Introdución al Cálculo Vectorial

Guía de Estudio N°7
MATEMÁTICA III – Curso 2019
FCAI-UNCuyo
Bibliografía extraída de:
Marsden J. y Tromba A., Cálculo Vectorial, Pearson Ed. 2004.

Límite generalizado

No se puede mostrar la imagen en este momento.

en Marsden and Tromba br.cit.

Derivadas parciales

DEFINICIÓN *Sean $U \subset \mathbf{R}^n$ un conjunto abierto y $f: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ una función con valores reales. Entonces $\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n$, las* **derivadas parciales** *de f respecto a la primera, segunda, ..., n-ésima variable son las funciones con valores reales, de n variables, las cuales, en el punto $(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{x}$, están definidas por*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_j + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h}$$

si existen los límites, donde $1 \leq j \leq n$ y $\mathbf{e}_j$ es el j-ésimo vector de la base usual, definido por $\mathbf{e}_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, con el 1 en el j-ésimo lugar (ver la sección 1.5).

Si $f: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, entonces podemos escribir

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)),$$

$\partial f_m/\partial x_n$ es la derivada parcial de la m-ésima componente con respecto a x_n, la n-ésima variable.

Diferenciación

$f: R \to R$ Derivale en x_0 = Diferenciable en x_0

Si f es diferenciable en el punto x_0, entonces $\underset{\Delta x \to 0}{\text{límite}} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$.

$$\underset{x \to x_0}{\text{límite}} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] = 0$$

$$\underset{x \to x_0}{\text{límite}} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

DEFINICIÓN *Sea $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Decimos que f es* ***diferenciable en*** (x_0, y_0), *si $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ existen en (x_0, y_0) y si*

$$\frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right](x - x_0) - \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right](y - y_0)}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|} \to 0 \qquad (2)$$

cuando $(x, y) \to (x_0, y_0)$.

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\Delta f - df}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \Delta f = df + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \;\; ; \; \varepsilon_1 \to 0 \; y \; \varepsilon_2 \to 0$$

Diferenciación

DEFINICIÓN *Considerar el caso especial* $f : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. *Aquí* $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$ *es una matriz de* $1 \times n$*:*

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right].$$

Formamos el correspondiente vector $(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n)$*, llamado el* ***gradiente*** *de* f *y denotado por* grad f *o* ∇f.

Para el caso general en que f manda a un subconjunto de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$, la derivada es la matriz de $m \times n$ dada por

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

donde $\partial f_i/\partial x_j$ está evaluada en $\mathbf{x}_0$. A $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ se le llama, de manera correcta, *matriz de las derivadas parciales de* f *en* $\mathbf{x}_0$.

Diferenciación

DEFINICIÓN *Sean U un conjunto abierto en $\mathbf{R}^n$ y $f\colon U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ una función dada. Decimos que f es* **diferenciable** *en $\mathbf{x}_0 \in U$ si y sólo si existe una matriz $\mathbf{T}$ de $m \times n$, tal que*

$$\operatorname*{límite}_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{T}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = 0. \tag{1}$$

Llamamos a $\mathbf{T}$ **derivada** *de f en $\mathbf{x}_0$ y la denotamos por $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$. En notación matricial, $\mathbf{T}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$ equivale a*

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \cdots & t_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_{01} \\ \vdots \\ x_n - x_{0n} \end{bmatrix},$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n})$. A veces escribimos $\mathbf{T}(\mathbf{y})$ como $\mathbf{T}\cdot\mathbf{y}$ o simplemente $\mathbf{Ty}$.

Diferenciación

TEOREMA 16 *Suponer que $f: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$. Entonces todas las derivadas parciales de f existen en el punto $\mathbf{x}_0$ y la matriz $\mathbf{T}$ de $m \times n$ está dada por*

$$[t_{ij}] = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right],$$

esto es,

$$\mathbf{T} = \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

donde $\partial f_i/\partial x_j$ está evaluada en $\mathbf{x}_0$. En particular, esto implica que $\mathbf{T}$ está determinada de manera única; no existe otra matriz que satisfaga la condición (1).

Conclusión ….

DEFINICIÓN *Sean U un conjunto abierto en $\mathbf{R}^n$ y $f: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ una función dada. Decimos que f es* **diferenciable** *en $\mathbf{x}_0 \in U$ si existen las derivadas parciales de f en $\mathbf{x}_0$ y si*

$$\underset{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}{\text{límite}} \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{T}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = 0, \tag{4}$$

donde $\mathbf{T} = \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ es la matriz cuyos elementos matriciales son $\partial f_i/\partial x_j$ evaluadas en $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{T}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$ es el producto de $\mathbf{T}$ con $\mathbf{x}-\mathbf{x}_0$ (considerado como un vector columna). Llamamos a $\mathbf{T}$ **derivada** *de f en $\mathbf{x}_0$.*

TEOREMA 11: REGLA DE LA CADENA. *Sean $U \subset \mathbf{R}^n$ y $V \subset \mathbf{R}^m$ abiertos. Sean $g: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ y $f: V \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ funciones dadas tales que g manda a U en V, de modo que está definida $f \circ g$. Suponer que g es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y que f es diferenciable en $\mathbf{y}_0 = g(\mathbf{x}_0)$. Entonces $f \circ g$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y*

$$\mathbf{D}(f \circ g)(\mathbf{x}_0) = \mathbf{D}f(\mathbf{y}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0). \tag{1}$$

El lado derecho es una matriz producto.

en Marsden and Tromba br.cit.

Condición suficiente para la diferenciación

TEOREMA 9 *Sea $f: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. Supongamos que existen todas las derivadas parciales $\partial f_i / \partial x_j$ de f y son continuas en una vecindad de un punto $\mathbf{x} \in U$. Entonces f es diferenciable en $\mathbf{x}$.*

$$
\begin{array}{ccccc}
 & \text{Teorema 9} & & \begin{array}{c}\text{Definición}\\ \text{de derivada}\end{array} & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
\text{Parciales continuas} & \Longrightarrow & \text{Diferenciable} & \Longrightarrow & \text{Existen las parciales}
\end{array}
$$

Condición necesaria para la diferenciación

TEOREMA 8 *Sea $f: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ diferenciable en $\mathbf{x}_0$. Entonces f es continua en $\mathbf{x}_0$, y más aún, $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < M_1 \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ para alguna constante M_1 y $\mathbf{x}$ cerca de $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$.*

Aproximación Lineal

DEFINICIÓN *Sea* $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *diferenciable en* $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$. *El plano en* $\mathbf{R}^3$ *definido mediante la ecuación (1),*

$$z = f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0),$$

se llama **plano tangente** a la gráfica de f en el punto (x_0, y_0).

O en notación matricial …

Teorema de Taylor

Para funciones suaves de una variable $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, el teorema de Taylor asegura que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_k(x,a), \qquad (1)$$

donde

$$R_k(x,a) = \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\, dt \qquad (1')$$

es el residuo. Para x cerca de a, este error $R_k(x,a)$ es pequeño "de orden k". Esto significa que

$$\frac{R_k(x,a)}{(x-a)^k} \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad x \to a. \qquad (2)$$

https://www.geogebra.org/m/zMn8dqTa

Teorema de Taylor

TEOREMA 1 *(Fórmula de Taylor de primer orden).* *Sea* $f\colon U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *diferenciable en* $\mathbf{x}_0 \in U$. *Entonces podemos escribir*

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + R_1(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0),$$

donde $R_1(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0)/\|\mathbf{h}\| \to 0$ *cuando* $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ *en* $\mathbf{R}^n$.

TEOREMA 2 *Sea* $f\colon U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *con derivadas parciales continuas hasta de tercer orden.* Entonces podemos escribir*

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) + R_2(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0),$$

donde $R_2(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0)/\|\mathbf{h}\|^2 \to 0$ *cuando* $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ *y la segunda suma es sobre todas las* i *y* j *entre* 1 *y* n *(de manera que hay* n^2 *términos).*

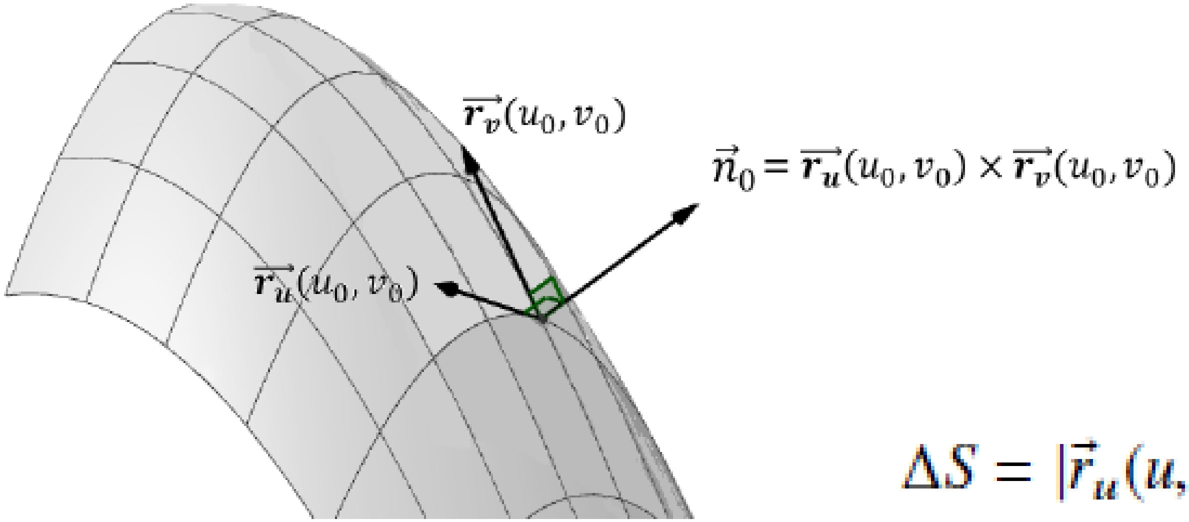
Superficie parametrizada

Definición Sea S una superficie parametrizada por la función vectorial diferenciable $\vec{r}(u,v)$, con $(u,v) \in D_{uv}$, y sea $P_0(x_0, y_0, z_0) \in S$ un punto en la superficie correspondiente al vector posición $\vec{r}(u_0, v_0)$. Si $\vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0) \neq \vec{0}$ entonces los vectores $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ y $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ determinan el *plano tangente* a la superficie S en P_0, con vector normal dado por

$$\vec{n}_0 = \vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0).$$

Luego, una ecuación para el plano tangente a S en P_0 está dada por

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \vec{n}_0 = 0.$$



$$\Delta S = |\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v)|\, \Delta u\, \Delta v,$$

http://www.mate.unlp.edu.ar/practicas/54_9_0810201811847.pdf

Integral de superficie de una función escalar

Definición Sea $f(x, y, z) : E \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función escalar de tres variables, y sea $S \subset E$ una superficie suave en el espacio. Sea $\vec{r}(u, v)$ con $(u, v) \in D_{uv}$, una parametrización de S. Se define la *integral de superficie* de f en S, como

$$\iint_S f\, dS = \iint_{D_{uv}} f(\vec{r}(u, v))\ |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)|\, du\, dv.$$

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\, dS = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^*)\, \Delta S_{ij}$$

Area de una superficie

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\breve{\imath} + y(u, v)\breve{\jmath} + z(u, v)\breve{k},$$

$$A(S) = \iint_S 1\, dS = \iint_{D_{uv}} 1\, |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\, du\, dv.$$

$z = g(x, y),$ $\qquad \vec{r}(x, y) = x\,\breve{\imath} + y\,\breve{\jmath} + g(x, y)\breve{k},$

$$A(S_g) = \iint_{S_g} 1\, dS = \iint_{D_{xy}} 1\, \sqrt{1 + (g_x)^2 + (g_y)^2}\, dx\, dy.$$

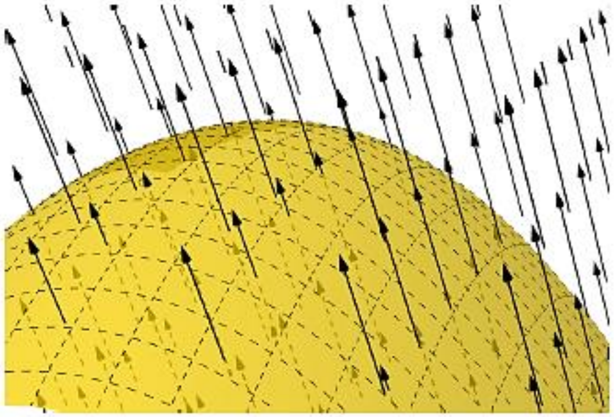
Integral de superficie de un campo vectorial

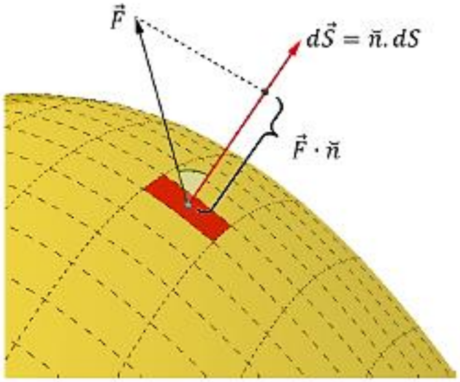
8 DEFINICIÓN Si **F** es un campo vectorial continuo definido sobre una superficie orientada S con un vector unitario normal **n**, entonces la **integral de superficie de F sobre S** es

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Esta integral también se denomina **flujo** de **F** a través de S.

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\, dA \qquad \iint_{D_{uv}} \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot (\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v))\, du\, dv.$$

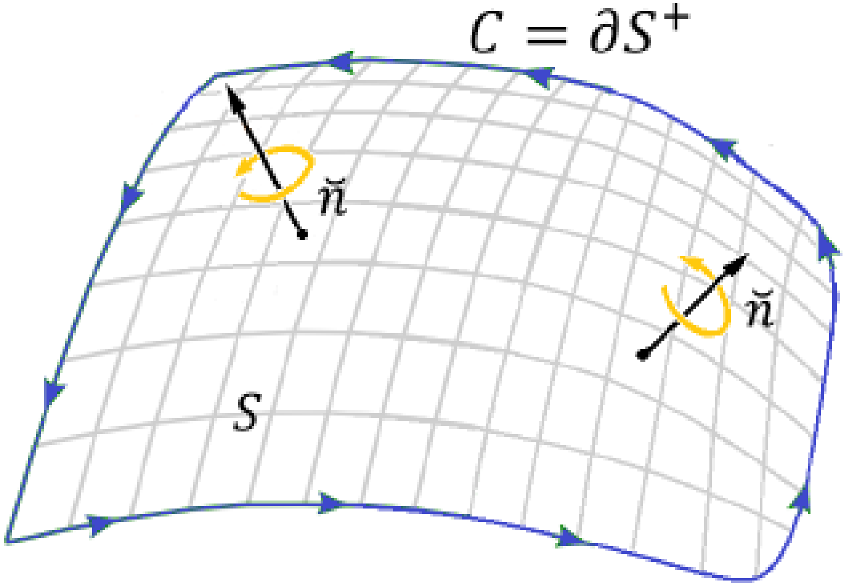




http://www.mate.unlp.edu.ar/practicas/54_9_16112017121618.pdf

Teorema 6.5.0.1 – Teorema de Stokes (o Teorema del rotor). Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie suave a trozos, simple y orientable del espacio. Sea $C = \partial S^+$ la curva cerrada que es frontera de dicha superficie, con orientación positiva respecto de S. Si $\vec{F}(x, y, z)$ es un campo vectorial en el espacio cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta del espacio que contiene a S y a C, entonces

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}.$$



Teorema 6.6.0.1 – Teorema de Gauss (o Teorema de la divergencia). Sea $E \subset \mathbb{R}^3$ una región sólida simple del espacio. Sea $S = \partial E^+$ la superficie cerrada, suave a trozos y orientable que es frontera de dicha región, con orientación hacia afuera del sólido. Si $\vec{F}(x, y, z)$ es un campo vectorial en el espacio cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta del espacio que contiene a E y a S, entonces:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E (\vec{\nabla} \cdot \vec{F})\, dV.$$

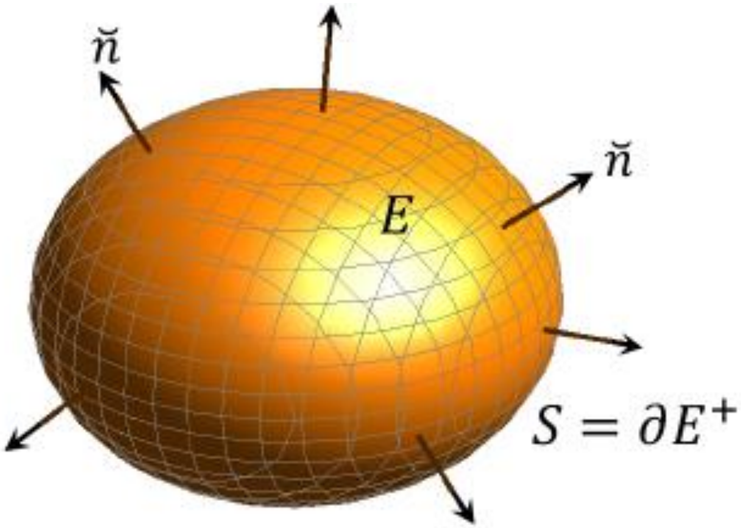


Figura 6.6.1: Teorema de Gauss: la integral de $\vec{F}_{\text{norm}}$ a través de $S = \partial E^+$, equivale a la integral de $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ dentro de E. La orientación de la superficie S es hacia afuera del sólido E.

Fin de la presentación …

… gracias por su seguimiento

… gracias por su participación