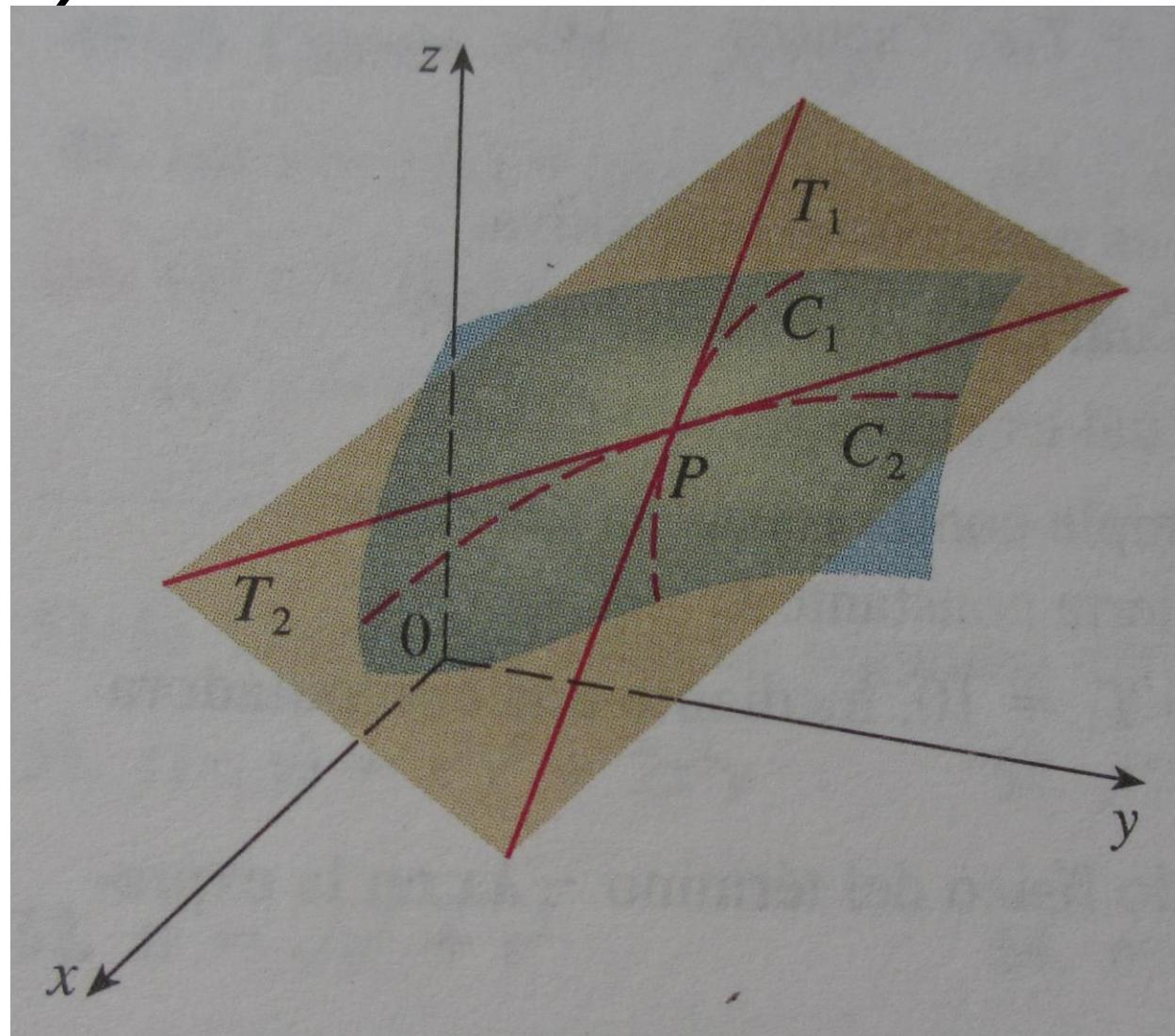


Diferenciabilidad, aproximación lineal y extremos

*Guía de Estudio N°5
MATEMÁTICA III - Curso 2019
FCAI-UNCuyo*

Diferenciabilidad y aproximación lineal

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE



en Stewart, J., Obr.cit.

OBSERVE y/o LEA e INTERPRETE

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

en Stewart, J., Obr.cit.

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

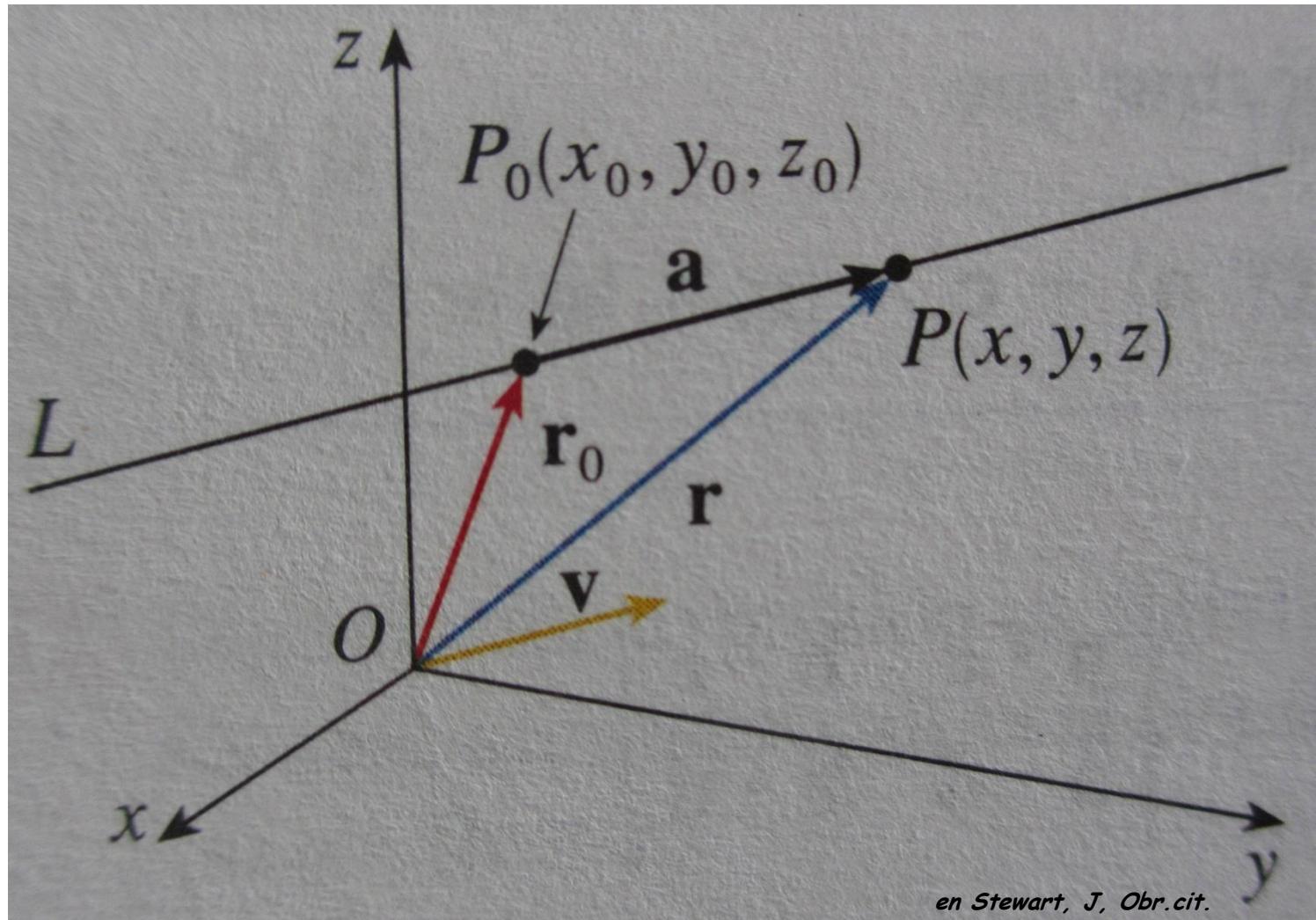
en Stewart, J., Obr.cit.

- 2** Suponga que las derivadas parciales de f son continuas. Una ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ es

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

en Stewart, J., Obr.cit.

OBSERVE y/o LEA e INTERPRETE



en Stewart, J, Obr.cit.

Diferenciabilidad y aproximación lineal

OBSERVE y/o LEA e INTERPRETE

$$\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle \quad \mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$$

$$\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle.$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$$

en Stewart, J, Obr.cit.

$$\langle x, y, z \rangle = \langle x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc \rangle$$

$$x = x_0 + at \quad y = y_0 + bt \quad z = z_0 + ct$$

en Stewart, J, Obr.cit.

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

en Stewart, J, Obr.cit.

7 DEFINICIÓN Si $z = f(x, y)$, entonces f es diferenciable en (a, b) si Δz se puede expresar en la forma

$$\Delta z = f_x(a, b) \Delta x + f_y(a, b) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

donde ε_1 y $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$.

$$dz = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$dz = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

en Stewart, J., Obr.cit.

En base a la definición: *¿Qué relación encuentras entre diferenciabilidad y continuidad?*

en Stewart, J., Obr.cit.

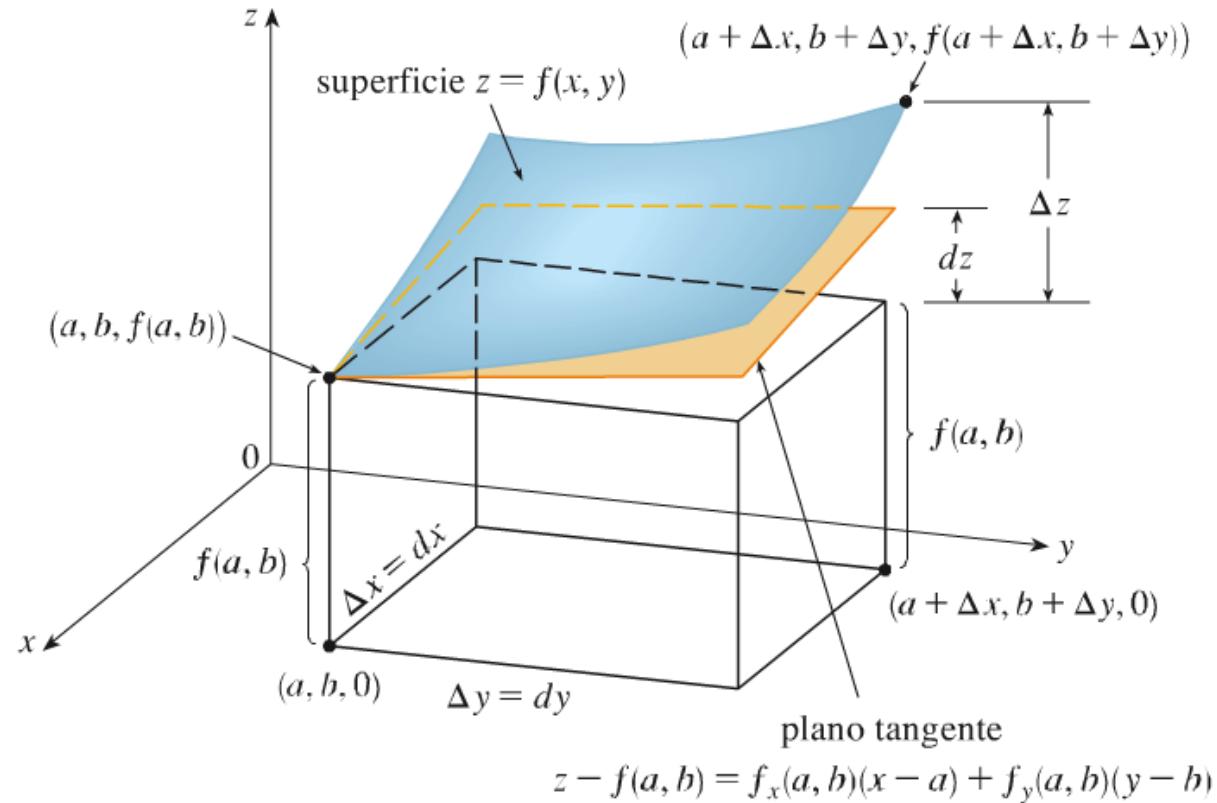
8 TEOREMA Si las derivadas parciales f_x y f_y existen cerca de (a, b) y son continuas en (a, b) , entonces f es diferenciable en (a, b) .

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

aproximación lineal o aproximación del plano tangente de f en (a, b) .

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

$$\Delta z \approx dz$$



$$z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Diferenciabilidad y aproximación lineal

OBSERVE y/o LEA e INTERPRETE

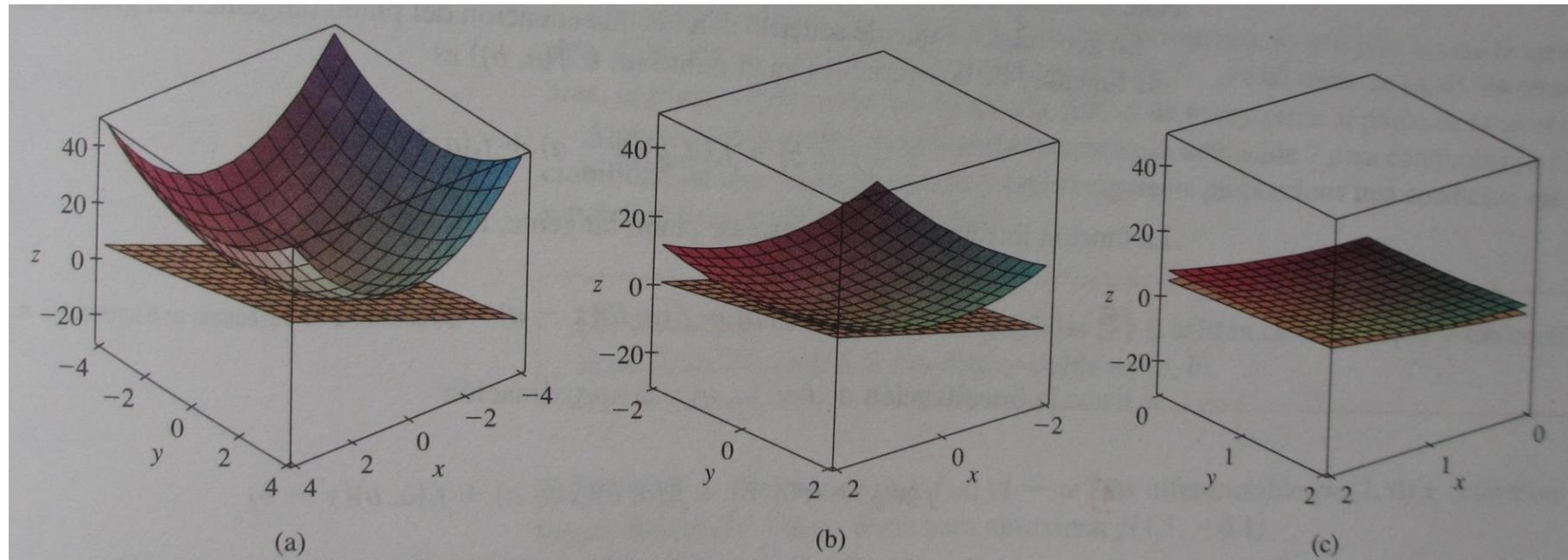
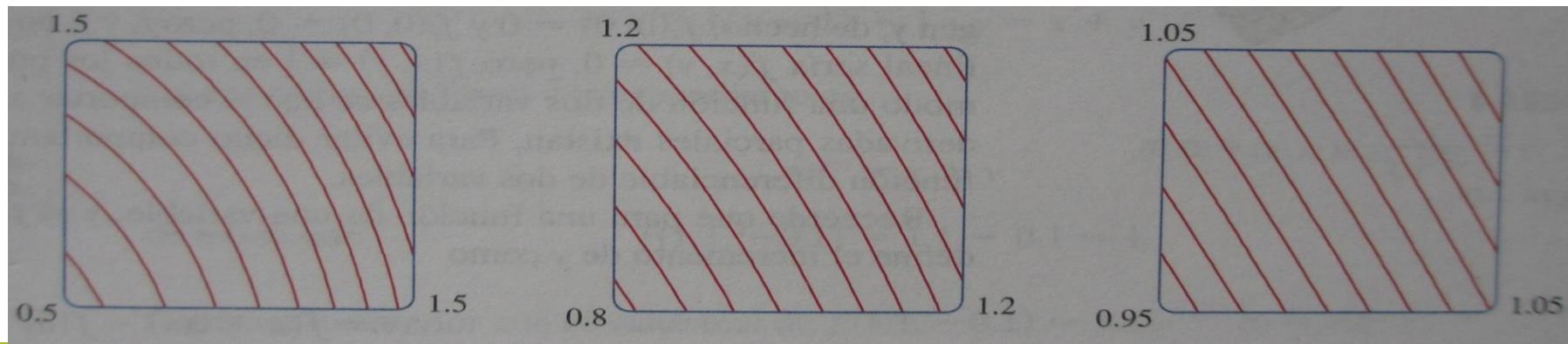


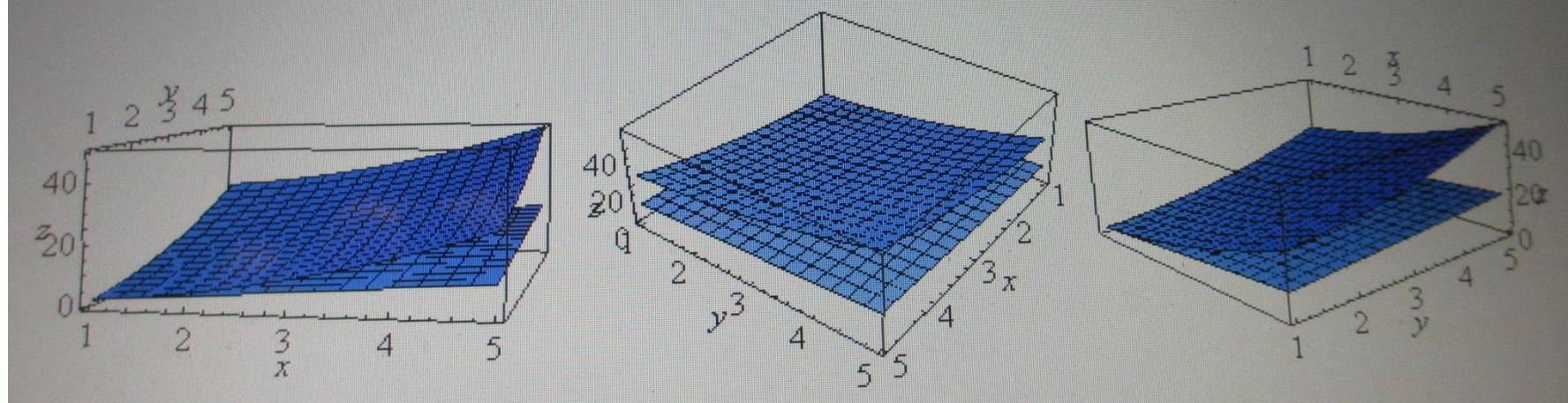
FIGURA 2 El paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ parece coincidir con su plano tangente a medida que se acerca a $(1, 1, 2)$ (en Stewart, J., Obr. cit.)



Diferenciabilidad y aproximación lineal

OBSERVE y/o LEA e INTERPRETE

```
Plot3D[{x^2 + y^2, 2 x + 2 y - 2}, {x, 1, 5}, {y, 1, 5}, AxesLabel -> {x, y, z}]
ContourPlot[x^2 + y^2, {x, 1, 5}, {y, 1, 5}, AxesLabel -> {x, y}]
ContourPlot[2 x + 2 y - 2, {x, 1, 5}, {y, 1, 5}, AxesLabel -> {x, y}]
```

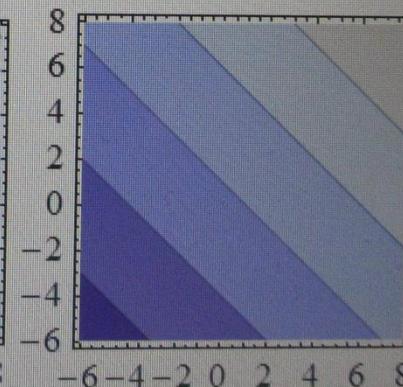
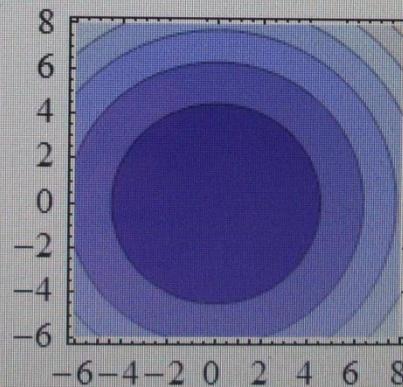
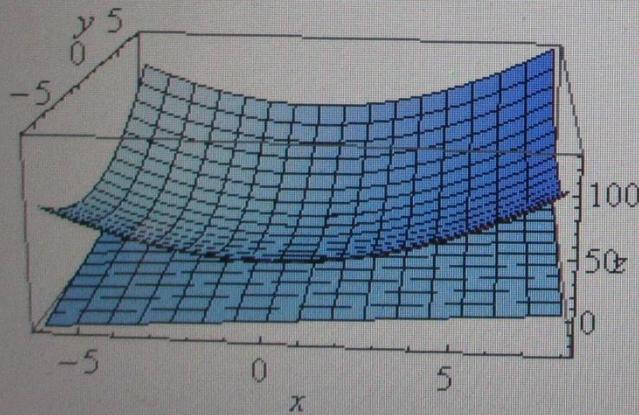


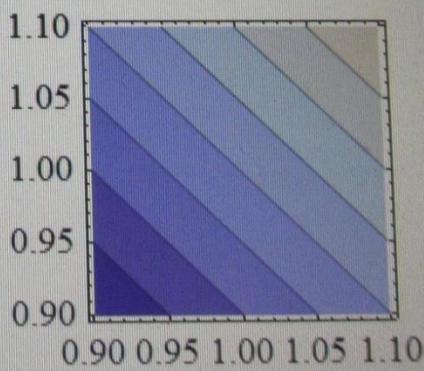
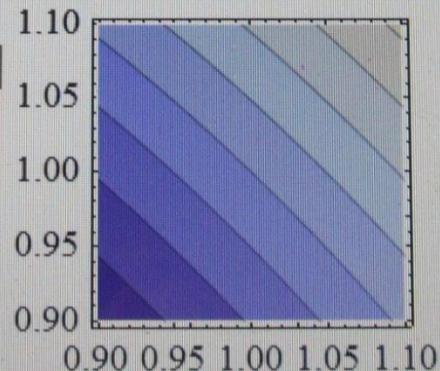
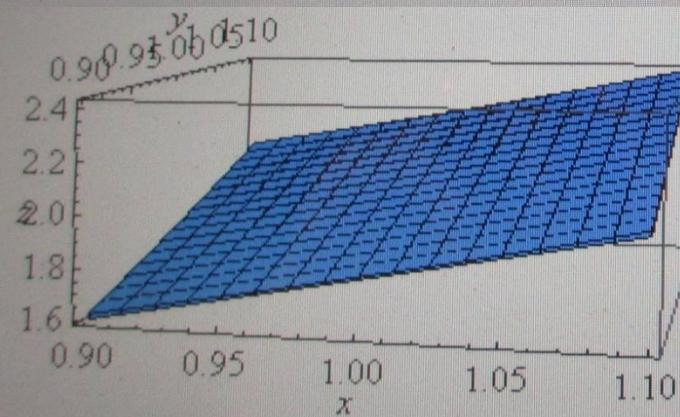
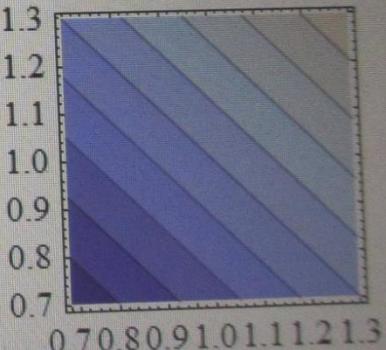
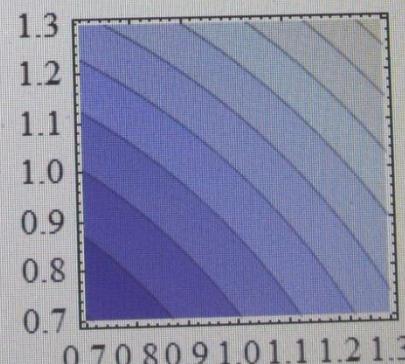
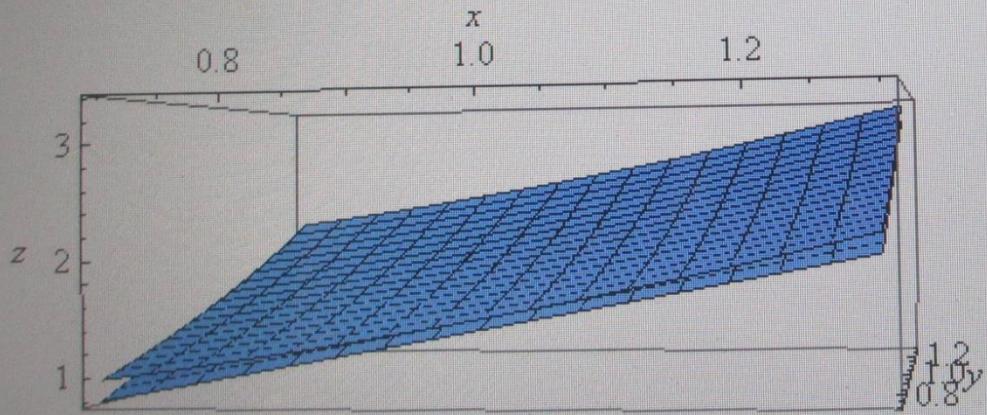
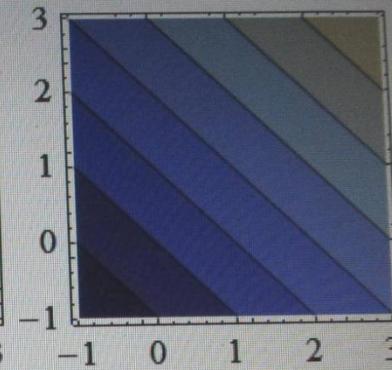
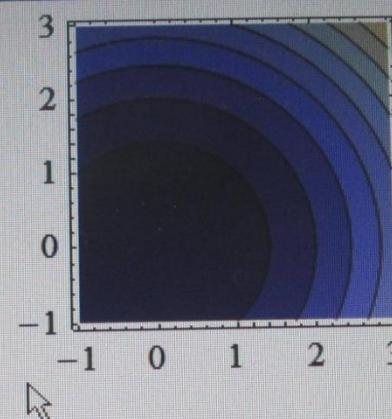
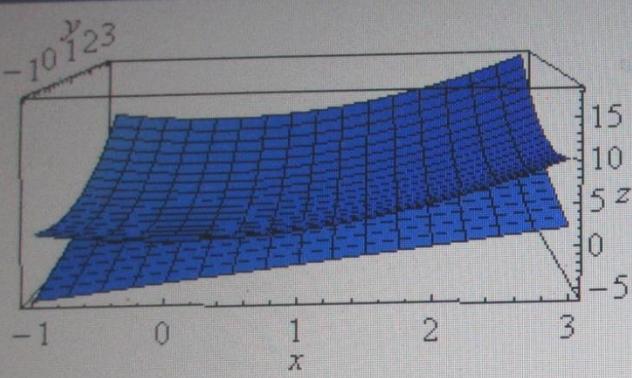
Diferenciabilidad y aproximación lineal

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

Explique su interpretación, incluyendo su análisis de dominio, diferenciabilidad, diferencial total y plano tangente en (1,1)

```
Plot3D[{x^2 + y^2, 2 x + 2 y - 2}, {x, -6, 8}, {y, -6, 8}, AxesLabel → {x, y, z}]
ContourPlot[x^2 + y^2, {x, -6, 8}, {y, -6, 8}, AxesLabel → {x, y}]
ContourPlot[2 x + 2 y - 2, {x, -6, 8}, {y, -6, 8}, AxesLabel → {x, y}]
```





EJEMPLO 3 En el principio de la sección 14.3, estudió el índice calorífico (temperatura percibida) I como una función de la temperatura real T y la humedad relativa H y se presentó la tabla siguiente de valores del National Weather Service.

		Humedad relativa (%)									
		50	55	60	65	70	75	80	85	90	
Temperatura real ($^{\circ}\text{F}$)	90	96	98	100	103	106	109	112	115	119	
	92	100	103	105	108	112	115	119	123	128	
	94	104	107	111	114	118	122	127	132	137	
	96	109	113	116	121	125	130	135	141	146	
	98	114	118	123	127	133	138	144	150	157	
	100	119	124	129	135	141	147	154	161	168	

Calcule una aproximación lineal para el índice calorífico $I = f(T, H)$ cuando T está cerca de 96°F y H está cerca del 70%. Mediante ella estime el índice calorífico cuando la temperatura es de 97°F y la humedad relativa es 72%.

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

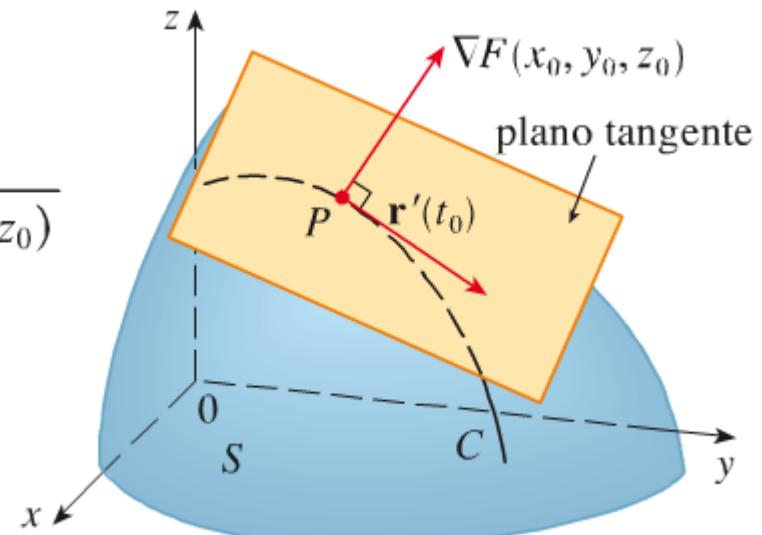
PLANOS TANGENTES A SUPERFICIES DE NIVEL $F(x, y, z) = k$

19 $F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$

en Stewart, J, Obr.cit.

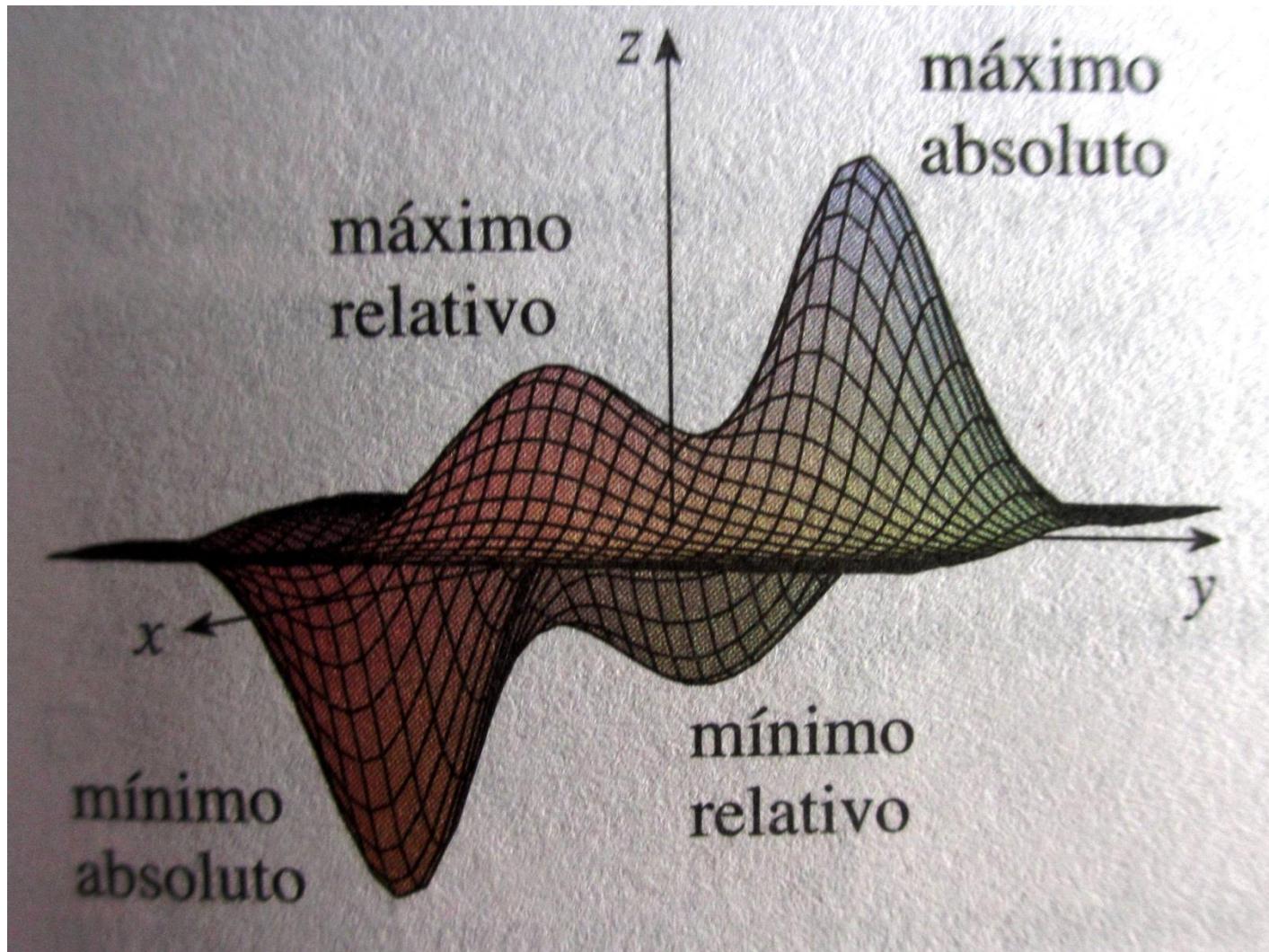
recta normal a S en P

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$



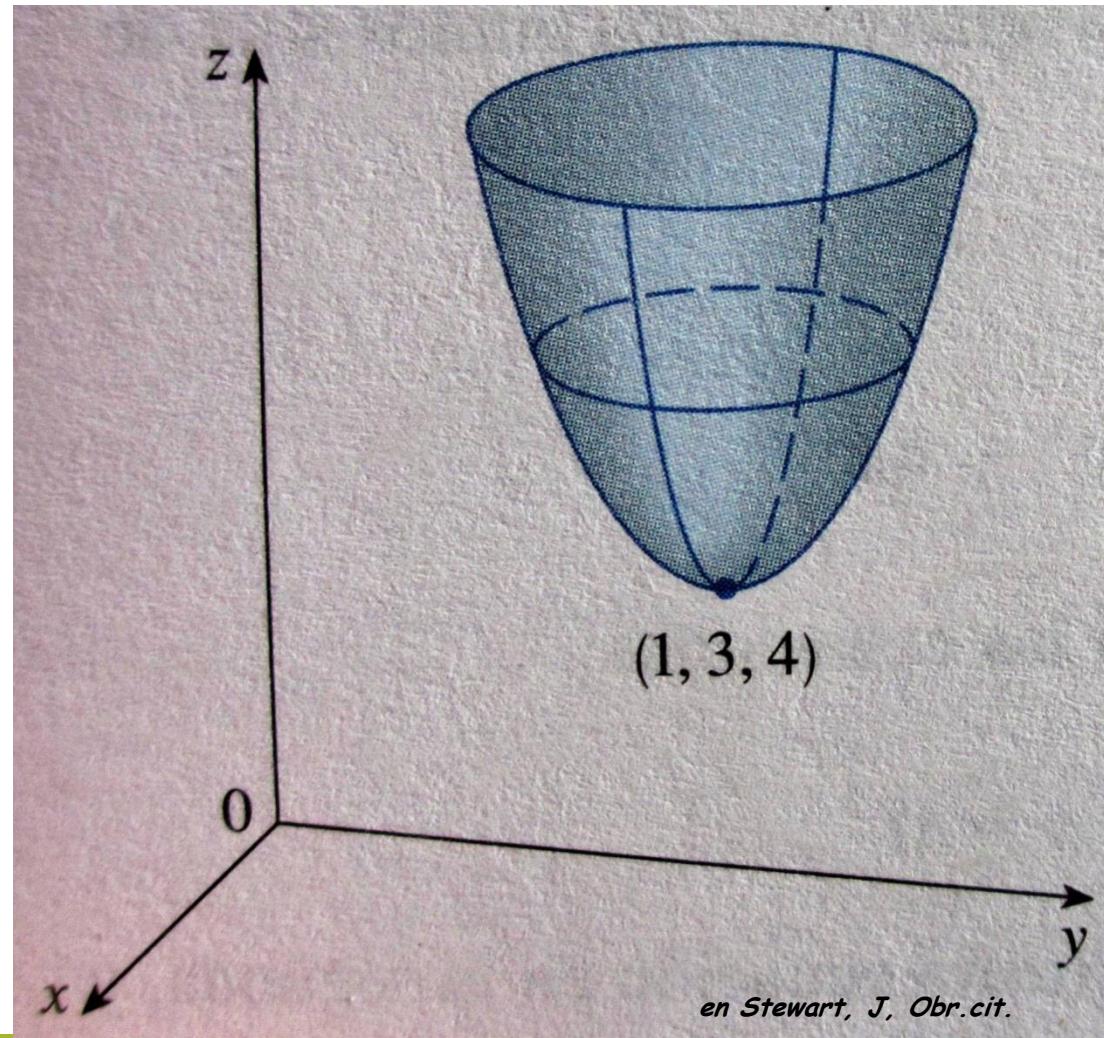
en Stewart, J, Obr.cit.

Extremos y optimización



Extremos y optimización

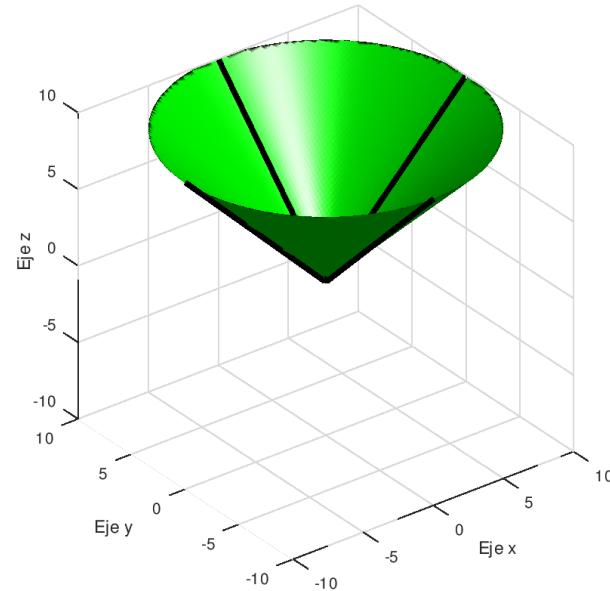
OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE



en Stewart, J, Obr.cit.

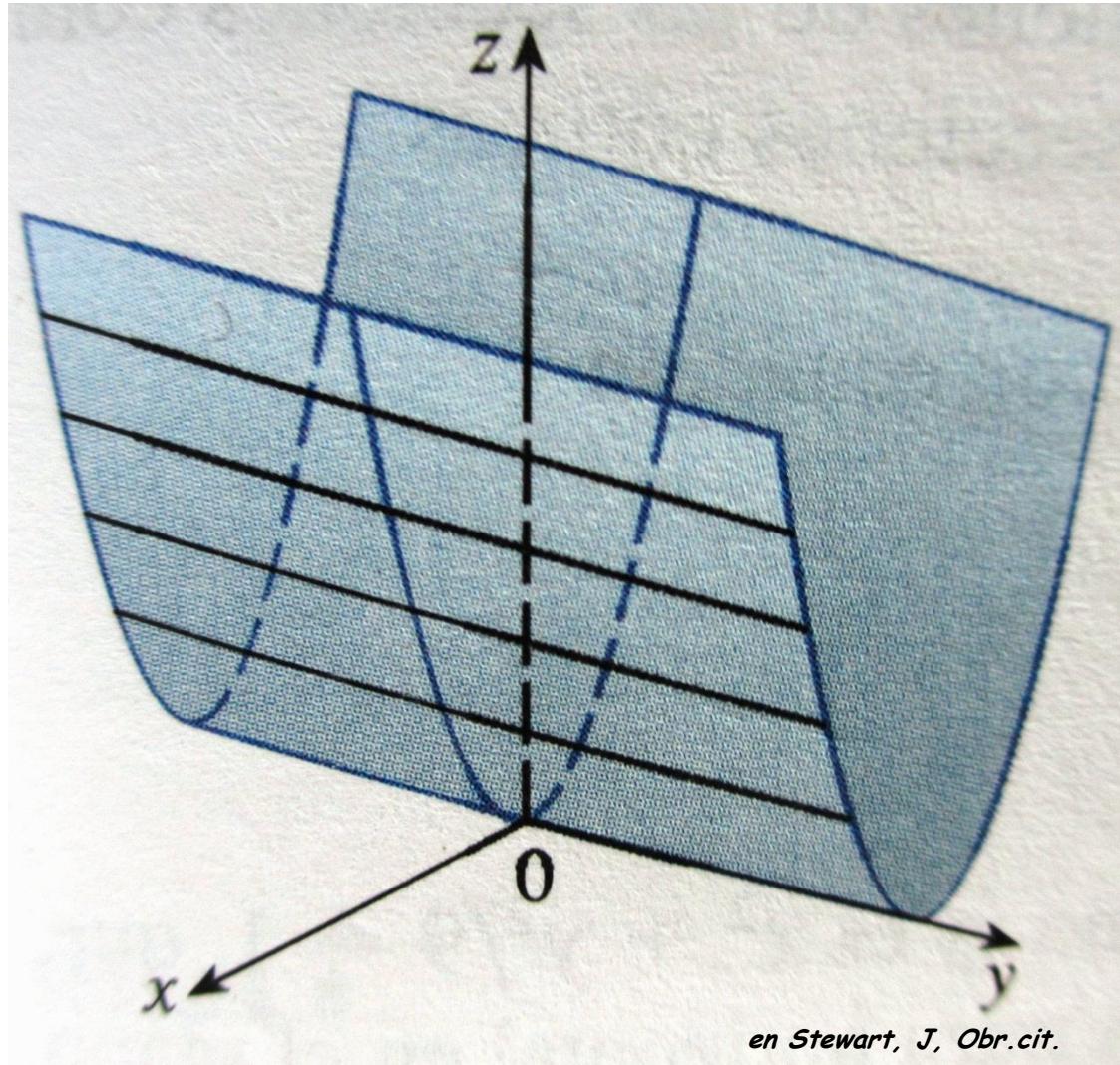
Extremos y optimización

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE



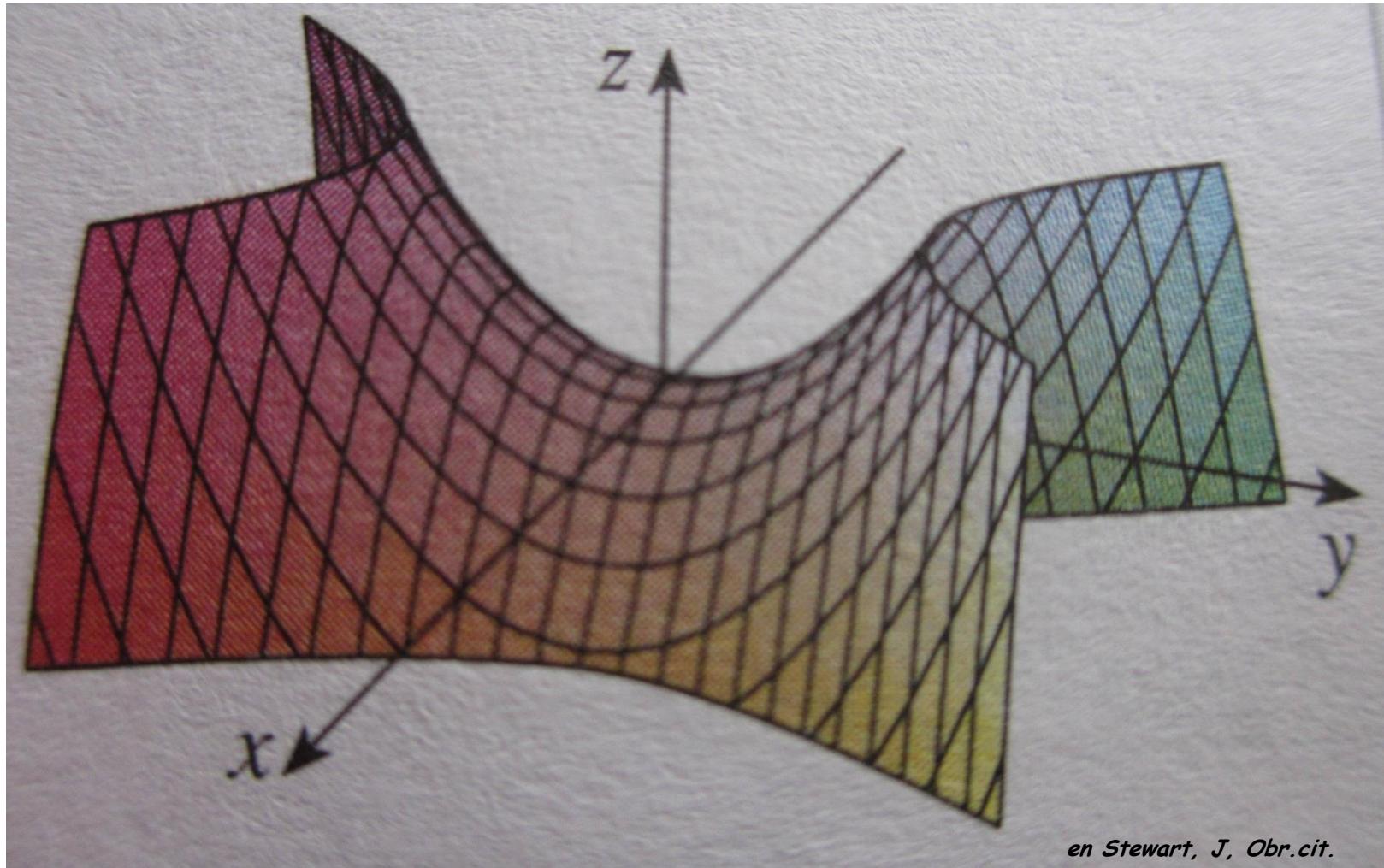
Extremos y optimización

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE



en Stewart, J. Obr.cit.

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE



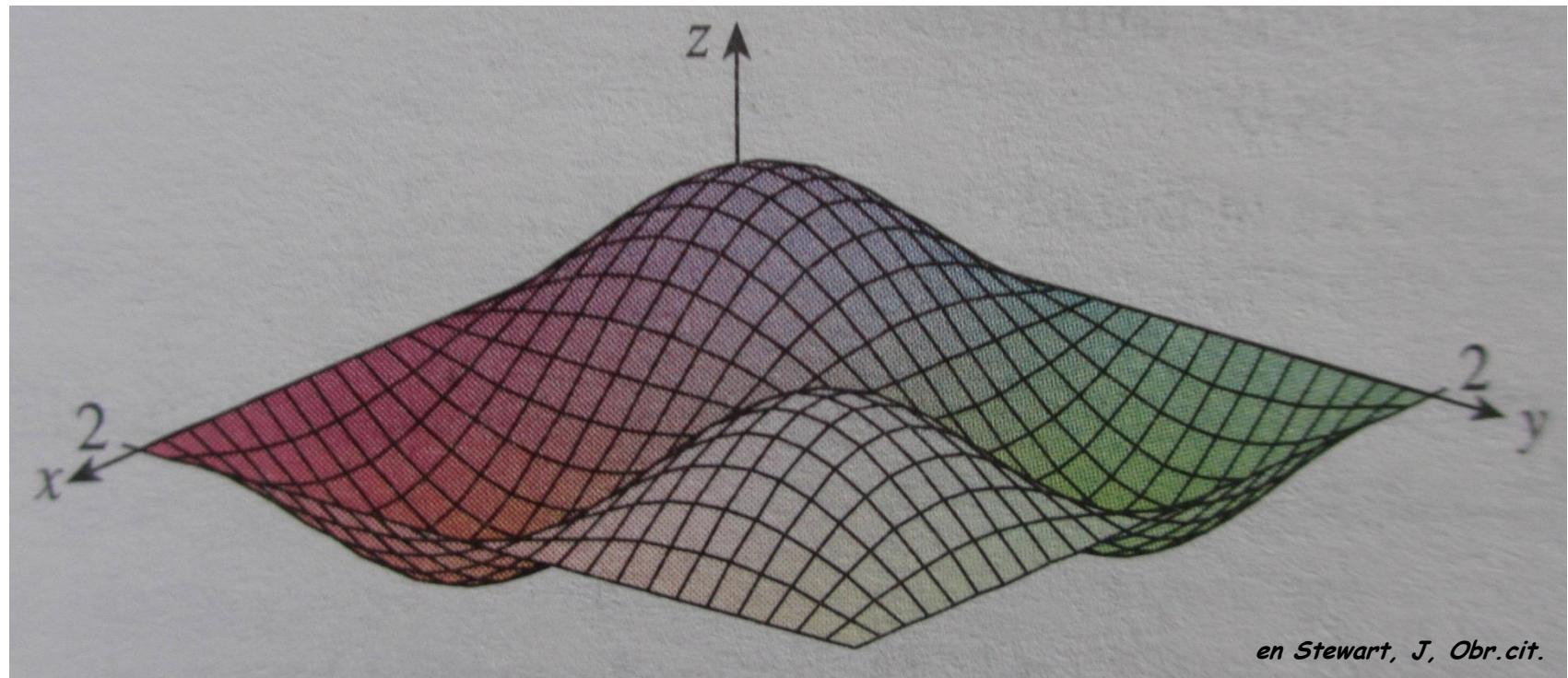
en Stewart, J, Obr.cit.

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

1 DEFINICIÓN Una función de dos variables tiene un **máximo relativo** en (a, b) si $f(x, y) \leq f(a, b)$ cuando (x, y) está cerca de (a, b) . [Esto quiere decir que $f(x, y) \leq f(a, b)$ para todos los puntos (x, y) en algún disco con centro (a, b) .] El número $f(a, b)$ recibe el nombre de **valor máximo relativo**. Si $f(x, y) \geq f(a, b)$ cuando (x, y) está cerca de (a, b) , entonces $f(a, b)$ es un **mínimo relativo** en (a, b) y $f(a, b)$ es un **valor mínimo relativo**.

Si las desigualdades de la definición 1 se cumplen para *todos* los puntos (x, y) en el dominio de f , entonces f tiene un **máximo absoluto**, o un **mínimo absoluto**, en (a, b) .

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE



en Stewart, J, Obr.cit.

2 TEOREMA Si f tiene un máximo relativo o un mínimo relativo en (a, b) y las derivadas parciales de primer orden existen allí, entonces $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$.

en Stewart, J, Obr.cit.

■ Observe que la conclusión del teorema 2 se puede establecer con la notación de los vectores gradiente como $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$.

en Stewart, J, Obr.cit.

Un punto (a, b) se llama **punto crítico** o *punto estacionario* de f si $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$, o si una de estas derivadas parciales no existe.

3 PRUEBA DE LA SEGUNDA DERIVADA Suponga que las segundas derivadas parciales de f son continuas en un disco de centro (a, b) , y suponga que $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$, es decir, (a, b) es un punto crítico de f . Sea

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

- (a) Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces $f(a, b)$ es un mínimo relativo.
- (b) Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces $f(a, b)$ es un máximo relativo.
- (c) Si $D < 0$, entonces $f(a, b)$ no es ni un máximo relativo ni un mínimo relativo.

NOTA 1 En caso de (c) el punto (a, b) se llama **punto silla** de f y la gráfica de f cruza el plano tangente en (a, b) .

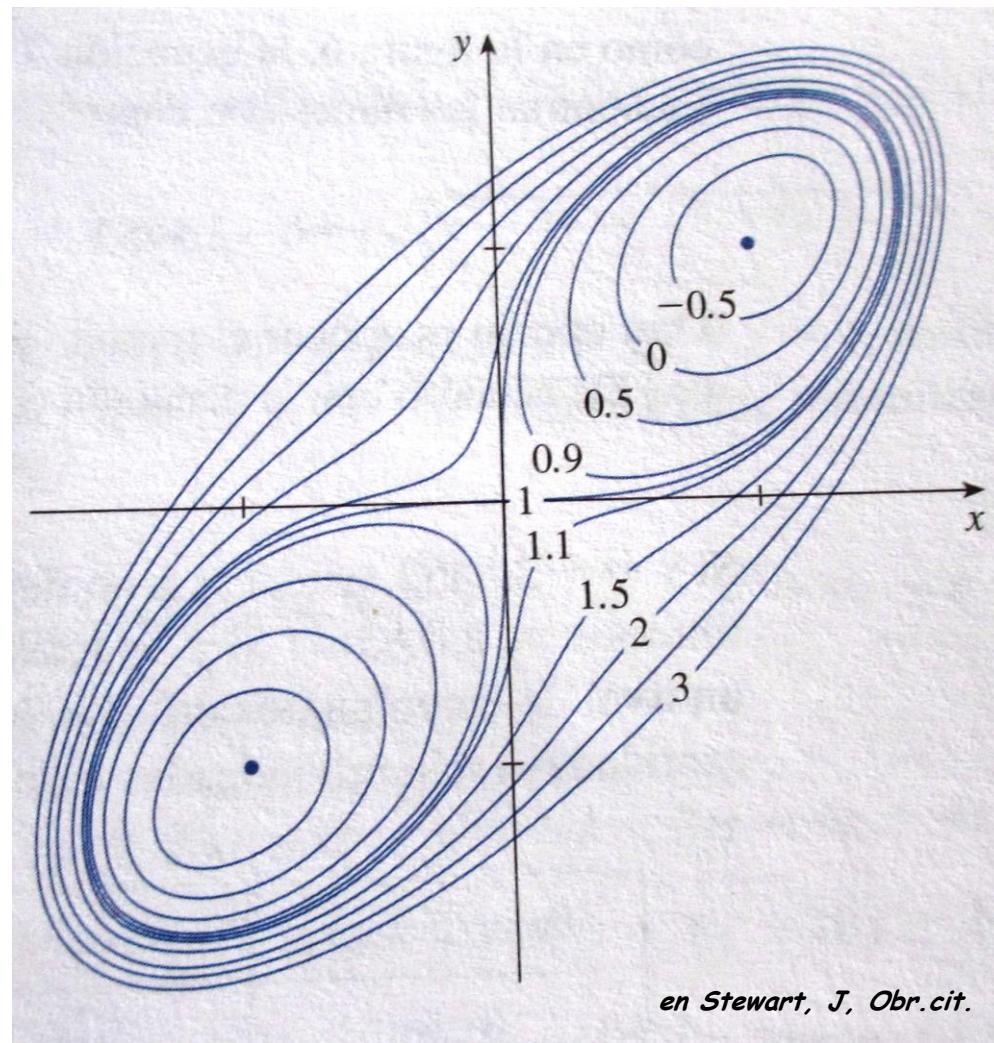
NOTA 2 Si $D = 0$, la prueba no proporciona información: f podría tener un máximo relativo o un mínimo relativo en (a, b) , o bien, (a, b) podría ser un punto silla de f .

NOTA 3 Para recordar la fórmula de D es útil escribirla como un determinante:

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$$

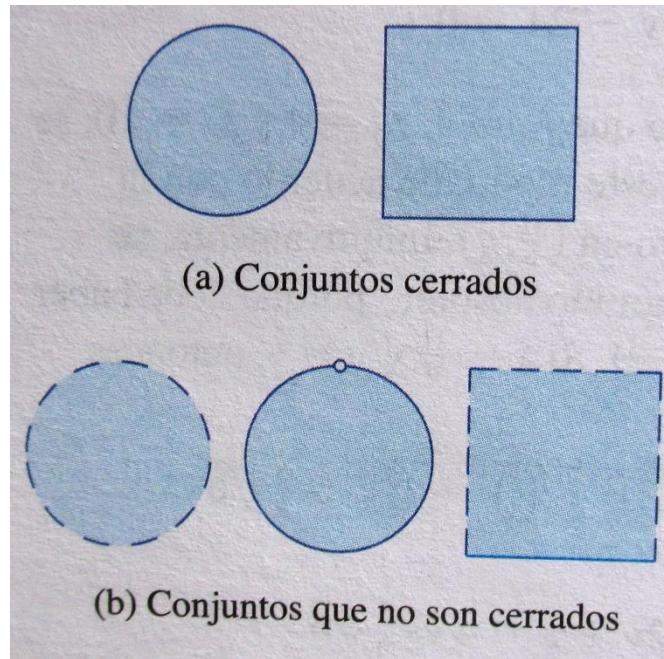
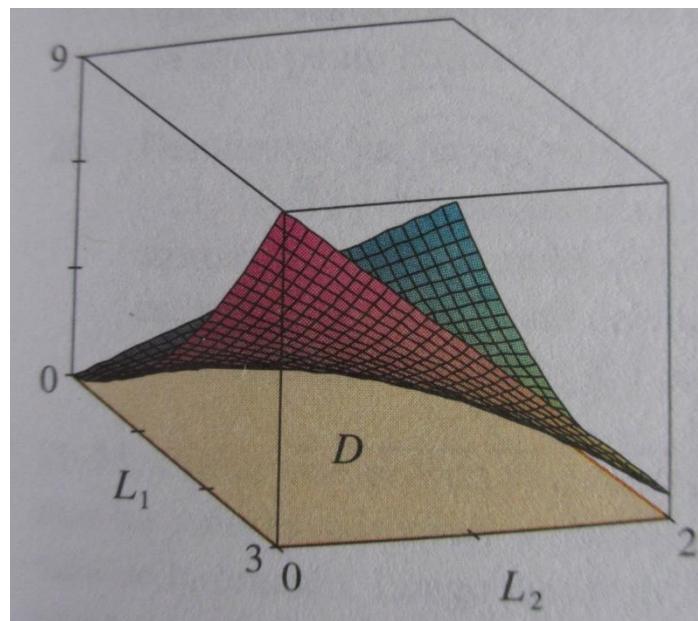
Extremos y optimización

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE



8 TEOREMA DEL VALOR EXTREMO PARA FUNCIONES DE DOS VARIABLES Si f es continua en un conjunto D cerrado y acotado en \mathbb{R}^2 , entonces f alcanza un valor máximo absoluto $f(x_1, y_1)$ y un valor mínimo absoluto $f(x_2, y_2)$ en algunos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en D .

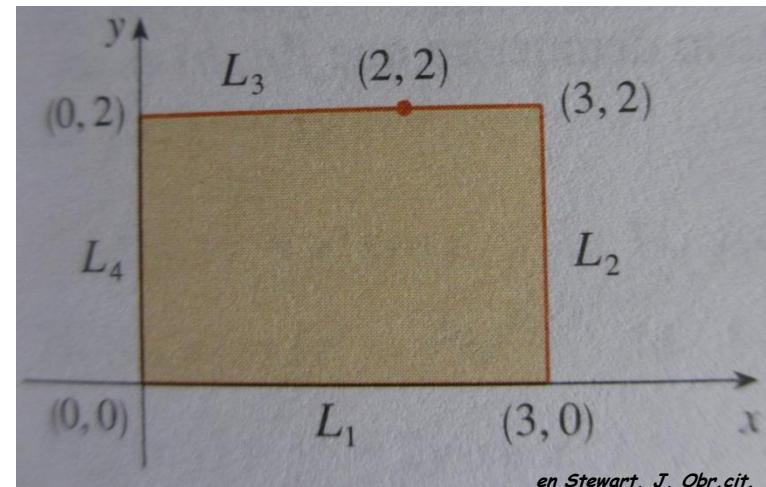
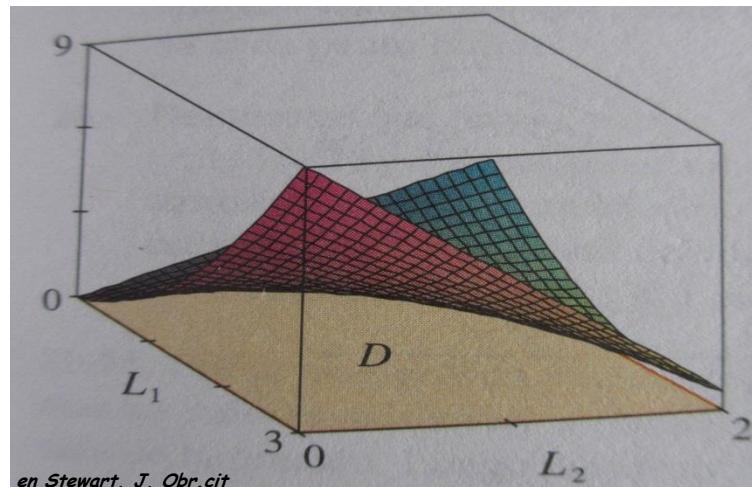
en Stewart, J. Obr.cit.



9 Para calcular los valores absolutos máximo y mínimo de una función continua f en un conjunto cerrado y acotado D :

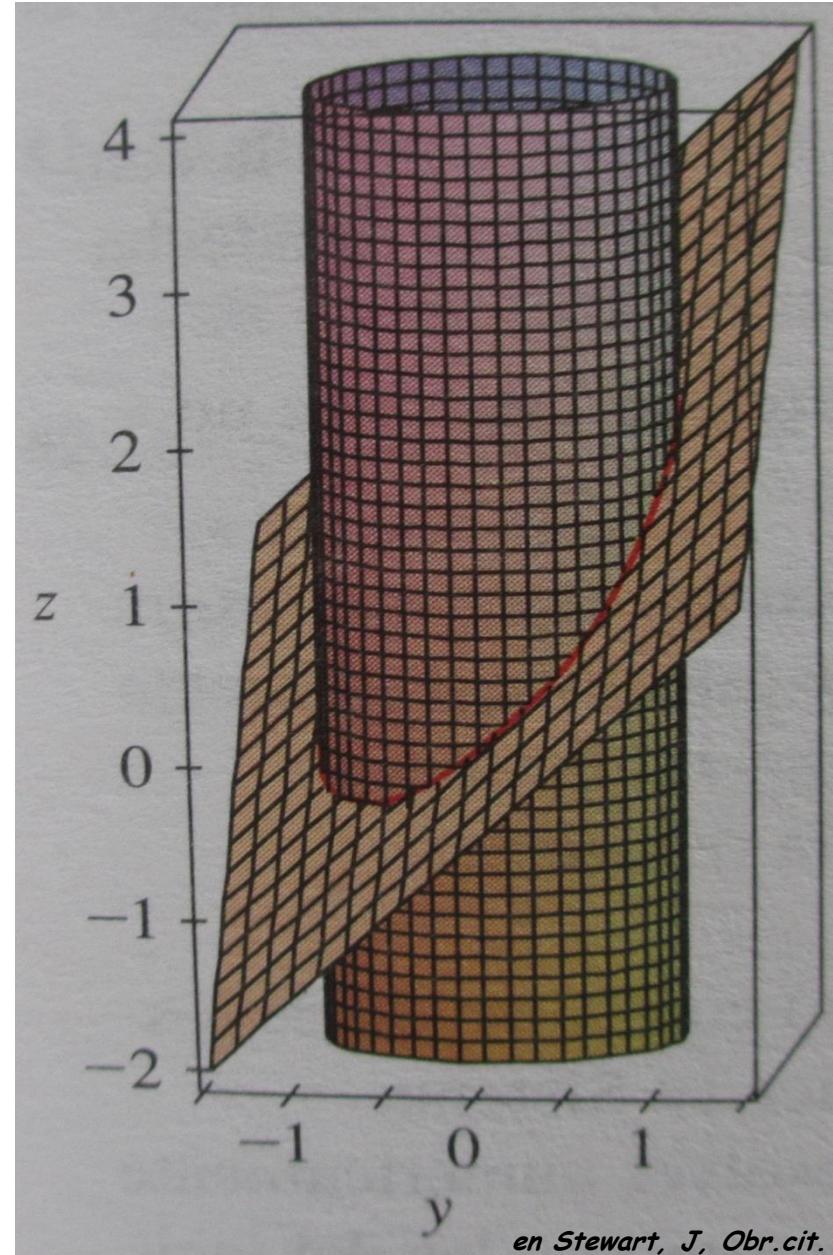
1. Se calculan los valores de f en los puntos críticos de f en D .
2. Se determinan los valores extremos de f en el límite de D .
3. El más grande de los valores de los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto; el más pequeño de estos valores es el valor mínimo absoluto.

en Stewart, J., Obr.cit.



Extremos y optimización

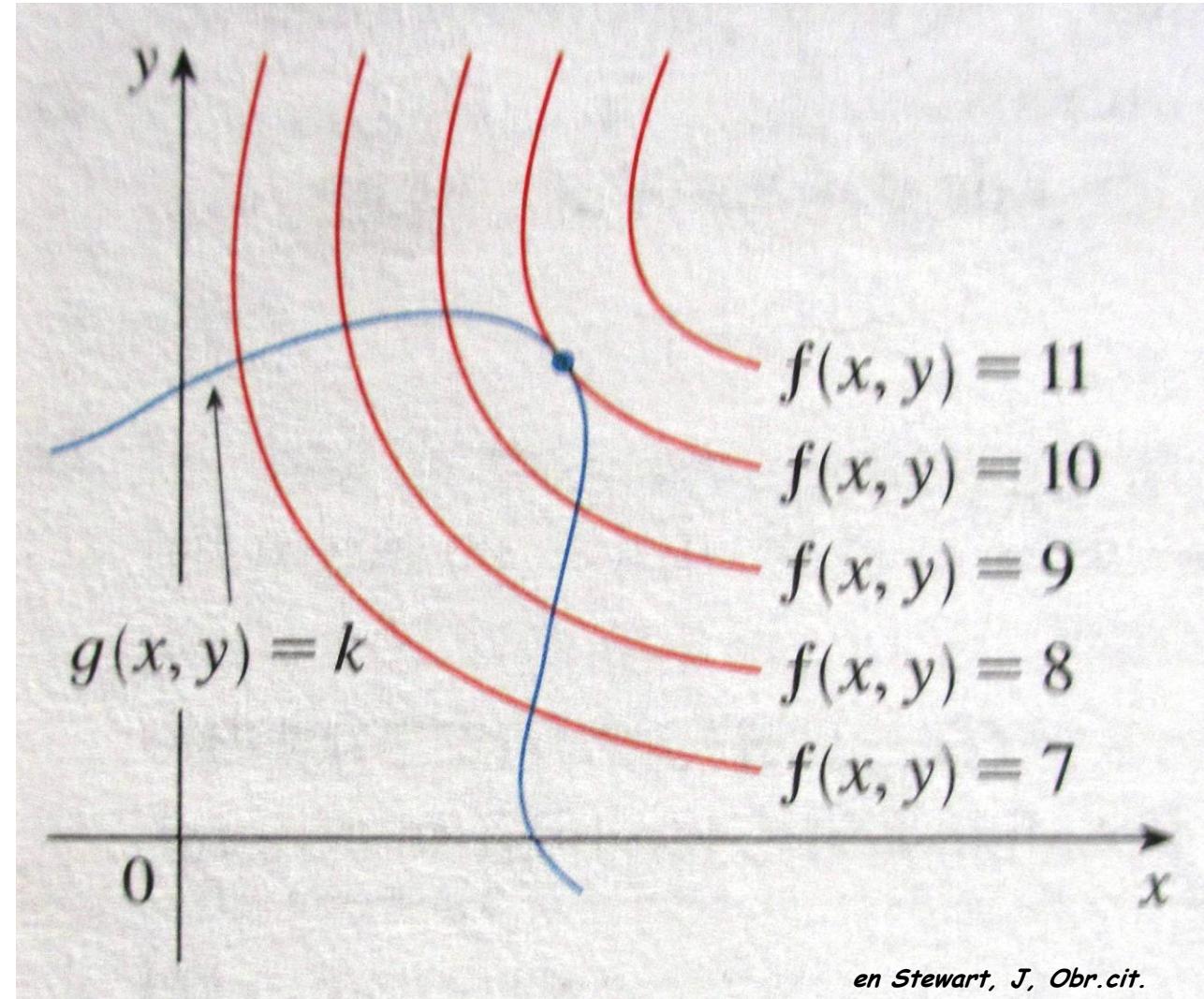
**OBSERVE y/o LEA
e INTERPRETE**



en Stewart, J., Obr.cit.

Extremos y optimización

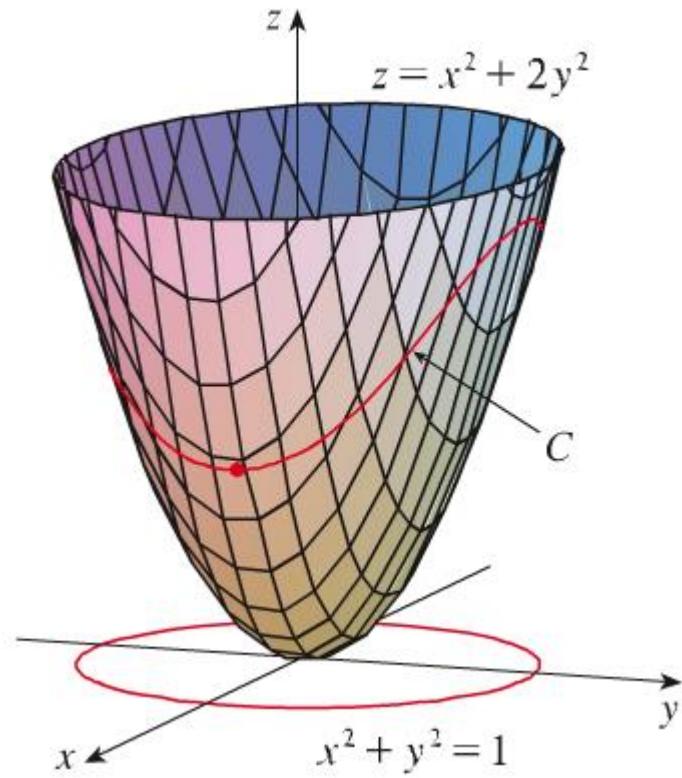
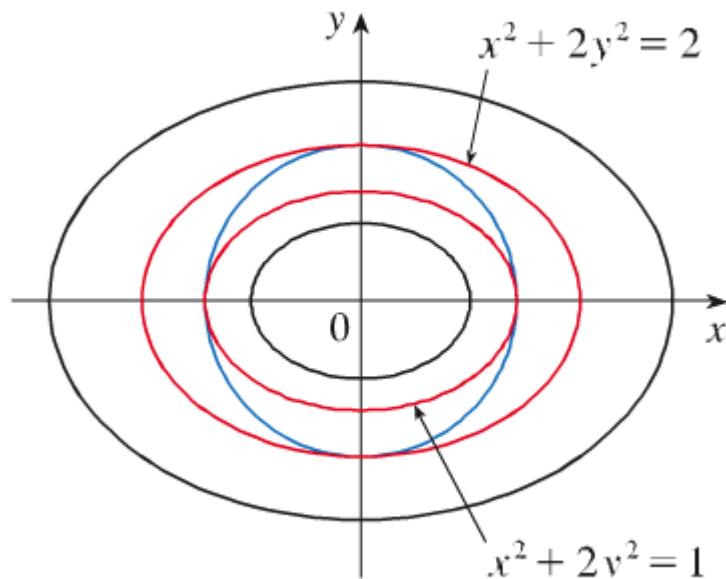
OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE



en Stewart, J., Obr.cit.

Extremos y optimización

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE



OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE Para determinar los valores máximos y mínimos de $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = k$, [suponiendo que estos valores existan y que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ se encuentre en la superficie $g(x, y, z) = k$]:

- (a) Determine todos los valores de x, y, z y λ tal que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$

y

$$g(x, y, z) = k$$

- (b) Evalúe f en todos los puntos (x, y, z) que resulten del paso (a). El más grande de estos valores es el valor máximo de f ; el más pequeño es el valor mínimo de f .

en Stewart, J., Obr.cit.

Fin de la presentación ...

... gracias por su seguimiento

... gracias por su participación