UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
Oddelek za matematiko

Random lines

Matea Naumovska, Andreja Sitar

Finančni praktikum

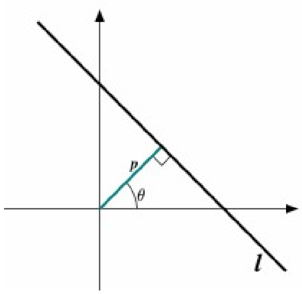
Ljubljana, December 2022

1 Navodila

V ravnini lahko premico predstavimo na več načinov. Za stohastično geometrijo je priročno, da premico l parametriziramo s parom (p,θ), kjer je p razdalja od izvora do premice, θ pa kot, ki ga premica oklepa z x osjo. Naj bosta C in C' konveksna objekta v ravnini, kjer velja da C' leži v notranjosti C. Želimo analizirati verjetnost, da naključna premica, ki seka C, seka tudi C'. Premice izbiramo enakomerno naključno glede na zgoraj opisano parametrizacijo.

2 Reševanje

Ta problem se rešuje s pomočjo že znanega problema Buffonove igle. Premico v ravnini bomo parametrizirali s parom (p,θ), kjer je p razdalja od izvora do premice, θ pa kot, ki ga premica oklepa z x osjo.



Slika 1: Primer premice podane s parom (p,θ)

Torej je enačba premice enaka

$$x\cos\theta + y\sin\theta - d = 0.$$

Mero množice Y premic lahko definiramo z integralom

$$m(Y) = \int_Y f(p,\theta)dY = \iint f(p,\theta)\,dp\,d\theta,$$

kjer je $f(p,\theta)$ konstantna funkcija, ker vemo, da je ta mera nespremenljiva za toge premike ravnine.

Naj bo X množica vseh afinih premic v $\mathbb{R}^2$ in Z_1 naključna spremenljivka, ki šteje presečišča naključne premice z odsekom dolžine L_1. Potem je integral

$$\int_X Z_1 dX$$

odvisen le od L_1. Ker Z_1 zavzema le vrednosti 0 ali 1, je ta integral enak meri množice vseh premic, ki sekajo dani segment ($\int_X Z_1 dX = m(X)$). Ker je vrednost integrala odvisna le od L_1, to vrednost označimo z $g(L_1)$.
Sedaj lahko ponovimo utemeljitev za rešitev problema Buffonove igle: Število presečišč naključno izbrane premice s fiksno mnogokotno črto, sestavljeno iz odsekov dolžin L_1, L_2,... je

$$\int_X (Z_1 + Z_2 + \cdots) dX = g(L_1 + L_2 + \cdots).$$

To se zaradi linearnosti integralov ujema z

$$\int_X Z_1 dX + \int_X Z_2 dX + \cdots = g(L_1) + g(L_2) + \cdots ,$$

iz česar sklepamo, da obstaja konstanta r, taka da

$$g(L) = rL.$$

Če je C konveksna krivulja v ravnini dolžine L in Z_C označuje naključno spremenljivko, ki šteje presečišča C z naključno premico, potem dobimo

$$\int_X Z_C dX = rL.$$

Naj bosta zdaj sta K_1 in K_2 kompaktni konveksni množici v ravnini z nepraznima notranjostma z mejnima krivuljama $C_1 = \partial K_1$ in $C_2 = \partial K_2$ dolžin L_1 in L_2. Sledi

$$\int_X Z_{C_i} dX = rL_i, \qquad i = 1, 2.$$

Ker sta množici K_i konveksni, premica seka C_i bodisi dvakrat bodisi nikoli. Naključni spremenljivki Z_{C_i} torej zavzameta le vrednosti 2 in 0 in velja

$$\int_X Z_{C_i} dX = 2L_i, \qquad i = 1, 2.$$

Odgovor na vprašanje, s kakšno verjetnostjo naključna premica seka konveksno množico K_1, če je $K_1 \subseteq K_2$ in že vemo, da premica seka množico K_2 je

$$\frac{\int_X Z_{C_q} dX}{\int_X Z_{C_2} dX} = \frac{2L_1}{2L_2} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{obseg(K_1)}{obseg(K_2)}.$$

V našem primeru je torej

$$P(premica\ l\ seka\ C' \mid premica\ l\ seka\ C) = \frac{obseg(C')}{obseg(C)}.$$

3 Načrt za nadaljnje delo