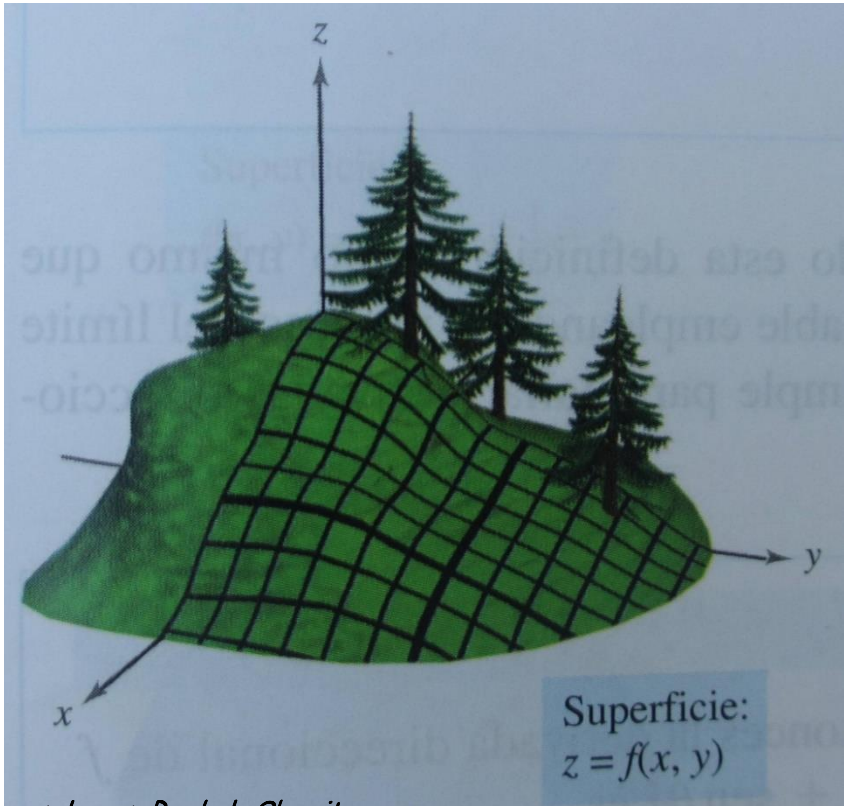
Las derivadas direccionales y gradiente

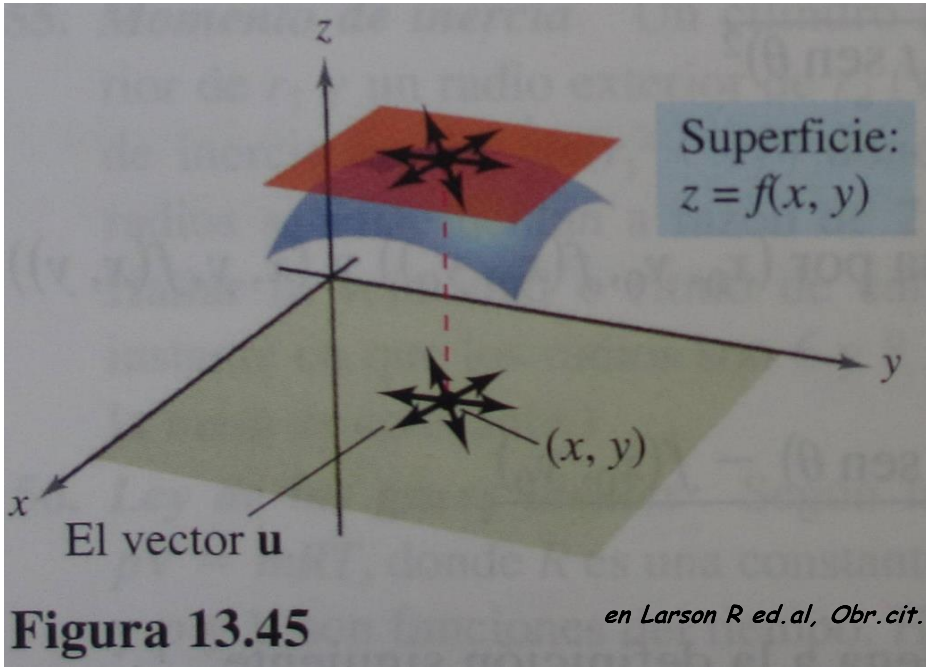
Guía de Estudio N°4
MATEMÁTICA III – Curso 2019
FCAI-UNCuyo

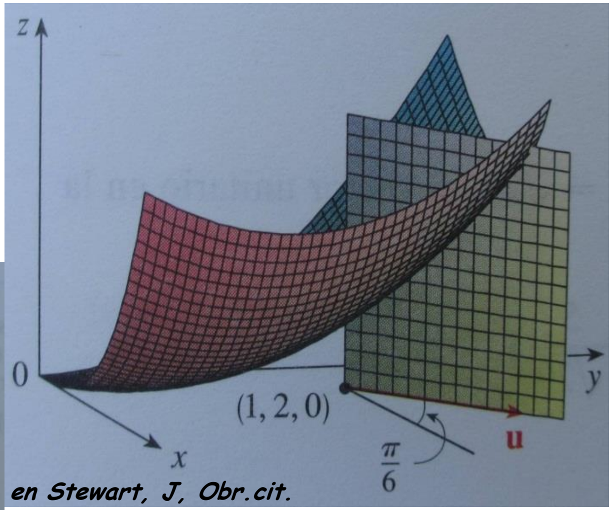
Derivadas direccionales y gradiente

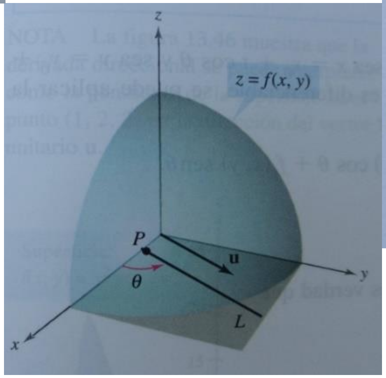
LEA e INTERPRETE



en Larson R ed.al, Obr.cit.







en Stewart, J, Obr.cit.

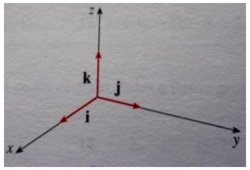
en Larson R ed.al, Obr.cit.

RECORDEMOS

La información *que requiere **una** **cantidad** y también **una** **dirección** se presenta como **vector**.*

*El **vector** tiene **magnitud o módulo** y tiene una **dirección**. Se representa gráficamente como **segmento y flecha**.*

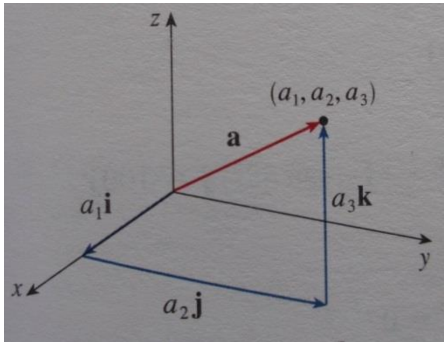
*En 3 dimensiones utilizamos los **vectores base estándar: i, j y k** (**vectores unitarios ortogonales** entre sí)*



*Operaciones: **SUMA VECTORIAL y MULTIPLICACIÓN ESCALAR***

$$P = (a_1, a_2, a_3)$$

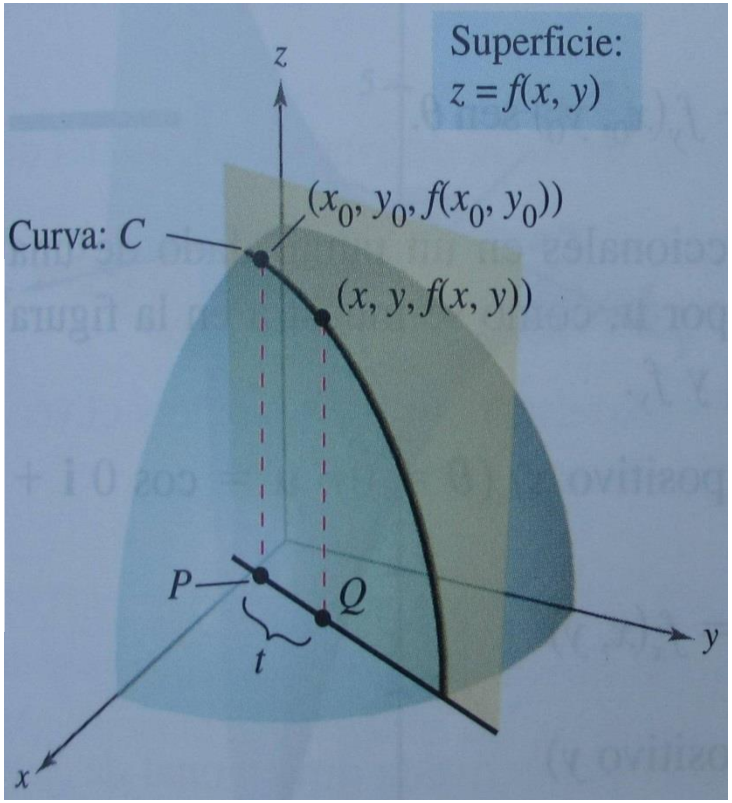
$$\boldsymbol{a} = \vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k} = \overrightarrow{OP}$$



(b) $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$

en Stewart, J, Obr.cit.

Derivadas direccionales y gradiente

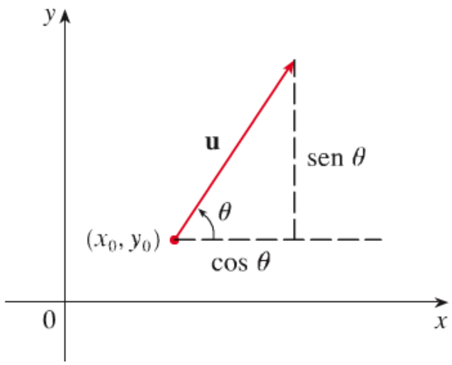


$$\vec{u} = \cos\theta\ \hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\ \hat{\jmath} \quad \rightarrow \quad \|\vec{u}\| = 1$$

$$P = (x_0, y_0) \qquad Q = (x, y\ )$$

$$\overrightarrow{PQ}\ //\ \vec{u} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{PQ} = t\ \vec{u}$$

$$\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t\cos\theta \\ t\operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$$



$$\left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \|t\vec{u}\| = |t|\|\vec{u}\| = |t|$$

$$\Delta s = t$$

Se considera signo negativo cuando $\overrightarrow{PQ}$ *es opuesto a* $\vec{u}$

$$\Delta s \to 0 \quad \leftrightarrow \quad Q \to P \quad \leftrightarrow \quad t \to 0$$

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{f(Q) - f(P)}{\Delta s} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\cos\theta\,, y_0 + t\sin\theta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

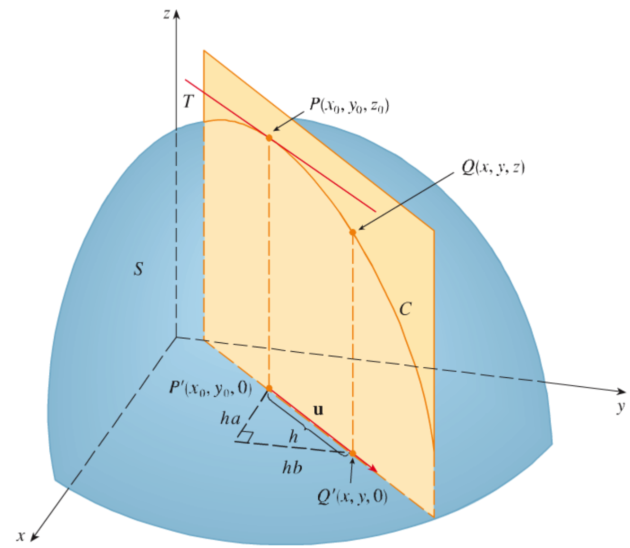
Si el límite existe

Derivadas direccionales y gradiente

2 **DEFINICIÓN** La **derivada direccional** de f en (x_0, y_0) en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

si existe este límite



en Stewart, J, Obr.cit.

En general: $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$

$$D_{u} f(\boldsymbol{x_0}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x_0} + h\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{x_0})}{h} = \frac{d}{dh} f(\boldsymbol{x_0} + h\boldsymbol{u})\Big|_{h=0}$$

Si el límite existe

https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/DerivadaDireccional-JS/index.html

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES EN LA DERIVADA DIRECCIONAL

$$x = x_0 + ha$$

$$y = y_0 + hb$$

$$g(h) = f(x_0 + ha, y_0 + hb) \qquad g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h}$$

$$g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h} = D_{\vec{u}} f(x_0, y_0)$$

$$\frac{dg}{dh} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dh}$$

$$g'(h) = f_x(x(h), y(h))a + f_y(x(h), y(h))b$$

$$h = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = x_0 \wedge y = y_0$$

$$g'(0) = f_x(x_0, y_0).a + f_y(x_0, y_0).b = f_{\vec{u}}(x_0, y_0)$$

Si las derivadas parciales son continuas en un entorno de (x_0, y_0)

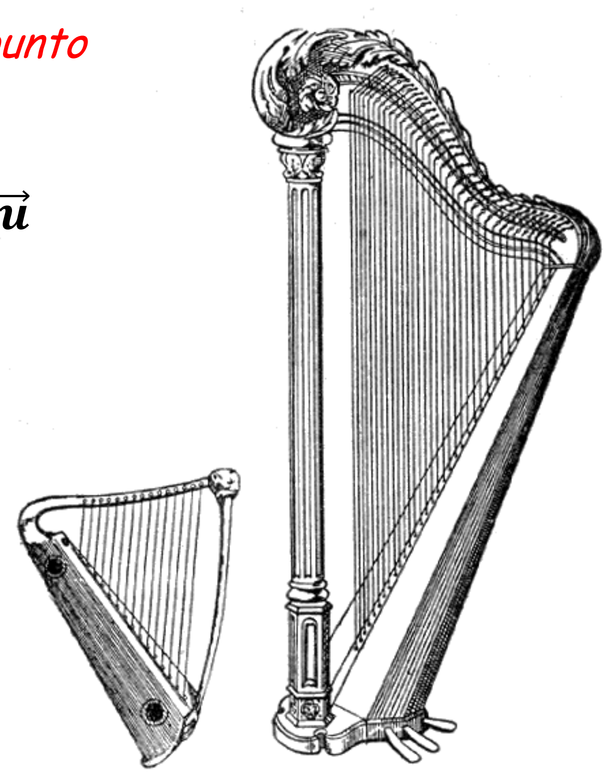
$$D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{t} = g'(0) = f_x(x_0, y_0)a + f_x(x_0, y_0)b$$

FORMULA DE CÁLCULO de la derivada direccional en un punto

$$D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)a + f_x(x_0, y_0)b = \boldsymbol{\nabla} f(x_0, y_0).\vec{\boldsymbol{u}}$$

VECTOR GRADIENTE

$$\boldsymbol{\nabla} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\hat{\boldsymbol{\imath}} + f_x(x_0, y_0)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$



Harps, p. 984.

El arpa, el instrumento que da nombre al símbolo nabla. El símbolo fue usado por primera vez por William Rowan Hamilton, pero de forma lateral: ⊲ https://es.wikipedia.org/wiki/Nabla

GRADIENTE Definición y Representación gráfica

Definición de gradiente de una función de dos variables

Sea $z = f(x, y)$ una función de x y y tal que f_x y f_y existen. Entonces el **gradiente de f**, denotado por $\nabla f(x, y)$, es el vector

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}.$$

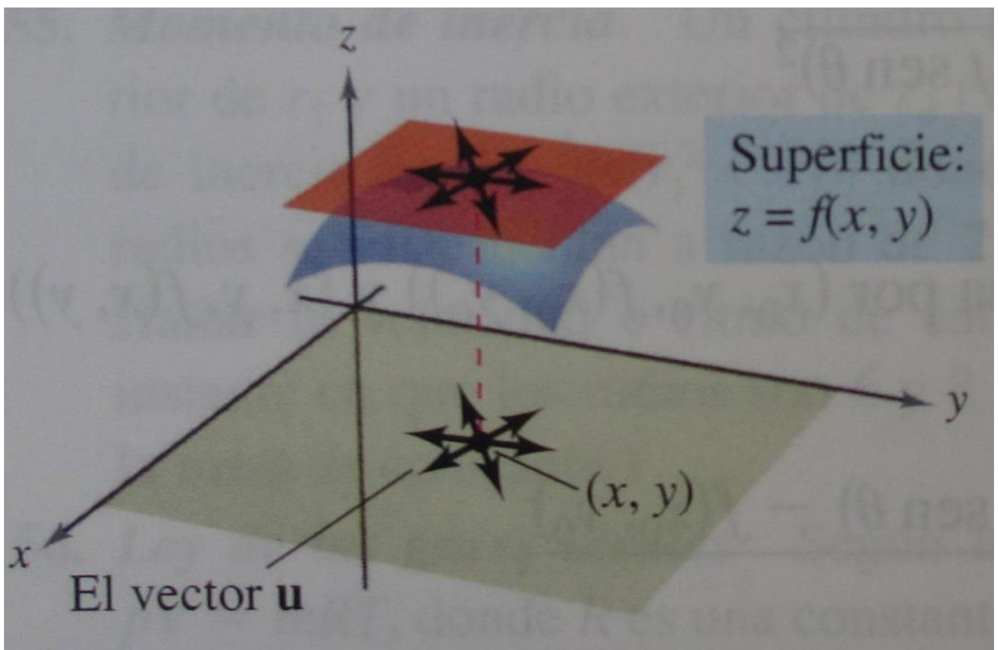
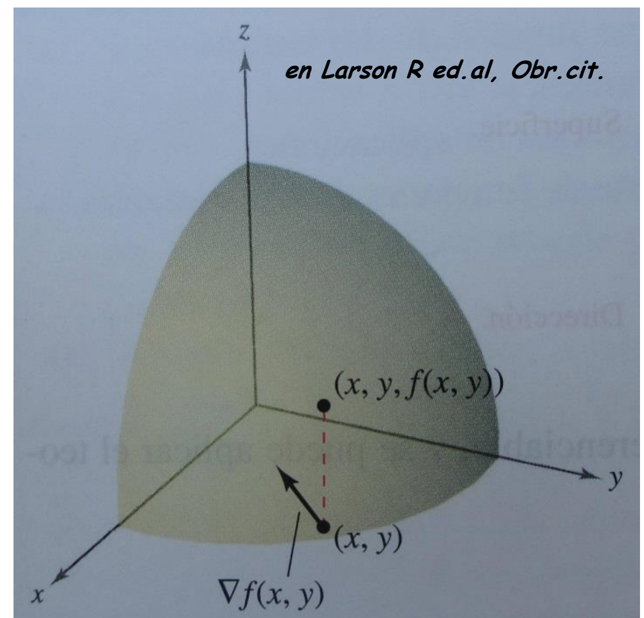


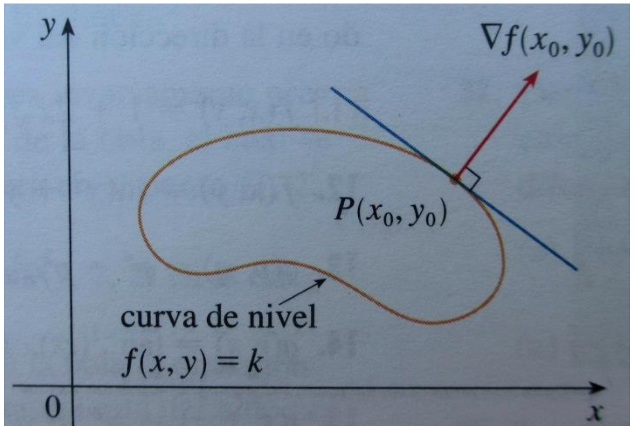
Figura 13.45



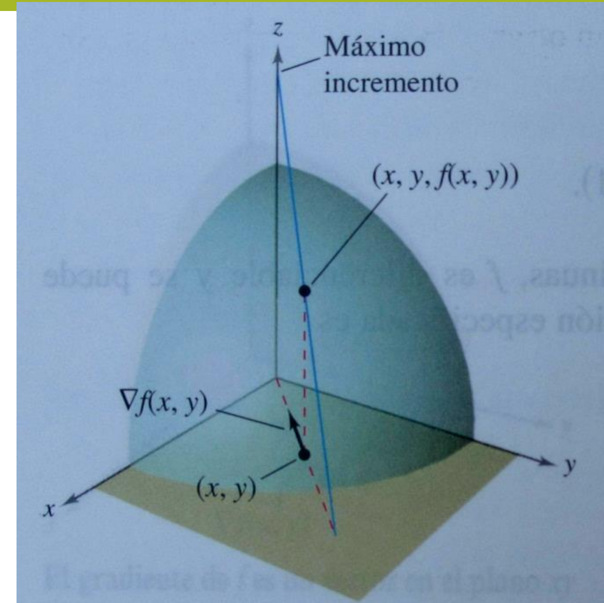
El gradiente de f es un vector en el plano xy

Figura 13.48

GRADIENTE y sus propiedades



en Stewart, J, Obr.cit.



El gradiente de f es un vector en el plano xy que apunta en dirección del máximo incremento sobre la superficie dada por $z = f(x, y)$

Figura 13.50 *en Larson R ed.al, Obr.cit.*

TEOREMA 13.11 Propiedades del gradiente

Sea f diferenciable en el punto (x, y).

1. Si $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$, entonces $D_{\mathbf{u}} f(x, y) = 0$ para todo $\mathbf{u}$.
2. La dirección de *máximo* incremento de f está dada por $\nabla f(x, y)$. El valor máximo de $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ es $\|\nabla f(x, y)\|$.
3. La dirección de *mínimo* incremento de f está dada por $-\nabla f(x, y)$. El valor mínimo de $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ es $-\|\nabla f(x, y)\|$.

en Larson R ed.al, Obr.cit.

LEA e INTERPRETE

TEOREMA: Suponga que ***f*** es una ***función diferenciable*** de dos variables. El ***valor máximo*** de la derivada direccional $D_{\vec{u}} f(x, y)$ es $\|\nabla f(x, y)\|$ y se presenta cuando tiene la misma dirección (y sentido) que el vector $\vec{u}$

$$D_{\vec{u}} f(x, y) = \boldsymbol{\nabla} f(x, y).\vec{\boldsymbol{u}} = \|\boldsymbol{\nabla} f(x, y)\| \|\vec{\boldsymbol{u}}\| \cos \alpha$$

$$\alpha = 0 \rightarrow \cos \alpha = 1$$

$$D_{\vec{u}} f(x, y)_{MAX} = \|\boldsymbol{\nabla} f(x, y)\|$$

¿Cuándo es mínima la derivada direccional?, explique

¿Cuándo es nula? explique

LEA e INTERPRETE

Calcula la derivada direccional de f en el punto (1,2) en la dirección indicada

Calcule el gradiente y la máxima derivada direccional

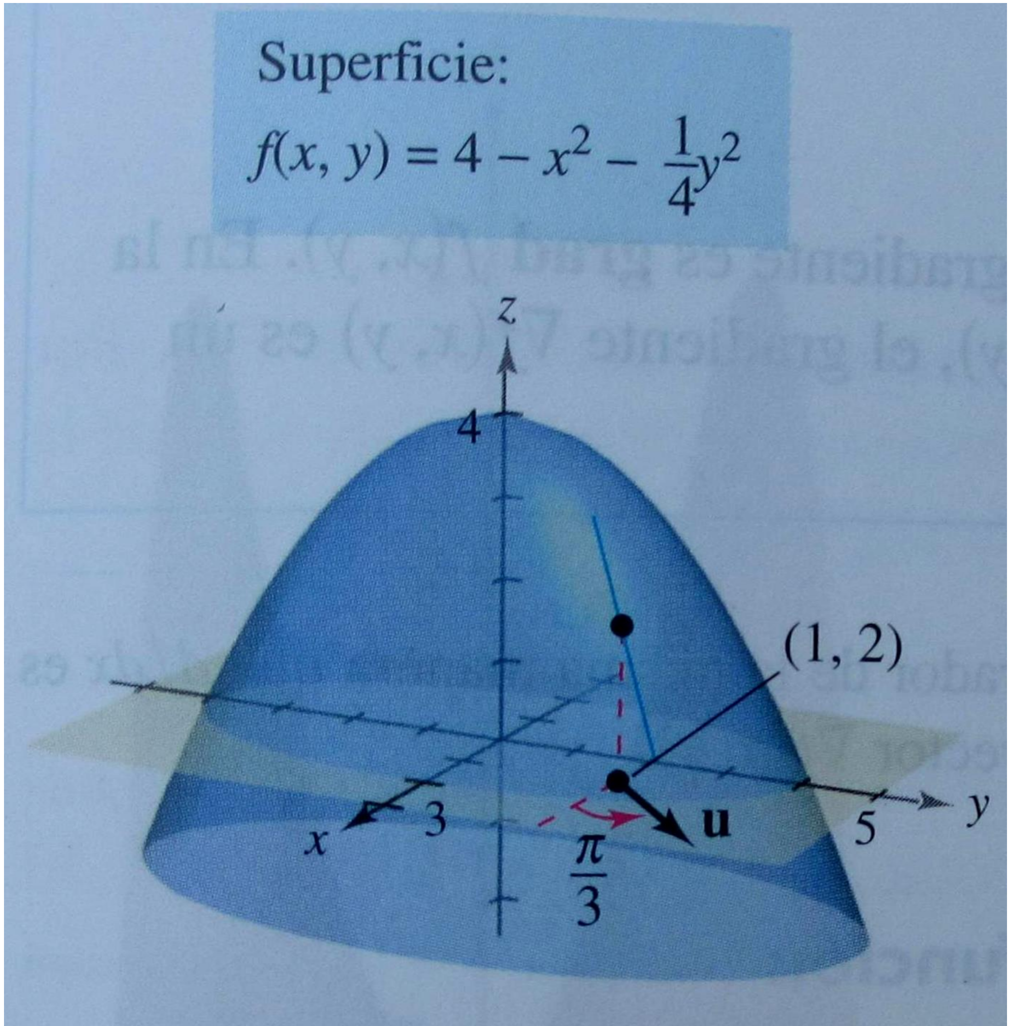
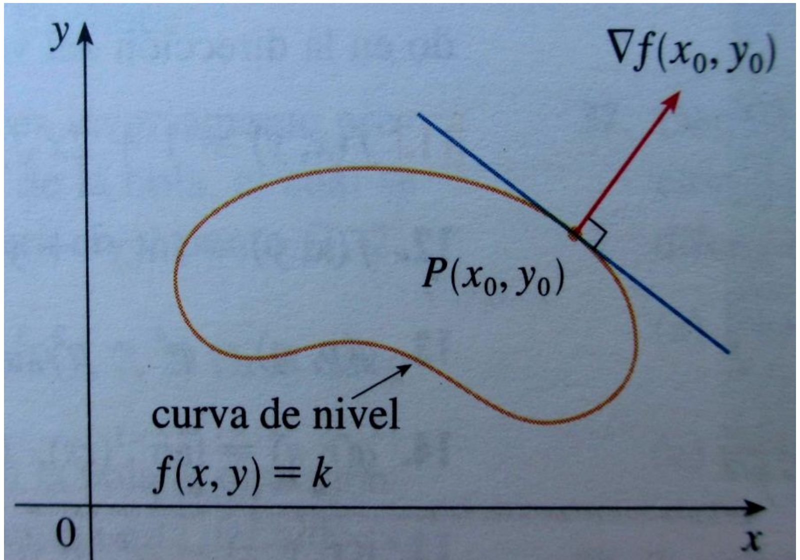


Figura 13.46

en Larson R ed.al, Obr.cit.

LEA e INTERPRETE



en Stewart, J, Obr.cit.

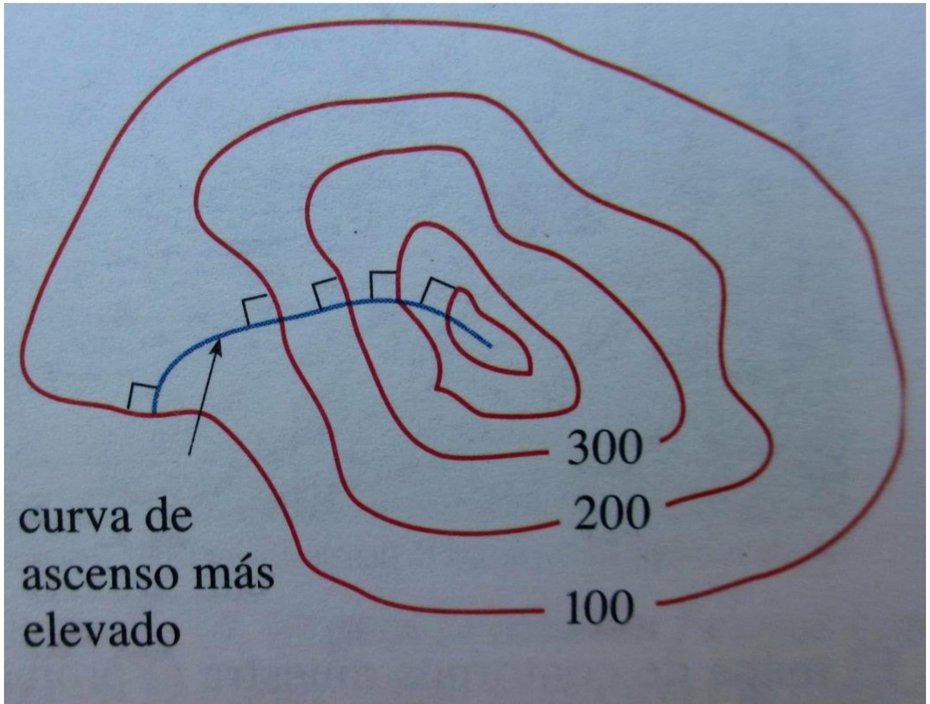
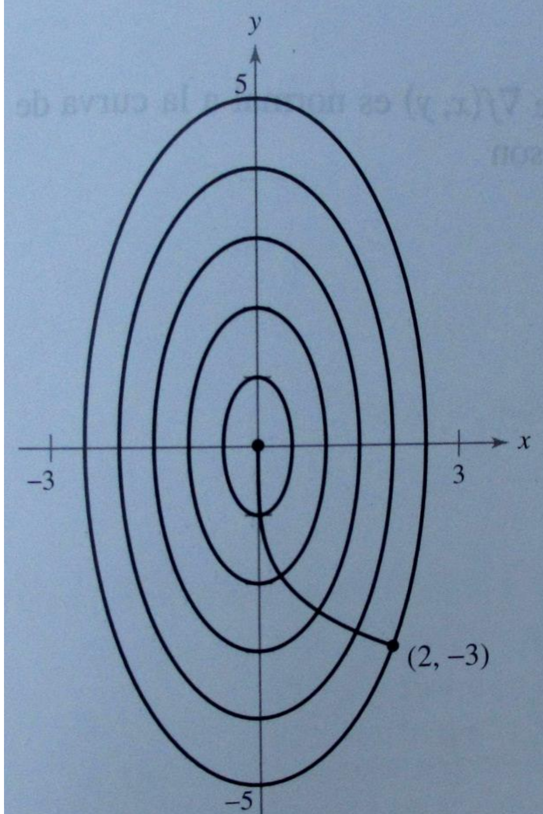


FIGURA 12

en Stewart, J, Obr.cit.

LEA e INTERPRETE

Curvas de nivel:
$T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$



Trayectoria seguida por un rastreador térmico
Figura 13.52

en Larson R ed.al, Obr.cit.

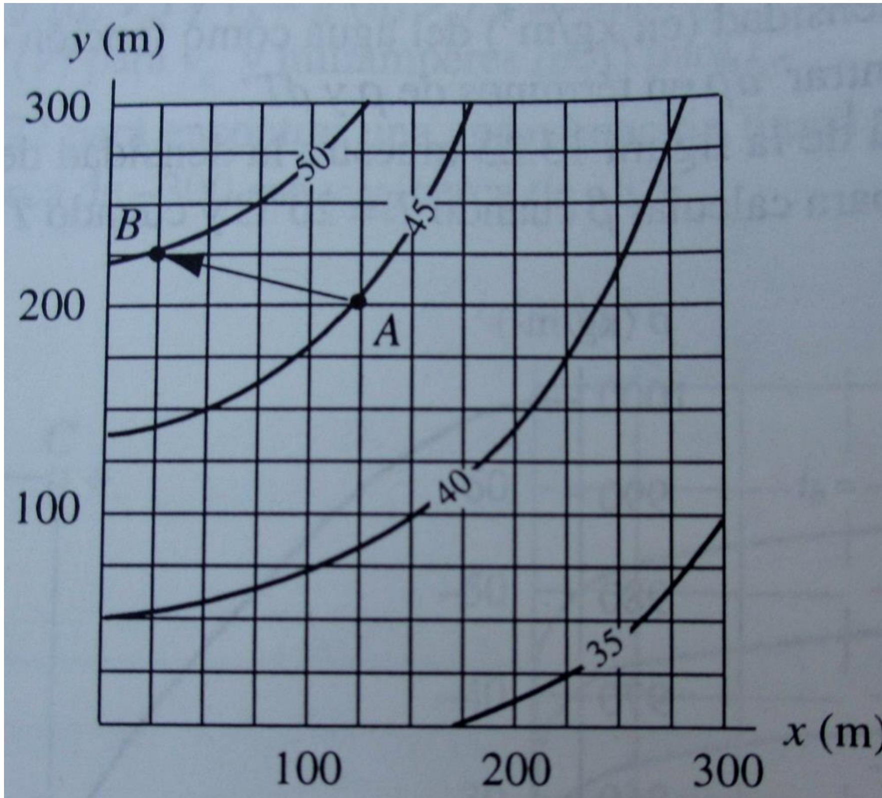


Figura 13.24 Cálculo de la rapidez de cambio en un mapa de temperatura.

en Larson R ed.al, Obr.cit.

Derivadas direccionales y gradiente

LEA e INTERPRETE

10 DEFINICIÓN La **derivada direccional** de f en (x_0, y_0, z_0) en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + hc) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

si existe este límite.

en Stewart, J, Obr.cit.

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{h}$$

en Stewart, J, Obr.cit.

$$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

en Stewart, J, Obr.cit.

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u}$$

en Stewart, J, Obr.cit.

LEA e INTERPRETE EN OTRA DIRECCIÓN

TABLA 1 Índice calorífico I como función de temperatura y humedad.

Humedad relativa (%)

Temperatura real (°F) T \ H	50	55	60	65	70	75	80	85	90
90	96	98	100	103	106	109	112	115	119
92	100	103	105	108	112	115	119	123	128
94	104	107	111	114	118	122	127	132	137
96	109	113	116	121	125	130	135	141	146
98	114	118	123	127	133	138	144	150	157
100	119	124	129	135	141	147	154	161	168

en Stewart, J, Obr.cit.

LA DERIVADA DIRECCIONAL :

*(de **dos** variables) **notación***

$$f_{\vec{u}}(x,y) = f_{\vec{v}}(x,y) = f_{P'Q'}(x,y) = z_{\vec{u}}(x,y) = D_{\vec{u}}\, f(x,y)$$

LEA y RELACIONE CON LA $D_{\vec{u}} f(x_o, y_o)$

2 REGLA DE LA CADENA (CASO I) Suponga que $z = f(x, y)$ es una función de x y y diferenciable, donde $x = g(t)$ y $y = h(t)$ son funciones de t diferenciables. Entonces z es una función de t diferenciable y

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

en Stewart, J, Obr.cit.

Fin de la presentación …

… gracias por su seguimiento

… gracias por su participación