

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
Oddelek za matematiko

Random lines

Matea Naumovska, Andreja Sitar

Finančni praktikum

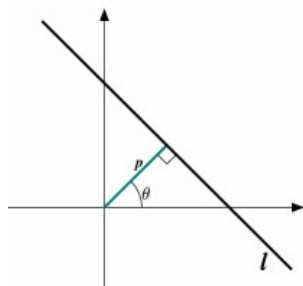
Ljubljana, December 2022

1 Navodila

V ravnini lahko premico predstavimo na več načinov. Za stohastično geometrijo je priročno, da premico l parametriziramo s parom (p, θ) , kjer je p razdalja od izvora do premice, θ pa kot, ki ga premica oklepa z x osjo. Naj bosta C in C' konveksna objekta v ravnini, kjer velja da C' leži v notranjosti C . Želimo analizirati verjetnost, da naključna premica, ki seka C , seka tudi C' . Premice izbiramo enakomerno naključno glede na zgoraj opisano parametrizacijo.

2 Reševanje

Ta problem se rešuje s pomočjo že znanega problema Buffonove igle. Premico v ravnini bomo parametrizirali s parom (p, θ) , kjer je p razdalja od izvora do premice, θ pa kot, ki ga premica oklepa z x osjo.



Slika 1: Primer premice podane s parom (p, θ)

Torej je enačba premice enaka

$$x \cos \theta + y \sin \theta - d = 0.$$

Mero množice Y premic lahko definiramo z integralom

$$m(Y) = \int_Y f(p, \theta) dY = \iint f(p, \theta) dp d\theta,$$

kjer je $f(p, \theta)$ konstantna funkcija, ker vemo, da je ta mera nespremenljiva za toge premike ravnine.

Naj bo X množica vseh afinih premic v \mathbb{R}^2 in Z_1 naključna spremenljivka, ki šteje presečišča naključne premice z odsekom dolžine L_1 . Potem je integral

$$\int_X Z_1 dX$$

odvisen le od L_1 . Ker Z_1 zavzema le vrednosti 0 ali 1, je ta integral enak meri množice vseh premic, ki sekajo dani segment ($\int_X Z_1 dX = m(X)$). Ker je vrednost integrala odvisna le od L_1 , to vrednost označimo z $g(L_1)$.

Sedaj lahko ponovimo utemeljitev za rešitev problema Buffonove igle: Število presečišč naključno izbrane premice s fiksno mnogokotno črto, sestavljeno iz odsekov dolžin L_1, L_2, \dots je

$$\int_X (Z_1 + Z_2 + \dots) dX = g(L_1 + L_2 + \dots).$$

To se zaradi linearnosti integralov ujema z

$$\int_X Z_1 dX + \int_X Z_2 dX + \dots = g(L_1) + g(L_2) + \dots,$$

iz česar sklepamo, da obstaja konstanta r , taka da

$$g(L) = rL.$$

Če je C konveksna krivulja v ravnini dolžine L in Z_C označuje naključno spremenljivko, ki šteje presečišča C z naključno premico, potem dobimo

$$\int_X Z_C dX = rL.$$

Naj bosta zdaj sta K_1 in K_2 kompaktni konveksni množici v ravnini z nepraznima notranjostma z mejnima krivuljama $C_1 = \partial K_1$ in $C_2 = \partial K_2$ dolžin L_1 in L_2 . Sledi

$$\int_X Z_{C_i} dX = rL_i, \quad i = 1, 2.$$

Ker sta množici K_i konveksni, premica seka C_i bodisi dvakrat bodisi nikoli. Naključni spremenljivki Z_{C_i} torej zavzameta le vrednosti 2 in 0 in velja

$$\int_X Z_{C_i} dX = 2L_i, \quad i = 1, 2.$$

Odgovor na vprašanje, s kakšno verjetnostjo naključna premica seka konveksno množico K_1 , če je $K_1 \subseteq K_2$ in že vemo, da premica seka množico K_2 je

$$\frac{\int_X Z_{C_1} dX}{\int_X Z_{C_2} dX} = \frac{2L_1}{2L_2} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{\text{obseg}(K_1)}{\text{obseg}(K_2)}.$$

V našem primeru je torej

$$P(\text{premica } l \text{ seka } C' \mid \text{premica } l \text{ seka } C) = \frac{\text{obseg}(C')}{\text{obseg}(C)}.$$

3 Načrt za nadaljnje delo

V nadaljevanju bova napisali program tako, da bo najprej generiral poljubna konveksna objekta C in C' , kjer $C' \subseteq C$. To bova storili ali z dvema poljubnima konveksnima objektoma, kjer bi za C' vzeli njun presek ali pa s pomočjo konveksne ovojnice, kjer bi za C' vzeli vse točke razen tiste ki ležijo na konveksni ovojnici C in jih povezali. Ko bosta C in C' izbrana, bova izbrali različne poljubne premice v zgoraj opisani parametrizaciji in najprej pogledali, če seka C . Če da bova pogledali še, če seka tudi C' .

Literatura

- [1] L.A. Santalo. *Integral geometry and geometric probability*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Amsterdam, pp. 12-33, 1976.
- [2] Franz Schuster. *Integralgeometrie*. (German): pp. 3-6, 2017.
- [3] Adam G. Weyhaupt: The Cauchy-Crofton Formula, 2003,
<https://www.siue.edu/~aweyhau/project.html>