

Integrales dobles y triples

*Guía de Estudio N°6
MATEMÁTICA III - Curso 2019
FCAI-UNCuyo*

¿QUÉ APRENDIERON DE INTEGRALES EN MATEMÁTICA II ?

Problema del área y las integrales definidas.

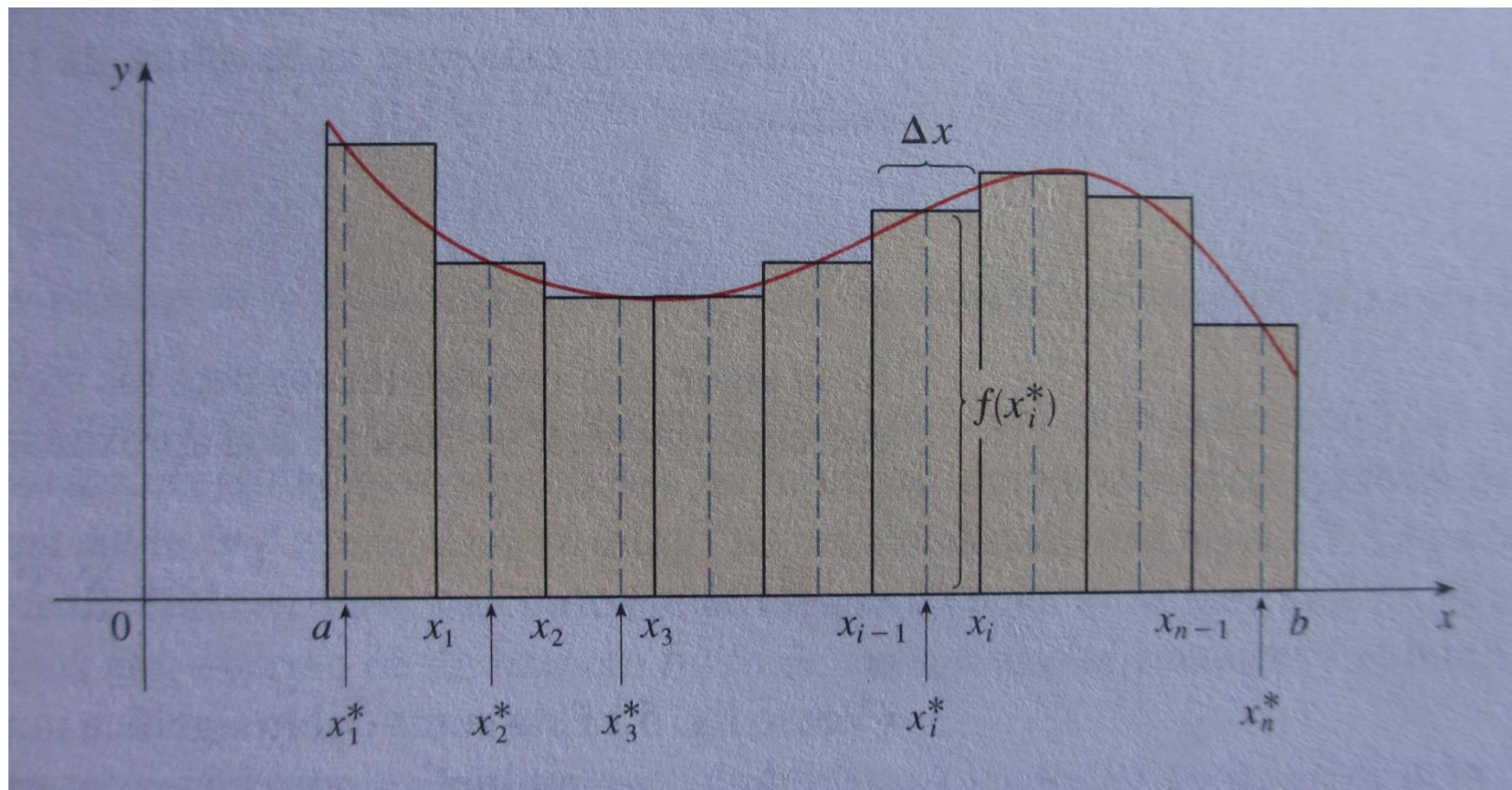
El área y las sumatorias de Riemann.

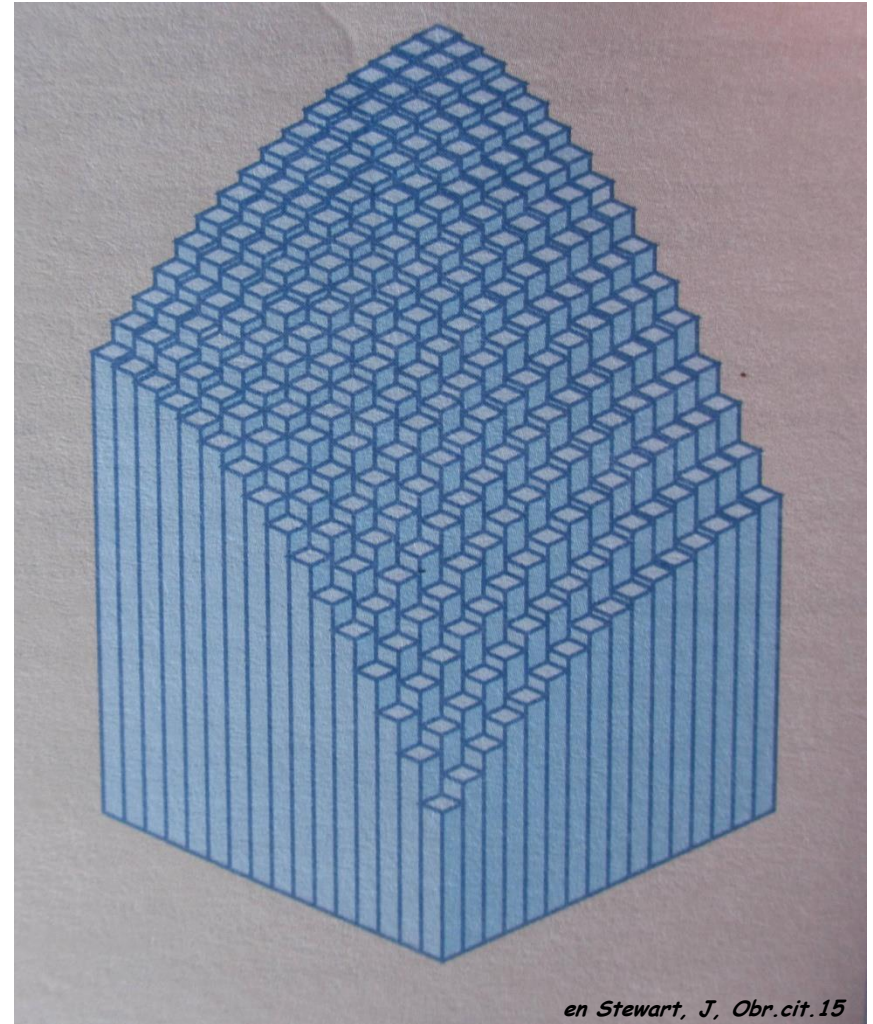
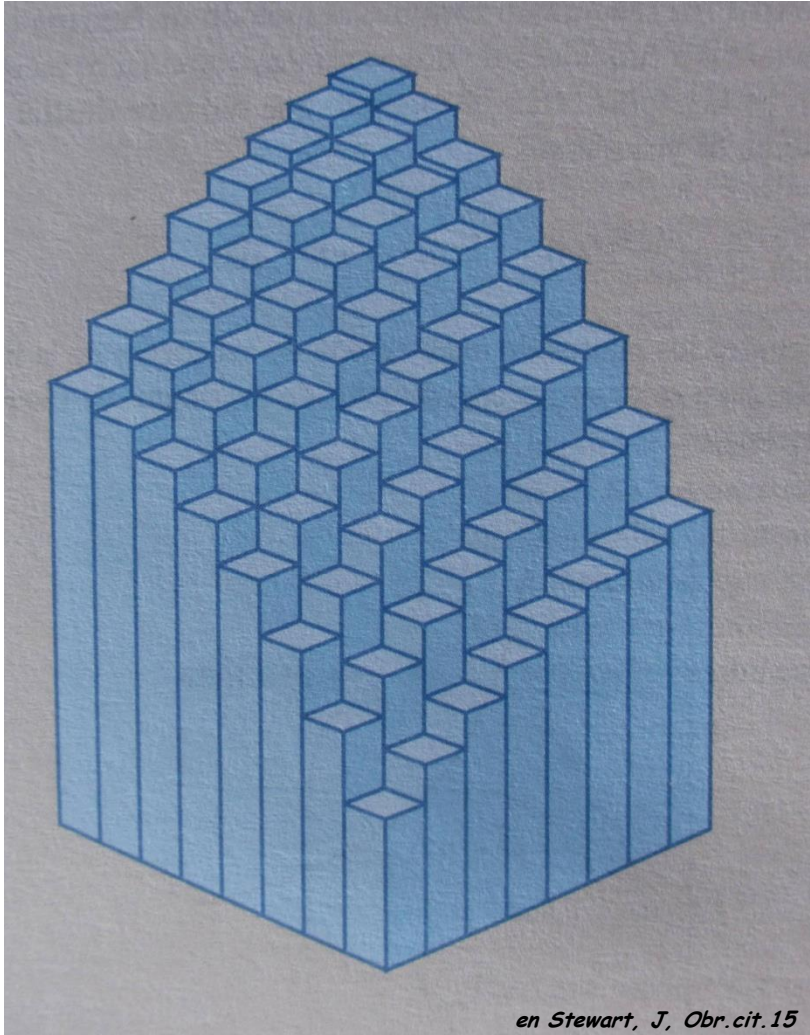
Las sumatorias de Riemann y su límite.

La integral definida y la integral indefinida para su cálculo.

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$ si el límite existe





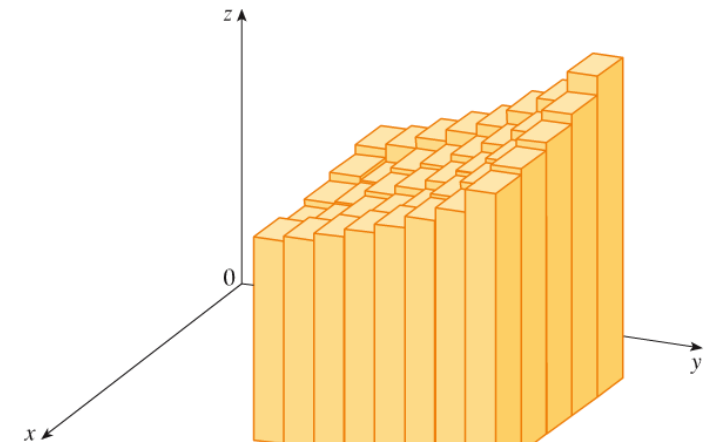
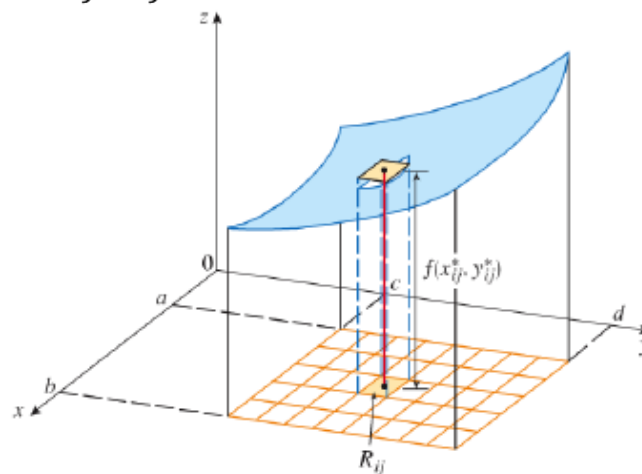
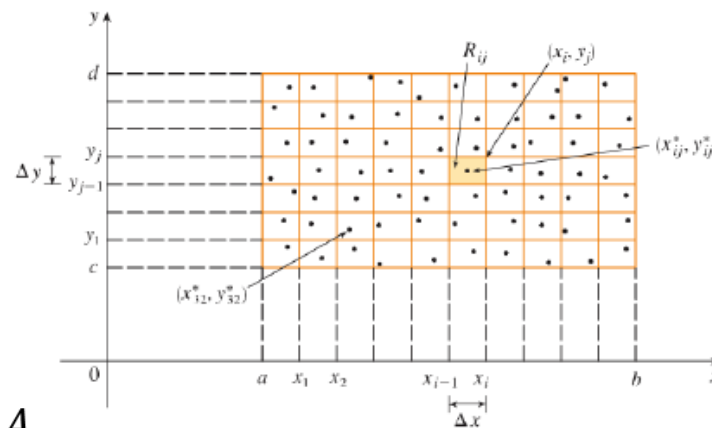
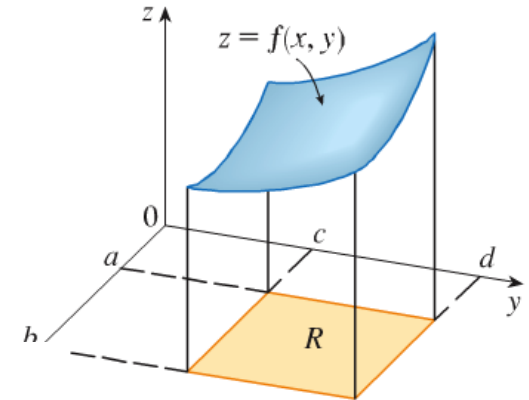
$f(x, y)$ definida en $R = [a, b] \times [c, d]$

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x, y) / x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

$$V_{ij} \approx f(y_j^*, y_j^*) \Delta A$$

$$V \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(y_j^*, y_j^*) \Delta A$$

$$V = \lim_{n, m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(y_j^*, y_j^*) \Delta A$$



5 DEFINICIÓN La **integral doble** de f sobre el rectángulo R es

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

si existe el límite.

en Stewart, J, Obr.cit.Cap.15

El significado preciso del límite en la definición 5 es que para todo número $\varepsilon > 0$ hay un entero N tal que

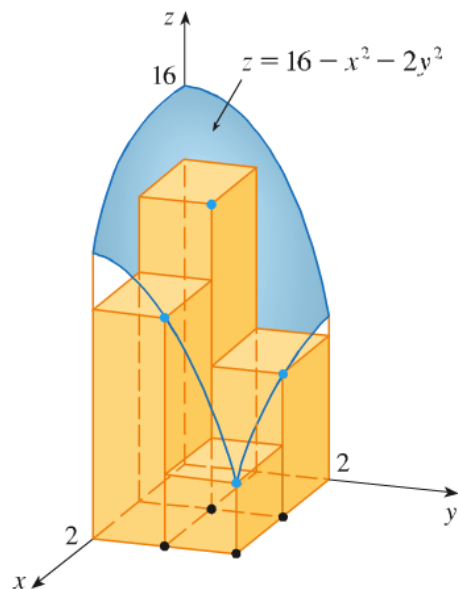
$$\left| \iint_R f(x, y) dA - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A \right| < \varepsilon$$

para los enteros m y n mayores que N y para cualquier elección de puntos muestrales (x_{ij}^*, y_{ij}^*) en R_{ij} .

en Stewart, J, Obr.cit.Cap.15

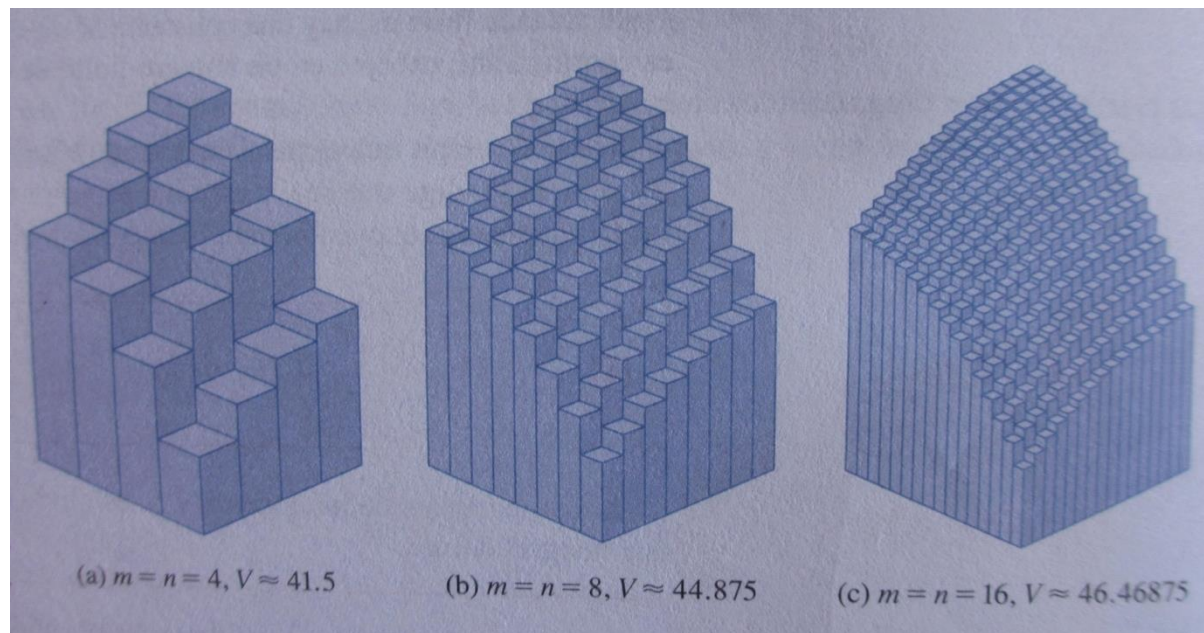
Integrales dobles y triples

Cálculo del valor **aproximado** del **volumen**: $V = ?$



OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

Aprenderemos a calcular el **valor exacto** del **volumen** que en este casos será $V = 48$



en Stewart, J, Obr.cit.15

$$V \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(y_j^*, y_j^*) \Delta A$$

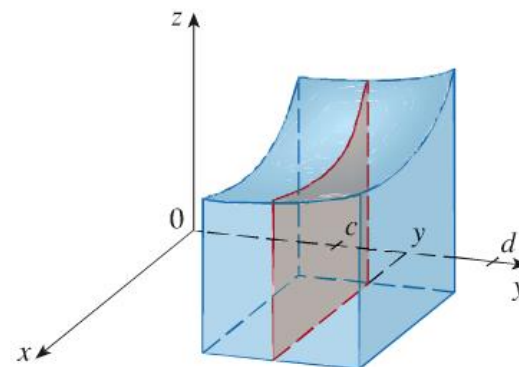
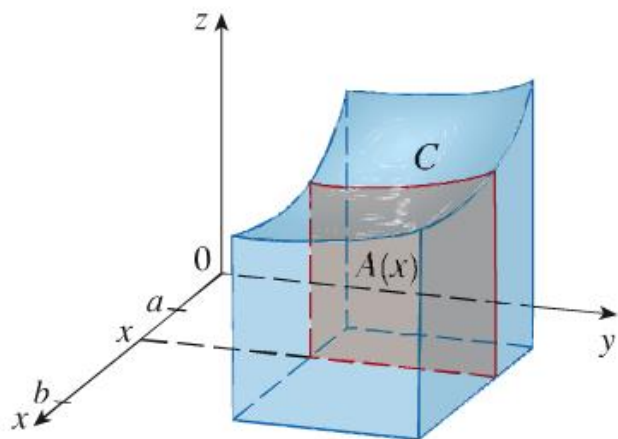
Si $f(x, y) \geq 0$ entonces el **volumen** V del sólido que se encuentra arriba del rectángulo R y debajo de la superficie $z = f(x, y)$ es

$$V = \iint_R f(x, y) dA$$

¿cómo evaluar la integral doble?,

¿cómo calcular el valor exacto del volumen?

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy \quad V = \int_a^b A(x) dx$$

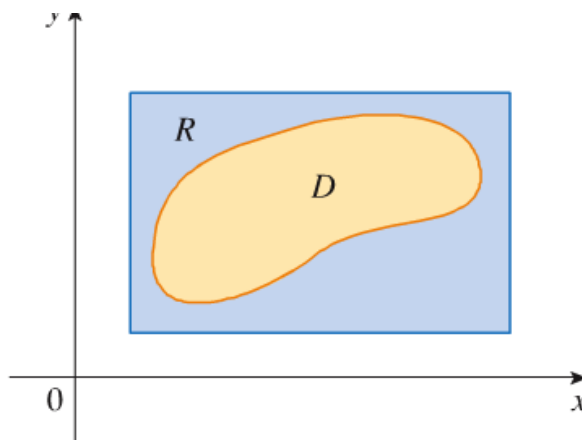
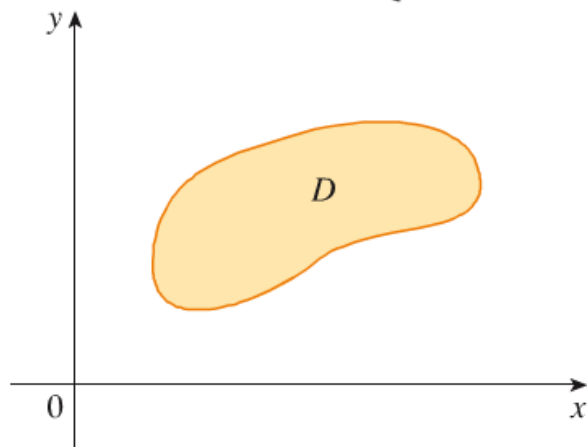


Teorema de Fubini: Si f es continua en el rectángulo $R=[a,b] \times [c,d]$, entonces

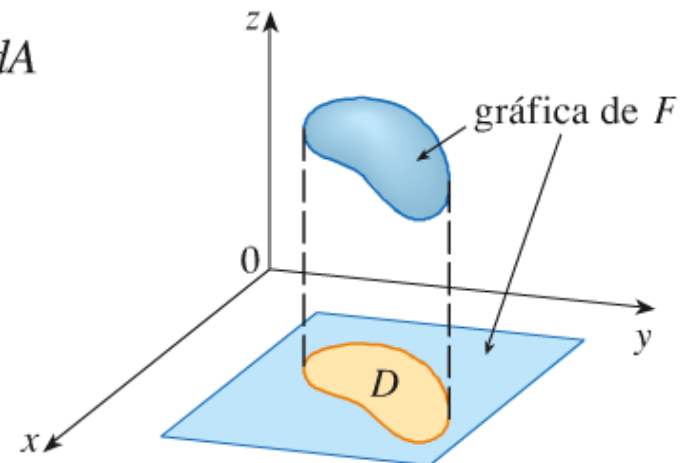
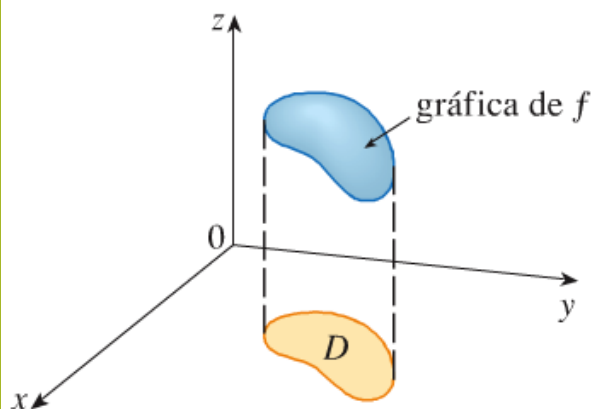
$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

Integrales dobles en recintos generalizados

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \text{ está en } D \\ 0 & \text{si } (x, y) \text{ está en } R \text{ pero no en } D \end{cases}$$



$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_R F(x, y) dA$$

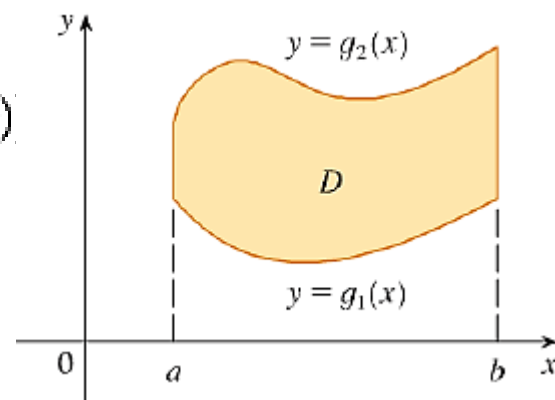


Si f es continua en una región D tipo I tal que

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

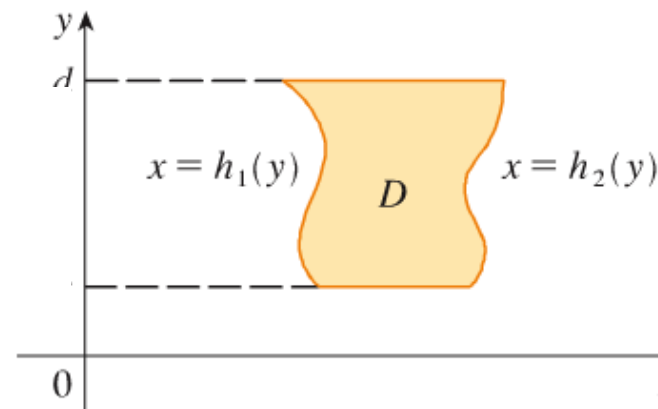
entonces

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$



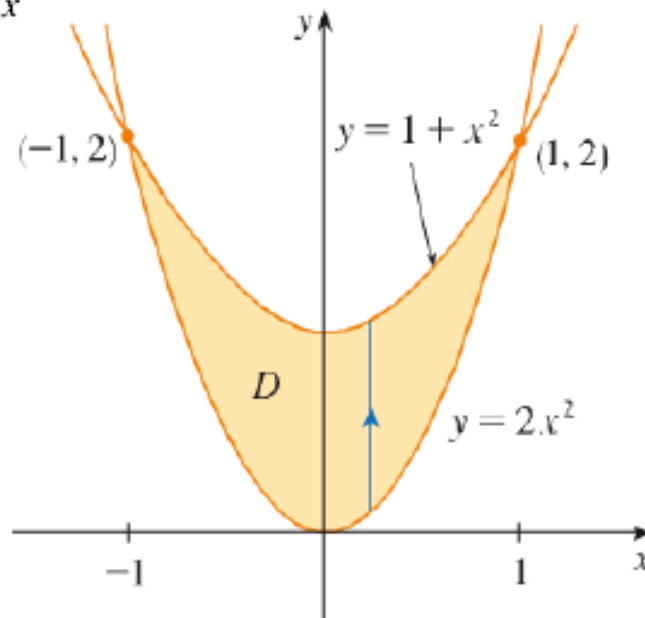
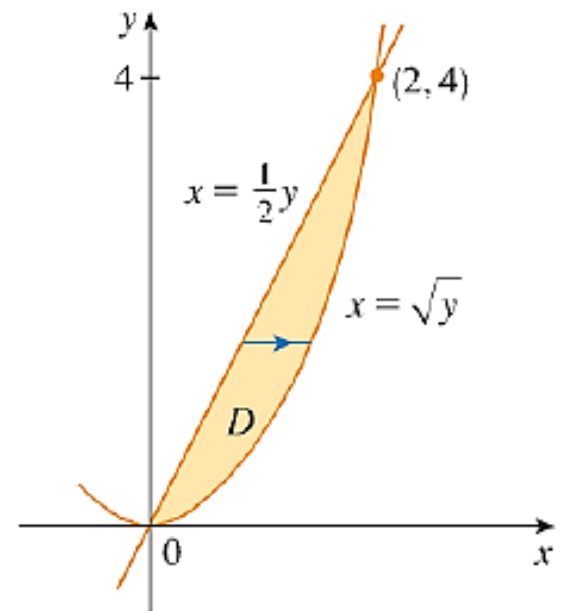
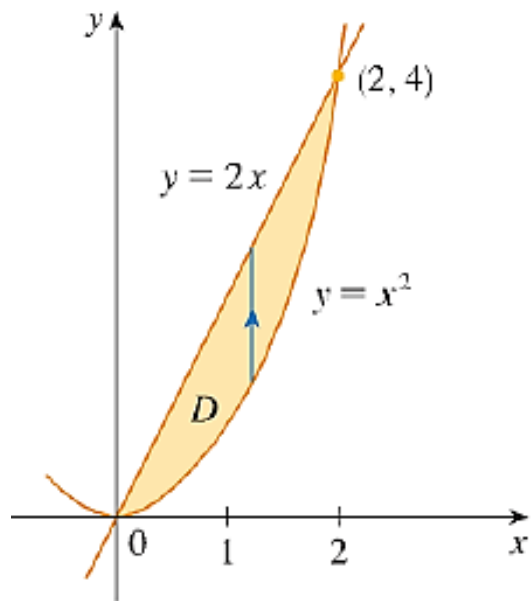
$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

donde D es una región de tipo II dada por la ecuación 4.



en Stewart, J, Obr.cit.15

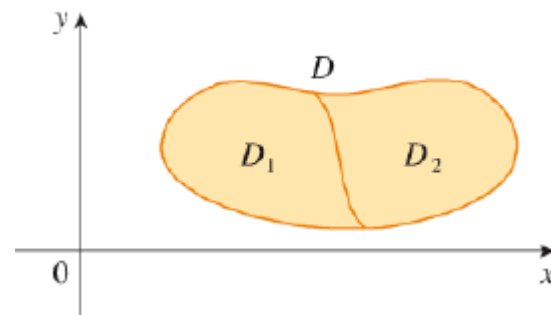
que también podemos expresar del siguiente modo: $\int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} F(x, y) dy dx$



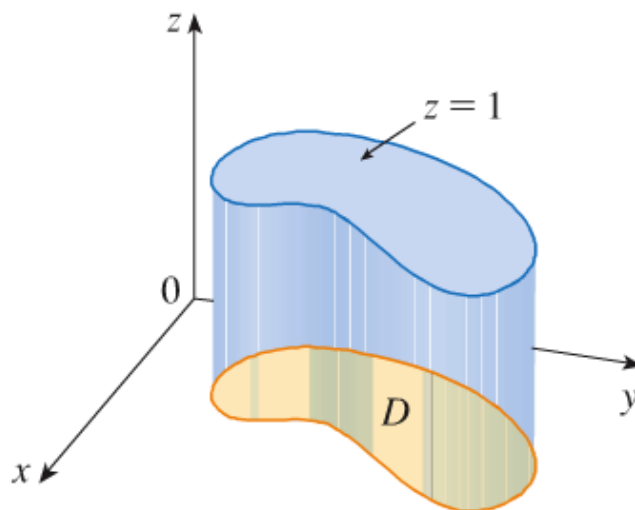
Propiedades

OBSERVE y/ó LEA e INTERPRETE

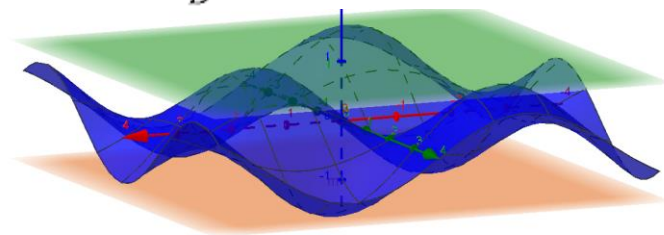
$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_{D_1} f(x, y) dA + \iint_{D_2} f(x, y) dA$$



$$\iint_D 1 dA = A(D)$$



Si $m \leq f(x, y) \leq M$ para toda (x, y) en D , entonces $m A(D) \leq \iint_D f(x, y) dA \leq M A(D)$



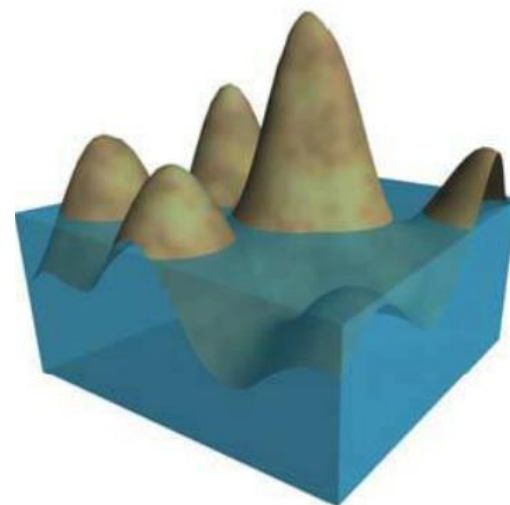
Aplicaciones de la integral doble

Area

$$\iint_D 1 \, dA = A(D)$$

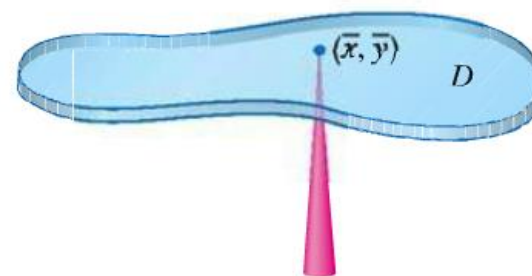
Volumen

Si $f(x, y) \geq 0$ $V = \iint_R f(x, y) \, dA$



Valor promedio

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y) \, dA$$



Masa de una lámina
con densidad variable

$$m = \iint_D \rho(x, y) \, dA$$

$$\rho(x, y) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta A}$$

Las coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) del centro de masa de una lámina que ocupa la región D y que tiene función de densidad $\rho(x, y)$ son

Momento estático y
centro de masa de
una figura plana

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x, y) \, dA \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x, y) \, dA$$

Aplicaciones de la integral doble

*Momento de inercia
de una lámina
respecto al eje x e y ,
respectivamente*

$$I_x = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (y_{ij}^*)^2 \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D y^2 \rho(x, y) dA$$

$$I_y = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij}^*)^2 \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D x^2 \rho(x, y) dA$$

Momento polar de inercia (respecto al origen)

$$I_0 = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [(x_{ij}^*)^2 + (y_{ij}^*)^2] \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA$$

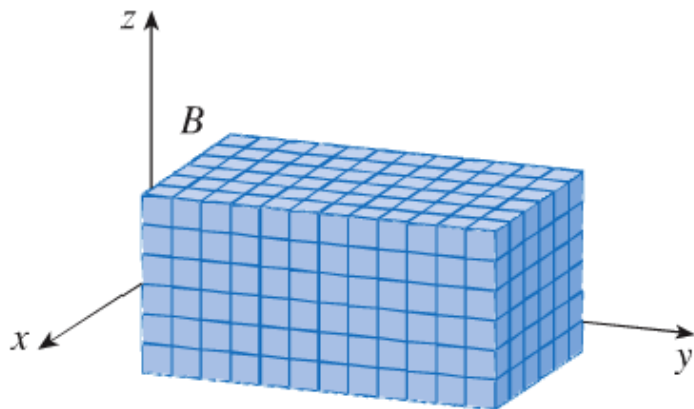
Función de densidad conjunta

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y) dA$$

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

Valores esperados

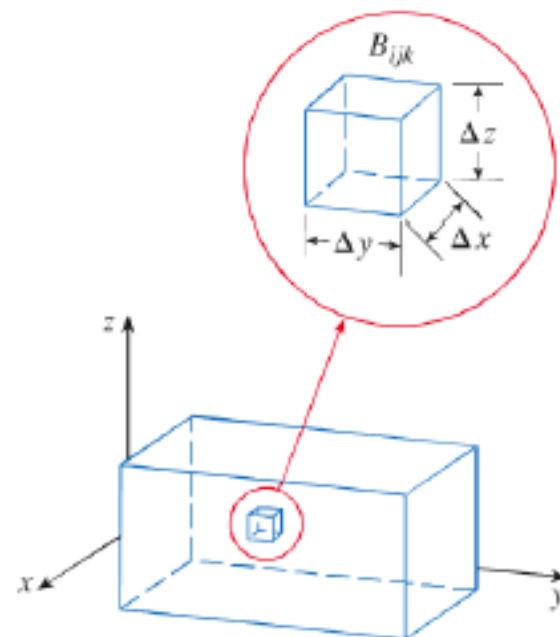
$$\mu_1 = \iint_{\mathbb{R}^2} x f(x, y) dA \qquad \mu_2 = \iint_{\mathbb{R}^2} y f(x, y) dA$$



Observemos la "caja" B y el detalle de cómo está particionada.

¿Cómo indicaría analíticamente la caja?

¿cómo indicaría cualquiera de las "cajitas" de la partición?



Si la partición es regular en sub-recintos cúbicos iguales entonces: $\text{Vol}(B_{ijk}) = \Delta V$

La triple suma de Riemann se expresará entonces:
$$\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V$$

DEFINICIÓN La integral triple de f sobre la caja B es

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V \quad \text{si este límite existe.}$$

Si el límite existe, se dice que f es **integrable** sobre B

*Propiedad: Si f es **continua** en la región B , entonces, f es **integrable** sobre B*

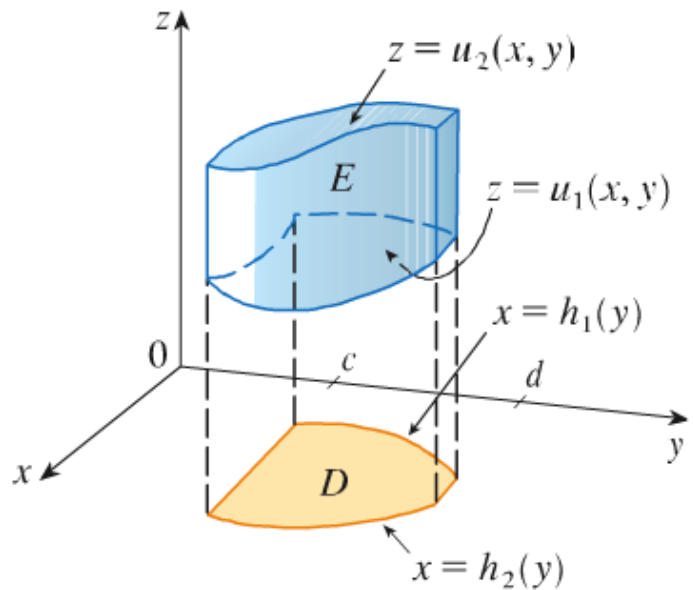
Teorema de Fubini para integrales triples: *Si f es continua en la región $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$ entonces*

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz$$

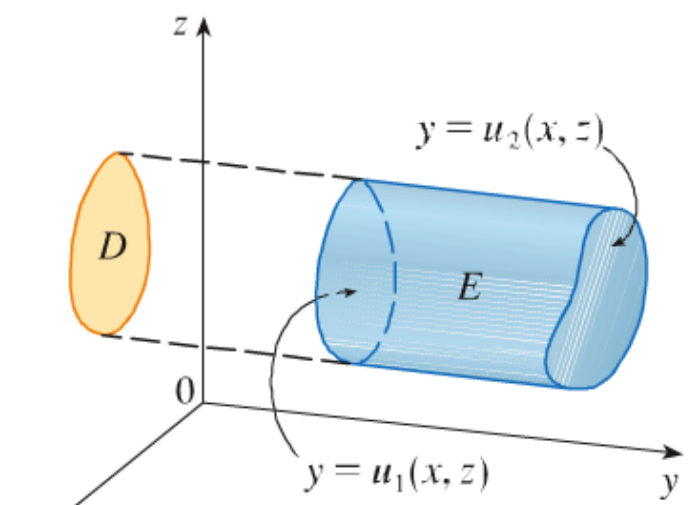
¿Cómo se evalúa entonces, una Integral Triple?

Ejemplo: Evalúe la integral triple $\iiint_B xyz^2 dV$ donde

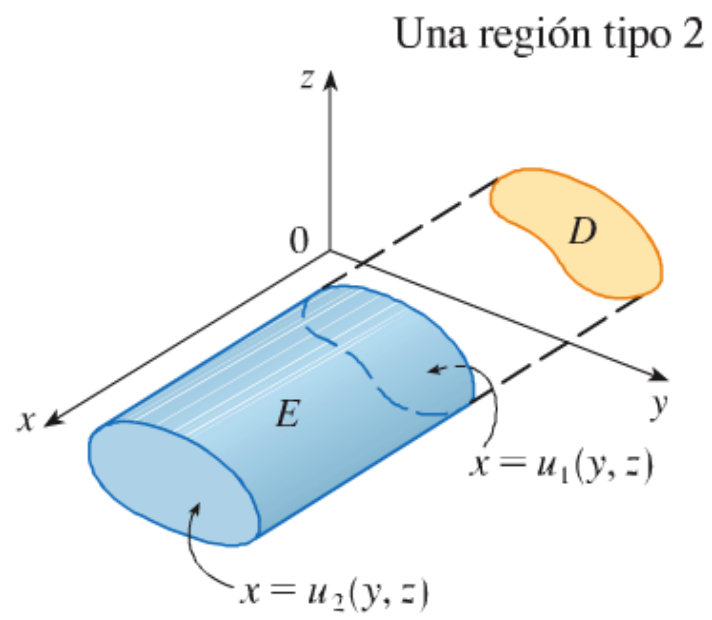
$$B = [0,1] \times [-1,2] \times [0,3]$$



Una región sólida tipo I,



Una región tipo 3



Una región tipo 2

$$V(E) = \iiint_E dV$$

en Stewart, J, Obr.cit.15

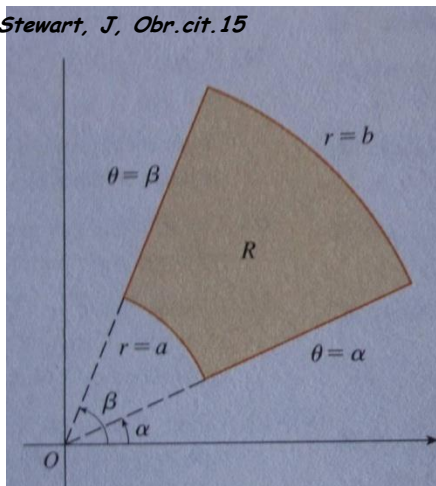


FIGURA 3 Rectángulo polar

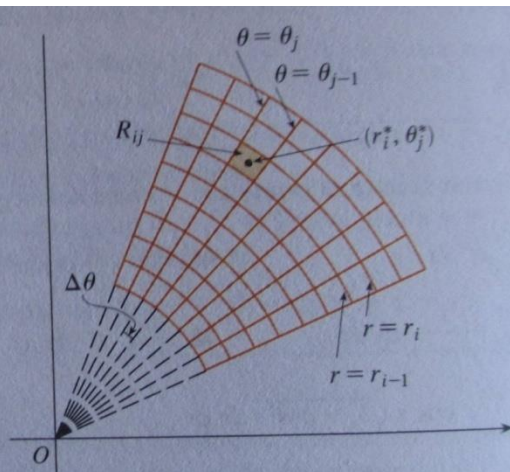


FIGURA 4 División de R en subrectángulos

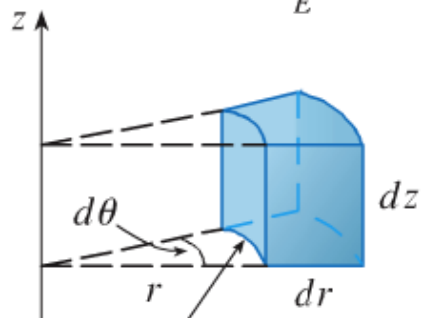
2 CAMBIO A COORDENADAS POLARES EN UNA INTEGRAL DOBLE Si f es continua en un rectángulo polar R dado por $0 \leq a \leq r \leq b$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, donde $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

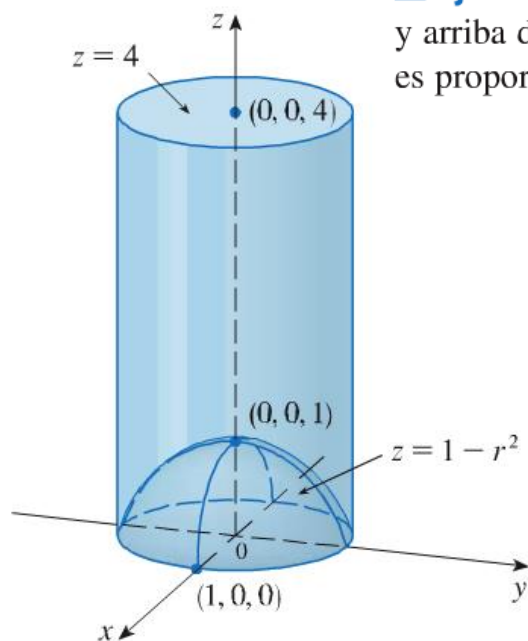
en Stewart, J, Obr.cit.15

Coordenadas cilíndricas

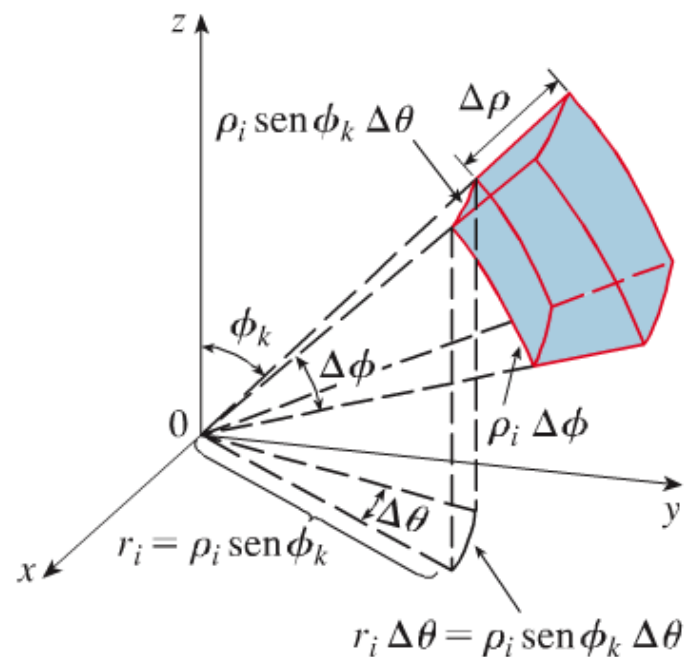
$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r \cos \theta, r \sin \theta)}^{u_2(r \cos \theta, r \sin \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz dr d\theta$$



■ EJEMPLO 3 Un sólido E está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, debajo del plano $z = 4$ y arriba del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$. (Véase fig. 8.) La densidad en cualquier punto es proporcional a su distancia desde el eje del cilindro. Encuentre la masa de E .



Coordenadas esféricas



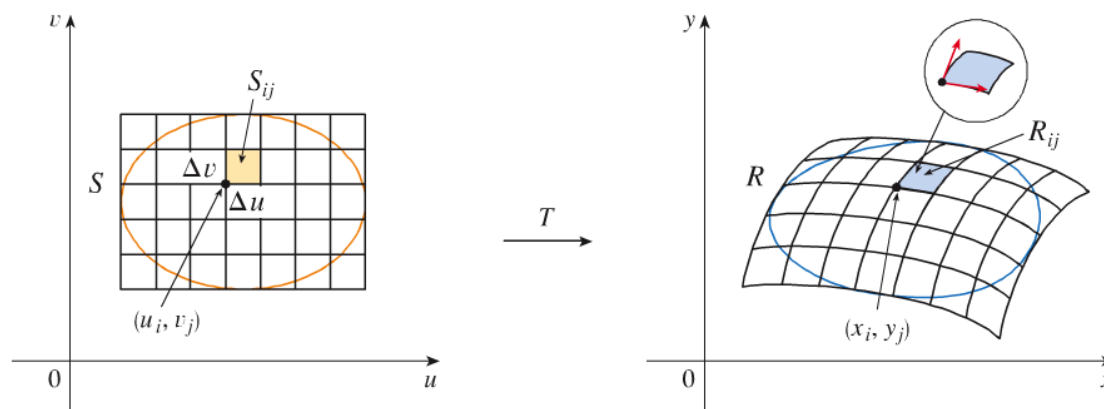
$$\Delta V_{ijk} \approx (\Delta \rho)(\rho_i \Delta \phi)(\rho_i \sin \phi_k \Delta \theta) = \rho_i^2 \sin \phi_k \Delta \rho \Delta \theta \Delta \phi$$

$$\begin{aligned} \text{[3]} \quad & \iiint_E f(x, y, z) dV \\ &= \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi \end{aligned}$$

donde E es una cuña esférica dada por

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d\}$$

Cambio de variable



7 DEFINICIÓN El **jacobiano** de la transformación T dado por $x = g(u, v)$ y $y = h(u, v)$ es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}$$

9 CAMBIO DE VARIABLES EN UNA INTEGRAL DOBLE Suponga que T es una transformación C^1 cuyo jacobiano es no nulo y que relaciona una región S en el plano uv con una región R en el plano xy . Suponga que f es continua en R , y que R y S son regiones planas tipo I o tipo II. Suponga también que T es uno a uno, excepto quizá en el límite de S . Entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

Fin de la presentación ...

... gracias por su seguimiento

... gracias por su participación