

## Capítulo 6

# Campos vectoriales

*Durante este curso llevamos estudiados distintos tipos de funciones. Trabajamos con funciones vectoriales de una variable  $\vec{r}(t) : \mathbb{R} \rightarrow V_n$ , asociadas con curvas paramétricas y que permiten por ejemplo describir el movimiento de objetos. También usamos funciones vectoriales de dos variables  $\vec{r}(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow V_3$ , asociadas con superficies paramétricas. Estudiamos funciones escalares de varias variables  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y las utilizamos para describir por ejemplo la temperatura en una placa o en un ambiente, o la densidad de la sustancia con que está hecho algún objeto; estas asocian un escalar a cada punto en el dominio.*

*Imaginemos ahora que pretendemos estudiar el movimiento de un fluido por una cañería. No es para nada práctico estudiar cómo se mueve cada molécula que constituye el fluido; en cambio la descripción que se adopta consiste en indicar, en cada punto de la cañería, con qué velocidad pasa en elemento de fluido:  $\vec{v}(x, y, z)$ . Otra situación de interés es el estudio de la fuerza producida por una carga eléctrica, que sentirá otra carga dependiendo de donde esté situada:  $\vec{F}_e(x, y, z)$ . Introducimos un tipo de función llamada campo vectorial  $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow V_n$ , que es una función que a cada punto del espacio de  $n$  dimensiones le asigna un vector de  $n$  componentes. En este capítulo estudiaremos el dominio y rango de un campo vectorial, su representación gráfica, continuidad y límites, así como las derivadas e integrales que involucran campos vectoriales.*

### 6.1 Definición de campo vectorial

Nos concentraremos en el estudio de campos vectoriales definidos en regiones sólidas en el espacio que para cada punto asignan un vector de  $V_3$ , y en campos vectoriales definidos en recintos planos que para cada punto del dominio tienen asociado un vector de  $V_2$ . Veamos las correspondientes definiciones, algunos ejemplos y la forma de representarlos gráficamente.

**Definición 6.1.1 — en  $\mathbb{R}^3$ .** Un campo vectorial sobre  $E \subset \mathbb{R}^3$  es una función  $\vec{F} : E \rightarrow V_3$  que a cada punto  $(x, y, z) \in E$  le asigna un (único) vector de tres componentes  $\vec{F}(x, y, z) \in V_3$ .

Para cada terna ordenada  $(x, y, z)$  del dominio, se tiene asociado un vector tridimensional  $\vec{F}(x, y, z)$ ; luego podemos escribirlo en términos de sus tres componentes, que son funciones escalares de tres variables a las que llamaremos  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$  y  $R(x, y, z)$ . Escribimos en notación vectorial:

$$\vec{F}(x, y, z) = iP(x, y, z) + jQ(x, y, z) + kR(x, y, z)$$

o también como terna ordenada:

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)).$$

- **Ejemplo 6.1** El campo vectorial  $\vec{F}(x, y, z) = \check{i}z + \check{j}e^{xyz} + \check{k}(x^3 + z^2)$  asigna al punto  $(x_0, y_0, z_0)$  del espacio, el vector con primera componente  $z_0$ , segunda componente  $e^{x_0 y_0 z_0}$ , y tercera componente  $x_0^3 + z_0^2$ . Por ejemplo  $\vec{F}(\pi, 0, 2) = \check{i}2 + \check{j}e^{\pi \cdot 0 \cdot 2} + \check{k}(\pi^3 + 2^2) = \check{i}2 + \check{j} + \check{k}(\pi^3 + 4) = (2, 1, \pi^3 + 4)$ , mientras que  $\vec{F}(-\frac{1}{2}, -1, 2) = \check{i}2 + \check{j}e + \check{k}(-\frac{1}{8} + 4) = (1, e, \frac{31}{8})$ .

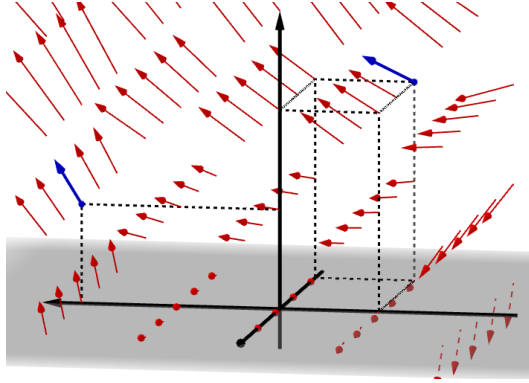


Figura 6.1: Representación gráfica del campo vectorial  $\vec{F}(x, y, z) = \check{i}z + \check{j}e^{xyz} + \check{k}(x^3 + z^2)$ .

■

**Definición 6.1.2 — en  $\mathbb{R}^2$ .** Un *campo vectorial sobre  $D \subset \mathbb{R}^2$*  es una función  $\vec{F} : D \rightarrow V_2$  que a cada punto  $(x, y) \in D$  le asigna un (único) vector de dos componentes  $\vec{F}(x, y) \in V_2$ .

Para cada par ordenado  $(x, y)$  del dominio, se tiene asociado un vector bidimensional  $\vec{F}(x, y)$ , cuya primera componente llamamos  $P(x, y)$  y cuya segunda componente denominamos  $Q(x, y)$ . Variando de punto, las componentes del campo vectorial varían en general; las componentes  $P$  y  $Q$  son funciones escalares de dos variables. Escribimos en notación vectorial:

$$\vec{F}(x, y) = \check{i}P(x, y) + \check{j}Q(x, y)$$

o también como par ordenado:

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)).$$

- **Ejemplo 6.2** El campo vectorial  $\vec{F}(x, y) = \frac{1}{4}\check{i}(x^2 - y^2 - 1) + \check{j}\frac{xy}{2}$  asigna al punto  $(x_0, y_0)$  del plano, el vector con primera componente  $\frac{1}{4}(x_0^2 - y_0^2 - 1)$  y segunda componente  $\frac{1}{2}x_0 y_0$ . Por ejemplo  $\vec{F}(0, 1) = \frac{1}{4}\check{i}(0^2 - 1^2 - 1) + \check{j}0 = -\frac{1}{2}\check{i} = (-\frac{1}{2}, 0)$ , mientras que  $\vec{F}(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}) = -\check{i}\frac{111}{400} + \check{j}\frac{3}{20} = (-\frac{111}{400}, \frac{3}{20})$ .

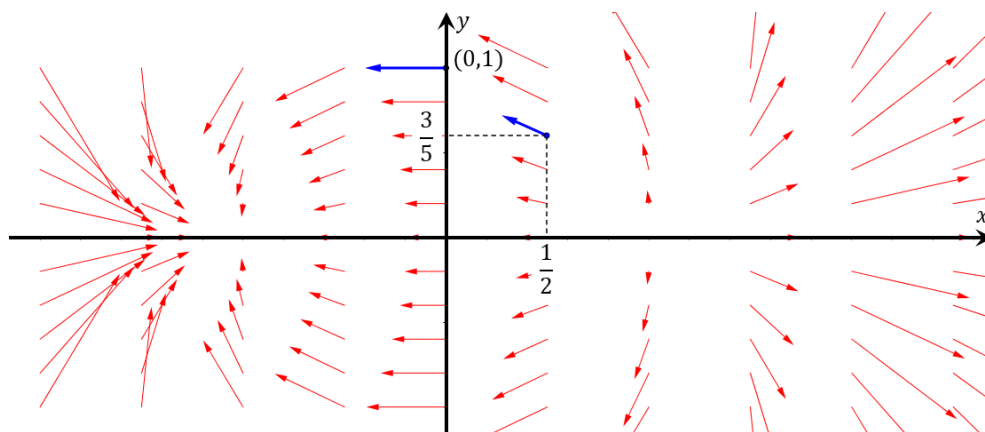


Figura 6.2: Representación gráfica del campo vectorial  $\vec{F}(x, y) = \hat{i}\frac{1}{2}(x^2 - y^2 - 1) + \hat{j}\frac{xy}{2}$ .

■

**Definición 6.1.3 — Dominio e imagen.** El dominio de un campo vectorial en el espacio es un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ , y el de un campo vectorial en el plano es un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ . El “dominio natural” del campo está dado por la intersección de los dominios naturales de sus funciones componentes.

La imagen de un campo vectorial en el espacio consisten en un conjunto de vectores de tres componente, y la de un campo vectorial en el plano son vectores de 2 componentes. El “dominio natural” del campo está dado por la intersección de los dominios naturales de sus funciones componentes.

■ **Ejemplo 6.3**  $\vec{F}(x, y) = \hat{i}\ln(xy) + \hat{j}\cos(x + y)$  tiene como dominio natural todos los puntos del primer y tercer cuadrante del plano, excepto los ejes coordenados. Justifique. ■

### Representación gráfica de un campo vectorial

Una manera de representar gráficamente un campo vectorial en el espacio es mediante un conjunto de flechas donde cada una corresponde al vector  $\vec{F}(x, y, z)$ , con su origen en el punto  $(x, y, z)$  del espacio; análogamente para un campo vectorial en el plano. Otras representaciones gráficas utilizan conjuntos de curvas o de superficies, como las llamadas líneas de flujo, y las denominadas superficies o curvas equipotenciales.



Pueden usar el siguiente recursos para visualizar campos vectoriales en  $\mathbb{R}^3$  cambiando las funciones correspondientes a las componentes. Explorar las vistas y cambiar la escala de los vectores para una mejor visualización.

<https://ggbm.at/Tn5epr9C>



Pueden usar el siguiente recursos para visualizar campos vectoriales en  $\mathbb{R}^2$  cambiando las funciones correspondientes a las componentes. Explorar al cambiar la escala de los vectores, la densidad de vectorias y el dominio de visualización.

<https://ggbm.at/zDZHQhvxv>

### 6.1.1 Continuidad de un campo vectorial

Un campo vectorial es continuo si y sólo si todas sus funciones componentes son continuas.

- **Ejemplo 6.4**  $\vec{F}(x, y, z) = i\frac{\ln x + \ln y}{\sqrt{z}} + j\cos(x+y) + k\frac{1}{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}$  es continuo en todos los puntos del primer octante del espacio, excepto en los planos coordenados y en el punto (1, 1, 1). Justifique.

■

Veamos ejemplos de campos vectoriales:

- **Ejemplo 6.5** Describa el campo vectorial  $\vec{F}(x, y, z) = (x, 0, 0)$ , trazando algunos de los vectores.

*Observamos que el campo es siempre un múltiplo escalar del versor  $i$ ; efectivamente  $\vec{F}(x, y, z) = x(1, 0, 0) = ix$ . Entonces, se representa mediante flechas paralelas al eje  $x$ , con sentido alejándose del plano  $yz$ , de módulo creciente a medida que aumenta  $x$  en valor absoluto.*

*¿Cuándo se anula este campo vectorial? Siempre que la coordenada  $x$  del punto sea cero, o sea  $\vec{F} = \vec{0}$  para todos los puntos de la forma  $(0, y, z)$ , esto es, para los puntos del plano  $yz$ . Esboce una representación gráfica de este campo. Ver Figura 6.3b.*

■

- **Ejemplo 6.6** Describa el campo vectorial  $\vec{F}(x, y) = -iy + jx$ , trazando algunos de los vectores.

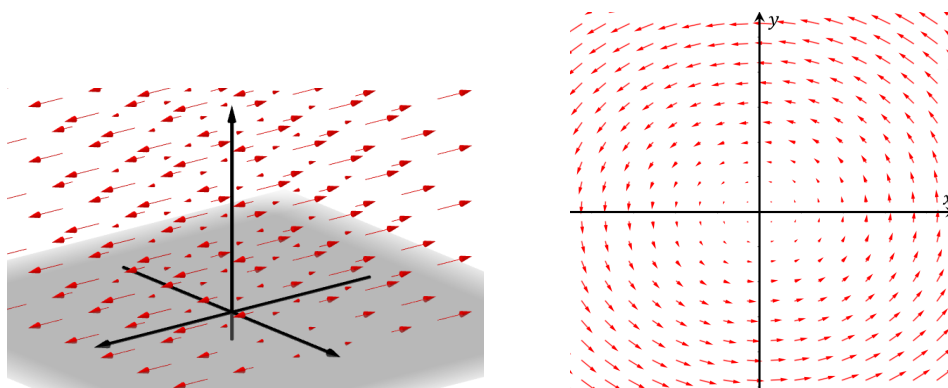
*El dominio natural de este campo vectorial es todo  $\mathbb{R}^2$ . Evaluemos el campo en algunos puntos del plano, por ejemplo  $\vec{F}(1, 0) = j$ ,  $\vec{F}(0, 1) = -i$ ,  $\vec{F}(-1, 0) = -j$ ,  $\vec{F}(0, -1) = i$ . Estos vectores tienen módulo 1, y los puntos donde se aplican están a 1 unidad de distancia del origen. Evalúe  $\vec{F}$  en  $(2, 0)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(-2, 0)$ , y  $(0, -2)$ ; ¿qué observa?*

*El módulo de  $\vec{F}$  para cualquier punto  $(x, y)$  es  $|\vec{F}(x, y)| = \sqrt{(-y)^2 + x^2} = |\vec{r}|$ , donde  $\vec{r}$  denota el vector posición del punto de coordenadas  $(x, y)$ . Esto significa que, para todos los puntos sobre una circunferencia dada centrada en el origen, el campo tiene el mismo módulo; a medida que aumenta el radio de la circunferencia, el módulo del campo es mayor. Por otro lado, en este ejemplo se tiene  $\vec{r} \cdot \vec{F} = (x, y) \cdot (-y, x) = 0$ , lo que significa que en cada punto del plano el campo es perpendicular al vector posición.*

*Podemos analizar también los puntos del plano donde el campo da el vector nulo: esto ocurre si y sólo si  $-y = 0$  y  $x = 0$ , o sea solamente para el origen:  $\vec{F}(0, 0) = \vec{0}$ .*

*Se muestra una representación gráfica de este campo en la Figura 6.3a.*

■



(a) Campo vectorial en el espacio. Ejemplo 6.5. (b) Campo vectorial en el plano. Ejemplo 6.6.

Figura 6.3: Representación gráfica de campos vectoriales.

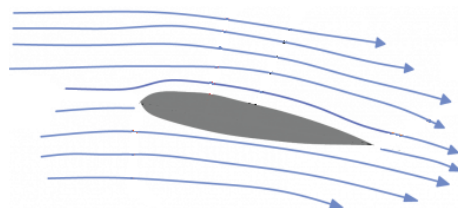
- C** En algunos cálculos o aplicaciones puede resultar útil considerar un campo vectorial en el plano como caso particular de campo vectorial en el espacio para el cual la primera y segunda funciones componentes no dependen de la variable  $z$ , la tercera componente es la función nula, y el dominio es un conjunto de puntos en el plano  $xy$ . Esto es, identificaremos a  $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  en  $D \subset \mathbb{R}^2$ , con  $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0)$  en  $E = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, z = 0\}$ .

### 6.1.2 Aplicaciones

#### Campo de velocidades

Cuando se pretende describir un fluido es conveniente indicar la velocidad con que pasa un elemento de fluido por un dado punto del espacio. En el caso de flujo estacionario (no depende del tiempo), se usa un *campo vectorial de velocidades*  $\vec{v}(x, y, z)$ .

Una *línea de flujo* de un campo de velocidades marca la trayectoria seguida por una partícula del fluido moviéndose en dicho campo, de forma que los vectores que representan el campo de velocidades son tangentes a las líneas de flujo. La representación por medio de líneas de flujo es usada, por ejemplo, para mostrar el movimiento de un fluido alrededor de un objeto (como el ala de un avión); las corrientes oceánicas también se representan mediante líneas de flujo, así como las térmicas que son columnas de aire ascendente que son utilizadas por las aves para planear, y también para vuelos en aladeltas, parapentes y planeadores sin motor.





Con el siguiente recurso se pueden simular el movimiento de varias partículas en un fluido multicolor. Las figuras que se forman pueden ser muy atrayentes.



<https://ggbm.at/xkqBVmr6>

### Campo de fuerzas

La fuerza de atracción gravitatoria entre dos objetos de masas  $M$  y  $m$  actúa a lo largo de la recta (imaginaria) que los une y está dada en módulo por

$$|\vec{F}_g| = G \frac{Mm}{r^2}$$

donde  $r$  es la distancia entre los objetos, y  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$  es la llamada constante de gravitación, de acuerdo a la ley de gravitación universal de Newton.

Supongamos que el objeto de masa  $M$  está ubicado en el origen y el objeto de masa  $m$  está en el punto  $(x, y, z)$ . La distancia entre ellos es entonces  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  y la recta de acción está determinada por el vector (unitario)  $\vec{r} = \frac{\check{x}\mathbf{i} + \check{y}\mathbf{j} + \check{z}\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ . Podemos escribir el campo de fuerza gravitatoria que sufre la masa  $m$  debido a la masa  $M$ , en términos de sus funciones componentes como:

$$\vec{F}_g(x, y, z) = -\check{x}GMm \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \check{y}GMm \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \check{z}GMm \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

donde el signo  $-$  indica que la fuerza es atractiva (hacia el origen, que es donde está  $M$ ).

Este campo de fuerzas se representa gráficamente mediante flechas en dirección radial apuntando hacia el origen de coordenadas, de longitud cada vez menor a medida que el objeto  $m$  se ubica más alejado del objeto  $M$ .

Otro ejemplo es la fuerza peso (fuerza de atracción gravitatoria que sufre una masa  $m$  muy cerca de la superficie terrestre), que da lugar a un campo vectorial constante:

$$\vec{F}_p = -\check{k}mg$$

¿Cómo lo representa gráficamente?

La fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales  $Q$  (ubicada en el origen) y  $q$  (ubicada en el punto  $(x, y, z)$ ) puede ser atractiva (cuando ambas cargas tienen signos opuestos) o repulsiva (cuando tienen el mismo signo). Según la ley de Coulomb, la fuerza que sufre la carga  $q$  debido a la carga  $Q$  es el campo vectorial

$$\vec{F}_e(x, y, z) = \varepsilon \frac{Qq}{r^2} \vec{r} = \varepsilon Qq \frac{\check{x}\mathbf{i} + \check{y}\mathbf{j} + \check{z}\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

donde  $\varepsilon$  es una constante. ¿Cuál es la diferencia con la representación gráfica de la fuerza gravitatoria?

### Campo gradiente

En el Capítulo 3, sin saberlo, ya hemos usado campos vectoriales: efectivamente dada una función escalar  $f$ , su gradiente está definido para cada punto dando como resultado un vector,  $\vec{\nabla} f$ . Recordemos que definimos el “operador diferencial vectorial” (nabla) como

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Si  $f(x, y, z)$  es una función escalar dada en  $E \subset \mathbb{R}^3$ , que admite derivadas parciales primeras, se define el vector gradiente en cada punto  $(x, y, z) \in E$  como

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \vec{i} f_x(x, y, z) + \vec{j} f_y(x, y, z) + \vec{k} f_z(x, y, z)$$

Vemos que  $\vec{F}_f = \vec{\nabla} f$  es un campo vectorial en  $E \subset \mathbb{R}^3$ , que se denomina *campo vectorial gradiente*.

Si  $f(x, y)$  es una función escalar definida en  $D \subset \mathbb{R}^2$ , entonces

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \vec{i} f_x(x, y) + \vec{j} f_y(x, y)$$

es un *campo vectorial gradiente* en  $D \subset \mathbb{R}^2$ .

### Representación gráfica de un campo gradiente

Discuta el siguiente enunciado:

La representación gráfica de un campo gradiente en el espacio (o en el plano) puede darse por medio de vectores que son perpendiculares a las superficies (o curvas) de nivel de la función escalar  $f$  de la cual deriva el campo.

La función  $f$  recibe el nombre de *función potencial* y sus superficies (o curvas) de nivel se llaman, precisamente, *superficies (o curvas) equipotenciales*, y brindan una representación gráfica alternativa para el campo vectorial. Si la función es diferencial, su campo vectorial gradiente posee la propiedad, ya vista, de que los vectores serán perpendiculares a las curvas de nivel. El sentido de cada vector estará determinado por las direcciones de crecimiento/decrecimiento de la función  $f$ .

En la figura 6.4 se representa en forma simultánea varias curvas de nivel de la función escalar  $f(x, y) = -x^2 - y^2$  y también varios vectores correspondientes a su campo vectorial gradiente  $\vec{F}(x, y) = -2x\vec{i} - 2y\vec{j}$ .

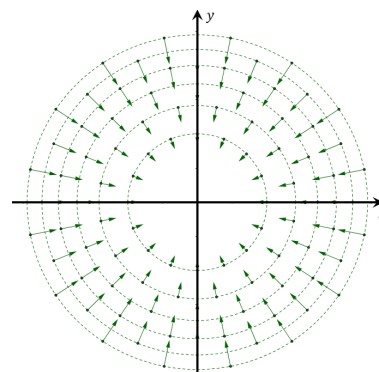


Figura 6.4: Curvas de nivel de la función  $f(x, y) = -x^2 - y^2$  y su campo gradiente asociado  $\vec{F}(x, y) = -2x\vec{i} - 2y\vec{j}$ .

■ **Ejemplo 6.7** Para cada una de las siguientes funciones escalares, obtenga el campo vectorial gradiente: a)  $f(x, y) = \ln(x + 2y)$ ; b)  $g(x, y, z) = x \cos \frac{y}{z}$

a) El dominio de la función  $f$  (y de sus derivadas parciales) es la región del plano  $D = \{(x, y) : x + 2y > 0\}$ , esto es, por encima de la recta  $y = -\frac{1}{2}x$  (grafique el dominio). Calculando las derivadas parciales, se tiene el campo vectorial gradiente en  $D$  dado por

$$\vec{F}(x, y) = \vec{\nabla} f(x, y) = \vec{i} \frac{1}{x + 2y} + \vec{j} \frac{2}{x + 2y}$$

b) La función  $g$  está definida en la región  $E = \{x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \neq 0\}$ , o sea, en todo el espacio excepto el plano  $xy$ . El campo vectorial gradiente que deriva de esta función escalar es

$$\vec{G}(x, y, z) = \vec{\nabla}g(x, y, z) = \vec{i} \cos \frac{y}{z} - \vec{j} \frac{x}{z} \sin \frac{y}{z} + \vec{k} \frac{xy}{z^2} \sin \frac{y}{z}$$

para  $(x, y, z) \in E$ . ■

### 6.1.3 Campo vectorial conservativo y función potencial

Estudiaremos una clase particular de campos vectoriales, que tiene importancia en aplicaciones físicas: los llamados *campos vectoriales conservativos*. Damos ahora su definición y más adelante veremos un teorema que da una condición suficiente para determinar si un dado campo vectorial es conservativo o no.

**Definición 6.1.4** Un campo vectorial  $\vec{F}$  se dice *conservativo en  $E$*  si es el gradiente de alguna función escalar, es decir, si existe una función  $f$  tal que  $\vec{F} = \vec{\nabla}f$  para todo punto de  $E$ . En tal caso,  $f$  se llama *función potencial* de  $\vec{F}$ .

Ⓒ Observamos que si  $f(x, y)$  es una función potencial del campo vectorial conservativo  $\vec{F}(x, y) = \vec{i}P(x, y) + \vec{j}Q(x, y)$  en el plano, entonces:

$$P(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

**Ejercicio 6.1** Escriba relaciones similares para el caso de un campo vectorial conservativo en el espacio. ■

Veremos más adelante un método para hallar una función potencial de un campo vectorial conservativo.

Un campo gradiente es conservativo por definición, y la función de la cual derivan es una función potencial (notar que ésta queda definida a menos de una constante, o sea que en realidad se tiene una *familia de funciones potenciales*).

Se puede probar que los campos de fuerza gravitatoria y eléctrica son ambos conservativos. La función potencial en estos casos es de la forma  $f(x, y, z) = \frac{K}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + c$ , donde  $K$  es  $GMm$  ó  $-\varepsilon Qq$  de acuerdo al problema, y la constante  $c$  es arbitraria. En Física, para campos de fuerza conservativos, se define una cantidad llamada *energía potencial*  $U$  de manera que  $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$  (entonces  $-U$  juega el papel de la función potencial  $f$  dada aquí).

■ **Ejemplo 6.8** La fuerza de restitución elástica (en 1 dimensión)  $\vec{F}(x) = -kx\vec{i}$  es conservativa. En “lenguaje físico”, se dice que existe una función  $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$  (energía potencial elástica) tal que  $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ . Aquí usamos el “lenguaje matemático” y diremos que existe una función  $f(x) = -\frac{1}{2}kx^2$  (función potencial) tal que  $\vec{F} = \vec{\nabla}f$ . ■



■ **Ejemplo 6.9** Determine si  $\vec{F}(x, y) = \check{y}e^{xy} + \check{j}xe^{xy}$  es un campo vectorial conservativo en  $\mathbb{R}^2$ .

De acuerdo a la definición, deberíamos encontrar una función escalar  $f(x, y)$  tal que su gradiente es el campo dado. Por simple inspección, notamos que las derivadas parciales de la función exponencial  $e^{xy}$  dan las dos componentes del campo. Luego la familia de funciones potenciales es

$$f(x, y) = e^{xy} + k$$

pues, efectivamente,  $\vec{\nabla}f(x, y) = (ye^{xy}, xe^{xy}) = \vec{F}(x, y)$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

■

### Ejercicios

1. Describa el campo vectorial dado, y grafique trazando algunos vectores representativos en el plano:

a)  $\vec{F}(x, y) = \check{i}x + \check{j}y$

b)  $\vec{F}(x, y) = \check{i}y + \check{j}$

c)  $\vec{F}(x, y) = \frac{-\check{i}y + \check{j}x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  con  $(x, y) \neq (0, 0)$

2. Describa el campo vectorial  $\vec{F}(x, y, z) = \check{i}x + \check{j}z + \check{k}y$  en el espacio, y grafique trazando algunos vectores representativos.
3. Proporcione una expresión  $\vec{F}(x, y) = \check{i}P(x, y) + \check{j}Q(x, y)$  para un campo vectorial en el plano con la propiedad de que  $\vec{F}$  apunte hacia el origen con una magnitud inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de  $(x, y)$  al  $(0, 0)$ . El campo no está definido en el origen.
4. Encuentre el campo vectorial gradiente que se obtiene a partir de la función escalar dada en cada caso:

a)  $f(x, y) = \cosh(x + 2y)$

b)  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

c)  $f(x, y, z) = xyz + \frac{1}{2}z^2 + e^x \cos y$

## 6.2 Derivadas de un campo vectorial

Un campo vectorial  $\vec{F}(x, y, z)$  en el espacio posee tres funciones componentes, cada una de las cuales depende de tres variables:  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ , y  $R(x, y, z)$ . Si queremos estudiar cambios del campo vectorial, notamos que debemos evaluar la variación de cada una de las funciones componentes respecto de cada una de las variables. En total tenemos nueve derivadas parciales primeras:

$$\boxed{P_x} \quad \boxed{P_y} \quad \boxed{P_z} \quad \boxed{Q_x} \quad \boxed{Q_y} \quad \boxed{Q_z} \quad \boxed{R_x} \quad \boxed{R_y} \quad \boxed{R_z}$$

Resulta conveniente combinar estas funciones en dos grupos: con tres de ellas se genera una magnitud escalar llamada *divergencia*, mientras que con las otras seis se genera un nuevo campo vectorial llamado *rotor*.

**Definición 6.2.1** Dado un campo vectorial en el espacio  $\vec{F}(x, y, z) = \check{i}P(x, y, z) + \check{j}Q(x, y, z) + \check{k}R(x, y, z)$ , se define la *divergencia* de  $\vec{F}$  como la función escalar de tres variables dada por

$$\text{div}(\vec{F}) = P_x + Q_y + R_z$$

si las tres derivadas parciales existen.

- C** Usando el operador diferencial vectorial (nabla), se puede escribir la divergencia de un campo vectorial como un “producto escalar entre el operador nabla y el campo”. Se denota la divergencia de  $\vec{F}$  como:

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\vec{i}P + \vec{j}Q + \vec{k}R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

- **Ejemplo 6.10** Calcule la divergencia del campo vectorial  $\vec{F}(x, y, z) = \vec{i}e^x z \sin y + \vec{j}e^x z \cos y + \vec{k}x^2 y^2 z^2$ .

Se tiene que, para todo  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , la divergencia del campo es la siguiente función escalar:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{F}) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial(e^x z \sin y)}{\partial x} + \frac{\partial(e^x z \cos y)}{\partial y} + \frac{\partial(x^2 y^2 z^2)}{\partial z} \\ &= e^x z \sin y - e^x z \sin y + 2x^2 y^2 z = 2x^2 y^2 z. \end{aligned}$$

■

**Definición 6.2.2 — Campo vectorial incompresible.** Si  $\operatorname{div}(\vec{F}) = 0$  para todo  $(x, y, z) \in E$ , se dice que  $\vec{F}$  es un campo vectorial *incompresible* en  $E$ .

**Ejercicio 6.2** Dé un ejemplo de campo incompresible en  $\mathbb{R}^3$ .

■

**Definición 6.2.3 — Rotor de un campo vectorial en  $\mathbb{R}^3$ .** Dado un campo vectorial en el espacio  $\vec{F}(x, y, z) = \vec{i}P(x, y, z) + \vec{j}Q(x, y, z) + \vec{k}R(x, y, z)$ , se define el *rotor* (o rotacional) de  $\vec{F}$  como el nuevo campo vectorial en el espacio dado por

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{i}(R_y - Q_z) - \vec{j}(R_x - P_z) + \vec{k}(Q_x - P_y)$$

si las seis derivadas parciales existen.

- C** Usando el operador diferencial vectorial (nabla), se puede escribir el rotor de un campo vectorial como un “producto vectorial entre el operador nabla y el campo”. Se denota el rotor de  $\vec{F}$  como:

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) - \vec{j} \left( \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

- **Ejemplo 6.11** Calcule el rotor del campo vectorial  $\vec{F}(x, y, z) = \vec{i}e^x z \sin y + \vec{j}e^x z \cos y + \vec{k}x^2 y^2 z^2$ .

Se tiene que, para todo  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , el rotor del campo es el siguiente nuevo campo

vectorial:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \vec{i} \left( \frac{\partial(x^2 y^2 z^2)}{\partial y} - \frac{\partial(e^x z \cos y)}{\partial z} \right) - \vec{j} \left( \frac{\partial(x^2 y^2 z^2)}{\partial x} - \frac{\partial(e^x z \sin y)}{\partial z} \right) \\ &\quad + \vec{k} \left( \frac{\partial(e^x z \cos y)}{\partial x} - \frac{\partial(e^x z \sin y)}{\partial y} \right) \\ &= \vec{i}(2x^2 y z^2 - e^x \cos y) + \vec{j}(-2x y^2 z^2 + e^x \sin y) + \vec{k} 0\end{aligned}$$

■

**Definición 6.2.4 — Campo vectorial irrotacional.** Si  $\operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$  para todo  $(x, y, z) \in E$ , se dice que  $\vec{F}$  es un campo vectorial *irrotacional* en  $E$ .

**Ejercicio 6.3** Dé un ejemplo de campo irrotacional en  $\mathbb{R}^3$ .

■

En el caso de un campo vectorial  $\vec{F}(x, y) = \vec{i}P(x, y) + \vec{j}Q(x, y)$  en el plano, la divergencia y el rotor se definen de manera similar, a partir de las cuatro derivadas parciales primeras:

$$\begin{array}{cc} \boxed{P_x} & \boxed{P_y} \end{array} \quad \begin{array}{cc} \boxed{Q_x} & \boxed{Q_y} \end{array}$$

Se define la *divergencia* de  $\vec{F}$  en el plano como la función escalar de dos variables dada por

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = P_x + Q_y$$

y se define el *rotor* de  $\vec{F}$  en el plano como el nuevo campo vectorial en el espacio a lo largo del eje  $z$  dado por

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{k}(Q_x - P_y).$$

**Ejercicio 6.4** Discuta estas definiciones teniendo en cuenta el comentario 6.1.1 de la sección 6.1.1.

■

■ **Ejemplo 6.12** Dado el campo vectorial  $\vec{F}(x, y) = \vec{i} \ln(x^2 + y^4) + \vec{j}(\frac{1}{2} + 8xy)$ , definido para todo

$(x, y) \neq (0, 0)$ , resulta que  $\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{2x}{x^2 + y^4} + 8x$ , mientras que  $\operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{k} \left( 8y - \frac{4y^3}{x^2 + y^4} \right)$  para todos los puntos del plano excepto el origen.

■

**Ejercicio 6.5** Dé ejemplos de campos incompresibles y/o irrotacionales en  $\mathbb{R}^2$ .

■

Enunciamos a continuación algunas propiedades y teoremas que involucran la divergencia y el rotor de campos vectoriales:

**Teorema 6.2.1 — Propiedades.** Sea  $f(x, y, z)$  una función escalar de clase  $C^2$ , entonces:

1. la divergencia del campo gradiente de  $f$  da como resultado el *laplaciano* de  $f$ :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \nabla^2 f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz};$$

2. el rotor del campo gradiente de  $f$  da como resultado el vector nulo:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \vec{0}.$$

**Ejercicio 6.6** Pruebe ambos resultados. ¿Qué teorema utiliza para la demostración? ■

### 6.2.1 Campo vectorial conservativo y rotor

**Teorema 6.2.2 — Condición necesaria.** Sea  $\vec{F} = (P, Q, R)$  un campo vectorial en  $E \subset \mathbb{R}^3$ . Si  $\vec{F}$  es conservativo en  $E$ , entonces  $\vec{F}$  es irrotacional en  $E$ . Simbólicamente:

$$\text{Si } \vec{F} = \vec{\nabla} f, \quad \text{entonces } \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}.$$

**C** La contrarrecíproca de este teorema es muy útil para determinar cuándo un campo vectorial no es conservativo. ¿Cómo?

El teorema anterior afirma que una condición necesaria para que un campo vectorial sea conservativo es que sea irrotacional. El siguiente teorema da condiciones suficientes.

**Teorema 6.2.3 — Condiciones suficientes.** Sea  $\vec{F} = (P, Q, R)$  un campo vectorial en  $E \subset \mathbb{R}^3$ . Si  $\vec{F}$  es irrotacional en  $E$  y además sus funciones componentes son de clase  $C^1$  en todo  $\mathbb{R}^3$ , entonces  $\vec{F}$  es conservativo en  $\mathbb{R}^3$ .

■ **Ejemplo 6.13** Utilice alguna de estas propiedades para justificar que el campo  $\vec{F} = (xz, xyz, -y^2)$  no es conservativo en  $\mathbb{R}^3$ . ■

### Ejercicios

1. Halle la divergencia y el rotor de los siguientes campos vectoriales:

a)  $\vec{F}(x, y, z) = \frac{1}{3}(x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k})$

b)  $\vec{F}(x, y, z) = xyz \vec{i} - x^2 y \vec{k}$

c)  $\vec{F}(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \vec{i} + \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} \vec{j} + \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \vec{k}$

d)  $\vec{F}(x, y) = -\frac{1}{2}y \vec{i} + \frac{1}{2}x \vec{j}$

2. Determine si el campo vectorial dado es o no conservativo en  $\mathbb{R}^3$  o en  $\mathbb{R}^2$ , según sea el caso:

a)  $\vec{F}(x, y, z) = yz \vec{i} + xz \vec{j} + xy \vec{k}$

b)  $\vec{F}(x, y, z) = 2xy \vec{i} + (x^2 + 2yz) \vec{j} + y^2 \vec{k}$

c)  $\vec{F}(x, y, z) = e^x \vec{i} + e^z \vec{j} + e^y \vec{k}$

d)  $\vec{F}(x, y) = y \vec{i} + x \vec{j}$

3. Muestre que cualquier campo vectorial de la forma

$$\vec{F}(x, y, z) = p(y, z) \vec{i} + q(x, z) \vec{j} + r(x, y) \vec{k}$$

donde  $p, q$  y  $r$  son funciones diferenciables, es incompresible.

4. Muestre que cualquier campo vectorial de la forma

$$\vec{F}(x, y, z) = p(x) \vec{i} + q(y) \vec{j} + r(z) \vec{k}$$

donde  $p, q$  y  $r$  son funciones derivables, es irrotacional.

### 6.3 Integral de línea de un campo vectorial

Un concepto muy utilizado en Física es el de trabajo de una fuerza al mover un objeto de un punto a otro del espacio. Sabemos que, en el caso particular en que la fuerza  $\vec{F}$  es constante y el movimiento es en línea recta con un desplazamiento  $\vec{d}$ , el trabajo se calcula como el producto escalar  $\vec{F} \cdot \vec{d}$ . En esta sección veremos como se define y calcula el trabajo en el caso general de un campo de fuerzas variable, cuando el objeto se mueve siguiendo una trayectoria arbitraria. Para ello, introduciremos la noción de integral de línea de un campo vectorial a lo largo de una curva.

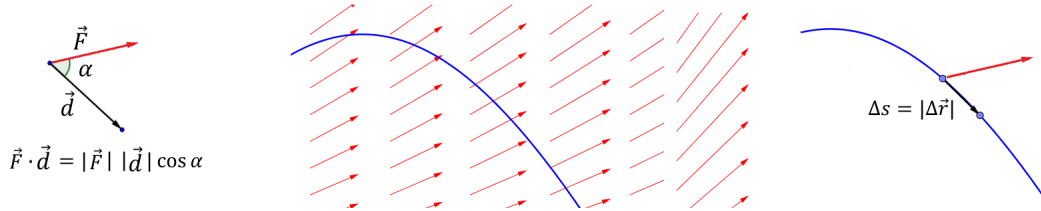


Figura 6.5: Trabajo realizado por la fuerza  $\vec{F}$  para mover la partícula, a lo largo del subarco.

Consideremos una curva suave  $C$  (en el espacio), parametrizada por la función vectorial  $\vec{r}(t)$  que es continua en  $[a, b]$  y tal que  $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$  para todo  $t \in [a, b]$ . Como hicimos para definir integral de línea de una función escalar, aproximaremos la curva  $C$  por una poligonal formada por pequeños segmentos de longitud  $\Delta s$ . Si  $\Delta s$  es muy pequeño, entonces cuando el objeto se mueve de un extremo al otro del  $i$ -ésimo subarco, avanza aproximadamente en la dirección tangente a la curva, dada por  $\frac{\vec{r}'(t_i)}{|\vec{r}'(t_i)|}$ . ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza  $\vec{F}$  para mover la partícula, a lo largo del subarco? Esto es el producto escalar de la fuerza por el vector desplazamiento:

$$\vec{F}(x_i, y_i, z_i) \cdot \left[ \Delta s \frac{\vec{r}'(t_i)}{|\vec{r}'(t_i)|} \right] = \left[ \vec{F}(x_i, y_i, z_i) \cdot \frac{\vec{r}'(t_i)}{|\vec{r}'(t_i)|} \right] \Delta s$$

que puede interpretarse como el valor de la componente tangencial del campo, multiplicada por la longitud del elemento de arco.

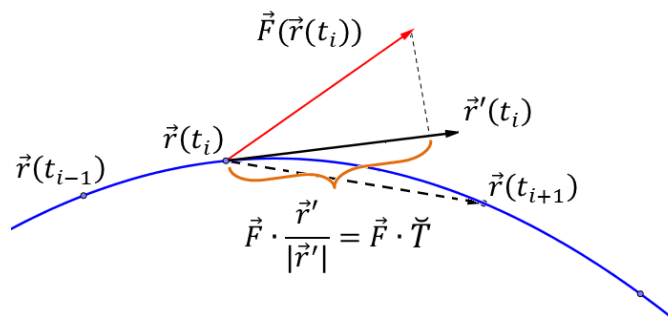


Figura 6.6: Cada elemento de arco aporta al trabajo una cantidad dada por el valor de la componente tangencial del campo multiplicada por la longitud del elemento de arco.

El trabajo total del campo para mover la partícula a lo largo de la curva puede aproximarse mediante la suma de Riemann sobre todos los subarcos. Luego, el trabajo  $W$  realizado por el campo de fuerzas  $\vec{F}$  a lo largo de la curva  $C$ , se define como el límite de las sumas de Riemann. Escribimos simbólicamente:

$$W = \int_C \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{T}(x, y, z) ds$$

donde  $\vec{F}(x, y, z)$  es el campo vectorial y  $\vec{T}(x, y, z)$  es el vector tangente unitario en el punto  $(x, y, z)$  de  $C$ . Notemos que esta expresión indica que el trabajo es la integral de línea con respecto a la longitud de arco, de la componente tangencial de la fuerza. Usando que  $\Delta s = |\vec{r}'(t)| \Delta t$  podemos escribir:

$$W = \int_a^b \left[ \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} \right] |\vec{r}'(t)| dt = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

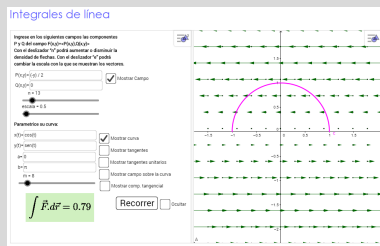
**Definición 6.3.1** Sea  $\vec{F}$  un campo vectorial continuo, y sea  $C$  una curva suave. Sea  $\vec{r}(t)$  con  $t \in [a, b]$ , una parametrización de  $C$ . Se define la *integral de línea de  $\vec{F}$  a lo largo de  $C$*  como

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \\ &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \end{aligned}$$

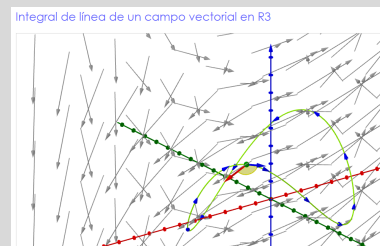
Notar que  $\vec{F}(\vec{r}(t)) = \vec{F}(x(t), y(t), z(t))$ .



Los siguientes recursos permiten calcular la integral de línea de un campo vectorial a lo largo de una curva, en el plano y en el espacio. Además, muestran de manera interesante, los vectores que representan al campo y los vectores tangentes a la curva, punto a punto, y el ángulo que forman.



<https://ggbm.at/trPacTjS>



<https://ggbm.at/v7faA84Z>

■ **Ejemplo 6.14** Evalúe  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  para el campo vectorial  $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + z\vec{j} + y\vec{k}$ , a lo largo de la hélice  $C$  dada por  $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + t\vec{k}$ ,  $t \in [0, \pi/2]$ .

Para aplicar la definición de integral de línea, calculamos

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}(t)) &= \cos t\vec{i} + t\vec{j} + \sin t\vec{k} \\ \vec{r}'(t) &= -\sin t\vec{i} + \cos t\vec{j} + \vec{k} \end{aligned}$$

Luego tenemos

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{\pi/2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} [\cos t(-\sin t) + t \cos t + \sin t] dt \\ &= \left[ \frac{\cos^2 t}{2} + t \sin t \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- **Ejemplo 6.15** Encuentre el trabajo realizado por el campo de fuerzas  $\vec{F}(x, y, z) = (y - x^2)\vec{i} + (z - y^2)\vec{j} + (x - z^2)\vec{k}$ , para mover una partícula desde  $(0, 0, 0)$  hasta  $(1, 1, 1)$  a lo largo de la curva paramétrica  $C$  definida por  $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$ .

El trabajo de una fuerza  $\vec{F}$  a lo largo de una curva  $C$  está definido como

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

para lo cual calculamos

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{r}(t)) &= (t^2 - t^2)\vec{i} + [t^3 - (t^2)^2]\vec{j} + [t - (t^3)^2]\vec{k} = (t^3 - t^4)\vec{j} + (t - t^6)\vec{k} \\ \vec{r}'(t) &= \vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k}\end{aligned}$$

Notamos que el punto inicial de la curva corresponde a  $t = 0$  y el punto final a  $t = 1$ . Luego resulta

$$\begin{aligned}W &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= \int_0^1 (2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8) dt = \frac{29}{60} \text{ J}\end{aligned}$$

expresado en Joules ( $1 \text{ J} = 1 \text{ Nm}$ ) en el sistema MKS.

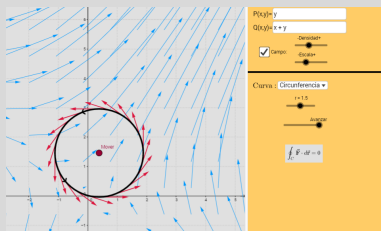
NOTACION: Puede ocurrir que la curva  $C$  sea cerrada (por ejemplo, una curva en el plano que sea la frontera de una región plana). En estos casos, la integral recibe el nombre de *circulación* del campo vectorial, y es común usar una notación especial:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

para indicar explícitamente que  $C$  es cerrada.



Con el siguiente recurso se puede calcular la integral de línea de cualquier campo en  $\mathbb{R}^2$  a lo largo de cualquier segmento recto, semicircunferencia o circunferencia.



<https://ggbm.at/bspB37mm>

**Teorema 6.3.1** La integral de línea de un campo vectorial depende del sentido de recorrido de la curva. Simbólicamente

$$\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

**Ejercicio 6.7** Justifique que la propiedad dada se cumple para cualquier campo.

Proponga algunos ejemplos particulares y, usando el recurso <https://ggbm.at/bspB37mm>, observe como cambia el signo de la integral al invertir el sentido de recorrido de la curva.

■

### Ejercicios

- Calcule la integral de línea de  $\vec{F}$  a lo largo de la curva  $C$  definida por la función vectorial indicada en cada caso:
  - $\vec{F}(x, y, z) = xy\vec{i} + y\vec{j} - yz\vec{k}$ ,  
 $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t\vec{k}$ ,  $0 \leq t \leq 1$
  - $\vec{F}(x, y, z) = 2y\vec{i} + 3x\vec{j} + (x+y)\vec{k}$ ,  
 $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + \frac{t}{6}\vec{k}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$
- Evalúe  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  para el campo vectorial  $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$  a lo largo de la circunferencia unitaria  $x^2 + y^2 = 1$  desde  $(1, 0)$  hasta  $(0, 1)$ , en el sentido contrario a las agujas del reloj.
- Encuentre el trabajo realizado por el campo de fuerzas  $\vec{F}(x, y, z) = 3y\vec{i} + 2x\vec{j} + 4z\vec{k}$  desde  $(0, 0, 0)$  hasta  $(1, 1, 1)$ , a lo largo de cada una de las siguientes trayectorias y grafique cada una de ellas:
  - La trayectoria recta  $C_1$ :  $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t\vec{j} + t\vec{k}$ ,  $0 \leq t \leq 1$
  - La trayectoria curva  $C_2$ :  $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^4\vec{k}$ ,  $0 \leq t \leq 1$
  - La trayectoria  $C_3 \cup C_4$ , formada por el segmento de recta desde  $(0, 0, 0)$  hasta  $(1, 1, 0)$  seguido por el segmento desde  $(1, 1, 0)$  hasta  $(1, 1, 1)$ .
- Calcule la circulación  $\oint_C [x\vec{i} + y\vec{j}] \cdot d\vec{r}$ , donde  $C$  es la elipse parametrizada por  $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + 4\sin t\vec{j}$  con  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

## 6.4 Teorema fundamental para integrales de línea

El Teorema Fundamental del Cálculo estudiado en Análisis Matemático I, aplicado a una función de una variable  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , con derivada continua en el intervalo  $[a, b]$ , se escribe como:

$$\int_a^b g'(x) dx = g(b) - g(a)$$

Este resultado afirma que el valor de la integral de  $g'(x)$  depende sólo del valor de  $g$  en los puntos extremos del intervalo de integración, quedando completamente determinado por  $g(a)$  y  $g(b)$ .

Pensemos ahora en una función  $f$  de dos o tres variables, de clase  $C^1$ , y en su gradiente  $\vec{\nabla} f$  que reúne las derivadas parciales primeras de la función. Éste es un campo vectorial, el campo gradiente de  $f$ , que de alguna manera generaliza el concepto de derivada para el caso de funciones de más de una variable. A partir de esto, uno se podría preguntar si el Teorema Fundamental del Cálculo también se puede generalizar, esto es: ¿el valor de la integral de línea del campo  $\vec{\nabla} f$  a lo largo de una curva  $C$ , en el plano o en el espacio, está determinado sólo por el valor de  $f$  en los puntos extremos de la curva  $C$ ?

Expresemos más formalmente la situación para el caso de una función de tres variables. Sea  $C$  una curva determinada por la función vectorial  $\vec{r}(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , que desde  $\vec{r}(a)$  hasta  $\vec{r}(b)$ . Sea



$f(x, y, z)$  una función con gradiente continuo para todos los puntos de  $C$ . Entonces, ¿el valor de la integral de línea  $\int_C \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}$  queda completamente determinada por  $f(\vec{r}(a))$  y  $f(\vec{r}(b))$ ?

La respuesta está contenida en el siguiente teorema fundamental para integrales de línea:

**Teorema 6.4.1 — Teorema Fundamental para integrales de Línea.** Sea  $C$  una curva suave (a trozos) determinada por la función vectorial  $\vec{r}(t)$ , con  $a \leq t \leq b$ . Sea  $f$  una función diferenciable de dos o de tres variables, cuyo vector gradiente  $\vec{\nabla} f$  es continuo en  $C$ . Entonces

$$\int_C \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))$$

**Demostración** Lo demostraremos para funciones de tres variables  $f(x, y, z)$  y curvas en el espacio  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , siendo similar la prueba para funciones de dos variables y curvas en el plano. Aplicando la definición de integral de línea para campos vectoriales, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{\nabla} f \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) dt \end{aligned}$$

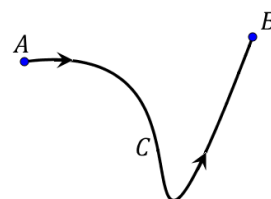
Recordando la regla de la cadena, notamos que la expresión entre parentesis es la derivada respecto de  $t$  de la función compuesta  $f(x(t), y(t), z(t))$ . Luego, la integral puede escribirse como  $\int_a^b \frac{d}{dt} [f(\vec{r}(t))] dt$ . Por lo tanto

$$\int_C \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = \int_a^b \frac{d}{dt} [f(\vec{r}(t))] dt = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)),$$

donde, en el último paso, aplicamos el Teorema Fundamental del Cálculo para una función de una variable.

Entonces, si  $f : E \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  es  $C^1$  en  $E$ , y  $C = C_{AB}$  es una curva suave en  $E$ , que comienza en  $A$  dado por  $\vec{r}(a) = (x_A, y_A, z_A)$  y finaliza en  $B$  dado por  $\vec{r}(b) = (x_B, y_B, z_B)$ , el Teorema Fundamental señala que:

$$\int_{C_{AB}} \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = f(x_B, y_B, z_B) - f(x_A, y_A, z_A)$$



Similarmente, supongamos que  $C = C_{AB}$  es una curva suave en  $D \subset \mathbb{R}^2$ , con extremo inicial  $A$  dado por  $\vec{r}(a) = (x_A, y_A)$  y extremo final  $B$  dado por  $\vec{r}(b) = (x_B, y_B)$ , y que  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es una función con campo gradiente continuo en  $C$ . Entonces, el Teorema Fundamental da el valor de la integral línea muy fácilmente:

$$\int_{C_{AB}} \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = f(x_B, y_B) - f(x_A, y_A)$$

Es importante resaltar que este Teorema Fundamental da un método práctico para obtener el valor de la integral de línea de un campo vectorial —sin tener que calcular la integral por definición— en el caso particular en que sepamos que el campo es *conservativo*, es decir cuando el campo es el

gradiente de alguna función potencial. Efectivamente, si un campo vectorial  $\vec{F}$  es conservativo y  $f$  es una función potencial de dicho campo, resulta

$$\int_C \vec{F}_{\text{conserv}} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A),$$

donde aplicamos el Teorema Fundamental de las integrales de Línea para obtener la última expresión.

Luego podemos afirmar que: el trabajo de un campo de fuerzas conservativo se obtiene –sin necesidad de resolver la integral– conociendo solamente el valor de la función potencial  $f$  en los puntos extremos de la curva  $C$ .

En Física, verán que el trabajo sobre una partícula cuando es influenciada solamente por fuerzas *conservativas*, resulta igual a la disminución de energía potencial. Y que en estas situaciones la energía mecánica total se *conserva* a lo largo de la trayectoria.

■ **Ejemplo 6.16** Determinar el trabajo realizado por el siguiente campo conservativo:

$$\vec{F} = yz \vec{i} + xz \vec{j} + xy \vec{k}$$

a lo largo de una curva suave  $C_{AB}$  que une los puntos  $A(-1, 3, 9)$  y  $B(1, 6, -4)$ , desde  $A$  hacia  $B$ .

*El trabajo realizado por el campo de fuerzas  $\vec{F}$  está definido por la integral de línea  $\int_{C_{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ . Como ya sabemos que el campo  $\vec{F}$  es conservativo, podemos aplicar el Teorema Fundamental para integrales de línea y evaluar el trabajo mediante los valores de la función potencial del campo  $\vec{F}$  en los extremos de la curva  $C_{AB}$ . Tenemos que calcular primero la función potencial, esto es la función  $f$  tal que  $\vec{\nabla} f = \vec{F}$ . En este caso es fácil darse cuenta (casi sin hacer cálculos) que  $f(x, y, z) = xyz$ , ya que:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xz \quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy$$

*que son justamente las funciones componentes del campo  $\vec{F}$ , con lo cual tenemos que  $\vec{\nabla} f = \vec{F}$ . Ya estamos en condiciones entonces de evaluar la integral de línea:*

$$\begin{aligned} \int_{C_{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{C_{AB}} \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} \\ &= f(B) - f(A) \\ &= (1)(6)(-4) - (-1)(3)(9) = 3 \end{aligned}$$

■

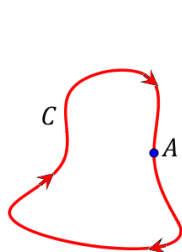
#### 6.4.1 Independencia de la trayectoria

Vimos que la integral de línea de un campo vectorial conservativo en una región  $D$ , a lo largo de una curva  $C$ , depende sólo del punto inicial y del punto final de la curva, sin importar la trayectoria que va desde el extremo inicial hasta el extremo final de la curva. Con respecto a estos temas, daremos algunas definiciones:

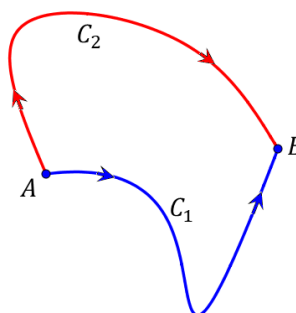
**Definición 6.4.1 — Independencia de la trayectoria.** Si  $\vec{F}$  es un campo vectorial continuo definido en una región  $D$ , diremos que la integral de línea de  $\vec{F}$  es *independiente de la trayectoria* en  $D$ , si  $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  para cualquier par de trayectorias  $C_1$  y  $C_2$  en  $D$ , que tengan el mismo punto inicial y el mismo punto final.

**(C)** Si  $\vec{F}$  es un campo vectorial conservativo en una región  $D$ , entonces la integral de línea de  $\vec{F}$  es independiente de la trayectoria en  $D$ . Justificarlo.

**Definición 6.4.2 — Curvas cerradas.** Decimos que una curva  $C$  en  $D$ , parametrizada por la función vectorial  $\vec{r}(t)$ , con  $a \leq t \leq b$ , es *cerrada* si su punto final coincide con su punto inicial, esto es, si  $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ .



(a) Curva cerrada.



(b) Dos caminos que comienzan en A y terminan en B.

Supongamos que  $\vec{F}$  sea un campo continuo en una región  $D$  y que la integral de línea de  $\vec{F}$  sea independiente de la trayectoria en  $D$ , nos preguntamos ¿qué valor toma  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  si  $C$  es una curva cerrada en  $D$ ?

Para analizar el valor de la integral de línea, elijamos dos puntos cualquiera A y B en la curva cerrada  $C$  y consideremos los dos trozos de curva en los que queda dividida  $C$ : la trayectoria  $C_1$  que va desde A hasta B, y a continuación la trayectoria  $C_2$  que va desde B hasta A. Teniendo en cuenta que  $C = C_1 \cup C_2$ , se tiene:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{-C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Notemos que la trayectoria  $-C_2$  (o sea,  $C_2$  recorrida en sentido inverso) va desde A hasta B, es decir que tiene punto inicial A y punto final B. Como el campo es independiente de la trayectoria,  $\int_{-C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ . Tenemos entonces:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

O sea que si  $\vec{F}$  es independiente de la trayectoria en  $D$ , el valor de la integral de línea de  $\vec{F}$  sobre cualquier curva cerrada en  $D$ , es cero.

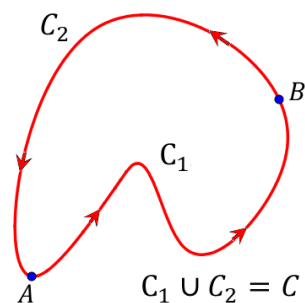


Figura 6.9: La curva  $C$  puede dividirse en dos tramos complementarios.

Ahora veamos la situación recíproca: supongamos que  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$  para cualquier curva cerrada  $C \subset D$ , ¿será la integral de línea de  $\vec{F}$  independiente de la trayectoria en  $D$ ? Tomemos dos trayectorias cualquiera,  $C_1$  y  $C_2$  en la región  $D$ , que vayan ambas desde  $A$  hasta  $B$ , y llamemos  $C$  a la curva formada por  $C_1$  (desde  $A$  hasta  $B$ ) seguida por  $-C_2$  (desde  $B$  hasta  $A$ ). Como  $C = C_1 \cup -C_2$ :

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{-C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

pero como  $C$  es una curva cerrada (el punto final coincide con el punto inicial) en  $D$ , se tiene  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ , por lo que  $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ .

De esta forma hemos demostrado el siguiente teorema:

**Teorema 6.4.3** Supongamos que  $\vec{F}$  es un campo vectorial continuo en una región  $D$ . La integral de línea de  $\vec{F}$  es *independiente de la trayectoria* en  $D$  si y sólo si  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$  para cualquier curva cerrada  $C$  en  $D$ .

**C** Si  $\vec{F}$  es un campo vectorial conservativo en una región  $D$ , entonces la integral de línea de  $\vec{F}$  a lo largo de cualquier curva cerrada  $C$  en  $D$  se anula, es decir:  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ . Justificarlo.

Nos preguntamos ahora si existen otros campos vectoriales, distintos de los campos conservativos, tales que sus integrales de línea sean independientes de la trayectoria.

Enunciaremos el siguiente teorema, que afirma que los únicos campos vectoriales que son independientes de la trayectoria son los conservativos. En este teorema se supone que el campo  $\vec{F}$  está definido en una región  $D$  abierta y conexa. Decimos que una región abierta  $D$  es conexa si cualquier par de puntos de  $D$  se puede unir mediante una curva suave que se encuentra en  $D$ .

**Teorema 6.4.4** Supongamos que  $\vec{F}$  es un campo vectorial continuo en una región conexa abierta  $D$ . Si la integral de línea de  $\vec{F}$  es *independiente de la trayectoria* en  $D$ , entonces  $\vec{F}$  es un campo vectorial conservativo en  $D$ , es decir, existe una función potencial  $f$  tal que  $\vec{\nabla}f = \vec{F}$ .

Supongamos que  $\vec{F}$  es un campo vectorial continuo en una región abierta y conexa  $D$ , entonces el siguiente diagrama resume los resultados de los dos últimos teoremas:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \text{ es independiente de la trayectoria en } D \Leftrightarrow \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = \vec{\nabla}f \text{ en } D$$

**C** Dada la importancia que tienen los campos conservativos y observando la conveniencia y facilidad de evaluar integrales de línea de campos conservativos, nos formulamos dos preguntas:

1. En la práctica, ¿cómo podemos determinar si un campo  $\vec{F}$  es conservativo o no?
2. Si  $\vec{F}$  es un campo conservativo, ¿cómo encontramos una función potencial, es decir una función  $f$  tal que  $\vec{F} = \vec{\nabla}f$ ?

Supongamos que se sabe que  $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$  es conservativo, donde  $P$  y  $Q$  tienen derivadas parciales continuas de primer orden. Entonces existe una función  $f$ , tal que  $\vec{F} = \vec{\nabla}f$ , es decir:

$$P = \frac{\partial f}{\partial x} \quad y \quad Q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Por lo tanto, aplicando el teorema de Clairaut,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Tenemos entonces el siguiente teorema:

**Teorema 6.4.5** Supongamos que  $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$  es un campo conservativo en una región abierta  $D \subset \mathbb{R}^2$ , donde sus funciones componentes  $P(x, y)$  y  $Q(x, y)$  tienen derivadas parciales de primer orden continuas, entonces se cumple que:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

para todo  $(x, y) \in D$ .

Este resultado expresa una condición necesaria para que un campo sea conservativo y sirve para demostrar, por ejemplo, que un campo no es conservativo.

Buscamos ahora una condición suficiente, o sea un teorema recíproco del anterior. Para ello necesitamos dos nuevos conceptos: *curva simple* y *región simplemente conexa*.

**Definición 6.4.3 — Curvas simples y regiones simplemente conexas.** Una *curva simple* es una curva que no se corta a sí misma en ningún lugar entre sus puntos extremos. Una *región simplemente conexa* del plano es una región  $D$  conexa tal que toda curva cerrada simple en  $D$  puede contraerse a un punto sin salir de  $D$ . Intuitivamente, las regiones simplemente conexas son regiones sin agujeros que puedan ser atrapados por una curva cerrada, y no puede estar formada por piezas separadas. Por ejemplo, todo el plano es una región simplemente conexa.

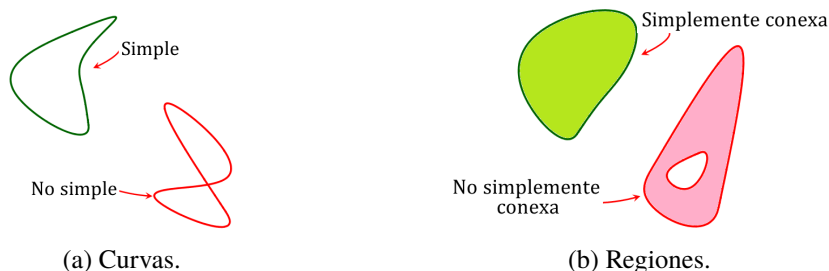


Figura 6.10: Ejemplos de curvas simples y regiones simplemente conexas.

Enunciamos entonces un teorema para regiones  $D$  simplemente conexas, que da un método adecuado para comprobar si un vectorial en  $\mathbb{R}^2$  es conservativo o no:

**Teorema 6.4.6** Sea  $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$  un campo vectorial definido en una región  $D$  abierta y simplemente conexa del plano. Sus funciones componentes  $P(x, y)$  y  $Q(x, y)$  tienen derivadas parciales de primer orden continuas en  $D$  que satisfacen:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

para todo  $(x, y) \in D$ . Entonces  $\vec{F}$  es un campo conservativo en  $D$ .

- **Ejemplo 6.17** Determinar si el campo vectorial  $\vec{F}(x, y) = e^{xy} \vec{i} + e^{x+y} \vec{j}$  es un campo conservativo en su dominio  $D$ .

$\vec{F}$  es un campo definido y continuo en todo el plano, por lo que su dominio es  $D = \mathbb{R}^2$ . Las funciones componentes de  $\vec{F}$  son:  $P(x, y) = e^{xy}$  y  $Q(x, y) = e^{x+y}$ , con derivadas parciales continuas en  $D$ . En primer lugar calcularemos  $\frac{\partial P}{\partial y}$  y  $\frac{\partial Q}{\partial x}$ , porque en el caso de que ambas derivadas parciales no coincidan en  $D$ , el campo no será conservativo (justificar!). En este caso, tenemos:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x e^{xy}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^{x+y}$$

Si  $\vec{F}$  fuera conservativo, se debería cumplir:  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  en todo  $D$ . Por lo tanto,  $\vec{F}$  no es conservativo en  $D$ . ■

En el siguiente ejemplo, mostraremos un método para hallar una función potencial para un campo conservativo en el plano.

- **Ejemplo 6.18** Consideremos el campo vectorial  $\vec{F}(x, y) = (2x \cos y) \vec{i} - (x^2 \sin y) \vec{j}$ .  
a) Determinar si  $\vec{F}$  es un campo conservativo en su dominio  $D$ . b) Si  $\vec{F}$  es un campo conservativo en  $D$ , encontrar una función potencial para  $\vec{F}$ . c) Calcular  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , donde  $C$  es la curva definida por  $\vec{r}(t) : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $\vec{r}(t) = e^{t-1} \vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{t}\right) \vec{j}$ .

a) Igual que en el ejemplo anterior,  $\vec{F}$  es un campo continuo en todo el plano, por lo que su dominio es  $D = \mathbb{R}^2$ . Las funciones componentes de  $\vec{F}$  son:  $P(x, y) = 2x \cos y$  y  $Q(x, y) = -x^2 \sin y$ , que tienen derivadas parciales continuas. En primer lugar calcularemos  $\frac{\partial P}{\partial y}$  y  $\frac{\partial Q}{\partial x}$ .  
Se tiene:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2x \sin y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2x \sin y$$

Al ser  $D = \mathbb{R}^2$  una región abierta y simplemente conexa, se puede aplicar el teorema estudiado y teniendo en cuenta que  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  deducir que  $\vec{F}$  es un campo conservativo. O sea que  $\vec{F}$  tiene función potencial  $f$ , de modo que  $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ .

b) Para encontrar la función potencial partimos de la ecuación:  $\vec{\nabla} f = \vec{F}$ , es decir,

$$f_x(x, y) = 2x \cos y \quad f_y(x, y) = -x^2 \sin y$$

Integrando la primera de las expresiones con respecto a  $x$ , obtenemos:

$$f(x, y) = x^2 \cos y + h(y)$$

Notar que la constante de integración es constante con respecto a  $x$ , es decir es una función de  $y$ , que llamamos  $h(y)$ . A continuación derivamos esta expresión con respecto a  $y$  (para comparar con la expresión que ya tenemos de  $f_y$ ):

$$f_y(x, y) = -x^2 \operatorname{sen} y + h'(y)$$

Comparando tenemos que  $h'(y) = 0$ , y por lo tanto  $h(y) = c$ , donde  $c$  es un valor constante. Reemplazando en  $f(x, y)$  tenemos que,  $f(x, y) = x^2 \cos y + c$  es una función potencial de  $\vec{F}$ .

c) Como  $\vec{F} = \vec{\nabla} f$  es un campo continuo, podemos aplicar el teorema fundamental para integrales de línea. Es decir que,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(2)) - f(\vec{r}(1))$$

donde hemos usado el hecho que la curva  $C$  comienza en  $\vec{r}(1)$  y termina en  $\vec{r}(2)$ . Ahora calculamos:

$$\vec{r}(1) = (e^{1-1}, \frac{\pi}{1}) = (1, 0) \quad \text{y} \quad \vec{r}(2) = (e^{2-1}, \frac{\pi}{2}) = (e, 1)$$

Con lo cual:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(e, 1) - f(1, 0) = e^2 \cos(1) - 1$$

ya que  $f(x, y) = x^2 \cos y$  es una función potencial para  $\vec{F}$ . Evidentemente, esta técnica es más fácil que calcular directamente la integral de línea. ■

Supongamos que  $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$  es un campo vectorial conservativo en una región de  $E \subset \mathbb{R}^3$ . ¿Cuál es el método para hallar una función potencial de  $\vec{F}$ ? El siguiente ejemplo muestra que la técnica para encontrar la función potencial es muy semejante a la utilizada para campos vectoriales conservativos de  $\mathbb{R}^2$ .

■ **Ejemplo 6.19** Determinar una función potencial para el campo conservativo

$$\vec{F}(x, y, z) = (e^x \cos y + yz) \vec{i} + (xz - e^x \operatorname{sen} y) \vec{j} + (xy + z) \vec{k}$$

Las funciones componentes de  $\vec{F}$  son:

$$P(x, y) = e^x \cos y + yz, \quad Q(x, y) = xz - e^x \operatorname{sen} y \quad R(x, y) = xy + z$$

Como  $\vec{F}$  es un campo conservativo, entonces existe una función potencial  $f$  que satisface:

$\vec{\nabla} f = \vec{F}$ . Esto significa que:

$$f_x(x, y, z) = e^x \cos y + yz, \quad f_y(x, y, z) = xz - e^x \operatorname{sen} y \quad f_z(x, y, z) = xy + z$$

Integrando  $f_x$  con respecto a  $x$ , obtenemos

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + yzx + g(y, z)$$

donde la constante de integración, es constante con respecto a  $x$ , pero es una función de las variables  $y$  y  $z$ , que hemos llamado  $g(y, z)$ . Entonces derivando la última ecuación con respecto a  $y$  obtenemos:

$$f_y(x, y, z) = -e^x \operatorname{sen} y + zx + g_y(y, z)$$

y una comparación con la  $f_y$  que ya tenemos, da:

$$g_y(y, z) = 0$$

Entonces  $g(y, z) = h(z)$ , y podemos escribir:

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + yzx + h(z)$$

Finalmente, derivando con respecto a  $z$  y comparando con la  $f_z$ , obtenemos  $h'(z) = z$  y por lo tanto  $h(z) = \frac{z^2}{2} + c$ , donde  $c$  es un valor constante. Así una función potencial del  $\vec{F}$  es:

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + yzx + \frac{z^2}{2} + c$$

Verificar que  $\vec{\nabla} f = \vec{F}$ .

■

### Ejercicios

- En los siguientes casos, determine si  $\vec{F}$  es un campo vectorial conservativo en todo el plano:
  - $\vec{F}(x, y) = (x^3 + 4xy) \vec{i} + (4xy - y^3) \vec{j}$
  - $\vec{F}(x, y) = -y \vec{i} + x \vec{j}$
  - $\vec{F}(x, y) = (ye^x + \operatorname{sen} y) \vec{i} + (e^x + x \cos y) \vec{j}$
- Determine si los siguientes campos vectoriales son conservativos, y en caso afirmativo hallar una función potencial para  $\vec{F}$ :
  - $\vec{F}(x, y) = (y, x)$
  - $\vec{F}(x, y) = (y, 1)$
  - $\vec{F}(x, y) = (x - 2xy, y^2 - x^2)$
  - $\vec{F}(x, y, z) = (4x - z, 3y + z, y - x)$
- Muestre que el campo vectorial  $\vec{F}(x, y) = (1 + xy)e^{xy} \vec{i} + (e^y + x^2 e^{xy}) \vec{j}$  es conservativo en todo el plano, y halle la familia de funciones potenciales para  $\vec{F}$ .
- Encuentre la familia de funciones potenciales para los siguientes campos vectoriales y evalúe  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  en cada caso:
  - $\vec{F}(x, y) = y \vec{i} + (x + 2y) \vec{j}$   
 $C$  es la semicircunferencia superior que comienza en  $(0, 1)$  y termina en  $(2, 1)$ .
  - $\vec{F}(x, y, z) = (2xy^3z^4) \vec{i} + (3x^2y^2z^4) \vec{j} + (4x^2y^3z^3) \vec{k}$



$$C : x(t) = t, \quad y(t) = t^2, \quad z(t) = t^3; \text{ con } 0 \leq t \leq 2$$

5. Demuestre que la integral de línea  $\int_C [2x \operatorname{sen} y dx + (x^2 \cos y - 3y^2) dy]$ , es independiente de la trayectoria en  $D$  y evalúe la integral, donde  $C$  es una trayectoria arbitraria que va desde  $(-1, 0)$  hasta  $(5, 1)$ .
6. Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerzas  $\vec{F}(x, y) = \left(\frac{y^2}{x^2}\right) \vec{i} - \left(\frac{2y}{x}\right) \vec{j}$  al mover un objeto desde  $A(1, 1)$  hasta  $B(4, -2)$ .
7. Dado el campo vectorial  $\vec{F}(x, y, z) = z \cos(xz) \vec{i} + e^y \vec{j} + x \cos(xz) \vec{k}$ :
  - a) Determine si  $\vec{F}$  es conservativo en todo  $\mathbb{R}^3$ .
  - b) En caso afirmativo halle una función potencial para  $\vec{F}$ .
  - c) Calcule la integral de línea de  $\vec{F}$  a lo largo de un tramo de hélice que va desde  $\left(\frac{1}{2}, 0, \pi\right)$  hasta  $\left(\frac{1}{2}, 0, 3\pi\right)$ .

## 6.5 Integral de superficie de un campo vectorial

En la Sección 4 de el Capítulo 5 definimos la integral de superficie de una función escalar  $f$  sobre una superficie paramétrica  $S$  en el espacio, denotada simbólicamente por  $\iint_S f dS$ , donde  $dS$  indica un elemento de superficie. Recordemos que formalmente se define como el límite de las sumas dobles de Riemann de la función  $f$  evaluada en puntos de la superficie  $S$ , multiplicada por el área  $\Delta S$  del elemento de superficie. A los fines prácticos, si  $\vec{r}(u, v)$ , con  $(u, v) \in D_{uv}$ , es una parametrización de la superficie  $S$ , se calcula mediante la siguiente integral doble (en el plano paramétrico  $u, v$ ):  $\iint_{D_{uv}} f(\vec{r}(u, v)) |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| du dv$ .

Por otro lado, en la Sección 6.3 de este capítulo hemos trabajado la integral de línea de un campo vectorial

$\vec{F}$  a lo largo de una curva  $C$  del espacio, denotada simbólicamente por  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ . En la práctica, buscamos una parametrización de la curva  $C$ , por ejemplo  $\vec{r}(t)$  con  $t \in [a, b]$ , luego la integral se calcula mediante:  $\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$ .

Es el turno ahora de definir la integral de superficie de un campo vectorial, también conocida como flujo del campo a través de la superficie.

**Definición 6.5.1** Sea  $\vec{F}(x, y, z)$  un campo vectorial con dominio  $E \subset \mathbb{R}^3$ , y sea  $S \subset E$  una superficie paramétrica en el espacio. Sea  $S : \vec{r}(u, v)$ , con  $(u, v) \in D_{uv}$ , una parametrización de la superficie. La integral de superficie (o flujo) de  $\vec{F}$  a través de  $S$  está dada por

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \\ &= \iint_{D_{uv}} \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot (\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)) du dv. \end{aligned}$$

En la definición,  $d\vec{S} = \vec{n} dS$  representa un vector de módulo  $dS$  (elemento de superficie) y con dirección perpendicular al mismo dada por el vector normal inducido por la parametrización,  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$  (repasar lo visto en la Sección 4.1 del Capítulo 5). Luego, dado que se tiene el producto escalar  $\vec{F} \cdot \vec{n}$ , podemos interpretar la integral del campo vectorial a través de la superficie como el flujo de

la componente del campo que es *normal* a la superficie.<sup>1</sup>

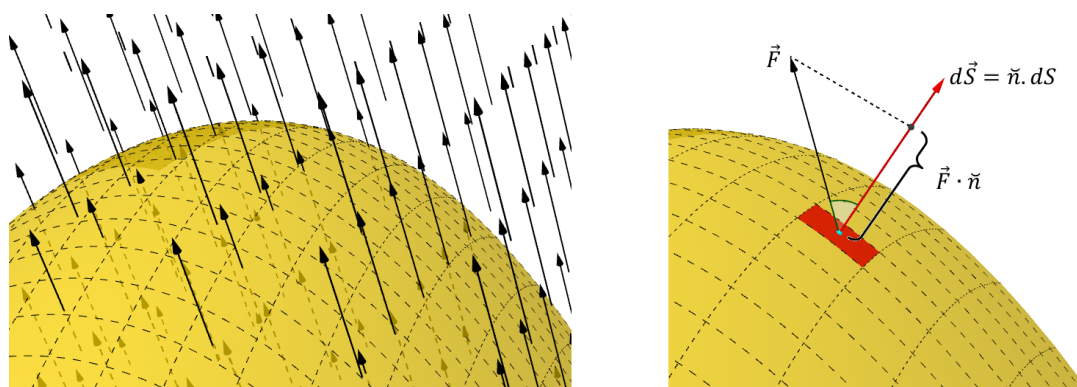


Figura 6.11: La integral de superficie del campo vectorial  $\vec{F}$  a través de la superficie paramétrica  $S$  orientada según  $\vec{n}$  acumula, para cada punto de la superficie, el valor de la componente normal del campo multiplicado por el área del elemento de superficie.



En el siguiente recurso se modeliza el paso de un fluido a través de una superficie plana esquematizando el campo de velocidades.

<http://ggbm.at/smaREQkh>

La integral de superficie de un campo vectorial da como resultado un número real (el resultado es un escalar). Se pueden probar las siguientes propiedades:

**Teorema 6.5.1 — Propiedades de las integrales de superficie.** Tres propiedades para integrales de superficies:

1. La integral de superficie de un campo vectorial no depende de la parametrización utilizada para la superficie, siempre que ésta sea cubierta una sola vez.
2. La integral de superficie de un campo vectorial a través de una superficie formada por dos trozos, es igual a la suma de las integrales de superficie de dicho campo a través de cada trozo. Simbólicamente,

$$\iint_{S_1 \cup S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

3. La integral de superficie de un campo vectorial depende de la orientación de la superficie, siendo

$$\iint_{-S} \vec{F} \cdot d\vec{S} = - \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

donde  $-S$  indica la superficie que tiene la misma representación gráfica que  $S$  pero con orientación opuesta (dicho de otro modo,  $S$  y  $-S$  representan las dos “caras” u orientaciones del mismo conjunto de puntos en el espacio).

**Ejercicio 6.8** Compare estas propiedades con las que corresponden a la integral de superficie de una función escalar. ¿Qué similitudes y diferencias observa? ■

<sup>1</sup>Recordar, de la Sección 6.3, que en el caso de la integral de línea de un campo vectorial a lo largo de una curva, podemos interpretarla como la integral de la componente del campo que es *tangencial* a la curva, dado que allí se tiene el producto escalar  $\vec{F} \cdot \vec{T}$ , siendo  $\vec{T}$  un vector tangente a la curva.

- **Ejemplo 6.20** Calcular  $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ , siendo  $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, \cosh^3(xyz))$  y  $S$  la superficie cilíndrica de eje  $z$  y radio 3, entre  $z = 0$  y  $z = 5$ , con orientación alejándose del eje del cilindro.

*Notar primeramente que, dado que cualquier elemento de superficie de un cilindro circular recto de eje  $z$  tiene vector normal perpendicular a dicho eje, se tiene que la tercera componente del vector  $d\vec{S}$  es nula. Una parametrización suave y que cubre  $S$  una sola vez, está dada mediante la función vectorial  $S : \vec{r}(\alpha, z) = (3 \cos \alpha, 3 \sin \alpha, z)$  con  $\alpha \in [0, 2\pi]$ ,  $z \in [0, 5]$ , y efectivamente el vector normal a esta superficie paramétrica resulta*

$$\vec{n} = \vec{r}_\alpha \times \vec{r}_z = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 \sin \alpha & 3 \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3 \cos \alpha, 3 \sin \alpha, 0)$$

*con tercera componente nula, esto es,  $\vec{n}$  es un vector horizontal en todo punto de la superficie cilíndrica dada.*

*Es importante verificar, antes de calcular el flujo del campo vectorial, que la parametrización utilizada asigne la orientación correcta de la superficie: variando  $\alpha$  de 0 a  $2\pi$  (y para cualquier parámetro  $z$ ) se verifica que el vector  $\vec{n}$  hallado apunta siempre alejándose del eje del cilindro, luego es correcto (sino, era necesario tomar el vector opuesto).*

*Al hacer el producto escalar entre el campo dado y  $\vec{n}$ , sólo sobreviven los dos primeros términos. La integral de superficie de  $\vec{F}$  a través de  $S$  se calcula reemplazando las variables  $x, y, z$  de  $\vec{F}$  por el valor que toman sobre la superficie:  $3 \cos \alpha$ ,  $3 \sin \alpha$  y  $z$ , respectivamente. Entonces queda por resolver la siguiente integral doble en los parámetros  $\alpha$  y  $z$ :*

$$\begin{aligned} & \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_{D_{\alpha z}} (3 \cos \alpha, 3 \sin \alpha, \cosh^3(9z \cos \alpha \sin \alpha)) \cdot (3 \cos \alpha, 3 \sin \alpha, 0) d\alpha dz \\ &= \iint_{[0, 2\pi] \times [0, 5]} (9 \cos^2(\alpha) + 9 \sin^2(\alpha) + 0) d\alpha dz \\ &= \int_0^5 \int_0^{2\pi} 9 d\alpha dz = 9 \alpha|_0^{2\pi} z|_0^5 = 90\pi \end{aligned}$$

■

- **Ejemplo 6.21** Calcular la integral de superficie del campo vectorial  $\vec{F}(x, y, z) = \vec{i}\frac{x}{4} + \vec{j}\frac{y}{4} + \vec{k}\frac{z}{4}$  a través de la superficie  $S$  dada por la porción del paraboloide  $4 - z = x^2 + y^2$  con  $z \geq 0$  y con orientación “hacia arriba”.

*En este caso la superficie  $S$  tiene una representación explícita de la forma  $S : z = g(x, y)$ ; dicho de otro modo,  $S$  es la parte en el semiespacio superior de la gráfica de la función  $g(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ . Adoptaremos la parametrización trivial, dada por la función vectorial*

$S : \vec{r}(x, y) = (x, y, 4 - x^2 - y^2)$ , con los parámetros  $x$  e  $y$  en el círculo  $D_{xy} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$ . Luego el vector normal a esta superficie paramétrica resulta:

$$\vec{n} = \vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = (2x, 2y, 1)$$

con tercera componente  $+1$ , lo que asegura que es un vector que apunta “hacia arriba” en todo punto de la superficie dada, esto es, para cualquier par de parámetros  $(x, y)$ . O sea que la parametrización utilizada asigna la orientación correcta de la superficie.

Luego la integral de superficie de  $\vec{F}$  a través de  $S$  resulta en la siguiente integral doble sobre el dominio paramétrico  $D_{xy}$ :

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \\ &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{4} (x, y, 4 - x^2 - y^2) \cdot (2x, 2y, 1) dx dy = \frac{1}{4} \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2 + 4) dx dy \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r^2 + 4) r dr d\theta = 6\pi \end{aligned}$$

En la última línea, resolvimos la integral doble por medio de coordenadas polares que facilitan el cálculo en este caso. ■

■ **Ejemplo 6.22** Hallar el flujo neto saliente de  $\vec{F}(x, y, z) = z\vec{i} + y\vec{j} + x\vec{k}$  a través de la superficie de la esfera unitaria centrada en el origen.

La superficie de la esfera de radio 1 centrada en  $O$  tiene una representación sencilla en coordenadas esféricas, siendo  $S : \rho = 1$  para todo par de valores de las variables angulares  $\phi$  y  $\theta$ . Haciendo  $\rho = 1$  en las ecuaciones de transformación de coordenadas esféricas a cartesianas, obtenemos

$$x = 1 \sen \phi \cos \theta \quad y = 1 \sen \phi \sen \theta \quad z = 1 \cos \phi$$

Luego tenemos  $x, y, z$  en términos de  $\phi, \theta$ , de modo que podemos tomar a los ángulos como parámetros. Una función vectorial que parametriza la superficie es entonces  $S : \vec{r}(\phi, \theta) = (\sen \phi \cos \theta, \sen \phi \sen \theta, \cos \phi)$  con  $\phi \in [0, \pi]$  y  $\theta \in [0, 2\pi]$ . El vector normal a esta superficie paramétrica resulta

$$\begin{aligned} \vec{n} = \vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos \phi \cos \theta & \cos \phi \sen \theta & -\sen \phi \\ -\sen \phi \sen \theta & \sen \phi \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= (\sen^2(\phi) \cos \theta, \sen^2(\phi) \sen \theta, \sen \phi \cos \phi) \end{aligned}$$

que tiene orientación saliendo de la esfera, tal como se pide. Notar que en este ejemplo  $S$  es una superficie cerrada (es la frontera de una región sólida); luego es orientable, y las dos

orientaciones posibles son “hacia afuera” y “hacia adentro” del sólido.

El producto escalar entre el campo vectorial (evaluado sobre la superficie) y el vector normal en cada punto da:

$$\vec{F}(\vec{r}(\phi, \theta)) \cdot \vec{n}(\phi, \theta) = \cos \phi \sin^2(\phi) \cos \theta + \sin \phi \sin \theta \sin^2(\phi) \sin \theta + \sin \phi \cos \theta \sin \phi \cos \phi.$$

Por lo tanto, el flujo neto saliente de  $\vec{F}$  a través de  $S$  es:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( 2 \sin^2(\phi) \cos \phi \cos \theta + \sin^3(\phi) \sin^2(\theta) \right) d\phi d\theta \\ &= 2 \int_0^\pi \sin^2(\phi) \cos \phi d\phi \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta + \int_0^\pi \sin^3(\phi) d\phi \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta = \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

¿Cuánto vale el flujo neto entrante del mismo campo a través de la superficie esférica unidad en el origen?

■

### Ejercicios

- Calcule la integral de superficie  $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ , para el campo vectorial  $\vec{F}(x, y, z)$  dado y la superficie orientada  $S$ :
  - $\vec{F}(x, y, z) = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$ , y  $S$  es la parte del paraboloide  $z = 4 - x^2 - y^2$  que se encuentra arriba del cuadrado  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$  con orientación “hacia arriba”.
  - $\vec{F}(x, y, z) = xze^y\vec{i} - xze^y\vec{j} + z\vec{k}$ ,  $S$  es la parte del plano  $x + y + z = 1$  que está en el primer octante, con orientación “hacia abajo”.
  - $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} - y\vec{j} + z^4\vec{k}$ ,  $S$  es la parte del cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  que está que está debajo del plano  $z = 1$ , con orientación alejándose del eje del cono.
- Halle el flujo saliente del campo vectorial  $\vec{F}(x, y, z)$  dado, a través de la superficie  $S$ :
  - $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{j} - z\vec{k}$  y la superficie  $S$  está formada por el paraboloide  $y = x^2 + z^2$ ,  $0 \leq y \leq 1$ , y el disco  $x^2 + z^2 \leq 1$ , con  $y = 1$ .
  - $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + 2y\vec{j} + 3z\vec{k}$  y  $S$  es el cubo de vértices  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ .
  - $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + 5z\vec{k}$  y  $S$  es la frontera de la región limitada por el cilindro  $x^2 + z^2 = 1$  y los planos  $y = 0$  y  $x + y = 2$ .

**Teorema 6.2.3** — Condiciones suficientes. Sea  $F = (P, Q, R)$  un campo vectorial en  $E \subset \mathbb{R}^3$ . Si  $F$  es irrotacional en  $E$  y además sus funciones componentes son de clase  $C^1$  en todo  $\mathbb{R}^3$ , entonces  $F$  es conservativo en  $\mathbb{R}^3$ .

lo que está en rojo no va, lo que esta en azul debe decir  $\mathbb{R}^3$ .