GUÍA de Actividades

TEÓRICO – PRÁCTICAS

MATEMÁTICA III

Equipo de Cátedra:

Profesor Asociado: *Dra. Lic. Andrea Ridolfi*

Jefe de Trabajos Prácticos: *Ing. Daniela Bocci*

Carreras:

Ingeniería Química

Ingeniería en Industrias de la Alimentación

Ingeniería Mecánica

Ciclo Lectivo:

2019

ALUMNO:

____

*La **teoría** como guía y fundamento del planteo.*
*La **resolución** y la **interpretación** de los resultados.*
*La **ejercitación** como orientación del estudio y aseguramiento de la comprensión de la **teoría**.*

-

INDICE

PROGRAMA DE MATEMÁTICA III

Objetivos del Espacio Curricular:

- Identificar y conocer problemas que requieren modelos de análisis multivariable, en los contenidos de cada carrera.
- Conocer y aplicar análisis diferencial e integral multivariable así como ecuaciones diferenciales.
- Conceptuar e interrelacionar los contenidos básicos desde lo numérico, lo geométrico y lo analítico, hacia su aplicación.
- Ejercitar la creatividad, la crítica, la intuición, junto a la observación y razonamiento, para encarar y resolver los problemas.
- Promover actitudes, criterios y metodologías de autoaprendizaje.
- Manejar los símbolos y terminología específicos como lenguaje de interpretación y formulación cuali y cuantitativo de la formación ingenieril.
- Integrar los principios e instrumentos propios de la asignatura a las necesidades de las otras que completan su formación de grado.
- Valorar e incorporar la informática como soporte amplificador de la comprensión conceptual y de la capacidad de cálculo.
- Valorar la capacidad de modelación matemática.
- Abordar nociones preliminares de Cálculo Numérico relacionadas a los contenidos de la asignatura.

Contenidos

Unidad Temática Nº I: INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS EN DOS O MÁS VARIABLES.

***Tema Nº 1*:**

INTRODUCCION. El lenguaje y lógica matemáticos con razonamiento analítico y aplicado, representación geométrica y aproximación numérica. Símbolos y terminología específicos. Introducción a los campos escalares y vectoriales: los espacios métricos y la generalización y composición de relaciones funcionales. Representación gráfica de tres dimensiones en coordenadas cartesianas, cilíndricas, esféricas y su representación vectorial.

Unidad Temática Nº II: CÁLCULO DIFERENCIAL EN DOS O MÁS VARIABLES.

***Tema Nº 2*:**

LÍMITES Y CONTINUIDAD: Campo escalar con dominio en dos dimensiones. Su análisis y representación, dominios y trazas. Funciones de tres variables independientes. Curvas y superficies de nivel. Superficies regladas. Límite funcional doble o simultáneo, límites sucesivos y límites direccionales: definiciones, interpretación, propiedades y aplicación. Continuidad y tipos de discontinuidad.

***Tema Nº 3*:**

DERIVADAS PARCIALES Y GRADIENTES: Derivadas parciales en dos dimensiones: definición, interpretación física y geométrica. Derivación de funciones compuestas, regla de la cadena. Derivadas parciales sucesivas. Derivada direccional y gradiente: definición, interpretación y cálculo. Alternativas de aplicación.

***Tema Nº 4*:**

DIFERENCIALES Y ANÁLISIS DE EXTREMOS: Función diferenciable y diferencial total. Aplicaciones. Plano tangente y recta normal. Diferenciales sucesivos. Diferencial total de una función compuesta. Funciones definidas implícitamente: condición de existencia, derivabilidad. Puntos críticos y extremos relativos de un campo escalar. Extremos absolutos. Extremos condicionados y multiplicadores de Lagrange. Alternativas de aplicación.

Unidad Temática Nº III: CÁLCULO INTEGRAL EN DOS O MÁS VARIABLES.

***Tema Nº 5*:**

INTEGRACIÓN MÚLTIPLE: Integral Doble: definición y existencia. Interpretación geométrica. Evaluación por integrales reiteradas o sucesivas. Integración sobre regiones no rectangulares. Aplicaciones de la integral doble. Integral triple: definición, interpretación y cálculo. Aplicaciones. Coordenadas cilíndricas y esféricas, cambio de coordenadas para integrales doble y triple.

***Tema Nº 6*:**

ANÁLISIS VECTORIAL: El análisis matemático de funciones y campos vectoriales: introducción conceptual a la derivación e integración vectorial y sus aplicaciones. Versores principales y planos que forman. Representación vectorial de curvas y superficies. Operadores: gradiente, rotacional, divergencia y laplaciano; matriz jacobiana: definiciones, interpretación y aplicación. Campos conservativos.

***Tema Nº 7*:**

INTEGRALES CURVILÍNEA Y DE SUPERFICIE: Integral curvilínea**:** Definición, existencia, cálculo, interpretación gráfica y de aplicación. Propiedades, notación diferencial y notación vectorial. Teorema de Green en el plano**.** Teorema fundamental de las integrales de línea**.** Integral sobre una curva alabeada. Aplicaciones. Integral de superficie**:** Definición y concepto de cálculo. Interpretación como integral de flujo. Interpretación de los teoremas de la divergencia y de Stokes.

Unidad Temática Nº IV: ECUACIONES DIFERENCIALES.

***Tema Nº 8*:**

INTRODUCCION: representación de fenómenos o de un haz de curvas y las ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos. Clasificación de Ecuaciones Diferenciales: ordinarias (EDO), a derivadas parciales (EDP) y sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (SEDO). Orden y linealidad .Concepto de Existencia y Unicidad de solución. Tipos de solución de ecuaciones diferenciales. Campos de Direcciones. Trayectorias ortogonales. Problemas de valor inicial y de valor en frontera. EDO de 1er Orden: resolución por separación de variables y por diferenciales exactas. Resolución de ecuaciones diferenciales lineales.

***Tema Nº 9*:**

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR. Definición. Ecuaciones lineales. Concepto de existencia e unicidad de solución. Solución general e independencia lineal de las soluciones, wronskiano. Resolución de la ecuación lineal de 2º Orden a coeficientes constantes homogénea. Resolución de la ecuación no homogénea: método de los coeficientes indeterminados y método de la variación de parámetros**.** Introducción conceptual a los sistemas de ecuaciones diferenciales, a las ecuaciones a derivadas parciales y a las Transformadas de Laplace.

Unidad Temática Nº V: INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO NUMÉRICO.

Tema Nº 10:

CÁLCULO NUMÉRICO: Aproximaciones, errores y su estimación. Concepto de análisis de convergencia, de estabilidad. Aproximación al cálculo de ecuaciones diferenciales: método de Euler.

Bibliografía

Obligatoria:

- Stewart, J., Cálculo de varias variables, México, International Thomson Editores, 6ª ed. 2008. y otros textos similares del mismo autor.
- Larson R. ed. al., Cálculo II, McGraw-Hill, China 8va.ed. 2006.
- Zill, D.G., Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado, México, International Thomson Editores, 6ª ed. 1997.y posteriores.

Complementaria:

- Sáenz, J.A., Cálculo Vectorial, Hipotenusa, 1° Edición, 2013.
- Zill, D.G., Cálculo con Geometría Analítica, México D.F., Grupo Editorial Iberoamérica., 1987, y posteriores.
- Leithold, L., El Cálculo con Geometría Analítica, México, HARLA, 6ª y 7ª Ed.
- Thomas, G.B., Cálculo varias variables, México, Pearson-Addison Wesley Longman, 11ªed., 2006.
- Rabuffetti, H.T., Introducción al análisis matemático (Cálculo 2), Buenos Aires, Librería El Ateneo Editorial, 5ª ed. 1994 y posteriores.
- McCallum W.G. ed. al., Cálculo de varias variables, México, Compañía Editorial Continental SA, 1ª ed. 1998 y posteriores
- Marsden J.E. ed. al., Cálculo Vectorial, México, Addison Wesley Longman,4ª ed. 1998 y posteriores
- Otros textos de Cálculo Multivariable
- Stewart, J. Cálculo conceptual y contextos, 3a Ed.México, Cengage Learning, 2006.
- Borrelli R., Coleman C.S., Ecuaciones diferenciales. Una perspectiva de modelación, México, Oxford University Press, ed. 2002.
- Otros textos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Descripción de Actividades de aprendizaje.

Se trata de actividades con modalidad de taller teórico-práctico en el 70 % de las clases, y se desarrollarán clases magistral en el 30 % restante. Se trabajará con una Guía de Actividades teórico- prácticas, elaborada con el objetivo de orientar el estudio en un modo integrado y, con el criterio de que la ejercitación es un modo de comprender la teoría, se propone estudiar ésta a la par, como guía y fundamento de los planteos y resoluciones. Por lo tanto, dicha guía contiene actividades de estudio conceptual, de ejercitación analítica, gráfica, de aproximación numérica, de aplicación, de interpretación e integración. También cuenta con actividades adicionales que el alumno podrá desarrollar en forma personal, en horario extra áulico, para afianzar la habilidad operatoria y los conocimientos adquiridos en clases.

Procesos de intervención pedagógica.

El 70 % de las clases serán en modo taller con actividades teórico-prácticas y la obligación de trabajar en clase con el mínimo de un texto de la bibliografía básica. Se contará además con clases magistrales, en las que se presentarán los temas teóricos, indicando la profundidad y alcance de cada uno de ellos.

Con el fin de fomentar la reflexión y la comunicación, se desarrollará una puesta en común con evaluación oral individual de cada unidad temática, sobre la resolución de ejercicios tanto de tipo operatorios como de interpretación, que serán establecidos previamente. Dicha actividad se complementará con sesiones de aprendizaje individual-grupal previstas en las horas de consulta. En todo momento se estimulará a los alumnos a participar activamente haciendo énfasis en el razonamiento, el pensamiento crítico y la confrontación de ideas como procesos en la construcción de conocimientos.

REGULARIDAD y EVALUACIONES

Condiciones de Regularidad:

- Asistencia al 75 % de las actividades prácticas.
- Participación de al menos una evaluación oral individual (Informes de Guías de Actividades).
- Aprobación de la evaluación práctica: Se considera que el alumno ha aprobado la evaluación práctica si cumple alguna de las siguientes condiciones:
  - El alumno obtiene un mínimo de 40 puntos en cada una de las evaluaciones parciales P1 y P2 y un promedio mayor o igual a 60 puntos entre ambas evaluaciones.
  - El alumno obtiene en alguna de las evaluaciones parciales un puntaje mayor o igual a 40 puntos y, no habiendo alcanzado un promedio de 60 puntos entre ambos parciales, recupera la evaluación de menor puntaje obteniendo un puntaje mayor a 40 puntos y un promedio con el parcial no recuperado mayor o igual a 60 puntos.
  - El alumno obtiene en la evaluación global integradora un puntaje mayor o igual a 60 puntos.
- Presentación de trabajo grupal y aprobación de un coloquio individual sobre contenidos de cálculo numérico (Guía de Actividades N°10).

Evaluación:

REGULARIDAD: Una primera instancia de evaluación -ya indicada- es lograr la regularidad. En esta etapa se plantean dos ***evaluaciones parciales*** de carácter teórico-práctico, cada una de ellas con un puntaje máximo de 100 puntos. Se podrá acceder a una ***evaluación recuperadora*** del parcial de menor puntaje cuando no se ha alcanzado el promedio de 60 puntos con los resultados de ambos parciales **sólo en el caso** de obtener, en alguno de ellos, un puntaje mayor de 40 puntos. Cabe aclarar que se podrá recuperar sólo una evaluación parcial.

Por otro lado se plantea una ***evaluación global***, que integra los contenidos involucrados en los parciales P1 y P2, para aquellos alumnos cuyo puntaje máximo obtenido de los parciales no alcance los 40 puntos, y para aquellos que no alcanzaron el promedio de 60 puntos entre uno de los parciales y el recuperatorio del otro.

Los contenidos de las evaluaciones que involucran la etapa de regularidad se basarán en la ejercitación y las actividades complementarias de la Guía de Actividades vistas y sugeridas en clases.

Con respecto a la unidad V de Introducción al cálculo numérico, se evaluará a través de un coloquio individual (según rúbrica que se adjunta en la pag. 56), en base a la actividad grupal que se presenta en la Guía de Actividades N°10, con preguntas de interpretación y relación con el resto de los contenidos. Estos contenidos **no se incluirán en el examen final**.

PROMOCIÓN DE LOS CONTENIDOS PRÁCTICOS: Aquellos alumnos que obtengan un promedio mayor o igual a 80 puntos de las evaluaciones parciales P1 y P2 realizadas en la instancia de regularidad, y aprueben con un mínimo de 60 puntos el 3°parcial PROMOCIONARÁN TODOS los contenidos PRÁCTICOS de la asignatura. Esto significa que en la instancia de acreditación final solo rendirán el examen teórico correspondiente. **Dicha promoción tendrá validez durante el año 2019.**

ACREDITACIÓN: La ***evaluación final*** consiste en:

- Una evaluación escrita de ejercitación conceptual y operatoria sobre todos los contenidos desarrollados en las Guías de Actividades, desde la N°1 hasta la N°9.
- Una evaluación escrita de contenidos teóricos a desarrollar, orientada por preguntas y actividades específicas que incluirá todos los contenidos del programa, salvo la unidad V.
- Defensa oral de los contenidos teóricos desarrollados.

Cada una de las evaluaciones contará con un puntaje máximo de 100 puntos y se aprobará con un puntaje mínimo de 60 puntos. La aprobación de la evaluación de ejercitación es requisito indispensable para acceder a la evaluación teórica, salvo en el caso que por razones particulares se unifiquen ambas evaluaciones.

Cabe destacar que aquellos alumnos que obtuvieron la **promoción** de los contenidos prácticos y se presenten a rendir en las fechas de examen comprendidas durante el año 2019, rendirán un único examen teórico escrito y su posterior defensa oral de los contenidos desarrollados.

La calificación de la evaluación final se determinará ponderando los resultados obtenidos en: la evaluación de ejercitación, la evaluación teórica y la defensa oral. En el caso de no aprobar la evaluación de ejercitación, la calificación final será la obtenida en dicha evaluación. En todos los casos el puntaje se llevará a nota aplicando la escala ordinal de calificación numérica según Ord. 108/10 CS de la UNCuyo.

HORARIOS Y FECHAS CURSADO 2019

HORARIOS DE CONSULTA

	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
Lic. Andrea Ridolfi	15 a 16hs		14 a 15hs		
Ing. Daniela Bocci	8.30 a 10hs			11 a 12.30hs	

CRONOGRAMA DE INFORMES SEMANALES

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	Fecha de presentación	Ejercicios
GUÍA 1 Las funciones en el cálculo multivariable.	**Martes 26/03**	
GUÍA 2 Límite y continuidad.	**Lunes 01/04**	
GUÍA 3 Derivadas parciales	**Martes 16/04**	
GUÍA 4 Derivadas direccionales y gradiente.		
GUÍA 5 Diferenciales y Análisis de extremos.	**Viernes 03/05**	
GUÍA 6 Integrales múltiples. Integrales dobles y triples.	**Martes 14/05**	
GUÍA 7 Integrales de línea.	**Miércoles 22/05**	
GUÍA 8 Introducción a las ED. EDO de primer orden.	**Viernes 07/06**	
GUÍA 9 EDO lineales de segundo orden.	**Viernes 14/06**	

FECHA DE EVALUACIONES PARCIALES

1º PARCIAL (P1): miércoles **17 de abril** –15:00hs.

2º PARCIAL (P2): viernes **24 de Mayo** – 18:00hs.

RECUPERATORIOS P1 o P2: viernes **7 de junio** – **9:00hs**

3º PARCIAL (para Promoción y alumnos de Ing. Mecánica): martes **18 de Junio** – 18:30hs

GLOBAL: Lunes **24 de junio** – 9:00hs

ACLARACIONES:

- Las **ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS** son actividades de lectura-escritura selectivas, de interpretación y de síntesis teórica de orientación *(sólo se entiende lo que se puede explicar).*
- La **EJERCITACIÓN ADICIONAL** cuenta con actividades extras que el alumno podrá desarrollar en forma personal fuera del horario de clases para fortalecer los conocimientos trabajados en clases.
- Las **GUÍAS DE ACTIVIDADES TEÓRICO-PRÁCTICAS** están elaboradas con la finalidad de orientar el estudio del alumno tanto para la etapa de regularidad como de acreditación final de la asignatura.

GUÍA DE ACTIVIDADES N°1:

Las funciones en el cálculo Multivariable

TEORÍA NECESARIA: Desde R extenderse hasta R^2 o R^3 generalizando a R^n

Hacia el cálculo en más de una variable: Espacio numérico n-dimensional y generalización de funciones. Funciones compuestas. Representación gráfica: escalares y vectores, curvas y superficies. Coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas. Expresión e interpretación analítica. Del gráfico a la ecuación y de la ecuación al gráfico. Reconocimiento de variables y expresiones aplicadas en otras asignaturas. *Matemática: un lenguaje de modelos*

FUNCIONES

1) Para cada una de las siguientes expresiones:

a) Indica la cantidad de variables independientes y dependientes.
b) Identifica si se trata de una función escalar, campo escalar, función vectorial o campo vectorial.

Funciones / Campos	Cantidad de Variables		**Clasificación**
	Independientes	Dependientes	
$z = x^2 + y^2$			
$f(x) = x^2 + 3x + 6$			
$\vec{r}(t) = 2t\hat{i} + t^2\hat{j} + e^t\hat{k}$			
$r(v) = \|v\|$, siendo v un vector de R^4			
$\vec{F}(x,y) = e^{x-1}\hat{i} + x\hat{j}$			
$PV = nRT$			
$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\hat{i} + Q(x,y)\hat{j} + R(x,y)\hat{k}$			
$w = G[x(u,v), y(u,v), z(u,v)]$			
$f(t) = F(x(t), y(t))$			

➔ *Es interesante buscar y analizar otras funciones en textos de la carrera.*

DOMINIOS

2) Determina analítica y gráficamente los dominios de las siguientes funciones $z = f(x,y)$. Describa también, el dominio en palabras.

a) $x + y + 2z - 6 = 0$ b) $z = \ln(4 - x - y)$

c) $z = \dfrac{1}{25-(x^2+y^2)}$

d) $z = \dfrac{1}{\sqrt{25-(x^2+y^2)}} + \sqrt{x-y}$

e) $x^2 + z - 4 = 0$

f) $z = ysen\left(\dfrac{1}{x}\right)$

f.1) Resuelva, en caso de ser posible, $z(0,1) = ...$, $z(1,0) = ...$, $z(1+h,3) = ...$, , $z(x,2) = ...$

TRAZAS

3) Dadas las siguientes ecuaciones de superficies en R^3, halla las trazas de las mismas y representa gráficamente. En cada caso, indica si son funciones $z = f(x,y)$ o no.

a) $2x + y + 2z = 4$

b) $2z + 3x - 6y = 6$

c) $4z + 3x - 12 = 0$

d) $\mathrm{x} + \mathrm{y} + 2\mathrm{z} = 0$

e) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

f) $z = 4 - y^2$

g) $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$ (Agregar traza z = 4)

h) $y^2 + z^2 = 9$

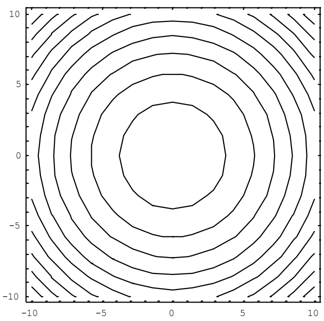
i) $z = 4 - x^2 - y^2$

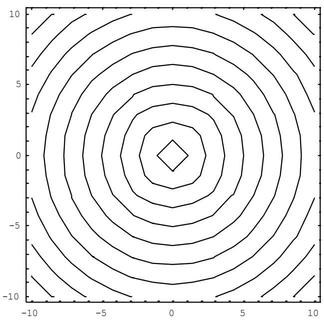
CURVAS DE NIVEL

4) **a)** Busca en algún libro de la bibliografía propuesta por la cátedra y escribe la definición de curvas de nivel y mapa de contorno.

b) Halla por lo menos tres curvas de nivel de las relaciones del ejercicio anterior y representa gráficamente.

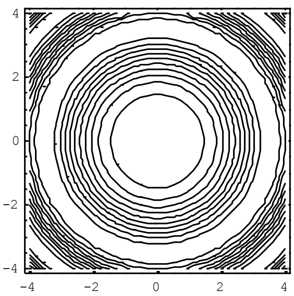
5) Se ilustran dos mapas de contorno, uno es para una función ***f*** cuya gráfica es un cono y el otro para una función ***g*** cuya gráfica es un paraboloide. ¿Cuál es cuál y por qué? Las gráficas de las funciones f y g, ¿son únicas?, ¿por qué?



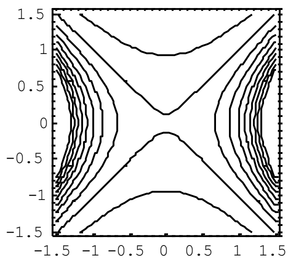


6) Asocia cada superficie con uno de los mapas de contornos:

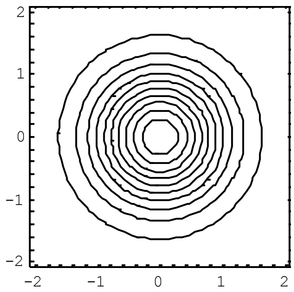
a)



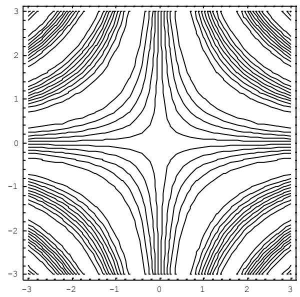
b)



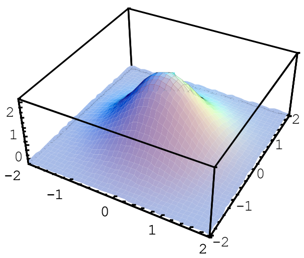
c)



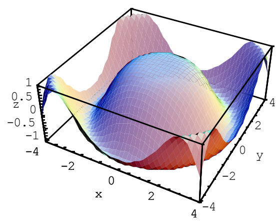
d)



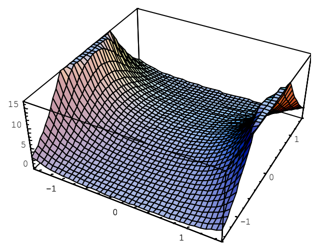
$f(x,y)=e^{1-x^2-y^2}$



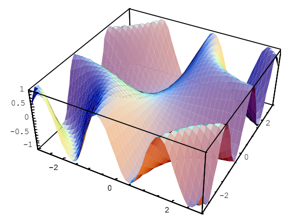
$g(x,y)=\cos[(x^2+y^2)/4]$



$h(x,y)=e^{1+x^2-y^2}$



$j(x,y)=sen(xy)$



SUPERFICIES DE NIVEL

7) Dibuja la gráfica de la superficie de nivel $f(x,y,z)=c$ para los valores de c indicados.

a) $f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}$, c = 1

b) $f(x,y,z)=x^2+\dfrac{y^2}{4}-z$, c = -4

SUPERFICIES REGLADAS

8) El paraboloide hiperbólico es una superficie reglada. Sea $z=y^2-x^2$ y sea $P_0=(x_{0,}y_{0,}z_0)$ un punto cualquiera de esta superficie:

a) Prueba que la recta: $L_1: x=x_0+t,\ \ y=y_0+t,\ \ z=z_0+2(y_0-x_0)t$ pasa por P_0 y está enteramente contenida en el paraboloide hiperbólico.

b) Prueba que la recta: $L_1: x=x_0+t,\ \ y=y_0-t,\ \ z=z_0-2(y_0+x_0)t$ pasa por P_0 y está enteramente contenida en el paraboloide hiperbólico.

9) Dada la superficie cilíndrica $z = y^2 + 1$ y sea $P_0 = (x_{0,}y_{0,}z_0)$ un punto cualquiera de esta superficie:

a) Grafica la superficie
b) Establece la relación que cumple las coordenadas del punto P_0 sabiendo que el mismo pertenece a la superficie.
c) Encuentra la ecuación paramétrica de una recta L que pase por el punto P_0 y esté enteramente contenida en la superficie.
d) Encuentra la ecuación paramétrica de la recta L que pasa por el punto $P_1(4,1,2)$. Dibuja dicha recta en la representación gráfica de la superficie del ítem ***a***
e) ¿Es ésta una superficie reglada? Justifica.

APLICACIONES

10) Escriba la fórmula de la presión P ejercida por un gas ideal encerrado, de manera que se obtenga la Presión en función de la temperatura y del volumen V, tomando una constante de proporcionalidad k. Un depósito contiene 50 litros de nitrógeno a una presión de 1.5 atm. y a una temperatura de 300ºK. Determinar k. Describa sus curvas de nivel (curvas isobaras).

11) Se construye un depósito de propano adosando dos hemisferios a los extremos de un cilindro circular recto. Expresar el volumen V de ese depósito en función del radio r y de la altura h del cilindro.

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

12) Completa los siguientes enunciados en forma correcta.

a. Del conjunto de puntos de R^3, las coordenadas de todos los puntos del plano xz se expresan de la forma (……;……;…….) y de los puntos del eje y se expresan de la forma (……;……;…….).

b. Las intersecciones de la superficie con los planos coordenados se llaman ……………………………..

c. En R^3, la gráfica $x^2 + y^2 = 1$ es un cilindro circular recto cuyo eje es ....

d. En tres dimensiones Ax + By = C ¿representa una recta? ....

e. ¿Qué representa la ecuación $y = x^2$ en R^2? .... ¿y en R^3? ....

f. En R^3, la superficie dada por la ecuación $z = 4 - x$ ¿interseca el plano y = 2? ....

g. Dada la función $f(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{y}} + xy$. Resuelva, en caso de ser posible, $f(0,1) =$..............., $f(1,0) =$..................... , $f(1, y) =$................................., ¿Cómo se nombra al conjunto de puntos $\{(x, y, z) \in R^3 / x = 1 \wedge z = f(1, y)\}$? ………………………………………………

h. Dados los puntos P(6,2,3) ; Q(-5,-1,4) ; R(0,3,8) , el punto que se encuentra más cerca del plano xz es ………………….., y el que se encuentra el plano yz es …………………………………..

13) De las ecuaciones del ejercicio 3 ¿cuáles representan **superficies cilíndricas** (superficie paralela a alguno de los ejes)?

EJERCITACIÓN ADICIONAL

1. Determina analítica y gráficamente los dominios de las siguientes funciones $z = f(x, y)$

a) $z = \ln(y - x^2 + 5)$;

b) $z = \dfrac{x + y}{xy}$

c) $z = 4 - y$

d) $f(x.y) = \sqrt{xy + 6}$

2. Dadas las siguientes ecuaciones de superficies en R3, halla las trazas de las mismas y representa gráficamente. En cada caso, indica si son funciones $z = f(x, y)$ o no.

a) $z = 5$

b) $x^2 - y^2 - z^2 = 0$

c) $z = \cos(y)$ (Agregar trazas *y=±π*)

d) $z^2 - \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ (Agregar trazas x=±4)

e) $2x + y = 4$

f) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} + z = 1$

3. Si T(x,y) es la temperatura en un punto (x,y) de una placa de metal, entonces las curvas de nivel de T se llaman *Curvas Isotérmicas*. Si en una placa circular de 10 metros de radio la temperatura T (en grados Celsius) es: $T(x, y) = 600 - 0{,}75(x^2 + y^2)$

a) Trazar las curvas isotérmicas para las que T = 550; T = 575 ; T = 600

b) Si una hormiga se encuentra en el borde de la placa. ¿Cuál debería ser la trayectoria de la hormiga de modo que la temperatura en su trayectoria permanezca constante? ¿Cuál es la temperatura sobre esa trayectoria?

4. Utilizando algún software observa la gráfica de las funciones: $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; $f(x, y) = \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$; $f(x, y) = sen\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$; $f(x, y) = e^{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

a. En general, si *g* es una función de una variables ¿Cómo es la gráfica de la función compuesta $f(x, y) = g\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$? (estas funciones se llaman ***funciones radiales***).

GUÍA DE ACTIVIDADES N°2

Límite y Continuidad

TEORÍA NECESARIA: Límite de funciones de 1 y 2 variables: definiciones, aproximaciones, representación gráfica, propiedades. Límites sucesivos y límites direccionales frente al límite doble. Continuidad y tipos de discontinuidad.

LÍMITE

1) Utiliza la tabla de valores numéricos para hacer deducciones acerca del valor del límite de la función en el origen. Explica el porqué de tu suposición. $f(x,y)=\dfrac{6xy}{x^2+2y^2}$

y / x	**-1**	**-0.5**	**-0,1**	**-0,01**	**0**	**0,01**	**0,1**	**0.5**	**1**
1	-2	-1,3	-0,3	-0,03	0	0,03	0,3	1,3	2
0,5	-2	-2	-0,59	-0,06	0	0,06	0,59	2	2
0,1	-0,59	-1,1	-2	-0,30	0	0,30	2	1,1	0,59
0,01	-0,06	-0,12	-0,59	-2	0	2	0,59	0,12	0,06
0	0	0	0	0		0	0	0	0
-0,01	0,06	0,12	0,59	2	0	-2	-0,59	-0,12	-0,06
-0,1	0,59	1,1	2	0,30	0	-0,30	-2	-1,1	-0,59
-0,5	2	2	0,59	0,06	0	-0,06	-0,59	-2	-2
-1	2	1,3	0,75	0,03	0	-0,03	-0,75	-1,3	-2

2) Halla el límite doble, si existe, de las siguientes funciones:

a) $z=\dfrac{x^2}{(x^2+1)(y^2+1)}$ en (0,0)

b) $z=\dfrac{x^2-y^2}{x-y}$ en (1,1)

c) $z=\dfrac{sen(xy)}{xy}$ en (0,0)

3) Demuestra que el límite doble no existe utilizando límites direccionales: reiterados, radiales, otros, según sea necesario.

a) $z=\dfrac{x-3y}{2x+6y}$ en (0,0)

b) $z=\dfrac{x^2+sen^2(y)}{2x^2+y^2}$ en (0,0)

c) $z=\dfrac{(x-1)y-x+1}{(x-1)^2+(y-1)^2}$ en (1,1)

d) $z=\dfrac{(x^4-4)(y^2-9)}{(3x-2y)(3+y)}$ en (2,3)

4) Sea $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

- **a)** Calcula los límites reiterados en el punto (0,0)
- **b)** Calcula los límites radiales en el punto (0,0)
- **c)** Calcula el límite direccional a lo largo de la parábola y = x^2.
- **d)** ¿Qué conclusión deduces? ¿Podrías llegar a la misma conclusión solo con a) y b)?

CONTINUIDAD

5) Busca en la bibliografía y escribe la definición de continuidad para funciones de dos variables.

6) Determina en los puntos indicados si las funciones son continuas o no. Si es discontinua, indica porqué.

a) $z=\dfrac{3x-y-1}{x^2-4y^2}$, en $(1,\frac{1}{2})$

b) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{para } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{para } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ en (0,0)

c) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{x.y} & \text{para } x\neq 0\wedge y\neq 0\\ 0 & \text{para } x=0\vee y=0\end{cases}$ en (0,0)

7) Busca en la bibliografía propuesta algún teorema que garantice la continuidad de una función compuesta. Luego, utilízalo para justificar que la función $z(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{30}+sen(z^3)$ es continua en su dominio.

8) ¿Qué condiciones deberían cumplir las funciones ***g*** y ***f*** para que la función compuesta h(x,y) = g(f(x,y)) sea continua en un punto? (Stewart, pág. 893; Leithold, pág. 930)

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

9) Define límite doble en forma analítica, explica e interpreta gráficamente. Compara con límite direccional.

10) ¿Cuál es el concepto de límites sucesivos o reiterados?

11) ¿Cuál es el concepto de límites radiales?

12) Si los límites reiterados coinciden con los límites radiales en un punto. ¿Qué puedes decir con respecto al límite doble en ese punto?

13) Supone que $\lim\limits_{(x,y)\to(3,1)} f(x,y) = 6$

a) ¿Qué puedes decir acerca del valor *f*(3,1) ?

b) ¿Qué pasa si f es continua?

14) Explique por qué cada función es continua o discontinua.

a) La temperatura exterior como función de longitud, latitud y tiempo.

b) La altura sobre nivel del mar como función de longitud, latitud y tiempo.

c) El costo de un viaje en taxi como función de la distancia recorrida y el tiempo.

15) En lenguaje intuitivo, decir que $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = 3$ significa que f(x,y) está cerca de ------------ cuándo --------------------------------.

16) ¿Se puede hacer continua la función $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ definiéndola de manera adecuada en (0,0)?

17) Dada la función: $f(x,y) = ysen\left(\dfrac{1}{x}\right)$

a) Observa el gráfico por computadora e indica si aparentemente existe el límite doble de la función en el punto (0,0).

b) Realiza una aproximación numérica para confirmarlo.

c) ¿Se pueden obtener ambos límites reiterados en el punto (0,0)?

EJERCITACIÓN ADICIONAL

1. Elabora una tabla de valores en los puntos que se indican. Formula una deducción sobre el límite de $f(x,y)$ cuándo $(x,y)\to(0,0)$. Investiga analíticamente si existe el límite.

$$f(x,y)=\frac{2x-y^2}{2x^2+y}$$

Curva:	Puntos:			
y = 0	(1, 0)	(0.25, 0)	(0.001, 0)	(0.00001, 0)
y = x :	(1, 1)	(1, 1)	(0.001, 0.001)	(0.00001, 0.00001)

2. Halla el límite doble, si existe, de las siguientes funciones:

a) $z=5x-2y-8$ en (1,-2)

b) $z=\dfrac{x-xy}{1-y}$ en (3,1)

3. Demuestra que el límite doble no existe utilizando límites direccionales: reiterados, radiales, otros, según sea necesario.

a) $z=\dfrac{xy\cos(y)}{2x^2+3y^2}$ en (0,0)

b) $z=\dfrac{x^3+y}{x^4+y}$ en (0,0)

c) $z=\dfrac{x^2-y}{x-y^2}$ en (1,1)

d) $z=\dfrac{x^2y-2xy^2}{x-2}$ en (2,1)

4. Para la siguiente función determina, en el punto indicado si la funcione es continuas o no. Si es discontinua, indica porqué.

a) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2-y^2}{2x^2-2} & \text{para } x\neq\pm1\\ 0 & \text{para } x=\pm1\end{cases}$ en (1,2)

5. Dadas las funciones ***g*** y ***f***, encuentra el conjunto de puntos (x,y) tal que la función compuesta ***h = g₀ f*** sea continua en ese punto (llamado ***Conjunto de Continuidad de h***).

a) $g(t)=t^2+\sqrt{t}$
$f(x,y)=2x+3y-6$

b) $g(t)=\dfrac{1}{t}$
$f(x,y)=e^x+e^y$

GUÍA DE ACTIVIDADES N°3:

Derivadas parciales

TEORÍA NECESARIA: Incrementos y derivadas de funciones de 1 y de 2 variables independientes. Derivada parcial: definición, explicación, representación gráfica y aplicaciones. Derivar por definición y por reglas. Derivación de funciones compuestas y la regla de la cadena**.** Derivación parcial de orden superior.

DERIVADAS PARCIALES PRIMERAS

1) Defina derivadas parciales de un campo escalar en $\boldsymbol{R}^2$ en un punto. ¿Cuál es la interpretación geométrica de las mismas?

2) Dadas las siguientes funciones, halla por definición las funciones derivadas parciales primeras en los puntos que se indican.

a) $z = 3x + y^2 + 2$ en $P\,(2.1)$

b) $z = x.y$ en $P(a,b)$

3) Utilizando las reglas de derivación halla las derivadas parciales indicadas.

a) $z = 2x^2 - 7xy + 9$ $\quad z_x(0,1);$ $\quad z_y(2,2)\,;$

b) $z = x^4 - 8x^2y^3 - 3xy^5$ $\quad z_x(-1,1);$ $\quad z_y(0,1)$

c) $z = (x+y)^2(x-y)^3$ $\quad z_y(-1,1)$

d) $f(x,y) = \sqrt{3x + y^2}$ $\quad f_y\,(3,0)$

e) $f(x,y) = y\ln(4x^2 + 5xy^4)$ derivadas parciales primeras

f) $f(x,y,z) = ye^{3x+y}sen(e^z + 1)$ derivadas parciales primeras

g) $G = U + pV - TS$ $\quad \dfrac{\partial G}{\partial T}$

[Investiga de qué función se trata, para luego poder interpretarla y saber qué representa cada una de sus variables, y cuáles son constantes]

h) $G(x,y,z,t) = xt - z + 1$ derivadas parciales primeras

i) $t(x,y,z) = ze^{3\cos(xy+z)}$ derivadas parciales primeras

j) $f(x,y,z) = sen^2(3x + xy^4)^{1/3}$ derivadas parciales primera

En algunas bibliografías encontrarás la notación tal como está escrita. Para resolverlo, puedes pensar la función de la siguiente manera: $f(x,y,z) = \left\{sen\left[(3x + xy^4)^{1/3}\right]\right\}^2$

k) $z = 2^{xy}e^{(x-3y)}$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x}$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}$

l) $f(u,v) = \dfrac{4\sqrt{u}}{3v^2 + 1}$ $\quad \left.\dfrac{\partial f}{\partial v}\right|_{(3,0)}$

m) $w = xyz^2 + \cos^3(xz)$ derivadas parciales primeras

n) $w(x,y,z,t) = \dfrac{xt^2}{y+2z}$ derivadas parciales primeras.

o) Encuentra $f_x(1,0)$ para $f_{(x,y)} = x(x^2+y^2)^{-3/2}e^{sen(x^2)y}$. <u>*Sugerencia*</u>: en lugar de hallar la función derivada parcial f_x , es más fácil encontrar primero $g(x) = f(x,0)$ y luego derivar.

DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR

4) Busca en la bibliografía y escribe el *Teorema* que garantiza la igualdad de las derivadas cruzadas o mixtas.

5) Halla las funciones derivadas parciales segundas y verifica la igualdad de las cruzadas

a) $z = 3x^2y + y^3 + x^2y^2$ **b)** $z = x\cos(y)$

6) Encuentre las derivadas parciales indicadas:

a) $f(x,y,z) = z.sen(4xy) + 2z$; $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z}$

b) $u = x^a y^b z^c$; $\dfrac{\partial^5 u}{\partial x \partial y^2 \partial z^2}$

DERIVADA IMPLÍCITA

7) Calcula las derivadas parciales de *z* indicadas, por derivación implícita:

a) $yx^2 - lnz + zxy^2 + 5x - 3 = 0$ z_x , z_y

b) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ z_y

c) $xy + yz + xz = 0$ z_x

d) $z^3xy^2 - y\, lnx + z^2 = 9$ z_x , z_y

REGLA DE LA CADENA

8) Busca en la bibliografía y escribe el *Teorema de la Regla de la Cadena*.

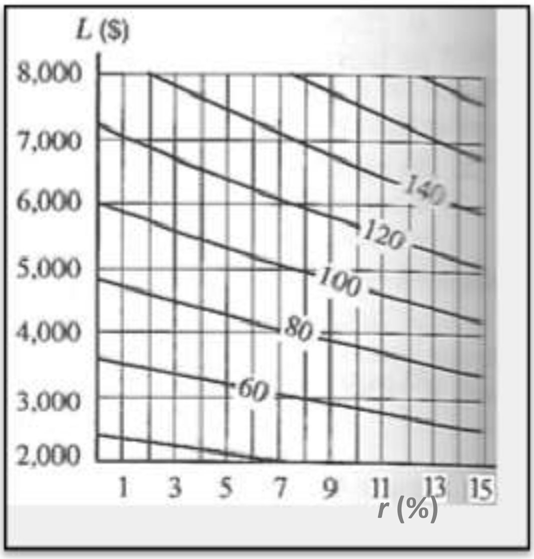
9) Encuentra $\dfrac{dw}{dt}$ donde $w = x^2y + xz + yz$, $x = 1-t$, $y = t^2$ y $z = t$

10) Encuentra $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ donde $w = e^{x^2+y^2}$, $x = s.sen(t)$, $y = t.sen(s)$

11) Coordenadas polares: Sea $f: R^2 \to R$ un campo escalar diferenciable y sean $x = r\text{ sen }\theta, y = r\cos\theta$ y $g(r,\theta) = f(x,y)$. Calcula $\frac{\partial g}{\partial r}$ y $\frac{\partial g}{\partial \theta}$.

APLICACIONES

12) La siguiente figura muestra un mapa de contorno del pago mensual P de un préstamo (en dólares) a cinco años para la compra de un auto, como función de la tasa de interés r% y la cantidad solicitada en préstamo L. Interpreta dicho mapa de contorno y completa:



a) Si la tasa de interés es de 8% y una persona solicita \$6000 en préstamo, su pago mensual es de ……………………………..

b) Si la tasa de interés es de 7% y una persona quiere pagar \$100 mensuales de cuota, la cantidad máxima de dinero que puede pedir en préstamo es de ………………………………….

c) En términos prácticos (financieros) $P_L(7;4000)$ se interpreta como………………

d) $P_L(7;4000)$ …….0 (completar con <, > o =).

13) Calcula la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$ con el plano x = 3, en el punto $P(3,2,\sqrt{12})$. Luego representa la intersección con un gráfico en 3D.

14) Ídem ejercicio **13)** para la superficie $z=6-2x$ con el plano y = 2 en el punto P (1, 2, 2).

15) La temperatura *T* en una localidad del hemisferio norte depende de la longitud *x*, la latitud *y*, y el tiempo *t*, así que podríamos expresar $T=f(x,y,t)$. Si medimos el tiempo en horas, ¿cuál es el significado de la derivada parcial $\frac{\partial T}{\partial x}$, en términos del problema?

16) La ley de los gases para una masa fija ***m*** de un gas ideal a la temperatura absoluta *T*, a presión *P* y con un volumen *V* es $PV=mRT$, donde *R* es la constante de gas.

a) Encuentra $\frac{\partial P}{\partial V}$ y expresa su significado físico.

b) Determina la razón de cambio del volumen con respecto a la temperatura.

c) Determina la razón de cambio de la temperatura con respecto a la presión.

d) Demuestra que $\frac{\partial P}{\partial V}.\frac{\partial V}{\partial T}.\frac{\partial T}{\partial P}=-1$, $V\frac{\partial P}{\partial V}+T\frac{\partial P}{\partial T}=0$ y que $T\frac{\partial P}{\partial T}\frac{\partial V}{\partial T}=mR$

e) Si *P* y *V* son funciones del tiempo ($P=P(t)$ y $V=V(t)$), hallar $\frac{dT}{dt}$ y *dT.*

f) Tomando $mR=0.082 atm.l/K$, determina la tasa de variación instantánea de la presión en función de la temperatura cuando $T=300K$, si el volumen se mantiene en $25l$.

g) Con las condiciones anteriores, analiza la variación de la presión si la temperatura aumenta a 305K. ¿Cómo obtendrías una aproximación de este valor?

h) Determina la razón en la que la presión cambia cuando la temperatura es de $T=300K$ y se incrementa a razón de $0.1K/s$, y el volumen es de $25l$. y aumenta a razón de $0.05l/s$.

17) Supone que se calienta un cilindro circular recto sólido, y que por tal motivo su radio aumenta a razón de 0,2 centímetros por hora y su altura 0,5 centímetros por hora. Encuentra la razón de aumento del área con respecto al tiempo, cuando el radio mide 10 cm y la altura es de 100cm.

→ *Fórmula del área del cilindro:* $S = 2\pi.r.h + 2\pi.r^2$

18) ***Momento de inercia (I)***: Un anillo cilíndrico tiene un radio interior r_1 y un radio exterior r_2, su momento de inercia es: $I = \frac{1}{2}m\left(r_1^2 + r_2^2\right)$donde *m* es la masa. Calcular el ritmo de cambio de ***I*** cuando los radios son de 6 y 8cm respectivamente, si ambos están creciendo a razón de 2cm/s.

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

19) Define derivada parcial $\frac{\partial U(T,P)}{\partial T}$ en forma analítica, explica e interpreta su significado.

20) Si dicen que hay una función *f*, cuyas derivadas parciales de segundo orden son continuas y además $f_x(x,y) = x + 4y$, $f_y(x,y) = 3x - y$ ¿Debes creerlo? .... (si/no - justifica).

21) Halla $\frac{\partial z}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial y}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ para las funciones:

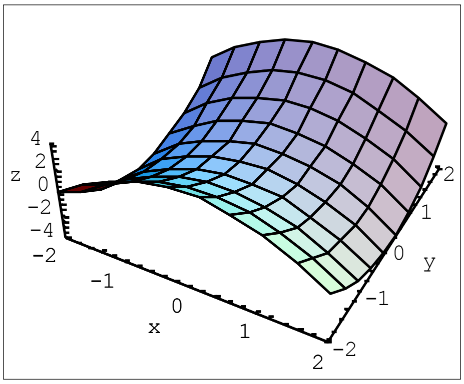
a) $z = f(x) + g(y)$; **b)** $z = f(x+y)$; **c)** $z = f(x)g(y)$;

d) $z = f(xy)$; **e)** $z = f(x/y)$

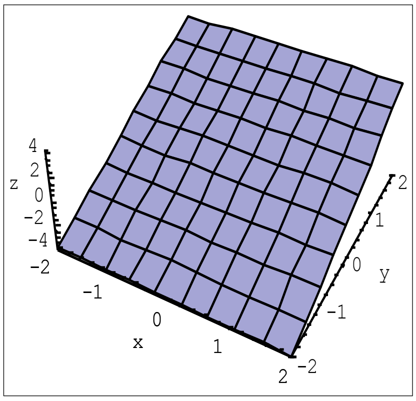
22) Contesta verdadero (V) o Falso (F) justificando la respuesta.

a) La expresión $\frac{f(1.01,3) - f(1,3)}{0.01}$ representa el incremento parcial de la función en el punto (1,3) cuando incrementamos la variable *x* en $\Delta x = 0.01$

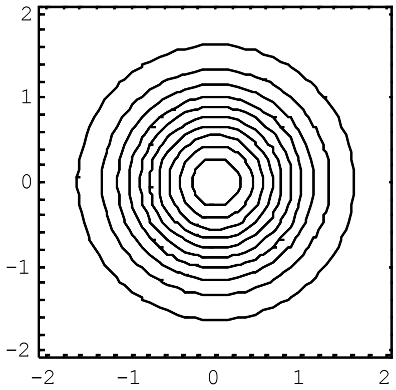
b) Si $z = f(x.y) + g(y)$ donde *f* y g son funciones derivables entonces $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = yf(x.y) + g'(y)$



e) Según la siguiente gráfica de cierta función $f(x,y)$, la derivada parcial de *f* respecto de *x* en el punto (1,0) es negativa. →



← **d)** Según la siguiente gráfica de cierta función $f(x,y)$, "la derivada parcial de *f* respecto de *y* en cualquier punto (*x*,*y*) es siempre negativa".



e) Dado el siguiente mapa de contorno que muestra las curvas de nivel de una función $f(x,y)$, desde adentro hacia afuera respectivamente, para $z=-10,\ z=-9,\ z=-8,\ldots,z=-1,$ (el eje horizontal es el eje *x*) podemos afirmar que $f_x(1,0)$ es positiva. →

EJERCITACIÓN ADICIONAL

1. Para la siguiente función $z = x^2y - y^2$, halla por definición las funciones derivadas parciales primeras en el punto P(4,2)

2. Halla las funciones derivadas parciales segundas de las siguientes funciones, y verifica la igualdad de las cruzadas

a) $z = \ln(\sqrt{x^2 - y^2})$

b) $f(x,y) = \dfrac{y}{x-y}$

c) $f(x,y) = \dfrac{x^2y - 2xy^2}{x-2}$

3. Halla todas las funciones derivadas parciales terceras de:

a) $z = 3x^2y + y^4 + 10$

b) $z = 2x^3y^5 + x^6 + y$

4. Encuentre las derivadas parciales indicadas

a) $f(x,y,z) = \cos(4xy) + z$; f_{xyz}

b) $f(x,y,z) = y\ln(4xz) + x$; $\dfrac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial x}$

5. Calcula las derivadas parciales de z por derivación implícita

a) $e^{xy} + e^{yz} = 0$

b) $x\ln y + y^2z + z^2 = 8$

6. Prueba que si $w = f(r-s, s-t, t-r)$, entonces $\dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{\partial w}{\partial s} + \dfrac{\partial w}{\partial t} = 0$

7. Calcula la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $z = -x^2 - y^2 + 9$ con el plano y = -1 en el punto P(1,-1,7). Representa la intersección con un gráfico en 3D.

8. Ídem ejercicio anterior para la superficie $z = 6 - x - 2y$, con el plano x = 1 en el punto P (1,2, 2).

9. La *ecuación diferencial parcial*: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ se llama ***Ecuación de Laplace.*** Las ***soluciones u(x,y)*** de esta ecuación se denominan ***Funciones Armónicas*** y desempeñan un importante papel en problemas de conducción de calor, movimientos de fluidos, y potencial eléctrico.

a) Verifica que $u(x,y) = e^x sen(y)$ es una función armónica.

10. En un estudio de penetración de la escarcha en las heladas, se encontró que la temperatura T en el tiempo t (expresado en días) a una profundidad x (expresada en metros) puede describirse mediante la función $T(t,x) = T_0 + T_1 e^{-\lambda x} sen(\varpi t - \lambda x)$, donde $\varpi = 2\pi/365$, T_0 y T_1 son constantes y λ es una constante positiva.

a) Encuentra T_x, ¿Cuál es su significado físico?

b) Encuentra T_t, ¿Cuál es su significado físico?

c) Demuestra que *T* satisface la ecuación de calor $T_t = kT_{xx}$ para cierta constante k.

11. Utiliza la tabla de valores de $f(x,y)$ para estimar los valores de:

$f_x(3,2) \approx$

$f_x(3,\ 2.2) \approx$

$f_{xy}(3,2) \approx$

x / y	1,8	2	2,2
2,5	**12,5**	**10,2**	**9,3**
3	**18**	**17,5**	**15,9**
3,5	**20**	**22,4**	**26,1**

12. Dada la función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Calcula $f_x(0,0)$ *y* $f_y(0,0)$ por definición *(observa que no puedes usar las reglas de derivación).*

b) Utiliza un sofward para calcular $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ cuando $(x,y) \neq (0,0)$.

c) Verifica (por definición) que $f_{xy}(0,0) = -1$ y $f_{yx}(0,0) = 1$.

d) ¿Contradice esto el teorema donde dice que las derivadas cruzadas son iguales?

13. Se dan las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de dos proyectiles. ¿A qué ritmo está cambiando la distancia entre ellos en el valor específico de $t = \pi/2$

primer objeto: $\begin{cases} x_1(t) = 10\cos 2t \\ y_1(t) = 6sen2t \end{cases}$ **segundo objeto:** $\begin{cases} x_2(t) = 7\cos t \\ y_2(t) = 4sent \end{cases}$

14. Analiza las siguientes funciones, indica los espacios en los que se encuentra el dominio y la imagen, y forma todas las composiciones posibles de dos funciones ¿en cuáles de estas composiciones se puede realizar una derivada ordinaria? ¿y en cuáles derivadas parciales?

$f(x,y) = x^2 y + 3x$ $\qquad \vec{r}(t) = 2t^2\hat{i} + 3\hat{j}$ $\qquad \vec{u} = 2r\vec{i} + 3.(2r)\vec{j}$

$G(u,v,w) = w\hat{i} + 5\cos(u)\hat{j}$ $\qquad F(x,y,z,w) = yw\hat{i} + z\hat{j} + 5\hat{k}$

GUÍA DE ACTIVIDADES N°4:

Derivadas direccionales y gradiente

TEORÍA NECESARIA: Incrementos de f(x,y) según una dirección, según un vector, según un ángulo. Derivada direccional. Definición, aproximación numérica, interpretación. Variación de la derivada direccional en un punto del dominio. Gradiente. La derivada direccional y la curva de nivel. Aplicación de la notación vectorial. Representación gráfica.

---

1) Busca en la bibliografía sugerida por la cátedra, y escribe:

a) La definición general de derivada direccional.

b) La definición anterior usando notación vectorial.

2) Sea $f(x,y)$ una función con derivadas parciales continuas:

a) Si $g(t)=f(x(t),y(t))$ donde $x(t)=x_0+tu_1$ e $y(t)=y_0+tu_2$, utiliza la regla de la cadena para hallar la expresión de $g'(t)$ y luego halla $g'(0)$.

(Cuando** $u=u_1\hat{i}+u_2\hat{j}$ **es un vector unitario** $x(t)$ **e** $y(t)$ **representan la ecuación paramétrica de una recta que pasa por el punto** $P(x_0,y_0)$ **en la dirección de u y** $|t|$ **mide la distancia a lo largo de la recta desde el punto P.)

b) ***Conclusión:*** Si $u=(u_1,u_2)$ es un versor y f es diferenciable, entonces podemos calcular $D_u f(x,y)$ con la formula $D_u f(x,y)$ = ______________________________

3) Para la función $f(x,y)=x^2+3y^2$, el punto $P=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{6}\right)$.

a) Determina el gradiente de *f* en el punto *P*, calcula su ángulo y evalúa la derivada en dicha dirección.

b) Calcula la derivada direccional de *f* en el punto *P*, para los ángulos:

$\theta_1 = 90°$, $\theta_2 = -45°$, $\theta_3 = 210°$, $\theta_4 = 120°$

c) Representa gráficamente los vectores ∇f , V_1 , V_2 , V_3 , V_4 , y calcula el ángulo comprendido entre cada vector y el vector gradiente.

d) Con los resultados obtenidos completa la siguiente tabla

	Ángulo (θ_i)	Versor director	$D_u\ f(x,y)$	Ángulo entre ∇f y (θ_i)
∇f				
θ_1				
θ_2				
θ_3				
θ_4				

e) ¿Qué relación existe entre la derivada con la dirección del gradiente y las otras derivadas direccionales en un punto? ¿Qué otras conclusiones puedes sacar?

4) Calcula las derivadas direccionales, con los ángulos y los puntos del dominio indicados.

a)	$z = 2x^2 + 5y^2$	P(1,-1)	$\theta = (1/4)\pi$
b)	$z = 6x^2 - y^2$	P(0,1)	$\theta = 45°$
c)	$z = xy^3 - x^2$	P(-1,1)	$\theta = 60°$

5) Calcula la derivada direccional en el punto P y en la dirección $\overrightarrow{PQ}$. Para cada función grafica los vectores $\overrightarrow{PQ}$, ∇z.

a)	$z = x^2 - 6y^2$	P(1,1)	Q(4,5)
b)	$z = 2yx^2 + 3xy^2$	P(1,2)	Q(5,3)

6) Encuentra la razón de cambio de *f* en el punto P, en la dirección del vector $\vec{v}$.

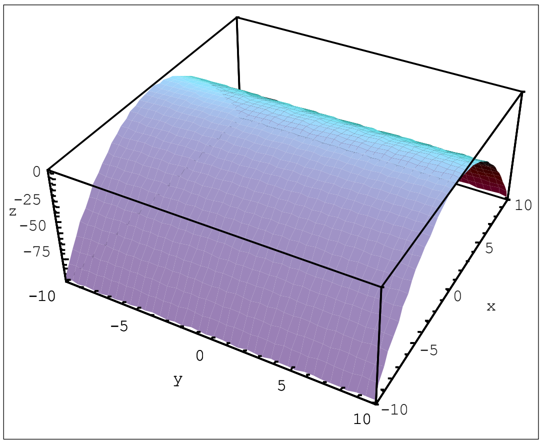
a)	$f(x,y) = yx^2 + xy^2$	P(-1,1)	$\vec{v} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$
b)	$f(x,y,z) = xy + z^2$	P(1,1,1)	$\vec{v} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}$
c)	$f(x,y,z) = zx + 3x^3 + 1$	P(-1,5,2)	$\vec{v} = -3\hat{j} + \sqrt{7}\hat{k}$

7) Contesta Verdadero (V) o Falso (F), justificando tus respuestas:

a) La mínima derivada direccional de una función en un punto P es $-\nabla f(p)$ _____.

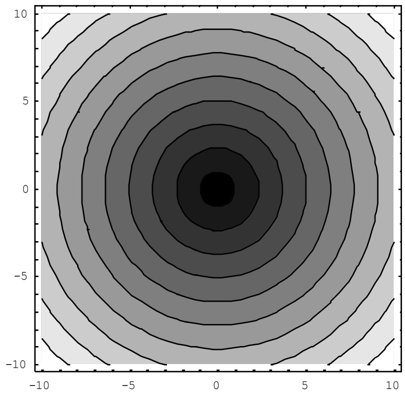
b) Si $\nabla f(a,b) \neq (0,0)$, entonces la derivada direccional de una función en un punto P según la dirección del vector $\vec{u}$ que se encuentra a 90º del eje x es nula_________.

c) Dada la función *f* cuya gráfica se muestra a continuación: →



i) La máxima tasa de variación de la función en el punto P(-5; 0) es $f_x(-5;0)$ ___________.

ii) La derivada direccional en el punto P(-5; 0), en la dirección $\vec{v} = \hat{j}$ es negativa_________.



d) La siguiente figura muestra el mapa de contorno (curvas de nivel) de una función diferenciable $f(x,y)$, (lo más oscuro representa menor altura). ←

i) La derivada de *f* en el punto (0,-5) en la dirección del vector $\vec{v} = \hat{i} - \hat{j}$ es negativa_____________.

ii) La derivada de *f* en el punto (0,-5) en la dirección del vector $\vec{v} = \hat{i}$ es nula_______.

APLICACIONES

8) Si la temperatura en cualquier punto de una placa rectangular situada en el plano xy está dada por la siguiente función: $T(x,y) = 3x^2 + 2xy$; y la distancia se mide en metros:

a) Calcula la máxima tasa de variación de la temperatura en el punto P(3,-6) de la placa.

b) Determinar la dirección para la cual ocurre esta tasa de variación máxima en P.

9) La ecuación de la superficie de una montaña es: $z = 1200 - 9x^2 - 4y^2$, donde la distancia se mide en metros, el eje x apunta hacia el este y el eje y hacia el norte. Un alpinista se encuentra en el punto (3, 3, 1083).

a) ¿Cuál es la dirección de máximo ascenso?

b) Si el alpinista se desplaza en dirección este, ¿Asciende o desciende y a qué tasa?

c) Si el alpinista se desplaza en dirección sur -oeste, ¿Asciende o desciende y a qué tasa?

d) ¿En qué dirección se mantendrá en alpinista a la misma altura?

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

10) ¿Qué indica la derivada direccional en un punto P según la dirección del vector u?

11) ¿Cuándo es mínima la derivada direccional de una función en un punto? ¿Cuándo es 0 ?¿Cuándo es la mitad de su valor máximo?

12) Completa de manera que las siguientes afirmaciones sean verdaderas

a) La derivada direccional de una función en un punto P según la dirección del vector $\vec{u}$ es de magnitud ……………………………………………………………………………………

b) Si $\nabla f(a,b) \neq (0,0)$, entonces la derivada direccional de una función en un punto P según la dirección del vector $\vec{u}$ es nula cuando ……………………………………………………..

c) El gradiente de una función en un punto (a,b) es $\nabla f(a,b) =$ ………….........., es de magnitud……………. y su módulo nos da ……………………………………………."

EJERCITACIÓN ADICIONAL

1. Considera la función $z = 3x + y^2 + 2$:

a) Tomando en cuenta los incrementos Δx = 0,02 y Δy = 0,01, calcula el siguiente cociente incremental $\frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{z(2+\Delta x, 1+\Delta y) - z(2,1)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$ y grafica en plano *xy* el vector $\vec{v}$ que representa la variación simultánea de las variables x e y, a partir del punto P(2,1).

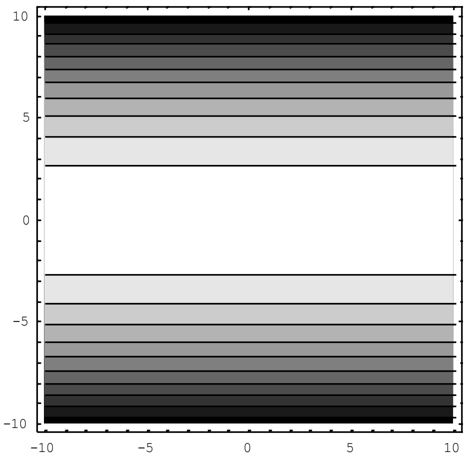
b) Interpreta por qué el cociente hallado es una estimación de la derivada direccional de la función z, en la dirección del vector $\vec{v}$, en el punto P(2,1).

c) Encuentra la derivada direccional con los datos del problema, y compara con la estimación obtenida en el inciso **a).**

2. Calcula las derivadas direccionales con la información brindada para cada función, en los puntos indicados:

a)	$z = 5/(x - y)$	P(2,1)	$\theta = 90°$
b)	$z = x.y$	P(2,1)	$\theta = 120°$
c)	$z = 1/(2x^2 + 5y^2)$	P(-2,-1)	Q(-4,0)
d)	$z = \sqrt{x^2 + y^2}$	P(1,-1)	Q(1,5)
e)	$f(x,y) = 6x^2 - 2xy + y^2$	P(1,-2)	$\vec{v} = -2\hat{i} + 1\hat{j}$
f)	$f(x,y) = 6x^2 - xye^x$	P(0,2)	$\vec{v} = -2\hat{i} + 1\hat{j}$

3. La siguiente figura muestra el mapa de contorno (curvas de nivel) de una función (lo más oscuro representa menor altura). Contesta verdadero (V) o falso (F), y justifica tu respuesta →



d) **i)** La derivada de f en el punto (5,-5) en la dirección del vector $\vec{v} = \hat{i} + \hat{j}$ es positiva____________.

e) **ii)** La dirección donde se obtiene la máxima tasa de variación de f en el punto (5,-5) es $\vec{v} = \hat{i}$ __.

4. Suponga que la Temperatura en un punto (x,y,z) del espacio (en grados Celsius) está dada por : $w = 100 - x^2 - y^2 - z^2$. Las unidades del espacio son metros.

x/y	**0**	**2**	**4**	**6**	**8**
0	30	38	45	51	55
2	52	56	60	62	61
4	78	74	72	68	66
6	98	87	80	75	71
8	96	90	86	80	75
10	92	92	91	87	78

a) Determine la razón de cambio de la temperatura en el punto P(3, -4, 5) en la dirección del vector v = 3i - 4j + 2k.

b) ¿En qué dirección aumenta la temperatura más rápidamente en P? ¿Cuál es el valor de la máxima derivada direccional en P?

5. Una placa metálica está situada en el plano xy y ocupa el rectángulo $0 \le x \le 10$; $0 \le y \le 10$ donde x e y se miden en metros. La temperatura en el punto (x,y) del plano es T(x,y) donde T se mide en grados Celsius. Se midió la temperatura en puntos igualmente espaciados y se registraron los valores en la tabla.

a) Estima el valor de la derivada parcial T_X (6,4). ¿Cuáles son las unidades?

b) Estima la razón de cambio de la temperatura en el punto (6,4) cuando x permanece constante en 6m.

c) Estima el valor $D_U T$ (6,4) donde $\vec{u} = (-\hat{i} - \hat{j}) / \sqrt{2}$. Interpreta el resultado.

d) Encuentra una aproximación lineal de la variación de la temperatura cuando nos movemos del punto P_A(6, 4) al punto P_B(5, 3).

6. Si $g(x, y) = x - y^2$, encuentra el vector gradiente $\nabla g(3,-1)$ y utilízalo para hallar la recta tangente a la curva de nivel $g(x, y) = 2$ en el punto (3,-1). Trace la curva de nivel, la recta tangente y en vector gradiente.

GUÍA DE ACTIVIDADES N°5:

Diferenciales y análisis de extremos

TEORÍA NECESARIA: La función diferenciable z = f(x,y) y su diferencial total de primer orden: definiciones, representación gráfica, interpretación y aplicación. Diferencial total de una función en R^3 y de funciones compuestas. Estudio de extremos absolutos, relativos y condicionados. Definiciones, condiciones, interpretaciones y aplicaciones.

FUNCIONES DIFERENCIABLES Y DIFERENCIAL TOTAL

1) Busca en la bibliografía y escribe la definición de función diferenciable.

Prueba por definición que las siguientes funciones son diferenciables, halla los valores ε_1 y ε_2 que requiere la definición, y verifica que ε_1 y ε_2 tienden a 0 cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$

a) $f(x,y) = x + y^2 + 1$
b) $f(x,y) = xy$

2) Busca en la bibliografía y enuncia un teorema que garantice ***la diferenciabilidad de una función de dos variables en un punto***. ¿Qué condición debería cumplir la función para ser diferenciable en todo su dominio?

3) Demuestra que las siguientes funciones son diferenciables en todo su dominio.

a) $f(x,y) = 16 - e^x - xy^2$
b) $f(x,y) = 2y\,sen(1/x)$

4) Busca en la bibliografía y escribe la definición de diferencial total. ¿Cómo se representa gráficamente?

5) Para cada una de las siguientes funciones:

5.1) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{2} + yx - \dfrac{y^2}{2}$ en P(1,2) para $\Delta x = -0.02$; $\Delta y = 0.01$

5.2) $f(x,y) = -y\cos(x)$ en P(0,0) para $\Delta x = 0.1$; $\Delta y = -0,2$

a) Halla las expresiones de diferenciales totales para las siguientes funciones.

b) Calcula el incremento total y diferencial total de las siguientes funciones para el punto y los incrementos que se indican

c) ¿Cuál es el error porcentual que se comete al considerar diferencial total en lugar del incremento?

6) Calcula el error absoluto y relativo al determinar el área de un rectángulo, teniendo en cuenta que los lados miden 15cm y 20cm, con un posible error de 0,1cm para cada medición, utilizando:

a) incremento total,

b) diferencial total

Identifica gráficamente las regiones que representan ΔA, dA, e $(\Delta A - dA)$.

7) Una caja rectangular cerrada mide 80cm, 60cm y 50cm en sus tres dimensiones, con un error posible en la medición de 0,2 cm en cada una. Utilice diferenciales para estimar el error máximo posible en el cálculo del área superficial de la caja.

8) Utiliza diferenciales para estimar la cantidad de estaño que hay en el interior de una lata cerrada con diámetro interior de 8cm y altura interior de 12cm, si el recubrimiento de estaño tiene un grosor de 0,04cm.

PLANOS TANGENTES Y RECTAS NORMALES A LA SUPERFICIE

9) Plantea las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a las superficies dadas en los puntos indicados.

a) $z = 4 - x^2 - y^2$ en P(-1,1,2)

b) $z = e^x(\operatorname{sen} y + 1)$ en P(0, π ,1)

c) $z = x^2\cos(y) + 2e^y$ en P(-1,0,3)

10) Plantea las siguientes superficies como superficies de nivel de alguna función ***F(x,y,z)=0*** y utiliza el gradiente de F para obtener las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal, en los puntos indicados.

a) $x^2 = 12y$ en P(6,3,1)

b) $x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$ en P(2,2,4)

11) Encuentra una aproximación lineal de la función $f(x,y) = \ln(x - 3y) + x$ en el punto (7,2) para aproximar *f* (6.9, 1.95).

12) Encuentra una aproximación lineal de la función $f(x,y) = x^4y + 3y^2$ en el punto (1,-1) para aproximar *f* (0.91, -1.02).

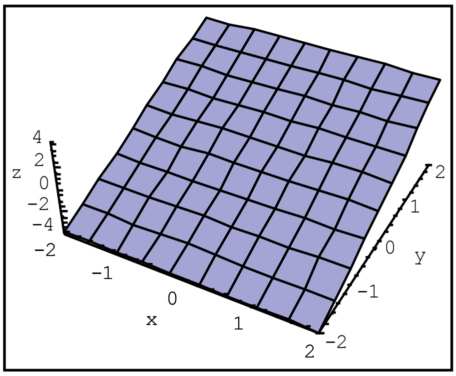
13) Encuentra una función adecuada, utiliza la ecuación del plano tangente en un punto adecuado, y a partir de allí estima el valor de $\left[0.99e^{0.02}\right]^8$.

14) Dada un función z=f(x,y) diferenciable en R^2, se sabe que el plano tangente al gráfico de f en el punto (1,2,1) es z= 3x+2y-6. Halle la derivada direccional de f en el punto (1,2) en la dirección que une el punto (1,2) con el punto (3,4).

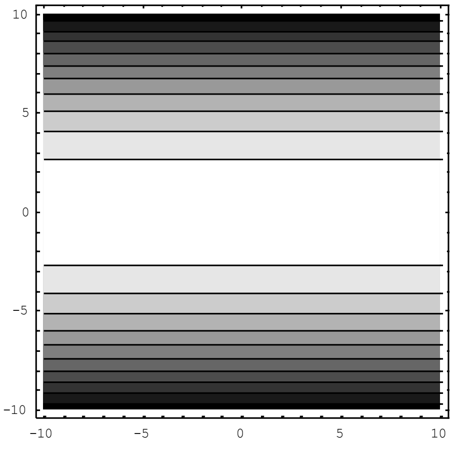
15) Contesta verdadero (V) o falso (F) justificando la respuesta:

a) Si f es una función diferenciable y $\nabla f(a,b) = (0,0)$, entonces el plano tangente a la gráfica de la función en el punto $(a,b,f(a,b))$ es $z = f(a,b)$ …………………….

b) El plano tangente a la gráfica de la función que muestra la siguiente figura en el punto (0,0,0) coincide con la función. ……………………. →



c) Existe una función diferenciable f(x,y) cuyo diferencial total es $df = (3x + y)dx + (3x - y)dy$ …………………….



d) El incremento total de la función, cuyo mapa de contorno se muestra en la siguiente figura, en el punto (0,-5) cuando $\Delta x = 0{,}5$ y $\Delta y = -0{,}8$ es negativo. (En la escala de grises, más oscuro representa menor altura) …………………….

←

EXTREMOS RELATIVOS

16) Busca en la bibliografía y define punto crítico, extremo relativo y extremo absoluto.

17) Halla, si existen, los extremos relativos o puntos de ensilladura de las siguientes funciones.

- **a)** $f(x,y) = x^2 - 4x + y^2 + 6y + 25$
- **b)** $f(x,y) = x^3 - 3x + y^3$
- **c)** $f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4 + 1$

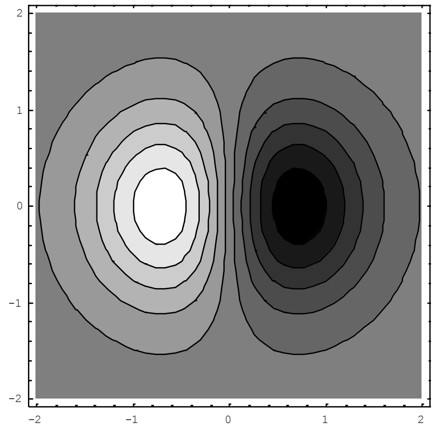
18) Un fabricante produce cada día ***x*** unidades del artículo A e ***y*** unidades del artículo B. ***Si P(x,y) = 33x + 66y + xy - x² - 3y²*** dólares es la utilidad diaria por la venta de los artículos. ¿Cuántas unidades de cada artículo debe producir el fabricante cada día de modo que obtenga la máxima utilidad?.

19) Busca en la bibliografía propuesta por la cátedra y enuncia el Teorema de existencia de máximos y mínimos absolutos.

20) Sea $f: R^2 \to R$ tal que $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$

- **a)** Verifica que la función alcanza un mínimo relativo en (0,0)
- **b)** Realiza un mapa de contorno (curvas de nivel) de la función y determina si dicho extremo es o no un extreme absoluto.

21) Observando el siguiente mapa de contorno (→) correspondiente a una función diferenciable, responde:



- **a)** ¿Podría existir un extremo relativo en (0,0)?. Justifica
- **b)** ¿Dónde tendría la función un máximo o un mínimo relativo?
- **c)** Si el dominio de la función es el cuadrado $D = \{(x,y) / -2 \le x \le 2 \wedge -2 \le y \le 2\}$ ¿Dónde tendría la función un máximo o un mínimo absoluto?

EXTREMOS CONDICIONADOS

22) Halla los extremos de las siguientes funciones con las condiciones dadas.

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4$ con la condición $x - y = 1$ ***(representa gráficamente)***

b) $f(x,y) = 16 - x^2 - y^2$ con la condición $x + y = 3$ ***(representa gráficamente)***

c) $f(x,y) = 4 - x^2$ con la condición $x + y = 4$ ***(representa gráficamente)***

23) Halla las dimensiones de una caja rectangular de capacidad máxima, si su superficie mide 216 cm^2.

24) Encuentra la distancia más corta del punto P(2, -2, 3) al plano $6x + 4y - 3z = 1$.

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

25) Calcula el diferencial total de la función compuesta $f(x,y) = x^2 + 2xy$, siendo: $x(t) = 4e^t$ y $y(t) = 3$

26) Busca en la bibliografía sugerida una función que no alcance extremo en alguno de sus puntos críticos.

27) **Justifica** por qué son **falsas** las siguientes afirmaciones indicando un contraejemplo.

- **a)** Si una función *f* tiene un máximo relativo en el punto (x_0, y_0) entonces $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$
- **b)** Si existen las derivadas parciales en un punto entonces la función es diferenciable en ese punto.
- **c)** Si una función tiene un extremo condicionado en (a,b) entonces también tiene un extremo relativo (sin restricciones) en (a,b).
- **d)** Si en punto (a,b) cualquiera el Hessiano de una función es positivo ($H(a,b) > 0$) entonces la función tiene un extremo relativo en ese punto.

28) ¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para que existan extremos en funciones de dos variables independientes?

29) ¿Cuál es la diferencia entre extremo relativo y extremo absoluto?

EJERCITACIÓN ADICIONAL

1. El radio de la base y la altura de un cono circular miden 12cm y 30cm respectivamente, pero hay un posible error en la medición de 0,2cm como máximo en cada uno. Utiliza diferenciales para estimar el error máximo en el volumen calculado del cono.

2. Utiliza diferenciales para estimar el error relativo al determinar el área de un triángulo, teniendo en cuenta que su altura mide 25cm y su base 20cm, con un posible error de 0,05 cm para cada medición.

3. Reconoce cuál de las siguientes expresiones diferenciales es una diferencial total o también denominada diferencial exacta:

a) $4xy^2dx - x^2ydy$ **b)** $4xy^2dx + x^2ydy$ **c)** $4xy^2dx + 4x^2ydy$

4. Dada la siguiente expresión diferencial total: $dU = TdS - pdV$

a) Interpreta lo que significan *"T"*, y *"-p"*, en dicha expresión[1] .

b) Aplica la igualdad de las derivadas cruzadas a dicha expresión e interpreta el resultado.

5. Si la siguiente expresión, $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p$ (que es una de las relaciones de Maxwell), resulta de la igualdad de las derivadas cruzadas correspondiente a una diferencial total dH . Elige y justifica cuál de las siguientes expresiones es la verdadera diferencial total o diferencial total de origen dH :

$$dH = TdS + Vdp \quad \text{ó} \quad dH = -SdT + Vdp$$

6. Plantea las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a las superficies dadas en los puntos indicados.

a) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ en P(2,2,1)

b) $z = x^2 - 2xy + y^2$ en P(1,2,1)

c) $z = x^2 + y^2 - z^2 = -1$ en P(0,0,1)

7. Encuentra una aproximación lineal de la función $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$ en el punto (1,2) para aproximar *f* (0,99 ; 2,01).

8. Encuentra una aproximación lineal de la función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ en el punto (4,4) para aproximar *f* (4,01 ; 3,98).

9. ¿Dónde corta el eje *z* al plano tangente a la superficie $z = e^{(x-y)}$ en el punto P(1,1,1)?

10. Halla, si existen, los extremos relativos o puntos de ensilladura de la función $f(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2$, siendo *a* y *b* números reales cualesquiera.

11. Halla los extremos de las siguientes funciones con las condiciones dadas.

a) $f(x, y, z) = x - y + z$ con la condición $x^2 + y^2 + z^2 = 2$

b) $f(x, y) = e^{xy}$ con la condición $x^2 + y^2 = 8$

[1] Por ahora debes saber los nombres de algunas propiedades termodinámicas aquí expresadas: U energía interna, H entalpía, S entropía, mientras que T, p y V ya las conoces.

12. Encuentra el punto de la parábola $y^2 = 9x$ cuya distancia al (1,0) es mínima:

a) Usando multiplicadores de Lagrange.
b) Susituyendo para trabajar con una función de una variable.

Sugerencia: *se recomienda trabajar con la función de la forma x(y).*

13. Si $f(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2$, determina el punto del plano x + y + z = 5 en el cual f(x,y,z) es mínimo.

14. Un envase cilíndrico debe tener capacidad de un litro. ¿Cómo debe diseñarse el envase para minimizar el material empleado?

15. Mostrar que el volumen del mayor paralelepípedo rectangular que puede inscribirse dentro del elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ es $V=\dfrac{8abc}{3\sqrt{3}}$.

16. ¿Por qué podrían llamarse las gráficas de $f(x,y)=x^2+y^2$ y $g(x,y)=-x^2-y^2+xy^3$ "tangentes" en (0,0)?

17. Sea $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$

a) Sea $\vec{u}=a\hat{i}+b\hat{j}$ es un versor con $a\neq 0$.Utiliza la definición de derivada direccional para demostrar que existe la derivada direccional en el punto (0,0) en la dirección de $\bar{u}$ y que $D_u f(0,0)=b^2/a$.

b) Encuentra el gradiente de la función en (0,0).

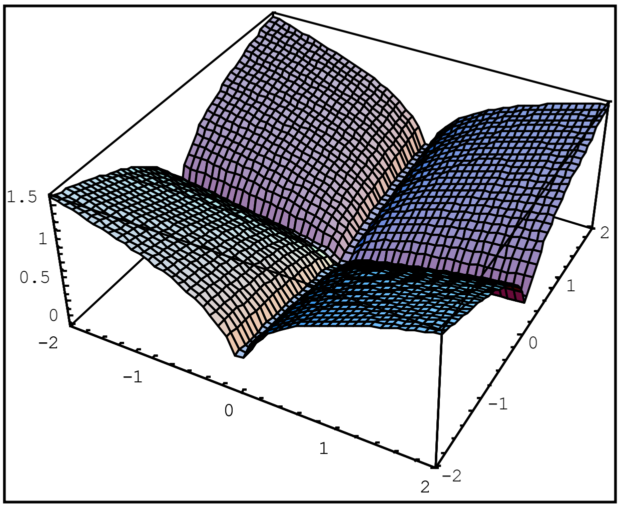
c) Demuestra que el límite doble de la función no existe cuando (x,y) tiende a (0,0). ¿Qué puedes decir acerca de la continuidad de la función?

d) ¿Se cumple la fórmula $D_u f(0,0)=\nabla f(0,0)\bullet\vec{u}$? ¿Por qué?

18. Observa la siguiente gráfica correspondiente a la función $f(x,y)=\sqrt[3]{|x.y|}$

a) Verifica que la función es continua en el origen y que las derivadas parciales existen en el origen pero no existen derivadas direccionales en alguna otra dirección (analiza los cortes y = mx).

b) ¿Es diferenciable la función en (0,0)?



GUÍA DE ACTIVIDADES N°6:

Integrales múltiples

TEORÍA NECESARIA: Integral Doble: recinto, partición, norma e integrando: definición y existencia. Interpretación geométrica. Evaluación: integrales reiteradas o sucesivas. Integración sobre regiones no rectangulares. Regiones tipo I y tipo II. Aplicaciones de la integral doble. Integral triple: definición, interpretación y cálculo. Aplicaciones.

---

1) Define integral doble con interpretación de todos y cada uno de los aspectos y condiciones de la definición y de la existencia. Completa la explicación con ayuda de pasos auxiliares y gráficos.

2) Dada la integral $\iint_R (x+y)dA$ donde R es un rectángulo de vértices (0,0); (4,0); (4,2); (0,2).

a) Aproxima el valor de la integral dividiendo el rectángulo ***R*** en ocho cuadrados iguales y calculando la suma $\sum_{i=1}^{8} f(x_i, y_i)dA_i$

b) Evalúa la integral doble mediante integrales iteradas Tipo I y Tipo II y compara el resultado con la aproximación.

3) Presenta en forma analítica genérica la integración iterada de una $z = f(x,y)$:

a) para un recinto de integración no rectangular tipo I;

b) para un recinto de integración no rectangular tipo II;

c) expresa analítica y gráficamente los respectivos recintos.

4) Halla las expresiones de los recintos correspondientes a las siguientes integrales dobles, clasifícalos (según sea de tipo I ó de tipo II) y enúncialos analítica y gráficamente. Luego expresa las integrales dobles que resultan de invertir, en cada una de ellas, el orden de integración**.**

a) $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dydx$

b) $\int_0^1 \int_{2x}^{3x} f(x,y)dydx$

c) $\int_0^4 \int_y^{10-y} f(x,y)dxdy$

d) $\int_0^2 \int_{\frac{1}{2}y+1}^{-y+4} f(x,y)dxdy$

e) $\int_0^2 \int_{\frac{y^2}{2}}^{\frac{y}{2}+3} f(x,y)dxdy$

f) $\int_0^2 \int_{x/2}^{2x} f(x,y)dydx + \int_2^4 \int_{x/2}^{4} f(x,y)dydx$

5) Evalúa las siguientes integrales iteradas:

a) $\int_2^3 \int_1^2 yx\sqrt{x^2+1}.dydx$

b) $\int_0^2 \int_{3x}^{6x} (1+e^y x).dydx$

c) $\int_0^1 \int_0^y y^2 sen(xy)dxdy$

d) $\int_0^{\pi/4} \int_0^2 \int_0^{2-r} rz.dzdrd\theta$

e) $\int_0^2 \int_{\frac{1}{2}y+1}^{-y+4} (y+1).dxdy$

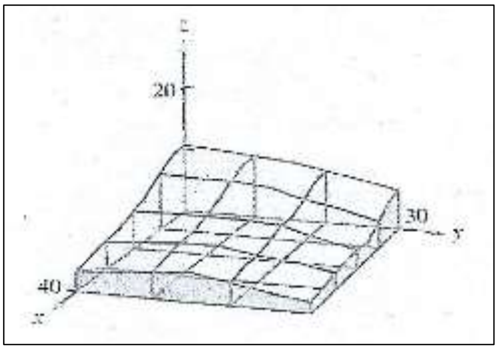
f) $\int_1^e \int_{\ln x}^{2} \frac{y}{x}.dydx$

g) $\int_0^1 \int_x^{2x-2} \int_{x-y}^{y} 2.dzdydx$

APLICACIONES

6) Las entradas de la tabla dan la profundidad de tierra (en metros) en el centro de cada uno de los cuadros de la figura. Aproxima el número de metros cúbicos de tierra en el primer octante de esa figura. Esta exploración fue sugerida por Robert Vojack, Ridgewood High School, Ridgewood, NJ.

x/y	10	20	30
10	10	9	7
20	7	7	4
30	5	5	4
40	4	5	3



7) Calcula el área de las siguientes regiones limitadas por las gráficas de las ecuaciones:

a) $y = -x$, $\quad y = 2x + x^2$

b) $x = y^2 - 2y$; $\quad x + y = 0$

c) $x^2 + y^2 = 16$

8) Determina el volumen de los siguientes sólidos acotados por las superficies dadas:

a) $2x + 3y + 4z = 12$; $\quad x = 0$; $\quad y = 0$; $\quad z = 0$.

b) $z = x + y + 2$; $\quad z = 0$; $\quad y^2 - 4x = 0$; $\quad x = 2$

c) $z = \ln(x^2 + y^2)$; $\quad x^2 + y^2 \le 4$; $\quad x^2 + y^2 \ge 1$; $\quad z = 0$

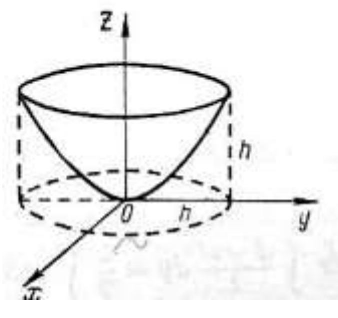
d) $z = 2 - x$; $\quad x^2 + y^2 = 4$; $\quad z = 0$

e) $z = 4 - x^2$; $\quad x + y = 4$; $\quad y = 0$; $\quad z = 0$

(observa la gráfica del ejercicio 22 ***c)*** *del TP* ***5, extremo condicionado****)*

f) $4z = x^2 + y^2$ $\quad z = 4$

(observa la figura y considere h=4) **Rta=** 32π



9) La temperatura en cada punto del cubo $C=\{(x,y,z)/-1\leq x\leq 1;-1\leq y\leq 1;-1\leq z\leq 1\}$ es 32 veces el cuadrado de la distancia del punto al origen.

- **a)** ¿Cuál es la temperatura media?
- **b)** ¿En qué punto del cubo es la temperatura igual a la temperatura media?

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

10) Define integral triple y compara con la definición de integral doble dada en el ejercicio **1)**

11) Presenta analíticamente la integral triple de $f(x,y,z)$ en la región $E(x,y,z)$ en coordenadas cilíndricas.

12) En coordenadas cilíndricas la gráfica de r = 6 representa: ....

13) En coordenadas cilíndricas la gráfica de $\theta = \pi/4$ representa: ....

14) Describe y dibuja la región dada por el conjunto de puntos $P(\rho,\theta,\phi)$ cuyas coordenadas esféricas satisfacen las ecuaciones simultáneas:

a) $\rho=1 \quad 0\leq\phi\leq\frac{\pi}{2} \quad 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ **b)** $\rho=2 \quad 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$

15) Grafica el recinto de integración y completa:

$$\int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^2 dydxdz=\int_0^2\int_0^1\int_{....}^{....}dxdzdy=\int_{....}^{....}\int_{....}^{....}\int_{....}^{....}dzdydx$$

¿qué calculas con esta integral?

EJERCITACIÓN ADICIONAL

1. Expresa analítica y gráficamente los recintos correspondientes a las siguientes integrales dobles. Luego expresa las integrales dobles que resultan de invertir, en cada una de ellas, el orden de integración**.**

a) $\int_{-1}^{1}\int_{y}^{y^2+1} f(x,y)dxdy$

b) $\int_{-1}^{2}\int_{x^2+1}^{x+3} f(x,y)dydx$

c) $\int_{-2}^{0}\int_{-y}^{2} f(x,y)dxdy + \int_{0}^{4}\int_{\sqrt{y}}^{2} f(x,y)dxdy$

d) $\int_{0}^{2}\int_{3x^2}^{6x} f(x,y)dydx$

e) $\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} f(x,y)dydx$

2. Evalúa las siguientes integrales iteradas:

a) $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\pi} ysen(3x).dxdy$

b) $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2}\int_{1}^{3} dzdxdy$

c) $\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{\cos\theta} 3r^2 sen\theta.drd\theta$

d) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{-x}\int_{x+y}^{2xy} 6z.dzdydx$

e) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{1} ye^{xy}.dxdy$

3. Calcula el área de las siguientes regiones limitadas por las gráficas de las ecuaciones:

a) $xy = 9$; $y = x$; $y = 0$; $x = 9$

b) $3y^2 = 25x$, $5x^2 = 9y$ *(Rta= 5)*

c) $y = 4x - x^2$, $y = 2x^2 - 5x$, *(Rta= 27/2)*

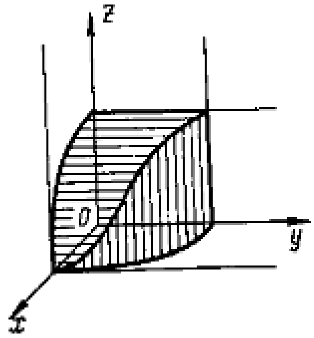
4. Determina el volumen de los siguientes sólidos acotados por las superficies dadas:

a) $z = e^{x-y}$; $x + y = 1$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$

b) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

c) $y = 4 - x^2$; $z = 4 - x^2$; $z = 0$; $y = 0$ (primer octante)

d) $x^2 + y^2 = a^2$; $x^2 + z^2 = a^2$ (obresve la figura) →



5. Una placa de oro labrada D está definida por $0 \le x \le 2\pi$ y $0 \le y \le \pi$ *(centímetros)* y tiene una densidad de masa $\rho(x,y) = y^2 sen^2(4x) + 2$ *(gramos por centímetros cuadrado).* Si el oro se vende a ***26,23 €*** por gramo (según cotización del día 30/05/2016), ¿Cuánto vale el oro de la placa?

GUÍA DE ACTIVIDADES N°7:

Integrales de línea.

TEORÍA NECESARIA: Integral de Línea: Curvas en el plano, representación escalar y vectorial. Curvas en el espacio, representación vectorial. Recinto curvilíneo, partición, norma e integrando. Campos vectoriales y función potencial. Definición y condiciones de existencia. Interpretación geométrica. Integral de Línea completa o integrando como expresión diferencial total. Evaluación ó cálculo. Teorema de Green. Teorema fundamental de las integrales de línea y su relación con dependencia e independencia de la trayectoria. Aplicaciones: longitud de arco, trabajo y otras. Formulación e interpretación vectorial.

FUNCIONES VECTORIALES

1) Dada la función $y = f(x)$ encuentra su función asociada $\vec{r}(t): R \to R^2$

a) $y = 2x^2 + x$ entre (0,0) y (1,3)

b) $y = 3$ entre (-1,3) y (1,3)

c) $y = x + 2$ entre (-2,0) y (2,4)

CAMPOS VECTORIALES

2) Busca en la bibliografía y define campo vectorial conservativo y función potencial.

3) Dados los siguientes campos vectoriales, determina si son conservativos. Si es así determina su función potencial.

a) $\vec{F}(x,y) = (x^2 - 2y)\hat{i} + (y - 2x)\hat{j}$

b) $\vec{F}(x,y) = 2e^{2x}\hat{i} + xe^{2y}\hat{j}$

c) $\vec{F}(x,y) = y\hat{i} + (x+1)\hat{j}$

4) Sea $\vec{F}$ el campo gravitacional cerca de la superficie de la tierra, esto es $\vec{F} = -mg\hat{k}$, (o de otra manera $\vec{F}(x,y,z) = (0,0,-mg)$) *¿cuál es su función potencial?* (no realices cálculos)

INTEGRAL CURVILÍNEA

5) Define integral de línea con recinto curvilíneo plano. Define e interpreta todos y cada uno de los aspectos y condiciones de la definición y de la existencia. Completa la explicación con ayuda de pasos auxiliares y gráficos.

6) Explica la forma de calcular o evaluar la integral de línea definida en el ítem anterior.

7) Resuelve las siguientes integrales de línea a lo largo de trayectorias $\int_C f.ds$ donde:

a) $f(x,y) = 4xy$; $\vec{r}(t) = t\hat{i} + (2-t)\hat{j}$ $0 \le t \le 2$

b) $f(x,y,z)=z$; C: $x=\cos(t)$; $y=sen(t)$; $z=t$ $\quad 0\le t\le \pi$

c) $f(x,y)=2x-y$ C: $x=t^4$; $y=t^4$ $\quad -1\le t\le 1$

d) $f(x,y,z)=yz$; $\vec r(t)=\hat i+2\hat j+t^2\hat k$ $\quad t\in[0,1]$

8) Resuelve las siguientes integrales de línea:

a) $\int_C xydx+x^2dy$ donde C: $y=x^3$ para $-1\le x\le 2$

b) $\int_C ydx+xdy$ entre los puntos (0,0) y (1,1) para:

i) C: $y=x^2$, $0\le x\le 1$
ii) C: $y=27t^3$, $x=3t$, $0\le t\le \frac{1}{3}$

c) $\int_C (x+y)dx+(y-x)dy$ entre $A=(0,1)$ y $B=(1,0)$ para:

i) C: $x=\cos(t)$; $y=sen(t)$
ii) la curva dada por el segmento AB

d) $\int_C (2x+y)dx+xydy$ donde C: $y=x+3$ entre los puntos (0,3) y (2,5)

e) $\int_C \vec F\bullet d\vec r$ donde $\vec F(x,y,z)=y\hat i+y\hat j+-5z\vec k$

y $\vec r(t)=3\cos(t)\hat i+3sen(t)\hat j+t\hat k$ en I = [0, 2π].

- Para resolver te servirá recordar la siguiente identidad trigonométrica: $sen^2(t)=\frac{1-\cos(2t)}{2}$

9) Busca en la bibliografía y enuncia el ***Teorema Fundamental para Integrales de Línea***.

10) Dado el campo vectorial $\vec F(x,y)=(3y^2+2x)\hat i+(6xy-4)\hat j$ y la curva $\vec r(t)=(t-1)\hat i+2t\hat j$:

a. Evalúa $\int_C \vec F\bullet d\vec r$ en I = [1,2]

b. Si se sabe que alguna de las siguientes expresiones corresponde a la Función Potencial de $\vec F(x,y)$, elige la adecuada para verificar el resultado obtenido anteriormente, utilizando el *Teorema Fundamental para Integrales de Línea.*

i. $f(x,y)=3xy^2+x^2-3y^2$
ii. $f(x,y)=3xy^2+x^2-4y$
iii. $f(x,y)=2x^3+3y^2x^2-4y^2$

c. ¿Cómo hubieras obtenido la función potencial seleccionada en el punto anterior? Describe sin resolver.

11) Verifica el resultado obtenido en el ejercicio **8 b)** utilizando el *Teorema Fundamental para Integrales de Línea.*

12) Dado el campo escalar $f(x,y) = yx\operatorname{sen}(y)$ evalúa $\oint_C \nabla f \bullet d\vec{r}$ sobre cualquier trayectoria cerrada C.

Teorema de Green:

Sea C una curva en el plano, cerrada, suave a trozos, orientada positivamente y sea D la región acotada por C. Sean $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ campos escalares con derivadas parciales continuas en un recinto abierto que incluye a D con su frontera, entonces:

$$\oint_C (Pdx + Qdy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

13) Evalúa la integral $\oint_C e^{2x}.dx + xy.dy$ donde ***C*** es la curva cerrada orientada positivamente formada por la frontera de la región encerrada por las gráficas de $y = x^2 + 1$ e $y = x + 3$.

a. Utiliza algún método alternativo para verificar el resultado obtenido anteriormente.

b. ¿Qué puedes asegurar en cuanto a la dependencia/independencia de la trayectoria entre los puntos (-1;2) y (2;5)?

14) Evalúa las siguientes integrales y verifica aplicando el Teorema de Green.

a) $\oint_C (x^2 + y^2)dx + 2xydy$ en la curva cerrada simple indicada en la **figura 1**

b) $\oint 2xydx - 3x^2 dy$ donde C es la curva dada en la **figura 2**.

c) $\oint (2x - y)dx + (x + 3y)dy$ donde C es la curva dada en la **figura 3**.

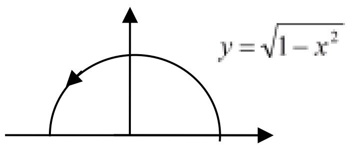


FIG. 1

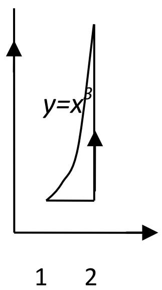


FIG. 2

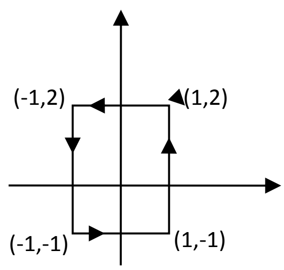


FIG. 3

APLICACIONES

15) Calcula la longitud de arco de las siguientes curvas:

a. $\vec{r}(t) = 2t\hat{i} + 3t\hat{j}$ en I = [0,1]

b. $\vec{r}(t) = 3\cos(t)\hat{i} + 3sen(t)\hat{j} + t\hat{k}$ en I = [0, 2π]

c. $y = 2x + 3$ entre (-1,1) y (1,5)

16) Calcula la masa de un alambre semicircular descripto por la mitad superior de un circulo unitario $x^2 + y^2 = 1$ si su densidad está dada por $\rho(x, y) = 2 + x^2 y$.

17) Considera el campo de fuerza dado en el ejercicio **3.** Calcula el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la parábola $y = x^2$, $z = 0$, $-1 \le x \le 2$.

18) Determina el trabajo que realiza el campo de fuerza $F(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$ sobre una partícula que se mueve a lo largo del segmento rectilíneo que va de (1,0,0) a (3,4,2).

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

19) Presenta y explica el caso de la integral de línea a lo largo de una curva cerrada simple cuando hay independencia de la trayectoria. Relaciona con el teorema de Green.

20) Explica cómo y por qué se puede evaluar trabajo con una integral de línea. Busca un ejemplo resuelto en la bibliografía y transcríbelo e interpreta.

21) Explica como modificarías la definición de integral de línea dada en el ejercicio **7)** cuando se integra respecto de una curva alabeada (curva que no es plana).

22) Enuncia tres condiciones necesarias y suficientes para campo vectorial conservativo.

23) Establece alguna relación entre diferencial total, gradiente, integral de línea y campo vectorial conservativo

24) Describe y dibuje el conjunto de puntos $P(r, \theta, z)$ cuyas coordenadas cilíndricas satisfacen las ecuaciones simultáneas:

a) r =2 ; $\theta = \frac{\pi}{4}$

b) $\theta = \frac{\pi}{2}$; z = r

EJERCITACIÓN ADICIONAL

1. Representa gráficamente las siguientes funciones vectoriales del tipo: $\vec{r}(t): I \to R^2$ o bien $\vec{r}(t): I \to R^3$ donde I es un intervalo real:

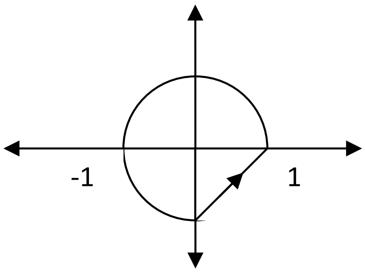
   a) $\vec{r}(t) = 2t\hat{i} + 3t\hat{j}$ en I = [0,1]

   b) $\vec{r}(t) = (t-4)\hat{i} + \sqrt{t}\,\hat{j}$ en I = [0,4]

   c) $\vec{r}(t) = 3\cos(t)\hat{i} + 3sen(t)\,\hat{j} + t\hat{k}$ en I = [0, 2π]

2. Dado el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, demuestra que:
   $Div(\vec{F}) = 3$ y $Rot(\vec{F}) = \vec{0}$.

3. Evalúa la siguientes integral $\oint_C \vec{F}..d\vec{r}$, donde $\vec{F}(x,y) = y\hat{i} - x\hat{j}$ y C es la curva dada en la figura. Luego verifica aplicando el Teorema de Green.



4. Demuestra que la integral de línea $I = \int_C 2xydx + x^2dy$ es independiente de la trayectoria entre los puntos A(-1,1) y B(2,4). Luego verifica la independencia calculando **I** por dos trayectorias diferentes.

5. Supongamos que la semicircunferencia de radio *a*, parametrizada por: $x = 0$, $y = asen\theta$, $z = a\cos\theta$, $0 \le \theta \le \pi$, está hecha de un alambre con densidad uniforme de 2 gramos por unidad de longitud, ¿Cuál es la masa total del alambre?

6. La base de una cerca circular con radio de 10m se expresa por medio de $x = 10\cos t$, $y = 10sent$, la altura de la cerca en la posición (x, y) está dada por la función $h(x,y) = 4 + 0.01(x^2 - y^2)$, de modo que la altura varía entre 3 y 5 metros. Supone que 1 l. de pintura cubre 100m^2. Dibuja un boceto de la cerca y calcula cuánta pintura necesitarás si pintas ambos lados de la cerca.

7. Determina el trabajo que realiza el campo de fuerza $F(x,y) = x\hat{i} + (y+2)\hat{j}$ al mover un objeto a lo largo de un arco cicloide $\vec{r}(t) = (t - sent)i + (1 - \cos t)j$, $0 \le t \le 2\pi$.

8. **a)** Utiliza el Teorema de Green para justificar la siguiente afirmación: *"Si la curva **C** (orientada positivamente) representa la frontera de la región **R**, se tiene que*

$$área(R) = \oint_C -\frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy \text{ ''}$$

   b) Utiliza la integral anterior para determinar el área de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

[Ten en cuenta que las ecuaciones paramétricas de la elipse son $x = a\cos t$ *,* $y = b\,\text{sen}\,t$ *,* $0 \le t \le 2\pi$ *]*

GUÍA DE ACTIVIDADES N°8:

Introducción a las Ecuaciones Diferenciales y EDO de 1°Orden

TEORÍA NECESARIA: *Las ecuaciones diferenciales para modelar fenómenos naturales y otros. Su resolución e interpretación. Tipos de ecuaciones diferenciales: ordinarias y parciales. Orden y linealidad. Tipos de solución, concepto de existencia y unicidad. Problemas de valor inicial y problemas de valor en frontera Sistemas de ecuaciones diferenciales. Método de separación de variables.* Ecuaciones diferenciales exactas y su resolución. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden y su resolución.

Ecuaciones Diferenciales: tipo y orden

1) Utilizando la bibliografía de consulta propuesta por la cátedra, define los siguientes ítems, dejando indicado el nombre y autor del libro, y el N° de página de donde obtuviste dicha información. Recuerda que tu carpeta es el mejor material de estudio.

- **a)** Define ecuación diferencial.
- **b)** Define ecuación diferencial ordinaria.
- **c)** Define ecuación diferencial en derivadas parciales.
- **d)** Define sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.
- **e)** Explica qué significa resolver las ecuaciones (b), (c) y (d).
- **f)** ¿Qué significa orden de una ecuación diferencial?

2) Presentamos las siguientes ecuaciones diferenciales junto con el área o campo donde surge. Clasifícalas según el tipo (E.D.O. o E.D.P o S.E.D).

EJERCICIO	E.D.	Descripción	Clasificación
a)	$3\dfrac{d^2x}{dt^2}+4\dfrac{dx}{dt}+9x=2\cos(3t)$	*Vibraciones mecánicas, circuitos eléctricos,* ***sismología.***	
b)	$y''-2xy'+2y=0$	*Ecuación de Hermite,* ***mecánica cuántica****, oscilador armónico*	
c)	$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y(2-3x)}{x(1-3y)}$	*Competencia entre dos especies,* ***ecología****.*	
d)	$\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$	*Ec. de Laplace,* ***teoría de potencial, electricidad, calor, aerodinámica***	
e)	$\begin{cases}\dfrac{dS}{dt}=-aSI\\ \dfrac{dI}{dt}=aSI-bI\end{cases}$ *a >0 , b>0*	*Modelos epidérmicos de la difusión de una enfermedad,* **medicina**	
f)	$\dfrac{\partial N}{\partial t}=\dfrac{\partial^2N}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial N}{\partial r}+kN$, *k=cte.*	Ec. de Fusión Nuclear, **termoquímica.**	
g)	$\dfrac{dx}{dt}=(4-x)(1-x)$	*Velocidad de reacción química.*	

3) Verifica que las siguientes funciones son soluciones de las E.D. dadas:

EJERCICIO	SOLUCIONES	E.D.
a)	$\frac{1}{y^2}=\frac{2}{x}+C$	$\frac{dy}{dx}=\frac{y^3}{x^2}$
b)	$y=Cx-1$	$xy'-y=1$
c)	$u(x,t)=sen(x-2t)$	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
d)	$y=\frac{senx}{x}$	$xy'+y=\cos x$

EDO DE 1° ORDEN

4) Enuncia un teorema que garantice que es posible encontrar una única solución del problema con valor inicial: $y'=f(x,y)$, $y(x_0)=y_0$

Variables Separables

5) Halla la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales. Luego verifica la respuesta por sustitución.

a) $(x^2+4)y'=xy$

b) $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{t}}{x}$

c) $xy'=4y+1$

d) $x(y-3)dy-4ydx=0$

EDO Exactas

6) Define y presenta una ecuación diferencial exacta.

7) Encuentra la familia de funciones que resuelve cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales exactas.

a) $ydx=-(x+1)dy$

b) $(5x+4y)dx+(4x-8y^3)dy=0$

c) $(\cos x+y)y'=ysenx$

d) $(y/x)dx+\ln(x)dy=0$

EDO Lineales

8) Define y presenta una ecuación diferencial ordinaria lineal de orden "n".

9) Halla las soluciones generales de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales.

a) $y'+y=5$

b) $(x^2+16)\frac{dy}{dx}=-xy$

c) $xy'-2y=x^3e^{3x}$

d) $\frac{dy}{dx}+\frac{2xy}{x^2+1}=x$

Soluciones particulares

10) Encuentra las soluciones particulares de las siguientes EDO con las respectivas condiciones iniciales dadas. Indica el método utilizado.

a) $\left(xy^2 + x\right)dx + \left(yx^2 + y\right)dy = 0$ $\quad y(0) = 2$

b) $y' = \dfrac{x + 2sen(3x)}{3\cos(2y)}$ $\quad y = \dfrac{1}{4}\pi \ \wedge x = 0$

c) $x\dfrac{dy}{dx} - 2x^2 y = 6x^2$ $\quad y(1) = 2$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x(2-3x)}{(1-3y)}$ $\quad x = 1 \ \wedge \ y = -1$

e) $(y-1)dx + (x-3)dy = 0$ $\quad y(1) = 0{,}2$

f) $2xydy = (x^2 - y^2)dx$ $\quad y(2) = 1$

APLICACIONES

Trayectoria de un buscador o rastreador térmico

11) Un rastreador de calor se encuentra en el punto $P = (8, -12)$ sobre una placa metálica cuya temperatura en el punto (x, y) es $T(x, y) = 500 - 3x^2 - 2y^2$. El rastreador se mueve continuamente en la dirección del incremento máximo de temperatura.

a) Encuentra las ecuaciones que se deducen para obtener la trayectoria del rastreador.
b) Halla las ecuaciones paramétricas de su trayectoria.

Ley de enfriamiento de Newton

12) Un vino tinto se saca de la cava, donde estaba a 10°C y se deja respirar en un cuarto con temperatura de 23°C. Si se necesitan 10 minutos para que el vino llegue a los 15°C, ¿en qué momento llegará la temperatura del vino a los 18°C?

13) Una cerveza fría, inicialmente a 2°C, se calienta hasta 5°C en 3 minutos, estando en un cuarto con temperatura 22°C. ¿Qué tan caliente estará la cerveza si se deja ahí durante 20 minutos?

Crecimiento de Población

14) Se sabe que, en cualquier instante, la población de cierta comunidad aumenta con una rapidez proporcional al número de personas presentes. Encuentra alguna relación que represente la población en función del tiempo, *P(t).* Si se conoce que la población se duplicó en 5 años, ¿en cuánto tiempo se triplicará?

Desintegración radiactiva

15) La vida media del cobalto radiactivo es de 5,27 años. Si como consecuencia de un accidente nuclear, el nivel de Co ascendió a 25 veces el nivel aceptable para la vida humana, ¿cuánto tiempo pasará para que la región vuelva a ser habitable?

16) El C^{14} extraído de un esqueleto hallado es 2/3 del C^{14} que forma parte del hueso de una persona que vive. ¿Cuál es la antigüedad de ese esqueleto? (la vida media del C^{14} es de 5600 años).

Ley de Kirchhoff

17) La suma algebraica de las fuerzas electromotrices en torno a un circuito cerrado es cero. Cuando no hay condensador, este principio puede ser expresado en la forma: $L\dfrac{dI}{dt}+RI=E(t)$ donde **I** es la corriente (en Amperes = [A]), **R** la resistencia (en Ohm = [Ω]), **L** la inductancia (en Henrios = [H]) y **E** la fuerza electromotriz (en Volts = [V]) – *Problemas similares serán trabajados en la cátedra de FÍSICA II*

a. Determina la corriente ***I(t)*** si se aplica una fuerza electromotriz de 30volts a un circuito en serie RL con 0,1henrios de inductancia y 50ohms de resistencia. Se sabe que ***I(0) = 0.***

b. Determina la forma general de la corriente ***I(t)*** si se aplica una fuerza electromotriz $E(t)=E_0e^{-kt}$ a un circuito en serie RL a un el circuito con corriente inicial $\mathbf{I_0}$ en t = 0

Decaimiento radiactivo

18) Una roca contiene dos isótopos radiactivos $\mathbf{RA_1}$ y $\mathbf{RA_2}$, que pertenecen a la misma serie radiactiva (RA_1 decae en RA_2 quien luego decae en átomos estables). Supone que la tasa con la que RA_1 decae en RA_2 es: $40e^{-20t}\ Kg/s$. Como la razón de decaimiento de RA_2 es proporcional a la masa presente ***y(t)*** de RA_2, su razón de cambio es:

$$\frac{dy}{dt}=raz\acute{o}n\ de\ creaci\acute{o}n-raz\acute{o}n\ de\ decaimineto=40e^{-20t}-ky$$

Si *k = 5/s* e inicialmente $y(0)=10Kg$, determina la masa $y(t)$ de RA_2**.**

Mezcla

Si $S(t)$ es la cantidad de una sustancia en un compartimento en el instante ***t***, entonces la tasa de cambio $S'(t)$ puede calcularse con la ***Ley de equilibrio***:

$$Tasa\ de\ cambio\ neta\ \left(\frac{dS}{dt}\right)=tasa\ de\ entrada-tasa\ de\ salida$$

$$\frac{dS}{dt}=C(t).FE\ -\frac{S(t)}{V(t)}.FS$$

Dónde: $C(t)=concentraci\acute{o}n\ de\ la\ soluci\acute{o}n\ que\ entra$

$FE=flujo\ de\ entrada$

$FS=flujo\ de\ salida$

$V(t)=volumen\ de\ la\ soluci\acute{o}n\ dentro\ del\ compartimento$

19) Un tanque contiene S_0 Kg de sal disueltos en 5000 litros de agua. Al mismo, ingresa salmuera con una concentración C(t) kg por litro de agua en el instante ***t,*** a razón de 25 L/min. La solución se mantiene completamente mezclada, y el tanque va drenando con la misma rapidez.

a. Encuentra una relación que describa el problema de valor inicial para la cantidad de sal acumulada.

b. Resuelve el problema si se tiene una cantidad inicial de 15 Kg de sal disueltos en el tanque y entra salmuera con una concentración de 0.4 Kg de sal por litro de agua.

c. Con los datos anteriores ¿Cuánta sal permanece en el tanque después de media hora?

d. La ecuación diferencial de este problema ¿puede resolverse por más de un método?

20) Había inicialmente 10g de sal disueltos en 500L de agua, en un tanque adecuado. En cierto instante (*t*=0) comienza a entrar en el tanque agua que contiene una concentración de sal de 1g/L a razón de 2L/min. Hay un mecanismo que permite una buena disolución. Al mismo tiempo, también sale solución a 2L/min.

a. Halla la cantidad de sal como función del tiempo. A largo plazo, ¿qué sucede con la cantidad de sal en el tanque? Interpreta el resultado.

b. Resuelve el problema inicial suponiendo que entra agua pura al tanque. Interpreta qué sucede a largo tiempo.

c. Resuelve el problema inicial suponiendo que sale del tanque un litro más de lo que entra. ¿Cuál será el periodo de tiempo en que será válido el modelo?

d. Resuelve el problema inicial suponiendo que entra en el tanque un litro más de los que sale. Si el tanque pudiera contener, a lo sumo 5000L, ¿cuál será el periodo de tiempo en que será válido el modelo?

EJERCITACIÓN ADICIONAL

1. Contesta Verdadero (V) o Falso (F) justificando las respuestas:

a) La función $u(x,y)=e^{x}sen(y)$ es solución de la ecuación diferencial $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

b) La ecuación diferencial $\dfrac{dx}{dt}=(4-x)(1-x)$ es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.

c) $\dfrac{2}{y^3}=\dfrac{3}{x^2}+C$ es solución de la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^4}{x^3}$

d) La ecuación $\dfrac{\partial N}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 N}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial N}{\partial r}+kN$ es una ecuación diferencial en derivadas parciales de primer orden.

e) El campo escalar $u(x,t)=\cos(2x-t)$ no es solución de la ecuación diferencial $4\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

f) Si f es una función real derivable en R, entonces la función u dada por $u(x,y)=f(x^2y)$ es solución de la ecuación $x\frac{\partial u}{\partial x}-2y\frac{\partial u}{\partial y}=0$.

2. Determina cuáles de las siguientes ecuaciones diferenciales pueden resolverse por el método de: variables separables, lineales ***y/o*** exactas *(recuerda que a veces, una misma ED puede resolverse por más de un método).* Luego encuentra la solución general de cada una de ellas indicando el método utilizado.

a) $\dfrac{dy}{dx}=2x+y$

b) $-ysen(x)dx+\cos(x)dy=0$

c) $\ln(x)-y'-3xy=9$

d) $y'-4y=2x-4x^2$

e) $(4x+1)dx-2ydy=0$

f) $\dfrac{dy}{dx}+5x=-x^2-y$

g) $\dfrac{y}{x}dx+\ln(x)dy=0$

h) $uv'=4v$

i) $\dfrac{dx}{dt}=10\sqrt{t}$

j) $y'=x^2y-y+x^2-1$

k) $(3y^2-2x)dx=-6xydy$

l) $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2y}{x}=5x^2e^{x}$

m) $y'=2y+t\left(e^{3t}-e^{2t}\right)$

n) $(x^2-2y)dx+(y-2x)dy=0$

o) $(y^3-y^2senx)dx+(3xy^2+2y\cos x)dy=0$

p) $y'+ysen(x)=2xe^{\cos(x)}$

q) $6xydx+(3x^2+2y)dy=0$

3. Encuentra las soluciones particulares de las siguientes EDO con las condiciones iniciales dadas. Indica el método utilizado.

a) $y' = 2y + xy'$ $\quad$ $y(-1) = 0$

b) $y' + 4x + 4 = x^2$ $\quad$ $y = -6 \;;\; x = 3$

c) $dy + (y - xe^x)dx = 0$ $\quad$ $y(1) = -1$

d) $y' = \dfrac{\cos(3x)}{sen(2y)}$ $\quad$ $y = \dfrac{1}{3}\pi;\; x = \dfrac{1}{2}\pi$

e) $y' + x + 1 = 2e^x$ $\quad$ $y(0) = -6$

f) $\dfrac{dy}{dx} - 6y = x$ $\quad$ $y(0) = 1$

4. Dada la función $F(x,y) = xe^{xy} + y$, escribe una ecuación diferencial exacta cuya solución general sea $F(x,y) = C$.

5. Expresa la forma general de la ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden completa y deduce la forma general de resolución por el método del factor integrante.

6. ¿Bajo qué condiciones $[f(x) + g(y)]dx + [h(x) + p(y)]dy = 0$ es exacta?

7. Verifica la siguiente propiedad: "Si y_1 es una solución de $y' + P(x)y = R(x)$ y y_2 es una solución de $y' + P(x)y = 0$ entonces $y = y_1 + y_2$ es una solución de $y' + P(x)y = R(x)$" (esta propiedad es válida en ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden "n").

8. Demostrar en forma general que la vida media de una sustancia radiactiva es : $t = \dfrac{(t_2 - t_1).\ln(\frac{1}{2})}{\ln(A_2/A_1)}$ donde $A_1 = A(t_1)$ y $A_2 = A(t_2)$

9. Un cuerpo de 8 kgf de peso cae desde el reposo hacia la Tierra desde gran altura. A medida que cae, la resistencia del aire actúa sobre él. Supone que esta resistencia en kgf equivale numéricamente al doble de la velocidad, en m/s. Determina la velocidad y la distancia de caída en el tiempo t. Analiza la función resultante en el caso que $t \to \infty$. [***Sugerencia***: Por la ley de Newton se tiene que $F = m.a$, donde la fuerza resultante se obtiene por $R = F_1 - F_2 =$ *Fuerza peso-Resistencia del aire* y la masa $m = F_1 / g = 1/4$].

10. Considera la ecuación diferencial: $\dfrac{dy}{dx} = x + seny$

a. Analiza si es lineal, exacta o si se puede separar variables.

b. Una curva solución pasa por el punto (1, π/2) ¿Cuál es su pendiente en ese punto?

c. Justifica que cada curva solución es creciente para x>1.

d. Una curva solución pasa por (0,0).Prueba que la curva tiene un mínimo relativo en (0,0).

GUÍA DE ACTIVIDADES N°9:

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias LINEALES de 2° ORDEN

TEORÍA NECESARIA: Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden (EDOL de 2º Orden). Existencia y unicidad de solución. Problemas de valor inicial y de valor en la frontera. Dependencia e independencia lineal entre dos funciones escalares, el principio de superposición y la solución general de la EDOL de 2º orden homogénea. Resolución de la EDOL de 2º orden homogénea a coeficientes constantes. Resolución de la EDOL de 2º orden no homogénea a coeficientes constantes por el método de los coeficientes indeterminados. - Introducción a la resolución de EDOS por la Transformada de Laplace.

EDO Lineales de 2º ORDEN HOMOGÉNEAS

Recuerda que si tenemos una E.D.O.L. homogéneas del tipo: $ay''+by'+cy=0$, donde ***a***, ***b*** y ***c***, son constantes, la solución se obtiene con las raíces de la ecuación característica: $am^2+bm+c=0$ y se distinguen los siguientes casos:

CASO 1: Raíces reales distintas $m_1 \neq m_2$

Solución $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$

CASO 2: Raíces reales iguales $m := m_1 = m_2$

Solución $y = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx}$

CASO 3: Raíces complejas conjugadas $m_1 = \alpha + i\beta$ y $m_2 = \alpha - i\beta$

Solución $y = e^{\alpha x}\left(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \operatorname{sen}(\beta x)\right)$

1) Halla la solución general para las siguientes ecuaciones lineales de 2^{do} orden homogéneas

a) 2y'' + 10y' +12y = 0

b) y'' + 4y' + 5y = 0

c) y'' -2y' + y = 0

d) y'' + 4y' = 0

e) 15y'' - 16y' - 7y = 0

f) y'' + 6y' + 25y = 0

g) 9y'' + 6y' + y = 0

h) 2y'' + 2y = 0

2) Encuentra la solución particular de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales que verifiquen las respectivas condiciones iniciales dadas.

a) y'' - 3y' + 2y = 0 para y(0) = 0 ; y'(0) =1

b) y'' + y' - 2y = 0 para y(0) = 1; y'(0) = 1

c) y'' + 4y = 0 para y(0) = 0 ; y'(π) = 0

d) y'' - 2y' + y = 0 para y(0) = -1 ; y(1) = 0

EDO Lineales de 2º ORDEN NO HOMOGÉNEAS

MÉTODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS: Dada una E.D.O.L. **NO** homogénea con coeficientes constantes: $ay''+by'+cy=g(x)$, la solución general es de la forma $y=y_h+y_p$, donde y_h es la solución general de la ecuación homogénea asociada, y la y_p es una solución particular de la ecuación no homogénea. Si *g(x)* es una función polinómica, exponencial, trigonométrica, o combinación de ellas, la solución particular la proponemos del mismo tipo.

Ejemplo:

a) si $g(x)=x^n$ entonces proponemos $y_p=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$

b) si $g(x)=e^{\alpha x}$ entonces proponemos $y_p=Ae^{\alpha x}$

c) si $g(x)=sen(\beta x)$ entonces proponemos $y_p=A\cos(\beta x)+Bsen(\beta x)$

d) si $g(x)$ es combinación de alguna de estas funciones, la solución propuesta también lo es.

NOTA: *Si cualquier término de y_p es una solución de la ecuación homogénea asociada, se debe multiplicar dicho término por **x**, tantas veces como sea necesario, para que no sea combinación lineal de la misma.*

3) Encuentra la solución general para las siguientes ecuaciones lineales de 2do orden no homogéneas utilizando el método de los coeficientes indeterminados.

a) y'' - 2y' + y = x^3 + 4

b) y'' + 25y = 6sen(x)

c) y'' – y' = 2 + e^{-x}

d) y'' - 2y' - 3y = 6e^{2x} + 3x^3

4) Halla la solución particular de las siguientes ecuaciones diferenciales completas que verifiquen las respectivas condiciones iniciales dadas.

a) y'' + 4y' + 4y = 2x + 6	y(0) =2;	y'(0) = 1/2
b) y'' + y' = x^3	y(0) = 1;	y'(0) = 0
c) y'' - 2y' + 2y = 2x - 2	y(0) = 0;	y'(0) = 2
d) y'' + 4y' + 5y = 35 e^{-4x}	y(0) =-3 ;	y'(0) = 2
e) y''+ y = sen(x)	y(0)=1;	y'(0) = 0

APLICACIONES

5) Encuentra la ley de un movimiento rectilíneo $x(t)$ uniformemente desacelerado de dos metros por segundo por cada segundo. Se conoce las condiciones iniciales $x(0)=3$ m y $x'(0)=27m/s$.

6) De acuerdo con la ***Ley de Kirchhoff***, la suma algebraica de las fuerzas electromotrices en torno a un circuito cerrado simple que contiene una resistencia, una inductancia y un condensador es cero. Este principio puede ser expresado en la forma: (1) $L\dfrac{dI}{dt}+RI+\dfrac{1}{Ca}Q=E(t)$, donde L es la inductancia en henrios [H], Ca la capacitancia en faradios [F], Q la carga eléctrica en culombios [C] y E(t) es la fuerza electromotriz aplicada al circuito en Volts [V]. La corriente eléctrica expresa el flujo de carga $I=\dfrac{dQ}{dt}$ [C/s]

- **a.** Reemplaza I por $\dfrac{dQ}{dt}$ en la ecuación (1) para obtener una EDO lineal de 2do orden.
- **b.** Determina la carga Q del capacitor y la corriente en el circuito en serie LRC cuando, *L = 5/3H, R = 10*Ω*,* Ca *= 1/30 F, E(t) = 300V, Q(0) = 0C, I(0)=0A.*

7) El Movimiento armónico simple o libre no amortiguado de un sistema ***resorte-masa*** se describe por la siguiente ecuación

$$mx''(t) + kx(t) = 0 .$$

Si situamos una masa de 5Kg en un resorte, éste se alarga 10cm. Liberamos la masa 8cm por debajo de la posición de equilibrio. ¿Cuál es la ecuación del movimiento suponiendo un movimiento armónico simple?

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

1. Contesta verdadero o falso (justifica todas tus respuestas):

Dada la EDO lineal no homogénea $y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)$ **(1)**

y la EDO lineal homogénea $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ **(2),**

- ***a.*** $y\equiv 0$ (la *"solución trivial")* es una solución de **(2)** pero no de **(1).**
- ***b.*** La suma de dos soluciones de **(1)** es una solución de **(1).**
- ***c.*** La suma de dos soluciones de **(2)** es una solución de **(2).**
- ***d.*** La suma de una solución de **(1)** y de una solución de **(2),** es una solución de **(1).**
- ***e.*** La diferencia de dos soluciones de **(1)** es una solución de **(2).**
- ***f.*** Un múltiplo $y=cy_1$ de una solución de **(1)**, es una solución de **(1)**.

2. Explica los conceptos de existencia y unicidad, explica también su conexión con la resolución de ecuaciones diferenciales.

3. Explica los conceptos de independencia lineal de funciones, principio de superposición. Explica también, la vinculación de esos conceptos a la solución general de una EDOL de 2º orden.

4. Deduce la ecuación característica, indicando también cómo participa y en qué tipo de ecuaciones diferenciales.

5. Explica en qué consiste método de los coeficientes indeterminados y dónde se aplica.

6. Presenta e interpreta la transformada de Laplace. Explica la secuencia de resolución de una EDO utilizando esta transformada.

GUÍA DE ACTIVIDADES N°10:

MÉTODO DE EULER

TEORÍA NECESARIA: CÁLCULO NUMÉRICO: Aproximaciones, errores y su estimación. Introducción a los métodos iterativos para determinar raíces de ecuaciones. Concepto de análisis de convergencia, de estabilidad. Aproximación al cálculo de ecuaciones diferenciales: método de Euler.

ACTIVIDAD DE EVALUACIÓN PARA EL ALUMNO.

En clases y gracias a la guía de actividades N°8, los estudiantes han aprendido a desarrollar diferentes métodos de resolución analítica de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

Para resolver esta guía se propone la siguiente actividad grupal de autoaprendizaje (máximo 4 estudiantes por grupo) que consiste en:

1° Indagar bibliográficamente sobre el Método de Euler.

2° Analizar y fundamentar en forma general el algoritmo de resolución.

3° Seleccionar una ecuación diferencial de la Guía de Actividades N°8 para aplicar el método.

4° Aplicar el método de Euler a la ecuación diferencial elegida y obtener su solución numérica.

5° Calcular, de ser posible, el error relativo entre las solución numérica y la analítica.

6° Representar gráficamente el campo vectorial (campo de direcciones) que genera la ecuación diferencial seleccionada y relacionar con la solución numérica.

7° Analizar los resultados obtenidos y elaborar una conclusión.

8° Presentar en forma escrita los incisos anteriores y realizar una defensa oral grupal (coloquio). Para evaluar la instancia oral se utilizará la rúbrica de evaluación presentada en las páginas siguientes.

RÚBRICA DE EVALUACIÓN DOCENTE

INTEGRANTES DEL GRUPO:

1: ______________________________

2: ______________________________

3: ______________________________

4: ______________________________

FECHA: / / 2019

	EVALUACIÓN							
INDICADORES	**NECESITA MEJORAR**		**BUENO**		**MUY BUENO**		**EJEMPLAR**	
Representa la ED en la forma general requerida por el método y reconoce las condiciones de aplicación del método de Euler.	No presenta la forma general de la ED requerida por el método ni reconoce las condiciones de aplicación del método de Euler.		Presenta la forma general de la ED requerida por el método y reconoce parcialmente las condiciones de aplicación del método de Euler.		Presenta la forma general de la ED requerida por el método y reconoce las condiciones de aplicación del método de Euler.		Presenta la forma general de la ED requerida por el método y reconoce las condiciones que hacen válido el método de Euler, comprendiendo y asociando con el Teorema de existencia de EDO de primer orden.	
Explica el desarrollo del algoritmo fundamentando la validez de los pasos del algoritmo de resolución.	Presenta errores conceptuales en la explicación y fundamentación de los pasos.		Explica el desarrollo del algoritmo fundamentando parcialmente la validez de los pasos del algoritmo de resolución.		Explica el desarrollo del algoritmo fundamentando la validez de los pasos del algoritmo de resolución.		Explica el desarrollo del algoritmo fundamentando con la validez de los pasos del algoritmo de resolución y mostrando dominio* de los conceptos asociados.	
Identifica los datos para comenzar la aplicación del algoritmo de Euler y obtiene los valores de función dados por el algoritmo.	No identifica los datos al comenzar la aplicación del algoritmo y/o comete errores al obtener los valores de función.		Identifica los datos para comenzar la aplicación del algoritmo y/o comete errores al obtener los valores de función.		Identifica los datos para comenzar la aplicación del algoritmo de Euler y obtiene los valores de función dados por el algoritmo con errores leves.		Identifica los datos para comenzar la aplicación del algoritmo de Euler y obtiene los valores de función dados por el algoritmo explicando su relación con la fórmula genérica.	
Representa gráficamente el resultado y relaciona la curva obtenida con la gráfica del campo de direcciones.	No representa gráficamente el resultado y/o relaciona la curva obtenida con la gráfica del campo de direcciones.		Representa gráficamente el resultado y el campo de direcciones pero no los relaciona.		Representa gráficamente el resultado y relaciona la curva obtenida con la gráfica del campo de direcciones.		Utiliza un software para representar ambos gráficos y detalla la relación entre el vector imagen del campo vectorial y la curva solución.	

Argumenta y valida la solución obtenida.	No argumenta la solución obtenida.		Argumenta pero no valida la solución obtenida.		Argumenta y valida la solución obtenida.		Argumenta y valida la solución obteniendo sus propias conclusiones.	
Calcula el error relativo y compara la solución numérica con la analítica.	No calcula el error relativo		Calcula el error relativo pero no compara la solución numérica con la analítica.		Calcula el error relativo y compara la solución numérica con la analítica.		Calcula el error relativo y compara la solución numérica con la analítica obteniendo sus propias conclusiones en cuanto a la eficiencia del método.	
Utiliza el lenguaje matemático expresándose clara y ordenadamente.	No utiliza el lenguaje matemático.		Utiliza el lenguaje matemático presentando errores y no se expresa clara y ordenadamente		Utiliza el lenguaje matemático expresándose clara y ordenadamente		Utiliza en forma fluida el lenguaje matemático expresándose clara y ordenadamente.	
Identifica fortalezas y debilidades del método.	No Identifica ni fortalezas ni debilidades del método.		Identifica fortalezas pero no debilidades del método (o viceversa)		Identifica fortalezas y debilidades del método.		Identifica y explica fortalezas y debilidades del método, mencionando posibles aplicaciones.	
Se organizan en la comunicación oral grupal participando en forma equitativa.	No se organizan en la comunicación oral grupal.		Se organizan en la comunicación oral grupal participando en forma no equitativa.		Se organizan en la comunicación oral grupal participando en forma equitativa.		Se organizan en la comunicación oral grupal participando en forma equitativa y se complementan en la defensa oral como grupo.	

*dominio: se considera que muestra dominio del tema cuando al mencionar una propiedad o cálculo, lo interpreta gráficamente, lo asocia o compara con conceptos relacionados, o presenta ejemplos.

ACLARACIONES DEL DOCENTE: ____

____

____

____