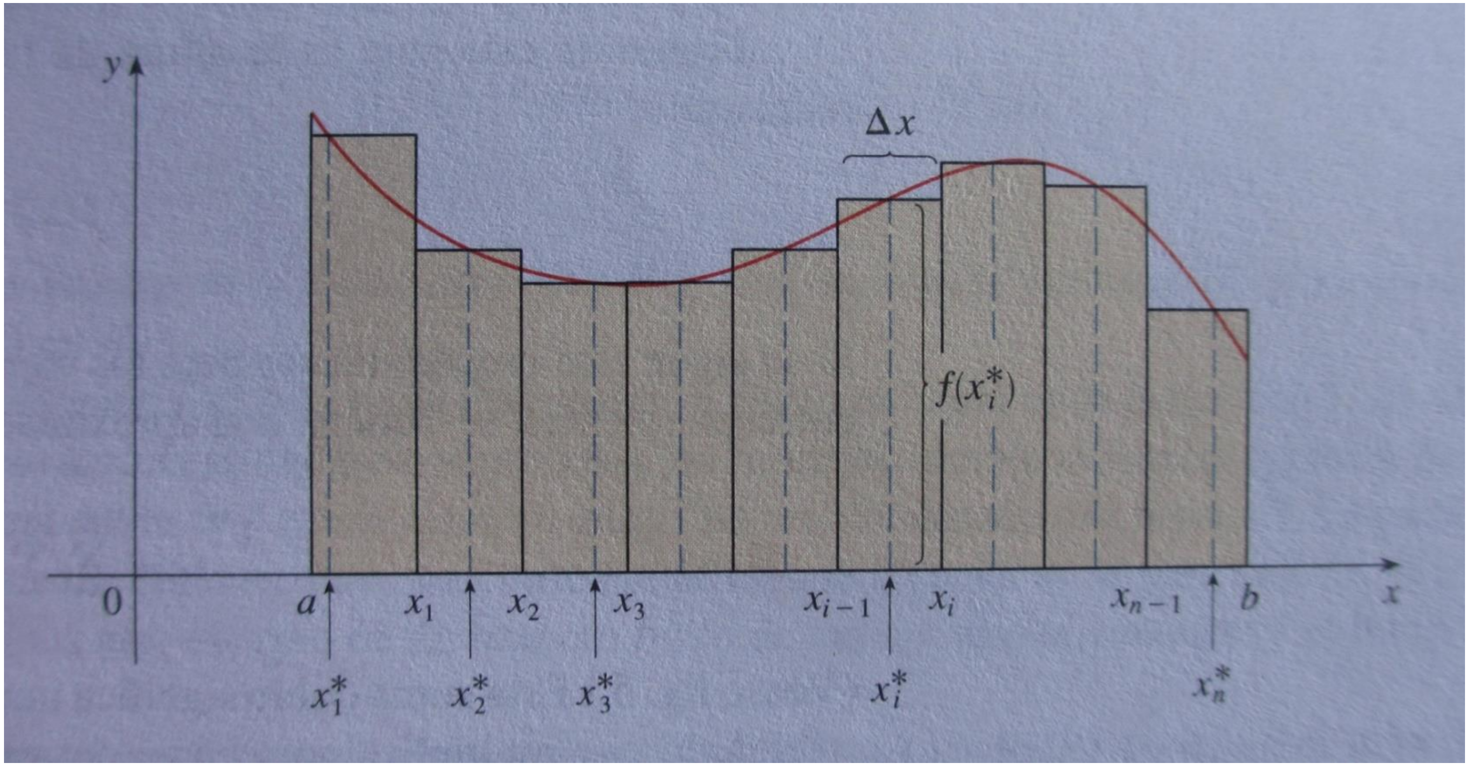
Integrales de línea

Guía de Estudio N°7
MATEMÁTICA III – Curso 2019
FCAI-UNCuyo

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

Recordando Integral Definida



Recordando Integral Definida

$$f : [a , b] \rightarrow R$$

$$\int_a^b f(x)dx$$

$$f\left(x_i^*\right)\Delta x_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} f\left(x_i^*\right)\Delta x_i$$

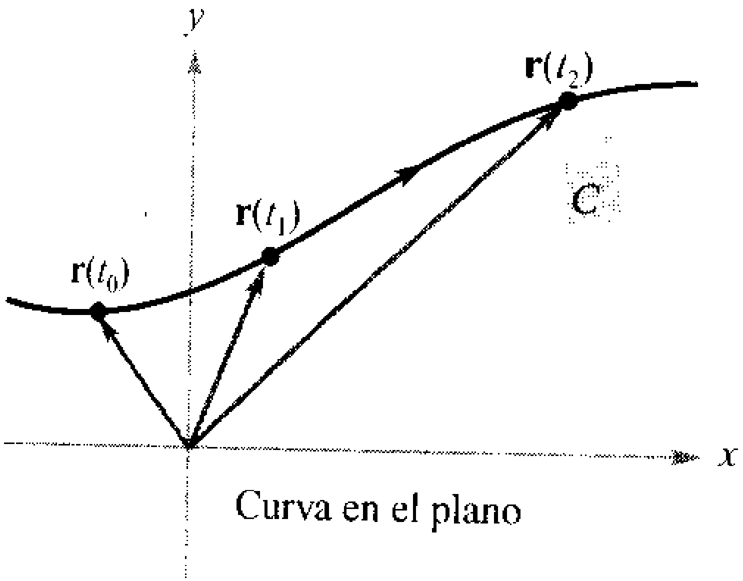
con particiones no regulares $\lim\limits_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{m} f\left(x_i^*\right)\Delta x_i$ **Si el límite existe**

con particiones regulares $\lim\limits_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} f\left(x_i^*\right)\Delta x_i$ **Si el límite existe**

Curvas en el plano y en el espacio

$$x = x(t);\ \ y = y(t);\ \ a \leq t \leq b.$$

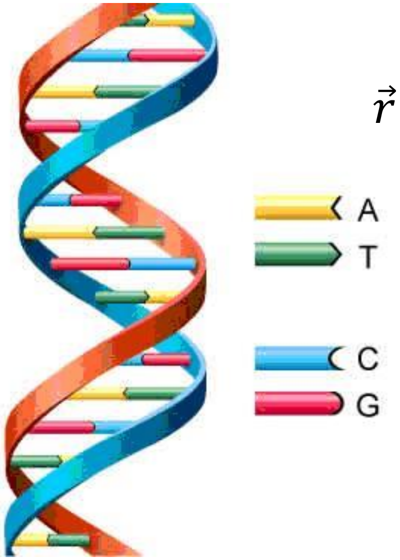
$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath}\ \ ;\quad t \in [a, b].$$

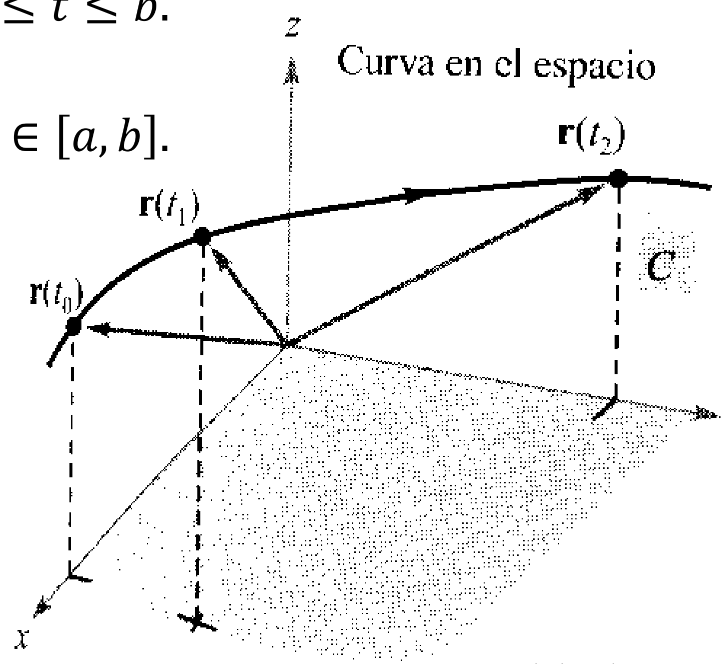


***Curva uniforme**: $\vec{r}\,'$ es continua y $\vec{r}\,'(t) \neq 0$ para todo t*

$$x = x(t);\ \ y = y(t);\ z = z(t);\quad a \leq t \leq b.$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}\ ;\quad t \in [a, b].$$





http://www.dciencia.es/wp-content/uploads/2013/01/Cadena-Adn-Dciencia.jpg

en Larson ed.al., Obr.cit.Cap.17

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

Curvas en el plano y en el espacio

$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad a \leqslant t \leqslant b$ $\boxed{1}$

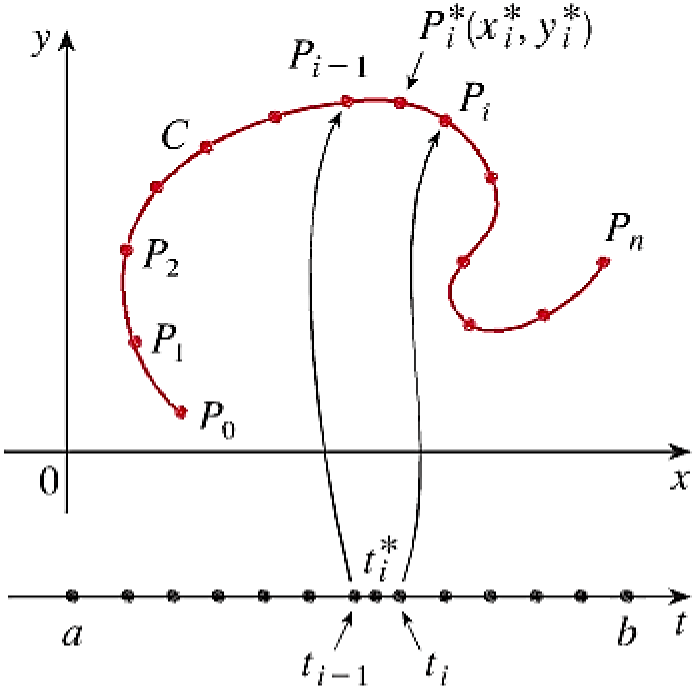
f definida en C,

$[a, b] \qquad [t_{i-1}, t_i]$

$P_i(x_i, y_i) \qquad \Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$

t_i^* en $[t_{i-1}, t_i]$. $\qquad P_i^*(x_i^*, y_i^*)$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\,\Delta s_i$$



$\boxed{2}$ **DEFINICIÓN** Si f se define en una curva C uniforme definida por las ecuaciones 1, entonces la **integral de línea de f a lo largo de C** es

$$\int_C f(x, y)\,ds = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\,\Delta s_i$$

si existe el límite.

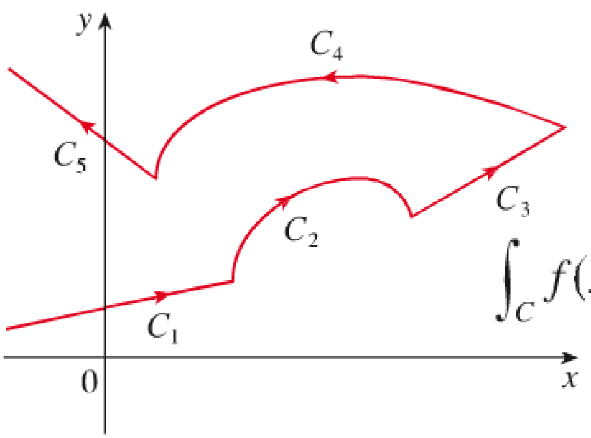
Integrales de línea

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

1 $$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

3 $$\int_C f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$



en Stewart, J, Obr.cit.Cap.16

$$\int_C f(x, y)\, ds = \int_{C_1} f(x, y)\, ds + \int_{C_2} f(x, y)\, ds + \cdots + \int_{C_n} f(x, y)\, ds$$

en Stewart, J, Obr.cit.Cap.16

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

¿Cómo podríamos trabajar la figura con integrales de línea?

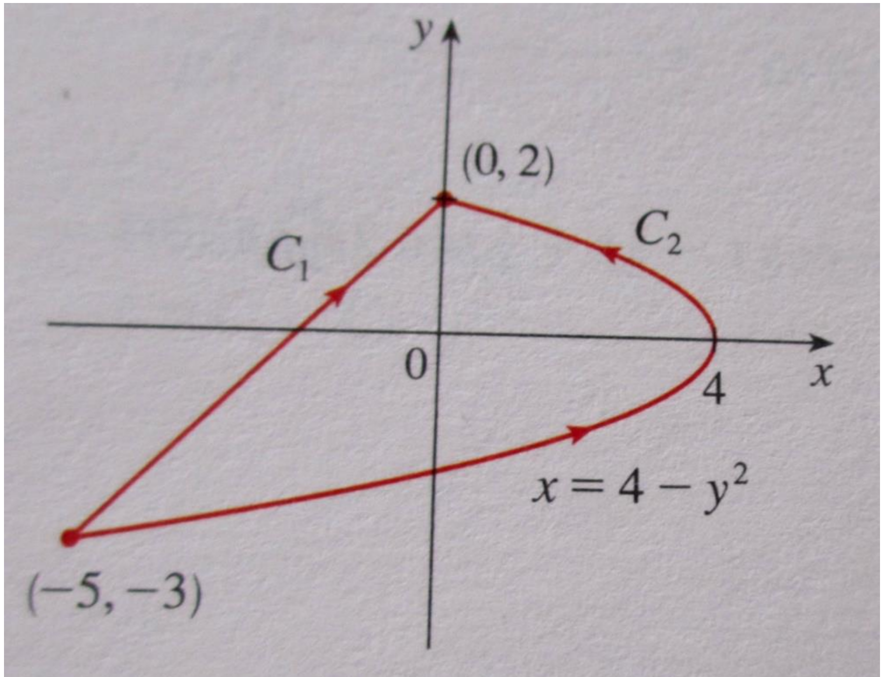


FIGURA 7 *en Stewart, J, Obr.cit.Cap.16*

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

APLICACIONES

masa m del alambre

$$m = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i^*, y_i^*)\, \Delta s_i = \int_C \rho(x, y)\, ds$$

centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$

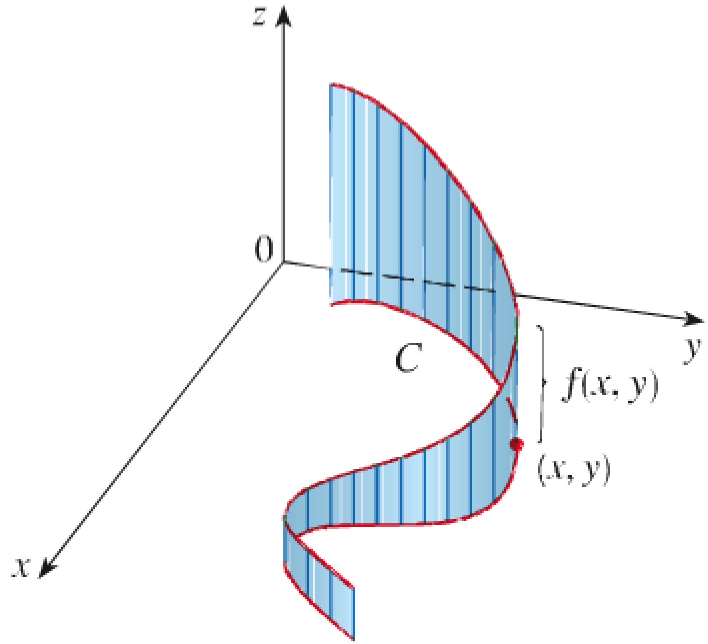
$$\bar{x} = \frac{1}{m} \int_C x\rho(x, y)\, ds \qquad \bar{y} = \frac{1}{m} \int_C y\rho(x, y)\, ds$$

longitud de C

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

En general $$L = \int_C ds = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

área de la “cerca” o de la “cortina”



en Stewart, J, Obr.cit.Cap.16

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

Integrales de línea a lo largo de C con respecto a la longitud de arco $\int_C f(x, y)\, ds$

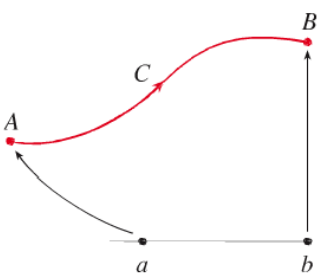
Integrales de línea a lo largo de C con respecto a x e y

$$\int_C f(x, y)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\, \Delta x_i$$

$$\int_C f(x, y)\, dy = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\, \Delta y_i$$

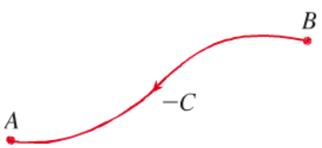
$$\boxed{\begin{aligned} \int_C f(x, y)\, dx &= \int_a^b f(x(t), y(t))\, x'(t)\, dt \\ \int_C f(x, y)\, dy &= \int_a^b f(x(t), y(t))\, y'(t)\, dt \end{aligned}}$$

$$\int_C P(x, y)\, dx + \int_C Q(x, y)\, dy = \int_C P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$



Orientación de la curva C

$$\int_{-C} f(x, y)\, dx = -\int_C f(x, y)\, dx \qquad \int_{-C} f(x, y)\, dy = -\int_C f(x, y)\, dy$$



$$\int_{-C} f(x, y)\, ds = \int_C f(x, y)\, ds$$

en Stewart, J, Obr.cit.Cap.16

Integrales de línea en el espacio

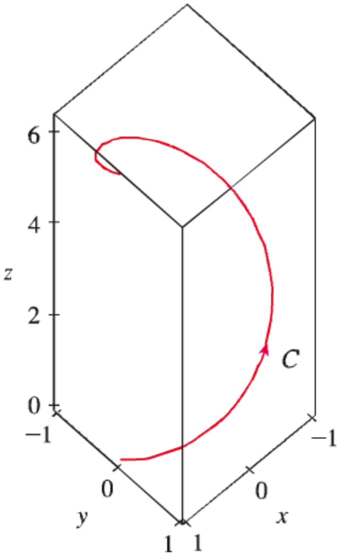
***f* definida en *C*,** $C = \{(x(t), y(t), z(t)) : \; a \leq t \leq b\}$

$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t) \qquad a \leqslant t \leqslant b$ $\qquad t \to (x, y, z) \to f(x, y, z)$

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\, \Delta s_i$$

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)|\, dt = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

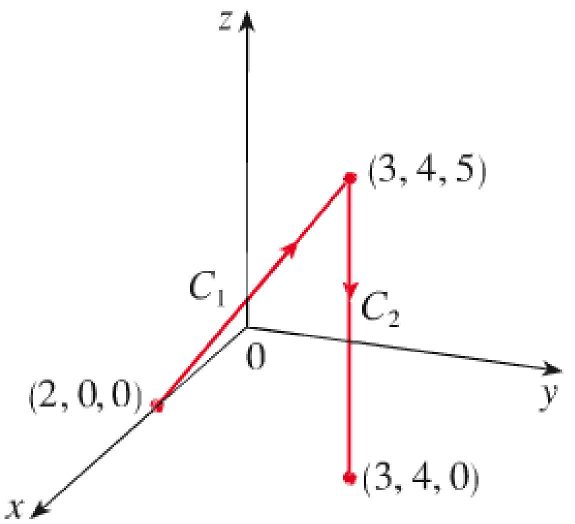
Evlúe $\int_C \; y sen z \, ds$ sobre C : $x = \cos(t)$, $y = sen(t), z = t; \;\; 0 \leq t \leq 2\pi$



en Stewart, J, Obr.cit.Cap.16

$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$

$$\boxed{\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{r}_1 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1}$$

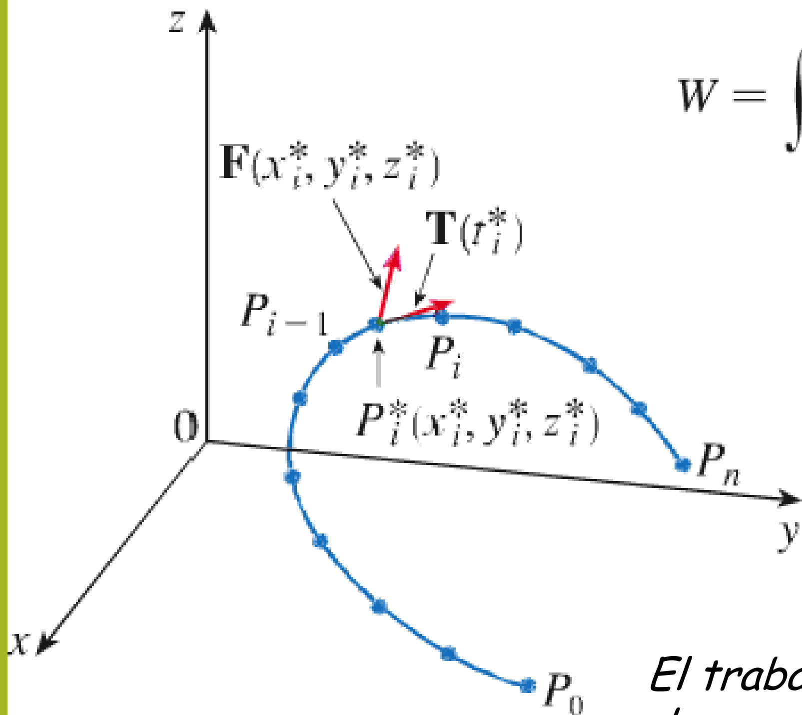


OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

Integral de Línea de un Campo Vectorial

$$\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot [\Delta s_i \mathbf{T}(t_i^*)] = [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(t_i^*)]\, \Delta s_i$$

$$W = \int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{T}(x, y, z)\, ds = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$



$$W = \int_a^b \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \right] |\mathbf{r}'(t)|\, dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

El trabajo es la integral de línea con respecto a la longitud de arco de la componente tangencial de la fuerza

en Stewart, J, Obr.cit.Cap.16

Integral de Línea de un Campo Vectorial

$\boxed{13}$ **DEFINICIÓN** Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial continuo definido sobre una curva suave C dada por una función vectorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Entonces la **integral de línea de F a lo largo de C** es

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

en Stewart, J, Obr.cit.Cap.16

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

Integral de Línea completa y relación con la integral de línea de un Campo Vectorial

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r} = \int_C \left(P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}\right)\left(dx\vec{i} + dy\vec{j}\right) = \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r} = \int_C \left(P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}\right)\left(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\right)$$

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r} = \int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

en Stewart, J, Obr.cit.Cap.16

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

$$ds = \left|r'(t)\right|dt \qquad \vec{T} = \frac{\vec{r'}(t)}{\left|r'(t)\right|}$$

$$d\vec{r} = \vec{T} * ds = \vec{r}'(t)dt$$

$$\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t))\vec{r}'(t)dt = \int_C \vec{F} \bullet \vec{T}.ds$$

$$\int_C f \ ds = \int_a^b f(\vec{r}(t))\left|\vec{r}'(t)\right|dt$$

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

DEFINICION DE CAMPO VECTORIAL

Sean M y N funciones de dos variables x e y, definidas en una región plana R. La función $\mathbf{F}$ definida por

$$\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} \qquad \text{Plano}$$

se llama **campo vectorial sobre *R*.**

Sean M, N y P funciones de tres variables x, y y z, definidas en una región Q del espacio. La función $\mathbf{F}$ definida por

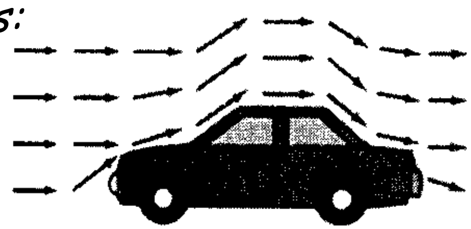
$$\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k} \qquad \text{Espacio}$$

se llama **campo vectorial sobre *Q*.**

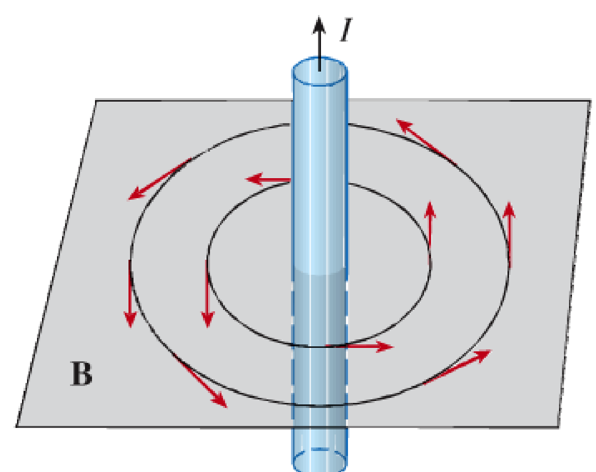
en Larson ed.al., Obr.cit.Cap.17

Ejemplos de campos vectoriales:

* Campo de velocidades
* Campo gravitatorio
* Campo de fuerzas eléctricas



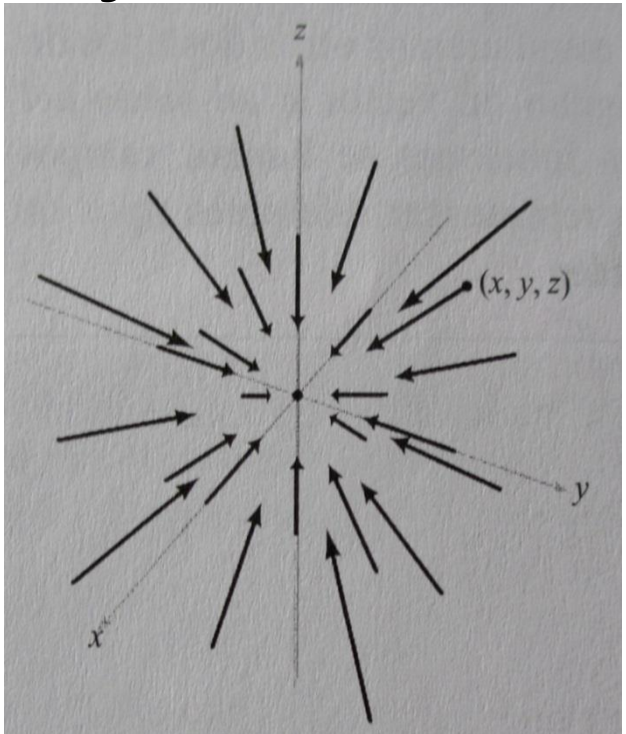
en Larson ed.al., Obr.cit.Cap.17



en Stewart, J, Obr.cit.Cap.16

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

Integrales de línea



m_1 está situada en (x, y, z)
m_2 está situada en $(0, 0, 0)$

Campo de fuerzas gravitacional

en Larson ed.al., Obr.cit.Cap.17

FIGURA 17.3

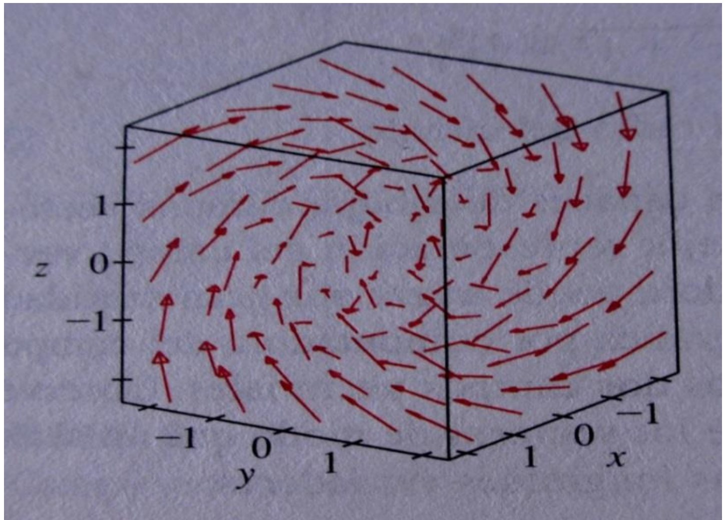


FIGURA 10
$\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$

en Stewart, J, Obr.cit.Cap.16

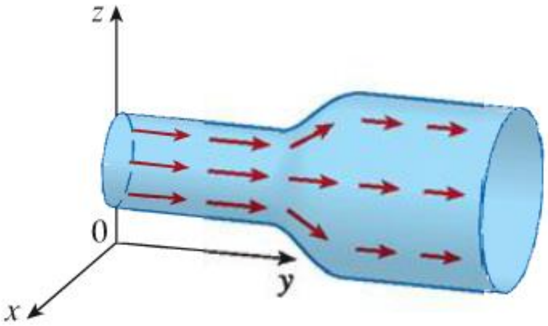
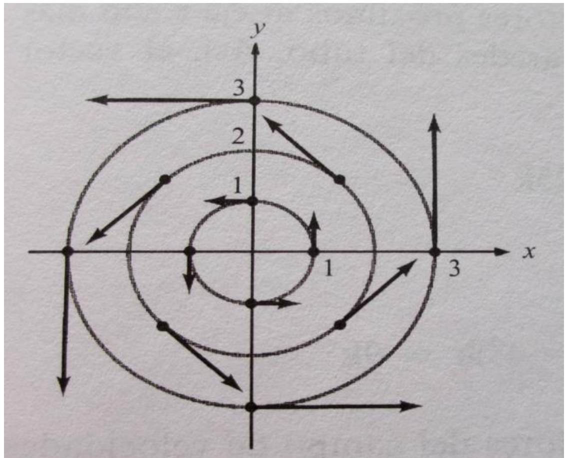


FIGURA 13
Campo de velocidades en un flujo de fluidos



Campo vectorial:
$\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

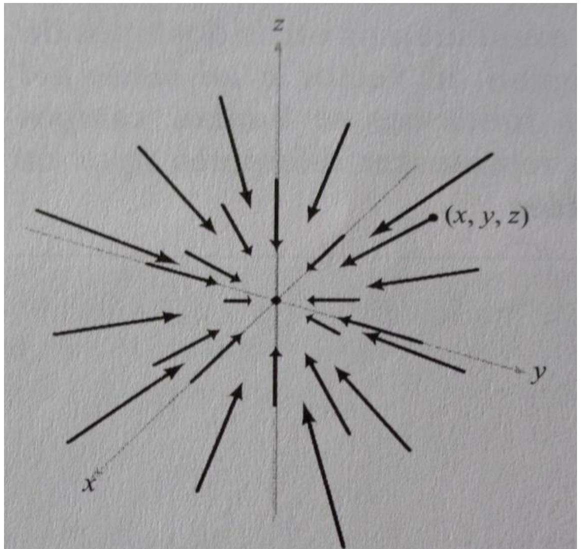
FIGURA 17.4

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

Campos de gradiente $\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\,\mathbf{i} + f_y(x, y)\,\mathbf{j}$

Se dice que un campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}$ *es* ***conservativo*** *si existe una función* f *con derivadas parciales continuas tal que* $\vec{\mathbf{F}} = \nabla f$

A ***f*** *se la llama función potencial de* ***F***



m_1 está situada en (x, y, z)
m_2 está situada en $(0, 0, 0)$

Campo de fuerzas gravitacional

FIGURA 17.3

en Larson ed.al., Obr.cit.Cap.17

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

en Larson ed.al., Obr.cit.Cap.17

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS INTEGRALES DE LINEA

Sea C una curva suave a trozos situada en una región abierta R y dada por

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad a \leqslant t \leqslant b$$

Si $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ es conservativo en R, y M y N son continuas en R, entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

siendo f una función potencial de $\mathbf{F}$. Esto es, $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$.

Compare dos presentaciones

$\boxed{2}$ **TEOREMA** Sea C una curva uniforme definida por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Sea f la función derivable de dos o tres variables cuyo vector gradiente ∇f es continuo en C. Entonces

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

en Stewart, J, Obr.cit.Cap.16

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2 Al aplicar la definición 16.2.13

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} \right) dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t))\, dt$$ (según la regla de la cadena)

$$= f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

en Stewart, J, Obr.cit.Cap.16

Consecuencias

$$\int_{C_1} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

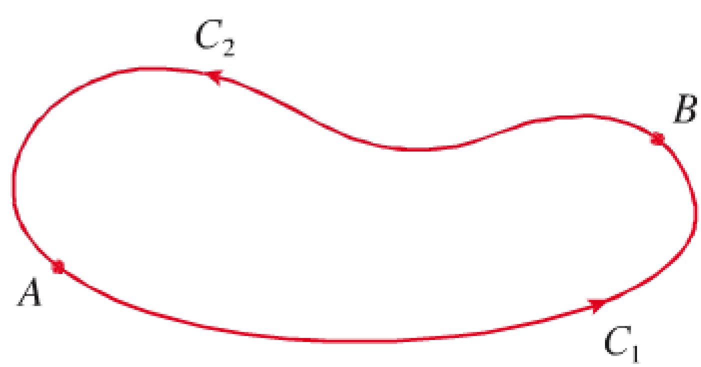
Para cualquiera dos trayectorias C_1 y C_2 que tengan los mismos puntos iniciales y finales

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

3 TEOREMA $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en D si y sólo si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda trayectoria cerrada C en D.

en Stewart, J, Obr.cit.Cap.16

Curva cerrada



4 TEOREMA Suponga que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial que es continuo en una región conexa abierta D. Si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en D, entonces $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo en D, es decir, existe una función f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$.

en Stewart, J, Obr.cit.Cap.16

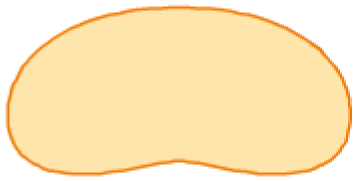
OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

$\boxed{6}$ **TEOREMA** Sea $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ un campo vectorial en una región simplemente conexa D. Suponga que P y Q tienen derivadas continuas de primer orden y

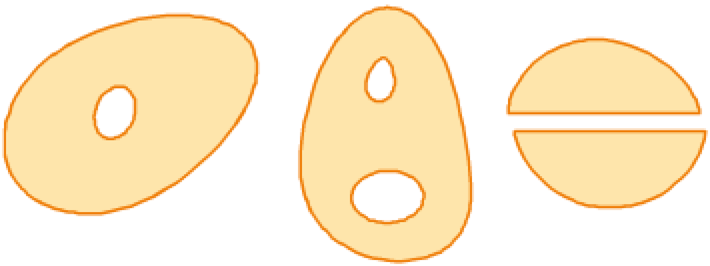
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \text{en toda la región } D$$

Entonces $\mathbf{F}$ es conservativo.

en Stewart, J, Obr.cit.Cap.16



región simplemente conexa



regiones que no son simplemente conexas

en Stewart, J, Obr.cit.Cap.16

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

TEOREMA DE GREEN Sea C una curva simple, cerrada, uniforme por segmentos con orientación positiva en el plano, y sea D la región que delimita C. Si P y Q tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a D, entonces

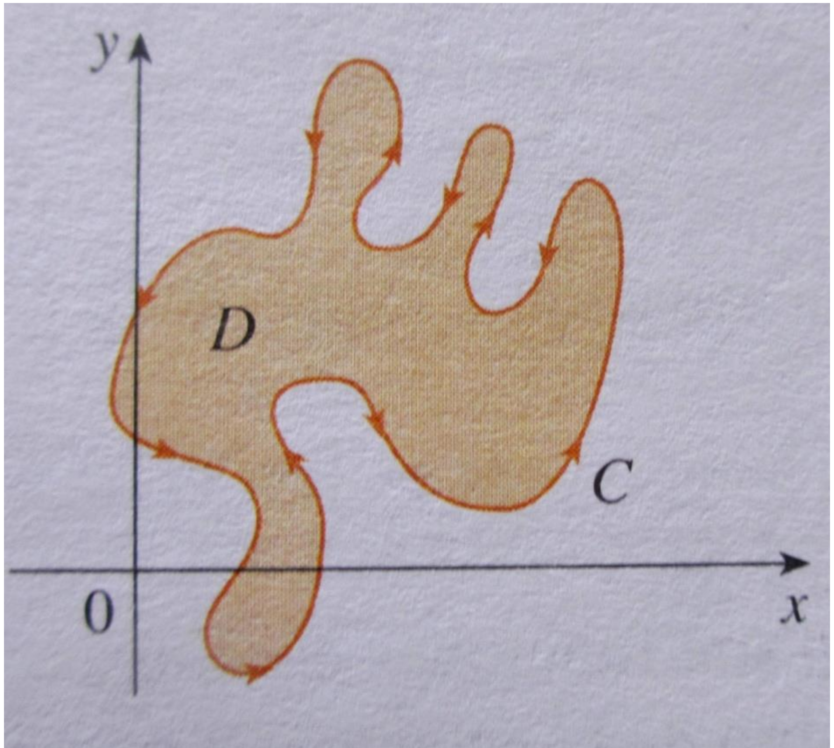
$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Demostración:

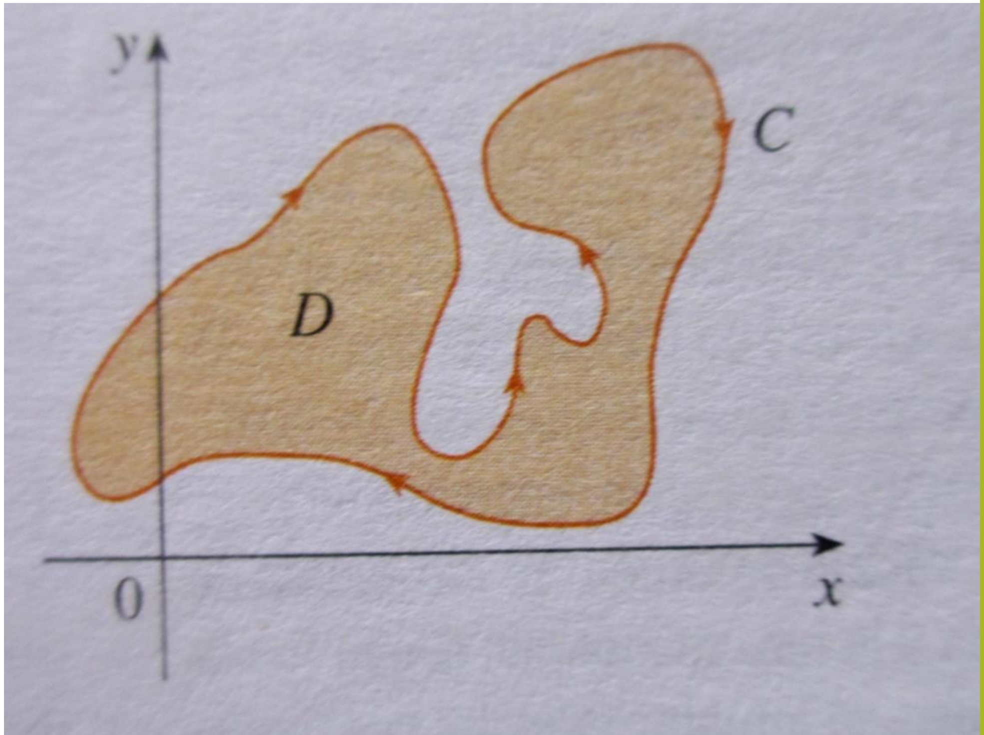
en Stewart, J, Obr.cit.Cap.16

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

¿Cómo relacionamos la figura con integrales de línea?



(a) Orientación positiva



(b) Orientación negativa

en Stewart, J, Obr.cit.Cap.16

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

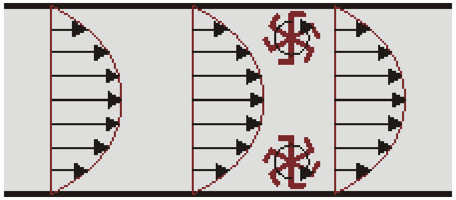
$$\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$$

El rotacional o rotor es un operador vectorial sobre campos vectoriales definidos en un abierto de R^3 que muestra la tendencia de un campo vectorial a inducir rotación alrededor de un punto.

ROTACIONAL

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$$



La **divergencia** mide la diferencia entre el flujo entrante y saliente de un campo vectorial sobre una superficie https://es.wikipedia.org/wiki/Divergencia

DIVERGENCIA

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

3 **TEOREMA** Si f es una función de tres variables que tiene derivadas parciales continuas de segundo orden, entonces

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = \mathbf{0}$$

4 **TEOREMA** Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial definido en todo $\mathbb{R}^3$ cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas y $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo.

Fin de la presentación …

… gracias por su seguimiento

… gracias por su participación