UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
Oddelek za matematiko

Random lines

FINANČNI PRAKTIKUM

Avtorici: Matea Naumovska, Andreja Sitar

Mentorja: prof. dr. Sergia Cabello Justo, doc. dr. Janoš Vidali

Ljubljana, Januar 2023

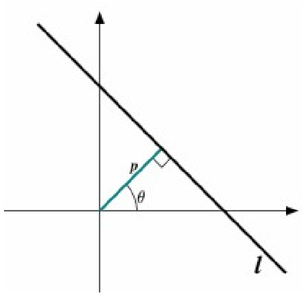
Kazalo

1 Navodila

V ravnini lahko premico predstavimo na več načinov. Za stohastično geometrijo je priročno, da premico l parametriziramo s parom (p,θ), kjer je p razdalja od izvora do premice, θ pa kot, ki ga premica oklepa z x osjo. Naj bosta C in C' konveksna objekta v ravnini, kjer velja da C' leži v notranjosti C. Želimo analizirati verjetnost, da naključna premica, ki seka C, seka tudi C'. Premice izbiramo enakomerno naključno glede na zgoraj opisano parametrizacijo.

2 Formalno reševanje

Ta problem se rešuje s pomočjo že znanega problema Buffonove igle. Premico v ravnini bomo parametrizirali s parom (p,θ), kjer je p razdalja od izvora do premice, θ pa kot, ki ga premica oklepa z x osjo.



Slika 1: Primer premice podane s parom (p,θ)

Torej je enačba premice enaka

$$x\cos\theta + y\sin\theta - d = 0.$$

Mero množice Y premic lahko definiramo z integralom

$$m(Y) = \int_Y f(p,\theta)dY = \iint f(p,\theta)\,dp\,d\theta,$$

kjer je $f(p,\theta)$ konstantna funkcija, ker vemo, da je ta mera nespremenljiva za toge premike ravnine.

Naj bo X množica vseh afinih premic v $\mathbb{R}^2$ in Z_1 naključna spremenljivka, ki šteje presečišča naključne premice z odsekom dolžine L_1. Potem je integral

$$\int_X Z_1 dX$$

odvisen le od L_1. Ker Z_1 zavzema le vrednosti 0 ali 1, je ta integral enak meri množice vseh premic, ki sekajo dani segment ($\int_X Z_1 dX = m(X)$). Ker je vrednost integrala odvisna le od L_1, to vrednost označimo z $g(L_1)$.
Sedaj lahko ponovimo utemeljitev za rešitev problema Buffonove igle: Število presečišč naključno izbrane premice s fiksno mnogokotno črto, sestavljeno iz odsekov dolžin L_1, L_2,... je

$$\int_X (Z_1 + Z_2 + \cdots)dX = g(L_1 + L_2 + \cdots).$$

To se zaradi linearnosti integralov ujema z

$$\int_X Z_1 dX + \int_X Z_2 dX + \cdots = g(L_1) + g(L_2) + \cdots ,$$

iz česar sklepamo, da obstaja konstanta r, taka da

$$g(L) = rL.$$

Če je C konveksna krivulja v ravnini dolžine L in Z_C označuje naključno spremenljivko, ki šteje presečišča C z naključno premico, potem dobimo

$$\int_X Z_C dX = rL.$$

Naj bosta zdaj sta K_1 in K_2 kompaktni konveksni množici v ravnini z nepraznima notranjostma z mejnima krivuljama $C_1 = \partial K_1$ in $C_2 = \partial K_2$ dolžin L_1 in L_2. Sledi

$$\int_X Z_{C_i} dX = rL_i, \qquad i = 1, 2.$$

Ker sta množici K_i konveksni, premica seka C_i bodisi dvakrat bodisi nikoli. Naključni spremenljivki Z_{C_i} torej zavzameta le vrednosti 2 in 0 in velja

$$\int_X Z_{C_i} dX = 2L_i, \qquad i = 1, 2.$$

Odgovor na vprašanje, s kakšno verjetnostjo naključna premica seka konveksno množico K_1, če je $K_1 \subseteq K_2$ in že vemo, da premica seka množico K_2 je

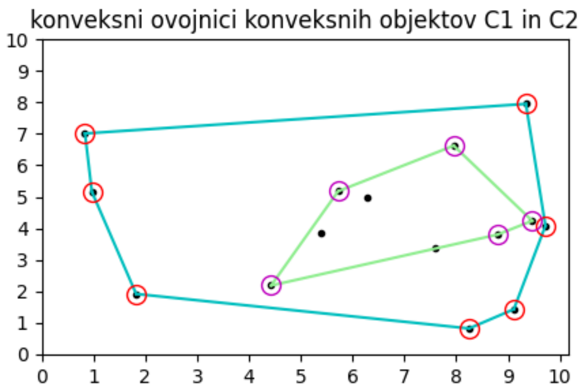
$$\frac{\int_X Z_{C_q} dX}{\int_X Z_{C_2} dX} = \frac{2L_1}{2L_2} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{obseg(K_1)}{obseg(K_2)}.$$

V našem primeru je torej

$$P(premica\ l\ seka\ C' \mid premica\ l\ seka\ C) = \frac{obseg(C')}{obseg(C)}.$$

3 Reševanje s pomočjo programa in simulacij

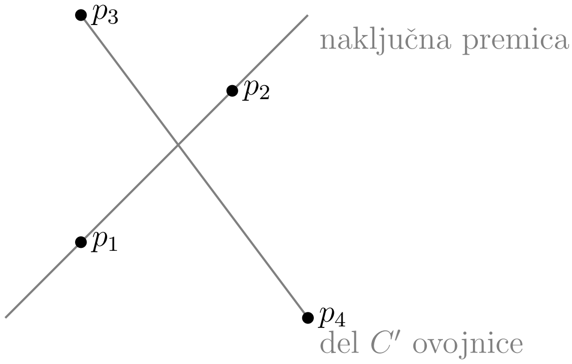
Napisali sva program, ki najprej iz 15 poljubnih točk generira poljuben konvenksni objekt C. Nato iz nabora teh točk izvzame tiste, ki se nahajajo v ovojnici C in iz preostalih generira nov podobjekt C', torej $C' \subseteq C$. To delamo s pomočjo funkcij *random* in *ConvexHull*.



Slika 2: Primer koveksnih ovojnic $C = C1$ in $C' = C2$.

Pogledali sva si, če premice, ki gredo skozi naključno izbrane točke v notranjosti C (torej ne nujno v notranjosti C') , sekajo tudi C'. Te premice torej zagotovo sekajo C, kot zahtevano. Premice sva generirali na naslednji način: najprej izberemo poljubno točko v notranjosti C npr. p_1, nato izberemo poljuben kot in dobimo smerni vektor, potem pa ta smerni vektor prištejemo k točki $p_1 = (x_1, y_1)$ in tako dobimo še točko $p_2 = (x_2, y_2)$.

Da preverimo sekanje sva si pomagali z determinantami. Naj bosta $p_3 = (x_3, y_3)$ in $p_4 = (x_4, y_4)$ dve sosednji ogljišči ovojnice C'.



Označimo

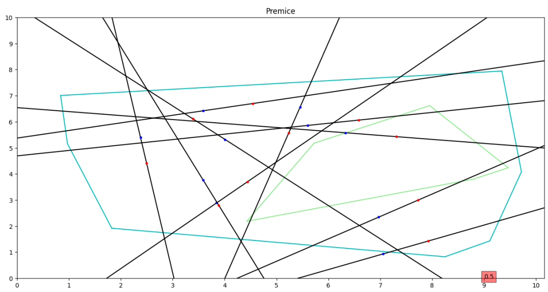
$$\Lambda(p_1, p_2, p_3) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Vemo, da se naključna premica, na kateri sta točki p_1 in p_2, in daljica $\overrightarrow{\mathrm{p_3p_4}}$ sekata $\Leftrightarrow [\Lambda(p_1, p_2, p_3) \cdot \Lambda(p_1, p_2, p_4)] \leq 0$.
S pomočjo te informacije lahko za vsako premico preverimo, če seka C'. Verjetnost, da premica seka C', če vemo, da seka C, je v tem primeru dana s koeficientom

$$\frac{\textit{število premic, ki sekajo } C'}{\textit{število premic, ki jih gledamo}}.$$

Ogledali sva si primere različnega števila premic in pogledali ujemanje z zgoraj izpeljano formulo

$$P(\textit{premica } l \textit{ seka } C' \mid \textit{premica } l \textit{ seka } C) = \frac{\textit{obseg}(C')}{\textit{obseg}(C)}.$$



Slika 3: Primer za 10 premic.

št. premic	**št. premic, ki sekajo oba**	P **po programu**	P **po formuli**
5	3	0.6	0.6567108861061377
10	8	0.8	0.6965224589290716
20	17	0.85	0.5550093283090112
100	92	0.92	0.7892159960747438
1000	848	0.848	0.7326084423923283

Vidimo lahko, da je s povečevanjem števila premic razlika med razultatoma vedno manjša.

Literatura

[1] L.A. Santalo. *Integral geometry and geometric probability*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Amsterdam, pp. 12-33, 1976.

[2] Franz Schuster. *Integralgeometrie*. (German): pp. 3–6, 2017.

[3] Adam G. Weyhaupt: The Cauchy-Crofton Formula, 2003, `https://www.siue.edu/ aweyhau/project.html`