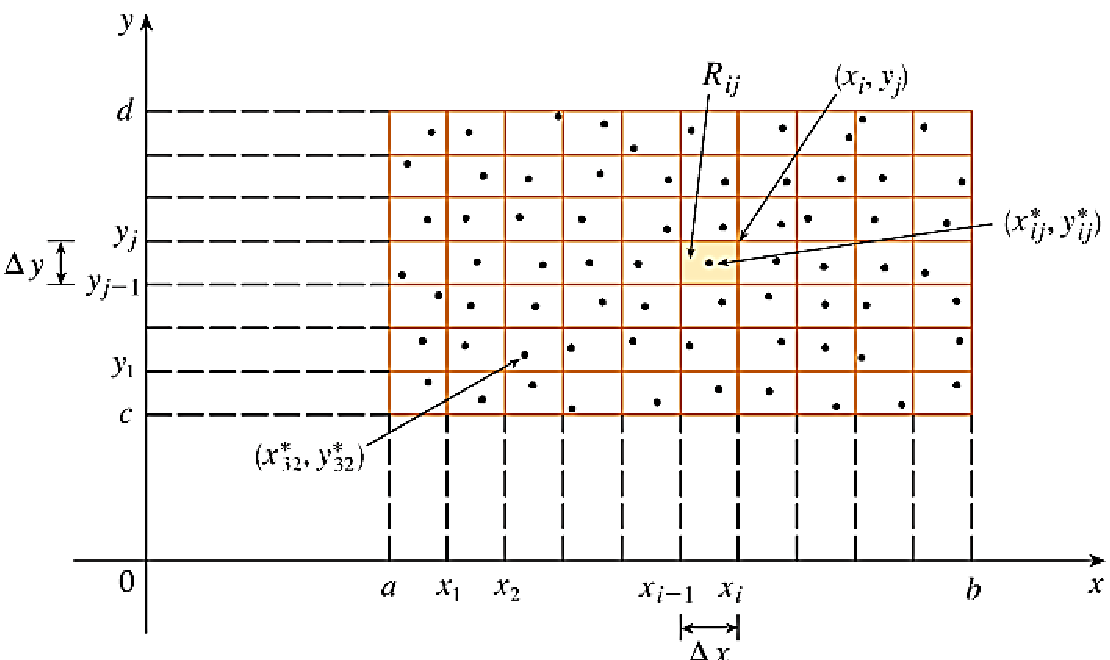
Partición regular
(subintervalos de igual longitud)

$\Delta x = x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n};$

$\Delta y = y_j - x_{j-1} = \dfrac{d-c}{m};$

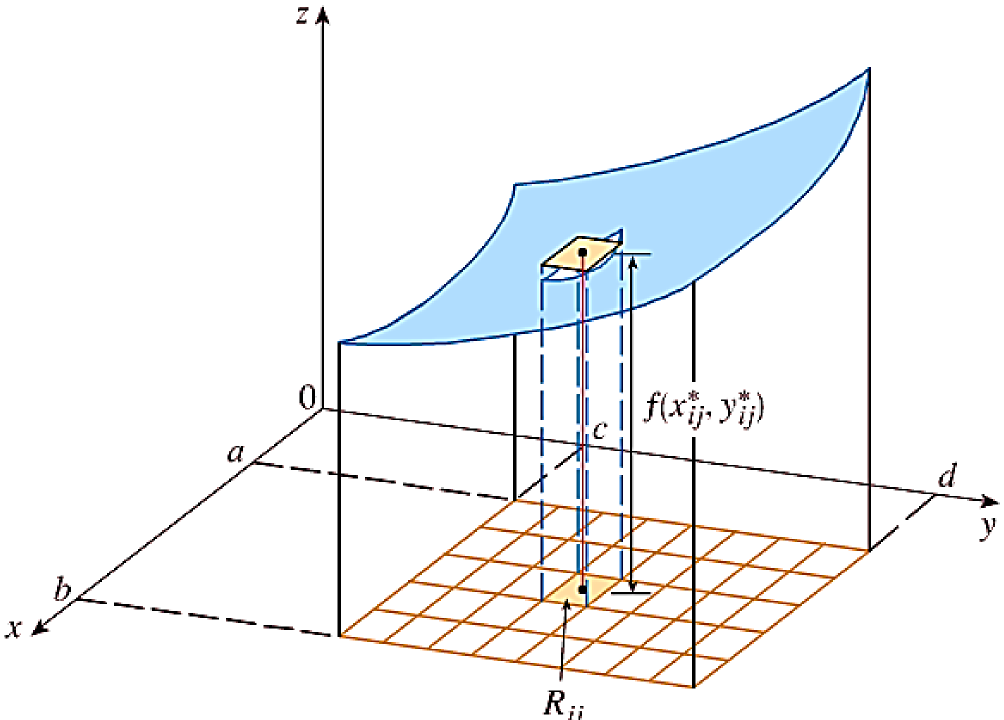
$\Delta A = \Delta x \Delta y$

$(x^*{}_{ij}, y^*{}_{ij}) \in R_{ij}$



en Stewart, J, Obr.cit.15

Integrales dobles y triples



en Stewart, J, Obr.cit.15

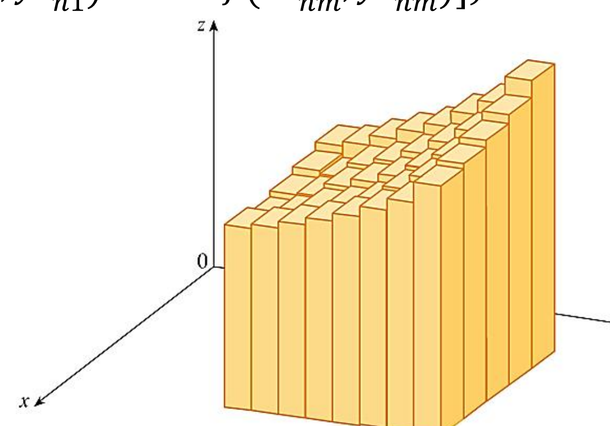
$$(x^*{}_{ij}, y^*{}_{ij}) \in R_{ij}$$

$$V_{ij} = f(x^*{}_{ij}, y^*{}_{ij})\Delta A$$

$$V \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x^*{}_{ij}, y^*{}_{ij})\Delta A$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x^*{}_{ij}, y^*{}_{ij})\Delta A = \sum_{i=1}^{n}\left[f\left(x^*{}_{i1}, y^*{}_{i1}\right) + \cdots + f(x^*{}_{im}, y^*{}_{im})\right]\Delta A$$

$$= \left(\left[f\left(x^*{}_{11}, y^*{}_{11}\right) + \cdots + f\left(x^*{}_{1m}, y^*{}_{1m}\right)\right] + \cdots + \left[f\left(x^*{}_{n1}, y^*{}_{n1}\right) + \cdots + f\left(x^*{}_{nm}, y^*{}_{nm}\right)\right]\right)\Delta A$$



$$V = \lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x^*{}_{ij}, y^*{}_{ij})\Delta A$$ *si el límite existe*

en Stewart, J, Obr.cit.15

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

5 DEFINICIÓN La **integral doble** de f sobre el rectángulo R es

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A$$

si existe el límite.

en Stewart, J, Obr.cit.Cap.15

El significado preciso del límite en la definición 5 es que para todo número $\varepsilon > 0$ hay un entero N tal que

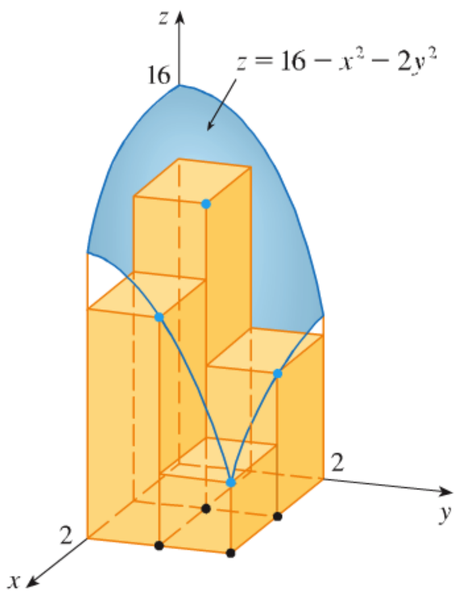
$$\left| \iint_R f(x, y)\, dA - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A \right| < \varepsilon$$

para los enteros m y n mayores que N y para cualquier elección de puntos muestrales (x_{ij}^*, y_{ij}^*) en R_{ij}.

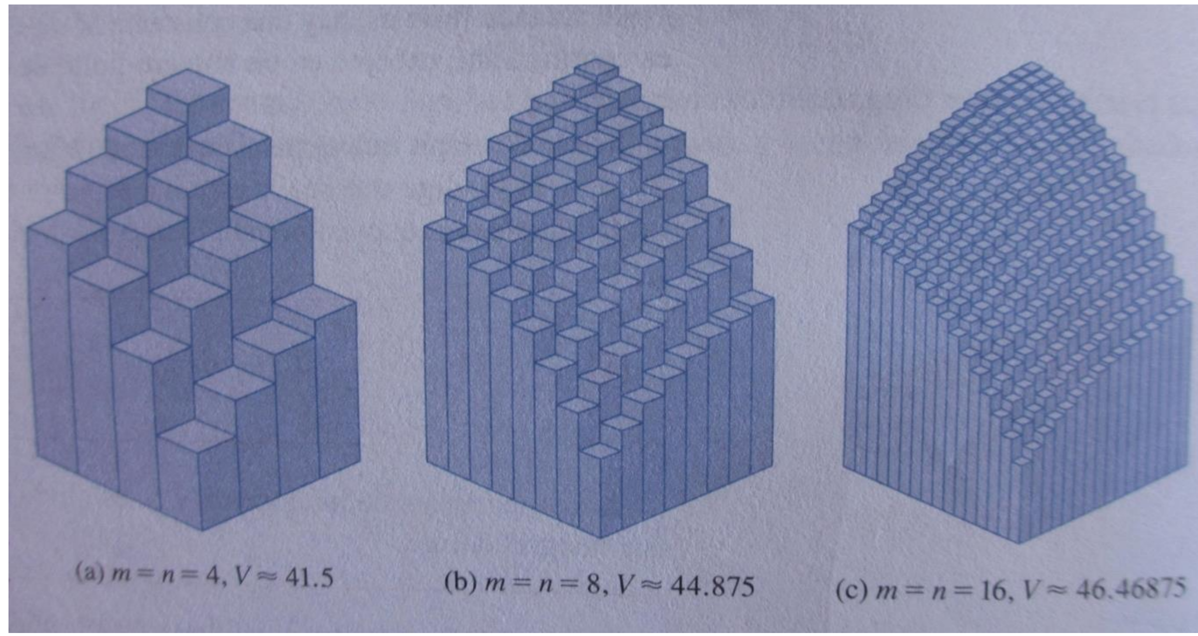
en Stewart, J, Obr.cit.Cap.15

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

Cálculo del ***valor aproximado*** *del* ***volumen****: V = ¿?*



Aprenderemos a calcular el ***valor exacto*** *del* ***volumen*** *que en este casos* ***será V = 48***



en Stewart, J, Obr.cit.15

$$V \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(y_j^*, y_j^*)\Delta A$$

Si $f(x, y) \geq 0$ *entonces el volumen V del sólido que se encuentra arriba del rectángulo R y debajo de la superficie* $z = f(x, y)$ *es*

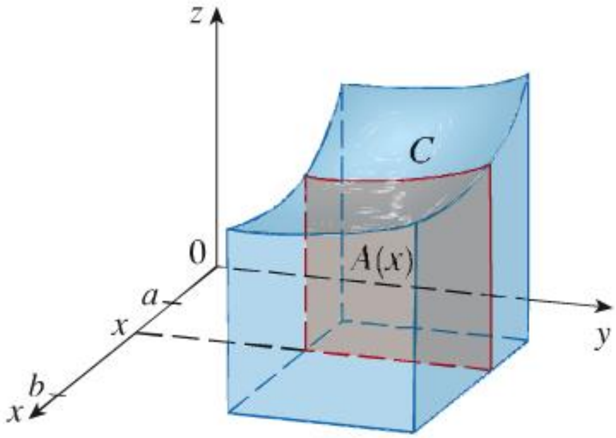
$$V = \iint_R f(x, y)dA$$

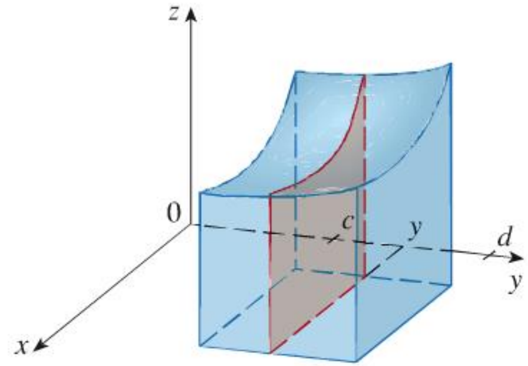
OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

¿cómo evaluar la integral doble?,

¿cómo calcular el valor exacto del volumen?

$$A(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy \qquad V = \int_a^b A(x)\, dx$$





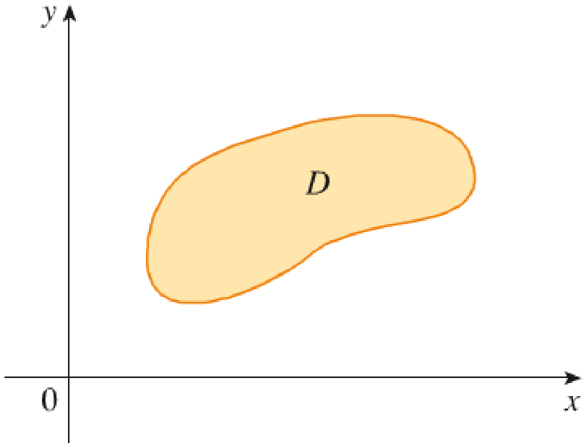
Teorema de Fubini: Si f es continua en el rectángulo R=[a,b]X[c,d], entonces

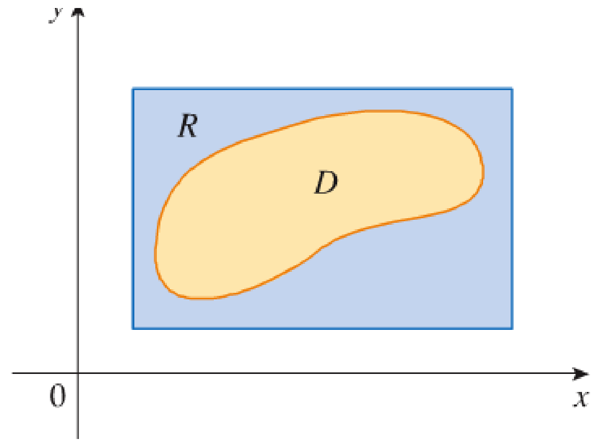
$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$$

en Stewart, J, Obr.cit.15

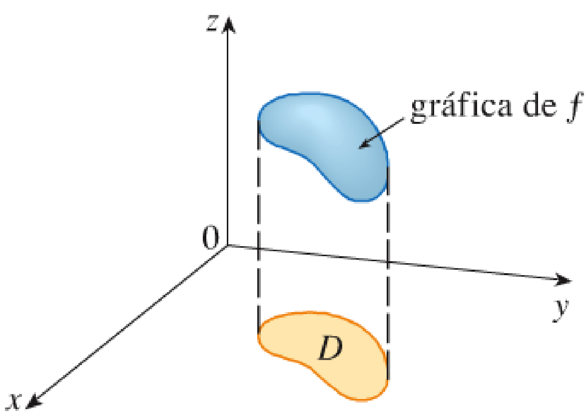
Integrales dobles en recintos generalizados

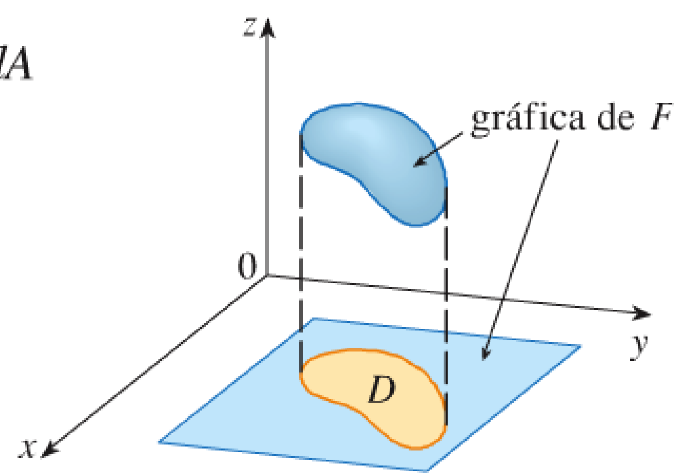
$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \text{ está en } D \\ 0 & \text{si } (x, y) \text{ está en } R \text{ pero no en } D \end{cases}$$





$$\iint_D f(x, y)\, dA = \iint_R F(x, y)\, dA$$

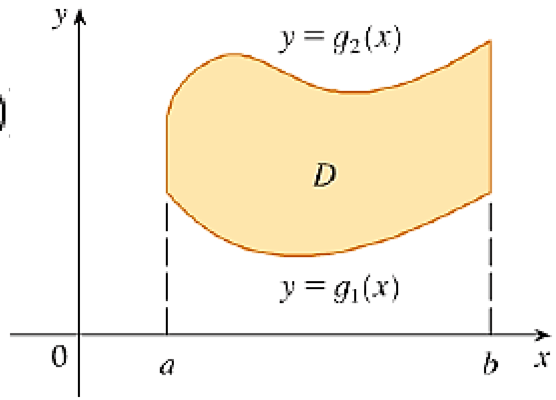




OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

Si f es continua en una región D tipo I tal que

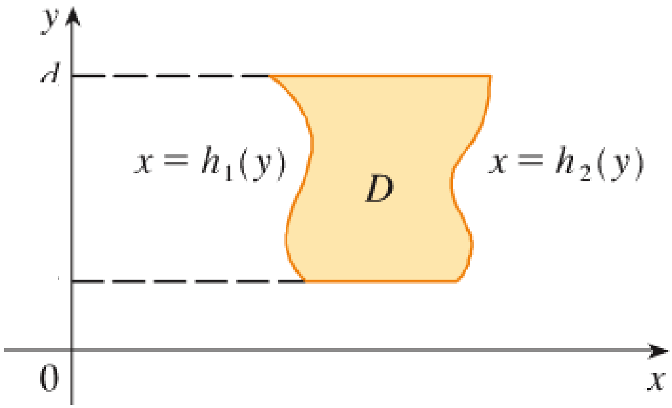
$$D = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)$$



entonces $$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy$$

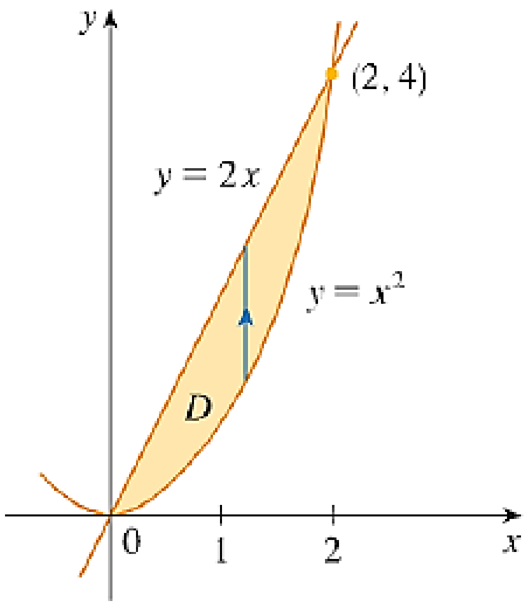
donde D es una región de tipo II dada por la ecuación 4.

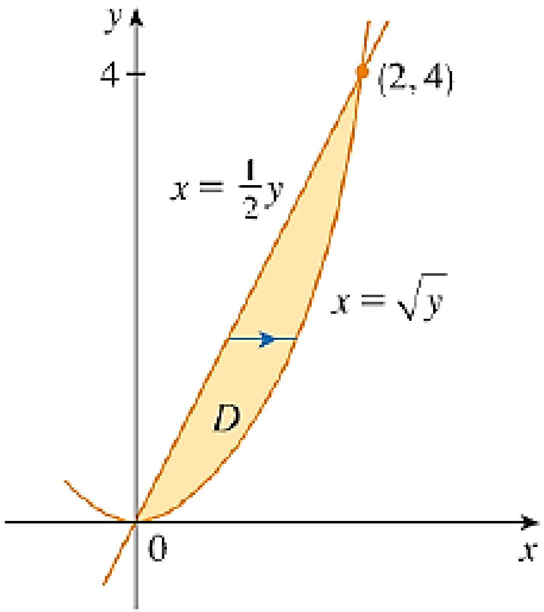


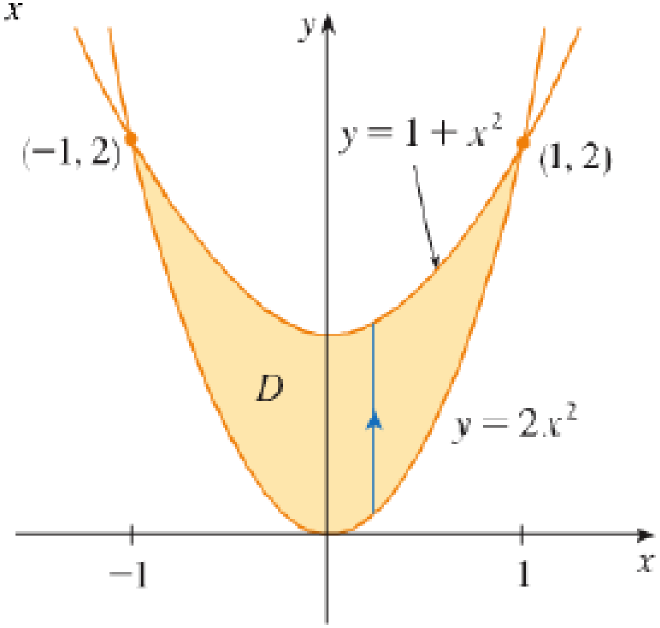
en Stewart, J, Obr.cit.15

que también podemos expresar del siguiente modo: $$\int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} F(x, y) dydx$$

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE





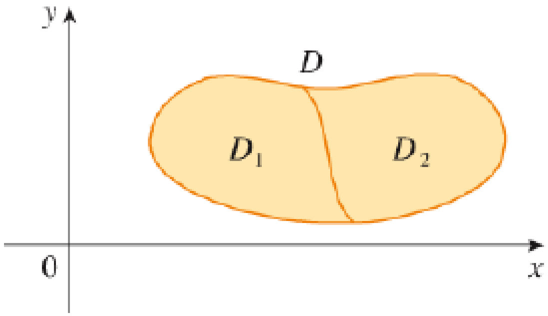


en Stewart, J, Obr.cit.15

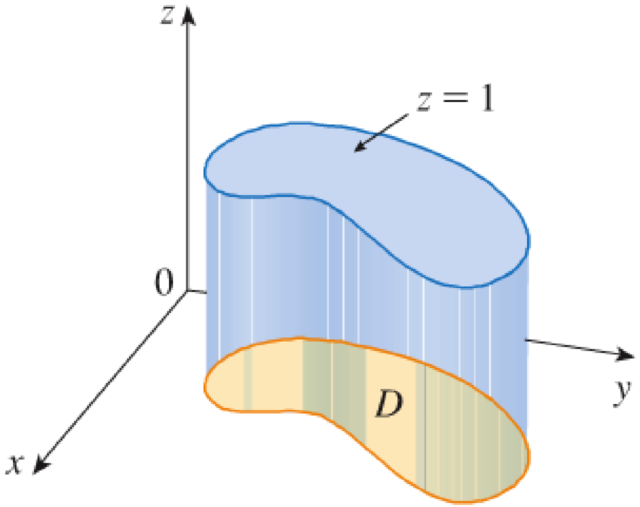
Propiedades

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

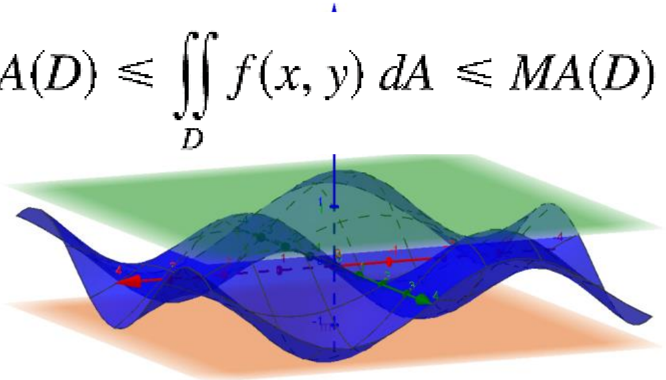
$$\iint_D f(x, y)\, dA = \iint_{D_1} f(x, y)\, dA + \iint_{D_2} f(x, y)\, dA$$



$$\iint_D 1\, dA = A(D)$$



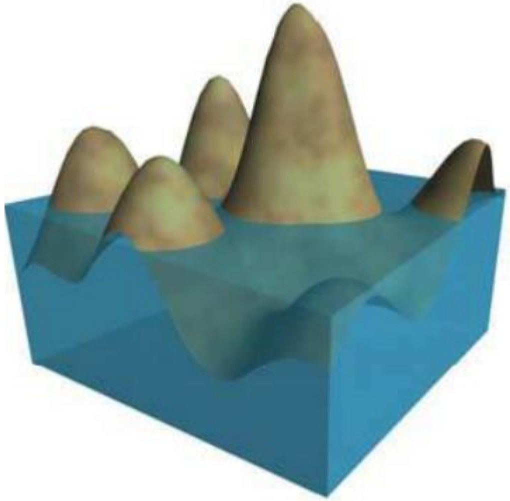
Si $m \leqslant f(x, y) \leqslant M$ para toda (x, y) en D, entonces $\quad mA(D) \leqslant \iint_D f(x, y)\, dA \leqslant MA(D)$



Aplicaciones de la integral doble

Area

$$\iint_D 1\, dA = A(D)$$

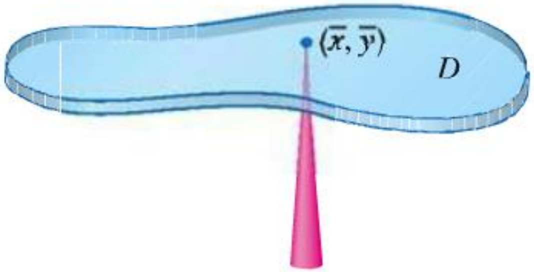


Volumen Si $f(x,y) \geq 0$

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA$$

Valor promedio

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y)\, dA$$



Masa de una lámina con densidad variable

$$m = \iint_D \rho(x, y)\, dA$$

$$\rho(x,y) = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta A}$$

Las coordenadas $(\overline{x}, \overline{y})$ del centro de masa de una lámina que ocupa la región D y que tiene función de densidad $\rho(x, y)$ son

Momento estático y centro de masa de una figura plana

$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \iint_D x\rho(x, y)\, dA \qquad \overline{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m} \iint_D y\rho(x, y)\, dA$$

Aplicaciones de la integral doble

Momento de inercia de una lámina respecto al eje x e y, respectivamente

$$I_x = \lim_{m,\, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij}^*)^2 \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A = \iint_D y^2 \rho(x, y)\, dA$$

$$I_y = \lim_{m,\, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij}^*)^2 \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A = \iint_D x^2 \rho(x, y)\, dA$$

Momento polar de inercia (respecto al origen)

$$I_0 = \lim_{m,\, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} [(x_{ij}^*)^2 + (y_{ij}^*)^2]\, \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y)\, dA$$

Función de densidad conjunta

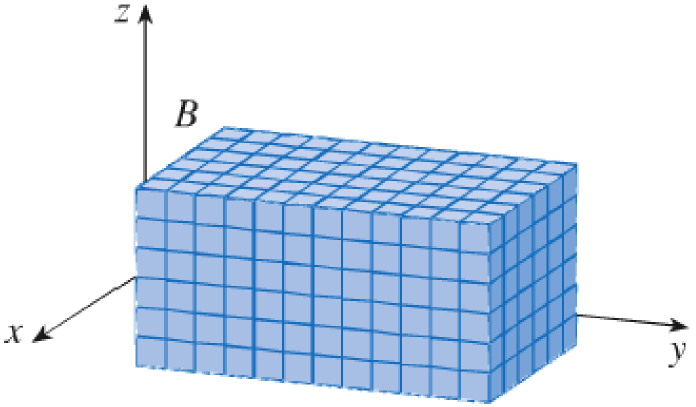
$$P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y)\, dA$$

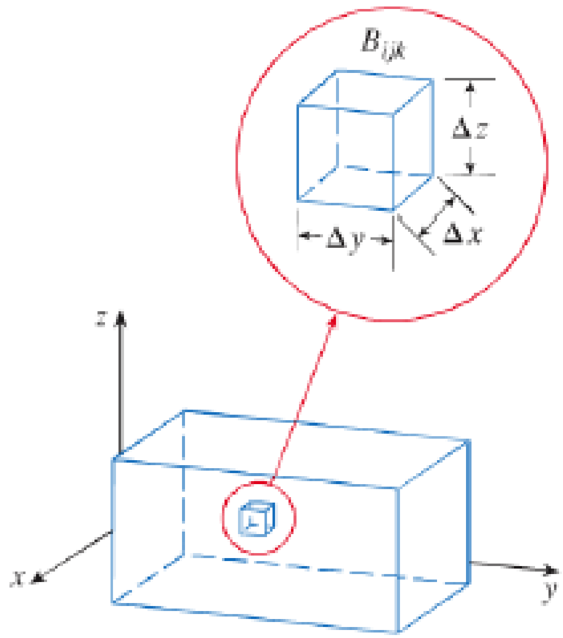
$$P(a \leq X \leq b,\ c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx$$

Valores esperados

$$\mu_1 = \iint_{\mathbb{R}^2} x f(x, y)\, dA \qquad \mu_2 = \iint_{\mathbb{R}^2} y f(x, y)\, dA$$

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE





Observemos la "caja" **B** y el detalle de cómo está particionada.

¿Cómo indicaría analíticamente la caja?

¿cómo indicaría cualquiera de las "cajitas" de la partición?

Si la partición es regular en sub-recintos cúbicos iguales entonces: $\mathrm{Vol}(B_{iik}) = \Delta V$

La triple suma de Riemann se expresará entonces: $\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\, \Delta V$

en Stewart, J, Obr.cit.15

DEFINICIÓN La **integral triple** de f sobre la caja B es

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \lim_{l, m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\, \Delta V \quad \text{si este límite existe.}$$

Si el límite existe, se dice que *f* es integrable sobre B

Propiedad: *Si f es continua en la región B, entonces, f es integrable sobre B*

Teorema de Fubini para integrales triples: *Si f es continua en la región* $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$ *entonces*

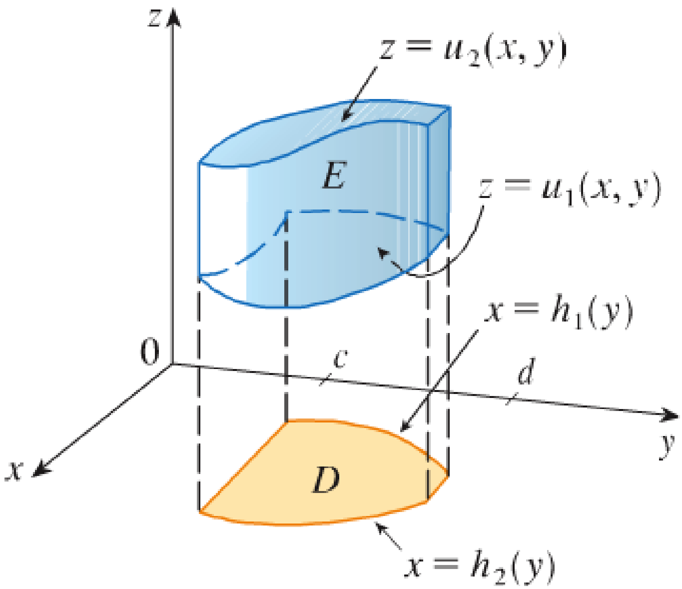
$$\iiint_B f(x, y, z)dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)dxdydz$$

¿Cómo se evalúa entonces, una Integral Triple?

Ejemplo: *Evalúe la integral triple* $\iiint_B xyz^2 dV$ *donde*

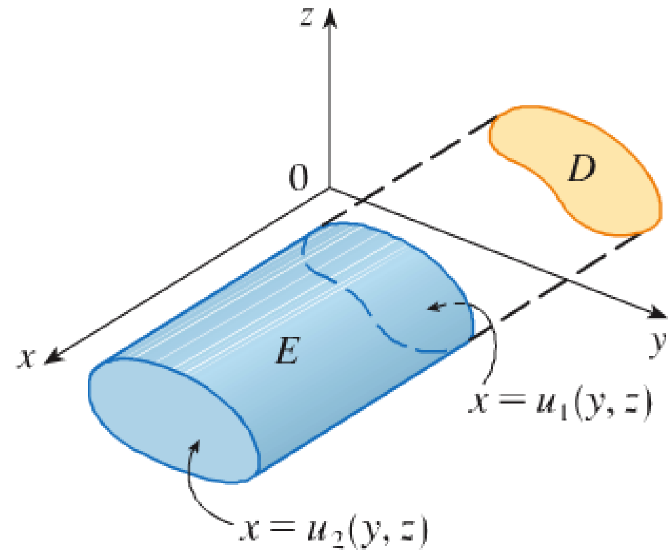
$$B = [0,1] \times [-1,2\ ] \times [0,3]$$

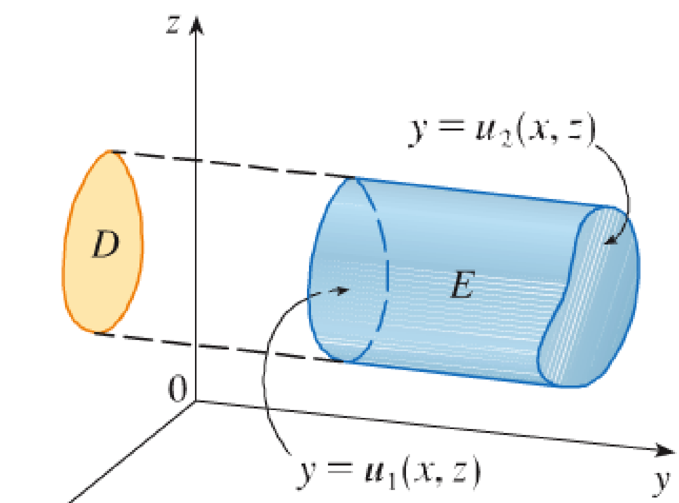
OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE



Una región sólida tipo I,

Una región tipo 2





Una región tipo 3

$$V(E) = \iiint_E dV$$

en Stewart, J, Obr.cit.15

Coordenadas polares

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

en Stewart, J, Obr.cit.15

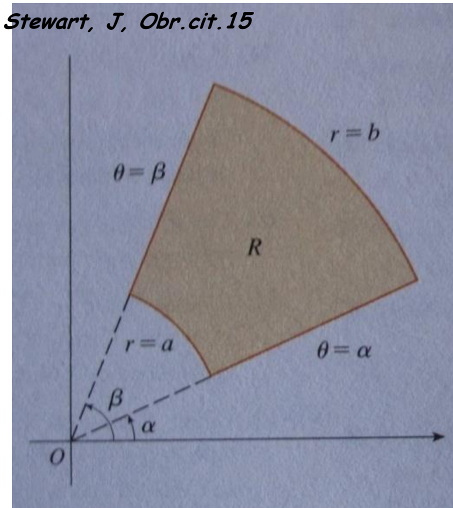


FIGURA 3 Rectángulo polar

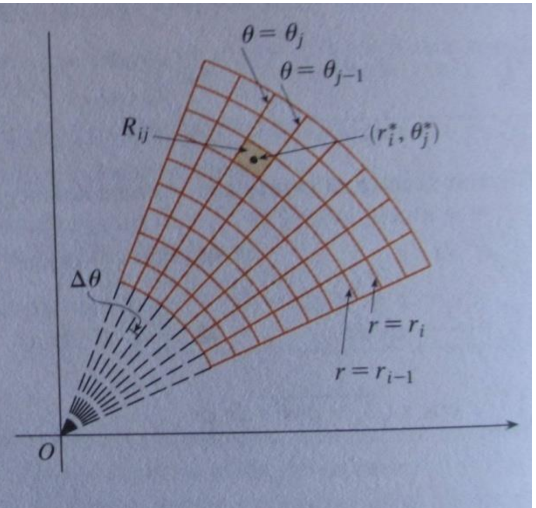


FIGURA 4 División de R en subrectángulos

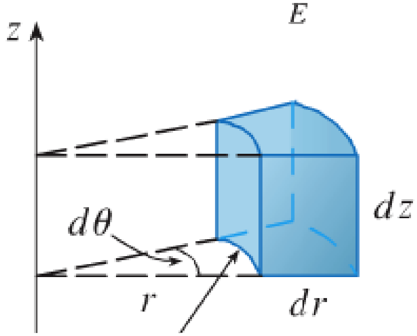
2 CAMBIO A COORDENADAS POLARES EN UNA INTEGRAL DOBLE Si f es continua en un rectángulo polar R dado por $0 \leqslant a \leqslant r \leqslant b$, $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, donde $0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant 2\pi$, entonces

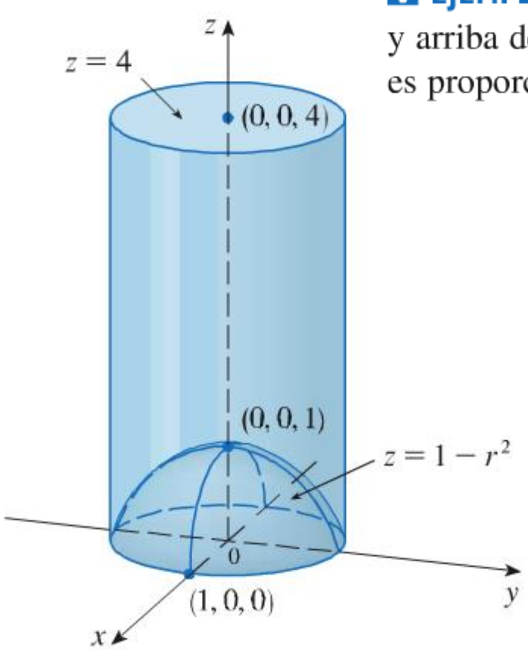
$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

en Stewart, J, Obr.cit.15

Coordenadas cilíndricas

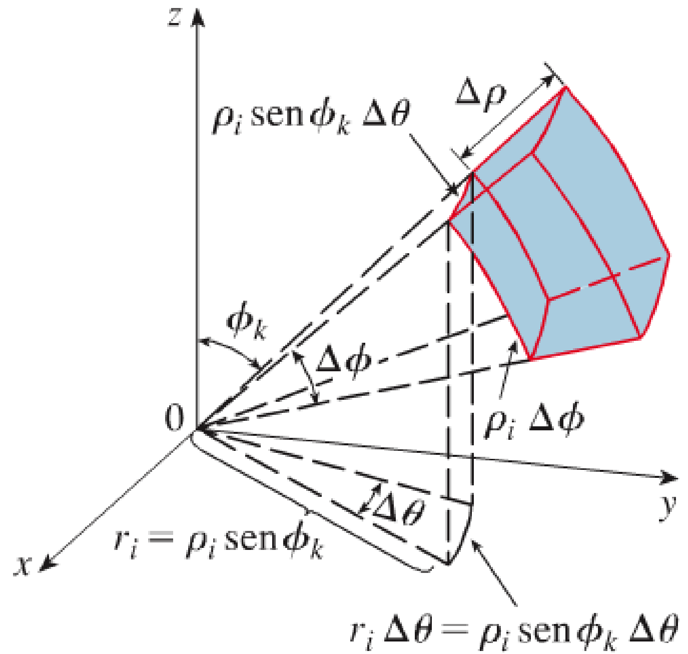
$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r\cos\theta,\, r\operatorname{sen}\theta)}^{u_2(r\cos\theta,\, r\operatorname{sen}\theta)} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta$$





EJEMPLO 3 Un sólido E está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, debajo del plano $z = 4$ y arriba del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$. (Véase fig. 8.) La densidad en cualquier punto es proporcional a su distancia desde el eje del cilindro. Encuentre la masa de E.

Coordenadas esféricas



$$\Delta V_{ijk} \approx (\Delta\rho)(\rho_i \, \Delta\phi)(\rho_i \operatorname{sen} \phi_k \, \Delta\theta) = \rho_i^2 \operatorname{sen} \phi_k \, \Delta\rho \, \Delta\theta \, \Delta\phi$$

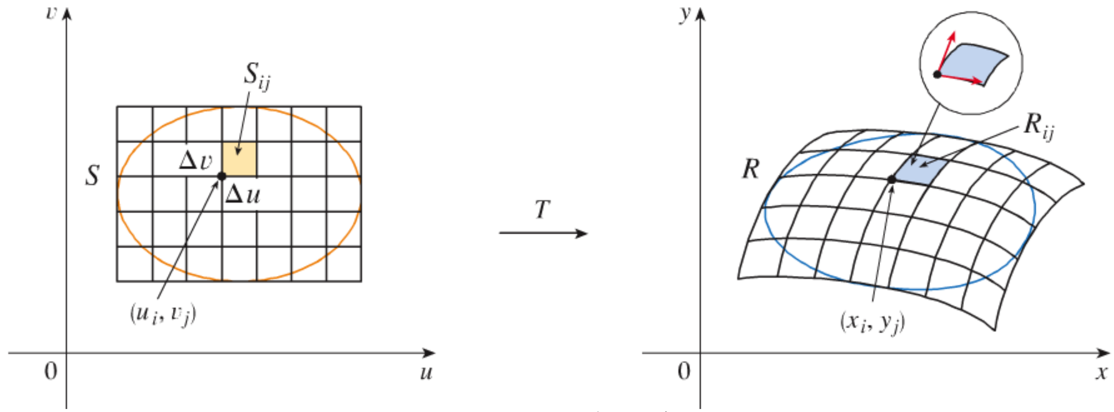
$$\boxed{3} \quad \iiint_E f(x, y, z) \, dV$$

$$= \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi) \, \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

donde E es una cuña esférica dada por

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid a \leqslant \rho \leqslant b, \ \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, \ c \leqslant \phi \leqslant d\}$$

Cambio de variable



7 **DEFINICIÓN** El **jacobiano** de la transformación T dado por $x = g(u, v)$ y $y = h(u, v)$ es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

9 **CAMBIO DE VARIABLES EN UNA INTEGRAL DOBLE** Suponga que T es una transformación C^1 cuyo jacobiano es no nulo y que relaciona una región S en el plano uv con una región R en el plano xy. Suponga que f es continua en R, y que R y S son regiones planas tipo I o tipo II. Suponga también que T es uno a uno, excepto quizá en el límite de S. Entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv$$

Fin de la presentación …

… gracias por su seguimiento

… gracias por su participación