Las EDO lineales de segundo orden

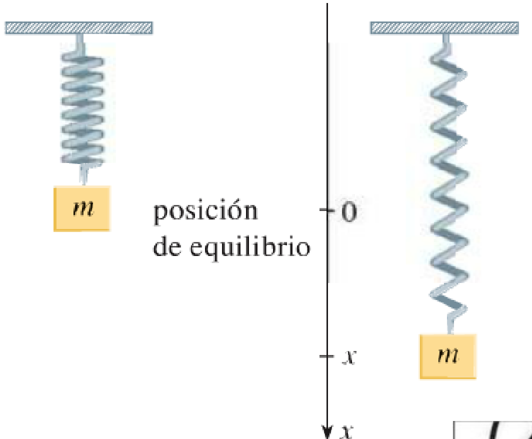
Guía de Estudio N°9
MATEMÁTICA III – Curso 2019
FCAI-UNCuyo

ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

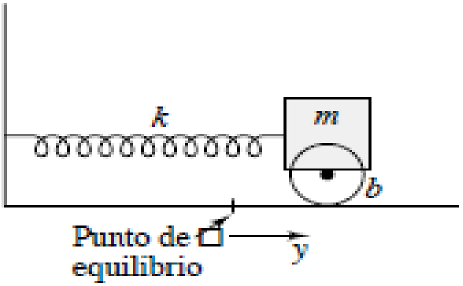
Modelo para el movimiento de un resorte:

Un oscilador masa-resorte amortiguado está formado por una masa m unida a un resorte fijo. Se diseña una EDO que gobierna su movimiento, considerando las fuerzas que actúan sobre él: Restauración (que depende de la elasticidad) , Fricción (amortiguamiento), Externas (influencias externas)

RESORTES VIBRATORIOS



VIBRACIONES AMORTIGUADAS



VIBRACIONES FORZADAS

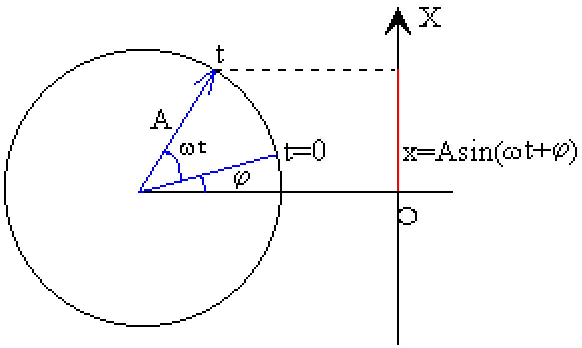
Ley de Hooke: *La fuerza ejercida por un resorte tendiente a restaurar el peso a la posición de equilibrio es proporcional al alargamiento*

$$F_{restauración} = -kx$$

https://www.youtube.com/watch?v=D8U4G5kcpcM

RESORTES VIBRATORIOS

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$



http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/oscilaciones/mas/mas.html

Movimiento armónico simple: *Solución* $x(t) = Acos(\omega t + \delta)$

A= amplitud ,
ω = frecuencia angular ω
φ = fase inicial

VIBRACIONES AMORTIGUADAS

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

La fuerza d e amortiguación es proporcional a la velocidad de la masa y actúa en dirección opuesta al movimiento

$$F_{amortiguación} = -c\frac{dx}{dt}$$

- **CASO I** $c^2 - 4mk > 0$ **(sobreamortiguamiento)** $x = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}$
- **CASO II** $c^2 - 4mk = 0$ **(amortiguamiento crítico)** $x = (c_1 + c_2t)e^{-(c/2m)t}$
- **CASO III** $c^2 - 4mk < 0$ **(subamortiguamiento)**

$$x = e^{-(c/2m)t}(c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t)$$

https://www.geogebra.org/m/zkfZ8FkH

VIBRACIONES FORZADAS

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \text{fuerza de restauración} + \text{fuerza de amortiguamiento} + \text{fuerza externa}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

Las EDO lineales de 2° Orden

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Sistema de resorte		Circuito eléctrico	
x	desplazamiento	Q	carga
dx/dt	velocidad	$I = dQ/dt$	corriente
m	masa	L	inductancia
c	constante de amortiguamiento	R	resistencia
k	constante de resorte	$1/C$	elastancia
$F(t)$	fuerza externa	$E(t)$	fuerza electromotriz

LEA e INTERPRETE

19.4 Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden

Una ecuación diferencial de orden n tiene la forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x),$$

en donde los coeficientes son solamente funciones de x, y $y^{(n)}$ significa d^ny/dx^n. Cuando $g(x) \neq 0$ se expresa además que la ecuación es **no homogénea**, mientras que si la ecuación es de la forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

se dice que es **homogénea***. Tanto en esta como en la siguiente sección se tratará solamente de obtener soluciones de ecuaciones lineales de segundo orden con *coeficientes constantes reales*:

$$ay'' + by' + cy = g(x).$$

LEA e INTERPRETE

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\frac{dy}{dx}+R(x)y=0$$

Aquí presentamos las EDO lineales de 2º orden Homogénea y No homogénea, según sea nulo o no el "término independiente"

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\frac{dy}{dx}+R(x)y=G(x)$$

Las EDO lineales de 2° Orden

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\frac{dy}{dx}+R(x)y=0 \qquad (1)$$

Principio de superposición para EDO lineales homogéneas:

TEOREMA: *Si $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son dos soluciones de la ecuación lineal homogénea (1) y c_1 y c_2 son constantes cualquiera, entonces la función*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2\, y_2(x)$$

También es solución de la ecuación (1).

Demostración:

LEA e INTERPRETE

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\frac{dy}{dx}+R(x)y=0 \qquad (1)$$

TEOREMA: *Dos soluciones* $y_1(x)$ *y* $y_2(x)$ *de la ecuación lineal (1), con P(x) nunca 0, son linealmente dependientes sobre ese intervalo si y sólo si su wronskiano*

$$W(y_1,y_2) := \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = y_1y'_2 - y_2y'_1$$

es idénticamente nulo.

TEOREMA: *Si* $y_1(x)$ *y* $y_2(x)$ *son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación lineal (1) y P(x) nunca es 0, entonces la solución general está dada por*

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2\, y_2(x)$$

donde c_1 *y* c_2 *son constantes arbitrarias.*

Las EDO lineales de 2° Orden

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

$$ay'' + by' + cy = 0$$

El hecho sorprendente acerca de la ecuación (19.16) es que *todas* las soluciones son funciones exponenciales, o bien se forman a partir de funciones exponenciales.

Ecuación auxiliar

Si se ensaya una solución de la forma $y = e^{mx}$, entonces $y' = me^{mx}$ y $y'' = m^2e^{mx}$ de modo que (19.16) se transforma en

$$am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0 \quad \text{o bien} \quad e^{mx}[am^2 + bm + c] = 0.$$

Como e^{mx} nunca se anula para valores reales de x, es evidente que la única manera de que esta función exponencial pueda satisfacer la ecuación diferencial es eligiendo m de modo que sea una raíz de la ecuación cuadrática

$$am^2 + bm + c = 0.$$

Esta última ecuación se llama la **ecuación auxiliar** o **ecuación característica** de la ecuación diferencial (19.16). Serán considerados tres casos, a saber, que la ecuación auxiliar tenga raíces reales distintas, raíces reales iguales y, por último, raíces complejas conjugadas.

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

CASO I $b^2 - 4ac > 0$

En este caso, las raíces r_1 y r_2 de la ecuación auxiliar son reales y distintas, así que $y_1 = e^{r_1 x}$ y $y_2 = e^{r_2 x}$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación 5. (Note que $e^{r_2 x}$ no es un múltiplo constante de $e^{r_1 x}$. Por lo tanto, por el teorema 4, se tiene el siguiente hecho.

8 Si las raíces r_1 y r_2 de la ecuación auxiliar $ar^2 + br + c = 0$ son reales y distintas, entonces la solución general de $ay'' + by' + cy = 0$ es

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

CASO II b^2-4ac=0

10 Si la ecuación auxiliar $ar^2 + br + c = 0$ tiene sólo una raíz real r, por lo tanto la solución general de $ay'' + by' + cy = 0$ es

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$$

Las EDO lineales de 2° Orden

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

Caso III Si m_1, y m_2 son complejos, entonces puede escribirse

$$m_1 = \alpha + i\beta \quad \text{y} \quad m_2 = \alpha - i\beta,$$

en donde α y β son reales, e $i^2 = -1$. En cuanto a la forma, no hay diferencia entre este caso y el Caso I, y por lo tanto la solución general es

$$y = c_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)x}. \tag{19.20}$$

fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta,$$

$$\begin{aligned} y &= e^{\alpha x}[c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x}] \\ &= e^{\alpha x}[c_1\{\cos\beta x + i\operatorname{sen}\beta x\} + c_2\{\cos\beta x - i\operatorname{sen}\beta x\}] \\ &= e^{\alpha x}[(c_1 + c_2)\cos\beta x + (c_1 i - c_2 i)\operatorname{sen}\beta x]. \end{aligned}$$

Como $e^{\alpha x}\cos\beta x$ y $e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial dada, es posible simplemente llamar C_1 a $c_1 + c_2$ y C_2 a $c_1 i - c_2 i$, y aplicar el principio de superposición para expresar la solución general

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x \\ &= e^{\alpha x}[C_1\cos\beta x + C_2\operatorname{sen}\beta x]. \end{aligned} \tag{19.21}$$

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

RESUMEN: SOLUCIONES DE $ay'' + by' + c = 0$

Raíces de $ar^2 + br + c = 0$	Solución general
r_1, r_2 reales y distintas	$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$
$r_1 = r_2 = r$	$y = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx}$
r_1, r_2 complejas: $\alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \operatorname{sen} \beta x)$

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

17.2 ECUACIONES LINEALES NO HOMOGÉNEAS

En esta sección se aprende cómo resolver ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden no homogéneas con coeficientes constantes, es decir, ecuaciones de la forma

$$ay'' + by' + cy = G(x) \tag{1}$$

donde a, b y c son constantes y G es una función continua. La ecuación homogénea relacionada

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{2}$$

se llama **ecuación complementaria** y juega un papel importante en la solución de la ecuación no homogénea original (1).

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

3 TEOREMA La solución general de la ecuación diferencial no homogénea (1) se puede escribir como

$$y(x) = y_p(x) + y_c(x)$$

donde y_p es una solución particular de la ecuación 1 y y_c es la solución general de la ecuación complementaria 2.

DEMOSTRACIÓN Todo lo que se tiene que hacer es comprobar que si y es alguna solución de la ecuación 1, por lo tanto $y - y_p$ es una solución de la ecuación complementaria 2. De hecho,

$$\begin{aligned} a(y - y_p)'' + b(y - y_p)' + c(y - y_p) &= ay'' - ay_p'' + by' - by_p' + cy - cy_p \\ &= (ay'' + by' + cy) - (ay_p'' + by_p' + cy_p) \\ &= g(x) - g(x) = 0 \end{aligned}$$

□

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

RESUMEN DEL MÉTODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS

1. Si $G(x) = e^{kx}P(x)$, donde P es un polinomio de grado n, en seguida intente $y_p(x) = e^{kx}Q(x)$, donde $Q(x)$ es un polinomio de n-ésimo grado (cuyos coeficientes están determinados por sustitución en la ecuación diferencial).

2. Si $G(x) = e^{kx}P(x) \cos mx$ o si $G(x) = e^{kx}P(x) \operatorname{sen} mx$, donde P es un polinomio de n-ésimo grado, en tal caso intente

$$y_p(x) = e^{kx}Q(x) \cos mx + e^{kx}R(x) \operatorname{sen} mx$$

donde Q y R son polinomios de n-ésimo grado.

Modificación: Si cualquier término de y_p es una solución de la ecuación complementaria, multiplique y_p por x (o por x^2 si es necesario).

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

Un **problema de valor inicial** es

Resolver: $$ay'' + by' + cy = g(x)$$

Sujeta a: $$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y'_0,$$

Problema de valor de frontera

$$y(x_0) = y_0 \qquad y(x_1) = y_1$$

Fin de la presentación …

… gracias por su seguimiento

… gracias por su participación