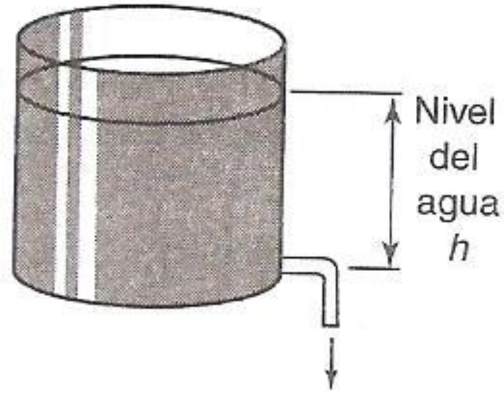
Las ecuaciones diferenciales

Guía de Estudio N°8
MATEMÁTICA III – Curso 2019
FCAI-UNCuyo

" … El modelo matemático a menudo toma la forma de una ***ecuación diferencial***, es decir, una ecuación que ***contiene una función desconocida y algunas de sus derivadas***. … "

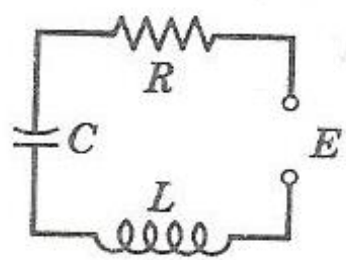
en Stewart, J, Obr.cit.



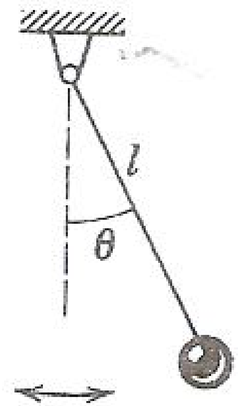
Salida de agua
$h' = -k\sqrt{h}$

paracaidista
$m\upsilon' = mg - b\upsilon^2$

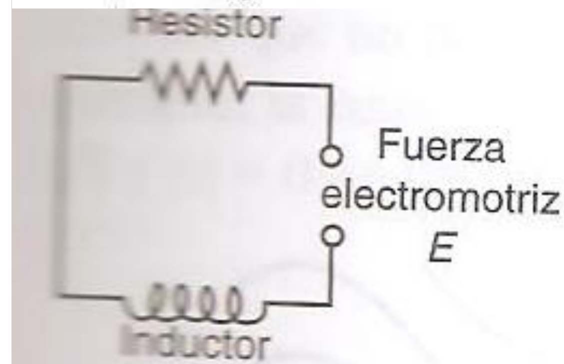
Masa oscilatoria en un resorte
$my'' + ky = 0$



Corriente I en un circuito RLC
$LI'' + RI' + \frac{1}{C} I = E'$



Péndulo
$l\theta'' + g \sin\theta = 0$



Corriente I en un circuito RL
$LI' + RI = E$

en Kreyszig E.

Las ecuaciones diferenciales

Curiosidades: Resonancia y aeroelasticidad

http://www.gaiaciencia.com/2014/04/cayo-el-puente-de-tacoma-narrows-por-la-resonancia/

https://www.youtube.com/watch?v=SzObC64E2Ag

https://en.wikipedia.org/wiki/I-35W_Mississippi_River_bridge#/media/File:I-35W_bridge_structure_before_collapse.jpg

¿CÓMO DEFINIR A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES?

Definición I:

Si una **ecuación contiene** las **DERIVADAS O DIFERENCIALES** de **UNA** o **MÁS** **variables dependientes** **con respecto** a UNA o MÁS **variables independientes**, se dice que es una **ecuación diferencial (ED)**.

¿CÓMO DEFINIR A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES?

Definición II:

Una **ecuación diferencial** (**ED**) es una **ecuación** que **relaciona** de manera no trivial* a una **función desconocida** y **UNA O MÁS DERIVADAS** **de esta función desconocida** **con respecto a una o más variables independientes**. (**asi** **incluye EDO y EDP**)

* No consideramos ecuaciones diferenciales a aquellas que son identidades como: $\frac{d(xy)}{dx} = y + x\frac{dy}{dx}$

Si la <u>**función desconocida**</u> **depende de** <u>**UNA SOLA**</u> **variable independiente**, la ecuación diferencial **se llama Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO)** .

Simbólicamente: $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$

Ejemplo:

Por el contrario, **si depende de MÁS DE UNA variable independiente**, **se llama Ecuación Diferencial Parcial (EDP).**

Simbólicamente: $F\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial y^n}\right) = 0$

Ejemplo:

Si se trata de <u>**MÁS DE UNA**</u> <u>**función desconocida**</u>**, en tal caso SE PLANTEA tantas ecuaciones diferenciales como funciones desconocidas Estas constituyen Un Sistema de Ecuaciones Diferenciales (SED)**

Simbólicamente: $\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ y'_n = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}$

Ejemplo:

Orden: El orden de una ecuación diferencíal será igual al orden de la derivada más alta contenida en la ecuación.

Grado: El grado de una ecuación diferencíal será igual al exponente que esté elevada la derivada de oreden mayor.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 7\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 8y = 2$$

EDO segundo orden primer grado

Soluciones de Ecuaciones Diferenciales

Nuestra meta es RESOLVER ecuaciones diferenciales

Definición: Se dice que una **función *f*** , definida en algún intervalo **I** , es **SOLUCIÓN** de una ecuación diferencial en dicho intervalo, si **sustituída** en dicha ecuación **LA REDUCE A UNA IDENTIDAD**.

Ejemplo: La curva dada por la ecuación: $\frac{2}{y^3} = \frac{3}{x^2} + C$

¿Es solución de la EDO: $\frac{dy}{dx} = \frac{y^4}{x^3}$?

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

Tipos de solución de las ecuaciones diferenciales

Soluciones <u>generales</u> y soluciones <u>particulares</u>

Soluciones <u>triviales</u> y soluciones <u>singulares</u>

Soluciones <u>explícitas</u> y soluciones <u>implícitas</u>

Teorema de Existencia y Unicidad para EDO de primer orden

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN

Teorema 1. Dado el problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \ , \qquad y(x_0) - y_0 \ ,$$

supóngase que f y $\partial f/\partial y$ son funciones continuas en un rectángulo

$$R = \{(x, y): a < x < b, c < y < d\}$$

que contiene al punto (x_0, y_0). Entonces el problema con valor inicial tiene una única solución $\phi(x)$ en algún intervalo $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, donde δ es un número positivo.

LEA e INTERPRETE

MODELOS DE CRECIMIENTO POBLACIONAL

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

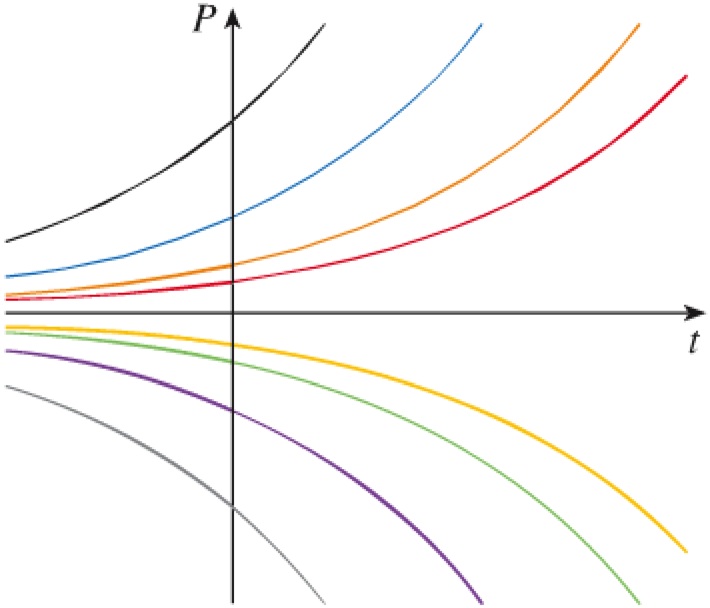


FIGURA 1

La familia de soluciones de $dP/dt = kP$

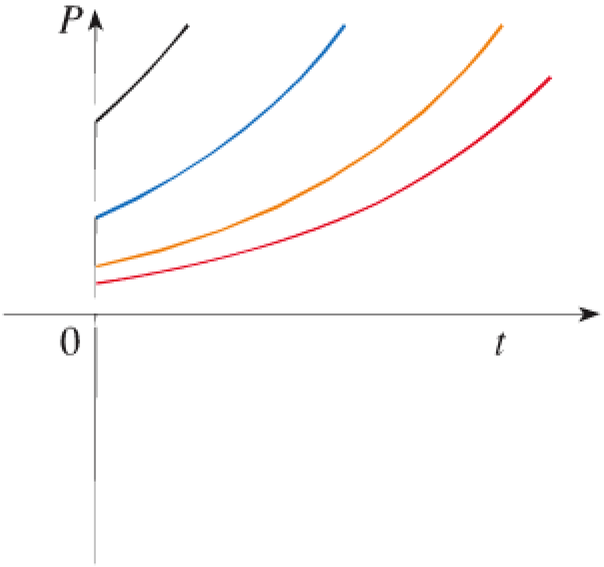


FIGURA 2

La familia de soluciones $P(t) = Ce^{kt}$ con $C > 0$ y $t \geqslant 0$

en Stewart, J, Obr.cit.

LEA e INTERPRETE

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

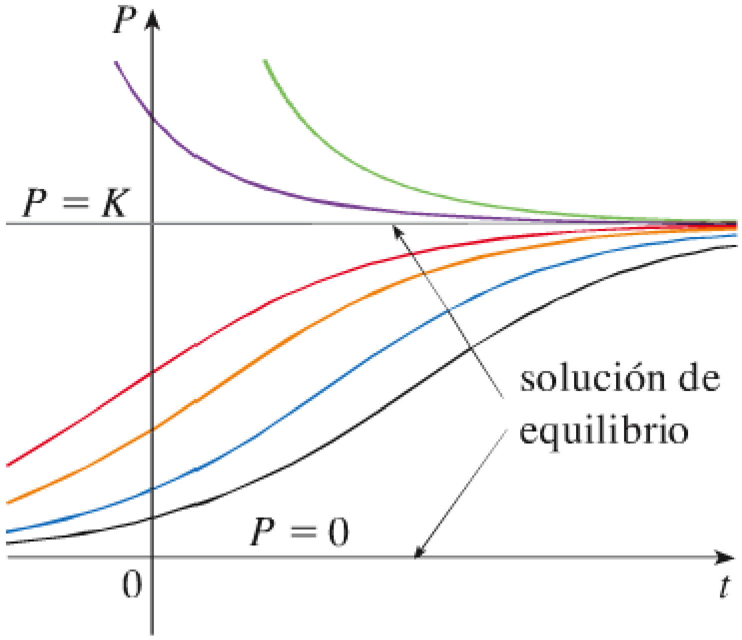


FIGURA 3

Soluciones de la ecuación logística

en Stewart, J, Obr.cit.

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)_{SAT} = \frac{\Delta H_{LV}}{T\Delta V_{LV}}$$

$$\frac{d^2(T - Ta)}{d^2 x} - \frac{hP}{kA}(T - Ta) = 0$$

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

$$\frac{dM(t)}{dt} = F_{dilución}$$

$$\frac{dS(t)}{dt} = F^{ent} w_{sal} - F^{sal} \frac{S(t)}{M(t)}$$

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

Modelo para el movimiento de un resorte

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

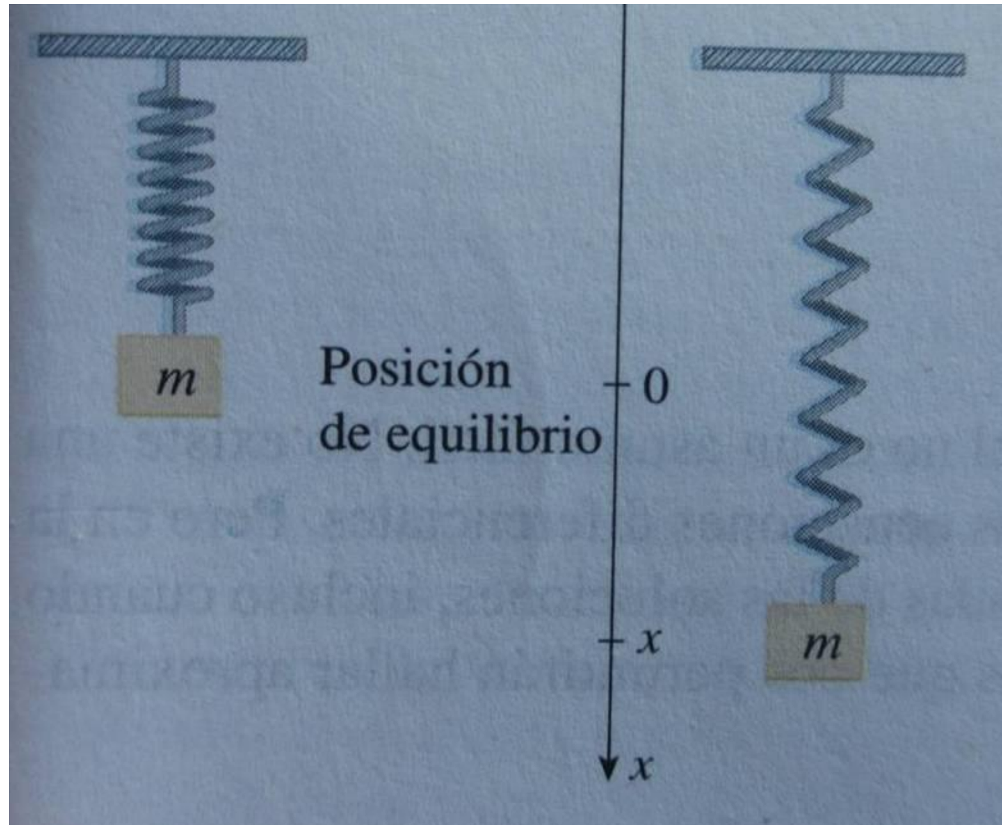


FIGURA 4

https://www.youtube.com/watch?v=D8U4G5kcpcM

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

9.3 Ecuaciones separables

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y)$$

$$h(y)\,dy = g(x)\,dx$$

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

en Stewart, J, Obr.cit.

Ejemplo de resolución

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int k\,dt$$

$$\ln|y| = kt + C$$

$$|y| = e^{kt+C} = e^{C}e^{kt}$$

$$y = Ae^{kt}$$

PROBLEMA DE VALOR INICIAL

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

donde $A(= \pm e^C$ o $0)$ es una constante arbitraria. Para ver el significado de la constante A, observamos que

$$y(0) = Ae^{k \cdot 0} = A$$

Por lo tanto, A es el valor inicial de la función.

Debido a que la ecuación 1 se presenta con gran frecuencia en la naturaleza, resumiremos lo que acabamos de probar para su uso futuro.

2 La solución del problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = ky \qquad y(0) = y_0$$

es

$$y(t) = y_0 e^{kt}$$

OBSERVE y/ó LEA, INTERPRETE Y COMPLETE

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

$$P[x,y(x)]dx + Q[x,y(x)]dy = 0$$

Definición: Llamamos ecuación diferencial exacta a una ecuación de la forma:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

donde

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

En este caso la solución general viene dada por $f(x,y) = C$ donde f es una función tal que cumple que

$$df = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Demostración del método de resolución:

OBSERVE y/ó LEA, INTERPRETE Y COMPLETE

$$a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)y(x)=r(x)$$

Presente la EDO LINEAL DE 1er ORDEN. Demuestre EL MÉTODO DE RESOLUCIÓN DEL FACTOR INTEGRANTE, y aplíquelo.

Definición:

Demostración del método de resolución:

RECONOCIENDO FENOMENOS NATURALES Y BUSCANDO LA REPRESENTACIÓN MATEMÁTICA QUE PERMITA SU CÁLCULO

LEA INTERPRETE Y RESUELVA

1-a) En biología y con aplicación directa a bioingeniería, tenemos la siguiente situación:

Las **bacterias** se reproducen con **una velocidad que es directamente proporcional al número actual** o número de bacterias (vivas) presentes, que indicamos N.

Se conoce un cultivo que tiene **un número inicial** de bacterias No, y después de **transcurrida una hora**, verificamos un **incremento** de bacterias de un **cincuenta porciento**. **¿cuánto tiempo deberá transcurrir** hasta que **se triplique** la población inicial de **bacterias**?

Se puede **resolver planteando primero** la ecuación que da cuenta de la velocidad de crecimiento de las bacterias.

AHORA RELEA Y RESUELVA

1-a) En biología y con aplicación directa a bioingeniería, tenemos la siguiente situación:

Las **bacterias** se reproducen con **una velocidad que es directamente proporcional al número actual** o número de bacterias (vivas) presentes, que indicamos N.

Se conoce un cultivo que tiene **un número inicial** de bacterias No, y después de **transcurrida una hora**, verificamos un **incremento** de bacterias de un **cincuenta porciento**. **¿cuánto tiempo deberá transcurrir** hasta que **se triplique** la población inicial de **bacterias**?

Se puede **resolver planteando primero** la ecuación que da cuenta de la velocidad de crecimiento de las bacterias.

$$dN/dt=kN.$$

LEA, INTERPRETE Y CALCULE

RECONOCIENDO FENOMENOS QUE SE INTERPRETAN POR ECUACIONES DIFERENCIALES.

El modelo diferencial ya considerado tiene otras aplicaciones.

1-a) El modelo que vimos para **biología** y con aplicación directa a bioingeniería, relativo a la **velocidad** con que se reproducen las **bacterias**, **directamente proporcional al número actual** (vivas) presentes, también se aplica en **cinética química**,

Un tipo sencillo de reacción química cumple análoga condición: **la velocidad de reacción es directamente proporcional** a la concentración de un solo tipo de reactivo interviniente.

LEA, INTERPRETE Y CALCULE

RECONOCIENDO FENOMENOS QUE SE INTERPRETAN POR ECUACIONES DIFERENCIALES, continúa

Otro modelo diferencial para más de una aplicación

2-a) La **transferencia de calor**, constituye uno de los "**fenómenos de transporte básicos**" de la ingeniería de procesos, y constituye los fundamentos de la tecnología del calor.

Un tipo de transferencia de calor se caracteriza por el hecho de que **el sistema** -sólido o fluido- que **se está enfriando (o calentando)** en un medio de temperatura constante, **varía su temperatura a una velocidad directamente proporcional** a la diferencia de temperatura entre el sistema y el medio.

¿Podría intentar expresar la ecuación que rige estos fenómenos?

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

RECONOCIENDO FENOMENOS QUE SE INTERPRETAN POR ECUACIONES DIFERENCIALES, continúa

2-b) Si pudo encontrar una ecuación que exprese la relación entre la velocidad de variación de la temperatura del sistema, y su diferencia con la temperatura del medio, **resuelva**:

Al sacar una torta del horno, su temperatura es de 150°C. **Tres minutos** después, su temperatura es de 95°C. **Determine la temperatura de la torta a los 15 y a los 25 minutos**.

2-c) Un **pequeño objeto de metal**, cuya **temperatura inicial** es de 20°C, se deja caer dentro de un recipiente con agua hirviendo. ¿**Cuánto tiempo demorará** en alcanzar los 90°C, si se sabe que su temperatura **aumentó 2°C en un segundo**?, ¿**cuánto demorará** la barra en alcanzar los 98°C?

LEA, INTERPRETE Y CALCULE

RECONOCIENDO FENOMENOS QUE SE INTERPRETAN POR ECUACIONES DIFERENCIALES, continúa

(Usado para estimar la antigüedad de restos fósiles)

3) En **física y desintegración de sustancias radiactivas**, se puede aproximar como modelo, que una sustancia radiactiva se desintegra tal que **la masa desintegrada en la unidad de tiempo es proporcional** a la masa restante.

Exprese esto en una ecuación y resuelva lo siguiente:

Había inicialmente 100 mg de una sustancia radiactiva. **Al cabo de 6 horas, la masa disminuyó en 3%.** Si la rapidez de decrecimiento radiactivo en cualquier instante es proporcional a la cantidad de la sustancia presente, **determine** la cantidad que resta **al cabo de 24 horas**.

LEA, INTERPRETE Y CALCULE

RECONOCIENDO FENOMENOS QUE SE INTERPRETAN POR ECUACIONES DIFERENCIALES, continúa

4) **Solución salina:** la tasa de cambio de la cantidad de una sustancia en un compartimento en el instante t puede calcularse como el caudal de entrada menos el de salida del compartimento **este principio se llama ley de equilibrio.**

Exprese esto en una ecuación y resuelva lo siguiente:

Había inicialmente 10 g de sal disueltos en un tanque de 5 l de agua. En t=0 comienza a entrar en el tanque agua que contiene 1g de sal por litro a razón de 2 litros por minuto. Hay un mecanismo que permite una buena disolución. También en t=0 sale la solución a 2 litros por minuto. Hallar la cantidad de sal como función del tiempo.

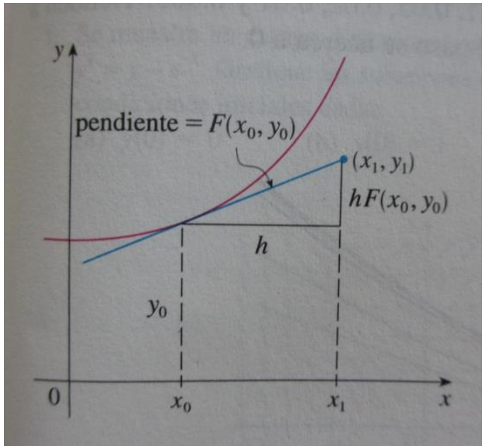


FIGURA 15

CAMPOS DIRECCIONALES, una solución gráfica

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

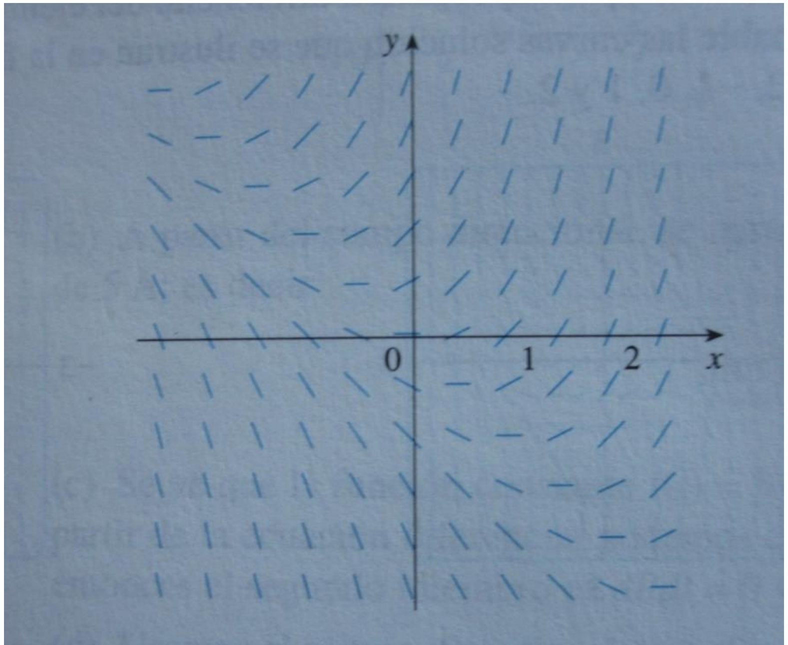


FIGURA 3

Campo direccional para $y' = x + y$

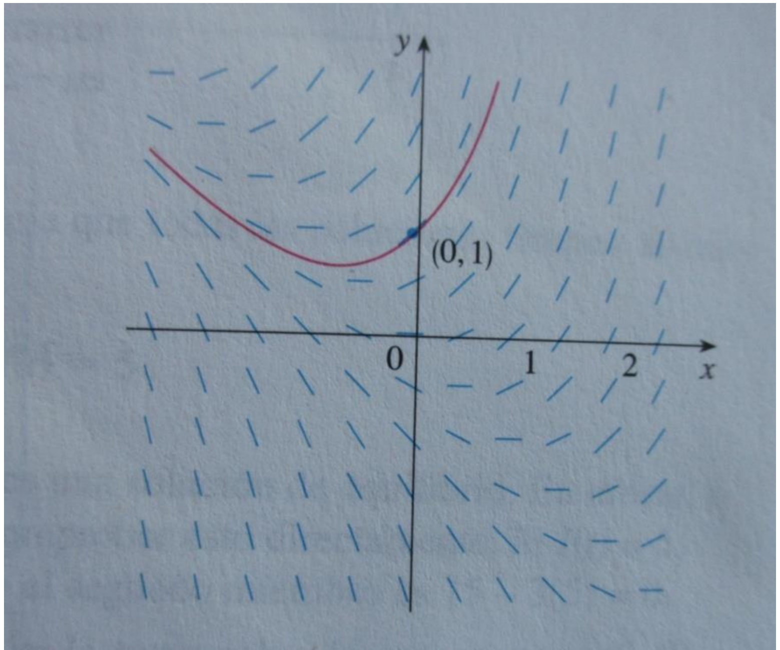


FIGURA 4

La curva solución que pasa por $(0, 1)$

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

EJEMPLO 1 □

(a) Dibuje el campo direccional para la ecuación $y' = x^2 + y^2 - 1$.

(b) Aplique el resultado del inciso (a) para dibujar la curva solución que pasa por el origen.

SOLUCIÓN

(a) Empecemos por calcular la pendiente en varios puntos, en la tabla siguiente:

x	-2	-1	0	1	2	-2	-1	0	1	2	...
y	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	...
$y' = x^2 + y^2 - 1$	3	0	-1	0	3	4	1	0	1	4	...

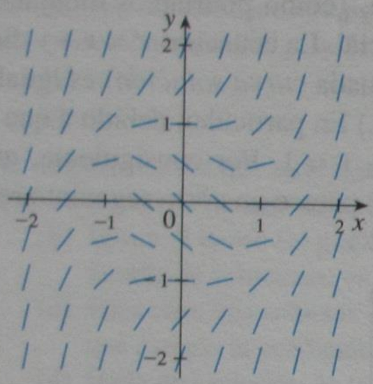


FIGURA 5

Ahora, tracemos segmentos rectilíneos cortos con estas pendientes en estos puntos. El resultado es el campo direccional que se muestra en la figura 5.

(b) Partamos del origen y desplacémonos hacia la derecha en la dirección del segmento rectilíneo (el cual tiene pendiente –1). Continuemos el trazo de la curva solución de forma que nos movamos paralelos a los segmentos rectilíneos cercanos. En la figura 6 se muestra la curva solución resultante. Volvemos al origen y dibujamos también la curva solución hacia la izquierda. □

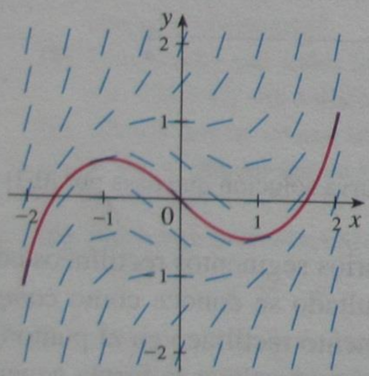


FIGURA 6

Entre más segmentos rectilíneos tracemos en un campo direccional, más clara se vuelve la imagen. Por supuesto, es tedioso calcular pendientes y dibujar a mano dichos segmentos para un gran número de puntos; pero las computadoras son muy adecuadas para esta tarea. En la figura 7 se muestra un campo direccional más detallado, dibujado con computadora, para la ecuación diferencial del ejemplo 1. Nos permite trazar con

MÉTODO DE EULER, una solución numérica
OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

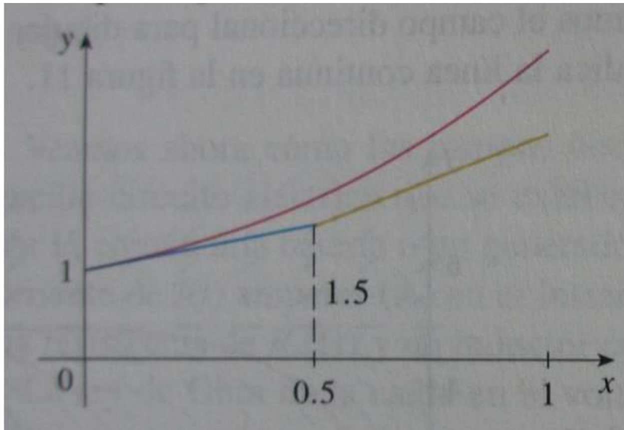


FIGURA 13
Aproximación de Euler con tamaño del paso de 0.5

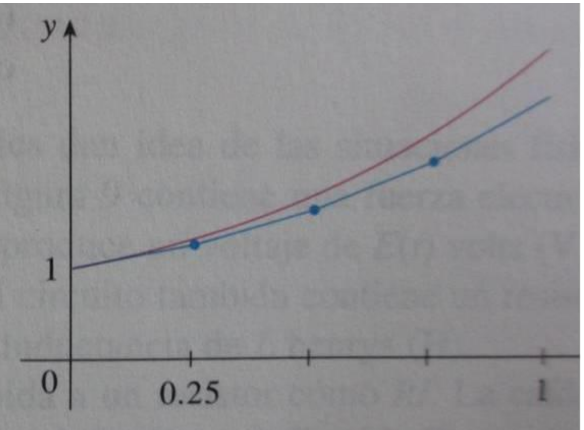


FIGURA 14
Aproximación de Euler con tamaño del paso de 0.25

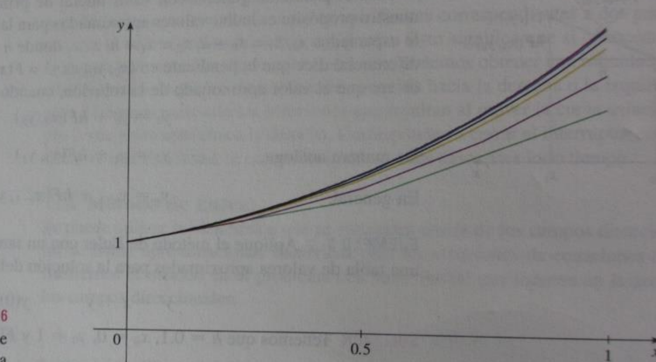


FIGURA 16
proximaciones de Euler que tienden a la solución exacta

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

Método de Euler

$$y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0)$$

$$y_2 = y_1 + hF(x_1, y_1)$$

$$y_n = y_{n-1} + hF(x_{n-1}, y_{n-1})$$

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

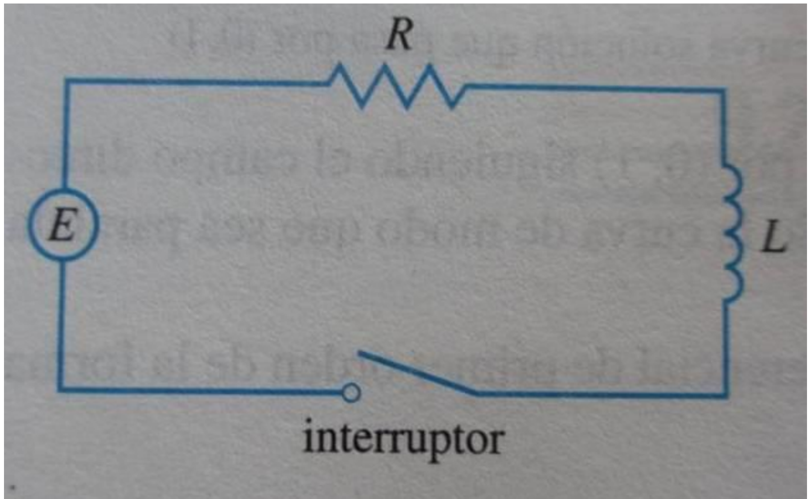
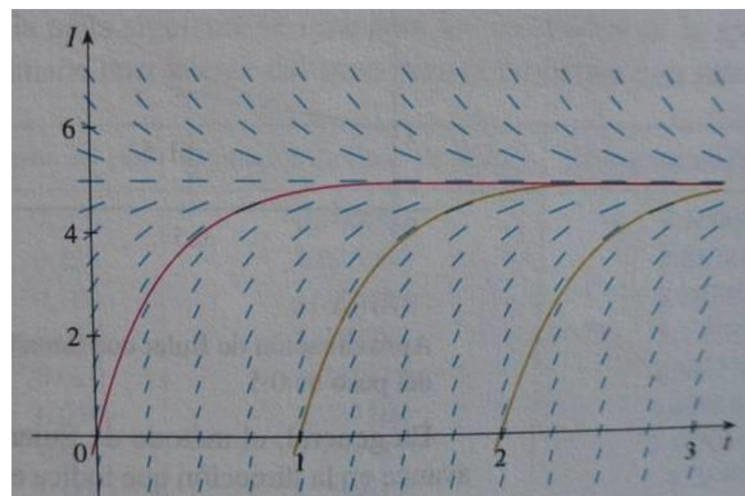


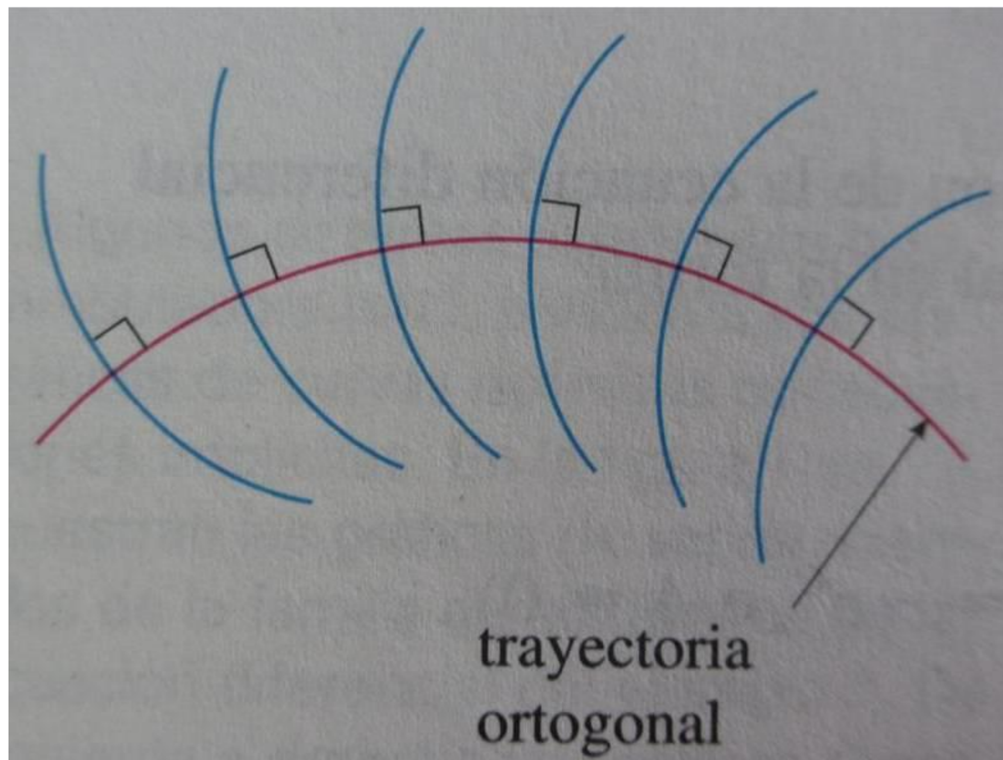
FIGURA 9

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \quad \text{o} \quad \frac{dI}{dt} = 15 - 3I$$



OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

Trayectorias ortogonales



OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

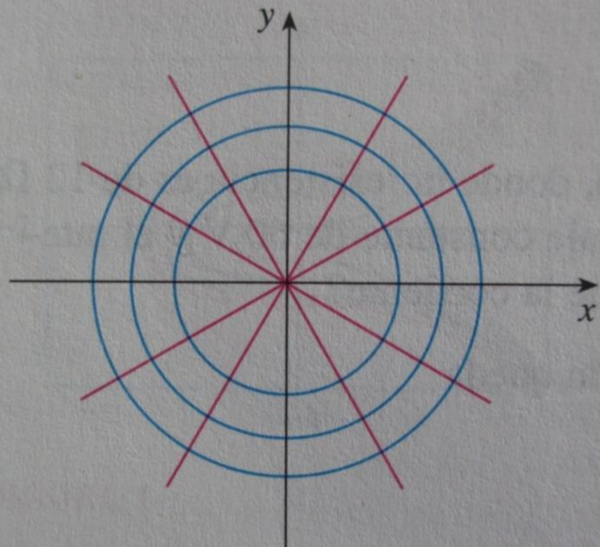


FIGURA 7

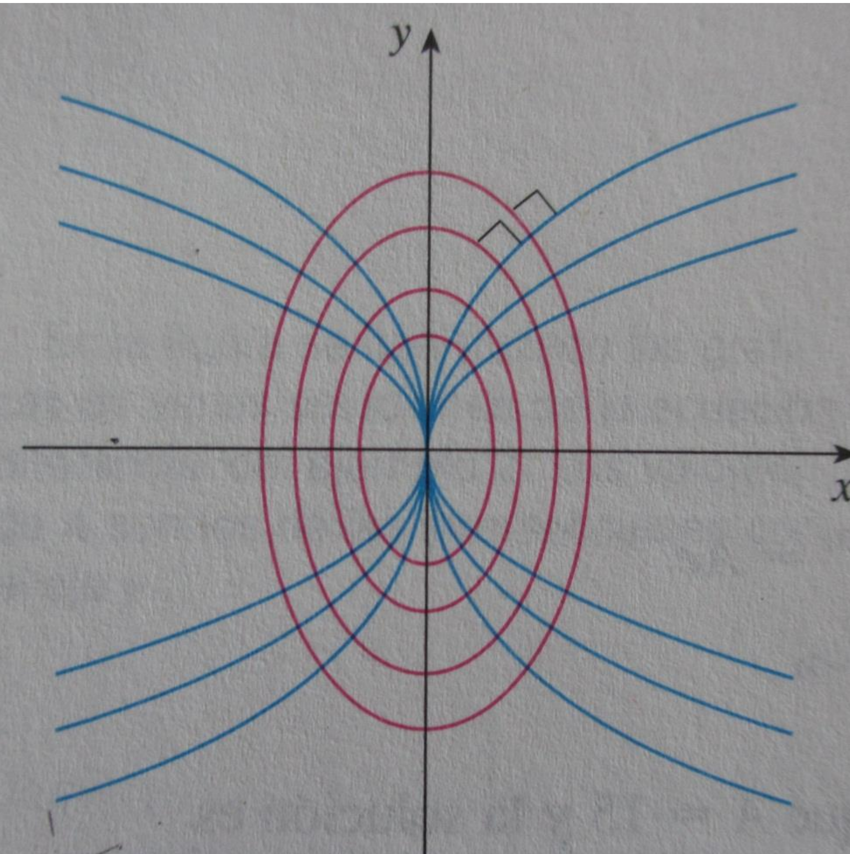


FIGURA 8

Fin de la presentación …

… gracias por su seguimiento

… gracias por su participación