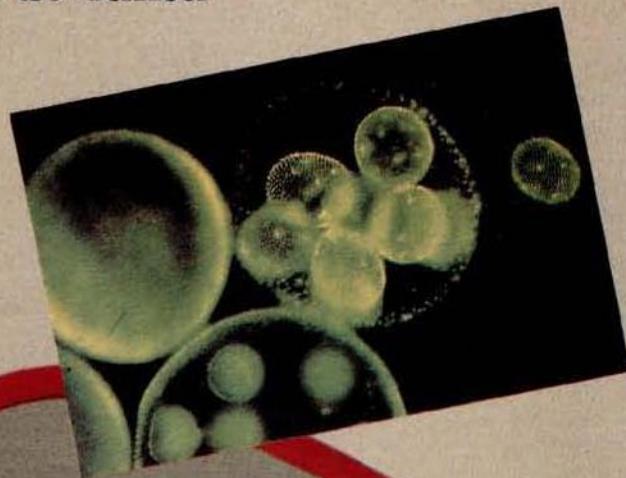


Probabilidad y Estadística

Para Ciencias
Químico-Biológicas

María José Marques de Cantú



booksmedicos.org



μ_0 β μ_0

Preedición

P R O B A B I L I D A D Y E S T A D I S T I C A

PARA CIENCIAS QUIMICO-BIOLOGICAS

P R O B A B I L I D A D Y E S T A D I S T I C A

PARA CIENCIAS QUIMICO-BIOLOGICA

MARIA JOSE MARQUES DE CANTU

**Profesora de Matemáticas del Instituto Universitario Pedagógico de Caracas, Venezuela
M.A. University of Maryland**

McGRAW-HILL

MEXICO • BOGOTA • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA
MADRID • NUEVA-YORK • PANAMA • SAN JUAN • SANTIAGO • SAO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • LONDRES • MILAN • MONTREAL • NUEVA DELHI
PARIS • SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS
SIDNEY • TOKIO • TORONTO

**PROBABILIDAD Y ESTADISTICA
Para ciencias Químico-Biológicas**

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra,
por cualquier medio, sin autorización escrita del editor.

"DERECHOS RESERVADOS © 1991 respecto a la primera edición por
McGRAW-HILL INTERAMERICANA DE MEXICO,
Atlacomulco 499-501, Fracc. Ind. San Andrés Atoto
53500 Naucalpan de Juárez, Edo. de México-
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial, Reg. Num. 1980

ISBN 968-422-245-9

1234567890

9123456780

IMPRESO EN MEXICO

PRINTED IN MEXICO

Esta obra, se terminó de
imprimir en diciembre de 1990
en Litográfica Ingramex
Centeno No. 162-1
Col . Grabas Esmeralda
Delegación Iztapalapa
09810 México, D.F.

Se tiraron 4 000 ejemplares

CONTENIDO

CONTENIDO

PROLOGO	xii
SIMBOLOS	xiv
PARTE I	INTRODUCCION Y PROBABILIDAD ELEMENTAL

CAPITULO 1: INTRODUCCION

1.1	Introducción y Definición de Estadística	1
1.2	Relación entre Estadística y Probabilidad	1
1.3	Síntesis Histórica de la Estadística y la Probabilidad	2
1.4	Estadística e Investigación	5
1.5	Etapas de una Investigación Estadística.	6
1.6	Estadística Descriptiva y Estadística Inferencial	7
1.7	Población y Muestra	8
1.8	Unidades Elementales y Observación	8
1.9	Sumatorias	9
	Ejercicios	14

CAPITULO 2: TEORIA ELEMENTAL DE CONJUNTOS

2.1	Conjuntos. Definición y Notación.....	17
2.2	Conjunto Vacío	19
2.5	Conjunto Universal.....	19
2.4	Relaciones entre conjuntos. Subconjuntos. Igualdad de conjuntos	19
2.5	Operaciones con conjuntos: Unión. Intersección. Complemento y Diferencia	22
2.6	Diagramas de Venn	24
2.7	Cardinal de un conjunto	27
	Ejercicios	30

CAPITULO 3: PROBABILIDAD ELEMENTAL

3.1	Elementos de Análisis Combinatorio.....	32
3.2	Principios fundamentales en el Proceso de Contar	35
3.3	Permutaciones.....	38
3.4	Combinaciones.....	46
3.5	Desarrollo del Binomio.....	50
3.6	Conceptos Básicos en la Probabilidad.....	54
3.6.1	Experimento y Ensayo.....	54
3.6.2	Espacio Muestra y Evento.....	54
3.6.3	Eventos Mutuamente Exclusivos.....	54
3.6.4	Eventos Complementarios.....	55
3.7	Definiciones de Probabilidad	56
3.7.1	Definición Clásica de Laplace.....	56
3.7.2	Probabilidad como frecuencia relativa	57
3.7.3	Probabilidad Axiomática de Kolmogorov.....	59
3.8	Determinación práctica de probabilidades.....	60
3.9	Propiedades de la Probabilidad	61
3.10	Probabilidad Condicional	63
3.11	Eventos Independientes.....	65
3.12	Regla de Bayes	69
	Ejercicios.....	71

PARTE II: DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

CAPITULO 4: DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

4.1	Variable Aleatoria. Tipos de Variable.....	79
4.2	Distribuciones de Probabilidad - Función de Probabilidad - Función Densidad de Probabilidad.	82
4.3	Función de Distribución Acumulada.....	.85
4.4	Media y Varianza de una Distribución de Probabilidad90
4.5	Esperanza Matemática.....	94
4.6	Momentos.....	95
	Sesgo y Curtosis de una Distribución.....	97
	Función Generatriz de Momentos98
	Ejercicios.....	100

CAPITULO 5: DISTRIBUCIONES DISCRETAS ESPECIALES

5.1	Distribución Discreta Uniforme	104
5.2	Distribución Binomial	105
5.3	Distribución de Poisson	112
5.4	Distribución Multinomial	118
5.5	Distribución Hipergeométrica	119
5.6	Distribución Binomial Negativa	124
5.7	Distribución Geométrica	126
	Ejercicios	128

CAPITULO 6: DISTRIBUCIONES CONTINUAS

6.1	Distribución Continua Uniforme	136
6.2	Distribución Normal	137
6.3	Distribución Ji-Cuadrada - Función Gamma	152
6.4	Distribución t de Student	154
	Ejercicios	156

PARTE III: MUESTREO Y ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

CAPITULO 7: MUESTREO

7.1	Razones para el muestreo	161
7.2	Bases Teóricas del Muestreo	162
7.3	Tipos de Muestreo	163
7.3.1	Muestreo Aleatorio Simple	165
7.3.2	Muestreo Estratificado	165
7.3.3	Muestreo Agrupado o Por Conglomerados	167
7.3.4	Muestreo Sistemático	168
7.3.5	Muestreo Doble y Triple	168
7.4	Parámetros y Estadígrafos	169
7.5	Errores Estadísticos	169
	Ejercicios	171

CAPITULO 8: ESTADISTICA DESCRIPTIVA

8.1	Organización y Renorte de Datos: Tablas y Gráficas	174
8.1.1	Principios Generales para la Construcción de Tablas	174
8.1.2	Principios Generales para la Construcción de Gráficas	174
8.1.3	Gráficas Engañosas	175
8.2	Datos Estadísticos . Tipos de Datos	180
8.3	Tratamiento de Datos	181
8.4	Datos Cualitativos	181
8.5	Datos Cuantitativos. Medidas de Tendencia Central y de Variabilidad o de Dispersion	183
8.6	Medidas de Tendencia Central para datos no agrupados	184
8.6.1	Media Aritmética	184
8.6.2	Mediana	185
8.6.3	Moda o Modo	186
8.6.4	Centro de Amplitud	188
8.6.5	Media Geométrica	189
8.6.6	Media Armónica	192
8.6.7	Media Ponderada	194
8.7	Medidas de Dispersion o variabilidad para datos no agrupados	194
8.7.1	Amplitud. Rango o Recorrido	194
8.7.2	La desviación Media	195
8.7.3	Varianza y Desviación estandar	196
8.7.4	Coeficiente de Variación	198
8.8	Representación Gráfica de Datos no agrupados...	199
8.9	Datos Agrupados. Tablas de Frecuencia	201
8.10	Representación Gráfica de Datos Agrupados.	204
8.11	Percentiles. cuantiles y rangos percentiles....	206
8.12	Medidas de Tendencia Central para datos Agrupados	210

8.12.1 Media Aritmética	210
8.12.2 Mediana	211
8.12.5 Moda	211
8.12.4 Media Armónica	213
8.12.5 Media Geométrica	213
8.13 Medidas de Dispersion para datos agrupados	214
8.13.1 Varianza y Desviación Estándar	214
8.13.2 Desviación Media	215
8.14 Propiedades de la Media. Varianza y Desviación Estándar	215
Ejercicios	218

PARTE IV: DISTRIBUCIONES MUESTRALES Y ESTADISTICA INFERENCIAL

CAPITULO 9: ESTIMACIONES Y PRUEBAS DE HIPOTESIS

9.1 Distribuciones Muestrales	231
9.2 Error Estándar	233
9.3 Teorema del Límite Central	233
9.4 Estadística Inferencial	235
9.5 Estimación	235
9.5.1 Características de un buen estimador nuntual...	236
9.5.2 Estimación por Intervalo de Confianza	238
9.6 Contrastes o Pruebas de Hipótesis	241
9.6.1 Tipos de Prueba	242
9.6.2 Tipos de Errores	242
9.6.3 Estadígrafo de Prueba o de Contraste	243
9.6.4 Región Crítica o Región de Rechazo	244
9.6.5 Procedimiento de Prueba	246
9.7 Intervalos de Confianza y Pruebas de Hipótesis acerca de un parámetro	246
9.7.1 Intervalo de Confianza y Prueba de Hipótesis acerca de μ con a conocida	247
9.7.2 Tamaño de muestra para estimaciones de la media μ con σ conocida	249

9.7.5	Intervalo de Confianza y Prueba de Hipótesis acerca de μ	252
9.7.4	Tamaño de Muestra para estimaciones de la proporción π	255
9.7.5	Poblaciones No-Normales	256
9.7.6	Intervalo de Confianza y Prueba de Hipótesis para μ con σ desconocida	256
9.7.7	Intervalo de Confianza y Prueba de Hipótesis para la varianza σ^2 o la Desviación Estándar a de una población normal	262
9.8	Intervalos de Confianza y Pruebas de Hipótesis acerca de dos parámetros	266
9.8.1	Intervalo de confianza y prueba de hipótesis acerca del cociente de dos varianzas σ_1^2/σ_2^2 de dos poblaciones normales	266
9.8.2	Intervalo de confianza y prueba de hipótesis acerca de la diferencia de dos proporciones $\pi_1 - \pi_2$	271
9.8.3	Intervalo de confianza y prueba de hipótesis acerca de diferencia de dos medias $\mu_1 - \mu_2$ con σ_1 y σ_2 conocidas.	275
9.8.4	Intervalo de confianza y prueba de hipótesis acerca de la diferencia de dos medias μ_1 y μ_2 con σ_1 y σ_2 desconocidas e iguales	277
9.8.5	Intervalo de confianza y prueba de hipótesis acerca de la diferencia de dos medias μ_1 y μ_2 con σ_1 y σ_2 desconocidas y diferentes	280
9.8.6	Intervalo de confianza y prueba de hipótesis acerca de la diferencia de dos medias μ_1 y μ_2 con muestras dependientes o apareadas	284
9.9	Gráficas de Control de Calidad	290
9.9.1	Gráfica de control para la media	290
9.9.2	Gráfica de control para el rango o recorrido...	293

9.9.3	Gráfica de control para la varianza y la desviación estándar	296
9.10	Intervalos de Tolerancia	297
9.11	Cálculo de la probabilidad del error de Tipo II (β) y del poder o potencia de la prueba ($1 - \beta$)	298
	Ejercicios	307

CAPITULO 10: DATOS DE FRECUENCIA-PRUEBAS DE BONDAD DE AJUSTE Y PRUEBAS DE INDEPENDENCIA

10.1	Datos de frecuencia	327
10.2	Pruebas de Bondad de ajuste usando la distribución Ji -Cuadrada	327
10.3	Prueba de Bondad de ajuste Normal de Kolmogorov-Smirnov.....	341
10.4	Prueba Ji -Cuadrada de Independencia-Tablas de Contingencia	345
	Ejercicios	350

PARTE V: ANALISIS DE VARIANZA Y ANALISIS DE REGRESION Y CORRELACION

CAPITULO 11: ANALISIS DE VARIANZA

11.1	¿Qué es el Análisis de Varianza?.....	361
11.2	Suposiciones en el Análisis de Varianza	363
11 .3	Análisis de varianza de un factor en el Diseño Completamente Aleatorio	364
11.4	Pruebas de significación de diferencias entre pares de medias	378
11.4.1	Prueba de la Diferencia Significativa Mínima de Fisher (D.S.M.)	378
11.4.2	Prueba de Diferencia Significativa Honesta de Tukey (D.S.H.)	381
11.4.5	Prueba del Rango Múltiple de Duncan.....	381

11.4.4	Prueba de Scheffé	385
11.5	Análisis de Varianza de un Factor en el Diseño de Bloques Aleatorios Completos	387
11.6	Análisis de Varianza de dos Factores en el Diseño Completamente Aleatorio	394
11.7	Cuadrados Latinos	406
11.8	Observaciones Finales	412
	Ejercicios	413

CAPITULO 12: REGRESION Y CORRELACION

12.1	Introducción	425
12.2	Diagramas de Dispersión	426
12.3	Represión Lineal Simple	428
12.4	Mínimos Cuadrados	431
12.5	Inferencias en el Análisis de Represión	436
12.5.1	Estimación y Prueba de Hipótesis acerca de la Pendiente de Represión Poblacional, B	437
12.5.2	Estimación y Prueba de Hipótesis acerca de la Ordenada al origen, A	439
12.5.3	Estimación acerca de la media $\mu_{Y/X}$	440
12.5.4	Intervalo de Confianza acerca de un valor individual de predicción o estimación Y	442
12.5.5	Intervalo de Confianza para la Varianza de Represión $\sigma^2_{Y/X}$	444
12.6	Análisis de Correlación	445
12.7	Coeficiente de Determinación y Análisis de Represión Lineal	451
12.8	Regresión No Lineal (Exponencial y Potencial) ..	456
12.8.1	Regresión Exponencial o Semilogarítmica	456
12.8.2	Regresión Potencial o Doble-Logarítmica	460
12.9	Regresión Lineal Múltiple (Triple) y Represión Polinómica (Parabólica)	463
12.9.1	Inferencias sobre Regresión Triple	468
12.9.2	Regresión Polinómica (Parabólica)	471

12 .10 Observaciones finales.....	.474
-----------------------------------	------

Ejercicios476
------------------	------

PARTE VI: ESTADISTICA NO PARAMETRICA

CAPITULO 13: METODOS NO PARAMETRICOS

13.1 Métodos no-paramétricos versus métodos para-métricos.....	.489
13.2 Pruebas de la Mediana490
13.2.1 Prueba del Signo de la Mediana para una muestra.....	.490
13.2.2 Prueba del Signo de la Mediana para muestras apareadas.....	.493
13.2.3 Prueba de la mediana para muestras independientes.....	.495
13.2.4 Generalización de la prueba de la mediana497
13.3 Prueba del Rango con Signo de Wilcoxon para muestras apareadas.....	.499
13.4 Prueba del Rango para Muestras Independientes o Prueba U de Mann-Whitney503
13.5 Análisis de Varianza de un factor por rangos o Prueba F de Kruskal -Wallis.....	.507
13.6 Análisis de Varianza de un factor con bloques aleatorios completos por rangos de Friedman....	.511
13.7 Coeficiente de Correlación por rangos de Spearman515
13.8 Prueba de Secuencias, rachas o corridas para aleatoriedad de las muestras.....	.520
Ejercicios523

APENDICE: TABLAS

A-1 Números Aleatorios.....	.541
A-2 Probabilidades Binomiales.....	.545
A-3 Probabilidades para la Distribución de Poisson.	.549

A-4	Probabilidades de la Distribución Normal Estándar	552
A-5	Percentiles de la Distribución t de Student,...	558
A-6	Percentiles de la Distribución Ji-Cuadrada (χ^2) de Pearson	559
A-7	Percentiles de la Distribución F de Fisher	561
A-8	Factores K para límites de Tolerancia	575
A-9	Porcentajes del Rango "Studentizado" para pruebas de diferencias entre pares de medias...	577
A-10	Valores para la Prueba de Kolmogorov-Smirnov...	580
A-11	Valores para la Prueba del Ranjo Múltiple de Duncan	581
A-12	Valores Estandarizados para el Coeficiente de Correlación	591
A-13	Valores Críticos para la Prueba T de Wilcoxon..	593
A-14	Valores Críticos para la Prueba U de Mann-Whitney	594
A-15	Valores Críticos para la Prueba H de Kruskal-Wallis....	598
A-16	Valores Críticos para la Prueba de Friedman,...	602
A-17	Valores Críticos para la Correlación por Rangos de Spearman	604
A-18	Valores Críticos para la prueba de Aleatoriedad	605
RESPUESTAS		606
BIBLIOGRAFIA		636
INDICE		641

PROLOGO

Este libro nació de la necesidad de tener un texto para la cátedra de Bioestadística del tronco común de las carreras de Biología, Ingeniería Química y Químico Farmacéutico Biólogo de la E.N.E.P. Zaragoza U.N.A.M.. Sin embargo, considero que puede ser utilizado en cualquier curso a nivel profesional en el área Químico-Biológica,

La autora cubre el material presentado en los capítulos 1 al 12 en un curso de un semestre de duración con cuatro horas de teoría y cuatro de práctica semanales. Otros arreglos o divisiones del material se pueden realizar, repartiéndolo en dos o tres semestres o trimestres de acuerdo a las necesidades y tiempo disponible para el curso.

Este libro, a diferencia de la mayoría de los existentes en la materia, abarca tanto el estudio de la Probabilidad como de la Estadística y la relación existente entre ambas disciplinas. La probabilidad es estudiada partiendo de la intuición y el sentido común, usando diagramas para facilitar su comprensión. Por otra parte, en la Estadística Inferencial se estudian conjuntamente la estimación por intervalo y las pruebas de hipótesis, facilitando así la comprensión de las inferencias y aprovechando el uso de un estadígrafo de prueba para el estudio de ambos tópicos.

En su elaboración se trató de buscar ejemplos de aplicación correspondientes a las tres carreras de tal manera que se motive al alumno a adquirir los conocimientos que aquí se exponen.

Aunque no es un libro de Estadística Matemática, no se eluden fórmulas ni expresiones matemáticas, pero se trató de hacer que toda fórmula parezca natural y razonable, desarrollándose a partir de un fundamento, intuición y buen sentido. Sin embargo, aquellos que no deseen involucrarse en el desarrollo de fórmulas podrán usar los cuadros resumen de las páginas 44, 117, 123, 187, 288, 289, 371, 391, 400 y 408.

Consta de seis partes divididas en 13 capítulos para facilitar la nomenclatura.

En la parte I se dan los conceptos preliminares, una síntesis histórica de la Estadística y la Probabilidad, y las bases o herramientas matemáticas necesarias para modelos matemáticos de distribuciones y de la Estadística Inferencial.

En la parte II se estudian las Distribuciones de Probabilidad discretas y continuas, en general; y algunos casos particulares como las distribuciones: Binomial, Poisson, Multinomial, Hipergeométrica, Geométrica y la distribución Normal.

La parte III trata los diferentes tipos de Muestreo y la Estadística Descriptiva.

En la parte IV se estudian las distribuciones muestrales, la estimación y las pruebas de hipótesis simultáneamente, partiendo de las estimaciones y pruebas de hipótesis acerca de un parámetro, y luego las de dos parámetros. La Distribución Ji-cuadrada para la bondad de ajuste y las tablas de contingencia.

La parte V continúa con las pruebas de hipótesis acerca de más de dos parámetros como es el Análisis de Varianza. También se estudian la Regresión y la Correlación lineal simple y múltiple y la Regresión no lineal.

La parte VI comprende los métodos No-Paramétricos más utilizados en investigación.

Un libro de Estadística sin tablas es imposible de concebir, por lo que es justicia mencionar que las tablas fueron extraídas de los siguientes libros: Estadística Biométrica y Sanitaria por R.D. Remington y M.A. Schork, Prentice Hall International, Madrid, 1977. Biostatistics, a foundation for Analysis in the Health Sciences por W. Daniel, second edition, John Wiley and Sons, Inc. New York, 1978. Introducción a la Estadística Matemática, Principios y Métodos por E. Kreyszig, Limusa, México, 1979. Elements of Statistical Inference for Education and Psychology por M.D. Lynch y D.V. Huntsberger, Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass., 1976. Análisis Estadístico por Y. L. Chou, segunda edición, Interamericana, México, 1977.

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi agradecimiento a todas aquellas personas que de una u otra manera contribuyeron en la realización de este libro, aportando sugerencias y correcciones al manuscrito, especialmente a mis ex-alumnos que fueron los "conejillos de indias" en la prueba del manuscrito como material de enseñanza. También quiero expresar mi agradecimiento al Ing. Román Campillo G. por sus correcciones y sugerencias. Al Jefe de la Sección de Matemáticas, Ing. Magín Juárez V. por su apoyo y entusiasmo. A la Lic. Lourdes Martínez por su apoyo en la edición y registro de este libro. A las señoritas María Eugenia Muciño y Candelaria Hernández por su ardúa labor y paciencia en la mecanografía de los capítulos 1 al 10. A mi esposo e hijos por su paciencia y estímulo durante las horas tediosas de preparación, mecanografía y corrección de este trabajo.

M.A. María José Marques de Cantú

SÍMBOLOS

Σ	sumatoria.
{ }	conjunto.
\mathbb{R}	conjunto de los números reales.
\mathbb{Z}	conjunto de los números enteros.
\mathbb{Z}^+	conjunto de los números enteros positivos.
\emptyset	conjunto vacío.
U	conjunto universal.
\in	pertenece a,
\notin	no pertenece a.
\subset	contenido en, subconjunto de.
$\not\subset$	no está contenido en.
\subseteq	subconjunto de.
$\not\subseteq$	no es subconjunto de.
\mathbb{Q}	conjunto de los números racionales.
\mathbb{N}	conjunto de los números naturales.
\iff	si y solo si.
\cap	intersección de conjuntos.
\cup	unión de conjuntos.
A^c	complemento del conjunto A.
$n(A)$	cardinal del conjunto A.
>	mayor que
\geq	mayor o igual a
<	menor que
\leq	menor o igual a
$n!$	factorial de un entero positivo n.

n_{P_r}	permutaciones de n elementos tomados de r en r.
$P_{cir,n}$	permutaciones circulares de n elementos,
$n_{P'_r}$	permutaciones con repetición de n elementos tomados de r en r
$n_p_{p_1, p_2, \dots, p_k}$	permutaciones de n elementos donde p_1 son de un tipo, p_2 son de otro tipo ,..., p_k de otro tipo
$n_{C_r} = \frac{n}{r}$	combinaciones de n elementos tomados de r en r.
$n_{C'_r}$	combinaciones con repetición de n elementos tomados de r en r.
S	espacio muestral.
$P(A)$	probabilidad del evento A.
$P(B A)$	probabilidad condicional.
$\forall i$	para todo i.
$\bigcup_{i=1}^n A_i$	unión de todos los A_i
X	variable aleatoria X.
x_i	valor de la variable aleatoria.
$f(X)$	función de probabilidad o función densidad de probabilidad de la variable aleatoria X.
$f(x_i)$	función de probabilidad para un valor x. de la variable aleatoria
$F(x)$	función de distribución acumulada hasta el valor x.
\int	integral.
μ	media de una distribución de probabilidad (de la población).
σ^2	varianza de una distribución de probabilidad (de la población).
σ	desviación estándar de una distribución de probabilidad.
$E(X)$	esperanza matemática de X.
γ	Simetría
γ^*	curtosis

p	probabilidad de éxito en un evento.
q = 1-p	probabilidad de fracaso en un evento.
λ	media y varianza de la distribución de Poisson.
\approx	aproximadamente igual a.
Z	variable aleatoria normal estándar.
X ²	variable aleatoria Ji-cuadrada.
v	grados de libertad.
Γ	función gamma.
\bar{X}	media muestral
Md	mediana
M	moda o modo
C.A.	centro de amplitud.
G	media geométrica
H	media armónica
$\prod_{i=1}^n x_i$	producto de los valores x_i desde i =1 hasta n.
\bar{X}_w	media ponderada
R	rango o recorrido
D.M.	desviación media
	valor absoluto
s ²	varianza muestral
s	desviación estándar muestral
C.V.	coeficiente de variación
c	amplitud de calse
n	tamaño de muestra
P _y	percentil y
D _y	décil y

Q_y	cuartil y
Q	rango semi-intercuartílico.
$RP(X)$	rango percentil de X
L_i	limite inferior de la clase i-ésima
Δ_1	diferencia de la frecuencia de la clase modal y la premodal
Δ_2	diferencia de la frecuencia de la clase modal y la postmodal
m_i	punto medio de la i-ésima clase
$\sigma_{\hat{\theta}}$	error estándar del estadígrafo $\hat{\theta}$
H_0	hipótesis nula
H_a	hipótesis alternativa
$1-\alpha$	nivel de confianza
α	nivel de significación, probabilidad de error de tipo I
β	probabilidad del error de tipo II
$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	valor de Z correspondiente al percentil $1 - \frac{\alpha}{2}$
μ_0	valor supuesto de μ
$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	error estándar de la media
E	error máximo de estimación
π	proporción binomial poblacional
π_0	valor supuesto de π
t	variable aleatoria t de student
g.l.	grados de libertad
$t_{1-\frac{\alpha}{2}}$	valor de t correspondiente al percentil $1 - \frac{\alpha}{2}$
$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$	estimación del error estándar de la media
$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$	valor de χ^2 correspondiente a! percentil $1 - \frac{\alpha}{2}$
$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$	valor de χ^2 correspondiente al percentil $\frac{\alpha}{2}$

σ_0^2	valor de σ^2
F	variable aleatoria F de Fisher
$F_{1-\frac{\alpha}{2}}$	valor de F correspondiente al percentil $1-\frac{\alpha}{2}$
$F_{\frac{\alpha}{2}}$	valor de F correspondiente al percentil $\frac{\alpha}{2}$
$\sigma_{p_1-p_2} = \sigma_{Ap}$	error estándar de la diferencia de proporciones
Δ_0	diferencia supuesta
$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sigma_{\Delta\bar{X}}$	error estándar de la diferencia de medias
$s_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$	estimador del error estándar de la diferencia de medias
s_p^2	varianza ponderada
s_p	desviación estándar ponderada
\bar{D}	media de diferencias
s_D	desviación estándar de diferencias
LCI	límite inferior de control
LCS	límite superior de control
O_i	frecuencias observadas
E_i	frecuencias esperadas
τ_j	efecto de tratamiento
ϵ_{ij}	error residual
x_{ij}	i-ésima observación que recibe el j-ésimo tratamiento
$X_{\cdot j}$	suma del j-ésimo tratamiento
$\bar{X}_{\cdot j}$	media del j-ésimo tratamiento
$X_{\cdot \cdot}$	suma de todas las observaciones
$\bar{X}_{\cdot \cdot}$	Gran media

D.S.M.	diferencia significativa mínima de Fisher
D.S.H.	diferencia significativa honesta de Tukey
β_i	efecto de bloques.
$\mu_{Y/X}$	valor medio de Y correspondiente a un valor de X
\hat{Y}	estimador de $\mu_{Y/X}$
A	ordenada al origen de la recta de regresión poblacional
B	pendiente de la recta de regresión poblacional
a	estimador de A
b	estimador de B
$C_{x,y}$	covarianza de x,y
$\sigma^2_{Y/X}$	varianza de regresión de Y sobre X
$s^2_{Y/X}$	estimador de la varianza de regresión de Y sobre X
s_b	error estándar de la pendiente de regresión
\hat{Y}_0	valor de \hat{Y} correspondiente a X_0
ρ	coeficiente de correlación lineal poblacional
r	estimador de ρ
r^2	coeficiente de determinación

PARTE I

INTRODUCCION Y PROBABILIDAD ELEMENTAL

CAPITULO 1: INTRODUCCION

1.1. INTRODUCCION Y DEFINICION DE ESTADISTICA

El término "estadística" se derivó originalmente del vocablo "estado", porque ha sido función tradicional de los gobiernos centrales llevar registros de población, nacimiento, defunciones, profesiones, cosechas y muchas otras clases de cosas y actividades. Contar y medir estos hechos genera muchas clases de datos numéricos.

La estadística es concebida popularmente como columnas de cifras o gráficas, asociadas generalmente con promedios. Este concepto se aproxima mucho a la definición tradicional de estadística: la colección, organización, resumen y presentación de datos numéricos. Actualmente la Estadística es una rama de la matemática aplicada que colecciona, clasifica y evalúa o analiza datos como base para inferencias o conclusiones válidas, así como para tomar decisiones en base a ese análisis.

Como un procedimiento de toma de decisiones, la Estadística es de importancia creciente en varios campos, por ejemplo, en la producción industrial en masa, Medicina Y Biología, Economía, Política, Psicología, análisis de opinión pública y otras Ciencias Sociales, Agricultura, Meteorología, Física, Química e Ingeniería.

1.2. RELACION ENTRE ESTADISTICA Y PROBABILIDAD

La probabilidad es el estudio de fenómenos puramente aleatorios mientras que la Estadística se puede describir como la ciencia o el arte de reunir y analizar datos e inferir consecuencias a partir de estos elementos. Como el azar afecta tanto a la reunión de datos como a su análisis, y se debe tener en cuenta al hacer inferencias, el tener conocimientos en estadística implica poseer una buena base sobre la teoría de la probabilidad.

1.3 SINTESIS HISTORICA DE LA ESTADISTICA Y DE LA PROBABILIDAD

La teoría de la Probabilidad tuvo su origen en las apuestas en juegos de azar; a Girolamo Cardano (1501-15761, físico, astrónomo y matemático, se le atribuye la primera discusión sobre probabilidad en su manual para jugadores; pero fueron Pascal (1623-16621 y Fermat (16001 -1665). al rededor de la primera mitad del siglo XVII quienes desarrollaron la Teoría de la Probabilidad,

Jakob Bernoulli (1654-1705) fue también uno de los primeros que estudiaron la probabilidad matemática; su nombre va asociado a varios conceptos matemáticos, como los Experimentos de Bernoulli en probabilidad.

La curva normal ha sido de gran importancia en el desarrollo de la estadística. La ecuación de esta curva fue publicada por primera vez en 1733 por De Moivre. Pero De Moivre no tenía idea de su aplicación en observaciones experimentales y su publicación era desconocida hasta que Karl Pearson la encontró en una Biblioteca en 1924. Sin embargo, esta ecuación también fue descubierta posteriormente por dos astrónomos y matemáticos: Laplace (1749-1827) y Gauss (1777-1855) independientemente, hoy en día se conoce también como la curva de Gauss o campana de Gauss.

En el siglo XIX Charles Lyell encontró aplicación de la Estadística a un problema de Geología. Entre 1830 y 1833 Lyell publicó tres volúmenes sobre Geología donde establece la relación entre las rocas terciarias y sus respectivos nombres. El razonamiento de Lyell fue esencialmente estadístico. Una vez que se establecieron y aceptaron los nombres, el método fue casi totalmente olvidado. No han habido geólogos evolucionistas que investiguen si fueron usadas medidas discretas, implícitas en los nombres, o si usó un proceso continuo y, si podrá ser usado para hacer predicciones.

Charles Darwin (1809-1882), biólogo, recibió el segundo volumen de Lyell y se cree que su teoría fue influenciada por este libro. El trabajo de Darwin fue principalmente de naturaleza biométrica o estadística. También Mendel con su estudio de las plantas híbridas publicado en 1866 tenía un problema de tipo biométrico o estadístico.

Pafnuti Lvovich Chevyshev (1821-1894) contribuyó a la teoría de la probabilidad con la Desigualdad de Chevyshev, que debido a su generalidad resulta ser una herramienta teórica muy importante.

En el siglo XIX la necesidad de una profundización en las bases de la Estadística se hizo trascendental, Karl Pearson (1857-1936) físico-matemático inglés, inspirado en Darwin, aplicó sus matemáticas a la evolución. Pearson, considerado el padre de la Estadística pasó casi medio siglo haciendo una profunda investigación en Estadística, así también fue el fundador de la revista "*Biometrika*" y de la Escuela de Estadística en Cambridge, Inglaterra ganando gran ímpetu el estudio de esta materia. A Karl Pearson se debe el estudio de la bondad de ajuste con la distribución χ^2 y el coeficiente de correlación entre dos variables.

Mientras Karl Pearson trabajaba con grandes muestras, la teoría de las grandes muestras era inadecuada para los investigadores que tenían que trabajar con pequeñas muestras. Entre ellos estaba W. S. Gosset (1876-1937), alumno de K. Pearson y científico de la Cervecería "*Guinness*". Los conocimientos matemáticos de Gosset mostraron haber sido insuficientes para el reto de encontrar distribuciones exactas de la desviación estándar de la muestra, del cociente de la media y la desviación estándar de una muestra y del coeficiente de correlación, estadígrafos con los cuales él comunmente trabajaba. Consecuentemente él recurrió a compilar y computar las distribuciones de frecuencias empíricas al tomar cartas de un paquete

de cartas barajadas, Los resultados de estos trabajos aparecieron en la revista "Biometrika" en 1908 bajo el seudónimo de "student". Hoy en día, la distribución "t" de student es una herramienta básica para los estadísticos y experimentadores y "estudiantizar" es una expresión común en Estadística. Ahora que el uso de la distribución t de student está mundialmente difundida es interesante notar que el astrónomo alemán Helmut había obtenido los mismos resultados teóricamente a principios de 1875.

Ronald Alymer Fisher (1890-1962), especialista inglés en Genética y Estadística, fue influenciado por Karl Pearson y Gosset; hizo numerosas e importantes contribuciones a la Estadística, precisó métodos estadísticos para interpretar datos cuantitativos. En su trabajo sobre pruebas de hipótesis, desarrolló aplicaciones de la distribución F, por lo que lleva su nombre. Esta distribución se utiliza para probar hipótesis acerca de dos variables de pequeñas muestras. También la Z de Fisher usada para probar hipótesis acerca del coeficiente de correlación lineal.

J. Neyman (1894-) y E. S. Pearson (1895-) presentaron una teoría de pruebas de hipótesis estadísticas en 1936 y 1938; esta teoría promovió considerablemente la investigación y, muchos de sus resultados son de gran utilidad práctica.

William Feiler, nacido en 1906, contribuyó a la teoría de la probabilidad con su trabajo sobre el Teorema del Límite Central y las cadenas de Markov. Introdujo un nuevo tratamiento en su libro "An Introduction to Probability and its Applications" (1961) que contiene muchos ejemplos que explican nuevas aplicaciones a los fenómenos biológicos, físicos y estadísticos.

John von Neumann (1909-1957) llevó a cabo la primera demostración del teorema minimax, base fundamental de la teoría de juegos, que fue propuesto primeramente por Emile Borel en 1921. También fue un pionero de

la teoría de las computadoras, habiendo diseñado y construido el llamado MANIAC (analizador matemático, integrador numérico y computador) en el Instituto para Estudios Avanzados en Princeton en 1952

Abraham Wald (1902-1950) en sus dos libros "*Sequential Analysis*" y "*Statistical Decision Functions*" alcanzó grandes logros en Estadística y sus aplicaciones.

Así, en este siglo es cuando se han desarrollado la mayoría de los métodos estadísticos que se usan en la actualidad,

1.4 ESTADISTICA E INVESTIGACION

La Estadística interviene en la investigación y/o el método científico, a través de la experimentación y observación. Esto es, las observaciones experimentales y conocimientos son partes integrantes del método científico y esos métodos invariablemente conducen al empleo de técnicas de la Estadística. Ya que la Estadística, cuando se usa adecuadamente, hace más eficientes las investigaciones, es aconsejable que los investigadores se familiaricen con las técnicas y conceptos básicos de esta ciencia tan útil.

El uso de la estadística como herramienta de la investigación no puede separarse de la planeación general del proyecto de investigación. Si un proyecto de investigación debe producir datos que van a ser tratados estadísticamente, entonces un método estadístico apropiado debe formar una parte integrante del diseño total. Nada contribuye más a la angustia de un estadístico que el investigador ingenuo que obtiene datos con la convicción alegre de que un método estadístico estará automáticamente disponible para analizarlos.

Aunque pueda parecer que está de más mencionarlo, un proyecto de investigación debe ser diseñado y planificado antes de efectuarse. Sin embargo, por muy evidente que parezca esto, los estadísticos conocen demasiado bien al investigador que aporta muchos datos, obtenidos de una manera fortuita y a menudo sin una idea precisa de por qué fueron obtenidos. En tales casos, es a veces el triste deber del estadístico comunicarle al investiga-

dor que sus esfuerzos fueron desperdiciados porque no hay una manera legítima de analizar sus datos.

1.5 ETAPAS DE UNA INVESTIGACION ESTADISTICA

1.- *Formulación del problema:* Para investigar con éxito un problema dado, primero tenemos que crear conceptos precisos, formular preguntas claras, e imponer limitaciones adecuadas al problema, tomando en cuenta el tiempo y el dinero disponibles y la habilidad de los investigadores. Si se fracasa en esta formulación, los datos compilados pueden ser irrelevantes o inadecuados.

Es bueno recordar que la calidad de las conclusiones estadísticas depende de la corrección y precisión de los datos que, a su vez, dependen de la exactitud en la formulación del problema. Las técnicas estadísticas, por muy refinadas y precisas que sean, no pueden ayudar a alcanzar decisiones si son aplicadas a datos inapropiados.

2.- *Diseño del experimento.* Muestro deseo es obtener un máximo de información empleando un mínimo de costo y tiempo. Esto implica, entre otras cosas, que debemos determinar el tamaño de muestra, o la cantidad y tipo de datos que resolverán más eficientemente el problema. A la vez, este tamaño sera afectado por el método matemático empleado en la última etapa (5a. etapa), y tenemos que seleccionar este método al igual que uno para muestrear. Con respecto al último, debemos observar que no es fácil obtener selecciones que sean completamente aleatorias.

Obtener una muestra representativa es fundamental en teoría estadística. Supone preguntas como estas: ¿Qué tipo de datos debe recogerse? ¿Cómo deben ser compilados los datos? ¿De qué tamaño debe ser la muestra? Estas preguntas corresponden a lo que se conoce como diseño de muestras o diseño experimental. Debe tenerse cuidado al planificar y diseñar un experimento; de otro modo, puede que no lleguemos a alcanzar ninguna conclusión válida.

3.- Colección de datos y experimentación: La compilación de datos se refiere a los métodos usados para obtener información pertinente de las unidades elementales introducidas en una muestra. En general, ésta es la parte que más tiempo consume en toda investigación que sea realizada. Esta debe sujetarse a reglas estrictas. De hecho, cuanto menos opiniones impongamos, serán mejores los resultados.

4.- Tabulación y descripción de los resultados: En esta etapa los datos experimentales deben ser ordenados en forma legible y se ilustran con representaciones gráficas (diagramas o gráficas); además se calculan medidas descriptivas para el tamaño promedio y la separación o dispersión de los valores de la muestra. Los procedimientos correspondientes son simples y serán discutidos en la parte III.

5.- Inferencia estadística formulación de la respuesta: Al aplicar el método estadístico seleccionado en la etapa 2. obtenemos conclusiones a partir de la muestra, acerca de la población correspondiente (inferencia estadística), tomamos una decisión y formulamos la respuesta a nuestro problema.

No existe una fórmula mágica en estadística matemática que tome en cuenta todas las situaciones prácticas concebibles. Por lo cual es necesario adquirir conocimientos generales de los métodos más importantes que sean útiles para hacer inferencias. En cada caso práctico debe estudiarse con cuidado la naturaleza del problema específico, para estar seguros de que será escogido el método más apropiado.

1.6 ESTADISTICA DESCRIPTIVA Y ESTADISTICA INFERNENCIAL

Los datos tal como se obtienen no nos proporcionan información suficiente para interpretar su significado por lo que tenemos que utilizar métodos descriptivos para darles mayor sentido o inferenciales para sacar conclusiones válidas sobre ellos. Estos métodos dependen del tipo de datos

que se tengan y de los resultados que se quieran obtener

Los métodos descriptivos se emplean para esquematizar o mostrar los datos en forma ordenada y gráfica sin sacar conclusiones de ellos. Los métodos descriptivos se pueden usar tanto para muestras como para poblaciones mientras que los métodos inferenciales usan solamente muestras para inferir a partir de las primeras, las características de la población. Cuando usamos Estadística Inferencial generalizamos a partir de las Características de una muestra las de la población.

1.7 POBLACION Y MUESTRA

Una población o Universo es un agregado o la totalidad de unidades elementales tales como personas, empresas industriales, granjas o datos de cualquier clase acerca de los cuales se desea información. Una muestra es una porción o subconjunto de unidades elementales extraídas de una población.

1.8 UNIDADES ELEMENTALES Y OBSERVACION

Los individuos u objetos de una población que tienen una característica medible se llaman unidades elementales; definir una población es, en un sentido, limitar el contenido de las unidades elementales. Estas poseen ciertas características, conocidas a veces como rasgos o propiedades, que pueden ser de naturaleza cualitativa o cuantitativa.

El término observación se usará para indicar cualquier clase de medida obtenida en la investigación, es decir, el resultado de observar o medir una unidad elemental, se llama observación; también se puede entender como el valor numérico de una característica cuantificable de una unidad elemental.

1.9. SUMATORIAS

Dado un conjunto de observaciones de alguna variable representada por X_1, X_2, \dots, X_n , podemos expresar su suma $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ en forma abreviada como

$$\sum_{i=1}^n X_i$$

Esto se lee " suma de los X_i desde i igual a 1 hasta n "

Ejemplo 1.1

Si $X_1 = 1, X_2 = -3, X_3 = \frac{1}{4}$, entonces

$$\sum_{i=1}^3 X_i = X_1 + X_2 + X_3 = 1 + (-3) + \frac{1}{4} = -\frac{7}{4}$$

PROPIEDADES DE LAS SUMATORIAS

I. Si c es una constante cualquiera, entonces $\sum_{i=1}^n cX_i = c \sum_{i=1}^n X_i$

Demostración:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n cX_i &= cX_1 + cX_2 + \dots + cX_n \\ &= c(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \\ &= c \sum_{i=1}^n X_i \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2

Si $X_1 = -3, X_2 = 5, X_3 = 1, X_4 = 7, X_5 = 0$, entonces.

$$\sum_{i=1}^5 4X_i = 4 \sum_{i=1}^5 X_i \text{ porque}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 4X_i &= 4(-3) + 4(5) + 4(1) + 4(7) + 4(0) \\ &= -12 + 20 + 4 + 28 + 0 \\ &= 40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \sum_{i=1}^5 X_i &= 4(-3 + 5 + 1 + 7 + 0) \\ &= 4(10) \\ &= 40 \end{aligned}$$

Corolario: Si c es una constante, entonces $\sum_{i=1}^n c = nc$

Demostración: Si $x_i = 1$ en la propiedad anterior, entonces

$$\sum_{i=1}^n c \cdot 1 = c \sum_{i=1}^n 1 = c(1 + 1 + \dots + 1) = cn$$

Ejemplo 1.3 $\sum_{i=1}^6 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 12$

o también

$$\sum_{i=1}^6 2 = 2(6) = 12$$

II. $\sum_{i=1}^n (x_i + y_i + z_i) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i + \sum_{i=1}^n z_i$

Demostración:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i + y_i + z_i) &= (x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2) + \dots + (x_n + y_n + z_n) \\ &= (x_1 + x_2 + \dots + x_n) + (y_1 + y_2 + \dots + y_n) + (z_1 + z_2 + \dots + z_n) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i + \sum_{i=1}^n z_i \end{aligned}$$

Ejemplo 1.4 Sean

X	Y	Z
22	25	24
10	23	15
21	32	20
31	43	25

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 (x_i + y_i + z_i) &= (22+25+24) + (10+23+15) + (21+32+20) + (31+43+25) \\ &= 71 + 48 + 73 + 99 \\ &= 291 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 x_i + \sum_{i=1}^4 y_i + \sum_{i=1}^4 z_i &= (22+10+21+31) + (25+23+32+43) + (24+15+20+25) \\ &= 84 + 123 + 84 \\ &= 291 \end{aligned}$$

Corolario: $\sum_{i=1}^n (x_i + c) = \sum_{i=1}^n x_i + nc$

Demostración: Por la propiedad $\sum_{j=1}^n (X_j + c) = \sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^n c$

$$= \sum_{i=1}^n X_i + nc \quad (\text{por el corolario de la prop. I}).$$

Ejemplo 1.5

Dados

	X	Y
4	6	
5	4	
8	5	
7	8	

Determinar:

a) $\sum_{i=1}^3 X_i^2$ b) $\sum_{i=1}^4 (X_i + 3)^2$ c) $\sum_{i=1}^4 X_i^2 + 3$

d) $\sum_{i=1}^4 X_i Y_i$

Solución:

a) $\sum_{i=1}^3 X_i^2 = 4^2 + 5^2 + 8^2 = 16 + 25 + 64 = 105$

b) $\sum_{i=1}^4 (X_i + 3)^2 = (4+3)^2 + (5+3)^2 + (8+3)^2 + (7+3)^2$
 $= 49 + 64 + 121 + 100$
 $= 334$

c) $\sum_{i=1}^4 X_i^2 + 3 = (16 + 25 + 64 + 49) + 3$
 $= 154 + 3$
 $= 157$

d) $\sum_{i=1}^4 X_i Y_i = (24 + 20 + 40 + 56)$
 $= 140$

SUMATORIAS DOBLES: Frecuentemente en estadística se desea conocer la interacción entre dos variables; así por ejemplo, consideramos las 20 determinaciones de presión sanguínea sistólica tomadas a un individuo que participa en un programa ideado para estudiar fuentes e intensidades de variación de lecturas de la presión de la sangre. La presión de la sangre fue medida por 4 médicos en cada una de 5 visitas. Los datos se resumen en la siguiente tabla.

LECTURAS DE PRESION SANGUINEA SISTOLICA DE
UN INDIVIDUO TOMADAS EN 5 VISITAS POR 4 OR
SERVADORES

Número de visita	Número de médico			
	1	2	3	4
1	118	112	116	118
2	120	116	112	112
3	114	120	112	117
4	118	116	118	116
5	118	108	122	116

Con el fin de ordenar linealmente estas dos clasificaciones, se utiliza un sistema de dos subíndices, esto es, se usa un subíndice para el número de visita y otro para el número de médico. En tales situaciones es frecuente emplear las letras i y j para indicar el número de fila o renglón y el número de columna, respectivamente. A cada observación se denota por X_{ij} que indica el dato en la i -ésima fila y j -ésima columna. En el conjunto de datos anterior, $X_{34} = 117$, $X_{32} = 120$, etc.

Vamos a considerar ahora diversos tipos de sumas. Por ejemplo, la suma de los elementos de la segunda fila es

$$\sum_{j=1}^4 X_{2j} \quad (\text{fila 2, por tanto el primer subíndice queda fijo, solo cambia la columna})$$

Para sumar todos los elementos de la tabla, se puede proceder de dos maneras, primero sumar los elementos correspondientes a cada fila y luego hallar la adición de estas sumas o sumar los elementos de cada columna y luego sumar éstas.

Por filas tenemos:

$$\sum_{j=1}^4 X_{1j} + \sum_{j=1}^4 X_{2j} + \sum_{j=1}^4 X_{3j} + \sum_{j=1}^4 X_{4j} + \sum_{j=1}^4 X_{5j}$$

que se pueden resumir así: $\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^4 X_{ij}$

Por columnas tenemos :

$$\sum_{i=1}^5 X_{i1} + \sum_{i=1}^5 X_{i2} + \sum_{i=1}^5 X_{i3} + \sum_{i=1}^5 X_{i4} = \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^5 X_{ij}$$

Era nuestro ejemplo:

$$\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^4 X_{ij} = 464 + 460 + 463 + 468 + 464 \\ = 2319$$

$$\sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^5 X_{ij} = 588 + 572 + 580 + 579 \\ = 2319$$

EJERCICIOS

1.1.- Desarrollar cada una de las siguientes sumatorias

a) $\sum_{i=1}^3 x_i$

b) $\sum_{i=1}^5 x_i y_i$

c) $\sum_{i=1}^4 (x_i + y_i)$

d) $\sum_{i=1}^5 c x_i$

e) $\sum_{i=2}^6 (x_i + 3)$

f) $\sum_{i=3}^7 (x_i + y_i + z_i)$

1.2,- Expresar cada una de las siguientes operaciones con la notación de sumatoria

a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$

b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$

c) $(x_1 + 2) + (x_2 + 2) + (x_3 + 2) + (x_4 + 2) + (x_5 + 2)$

d) $(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)^2$

e) $x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 + x_5 y_5 + x_6 y_6$

f) $x_1 + x_2 + x_3 - y_1 - y_2 - y_3$

1.3.- Dados $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$, $x_4 = 1$, $x_5 = -2$

Determinar las siguientes sumatorias:

a) $\sum_{i=1}^4 x_i$

b) $\sum_{i=1}^5 x_i^2$

c) $\sum_{i=1}^5 (x_i + 2)$

d) $\sum_{i=3}^5 (x_i - 3)$

e) $\sum_{i=2}^4 (3x_i + 4)$

f) $\sum_{i=1}^5 i x_i$

g) $(\sum_{i=1}^5 x_i)^2$

h) $\sum_{i=1}^4 (x_i - 4)^2$

i) $\sum_{i=1}^5 (x_i^2 - 3)$

1.4.- Dados:

3	1	2	1
1	4	1	3
1	2	3	4

Determinar las siguientes sumatorias:

$$a) \sum_{j=1}^4 X_{ij} \quad \text{para } i = 1, 2, 3$$

$$b) \sum_{i=1}^3 X_{ij} \quad \text{para } j = 1, 2, 3, 4$$

$$c) \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 X_{ij}^2$$

1.5.- Evaluar las siguientes sumas dobles para los datos del problema 1.4

$$a) \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 X_{ij}$$

$$b) \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^3 X_{ij}$$

X	Y
2	5
5	6
4	5

Determinar:

$$a) \sum_{i=1}^3 X_i Y_i$$

$$b) \sum_{i=1}^3 X_i \sum_{i=1}^3 Y_i$$

$$c) \sum_{i=1}^3 X_i^2 - 3 \left(\frac{\sum_{i=1}^3 X_i}{3} \right)^2$$

$$d) \sum_{i=1}^3 X_i Y_i - 3 \left(\frac{\sum_{i=1}^3 X_i}{3} \right) \left(\frac{\sum_{i=1}^3 Y_i}{3} \right)$$

CAPITULO 2 : TEORIA ELEMENTAL DE CONJUNTOS

2.1 CONJUNTOS. DEFINICION Y NOTACION

El termino conjunto juega un papel fundamental en el desarrollo de las Matemáticas modernas. El origen de este concepto se debe al matemático alemán George Cantor(1845-1918) y, surgió de la necesidad de darle rigurosidad lógica a las discusiones matemáticas con el fin de eliminar la ambigüedad del lenguaje cotidiano.

Definición intuitiva: Un conjunto no tiene definición matemática, sin embargo, en forma intuitiva un conjunto es un agregado o colección de objetos de cualquier naturaleza con características bien definidas de manera que se puedan distinguir todos sus elementos. A los objetos que lo componen se les llama elementos del conjunto.

Notación: A los conjuntos se les denota con letras mayúsculas y a sus elementos con letras minúsculas; a los elementos se les encierra entre "llaves" ({ }) y se separan con "comas" (,). Así por ejemplo, el conjunto D cuyos elementos son los números que aparecen al lanzar un dado se escribe:

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Se pueden citar infinidad de ejemplos de conjuntos, algunos de ellos son:

Ejemplo 2.1

El conjunto de días de la semana.

Ejemplo 2.2

El conjunto de las vocales.

Ejemplo 2.3

El conjunto de los números reales.

Ejemplo 1.4

El conjunto de los enteros positivos menores que 10.

Ejemplo 2.5

El conjunto de los números reales entre 2 y 5.

Los conjuntos se pueden escribir en forma implícita (por descripción) cuando no se enumeran o enlistan todos sus elementos, o en forma explícita (por enumeración) cuando se enlistan todos sus elementos; por ejemplo, el conjunto de los días de la semana se puede escribir en forma implícita así:

$$S = \{x/x \text{ es un día de la semana}\}$$

Este se lee, S es el conjunto de los x tales que x es un día de la semana.

También podemos escribirlo en forma explícita

$$S = \{\text{domingo, lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado}\}$$

Los conjuntos dados en los ejemplos 2, 3, 4 y S también se pueden escribir en forma implícita y en forma explícita:

$$V = \{x/x \text{ es una vocal}\} \quad \text{forma implícita}$$

$$V = \{a, e, i, o, u\} \quad \text{forma explícita}$$

$$R = \{x/x \text{ es un número real}\} = <-\infty, +\infty> \quad \text{forma implícita}$$

$$A = \{n \in \mathbb{Z}^+ / n < 10\} \quad \text{forma implícita}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \quad \text{forma explícita}$$

$$B = \{x \in R / 2 < x < 5\} = < 2, 5 > \quad \text{forma implícita}$$

Según la cantidad de elementos que tenga un conjunto, estos se pueden clasificar en conjuntos finitos, los que tienen un número conocido de elementos, y los conjuntos infinitos, los que tienen un número ilimitado de elementos.

Los conjuntos citados en los ejemplos 1, 2 y 4 son conjuntos finitos y los conjuntos de los ejemplos 3 y 5 son conjuntos infinitos.

Cuando queremos indicar que un elemento pertenece a un conjunto o que es un miembro del conjunto usamos el símbolo " \in " que se lee, "pertenece a", o "es elemento de"; y cuando queremos indicar que no pertenece al conjunto, usamos: " \notin ", Por ejemplo:

$$\begin{array}{l} \text{lunes } \in S \\ 3 \quad \notin S \end{array}$$

2.2 CONJUNTO VACIO

Un conjunto que no Tiene elementos se le llama conjunto vacío y se denota por \emptyset ó $\{\}$.

Ejemplo 2.6

El conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 = 0\}$ es un conjunto vacío porque no hay ningún número real que satisfaga $x^2 + 1 = 0$.

Ejemplo 2.7

El conjunto de los meses del año con 27 días.

2.3 CONJUNTO UNIVERSAL

El conjunto universal U es el conjunto de todos los elementos considerados en un problema o situación dada. Por ejemplo, si solo queremos trabajar con los números reales positivos, el conjunto universal será $U = \mathbb{R}^+ = \langle 0, +\infty \rangle$; o si queremos trabajar con los números que aparecen en un dado, el conjunto universal será $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Nótese que el conjunto universal no es único, depende de la situación.

2.4 RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

Consideraremos los conjuntos

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$$

$$C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$D = \{3, 6, 9\}$$

Estos conjuntos se pueden comparar de la siguiente forma: todos los elementos de B son también elementos de A, todos los elementos de C también son elementos de A y todos los elementos de D son elementos de A, entonces decimos que B, C y D están contenidos en A,

En símbolos:

$$B \subseteq A \quad ó \quad A \supseteq B, \text{ (léase : El conjunto B está contenido en A ó A contiene a B)}$$

$$C \subseteq A \quad ó \quad A \supseteq C$$

$$D \subseteq A \quad ó \quad A \supseteq D$$

Sin embargo en D hay elementos que pertenecen a B y también a C pero no todos los elementos de D pertenecen a B y a C por lo que D no está contenido de B ni de C, esto se indica así:

$$D \not\subseteq B \quad y \quad D \not\subseteq C$$

Por otra parte todos los elementos de D pertenecen a D, por consiguiente:

$$D \subseteq D$$

SUBCONJUNTO

Un conjunto B es "subconjunto" de un conjunto A si' todos los elementos de B pertenecen a A y se escribe $B \subset A$. Esto se lee: "B está contenido en A" ó "B es subconjunto de A"

Ejemplo 2.8

El conjunto de los números naturales $N = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ es un subconjunto del conjunto de los números enteros.

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

y éste a su vez es subconjunto del conjunto de los números racionales Q , que es el conjunto de los números que se pueden expresar de la

rma $\frac{m}{n}$ donde m y n son enteros y $n \neq 0$.

Por lo tanto, se tiene la relación

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

SUBCONJUNTO PROPIO

Sean dos conjuntos A y B, se dice que B es un subconjunto propio de A si todos los elementos de B pertenecen a A y además A contiene por lo menos un elemento que no pertenece a B.

En símbolos, esto se indica $A \subset B$, que quiere decir que B es un subconjunto propio de A.

Ejemplo 2.9

En el conjunto universal de los números naturales

$$\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\{2, 4\} \subset \{2, 4, 6, 8\}$$

$$\{1, 3\} \not\subset \{1, 3\}$$

En la siguiente tabla se observan todos los subconjuntos de un conjunto para tres diferentes casos.

TABLA 1-1

CONJUNTO	SUBCONJUNTO	NUMERO DE SUBCONJUNTOS
{a}	$\emptyset, \{a\}$	$2 = 2^1$
{a, b}	$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}$	$4 = 2^2$
{a, b, c}	$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}$	$8 = 2^3$

El número de subconjuntos de un conjunto de n elementos es 2^n , donde uno de los subconjuntos es el propio conjunto, siendo éste un subconjunto no propio, por consiguiente, el número de subconjuntos propios de un conjunto de n elementos es $2^n - 1$.

Es importante hacer notar la diferencia entre los símbolos \in y \subseteq , El símbolo " \in " se emplea para relacionar a un elemento como perteneciente a un conjunto, mientras que " \subseteq " lo es para relacionar a un conjunto como contenido en otro, del cual es por tanto subconjunto.

Por $x \in A$ y $\{x\} \subseteq A$.

IGUALDAD DE CONJUNTOS:

Dos conjuntos A y B son iguales, si A es subconjunto de B y B es subconjunto de A , es decir:

$$A = B \iff A \subseteq B \quad y \quad B \subseteq A$$

No está por demás aclarar que el decir que dos conjuntos son iguales no es solo cuestión de contar el número de elementos que tiene cada conjunto, sino de verificar si cada elemento de un conjunto pertenece también al otro.

2.5 OPERACIONES CON CONJUNTOS

Básicamente se definen cuatro operaciones con conjuntos; la unión, la intersección, el complemento y la diferencia. Se puede definir una operación más, el producto cartesiano pero no será tratado aquí.

UNION DE CONJUNTOS

Sean A y B dos subconjuntos del conjunto universal U . La unión de A con B denotada por $A \cup B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A , a B ó a ambos. En símbolos,

$$A \cup B = \{x / x \in A \text{ ó } x \in B\}$$

INTERSECCION DE CONJUNTOS

Sean A y B dos subconjuntos del conjunto universal U. La intersección de A y B, denotada por $A \cap B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y a B simultáneamente. En símbolos:

$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ y } x \in B\}$$

CONJUNTOS DISJUNTOS

Dos conjuntos A y B que no tienen elementos en común, es decir $A \cap B = \emptyset$ se llaman conjuntos disjuntos.

COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO

Sea A un subconjunto del conjunto universal U. El complemento de A, denotado por A^c ó A' es el conjunto de los elementos de U que no pertenecen a A; es decir:

$$A^c = \{x / x \in U \text{ y } x \notin A\}$$

DIFERENCIA DE CONJUNTOS

Sean A y B dos subconjuntos de U, la diferencia de A menos B, denotada por $A - B$, es el conjunto de los elementos de A que no pertenecen a B.

Esto es:

$$A - B = \{x / x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Ejemplo 2, 10

Sean $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

$C = \{7, 8, 9\}$

Entonces:

$$A \cup = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$A \cup = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}$$

$$B \cup = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$A \cap = \{3, 4\}$$

$$A \cap = \emptyset$$

$$B \cap C = \{7\}$$

$$A^c = \{5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$B^c = \{1, 2, 8, 9\}$$

$$C^c = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A - B = \{1, 2\}$$

$$B - A = \{5, 6, 7\}$$

$$A - C = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$C - A = \{7, 8, 9\}$$

$$B - C = \{3, 4, 5, 6\}$$

$$C - B = \{8, 9\}$$

2.6 DIAGRAMAS DE VENN

Cualquier figura geométrica cerrada (círculos, rectángulos, triángulos, óvalos, etc) sirve para representar gráficamente las operaciones entre conjuntos, estos gráficos son llamados diagramas de Venn; normalmente al conjunto universal se le representa con un rectángulo y los conjuntos con un círculo, triángulo, ellipse, etc.

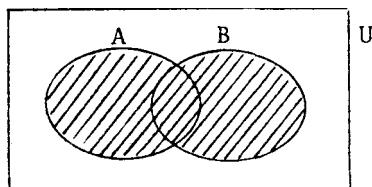
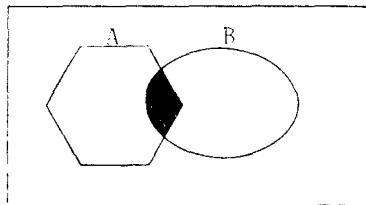


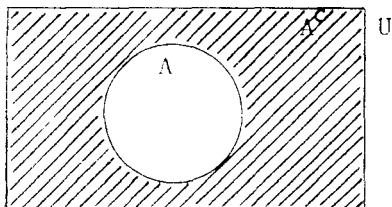
Fig. 2.1

La parte rayada representa $A \cup B$



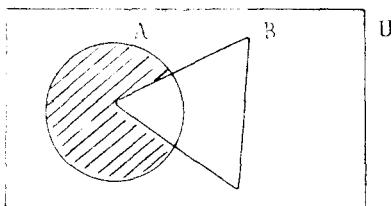
La parte sombreada representa $A \cap B$

Fig. 2.2



La parte rayada representa A^c

Fig. 2.3



La parte rayada representa $A - B$

Fig. 2.4

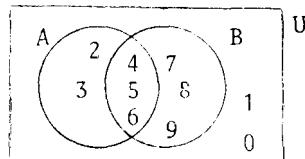
Los diagramas de Venn en ningún momento constituyen una prueba matemática, sin embargo, permiten tener una visión intuitiva de la relación que puede existir entre los conjuntos.

Ejemplo 2.11

$$\text{Sean } U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$



Entonces: $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$$A \cap B = \{4, 5, 6\}$$

$$A - B = \{2, 3\}$$

$$B - A = \{7, 8, 9\}$$

$$A^C = \{0, 1, 7, 8, 9\}$$

$$B^C = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$(A \cup B)^C = \{0, 1\}$$

$$(A \cap B)^C = \{0, 1, 2, 3, 7, 8, 9\}$$

$$A^C \cup B^C = \{0, 1, 2, 3, 7, 8, 9\}$$

$$A^C \cap B^C = \{0, 1\}$$

$$A^C \cap B = \{7, 8, 9\}$$

$$A \cap B^C = \{2, 3\}$$

Leyes o Propiedades de las Operaciones en Conjunto

$$\left. \begin{array}{l} 1.- A \cup \emptyset = A \\ 2.- A \cap \emptyset = \emptyset \\ 3.- A \cup U = U \\ 4.- A \cap U = A \\ 5.- \emptyset \cup U = U \\ 6.- \emptyset \cap U = \emptyset \end{array} \right\}$$

Leyes de Identidad

$$\left. \begin{array}{l} 7.- A \cup A = A \\ 8.- A \cap A = A \end{array} \right\}$$

Leyes de Idempotencia

$$\left. \begin{array}{l} 9.- \emptyset^C = U \\ 10.- U^C = \emptyset \\ 11.- A \cup A^C = U \\ 12.- A \cap A^C = \emptyset \\ 13.- (A^C)^C = A \end{array} \right\}$$

Leyes del Complemento

$$\left. \begin{array}{l} 14.- A \cup B = B \cup A \\ 15.- A \cap B = B \cap A \end{array} \right\} \quad \text{Leyes de la Comutatividad}$$

$$\left. \begin{array}{l} 16.- A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ 17.- A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \end{array} \right\} \quad \text{Leyes de la Asociatividad}$$

$$\left. \begin{array}{l} 18.- A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ 19.- A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{array} \right\} \quad \text{Leyes Distributivas}$$

$$\left. \begin{array}{l} 20.- (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \\ 21.- (A \cap B)^c = A^c \cup B^c \end{array} \right\} \quad \text{Leyes de DeMorgan}$$

2.7 CARDINAL DE UN CONJUNTO:

El número de elementos diferentes de un conjunto se le llama cardinal del conjunto, y lo denotamos por $n(A)$ ó $\#(A)$.

La "*cardinalidad*" solo puede darse en el caso de conjuntos finitos, ya que en el caso de los conjuntos "*infinitos*", no es posible contar el número de elementos incluidos en ellos.

Propiedades:

$$1) n(A) \geq 0, \quad \forall A \subseteq U$$

$$2) n(\emptyset) = 0$$

$$3) n(A \cup B) = n(A) + n(B), \quad \text{si } A \cap B = \emptyset$$

Proposición 2.1

Sea A cualquier subconjunto del conjunto universal U , entonces $n(A^c) = n(U) - n(A)$.

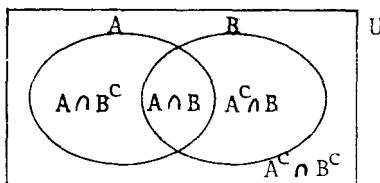
Sabemos que $A \cup A^c = U$ y que $A \cap A = \emptyset$. Por consiguiente, por la propiedad 3 tenemos que: $n(U) = n(A \cup A^c) = n(A) + n(A^c)$.

Despejando $n(A^c) = n(U) - n(A)$. c.q.d.

Proposición 2.2

Si A y B son dos subconjuntos cualesquiera del conjunto universal U , entonces: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Observemos que A se puede escribir como la unión de dos conjuntos disjuntos, y B también.



$$A = (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$$

$$B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$$

$$\begin{aligned} \text{Por la propiedad 3: } n(A) &= n(A \cap B^c) + n(A \cap B) \\ n(B) &= n(A \cap B) + n(A^c \cap B) \end{aligned}$$

Sumando estas dos ecuaciones, tenemos:

$$n(A) + n(B) = n(A \cap B^c) + n(A \cap B) + n(A^c \cap B) + n(A \cap B)$$

$$\text{Pero: } n(A \cap B^c) + n(A \cap B) + n(A^c \cap B) = n(A \cup B)$$

Puesto que $(A \cap B^c) + (A \cap B) + (A^c \cap B) = A \cup B$, y estos tres conjuntos son disjuntos entre si.

$$\text{Por lo tanto: } n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B)$$

de donde $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ c.q.d.

Ejemplo 2.12

Supóngase que $n(U) = 200$, $n(A) = 138$, $n(B) = 127$, $n(A \cap B) = 70$

¿Cuál es el cardinal de $A^c \cap B^c$?

Solución:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 138 + 127 - 70$$

$$= 195$$

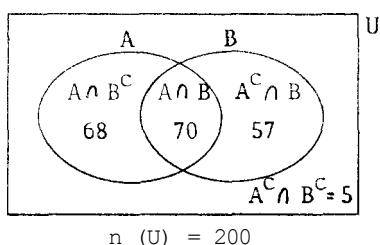
$$n(A^c \cap B^c) = n[(A \cup B)^c] \quad (\text{Leyes de DeMorgan})$$

$$= n(U) - n(A \cup B) \quad (\text{Proposición 2.1})$$

$$= 200 - 195$$

$$= 5$$

Usando diagramas de Venn, tenemos que en la intersección $A \cap B$ hay 70 elementos y en A hay 138, lo que hace que en $A^c \cap B^c$ haya $138 - 70 = 68$; y como en B hay 127, en $A^c \cap B$ hay $127 - 70 = 57$.



$$n(U) = 200$$

Por consiguiente,

$$n(A \cup B) = 68 + 70 + 57 = 195$$

$$\text{y } n(A^c \cap B^c) = n[(A \cup B)^c]$$

$$= n(U) - n(A \cup B)$$

$$= 200 - 195$$

$$= 5$$

EJERCICIOS

2.1.- Dado que $A = \{1, 2, 3\}$, establezca si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

- | | |
|---------------------------------|--|
| a) $3 \in A$ _____ | h) $\emptyset \subseteq A$ _____ |
| b) $2 \subseteq A$ _____ | i) $\emptyset \in A$ _____ |
| c) $\{2\} \subseteq A$ _____ | j) $\emptyset \in \emptyset$ _____ |
| d) $\{1, 2\} \subseteq 3$ _____ | k) $\emptyset \subseteq \emptyset$ _____ |
| e) $\{1, 2\} \subseteq A$ _____ | l) $\emptyset \subset \emptyset$ _____ |
| f) $A \subseteq A$ _____ | m) $\{2, 3\} \subseteq A$ _____ |
| g) $A \subset A$ _____ | n) $\{0\} \subset A$ _____ |

2.2.- Establezca si el conjunto dado en cada caso es finito o infinito.

- a) $\{x/x \text{ es un residente de la ciudad de México}\}$
- b) $\{x/x \text{ es un automóvil registrado en el D. F.}\}$
- c) $\{x/x \text{ es un número natural}\}$
- d) $\{x/x \text{ es un número primo}\}$
- e) $\{x/x \text{ es un número entero par}\}$
- f) $\{x/x \text{ es un estudiante de la U.N.A.M.}\}$
- g) $\{x/x \text{ es un profesor de Matemáticas de la E.N.E.P. ZARAGOZA}\}$
- h) $\{x/x \text{ es un múltiplo de } 5\}$

2.3.- Dados los conjuntos $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ $A = \{1, 2, 4, 5\}$

$$B = \{2, 3, 4\} \quad C = \{3, 5, 6, 7\} \quad D = \{1, 2, 5, 6\}$$

Determine:

- | | | |
|---------------|---------------|-----------------|
| a) $A \cup B$ | d) $B \cup C$ | g) $A^c \cup B$ |
| b) $A \cap B$ | e) $C \cap D$ | b) $B^c \cap D$ |
| c) $B \cap D$ | f) $C \cup D$ | |

2.4.- Dados $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ $A = \{1, 3, 5, 7\}$ $B = \{2, 4, 6, 8\}$
 $C = \{1, 4, 7\}$ $D = \{2, 5, 8\}$ Determinar:

- | | |
|-----------------|--------------------------|
| a) $A \cup B$ | f) $(A \cup B)^c \cap D$ |
| b) $B \cap D$ | g) $A \cap (B \cup C)$ |
| c) $A \cap B$ | h) $A \cup (B \cap C)$ |
| d) $A^c \cup C$ | i) $A^c \cap B^c$ |
| e) $B \cap C^c$ | j) $A^c \cup B^c$ |

2.5.- Usando diagramas de Venn, ilustrar lo siguiente:

- | | | |
|------------------------|------------------------|---|
| a) $A^c \cap B$ | b) $A \cap B^c$ | c) $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B)$ |
| d) $C \cap (A \cup B)$ | e) $A \cap (A \cap B)$ | |

2.6.- Sean $A \subseteq U$, $B \subseteq U$, $n(U) = 100$, $n(A) = 45$, $n(B) = 63$, $n(A \cap B) = 22$.

Determinar:

- | | | | |
|--------------------|------------------|--------------------|----------------------|
| a) $n(A \cap B^c)$ | b) $n(A \cup B)$ | c) $n(A^c \cap B)$ | d) $n(A^c \cap B^c)$ |
|--------------------|------------------|--------------------|----------------------|

2.7.- Sean $A \subseteq U$, $B \subseteq U$, $n(U) = 60$, $n(A^c) = 30$, $n(B^c) = 20$

$n(A^c \cap B^c) = 15$. Encontrar:

- | | | | |
|--------------------|------------------------|------------------|------------------|
| a) $n(A)$ | b) $n(B)$ | c) $n(A \cup B)$ | d) $n(A \cap B)$ |
| e) $n(A^c \cap B)$ | f) $n(A^c \cup B^c)$. | | |

CAPITULO 3: PROBABILIDAD ELEMENTAL

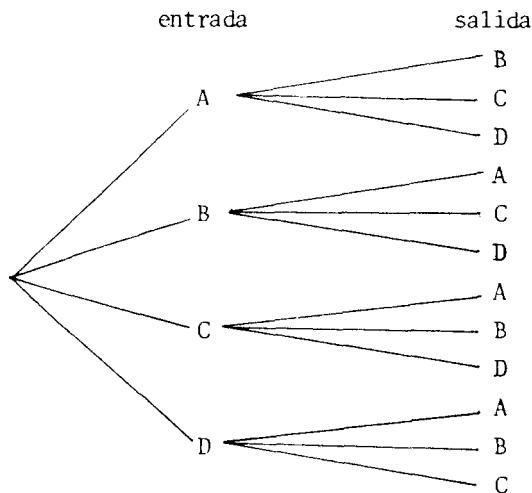
3.1 ELEMENTOS DE ANALISIS COMBINATORIO:

A pesar de la complejidad de muchos procedimientos avanzados, proporcionados por la tecnología moderna, el simple proceso de contar continúa jugando un papel importante en problemas prácticos de la vida cotidiana. Tenemos que contar, por ejemplo, el número de alumnos por grupo, el número de llamadas telefónicas recibidas en una oficina por día, el número de accidentes ocurridos en los fines de semana, etc. Pero, no todos los problemas de contar son tan fáciles como estos. Por ejemplo, para calcular en cuantas formas podemos sentar a 6 personas una al lado de la otra para un foto; o el número de señales que se pueden hacer usando 4 banderas todas de diferente color; o cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 si no se pueden repetir los dígitos; etc. Frecuentemente es necesario determinar cantidades como estas para poder calcular probabilidades, por ello estudiaremos primero como contar y luego determinaremos probabilidades.

Para responder las preguntas de: "*cuántos*" o "*cuál es el número*" podríamos proceder de dos formas: una, enlistar todas las posibilidades (si no son muchas) y otra, determinar su número sin enlistarlas. La determinación del número sin enlistar todas las posibilidades es de lo que se ocupa la teoría combinatoria mediante algunas reglas o fórmulas; sin embargo, podemos auxiliarnos con diagramas para poder tener una idea intuitiva del problema. Los diagramas más usuales son los diagramas de Venn, los diagramas de árbol, y los diagramas de "*rayitas*".

Los diagramas de Venn ya los introdujimos en el capítulo 2, los diagramas de árbol son una ayuda visual intuitiva que se utiliza cuando es necesario tomar en cuenta el orden; por ejemplo, supongamos que un cuarto tiene cuatro puertas, llamémoslas A, B, C, D y, que estamos interesados en saber de cuantas formas podemos entrar por una puerta y salir por otra. Obviamente hay varias posibilidades, ¿cuántas son?. Son doce

las posibilidades. Para resolver problemas como este, resultan de gran ayuda los diagramas de árbol.



Este diagrama indica que hay cuatro entradas posibles y, una vez usada una de las entradas solo quedan tres posibles salidas. Por lo tanto, hay doce posibilidades, entrar por A y salir por B, C o D; o entrar por B y salir por A, C o D, etc.

Este problema también puede ser resuelto con la ayuda de otro tipo de diagrama, el de "rayitas" como son dos operaciones que se van a realizar: entrada y salida, colocamos dos rayas, en una colocamos el número de posibilidades que hay de entrar (4) y en la otra el número de posibilidades que hay de salir por otra puerta diferente a la de la entrada (3), por lo tanto, tenemos: $4 \times 3 = 12$.

Como otro ejemplo, supongamos que un tren de pasajeros de México a Monterrey tiene cuatro vagones disponibles y necesitamos saber el número de formas en que tres pasajeros pueden ser asignados a los cuatro vagones, de manera que dos de los pasajeros no viajen juntos, entonces procedemos a colocar tres "rayas" en las cuales colocamos el número de formas en las cuales se pueden asignar los cuatro vagones a los tres pasajeros. Hay cuatro formas de asignar un vagón al primer pasajero, una vez asignado uno de los vagones al primer pasajero, todavía nos quedan tres vagones diferentes que pueden ser asignados al segundo y por último, quedan aún dos vagones disponibles para el tercer pasajero, esto es: $4 \times 3 \times 2 = 24$.

Son entonces 24 formas las que tenemos de asignar los cuatro viajantes a los tres pasajeros, de manera que no viajen dos de ellos juntos.

Como otro ejemplo, tenemos que si queremos los números de 5 cifras que se pueden formar con los dígitos del 0 al 9 que sean múltiplos de 5 y donde no se pueden repetir los dígitos, procedemos, colocando 5 "rayitas".

— — — — —

En la última rayita (en el lugar de las unidades) sabemos que solo pueden ir el 0 y el 5 para que sean múltiplos de 5; estas son dos posibilidades; por otro lado, una vez colocado uno de estos dos dígitos, para el siguiente lugar, (el de las decenas) podemos colocar cualquiera de los 9 dígitos que no hemos usado, es decir:

$$9 \times 2$$

— — — — —

Para el lugar de las centenas, todavía nos quedan 8 dígitos, puesto que solo se han usado 2 de los 10 que teníamos, o sea:

$$8 \times 9 \times 2$$

— — — — —

Procediendo en esta forma para el lugar de los millares tenemos 7, dígitos disponibles y para el lugar de las decenas de millar 6. Por lo tanto.

$$6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 2 = 6048$$

— — — — —

Ese decir hay 6048 números de 5 cifras todas diferentes y que son múltiplos de cinco.

3.2 PRINCIPIOS FUNDAMENTALES EN EL PROCESO DE CONTAR:

PRINCIPIO DE LA MULTIPLICACION

Los tres ejemplos anteriores ilustran el siguiente principio de la multiplicación o principio fundamental del proceso de contar.

"Si una operación o un proceso consiste de n diferentes pasos, de los cuales el primero puede ser realizado de p_1 formas, el segundo de p_2 formas, el tercero de p_3 formas,....., y el k -ésimo de p_k formas; entonces la operación o el proceso completo se puede realizar de $p_1 \times p_2 \times p_3 \times \dots \times p_k$ formas".

Ejemplo 3.1 Un estudiante tiene 8 pantalones diferentes y 10 camisas diferentes, ¿de cuántas maneras puede vestirse en forma diferente?

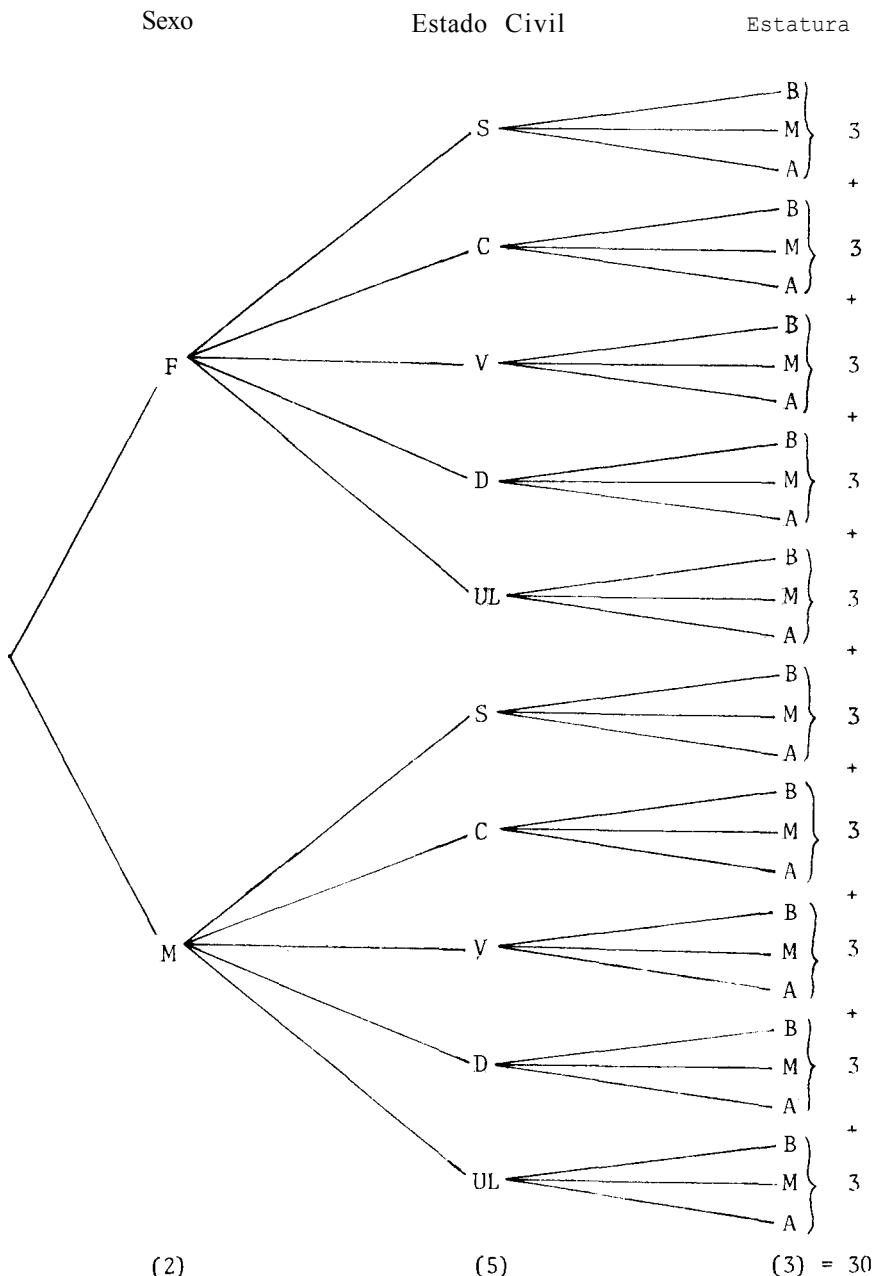
Solución: 8 x 10 = 80

Ejemplo 3.2 Un restaurante ofrece tres sopas diferentes, 5 carnes, 4 postres y 4 tipos de bebida, ¿de cuántas formas podemos ordenar una comida completa consistente de una sopa, una carne, un postre y una bebida?

Solución: 3 x 5 x 4 x 4 = 240

Ilustremos el principio de la Multiplicación con un diagrama de árbol.

Ejemplo 3.3 ¿De cuántas formas podemos clasificar una persona a la cual se le hace una encuesta en relación al sexo (F, M), estado civil (S, C, V, D, UL) y estatura (Bajo, mediano, alto).

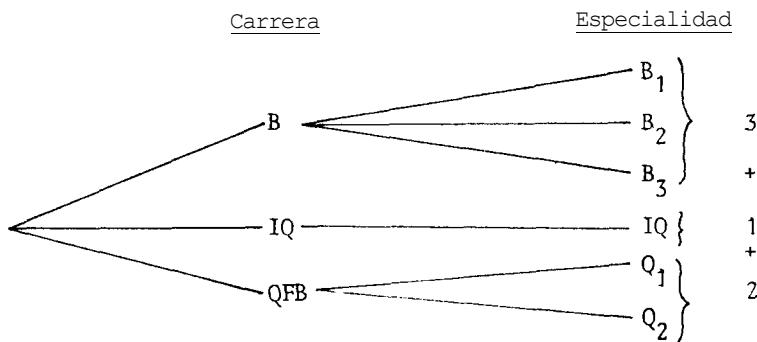


Observación: En un diagrama de árbol, construido de izquierda a derecha, si contamos horizontalmente, se multiplica y si contamos verticalmente, se suma.

PRINCIPIO DE LA ADICION:

Consideremos ahora otro ejemplo; Un estudiante del Tronco Común de la E.N.E.P. Zaragoza Campo II debe decidir por una de las tres carreras que se ofrecen (B, IQ y QFB) dentro de la carrera de Biología se ofrecen tres especialidades (B_1 , B_2 , B_3), en Ingeniería Química solo una y en QFB dos (Q_1 , Q_2).

¿De cuántas formas puede elegir una especialidad?



Aquí vemos que no es posible usar el Principio de la Multiplicación puesto que el número de especialidades es diferente para cada carrera, por lo que solo podemos sumar verticalmente; esto se puede enunciar como el Principio de la Adición.

"Si los procesos p_1 , p_2 , ..., p_n se pueden realizar de n_1 , n_2 , ..., n_n formas diferentes, entonces el proceso ($p_1 \circ p_2 \circ \dots \circ p_n$) se puede realizar de $n_1 + n_2 + \dots + n_n$ formas diferentes".

FACTORIAL DE UN NUMERO ENTERO POSITIVO:

El producto de los n primeros enteros positivos consecutivos es llamado n -factorial o el factorial de n y se denota por $n!$. Si $n = 0$, entonces $0! = 1$. Por lo tanto:

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots(3)(2)(1) \quad \text{ó}$$

$$n! = (1)(2)(3)\dots(n-2)(n-1)(n)$$

En particular:

$$2! = 2 \times 1 = 2$$

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

$$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$$

Obsérvese que:

$$8! = 8 \times 7!$$

$$7! = 7 \times 6!$$

$$200! = (200) (199) !$$

En general: $n! = n (n-1)!$

3.3 PERMUTACIONES

En esta sección, usaremos el Principio de la Multiplicación para hallar fórmulas generales que permitan calcular el número de permutaciones con y sin repetición de n elementos tomando todos a la vez o parte de ellos de cada vez; para ello partiremos de ejemplos y obtendremos las fórmulas para cada caso.

PERMUTACIONES SIN REPETICION DE n ELEMENTOS TOMADOS TODOS

A LA VEZ:

Ejemplo 3.4: ¿De cuántas formas diferentes se pueden ordenar las letras de la palabra IMPUREZA?

Solución: Puesto que tenemos ocho letras diferentes y las vamos a ordenar en diferentes formas, tendremos 8 posibilidades de escoger la primera letra para nuestro arreglo, una vez usada una, nos quedan 7 posibilidades de escoger una segunda letra y una vez que hayamos usado dos, nos quedan 6, así sucesivamente hasta agotarlas, en total tenemos:

$$\underline{8} \times \underline{7} \times \underline{6} \times \underline{5} \times \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} \times \underline{1} = 8! = 40320$$

Analizando el ejemplo anterior podemos definir las permutaciones[†] u ordenaciones sin repetición de n elementos tomados todos a la vez, de la siguiente forma;

"Las ordenaciones o permutaciones sin repetición de n elementos tomados todos a la vez es $n!$ Estas se simbolizan por

$$n_0_n = n! \quad ; \quad n_{p_n} = n!$$

Ejemplo 3.5 ¿ De cuántas formas se pueden colocar 5 libros diferentes en un anaquel?

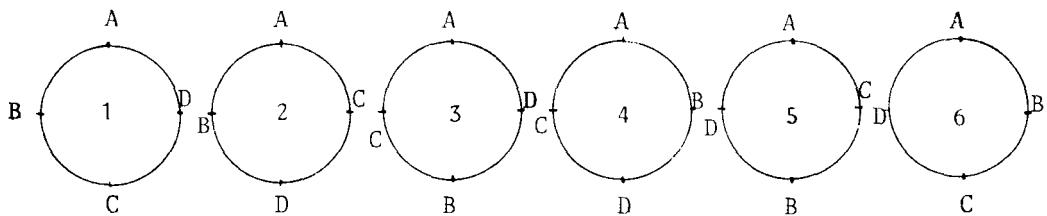
Solución 5 !

PERMUTACIONES CIRCULARES

Ahora estudiaremos algunos ejemplos de arreglos circulares, sabemos que si queremos sentar a 4 personas, una al lado de la otra en fila, el número de arreglos que podemos hacer es $4!$; ahora bien, si las queremos sentar alrededor de una mesa circular, ¿ de cuántas formas lo podemos hacer?

† Algunos autores establecen la diferencia entre ordenaciones o variaciones y las permutaciones; siendo las ordenaciones o variaciones aquellos arreglos donde todos los elementos son diferentes y se toman todos a la vez; mientras que en las permutaciones los elementos pueden estar repetidos y se pueden tomar solo parte de ellos, Nosotros no estaremos esta diferencia.

Observemos los siguientes arreglos:



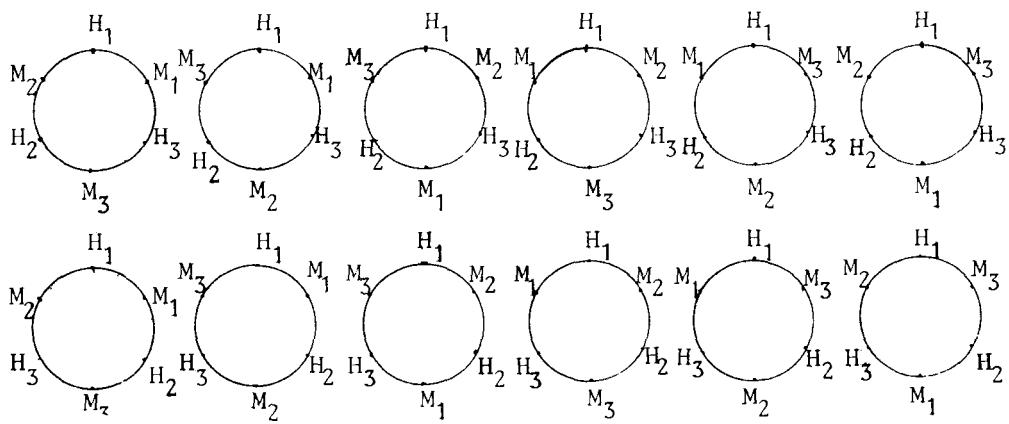
Por cada una de las permutaciones o arreglos circulares tenemos 4 de ellos diferentes en fila; esto es, el arreglo circular 1 puede leerse en sentido contrario a las agujas del reloj de las siguientes formas: ABCD, BCDA, CDAB y DABC, que son 4 arreglos diferentes si fueran en fila; pero es un solo arreglo circular. Entonces, en vez de tener $4!$ que es el número de arreglos en fila, tenemos solamente $\frac{4!}{4} = \frac{4 \times 3!}{4} = 3!$

En consecuencia, "el número de permutaciones circulares de n elementos tomados todos a la vez es $(n-1)!$ " y lo denotaremos por

$$P_{cir,n} = (n-1)!$$

Ejemplo 3.6: ¿De cuántas formas se pueden sentar 3 parejas de casados alrededor de una mesa circular, si no debe haber dos mujeres juntas ni dos hombres juntos?

Solución: $2! \times 3! = 2 \times 6 = 12$



El número de formas en que podemos sentar a los 3 hombres alrededor de una mesa circular, dejando un lugar en medio es $2!$. Obsérvese que en el primer renglón de círculos, los seis arreglos diferentes tienen a $H_1H_2H_3$ siempre en la misma posición; y en el segundo renglón, los seis arreglos tienen a $H_3H_1H_2$ siempre en la misma posición; por ello, son solo dos arreglos de los tres hombres, y una vez sentados los hombres, dejando un lugar en medio, hay $3! = 6$ formas de sentar a las tres mujeres por cada uno de los dos arreglos de hombres; quedando así en forma alternada.

PERMUTACIONES SIN REPETICION DE n ELEMENTOS TOMADOS DE r EN r
 $(r \leq n)$

Ejemplo 3.7 ¿De cuántas formas diferentes se pueden sentar 6 alumnos en un salón de clase con 25 pupitres?

Solución: El primer estudiante puede elegir entre 25 lugares, el segundo tendrá 24 lugares a escoger, el tercero 23, así sucesivamente; por lo tanto el número de arreglos sin repetición de 25 elementos tomados de 6 en 6 es:

$$\underline{25} \times \underline{24} \times \underline{23} \times \underline{22} \times \underline{21} \times \underline{20}$$

Esto se simboliza por ${}^{25}P_6 = 25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 \times 20$

Ejemplo 3.8 ¿Cuántos números de 2 cifras sin repetición se pueden formar con los dígitos 8,2,5,4,7 ?

Solución: ${}^5P_2 = 5 \times 4 = 20$

Observemos que: ${}^6P_4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3$

$${}^8P_3 = 8 \times 7 \times 6$$

Esto puede establecerse de manera general:

"Las permutaciones sin repetición de n elementos tomados de r en r , denotadas por nP_r , son iguales a:

$${}^nP_r = n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1) "$$

Regresando al ejemplo 3.7, donde

$${}^{25}P_6 = 25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 \times 20$$

Para que aparezca $25!$, tenemos que multiplicar por $19!$ pero, para que la igualdad no se altere tenemos que dividir por $19!$, por lo tanto

$${}^{25}P_6 = \frac{25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 \times 20 \times 19!}{19!}$$

$$\text{Pero, } 19! = (25-6)! , \text{ de donde: } {}^{25}P_6 = \frac{25!}{(25-6)!}$$

En general en la fórmula:

$${}^n P_r = n (n-1) (n-2) \dots (n-r+1)$$

para que aparezca $n!$ en el numerador, necesitamos multiplicar por $(n-r) (n-r-1) \dots (3) (2) (1)$ y para que no se altere la igualdad debemos dividir entre $(n-r) (n-r-1) \dots (3) (2) (1) = (n-r)!$, de modo que

$${}^n P_r = n (n-1) (n-2) \dots (n-r+1) \frac{(n-r) (n-r-1) \dots (3) (2) (1)}{(n-r) (n-r-1) \dots (3) (2) (1)}$$

$${}^n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

PERMUTACIONES CON REPETICION DE n ELEMENTOS TOMADOS DE r EN r

$(r < n, r > n, r = n)$

Veamos otra aplicación del principio de la multiplicación. Supongamos que tenemos 20 niños de un grupo de Pre-escolar y 10 sabores de helados disponibles. ¿De cuántas formas diferentes podemos servir un helado a los 20 niños?

Al primer niño le podemos servir uno de los 10 sabores, al segundo niño también le podemos servir de los 10 sabores, al tercero también y así sucesivamente, a cada uno de los 20 niños le podemos servir de los 10 sabores, por lo que

$$\underbrace{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times \dots \times 10}_{20 \text{ niños}} = 10^{20}$$

En general, "el número de permutaciones con repetición de n elementos tomados de r en r ($r \leq n$ ó $r > n$) es n^r , y las denotaremos por

$$n_{P_r}^r = n^r$$

Ejemplo 3.9: ¿De cuántas formas podemos contestar un examen de 12 preguntas de selección múltiple, si cada pregunta tiene 5 alternativas de respuesta?

Solución: Para responder la primera pregunta, tenemos 5 alternativas, para responder la segunda pregunta también tenemos 5 alternativas, asimismo para la tercera, cuarta, etc., entonces en total tenemos

$$\underbrace{5 \times 5 \times 5 \times \dots \times 5}_{12 \text{ preguntas}} = 5^{12} = 5_{P_{12}}^r$$

Ejemplo 3.10: ¿Cuántos números de tres cifras con repetición se pueden formar usando todos los siguientes dígitos 7, 4, 8, 5, 3 ?

$$5_{P_3}^r = 5^3$$

Ejemplo 3.11: Queremos abrir un candado de combinación de 4 anillos, cada uno marcado con los dígitos 1, 2, 3, 4, y 5; pero no sabemos cual es la combinación correcta, cuál es el número máximo de intentos incorrectos que podemos realizar antes de encontrar la correcta?

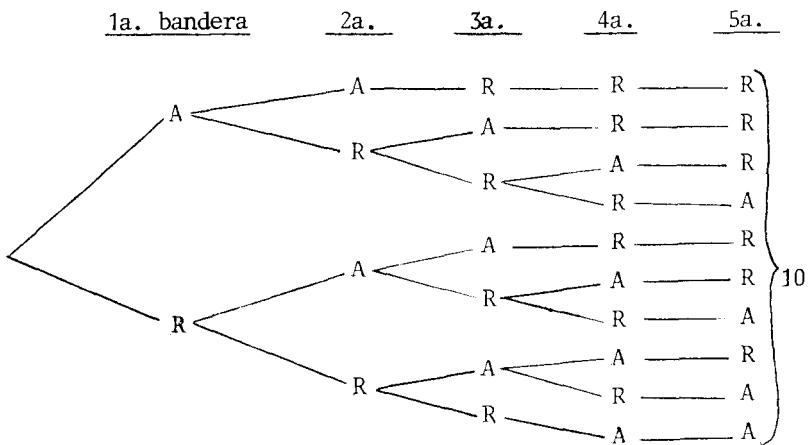
Solución: En cada uno de los 4 anillos pueden ponerse los 5 dígitos. Así que $n = 5$ y $r = 4$, por lo que el número total de posiciones es $5_{P_4}^r = 5^4 = 625$. Pero como una de estas 625 es la correcta, el número máximo de intentos incorrectos es 624.

PERMUTACIONES DE n ELEMENTOS DE LOS CUALES p_1 SON DE UN TIPO,
 p_2 SON DE OTRO TIPO, p_k SON DE OTRO TIPO, DONDE $p_1 + p_2 + p_3 +$
 $\dots + p_k = n$

Ejemplo 3.12: ¿Cuántas señales diferentes se pueden hacer con 5 banderas de las cuales 2 son amarillas y 3 son rojas?

Solución: Si las 5 banderas fueran todas diferentes tendríamos $5! = 120$ señales distintas; pero como 2 son de un color y 3 son de otro, entonces tendremos un número X de arreglos que será menor que $5!$. Ahora bien, si las 2 amarillas fueran diferentes, tendríamos $2!$ formas de colocarlas y por el principio de la multiplicación los X arreglos deberían multiplicarse por $2!$ para tener un total de $X \times 2!$. Asimismo si las 3 rojas fuesen diferentes tendríamos $3!$ formas de acomodarlas, y en total habría $X \times 2! \times 3!$ señales con todas las banderas diferentes y este número debería ser igual a $5!$ es decir, $X \times 2! \times 3! = 5!$; despejando X :

Veamos esto en un diagrama de árbol:



Las 10 señales son: AARRR, ARARR, ARRAR, ARRAA, RAARR, RARAR, RARRA, RRAAR, RRARA, RRRAA.

De esta manera: "Las permutaciones de n elementos de los cuales p_1 son de un tipo, p_2 de otro tipo , p_k de otro tipo; donde $p_1 + p_2 + \dots + p_k = n$ se denota por:

$$\frac{n!}{p_1! p_2! \dots p_k!} "$$

Ejemplo 3.13: Doce estudiantes van a ir a Veracruz en tres carros, 3 estudiantes en un carro, 4 en el carro 2 y 5 en el carro 3. ¿De cuántas formas se pueden acomodar, si cualquiera puede conducir?

Solución Aquí $n = 12$, $p_1 = 3$, $p_2 = 4$, $p_3 = 5$, por consiguiente

$${}^{12}P_{3,4,5} = \frac{12!}{3!4!5!}$$

RESUMEN DE LAS PERMUTACIONES

DESCRIPCION	FORMULA
Permutaciones sin repetición de n elementos tomados todos a la vez	${}^n P_n = n!$
Permutaciones circulares de n elementos	$P_{cir,n} = (n-1)!$
Permutaciones sin repetición de n elementos tomados de r en r	${}^n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$
Permutaciones con repetición de n elementos tomados de r en r	${}^n P_r' = n^r$
Permutaciones de n elementos de los cuales p_1 son de un tipo, p_2 de otro tipo, ..., p_k de otro tipo.	$\frac{n!}{p_1! p_2! \dots p_k!}$

3,4 COMBINACIONES

En la sección anterior obtuvimos fórmula? que nos permiten calcular las permutaciones o arreglos u ordenaciones de n objetos con y sin repetición, considerando todos o parte de los n objetos. Todos los casos estudiados tiene algo en común, el orden; es decir, en las permutaciones el orden es el factor primordial; ahora nos ocuparemos de las llamadas combinaciones. Cuando hablamos de combinaciones el orden no es factor que nos interese; así por ejemplo, cuando formamos el conjunto cuyos elementos son a , b y c no nos interesa en qué orden escribimos sus elementos; es decir, los conjuntos.

$\{a, b, c\}$, $\{a, c, b\}$, $\{b, c, a\}$, $\{b, a, c\}$, $\{c, a, b\}$ y $\{c, b, a\}$ son todos iguales. Esto es, lo que serían 6 permutaciones diferentes de 3 elementos tomados todos a la vez constituye una sola combinación.

Analicemos otro problema, en el juego de poker se dan 5 cartas a cada jugador de un paquete de 52 cartas, al jugador no le interesa en qué orden le dan las 5 cartas o que le dieron primero o después, ya que él las puede acomodar como le guste. Aquí tenemos entonces, un problema de combinaciones. Las combinaciones de n elementos tomados de r en r se denotan por nC_r o $(\frac{n}{r})$

Ejemplo 3.14: ¿Cuántos helados de dos sabores diferentes nos pueden servir en una heladería que tiene el siguiente surtido de sabores: chocolate, vainilla, mamey, fresa, mango y coco?

Solución: Si nos importara el orden sería ${}^6P_2 = \frac{6!}{4!} = 30$. Pero, como un helado de vainilla con fresa o fresa con vainilla son iguales, por cada dos permutaciones tenemos una combinación.

$${}^6C_2 = \frac{{}^6P_2}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

Ejemplo 3.15: ¿De cuántas formas podemos elegir 3 profesores de la Sección de Matemáticas que tiene 14 profesores de Bioestadística para formar una comisión para la elaboración de un examen departamental?

Solución: Si la comisión formada por los profesores ABC fuese diferente a la formada por los profesores BCA, ACB, BAC, CAB y CBA; tendríamos un problema de permutaciones de 14 elementos tomados de 3 en 3

${}^{14}P_3 = \frac{14!}{11!} = 2184$. Pero como los 6 arreglos (ABC, ACB, BCA, BAC, CBA y CAB) constituyen la misma comisión, tendremos que

$${}^{14}C_3 = \frac{{}^{14}P_3}{6} = \frac{2184}{6} = 364. \text{ ó } {}^{14}C_3 = \frac{{}^{14}P_3}{6} = \frac{\frac{14!}{(14-3)!}}{3!} = \frac{14!}{(14-3)! \cdot 3!}$$

De esta forma: "El número de combinaciones sin repetición de n elementos tomados de r en r ($r \leq n$) es igual al número de permutaciones sin repetición de n elementos tomados de r en r , dividido entre $r!$ "

$${}^nC_r = \frac{{}^nP_r}{r!} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

Ejemplo 3.16: Determine el número de subconjuntos de 0, 1, 2, 3, y 4 elementos del conjunto $A = \{a, b, c, d\}$

# de elementos del subconjunto	Subconjuntos	# de Subconjuntos
$r = 0$	\emptyset	$\left(\begin{array}{c} 4 \\ 0 \end{array}\right) = 1$
$r = 1$	$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$	$\left(\begin{array}{c} 4 \\ 1 \end{array}\right) = 4$
$r = 2$	$\{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}$ $\{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}$	$\left(\begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array}\right) = 6$
$r = 3$	$\{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}$ $\{b,c,d\}$	$\left(\begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array}\right) = 4$
$r = 4$	$\{a, b, c, d\}$	$\left(\begin{array}{c} 4 \\ 4 \end{array}\right) = 1$

PROPIEDADES DE LOS NUMEROS COMBINATORIOS*Proposición 3.1:*

1) $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$

2) $\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1}$

3) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

4) $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$

Demostración:

1) $\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)! 0!} = \frac{n!}{n! 0!} = \frac{1}{1} = 1$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)! n!} = \frac{n!}{0! n!} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{c.q.d.}$$

2) $\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)! 1!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)! 1!} = n$

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{[n-(n-1)]! (n-1)!} = \frac{n!}{(n-n+1)! (n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{1! (n-1)!} = n$$

3) $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! r!}$

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{[n-(n-r)]! (n-r)!} = \frac{n!}{(n-n+r)! (n-r)!} = \frac{n!}{r! (n-r)!}$$

4) $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$

$$\frac{n!}{[n-(r-1)]! (r-1)!} + \frac{n!}{(n-r)! r!} = ? \quad \frac{(n+1)!}{(n+1-r)! r!}$$

Trabajando con el lado izquierdo solamente,

$$\frac{n!}{(n-r+1)! (r-1)!} + \frac{n!}{(n-r)! r!} = ?$$

$$\frac{n! r + n! (n-r+1)}{(n-r+1)! r!} = ?$$

$$\frac{n! [r + (n-r+1)]}{(n-r+1)! r!} = ?$$

$$\frac{n! (r+n-r+1)}{(n-r+1)! r!} = ?$$

$$\frac{n! (n+1)}{(n-r+1)! r!} = ?$$

$$\frac{(n+1)!}{(n-r+1)! r!} = \frac{(n+1)!}{(n-r+1)! r!}$$

Ejemplo 3.17: ¿Cuántas manos de poker contienen

- exactamente un par?
- exactamente un full (3 de una denominación y dos de otra)?
- exactamente un as?

Solución: a) $\binom{13}{1} \binom{4}{2} \binom{12}{3} \binom{4}{1} \binom{4}{1} \binom{4}{1} = 1,098,240$

b) $13 \binom{4}{2} 12 \binom{4}{3} = 3,744$

c) $\binom{4}{1} \binom{48}{4} = 778,320$

COMBINACIONES CON REPETICIÓN

Cuando se desean incluir las combinaciones con repetición usamos la fórmula $nC_r^1 = \binom{n+r-1}{r}$

Limpio 3.18: ¿De cuántas formas podemos pedir que nos sirvan un cono de helado con dos "bolitas" diferentes o iguales si en la heladería hay 5 sabores: chocolate, vainilla, fresa, naranja y limón?

Solución: $5C_2^1 = \binom{5+2-1}{2} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{4! 2!} = 15$

Estas son: {(ch, ch); (ch, v); (ch, f); (ch, n); (ch, l); (v, v); (v, f); (v, n); (v, l); (f, f); (f, n); (f, l); (n, n); (n, l); (l, l)}.

COMPARACION ENTRE PERMUTACIONES Y COMBINACIONESPERMUTACIONESCOMBINACIONESSin repetición

$$n_p^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$n_C^r = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

Seleccionar 3 colores sin repetición de los colores siguientes:

ROJO, AZUL, VERDE Y BLANCO.

RAV, RVA, AVR, ARV, VAR, VRA

RAB, RBA, ABR, ARB, BAR, BRA

RVB, RBV, VBR, VRB, BVR, BRV

AVB, ABV, VBA, VAB, BVA, BAV

RAV

RAB

RVB

AVB

$$4P_3 = \frac{4!}{1!} = 4! = 24$$

$$4C_3 = \frac{4!}{3! 1!} = 4$$

Con repetición

$$n_{P'}^r = n^r$$

$$n_{C'}^r = \binom{n+r-1}{r}$$

Seleccionar dos colores con repetición de los 4 siguientes: ROJO, AZUL, VERDE y BLANCO.

RR, AA, W, BB

RA, AR, VA, BA

RV, AV, VR, BR

RB, AB, VB, BV

RR, AA, W, BB

RA, AV, VB

RV, AB

RB

$$4P_2' = 4^2 = 16$$

$$4C_2' = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{3! 2!} = 10$$

3.5 DESARROLLO DEL BINOMIO:

Una de las aplicaciones más usadas de las combinaciones es el desarrollo del Binomio de Newton. Los números combinatorios $\binom{n}{r}$ son llamados también coeficientes binomiales por el papel que juegan en el desarrollo del binomio:

$$(a + b)^n , \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

Sabemos que:

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b) = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Hagamos algunas observaciones acerca de estos desarrollos:

- 1) En el desarrollo $(a + b)$ hay $(n + 1)$ términos.
- 2) Los exponentes de " a " disimiluyen de 1 en 1 desde n hasta 0.
- 3) Los exponentes de " b " aumentan de 1 en 1 comenzando en 0 hasta n .
- 4) La suma de los exponentes de a y b en cada uno de los términos es igual a " n ".
- 5) Los coeficientes del primero y último términos son ambos igual a 1.
- 6) Los coeficientes del segundo y del penúltimo término son ambos iguales a n .
- 7) Los coeficientes de los términos son simétricos respecto del término central (si n es par) o respecto de los dos términos centrales (si n es impar).

Considerando todas las observaciones anteriores, los $(n + 1)$ términos del desarrollo $(a + b)^n$ sin sus coeficientes son:

$$a^n, a^{n-1}b, a^{n-2}b^2, a^{n-3}b^3, \dots, a^{n-r}b^r, \dots, ab^{n-1}, b^n$$

Si multiplicamos $(a+b)(a+b)(a+b) = (a+b)^3$, obtenemos

$$aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb$$

1 término con 3 "a" y 0 "b"

3 términos con 2 "a" y 1 "b"

3 términos con 1 "a" y 2 "b"

1 término con 0 "a" y 3 "b"

Si consideramos el número de "b" en cada término del producto de los tres factores $(a+b)(a+b)(a+b)$, hay

$\binom{3}{0} = 1$ (un término con cero "b"),

$\binom{3}{1} = 3$ (tres términos con una "b"),

$\binom{3}{2} = 3$ (tres términos con dos "b") y

$\binom{3}{3} = 1$ (un término con tres "b").

$$\begin{aligned} \text{Por lo tanto } (a+b)^3 &= \binom{3}{0}a^3b^0 + \binom{3}{1}a^2b^1 + \binom{3}{2}a^1b^2 + \binom{3}{3}a^0b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

En general, los coeficientes de $(a+b)^n$ son

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{r}, \dots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$$

De donde:

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \underbrace{\binom{n}{0}a^n}_{T_1} + \underbrace{\binom{n}{1}a^{n-1}b}_{T_2} + \underbrace{\binom{n}{2}a^{n-2}b^2}_{T_3} + \dots + \underbrace{\binom{n}{r}a^{n-r}b^r}_{T_{r+1}} + \dots + \underbrace{\binom{n}{n-1}ab^{n-1}}_{T_n} \\ &\quad + \underbrace{\binom{n}{n}b^n}_{T_{n+1}} \end{aligned}$$

En consecuencia podemos escribir el término general como :

$$T_{r+1} = \binom{n}{r}a^{n-r}b^r.$$

Ejemplo 3.19: Desarrollar $(1 + b)^n$

Solución:
$$(1+b)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}b + \binom{n}{2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$
$$= 1 + nb + \binom{n}{2}b^2 + \dots + n b^{n-1} + b^n$$

Ejemplo 3.20: Desarrollar $(1 + 1)^n$

Solución:
$$(1 + 1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$
$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

Ejemplo 3.21: Sin desarrollar, hallar el octavo término del desarrollo $(2x-y)^{11}$.

Solución: Usando la formula del término general.

$$T_{r+1} = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r, \text{ con } n = 11 \text{ y } r + 1 = 8, \text{ a} = 2x \text{ y } b = -y$$
$$T_8 = \binom{11}{7} (2x)^4 (-y)^7 = 330 (2)^4 x^4 (-1)^7 (y)^7 = -5280 x^4 y^7$$

Ejemplo 3.22: Hallar el término independiente de x en el desarrollo de $(2x^2 - \frac{1}{x})^{12}$

Solución:
$$T_{r+1} = \binom{12}{r} (2x^2)^{12-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r = \binom{12}{r} 2^{12-r} x^{24-2r} (-1)^r (x^{-1})^r$$
$$= \binom{12}{r} 2^{12-r} (-1)^r x^{24-3r}$$

Como queremos el término independiente de x , el exponente de x debe ser cero; por lo tanto, $24-3r = 0 \iff 3r = 24 \iff r = 8$

Por consiguiente, el término independiente de x es

$$T_9 = \binom{12}{8} 2^4 (-1)^8 x^0 = (495)(16)(1) x^0 = 7920 x^0 = 7920.$$

3.6 CONCEPTOS BASICOS EN LA PROBABILIDAD

3.6.1 EXPERIMENTO Y ENSAYO:

Un experimento aleatorio es un proceso que tiene las siguientes propiedades:

- 1) El proceso se efectúa de acuerdo a un conjunto bien definido de reglas.
- 2) Es de naturaleza tal que se repite o puede concebirse la repetición del mismo.
- 3) El resultado de cada ejecución depende de "*la casualidad*" y, por lo tanto, no se puede predecir un resultado único.

Una sola ejecución del experimento se llama *ENSAYO*.

3.6.2 ESPAZIO MUESTRA Y EVENTO

Al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento se llama *ESPAZIO MUESTRA* o *ESPAZIO MUESTRAL*, del experimento, y se denota por S . A cada resultado del experimento se le llama elemento o punto de S . Se dice que un espacio muestra es finito o infinito, cuando el conjunto S tiene un número finito o infinito de elementos, respectivamente.

En muchos problemas prácticos no estamos tan interesados en los resultados individuales, del experimento sino en el hecho de que un resultado se encuentre contenido en un cierto conjunto de resultados. Es claro que cada conjunto de este tipo es un subconjunto del espacio muestra S . Este -- subconjunto se llama *EVENTO*.

3.6.3 EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUSIVOS:

Dos eventos A y B que no ocurren simultáneamente o que no tienen elementos en común, es decir $A \cap B = \emptyset$ se les llama eventos mutuamente exclusivos o mutuamente excluyentes.

3.6.4 EVENTOS COMPLEMENTARIOS:

Dos eventos A y B son complementarios si $A \cup B = S$ y $A \cap B = \emptyset$, y a B se le denota por \bar{A} .

Ejemplo 3.23: Sea el experimento de sacar dos fusibles ambos a la vez de una caja que contiene 5 fusibles (supongamos que están marcados con las letras a, b, c, d, y e) y de los cuales 3 están defectuosos (supongamos que los defectuosos son b, c, y d).

El espacio muestra es el conjunto de las formas en que se pueden sacar dos fusibles de los cinco.

$$S = \{ab, ac, ad, ae, be, bd, be, cd, ce, de\}$$

$$n(S) = \binom{5}{2} = 10$$

Algunos eventos son:

- 1) El evento A en que ninguno de los dos fusibles sean defectuosos.
- 2) El evento B, en que uno de los dos fusibles es defectuoso.
- 3) El evento C, en que uno o más fusibles son defectuosos
- 4) El evento D, en que los dos fusibles son defectuosos

Estos se pueden escribir así:

$$A = \{ae\}$$

$$B = \{ab, ac, ad, be, ce, de\}$$

$$C = \{ab, ac, ad, be, bd, be, cd, ce, de\}$$

$$D = \{be, bd, cd\}$$

Los eventos A y B; A y D; B y D; A y C son mutuamente exclusivos, es decir, $A \cap B = \emptyset$; $A \cap D = \emptyset$; $B \cap D = \emptyset$ y $A \cap C = \emptyset$.

Los eventos A y C son además complementarios, o sea, $A \cap C = \emptyset$ y $A \cup C = S$.

3.7 DEFINICIONES DE PROBABILIDAD:

Antes de profundizar en la forma como se utilizan las probabilidades, es necesario conocer de cierta manera de donde provienen. Hay tres formas de calcular o estimar la probabilidad. El enfoque clásico o "*a priori*" proveniente de los juegos de azar o definición clásica de Laplace que se emplea cuando los espacios muestrales son finitos y tienen resultados igualmente probables; la definición empírica, "*a posteriori*" o frecuencial que se basa en la frecuencia relativa de ocurrencia de un evento con respecto a un gran número de ensayos repetidos y por último la definición de Kolmogorov o definición axiomática o matemática de la probabilidad.

Seleccionar uno de los tres enfoques dependerá de la naturaleza del problema.

3.7.1 DEFINICION CLASICA DE LAPLACE O "A PRIORI"

Esta definición es de uso limitado puesto que descansa sobre la base de las dos siguientes condiciones:

- i) El espacio muestra de todos los resultados posibles S es finito.
- ii) Los resultados del espacio muestra deben ser igualmente probables.

Bajo estas condiciones y si A es el evento formado por $n(A)$ resultados del espacio muestra y, el número total de resultados posibles es $n(S)$, entonces $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

Ejemplo 3.24: Si se saca una carta de un paquete de 52 cartas de las cuales 26 son negras: 13 espadas A, 2, 3, ..., 10, J, Q, K; y 13 son tréboles; y 26 son rojas: (13 corazones y 13 diamantes), la probabilidad de que la carta sea un as es $\frac{4}{52} = 0.0769$, porque el evento de "sacar un as" consta de 4 de los 52 resultados igualmente probables. La proba-

bilidad de que la carta sea negra es $\frac{26}{52}$ y la probabilidad de que sea un diamante es $\frac{13}{52}$

Ejemplo 3.25: Al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número par?

$$\underline{\text{Solución:}} \quad P(\text{un número par}) = \frac{3}{6} = 0.50$$

Ejemplo 3.26: ¿Cuál es la probabilidad de que una familia que tiene tres hijos, hayan dos mujeres y un varón, si se considera igualmente probable el nacimiento de un niño o niña?

Solución: $S = \{\text{MMM}, \text{MMV}, \text{MM}, \text{MVV}, \text{VMM}, \text{VMV}, \text{VVM}, \text{VVV}\}$

$$n(S) = 8$$

El evento A en que hayan dos mujeres y un varón

$$A = \{\text{MMV}, \text{MM}, \text{VMM}\}$$

$$n(A) = 3$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{8} = 0.3750$$

Cabe señalar que $0 \leq P(A) \leq 1$, puesto que $0 \leq n(A) \leq n(S)$.

3.7.2 DEFINICION EMPIRICA, "A POSTERIORI" O FRECUENCIAL:

La definición clásica se ve limitada a situaciones en las que hay un número finito de resultados igualmente probables. Por desgracia, hay problemas prácticos que no son de este tipo y la definición de Laplace no se puede aplicar. Por ejemplo, si se pregunta por la probabilidad de que un paciente sea curado mediante cierto tratamiento médico, o la probabilidad de que una determinada máquina produzca artículos defectuosos, entonces no hay forma de introducir resultados igualmente probables. Por ello se necesita un concepto más general de probabilidad. Una forma de dar respuesta a estas preguntas es obtener algunos datos empíricos en un intento por estimar las

probabilidades. Supongamos que efectuamos un experimento n veces y que en esta serie de n ensayos el evento A ocurre exactamente r veces, entonces la frecuencia relativa del evento es $\frac{r}{n}$, o sea, $f_r(E) = f(E) = \frac{r}{n}$.

Si continuamos calculando esta frecuencia relativa cada cierto número de ensayos, a medida que aumentamos n , las frecuencias relativas correspondientes serán más estables; es decir; tienden a ser casi las mismas; en este caso decimos que el experimento muestra regularidad estadística, o estabilidad de las frecuencias relativas. Esto se ilustra en la siguiente tabla, de una moneda lanzada al aire 1000 veces.

número de lanzamiento	número de caras	Frecuencia relativa	Frecuencia acumulada	Frecuencia acumulada relativa
1 - 100	52	0.52	52	0.520
101 - 200	53	0.53	105	0.525
201 - 300	52	0.52	157	0.523
301 - 400	47	0.47	204	0.510
401 - 500	51	0.51	255	0.510
501 - 600	53	0.53	308	0.513
601 - 700	48	0.48	356	0.509
701 - 800	46	0.46	402	0.503
801 - 900	52	0.52	454	0.504
901 - 1000	54	0.54	508	0.508
TOTAL : 100C	508	0.508		

En un total de 1000 lanzamientos ocurrieron 508 caras, es decir la frecuencia relativa es aproximadamente 0.5.

Experimentos hechos por 3 investigadores obtuvieron:

HECHO POR	NUMERO DE LANZAMIENTOS	NUMERO DE CARAS	FRECUENCIA RELATIVA DE CARAS
BUFFON	4040	2048	0.5069
K. PEARSON	12000	6019	0.5016
K. PEARSON	24000	12012	0.5005

La gran mayoría de experimentos aleatorios de importancia práctica tienen estabilidad, por esto podemos sospechar que prácticamente será cierto que la frecuencia relativa de un evento E en un gran número de ensayos es aproximadamente igual a un determinado número $P(E)$, o sea, la probabilidad del evento E es $P(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r}{n}$

Obsérvese que este número no es una propiedad que depende solamente de E, sino que se refiere a un cierto espacio muestra S y a un experimento aleatorio. Entonces, decir que el evento E tiene probabilidad $P(E)$ significa que si efectuamos el experimento muchas veces, es prácticamente cierto que la frecuencia relativa de E, $\tilde{f}(E)$ es aproximadamente igual a $P(E)$.

Cuando se usa la definición frecuencial, es importante tomar en cuenta los siguientes aspectos:

- i) La probabilidad obtenida de esta manera es únicamente una estimación del valor real.
- ii) Cuanto mayor sea el número de ensayos, tanto mejor será la estimación de la probabilidad; es decir, a mayor número de ensayos mejor será la estimación.
- iii) La probabilidad es propia de solo un conjunto de condiciones idénticas a aquéllas en las que se obtuvieron los datos, o sea, la validez de emplear esta definición depende de que las condiciones en que se realizó el experimento sean repetidas idénticamente.

3.7.3 DEFINICION AXIOMATICA O MATEMATICA DE KOLMOGOROV:

Las definiciones anteriores son netamente empíricas o experimentales, sin embargo después de establecer una forma de determinar la probabilidad experimentalmente, se pueden deducir leyes o propiedades de la probabilidad en forma lógica o computacional bajo ciertas suposiciones llamados axiomas de la probabilidad.

La probabilidad de un evento A se define como el número $P(A)$, tal que cumple con los siguientes axiomas:

AXIOMA 1: La probabilidad $P(A)$ de cualquier evento no debe ser menor que cero ni mayor que uno

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

AXIOMA 2: $P(S) = 1$

AXIOMA 3: Si A y B son dos eventos mutuamente exclusivos
 $\{ (A \cap B) = \emptyset \}$, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Toda la teoría elemental de la probabilidad está construida sobre las bases de estos tres simples axiomas.

Si el espacio muestral es infinito, debemos reemplazar el axioma 3 por el AXIOMA 3*: Si A_1, A_2, \dots son eventos mutuamente exclusivos, entonces tenemos que $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$

3.8 DETERMINACION PRACTICA DE PROBABILIDADES:

La determinación práctica de probabilidades depende del problema que se presente, si tenemos un espacio muestra finito con resultados igualmente probables, utilizaremos el concepto clásico de probabilidad, ya que éste satisface los tres axiomas de la definición matemática de probabilidad.

Si la naturaleza del experimento no señala que el número finito de resultados tenga igual posibilidad de ocurrir, o si el espacio muestra no es finito y la naturaleza del experimento no indica como subdividir el espacio muestra en un número finito de eventos igualmente probables, se deben asignar probabilidades usando las frecuencias relativas que se observan en largas secuencias de ensayos. Esto se debe hacer de manera que los axiomas de la probabilidad se satisfagan. De esta manera obtenemos valores aproximados, pero esto no tiene importancia.

A veces la probabilidad del evento A se reporta como $P(A) \times 100$, que significa que cada 100 veces que se realice el experimento, $P(A) \times 100$

veces se verifica el, evento A, así por ejemplo, Si $P(A) = 0.25$, se puede decir que el evento A tiene una probabilidad de 25% o que el evento ocurre 25% de las veces.

3.9 PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD

Proposición 3.1: $P(\emptyset) = 0$

Demostración: Sabemos que $\emptyset \cup S = S$ y que $\emptyset \cap S = \emptyset$,

Por el axioma 3: $P(\emptyset \cup S) = P(\emptyset) + P(S)$

Despejando: $P(\emptyset) = P(S) - P(S) = 0$ c.q.d.

Proposición 3.2: (Regla de la adición para eventos mutuamente exclusivos).

Si A_1, A_2, \dots, A_r son eventos mutuamente exclusivos, entonces

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_r)$$

Demostración: Si $r = 1$, $P(A_1) = P(A_1)$

Si $r = 2$, $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$ Axioma 3

Si $r = 3$, aplicando el axioma 3, dos veces tenemos:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1 \cup (A_2 \cup A_3)) \\ &= P(A_1) + P(A_2 \cup A_3) \\ &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3). \end{aligned}$$

En general si agrupamos los eventos y luego aplicamos el axioma 3 repetidas veces, tenemos:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r) &= P(A_1 \cup (A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_r)) \\ &= P(A_1) + P(A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_r) \\ &= P(A_1) + P(A_2 \cup (A_3 \cup \dots \cup A_r)) \\ &= \dots \\ &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_r) \end{aligned}$$

Proposición 3.3: (Regla de la adición para eventos arbitrarios).

Si A y B son eventos cualesquiera del espacio muestra S, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Demostración: $A \cup B = (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$

Donde los tres conjuntos encerrados en paréntesis son mutuamente exclusivos, por lo tanto, por el axioma 3

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P[(A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (A^c \cap B)] \\ &= P(A \cap B^c) + P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \end{aligned}$$

$$\text{Pero } A = (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \quad \text{y} \quad B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B).$$

Aplicando el axioma 3 a A y a B, tenemos

$$P(A) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B) \quad \text{y} \quad P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$$

$$\text{Sumando: } P(A) + P(B) = \underbrace{P(A \cap B^c) + P(A \cap B)}_{P(A \cup B)} + P(A^c \cap B) + P(A \cap B)$$

$$\text{Por lo tanto } P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B)$$

$$\text{Despejando } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{c.q.d.}$$

Proposición 3.4: (Regla de la Complementación)

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Demostración: $A \cup A^c = S$ y $A \cap A^c = \emptyset$

$$P(A \cup A^c) = P(S) = 1 \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

$$\text{Por el axioma 3 } P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

$$\text{Igualando (1) con (2): } P(A) + P(A^c) = 1,$$

$$\text{De donde } P(A^c) = 1 - P(A) \quad \text{c.q.d.}$$

3.10 PROBABILIDAD CONDICIONAL:

En esta sección examinaremos como la probabilidad de ciertos eventos depende o se ve influenciada por la ocurrencia de otros. Para ello veremos algunos ejemplos.

Ejemplo 3.27: Se seleccionan dos semillas aleatoriamente, una por una, de una bolsa que contiene 10 semillas de flores rojas y 5 de flores blancas. ¿Cuál es la probabilidad de que:

- La primera semilla sea roja?
- La segunda semilla sea blanca si la primera fue roja?

Solución: a) La probabilidad de que la primera semilla sea roja es $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$. Puesto que hay 10 semillas de flores rojas en un total de 15; es decir $P(R_1) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

b) La probabilidad de que la segunda semilla sea blanca se ve influenciada por lo que salió primero, es decir esta probabilidad está sujeta a una condición, la de que la primera semilla sea roja. Este tipo de probabilidad se le llama probabilidad condicional y se denota por $P(B_2 | R_1)$, que se lee: la probabilidad de B_2 dado R_1 .

Esta probabilidad, $P(B_2 | R_1) = \frac{5}{14}$, puesto que todavía hay 5 semillas blancas en un total de 14 que quedan,

Veamos la situación en un diagrama de árbol:

1a. extracción

$$\begin{array}{c} \text{R}_1 \\ \swarrow \\ \text{B}_1 \end{array}$$

$$P(R_1) = \frac{10}{15}$$

$$P(B_1) = \frac{5}{15}$$

2a. extracción

$$\begin{array}{c} \text{R}_2 \\ \swarrow \\ \text{B}_2 \end{array}$$

$$P(R_2 | R_1) = \frac{9}{14}$$

$$P(B_2 | R_1) = \frac{5}{14}$$

$$\begin{array}{c} \text{R}_2 \\ \swarrow \\ \text{B}_2 \end{array}$$

$$P(R_2 | B_1) = \frac{10}{14}$$

$$P(B_2 | B_1) = \frac{4}{14}$$

Definición: Para dos eventos cualesquiera A y B en un espacio muestra S, tales que $P(A) > 0$ ($P(A) \neq 0$), la probabilidad del evento B dado el evento A, se define por $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$. Si $P(A) = 0$, no tiene sentido hablar de $P(B|A)$.

Ejemplo 3.28: Una persona lanza una moneda 3 veces, ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 águilas dado que salió por lo menos un águila?

Solución: El espacio muestra del experimento de lanzar una moneda 3 veces es

$$S = \{\text{aaa, aas, asa, ass, saa, sas, ssa, sss}\}$$

El evento A de que por lo menos salió un águila en los tres lanzamientos es:

$$A = \{\text{aaa, aas, asa, ass, saa, sas, ssa}\}$$

El evento B de que obtenga 3 águilas es

$$B = \{\text{aaa}\}$$

$$A \cap B = \{\text{aaa}\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

$$P(A) = \frac{7}{8}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{8}} = \frac{1}{7}$$

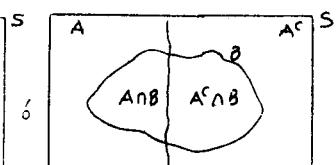
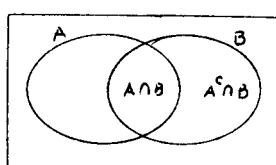
Nótese que $P(B|A) = \frac{1}{7}$ es la probabilidad de una ocurrencia en las 7 que son posibles en A; es decir, calcular la probabilidad condicional de B dado A es como calcular la probabilidad de B en relación al conjunto A, como si este fuera un nuevo espacio muestra $S^* = A$

Proposición: 3.5: Para dos eventos A y B cualesquiera del espacio muestra S, $P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(A^c) \cdot P(B|A^c)$

Demostración: Para cualquier evento B,

$$\begin{aligned} B &= B \cap S \\ &= B \cap (A \cup A^c) \\ &= (B \cap A) \cup (B \cap A^c) \end{aligned}$$

(Distributividad)



Como los eventos $(B \cap A)$ y $(B \cap A^c)$ son mutuamente exclusivos y su unión es B , por el axioma 3, tenemos:

De la definición de probabilidad condicional, tenemos

$$P(A \cap B) = P(A) P(B|A) \quad \text{and} \quad P(A^c \cap B) = P(A^c) P(B|A^c)$$

Sustituyendo en (1) $P(B) = P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c)$ c.q.d.

Obsérvese que en un diagrama de árbol si se multiplica

$$\begin{aligned} P(A) \cdot P(B|A) &= P(A \cap B) \quad y \\ P(A^C) \cdot P(B|A^C) &= P(A^C \cap B) \end{aligned} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{P(A)} A \xrightarrow{P(B|A)} B \rightarrow P(A \cap B) \\ \xrightarrow{P(A^C)} A^C \xrightarrow{P(B|A^C)} B \rightarrow P(A^C \cap B) \end{array}$$

Ejemplo 3.29: Consideremos dos cajas, la caja 1 contiene dos bolitas blancas y cuatro bolitas rojas y la caja 2 contiene 8 blancas y cuatro rojas. Se selecciona una caja al azar y luego se saca una bolita al azar. Hallar la probabilidad de que la bolita sea blanca.

Solución: Sea A el evento de seleccionar la caja 1 y A^C el evento de seleccionar la caja 2, entonces $P(A) = P(A^C) = \frac{1}{2}$. Sea B el evento de que salga una bolita blanca, entonces $P(B | A) = \frac{2}{6}$ y $P(B | A^C) = \frac{8}{12}$. Ahora bien, por la proposición 3.5 tenemos:

$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{12} = \frac{1}{2}$$

3.11 EVENTOS INDEPENDIENTES:

Cuando A y B son dos eventos con probabilidades positivas, hemos visto que en general la probabilidad condicional del evento B dado el evento A es diferente de la probabilidad del evento B. Sin embargo, cuando se tiene la igualdad: $P(B|A) = P(B)$ es de especial importancia porque esto quiere decir que el evento B no depende o es independiente del evento A. Es decir, no importa si ocurrió o no el evento A puesto que la ocurrencia o no ocurrencia de A no afecta al evento B.

Proposición: 3.6: Si B es independiente de A, entonces A es independiente de B.

Demostración: De la definición de probabilidad condicional se tiene

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{y} \quad P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\text{Despejando } P(A \cap B) = P(A|B) P(B) = P(A) P(B|A) \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{Como B es independiente de A, } P(B|A) = P(B)$$

Sustituyendo en (1)

$$P(A|B) P(B) = P(A) \cdot P(B)$$

∴ $P(A|B) = P(A)$ y A es independiente de B. c.q.d.

Proposición: 3.7: A y B son independientes si y solo si $P(A \cap B) = P(A) P(B)$

Demostración: Si A y B son independientes, entonces $P(B|A) = P(B)$ y
 $P(A|B) = P(A) \dots \dots \dots (1)$

De la definición de probabilidad condicional

$$P(B) P(A|B) = P(A \cap B) = P(A) P(B|A) \dots \dots \dots (2)$$

Sustituyendo (1) en (2) se tiene:

$$P(B) \cdot P(A) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Por otra parte si $P(A \cap B) = P(A) P(B)$, entonces

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B) \quad \text{y}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A).$$

De donde B es independiente de A y A es independiente de B. c.q.d.

Ejemplo 1:30: En una escuela el 20% de los alumnos tiene problemas visuales, el 8% problemas auditivos y el 4% tienen tanto problemas visuales como auditivos,

Sean: V los que tienen problemas visuales y V^c los que no lo tienen
 A los que tienen problemas auditivos y A^c los que no los tienen.

- a) ¿Son los dos eventos de tener problemas visuales y auditivos, eventos independientes?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que un niño tenga problemas auditivos si sabemos que tiene problemas visuales?
- c) Complete la siguiente tabla

	V	V^C	Total
A	0.04		0.08
A^C			
Total	0.20		1.00

- d) ¿Cuál es la probabilidad de que un niño no tenga problemas auditivos si tiene problemas visuales?

Solución:

a) $P(V) P(A) = (0.2) (0.08) = 0.016$
 $P(V \cap A) = 0.04$

Como $P(A \cap V) \neq P(A) P(V)$, A y V no son independientes.

b) $P(A|V) = \frac{P(A \cap V)}{P(V)} = \frac{0.04}{0.20} = 0.20$

c) Por diferencias podemos completar la tabla.

	V	V^C	Total
A	0.04	0.04	0.08
A^C	0.16	0.76	0.92
Total	0.20	0.80	1.00

d) $P(A^C | V) = \frac{P(A^C \cap V)}{P(V)} = \frac{0.16}{0.20} = 0.80$

PROBABILIDADES MARGINALES:

En el ejemplo anterior 3.30 las probabilidades totales; esto es, la probabilidad de que al elegir un niño al azar, éste tenga problemas visuales, $P(V) = 0.20$; y la probabilidad de que un niño elegido al azar no

tenga problemas auditivos, $P(A^C) = 0.92$; análogamente $P(V^c) = 0.08$ y $P(A) = 0.08$ se llaman probabilidades marginales.

3.12 REGLA DE BAYES:

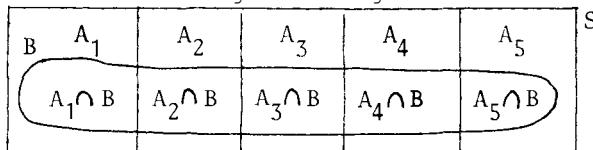
La regla de Bayes es un caso especial de la probabilidad condicional que se aplica cuando se desea calcular la probabilidad condicional de un evento que ocurrió primero dado lo que ocurrió después. Para llegar a establecer tan útil regla vamos a estudiar una proposición previa.

Proposición 3.8: Sean A_1, A_2, \dots, A_n una partición de S ($A_i \cap A_j = \emptyset$ $\forall i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j$ y $\bigcup_{i=1}^n A_i = S$).

Entonces para cualquier evento B se tiene que:

$$P(B) = P(A_1) P(B|A_1) + P(A_2) P(B|A_2) + \dots + P(A_n) P(B|A_n)$$

Demostración: Considerese el siguiente diagrama



$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap S) \\ &= P(B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)) \\ &= P((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)) \\ &\quad (\text{unión de eventos mutuamente exclusivos}) \\ &= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n) \\ &\quad (\text{Axioma 3}) \\ &= P(A_1) P(B|A_1) + P(A_2) P(B|A_2) + \dots + \\ &\quad P(A_n) P(B|A_n) \quad (\text{Usando la def. de Prob. Condicional}) \\ &= \sum_{i=1}^n P(A_i) P(B|A_i) \quad \text{c.q.d.} \end{aligned}$$

Proposición: 3.9: (REGLA DE RAYES)

Sean A_1, A_2, \dots, A_n una partición de S y B un evento cualquiera en S , entonces:

$$P(A_i | B) = \frac{\frac{P(A_i)}{n} P(B | A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) P(B | A_i)}$$

Demuestra: Por la propos. 3.8 $P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) P(B | A_i) \dots \dots \dots (1)$

Por la definición de probabilidad condicional se tiene:

$$P(B | A_i) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)} \iff P(B \cap A_i) = P(A_i) P(B | A_i), \text{ y} \dots \dots \dots (2)$$

$$P(A_i | B) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} \iff P(B \cap A_i) = P(B) P(A_i | B) \dots \dots \dots (3)$$

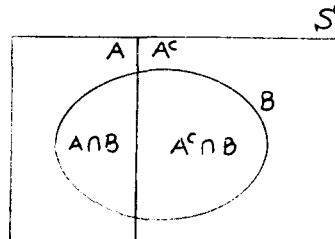
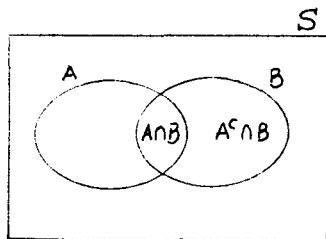
Igualando (2) y (3): $P(A_i) P(B | A_i) = P(B) P(A_i | B)$

De donde $P(A_i | B) = \frac{P(A_i) P(B | A_i)}{P(B)} \dots \dots \dots (4)$

sustituyendo (1) en (4) se tiene la fórmula deseada

COLORALIO: Si A y A^c son una partición de S y B es un evento cualquiera

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(A^c \cap B)} = \frac{P(A) P(B | A)}{P(A)P(B | A) + P(A^c)P(B | A^c)}$$



Ejemplo 3.31: Un ingeniero químico sabe que cuando se compran etiquetas a un proveedor A el número de etiquetas defectuosas y no defectuosas están en la relación 1:24; mientras que el proveedor B afirma que la probabilidad de encontrar una etiqueta no defectuosa en su compañía es de 9/10. Si se compra la misma cantidad de etiquetas a ambos proveedores:

- ¿Cuál es la probabilidad de que sea del proveedor B, si se encontró una defectuosa?
- ¿Cuál es la probabilidad de que sea del proveedor A, si se encontró que no es defectuosa?

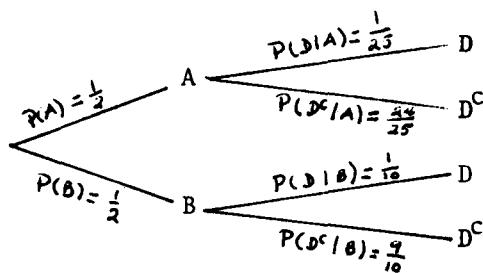
Solución: a) $P(B | D) = \frac{P(B) P(D | B)}{P(B)P(D|B) + P(A)P(D|A)} =$

$$\frac{\frac{1}{2} \frac{1}{10}}{\frac{1}{2} \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \frac{1}{25}} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{7}{100}} = \frac{10}{14} = 0.7143$$

b) $P(A | D^C) = \frac{P(A) P(D^C | A)}{P(A)P(D^C|A) + P(B)P(D^C|B)} =$

$$\frac{\frac{1}{2} \frac{24}{25}}{\frac{1}{2} \frac{24}{25} + \frac{1}{2} \frac{9}{10}} = \frac{\frac{24}{50}}{\frac{93}{100}} = \frac{48}{93} = 0.5161$$

Visto en un diagrama de árbol



E J E R C I C I O S

- 3.1.- ¿Cuantas placas de automóvil se pueden hacer usando 3 dígitos y 3 letras del abecedario? (considérese los dígitos del 0 al 9 y 26 letras).
- 3.2.- ¿De cuántas formas diferentes se puede sentar 5 parejas en 10 butacas en fila de un teatro de manera que no quede ninguna pareja separada.
- 3.3.- ¿Cuántos números se pueden formar usando todos los siguientes dígitos: 2, 4, 5, 7 y 9. a) si no se pueden repetir los dígitos? b) ¿Cuántos de estos números son múltiplos de 5? c) ¿Cuántos de ellos son mayores de 70,000? d) ¿Cuántos de ellos son menores de 50,000? e) ¿Cuántos de ellos son pares?
- 3.4.- Seis personas fueron invitadas a un banquete (mesa rectangular con capacidad para seis). ¿De cuántas formas diferentes pueden sentarse las seis personas si:
a) todas aceptaron la invitación?
b) dos de ellas no aceptaron la invitación?
- 3.5.- Simplificar las siguientes expresiones:
a) $\frac{12!}{5!}$ b) $n P_2$ c) $9 P_3$ d) $5 P_5$
- 3.6.- Resolver para n;
a) $n P_2 = 56$ b) $n P_3 = 20 n$ c) $n P_4 = 88 \left[(n-1) P_2 \right]$
- 3.7.- Demostrar cada una de las siguientes proposiciones:
a) $n P_r = n \left[n-1 P_{r-1} \right]$ b) $n P_r = (n-r+1) \left[n P_{r-1} \right]$
c) $n P_r = n-1 P_r + r \left[n-1 P_{r-1} \right]$
- 3.8.- ¿Cuántas "palabras" diferentes se pueden formar con las letras de:
a) ASIENTO b) GLOBO c) CENSO d) CONFERENCIA
e) MASSACHUSETTS f) MISSISSIPPI
- 3.9.- ¿Cuántos números de teléfono de 7 dígitos se pueden establecer si todos los dígitos se pueden utilizar con repetición pero no pueden comenzar con cero?

- 3.10.- Seis personas que van en un tour llegan a un hotel donde hay 6 cuartos uno a continuación del otro a lo largo de un corredor, los cuales serán asignados al azar a las 6 personas, 2 de ellas son conocidas de antemano.
- ¿De cuántas formas diferentes se pueden colocar las 6 personas en sus respectivos cuartos si las dos conocidas solicitaron estar en cuartos contiguos?
- 3.11.- Considérese una caja con 4 bolitas numeradas del 1 al 4. ¿De cuántas formas se pueden sacar 3 bolitas una por una, si:
- no se reemplazan en la caja las sacadas previamente?
 - se reemplazan en la caja las sacadas previamente?
- 3.12.- ¿De cuántas formas diferentes se pueden colocar 6 llaves en un llavero en forma de aro?
- 3.13.- Se desean sentar 5 señores y 5 señoritas alrededor de una mesa circular. ¿De cuántas formas pueden sentarse si no se pueden sentar dos damas una al lado de la otra?
- 3.14.- En un experimento psicológico de aprendizaje, una rata tiene la opción de escoger uno de cinco trayectorias. Si se escogen dos ratas para el experimento. ¿Cuántos eventos simples están asociados con este experimento (¿Cuántos elementos hay en el espacio muestra?)?
- 3.15.- Una pizzería ofrece pizzas con cualquier combinación [incluyendo la que sólo tiene queso y la que contiene todo] de los siguientes ingredientes: pimiento, cebolla, champiñón, chorizo, anchoas y jamón. ¿Cuántas pizzas diferentes se pueden ordenar si hay la posibilidad de escoger pizzas con ninguno, uno o más ingredientes y hasta con todos ellos?
- 3.16.- Una bolsa contiene 5 canicas blancas y 7 rojas. Si se desean sacar 5 canicas al azar. ¿De cuántas formas posibles pueden ser sacadas si
- las canicas pueden ser de cualquier color?
 - se quieren exactamente 3 blancas?
 - las 5 deben ser del mismo color?

- 3.17.- En un laboratorio hay 4 diferentes trabajos que realizar en una tarde en particular y hay 5 personas para hacerlos ¿De cuántas formas pueden ser asignadas las 5 personas para hacer los cuatro trabajos?
- 3.18.- Una investigadora tiene 4 drogas que desea probar, pero sólo dispone de animales suficientes para probar 3 de las drogas ¿ De cuántas formas puede probar las cuatro drogas?
- 3.19.- Se le suministran drogas a 8 animales de la siguiente forma: Tipo A a tres de ellos, tipo B a otros tres y tipo C a los dos restantes. Luego se coloca cada uno de los animales en una de las 8 diferentes cajas adyacentes para su observación. Si los animales sólo se distinguen en base al tipo de droga recibida, ¿De cuántas formas diferentes pueden ser colocados?
- 3.20.- Desarrollar los siguientes binomios usando la fórmula de Binomio de Newton,
- $(1 + b)^5$
 - $(1 + 1)^n$
 - $(x + 2y)^7$
 - $(1 + 0.04)^{10}$
 - $(x - \frac{1}{x})^{11}$
 - $(x - x^2)^{12}$
 - $(-2a + 3b)^6$
- 3.21.- Determinar (sin desarrollar el binomio):
- el quinto término del desarrollo de $(x - y)^{12}$
 - el décimotercer término del desarrollo $(2x + \frac{3}{x})^{24}$
 - los dos términos centrales del desarrollo $(1 + 2x)^{13}$
- 3.22.- Encontrar el coeficiente del término que contiene a:
- $x^2 y^4$ en el desarrollo de $(2x + 3y)^6$
 - x^5 en el desarrollo de $(x + x^{-3})^{17}$
- 3.23.- Encontrar el término independiente de x en el desarrollo $(x^3 - \frac{1}{x^2})^{10}$
- 3.24.- Se lanza un dado una vez. ¿Cuál es la probabilidad de que
- la cara superior muestre 3 puntos?
 - la cara superior muestre al menos 5 puntos?
- 3.25.- Una caja contiene 12 transistores buenos y 3 defectuosos, se sacan 3 transistores de la caja. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno sea defectuoso?

- 3.26.- A partir del conjunto de letras de La palabra VIDA se escogen 2 letras una por una. enliste el espacio muestra.
- 3.27.- Si las letras ORMA se arreglan en linea al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que en el arreglo aparezca ROMA?
- 3.28.- Un par de dados es lanzado. Sea A el evento "*la suma de los puntos mostrados es 7*", .B el evento "*la suma de los puntos mostrados es 10*" y C el evento "*la suma de los puntos mostrados es par*".
- ¿Son los eventos A y B mutuamente exclusivos?
 - ¿Son A y C mutuamente exclusivos?
 - ¿Son B y C mutuamente exclusivos?
 - Calcular: $P(A \cup B)$, $P(A \cup C)$, $P(B \cup C)$
- 3.29.- Se seleccionan dos semillas aleatoriamente de una bolsa que contiene 10 semillas de flores rojas y 5 de flores blancas. ¿Cuál es la probabilidad de que:
- ambas resulten de flores blancas?
 - una de cada color?
- 3.30.- Una muestra de 6 individuos para cierta prueba es seleccionada de un grupo de 20 fumadores y 10 no fumadores. ¿Cuál es la probabilidad de que la muestra contenga 4 fumadores?
- 3.31.- Una señora que visita una tienda por departamentos a veces usa sus tarjetas de crédito 1, 2 ó 3; otras veces paga con cheque y algunas veces en efectivo. Las probabilidades de pagar con estas 5 alternativas son respectivamente 0.25, 0.29, 0.23, 0.19 y 0.04
¿Cuál es la probabilidad de que en la próxima visita a la tienda:
- no pague en efectivo?
 - no use ninguna de sus tarjetas de crédito?
 - use su tarjeta # 1 o pague con cheque o pague en efectivo?
 - que no pague en efectivo ni con cheque?
- 3.32.- Se desea hacer una "*tortilla u homelete*" con 4 huevos; si hay 12 huevos en el refrigerador de los cuales 4 están malos. ¿Cuál es la probabilidad de que los 4 huevos salgan buenos?

- 3.33.- En tres cajas se colocan canicas rojas, blancas y azules, distribuidas de la siguiente forma:

CAJAS	C A N I C A S		
	ROJAS	BLANCAS	AZULES
1	5	3	2
2	1	8	1
3	3	1	6

Si se selecciona una caja al azar y se saca una canica al azar.

¿Cuál es la probabilidad de que la caja usada haya sido la # 3 si la canica es roja?

- 3.34.- Dos personas encargadas de la perforación de tarjetas llenan en distintas perforadoras igual número de tarjetas. La probabilidad de que la primera persona cometa un error es de 0.05; para la segunda esta probabilidad es de 0.1. Al verificar las tarjetas se descubrió un error. Hallar la probabilidad de que se haya equivocado la primera de las encargadas de la perforación. Se supone que ambas máquinas perforadoras estaban en buen estado.
- 3.35.- En una encuesta reciente hecha a estudiantes de nuevo ingreso a la Universidad se encontró que entre todos los estudiantes admitidos 55% no tienen problema de ningún tipo, 25% sienten que fueron mal orientados en cuanto a la carrera elegida y 20% tienen problemas de tipo económico. La misma encuesta muestra que de los que no tienen ningún tipo de problema solamente el 1% no regresa al 2o. semestre; que la probabilidad de que los que fueron mal orientados no continúen en el 2o. semestre es de 0.7; y la probabilidad de que los que tienen problemas económicos continúen es de 0.05. Si se elige un alumno al azar del 2o. semestre, ¿Cuál es la probabilidad de que él sea uno de los que a pesar de no estar en la carrera de su vocación haya continuado?
- 3.36.- Una fábrica tiene tres máquinas A, B y C produciendo la misma pieza, para televisores a color. La máquina A produce 601 de las piezas con un 95% de ellas perfectas, la máquina B produce 30% con SOI perfec-

tas y la máquina C produce 10% con 65% perfectas, Si se selecciona una pieza al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que ésta sea defectuosa? y si es defectuosa ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido producida por la máquina A?

3.37.- En un hospital especializado ingresan un promedio de 50% de enfermos con la afección K, 30% con la afección L, 20% con la afección M. La probabilidad de curación completa de la afección K es 0.7; para las afecciones L y M estas probabilidades son respectivamente 0.8 y 0.9 Un enfermo internado en el hospital fue dado de alta sano. Hallar la probabilidad de que este enfermo sufria la afección K.

3.38.- Un ratón es dominante doble (AA) o heterocigoto (Aa) según las propiedades Mendelianas, y la probabilidad de que cualquiera de los dos casos se presente es $1/2$. Se cruza el ratón macho con una hembra doblemente recesiva (aa). Si el ratón es dominante doble (AA) entonces la cría poseerá la característica dominante; si el ratón es heterocigoto la cría exhibirá la característica dominante la mitad de las veces también. Supóngase que una cría exhibe la característica dominante. ¿Cuál es la probabilidad de que el ratón padre sea dominante doble?

PARTE II

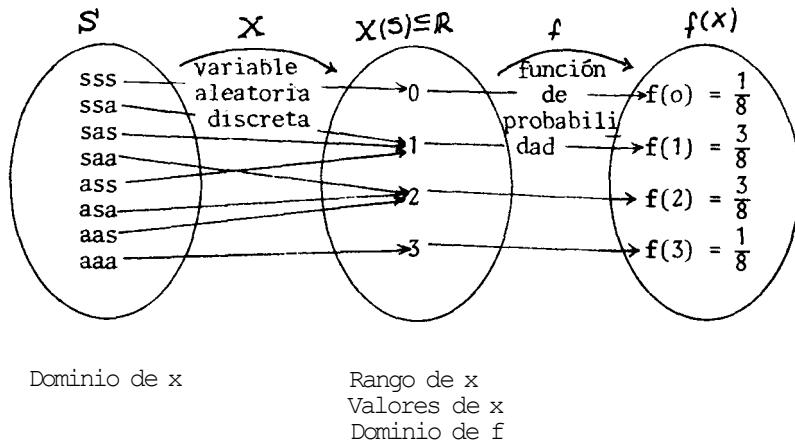
DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

CAPITULO 4 ; DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD4.1 VARIABLE ALEATORIA

Si arrojamos dos dados, sabemos que la suma X de los puntos que caen hacia arriba debe ser un entero entre 2 y 12, pero no podemos predecir que valor de X aparecerá en el siguiente ensayo y podemos decir que X depende del azar. El tiempo de vida de un foco que se extrae aleatoriamente de un lote de focos depende también del azar. El número de varones de una familia con 5 hijos también depende de la casualidad.

Si las observaciones no se dan en términos de números, podemos asignarles números y reducir las observaciones cualitativas al caso cuantitativo; así tenemos que la función que asigna números o valores a cada uno de los elementos del espacio muestra con una probabilidad definida, se denomina "*variable aleatoria*"

Por ejemplo, si se lanza una moneda 3 veces, el número de águilas X es una variable aleatoria que toma los valores 0, 1, 2, 3; es decir puede que' ninguna vez, una sola, dos o tres veces salga águila como resultado; la probabilidad de que $X = 2$ es $\frac{3}{8}$ ya que el espacio muestra $S = \{aaa, aas, asa, ass, saa, sas, ssa, sss\}$. Así pues, el espacio muestra es el dominio de la función y el conjunto de valores que la variable puede tomar es el rango de la función, que es un subconjunto de los números reales R . Si el rango X es el conjunto de los números enteros Z o un subconjunto de Z , la variable aleatoria se llama variable aleatoria discreta, y si el rango es el conjunto de los números reales R o un subconjunto de IR , la variable aleatoria se llama variable aleatoria continua. Son ejemplos de variables aleatorias continuas: la estatura, el peso, la edad, el volumen, el pH, etc. Algunos ejemplos de variables discretas son: el número de alumnos que asisten diariamente durante un semestre, el número de accidentes automovilísticos en una ciudad por día, el número de piezas defectuosas por lote, el número de alumnos aprobados por grupo en un examen, etc.



Definición: Una variable aleatoria X es una función cuyo dominio es el espacio muestra S y cuyo rango es un subconjunto de los números reales R que tiene asociada a su conjunto de valores una función de probabilidad.

Ejemplo 4.1: Supongamos que nos interesamos por el número de varones X en el experimento de observar al azar dos niños recién nacidos (Sean H = hombre y M = mujer)

S	VALORES DE X : x_i	$f(x_i)$
MM	0	$f(0) = \frac{1}{4}$
MH	1	$f(1) = \frac{2}{4}$
HM	1	
HH	2	$f(2) = \frac{1}{4}$
		$\frac{4}{4} = 1$

Ejemplo 4.2: Sea X la variable aleatoria que indica la suma de los puntos en las caras superiores al lanzar dos dados, ¿Cuál es el espacio muestra, el conjunto de valores de X y sus respectivas probabilidades?

Solución: $S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

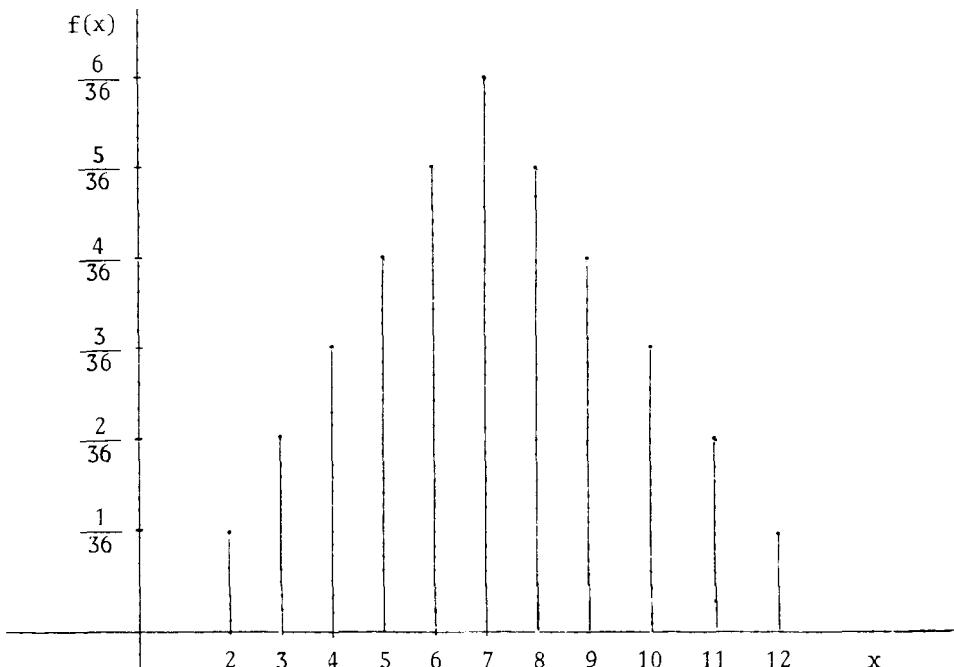
$$X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

S	Valores de $X : x_i$	$f(X=x_i)$
(1,1)	2	$f(x_1) = f(X=2) = \frac{1}{36}$
(1,2) (2,1)	3	$f(x_2) = f(X=3) = \frac{2}{36}$
(1,3) (3,1) (2,2)	4	$f(x_3) = f(X=4) = \frac{3}{36}$
(1,4) (4,1) (2,3) (3,2)	5	$f(x_4) = f(X=5) = \frac{4}{36}$
(1,5) (5,1) (2,4) (4,2) (3,3)	6	$f(x_5) = f(X=6) = \frac{5}{36}$
(1,6) (6,1) (2,5) (5,2) (3,4) (4,3)	7	$f(x_6) = f(X=7) = \frac{6}{36}$
(2,6) (6,2) (3,5) (5,3) (4,4)	8	$f(x_7) = f(X=8) = \frac{5}{36}$
(3,6) (6,3) (4,5) 5,4)	9	$f(x_8) = f(X=9) = \frac{4}{36}$
(4,6) (6,4) (5,5)	10	$f(x_9) = f(X=10) = \frac{3}{36}$
(5,6) (6,5)	11	$f(x_{10}) = f(X=11) = \frac{2}{36}$
(6,6)	12	$f(x_{11}) = f(X=12) = \frac{1}{36}$
Total:		$\sum_{i=1}^{11} f(X=x_i) = \frac{36}{36} = 1$

4.2 DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD - FUNCION DE PROBABILIDAD - FUNCION DENSIDAD DE PROBABILIDAD.

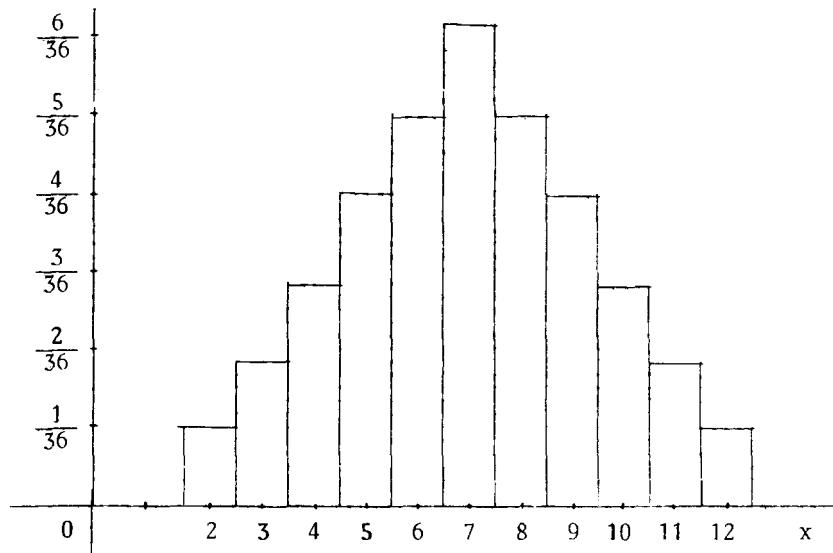
Definición: Una tabla, gráfica o expresión matemática (fórmula) que de las probabilidades con que una variable aleatoria toma diferentes valores, se llama distribución de probabilidad de la variable aleatoria. Al conjunto de pares ordenados $(X, f(X))$ donde X es el conjunto de valores de una variable aleatoria y $f(X)$ las probabilidades asignadas a X , se le llama función de probabilidad en el caso de que la variable aleatoria X sea discreta; y función densidad de probabilidad en el caso de que la variable aleatoria sea continua.

Ejemplo 4.3: La gráfica de líneas de la distribución de probabilidad de la variable aleatoria descrita en el ejemplo 4.2. es:



Gráfica de líneas de la Distribución de Probabilidad de la variable aleatoria X del ejemplo 4.2.

Otro tipo de gráfica empleado para representar una función de probabilidad es el histograma, que consiste en representar las probabilidades como áreas.



Ejemplo 4.4: Arrojamos una moneda legal y representamos por X el número de ensayos realizados hasta que aparece por primera vez un águila (incluyendo el ensayo en que apareció el águila). Entonces, el espacio muestra correspondiente es infinito, ya que hay un número infinito numerable de resultados, a saber, 1, 2, 3, De hecho, $X = 1$ significa que aparece un águila en el primer ensayo, $X = 2$, indica que primero se obtiene sol y luego águila, etc. Puesto que las águilas y los soles son igualmente posibles, y los ensayos son independientes, tenemos que

$$P(X=1) = \frac{1}{2}$$

$$P(X=2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

De esta manera, obtenemos la función de probabilidades.

$$f(X) = \frac{1}{2^X}, \quad X = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Se observa que X es una variable aleatoria discreta.

Ejemplo 4.5: Se extraen dos tornillos al azar de un conjunto de diez tornillos, cuatro de los cuales están defectuosos. Encontrar y dibujar la función de probabilidad $f(X)$ de la variable aleatoria X = número de tornillos defectuosos extraídos.

Solución: $n(S) = 45$

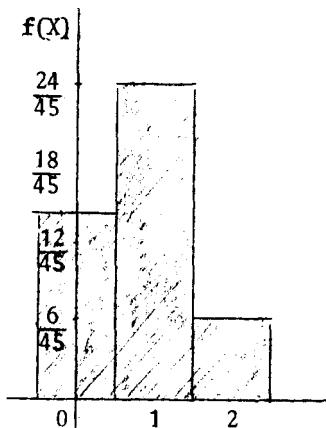
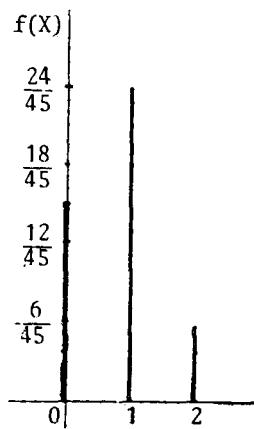
$$X = \{0, 1, 2\}$$

$$f(X=0) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

$$f(X=1) = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$$

$$f(X=2) = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$$

X	$f(X)$
0	$15/45$
1	$24/45$
2	$6/45$
	$45/45$

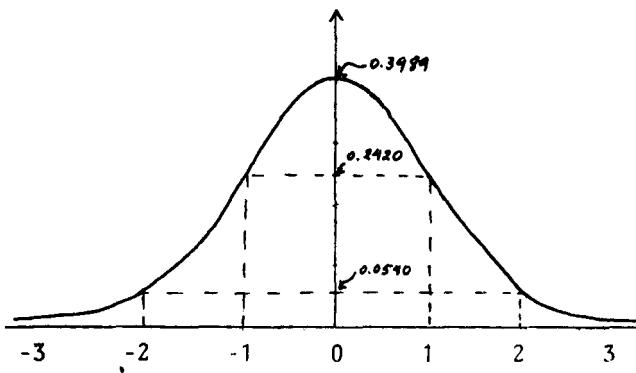


Ejemplo 4.6: La función densidad de probabilidad normal estandar se define por:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad -\infty < z < \infty$$

$$\text{donde } f(-z) = f(z); \quad f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0.3989$$

y su gráfica está dada por:



4.3 FUNCION DISTRIBUCION (ACUMULADA):

Si X es una variable aleatoria, entonces para cualquier número real x_0 , existe la probabilidad $P(X \leq x_0)$ del evento $X \leq x_0$ (X toma cualquier valor menor o igual a x_0).

La probabilidad $P(X \leq x_0)$ que depende de la elección de x_0 es la probabilidad acumulada hasta x_0 y es el conjunto de valores de la función de distribución o de distribución acumulada y se denota por $F(x_0)$. Es decir, al conjunto de pares ordenados $(X, F(X))$ se le llama función de distribución acumulada.

$$F(x_0) = P(X \leq x_0)$$

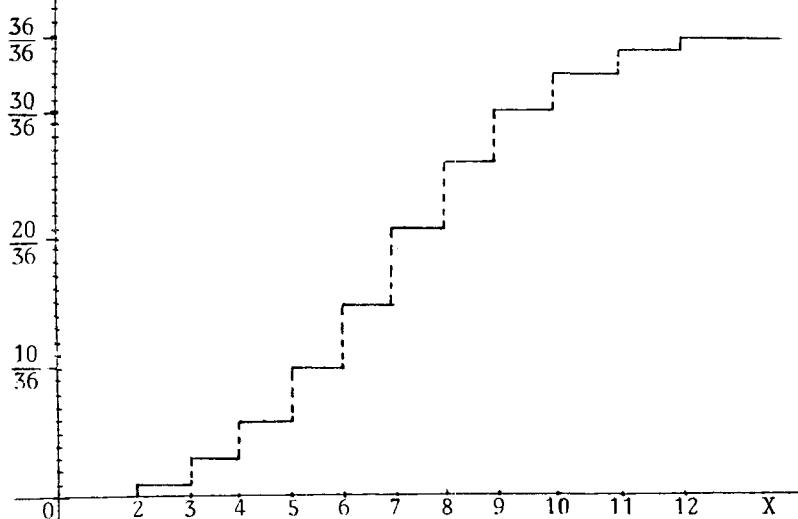
Ejemplo 4.7: Encontrar los valores de la función de distribución acumulada $F(x)$, de la variable aleatoria X descrita en el ejemplo 4.2.

X	f(X)	F(X)
2	1/36	1/36
3	2/36	3/36
4	3/36	6/36
5	4/36	10/36
6	5/36	15/36
7	6/36	21/36
8	5/36	26/36
9	4/36	30/36
10	3/36	33/36
11	2/36	35/36
12	1/36	36/36

Obsérvese que $F(X = 5) = f(X = 2) + f(X = 3) + f(X = 4) +$

$$f(X = 5) = \sum_{x_i \leq 5} f(x_i)$$

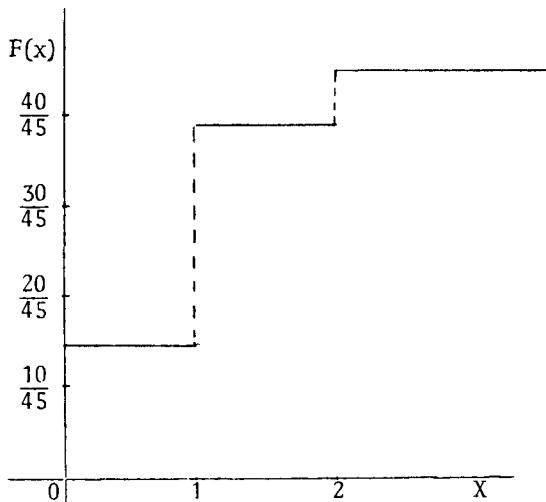
$F(x)$ Función de distribución acumulada $F(X)$ para la variable aleatoria X del ejemplo 4.2.



Ejemplo 4.8:

Hallar los valores de la función de distribución acumulada, $F(X)$, de la variable aleatoria X del ejemplo 4.5.

X	f(X)	F(X)
0	15/45	15/45
1	24/45	39/45
2	6/45	45/45



Ahora demostremos que la probabilidad $P(x_1 < X \leq x_2)$ de un evento $x_1 < X \leq x_2$ se puede expresar en términos de la función distribución acumulada $F(x)$, donde x_1 y x_2 son dos valores cualesquiera $x_1 < x_2$.

Obsérvese que $X \leq x_1$ y $x_1 < X \leq x_2$ son eventos mutuamente exclusivos, su unión es el evento $X \leq x_2$.

Por el axioma 3 de probabilidad, obtenemos

$$P(X \leq x_2) = P(X \leq x_1) + P(x_1 < X \leq x_2)$$

que se escribe como

$$\begin{aligned} P(x_1 < X \leq x_2) &= P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) \\ &= F(x_2) - F(x_1) \end{aligned}$$

En consecuencia $F(x)$ determina en forma única la distribución de probabilidades de la variable aleatoria correspondiente.

FUNCIONES DE DISTRIBUCION ACUMULADA PARA VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS:

Si X es una variable aleatoria continua, entonces la regla de correspondencia que define la función de distribución acumulada $F(X)$ es:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(v) dv$$

Hemos usado v para representar la variable de integración, ya que x se usa para representar al límite superior de integración.

El integrando f es la función densidad de probabilidad, y derivando vemos que

$$F'(x) = f(x)$$

PROPIEDADES DE LA FUNCION DE DISTRIBUCION ACUMULADA

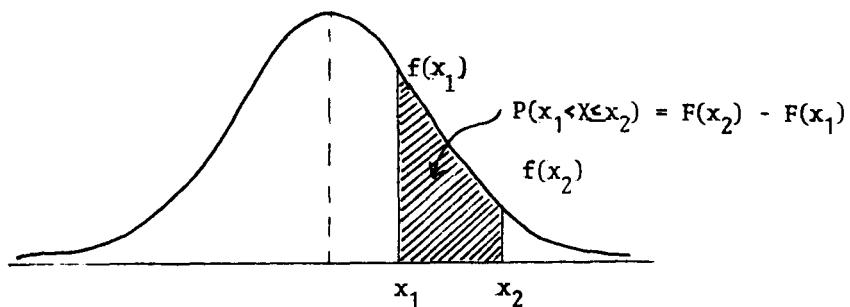
1.- $P(S) = \sum f(x_i) = 1$, si X es discreta.

$$P(S) = P(-\infty < X < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) dv = 1, \text{ si } X \text{ es continua.}$$

2.- $P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \sum_{x_i < x_2} f(x_i) - \sum_{x_i < x_1} f(x_i)$, si X es

discreta.

$$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(v) dv, \text{ si } X \text{ es continua.}$$



3.- $P(X = x) = 0$, si X es continua.

4.- Si X es continua

$$P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 \leq X < x_2) = P(x_1 \leq X \leq x_2)$$

Ejemplo 4.9: Determinar el valor de la constante c tal que $f(x)$ defina una función densidad en el intervalo dado y determinar la regla de correspondencia de la función de distribución acumulada correspondiente.

$$a) f(x) = c \sin x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$b) f(x) = \frac{c}{1+x^2}, -\infty < x < \infty$$

Solución:

$$\begin{aligned} a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} c \sin x \, dx = 1 &\iff -c \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \\ &\iff -c [\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0] = 1 \\ &\iff -c (-1 - 1) = 1 \\ &\iff -c (-2) = 1 \\ &\iff c = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin x$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \frac{1}{2} \sin v \, dv = -\frac{1}{2} \cos v \Big|_0^x = -\frac{1}{2} (\cos x - \cos 0) \\ &= -\frac{1}{2} (\cos x - 1) = \frac{1}{2} (1 - \cos x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{1+x^2} \, dx = 1 &\iff \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \frac{c}{1+x^2} \, dx = 1 \\ &\iff \lim_{r \rightarrow \infty} \left[c \arctan x \right]_{-r}^r = 1 \end{aligned}$$

$$\iff \lim_{r \rightarrow \infty} [c(\arctan r - \arctan(-r))] = 1$$

$$\iff \lim_{r \rightarrow \infty} [c(2 \arctan r)] = 1$$

$$\iff 2c \frac{\pi}{2} = 1$$

$$c = \frac{1}{\pi}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{dv}{\pi(1+v^2)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-r}^x \frac{dv}{1+v^2} =$$

$$= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\pi} \arctan v \right]_{-r}^x =$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} [\arctan x - \arctan(-r)]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan x \right)$$

4.4. MEDIA Y VARIANZA DE UNA DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD

MEDIA:

La media o valor medio de una distribución se representa por μ , y se define por:

$$a) \mu = \sum x_i f(x_i) \text{ si } X \text{ es discreta}$$

$$b) \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \text{ si } X \text{ es continua}$$

En estas dos fórmulas $f(x)$ es la función de probabilidad y la función densidad de probabilidad respectivamente de la variable aleatoria X en consideración.

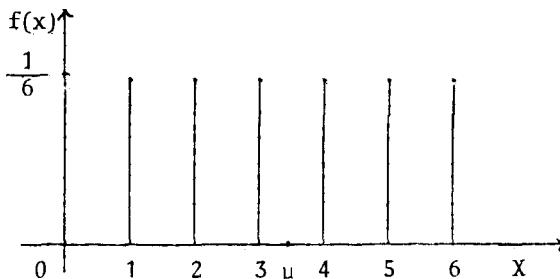
Conviene mencionar que la media μ se conoce como *esperanza matemática de X*, o, brevemente, *esperanza de X*, y se representa por $E(X)$.

Ejemplo 4.10: Supóngase que la variable aleatoria X es el número que queda hacia arriba al lanzar un dado legal. La función de probabilidad correspondiente es $f(X) = \frac{1}{6}$ para $X = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$$\text{Por consiguiente } \mu = \sum X f(X) = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 5\left(\frac{1}{6}\right) + 6\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$\mu = 3.5$$

que quiere decir que 3.5 es el valor esperado, lo cual significa que 3.5 está en el valor central de la distribución. Obsérvese que no es necesario que el valor esperado sea un valor posible de la variable aleatoria. También se interpreta en el sentido de que en 10 ejecuciones del experimento, por ejemplo, se espera que la suma de los números obtenidos sea de $(10)(3.5) = 35$.



Ejemplo 4.1: Determinar la media o valor esperado de la distribución cuya función densidad de probabilidad está dada por la regla de correspondencia:

$$f(X) = \frac{1}{2} e^{-\frac{X}{2}}, \quad 0 \leq X < \infty$$

Solución:

$$\begin{aligned}\mu &= \int_0^\infty \frac{1}{2} x e^{-\frac{x}{2}} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[-x e^{-\frac{x}{2}} \Big|_0^r - \int_0^r e^{-\frac{x}{2}} dx \right] = \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[-x e^{-\frac{x}{2}} - 2 e^{-\frac{x}{2}} \Big|_0^r \right] \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[-r e^{-\frac{r}{2}} - 2 e^{-\frac{r}{2}} + 2 \right] \\ &= 2\end{aligned}$$

VARIANZA :

La varianza de una distribución se representa mediante σ^2 y se define por

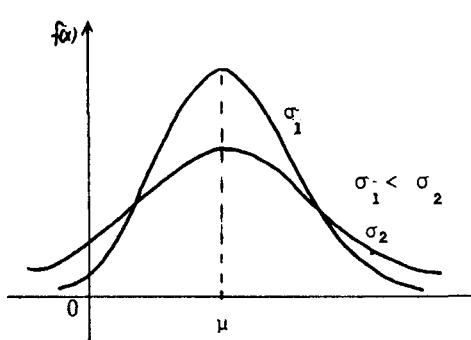
a) $\sigma^2 = \sum_{\text{todos } x_i} (x_i - \mu)^2 f(x_i)$, si X es discreta.

b) $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$, si X es continua.

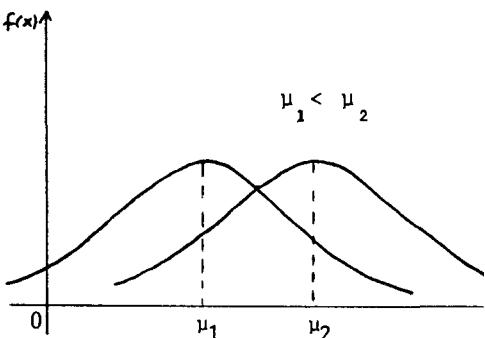
donde $f(x)$ representa a la función de probabilidad y a la función densidad de probabilidad, respectivamente, de la variable aleatoria.

Claramente $\sigma^2 \geq 0$ porque $(x - \mu)^2 \geq 0$, para todo x, y $f(x) \geq 0$, para todo x. A la raíz cuadrada positiva de la varianza la llamamos desviación estandar y se denota σ .

En palabras, la varianza es una medida de dispersión o variabilidad de los valores que puede tomar la variable aleatoria X correspondiente.



Distribuciones con igual media y diferente dispersión.



Distribuciones con medias diferentes e igual dispersión.

Ejemplo 4.12: La varianza y la desviación estándar de la distribución del ejemplo 4.10 son:

$$\sigma^2 = \left[(1-3.5)^2 + (2-3.5)^2 + (3-3.5)^2 + (4-3.5)^2 + (5-3.5)^2 + (6-3.5)^2 \right] \frac{1}{6} = 2.9167$$

$$\sigma = \sqrt{2.9167} = 1.7078$$

Ejemplo 4.13: Encontrar la inedia y la varianza de la distribución que tiene densidad $f(x) = 0.5x$ cuando $0 \leq x \leq 2$, y $f(x) = 0$ para cualquier otro valor.

Solución: $\mu = \int_0^2 x f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^2$

$$\mu = \frac{1}{6} (8 - 0)$$

$$\mu = \frac{4}{3}$$

$$\sigma^2 = \int_0^2 (x - \mu)^2 f(x) dx = \int_0^2 (x - \frac{4}{3})^2 \frac{1}{2} x dx$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_0^2 \frac{1}{2} (x^3 - \frac{8}{3} x^2 + \frac{16}{9} x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{8}{9} x^3 + \frac{16}{18} x^2 \right]_0^2 \end{aligned}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} (4 - \frac{64}{9} + \frac{32}{9})$$

$$\sigma^2 = \frac{2}{9}$$

4.5 ESPERANZA MATEMATICA.

La esperanza matemática de una función $g(x)$ está dada por

a) $E[g(X)] = \sum_{\text{todo } i} g(x_i) f(x_i)$, si X es discreta.

b) $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(X) f(X) dX$, si X es continua.

donde $f(X)$ es la función de probabilidad o la función densidad de probabilidad respectivamente y $g(X)$ es cualquier función de valores reales que está definida para todos los valores posibles de X .

Ejemplo 4.14: La probabilidad de que una casa de cierto tipo que destruida por un incendio en cualquier período de doce meses es de 0.005. Una compañía de seguros ofrece vender al propietario una póliza de seguros contra incendio por 20,000.00 dólares y a un año por una prima de 150.00 dólares.

¿Cuál es la ganancia esperada de la compañía?

Solución- $S = \{\text{se incendie, no se incendie}\}$

$$X = \{0, 1\}$$

Evento	X	$g(X)$	$f(x)$
se incendie	0	-19,850	0.005
no se incendie	1	+ 150	0.995

$$E[g(x)] = (-19,850) (0.005) + (150) (0.995) = 50.00$$

PROPIEDADES DE LA ESPERANZA MATEMATICA:

Proposición 4.1: $E[a g(X) + b h(X)] = a E[g(X)] + b E[h(X)]$; a, b constantes,

Demostración:

$$\begin{aligned} E[a g(X) + b h(X)] &= \sum_{\text{todo } i} [a g(x_i) + b h(x_i)] f(x_i) \\ &= \sum_{\text{todo } i} [a g(x_i) f(x_i) + b h(x_i) f(x_i)] \\ &= a \sum_{\text{todo } i} g(x_i) f(x_i) + b \sum_{\text{todo } i} h(x_i) f(x_i) \\ &= a E[g(X)] + b E[h(X)] \end{aligned}$$

Si X es continua, la demostración se hace en la misma forma, usando integrales en vez de sumatorias.

Proposición 4.2: $E(c_1 X + c_2) = c_1 E(X) + c_2$

Demostración:

$$\begin{aligned} E(c_1 X + c_2) &= \sum_{\text{todo } i} (c_1 x_i + c_2) f(x_i) \\ &= \sum_{\text{todo } i} [c_1 x_i f(x_i) + c_2 f(x_i)] \\ &= c_1 \sum_{\text{todo } i} x_i f(x_i) + c_2 \sum_{\text{todo } i} f(x_i) \\ &= c_1 E(X) + c_2 \end{aligned}$$

4.6 MOMENTOS:

Ahora veremos que la media y la varianza son casos particulares de cantidades más generales llamadas momentos.

Consideremos la función $g(X) = X^k$, $k = 1, 2, \dots$

$$E[g(X)] = E(X^k) = \begin{cases} \sum x_i^k f(x_i) & , \quad (X \text{ discreta}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx & , \quad (X \text{ continua}) \end{cases}$$

A la esperanza $E(X^k)$ se le llama k -ésimo momento de la variable aleatoria X .

Si $k = 1$, se tiene que, el primer momento es la media; es decir,

$$E(X^1) = \begin{cases} \sum x_i f(x_i) & , \quad (X \text{ discreta}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx & , \quad (X \text{ continua}) \end{cases}$$

Comparando con la definición de inedia de la sección 4.4

$$\mu = E(X) \dots \text{(i)}$$

Si $g(X) = (X - \mu)^k$, obtenemos

$$E[(X - \mu)^k] = \begin{cases} \sum (x_i - \mu)^k f(x_i) & , \quad (X \text{ discreta}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^k f(x) dx & , \quad (X \text{ continua}) \end{cases}$$

Esta cantidad recibe el nombre de k -ésimo momento central de la variable aleatoria X .

Si el primer momento central existe, debe ser igual a cero.

El segundo momento central es la varianza.

$$E[(X - \mu)^2] = \begin{cases} \sum (x_i - \mu)^2 f(x_i) & , \quad (X \text{ discreta}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx & , \quad (X \text{ continua}) \end{cases}$$

Comparando con la definición de varianza de la sección 4.4, vemos que:

Ejemplo 4.15:

Si X es el número que se obtiene al arrojar un dado legal, entonces:

$$E(X) = \frac{1}{6} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{7}{2} = 3.5 = \mu$$

$$E[(X - \mu)^2] = \frac{1}{6} [(1-3.5)^2 + (2-3.5)^2 + (3-3.5)^2 + (4-3.5)^2 + (5-3.5)^2 + (6-3.5)^2]$$

$$= 2.9167 = \sigma^2$$

Usando la fórmula (2)

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{6} (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) - \mu^2 \\&= \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 \\&= \frac{35}{12} \\&= 2.9167\end{aligned}$$

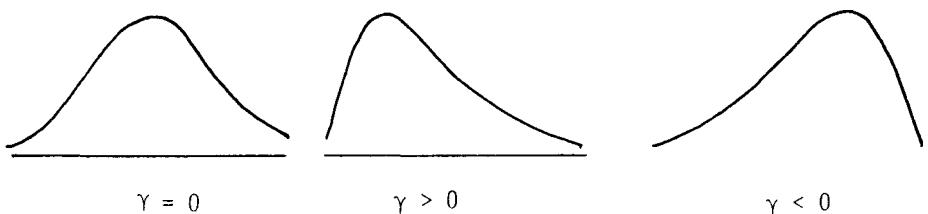
SESGO Y CURTOSIS DE UNA DISTRIBUCION

Si una distribución es simétrica con respecto a la media μ y si el tercer momento central $E[(X - \mu)^3]$ existe, entonces este debe ser cero.

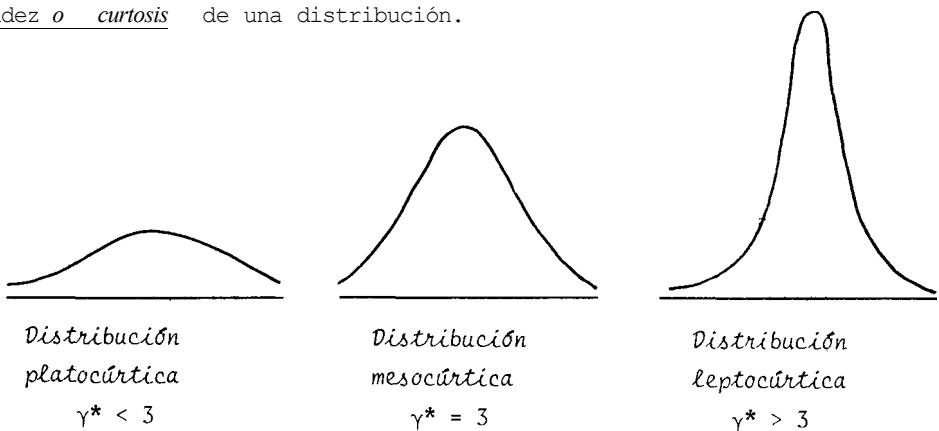
Cabe hacer notar que, si $E[(X - \mu)^3] = 0$, no implica que la distribución sea simétrica. Sin embargo es costumbre usar la expresión

$$\gamma = \frac{1}{\sigma^3} E[(X - \mu)^3]$$

como la medida de la simetría, ya que $\gamma = 0$ para una distribución simétrica y toma un valor positivo (o negativo) para una distribución que tiene una gran cola en el lado derecho (o izquierdo). y es llamado el sesgo de la distribución.



La cantidad $\gamma^* = \frac{1}{4} E[(X - \mu)^4]$ se usa como la medida de la picudez o curtosis de una distribución.



FUNCION GENERATRIZ DE MOMENTOS;

En algunos casos se pueden calcular los momentos directamente usando la definición, sin embargo habrá ocasiones en que resulta más sencillo si usamos una función auxiliar, $g(t) = e^{tx}$ y calculamos su esperanza, esto es:

$$G(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum e^{tx_i} f(x_i) & (\text{X discreta}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx & (\text{X continua}) \end{cases} \dots \quad (3)$$

Derivando:

$$G'(t) = \begin{cases} \sum x_i e^{tx_i} f(x_i) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x e^{tx} f(x) dx \end{cases}$$

Derivando k -veces, se tiene:

$$\frac{d^k G}{dt^k} = \begin{cases} \sum x_i^k e^{tx_i} f(x_i) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{tx} f(x) dx \end{cases}$$

Cuando $t = 0$, la expresión del lado derecho es el k -ésimo momento de x .

$$G^{(k)}(0) = \frac{d^k G(0)}{dt^k} = E(x^k) \dots \quad (4)$$

Cuando $k = 1$

$$G^{(1)}(0) = E(X) = \mu \dots \quad (5)$$

Ejemplos de aplicación se darán en capítulos siguientes, después de conocer algunos tipos de dsitribuciones.

EJERCICIOS

- 4.1.- Encontrar y graficar la función de probabilidades de la variable aleatoria $X = \text{suma de los tres numeros que se obtienen al arrojar tres dados, legales.}$

- 4.2.- Dibuje la función de probabilidad y la función de distribución acumulada correspondiente a

$$f(x) = \frac{1}{2^x}, \quad x = 1, 2, \dots$$

- 4.3.- Encontrar la función de probabilidades de la variable aleatoria $X = \text{número de veces que se arroja un dado legal hasta que aparece el 6 (incluyendo la prueba en que aparece el 6).}$

- 4.4.- Supóngase que X tiene densidad $f(x) = kx$ para $0 \leq x \leq 4$, y cero para las demás x . Calcular k y $F(x)$, determinar el valor c tal que $P(X \leq c) = 81\%$.

En cada uno de los siguientes ejercicios, determine el valor de la constante c tal que $f(x)$ sea una función densidad en el intervalo dado. Determine también la función distribución acumulada en cada caso.

4.5.- $f(x) = cx(4-x), \quad 0 \leq x \leq 4.$

4.6.- $f(x) = \frac{c}{(1+x)^3}, \quad 0 \leq x < \infty$

4.7.- $f(x) = \frac{1}{2} e^{-cx}, \quad 0 \leq x < \infty$

4.8.- $f(x) = cx^2 e^{-x^3}, \quad 0 \leq x < \infty$

4.9.- $f(x) = c \cos x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

4. 10.- El periodo de vida (medido en días) de cierta especie de plantas en su ambiente es una variable aleatoria continua con función densidad

$$f(x) = \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}} \quad \text{Determine:}$$

- a) la función distribución acumulada.
- b) el promedio de vida esperada de las plantas de esta especie.
- c) la probabilidad de que una planta de esta especie muera en los primeros 50 días.

4.11.- La probabilidad de que cierta especie de animales (nacidos al tiempo $t = 0$) mueran en un tiempo t como máximo (t medido en semanas) es

$$1 - e^{-\frac{t}{20}}$$

- a) Si T denota la variable aleatoria continua, que representa el tiempo de vida de un animal cualquiera de esta especie, determine la función densidad de T .
- b) ¿Cuál es el promedio de semanas que vive un animal de esta especie?

4.12.- Si T denota el tiempo de digestión (medido en horas) de una comida.

Entonces T es una variable aleatoria. Suponga que su función densidad es $f(x) = 9x e^{-3x}$ para $0 \leq x < \infty$. Determine la función distribución acumulada y úsela para determinar la probabilidad de que la comida sea completamente digerida en 2 horas ¿Cuál es la probabilidad de que tome más de 3 horas digerir toda la comida?

4. 13.- Supóngase que una pequeña estación de gasolina es abastecida cada sábado por la tarde. Su volumen de ventas X , en miles de litros, es una variable aleatoria, y suponemos que la función de densidad de X es $f(x) = 6x(1-x)$ cuando $0 \leq x \leq 1$ y $f(x) = 0$ para cualquier otro valor de x . Determinar la media y la varianza de X .

4.14.- Supóngase que en una lotería se venden 10,000 boletos de un peso cada uno. El ganador recibirá un premio cuyo valor es de 500 pesos. Si alguien compra tres boletos, ¿cuál es su esperanza?

- 4.15.- La probabilidad de que un hombre de 23 años viva el próximo año es de 0.998; y la probabilidad de que muera durante el próximo año es de 0.002. Una compañía de seguros ofrece a hombres de 23 años pólizas por un valor de \$ 100,000.00 con un pago de \$ 1,000.00 anuales. ¿Cuál es la ganancia esperada para la compañía?

- 4.16.- La siguiente tabla muestra la distribución de unidades vendidas semanalmente con sus respectivas probabilidades:

Unidades vendidas	Probabilidades de vender este número de unidades
50	0.10
60	0.30
70	0.40
80	0.20

Determine el promedio de ventas semanales.

- 4.17.- La siguiente tabla muestra la distribución del número de artículos manufacturados y vendidos en un año.

Unidades vendidas	Probabilidad
1000	0.45
2000	0.30
3000	0,10
4000	0.07
5000	0.06
6000	0.02

Determine el promedio de ventas.

- 4.18.- Si la esperanza matemática de una variable aleatoria X es 15, ¿Cuál es la esperanza matemática de:
 a) $X + 4$ b) $3X + 8$ c) $5X - 10$

- 4.19.- Sea X el número de automóviles con fallas en los frenos entre 500 automóviles estacionados en un momento dado en un estacionamiento. Si la probabilidad de que un automóvil seleccionado al azar tenga fallas en los frenos es de 0.10. ¿Cuál es $E(X)$?

4.20.- Encuentre la esperanza de $Z = X + Y$ si $E(X) = 5$ y $E(Y) = 3$.

4.21.- Hallar la varianza y la desviación estándar de la variable aleatoria discreta X dada por la ley de distribución:

X	-5	2	3	4
f(X)	0.4	0.3	0.1	0.2

4.22.- En una clase de 60 alumnos, sea X el número de estudiantes que siempre llegan tarde. ¿Cuál es $E(X)$, si la probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar llegue tarde a su clase es de 0.10? Interprete su significado.

CAPITULO 5: DISTRIBUCIONES DISCRETAS ESPECIALES

En este capítulo estudiaremos algunas distribuciones de variables aleatorias discretas que tienen gran aplicación práctica, entre ellas veremos: la distribución uniforme, la Binomial, Poisson, Multinomial, Hipergeométrica, Binomial Negativa y la Geométrica.

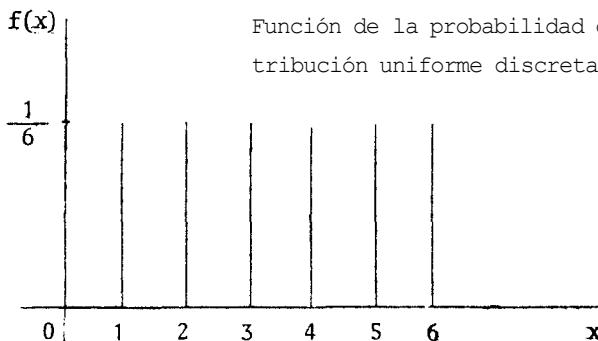
5.1 DISTRIBUCION UNIFORME DISCRETA:

Una distribución de probabilidad de una variable discreta X que toma valores x_1, x_2, \dots, x_n con igual probabilidad se llama distribución uniforme discreta. Es decir su función de probabilidad está dada por

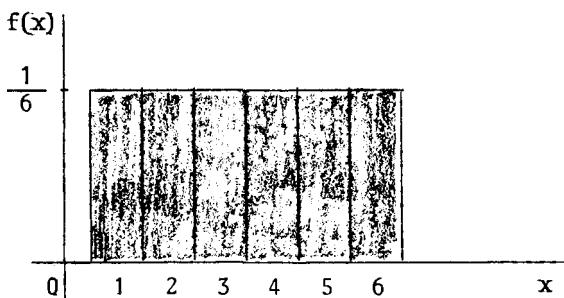
$$f(X) = \frac{1}{n}, \quad X = x_1, x_2, \dots, x_n$$

Ejemplo 5.1: Al lanzar un dado legal, cada elemento del espacio muestral $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ocurre con igual probabilidad; por lo tanto, tenemos una distribución uniforme cuya función de probabilidad es $f(x) = \frac{1}{6}$ para toda $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

La gráfica de una distribución uniforme es un conjunto de líneas con la misma altura.



El Histograma de una distribución uniforme discreta es:



La media y la varianza de la distribución uniforme discreta

$$f(x) = \frac{1}{n} \text{ son: } \mu = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n}$$

Demostración:

$$\mu = E(X) = \sum x_i f(x_i) = \sum x_i \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum x_i = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E((X - \mu)^2) = \sum (x_i - \mu)^2 f(x_i) = \sum (x_i - \mu)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum (x_i - \mu)^2 \\ &= \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{n} \end{aligned}$$

5.2 DISTRIBUCION BINOMIAL

Continuamos nuestro estudio de las distribuciones de probabilidad discretas con un modelo de gran utilidad práctica como es el modelo Binomial.

El modelo Binomial se puede considerar como la suma de n modelos de Bernoulli independientes (llamados así en honor a Jackes Bernoulli, matemático suizo que vivió en la última mitad del siglo XVII (1654-1705))

que se aplica a una variable aleatoria que puede asumir solo dos valores: 0 y 1 con probabilidad q y p ($p + q = 1$) respectivamente, entonces la función de probabilidad de Bernoulli está dada por:

x_i	$f(x_i)$
0	q
1	$\frac{p}{1}$

El modelo de Bernoulli tiene un solo parámetro, p , es apropiado cuando se tenga un experimento que resulte en proposiciones: si o no; éxito o fracaso; varón o niña; artículos defectuosos o no defectuosos; etc. Obsérvese que, en el uso estadístico, resultados "*favorables*" o "*satisfactorios*" no significa necesariamente resultados que sean "*deseable*" en la práctica.

Un ejemplo de un experimento de Bernoulli es, en el lanzamiento de un dado legal, *una sola vez*, consideremos éxito el que salga un número primo par, entonces la probabilidad de éxito es $\frac{1}{6}$ y la de fracaso (cualquier otro número diferente de 2) es $\frac{5}{6}$

Ahora definiremos un experimento Binomial, éste debe cumplir con las siguientes propiedades:

- 1) El experimento consta de n ensayos estadísticamente independientes y repetidos.
- 2) Cada ensayo tiene dos resultados posibles uno llamado "*éxito*" y otro "*fracaso*" (cada ensayo es un experimento de Bernoulli).
- 3) La probabilidad de éxito en cada ensayo es la misma e igual a " p " y, la de fracaso, " q ", donde $p + q = 1$.
- 4) Existe una variable aleatoria discreta X , asociada al experimento que cuenta el número de éxitos en los n ensayos o el número de ensayos con éxito, entonces los valores de X son: $X = \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$.

Algunos ejemplos de experimentos binomiales son:

- 1.- El nacimiento de un niño.
- 2.- El lanzamiento de una moneda legal
- 3.- Extracción de sangre para una transfusión (si sale el tipo y Rh deseado es éxito, de cualquier otro, fracaso).
- 4.- Partes defectuosas y no defectuosas producidas por una máquina.

FUNCION DE PROBABILIDAD BINOMIAL:

Ahora trataremos de obtener la función de probabilidad Binomial $f(x)$ que da la probabilidad de obtener X éxitos en n ensayos.

Si quisiéramos la probabilidad de obtener x éxitos consecutivos, seguidos por $n-x$ fracasos, la probabilidad sería:

$$\underbrace{p.p.p.p}_{x} \dots \underbrace{p.q.q.q}_{n-x} \dots \dots \dots q = p^x q^{n-x}$$

Pero deseamos la probabilidad de obtener x éxitos y $n-x$ fracasos en cualquier orden de ocurrencia (no necesariamente x éxitos primero, seguidos de $n-x$ fracasos seguidos también)

El número de arreglos que se pueden tener con x p's y $n-x$ q's es el número de permutaciones de n letras de las cuales x son de un tipo y $n-x$ son de otro tipo, y por la fórmula obtenida en el capítulo 3, sección 3,3, el número de tales permutaciones es:

$$\frac{n!}{x! (n-x)!}$$

Ahora bien, la probabilidad de que ocurran todos los arreglos posibles es la suma de las probabilidades de los eventos mutuamente exclusivos. En consecuencia, es necesario sumar la probabilidad de uno de los eventos donde hay x p's y $n-x$ q's, $p^x q^{n-x}$, tantas veces como arreglos diferentes pueden ocurrir. Por lo tanto la probabilidad de obtener x éxitos en cualquier orden de ensayos independientes para los cuales la probabilidad de éxito en cada ensayo es p , viene dada

por el producto.

$$\frac{n!}{x!(n-x)!} (p^x q^{n-x})$$

Así,, la función de probabilidad binomial es

$$f(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

El nombre binomial viene del desarrollo del binomio

$$(q + p)^n = \binom{n}{0} q^n + \binom{n}{1} q^{n-1} p + \dots + \binom{n}{x} q^{n-x} p^x + \dots + \binom{n}{n-1} q p^{n-1} + \binom{n}{n} p^n$$

donde el término que contiene a $p^x q^{n-x}$ es

$$\binom{n}{x} q^{n-x} p^x = \frac{n!}{x!(n-x)!} q^{n-x} p^x$$

$$\text{de donde } f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

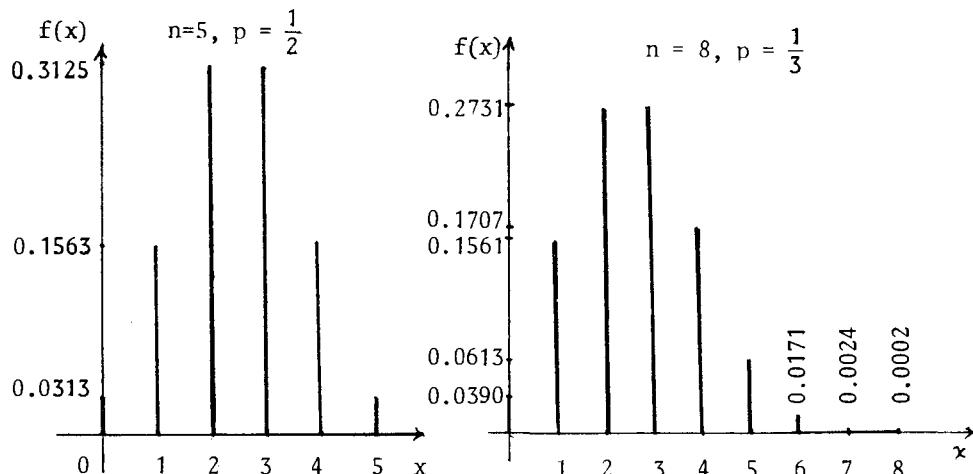
Obsérvese que $f(x)$, $x = 0, 1, 2, \dots, n$ son los términos del desarrollo $(q + p)^n$, es decir;

$$(q + p)^n = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} q^{n-x} p^x = \sum_{x=0}^n f(x)$$

En una distribución binomial los parámetros son n y p , es decir conocidos n y p , se pueden determinar las probabilidades y las gráficas.

Construyamos las gráficas de las distribuciones binomiales para

$$n = 5, p = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad n = 8, p = \frac{1}{3}$$



MEDIA Y VARIANZA DE LA DISTRIBUCION BINOMIAL:

Obtendremos la media y la varianza de la distribución binomial de dos maneras, intuitivamente y usando la función generatriz de momentos de manera de ilustrar los dos métodos.

La media y la varianza fueron definidas por

$$\mu = \sum x f(x) \quad y \quad \sigma^2 = \sum (x - \mu)^2 f(x) = \sum x^2 f(x) - \mu^2$$

$n = 1$	X $f(x)$	0 q	1 p	$\mu = 0q + 1p = 1p$	$\sigma^2 = (0^2 q + 1^2 p) - p^2$ $= p(1-p) = pq$		
$n = 2$	X $f(x)$	0 q^2	1 $2pq$	2 p^2	$\mu = 2pq + 2p^2$ $= 2p(q+p) = 2p$		
$n = 3$	X $f(x)$	0 q^3	1 $3q^2p$	2 $3qp^2$	3 p^3	$\mu = 3q^2 p + 6p^2 q + 3p^3$ $= 3p(q^2 + 2pq + p^2)$ $= 3p(q+p)^2$ $= 3p$	$\sigma^2 = (3q^2 p + 12qp^2 + qp^3) - 9p^2$ $= 3p(q^2 + 4pq + 3p^2 - 3p)$ $= 3p[q(q+4p) - 3p(1-p)]$ $= 3p[q(q+4n-3p)]$ $= 3p[q(q+p)]$ $= 3pq$

Intuitivamente vemos que para cualquier valor de n , la media $\mu = np$ y la varianza $\sigma^2 = npq$.

Usando la función generatriz de momentos

$$\begin{aligned}
 G(t) &= \sum_{x=0}^n e^{tx} f(x) \\
 &= \sum_{x=0}^n e^{tx} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \\
 &= \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} (pe^t)^x q^{n-x}
 \end{aligned}$$

La suma del lado derecho es el desarrollo del binomio $(q + p e^t)^n$, de donde:

$$G(t) = (q + p e^t)^n$$

Derivando:

$$G'(t) = n (q + p e^t)^{n-1} p e^t$$

Pero si $t = 0$, $G'(0) = \mu$

$$\mu = G'(0) = n (1 + p)^{n-1} p$$

como $q + p = 1$

$$\mu = np$$

Para obtener la varianza, derivamos nuevamente

$$G''(t) = n(n-1) (q+p e^t)^{n-2} (p e^t)^2 + n(q+p e^t)^{n-1} p e^t$$

Usando la ecuación (4) de la sección 4.6 y el hecho de que
 $q + p = 1$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= G'(0) = n(n-1) p^2 + n p \\ &= np[(n-1)p + 1] \\ &= np(np + p + 1) \\ &= np[np + (1-p)] \\ &= np(np + q) \\ &= (np)^2 + npq \end{aligned}$$

Pero como por la ecuación (2) de la sección 4.6 : $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$

$$\sigma^2 = (np)^2 + npq - (np)^2 = npq$$

$$\sigma^2 = npq$$

Ejemplo 5.2: Se conoce que 10% de cierta población es daltónica. Si se selecciona una muestra de 15 personas al azar de esta población, usando la tabla A-2, calcule las probabilidades siguientes:

- 4 o menos sean daltónicos.
- 5 o más sean daltónicos.
- entre 3 y 6 inclusive sean daltónicos

Solución: $n = 15$, $p = 0.10$, $q = 0.90$

$$a) P(X \leq 4) = \sum_{x=0}^4 f(x)$$

De la tabla A-2, $X = 0, 1, 2, 3, 4$ y $p = 0.10$, se suman los 5 primeros valores, que son:

$$0.2059 + 0.3431 + \frac{0.2669}{4} + 0.1285 + 0.0429 = 0.9873 = P(X \leq 4)$$

$$\begin{aligned} b) P(X \geq 5) &= 1 - \sum_{x=0}^{\infty} f(x) \\ &= 1 - 0.9873 \\ &= 0.0127 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) P(3 \leq X \leq 6) &= \sum_{x=3}^{6} f(x) = 0.1285 + 0.0429 + 0.0105 + 0.0019 = \\ &= 0.1838 \end{aligned}$$

Ejemplo 5.3: Se conoce que 95% de las piezas producidas por una máquina son perfectas. Se toma una muestra de 12 piezas al azar y se desea saber la probabilidad de que exactamente 9 sean perfectas.

Solución: $p = 0.95$, $n = 12$, $q = 0.05$, $x = 9$

$$P(X = 9) = \binom{12}{9} (0.95)^9 (0.05)^{12-9}$$

Como 0.95 no está en la tabla A-2, usamos la propiedad de los números combinatorios (Proposición 3.1 # 3)

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$\text{de donde } f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \binom{n}{n-x} q^{n-x} p^x$$

$$\text{Así } \binom{12}{9} (0.95)^9 (0.05)^3 = \binom{12}{3} (0.05)^3 (0.95)^9$$

Entonces, la probabilidad deseada se puede hallar utilizando $n = 12$, $x = 3$ y $p = 0.05$, de donde

$$P(X = 9) = 0.0174$$

5.3 DISTRIBUCION DE POISSON:

La distribución de Poisson es otra distribución discreta, cuyo nombre se debe al matemático francés, Simeon Denis Poisson (1781-1840), quien la introdujo en 1837. Esta distribución tiene grandes usos en

muchos campos, especialmente en Biología y Medicina.

Si X es el número de ocurrencias de un evento aleatorio en un intervalo de tiempo o espacio (o volumen), la probabilidad de que X ocurra, está dada por la función de probabilidad de Poisson.

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

La letra griega λ (lambda) es el parámetro de esta distribución y es el **promedio** de ocurrencias del evento aleatorio en el intervalo.

El símbolo e es una constante cuyo valor aproximado a 4 cifras decimales es 2.7183 (base de los logaritmos naturales).

Un experimento que cumple con las siguientes condiciones se llama experimento de Poisson.

1.- Los eventos ocurren en forma independiente; es decir, la ocurrencia de un evento en un intervalo de tiempo o espacio no afecta la probabilidad de una segunda ocurrencia del evento en el mismo u otro intervalo.

2.- Teóricamente es posible que el evento pueda ocurrir infinitas veces en el intervalo.

3.- La probabilidad de que ocurra un evento en un intervalo es proporcional a la longitud del intervalo.

APROXIMACION DE LA DISTRIBUCION BINOMIAL MEDIANTE LA DISTRIBUCION DE POISSON

Cuando el número de ensayos es muy grande, los cálculos de las probabilidades binomiales se vuelven tediosos y largos, por lo que es conveniente tener una aproximación de estas probabilidades, una de ellas es la aproximación de Poisson y otra es la normal que veremos después.

La aproximación de la distribución binomial mediante la distribución de Poisson se usa cuando n es muy grande ($n \rightarrow \infty$) y p es muy pequeño ($p \rightarrow 0$), de tal manera que $\mu = np$ permanezca constante.

Partiendo de la distribución de probabilidad binomial

$$\begin{aligned} f(x) &= \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-x+1)}{x!} p^x (1-p)^{n-x} \end{aligned}$$

Multiplicando el numerador y denominador por n se tiene

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{n(n-1)\dots(n-x+1)}{n^x x!} n^x p^x (1-p)^{n-x} \\
 &\approx \frac{n(n-1)\dots(n-x+1)}{n^x x!} (np)^x (1-p)^{n-x} \\
 &= \frac{n(n-1)\dots(n-x+1)}{n^x x!} \mu^x (1-p)^{n-x} \\
 &= \frac{1}{(1-\frac{1}{n})} \frac{(1-\frac{2}{n})}{(1-\frac{1}{n})} \dots \frac{(1-\frac{x-1}{n})}{(1-\frac{1}{n})} \frac{\mu^x}{x!} (1-p)^{n-x} \\
 &= \frac{(1-\frac{1}{n})}{(1-p)^x} \frac{(1-\frac{2}{n})}{(1-\frac{1}{n})} \dots \frac{(1-\frac{x-1}{n})}{(1-\frac{1}{n})} \frac{\mu^x}{x!} (1-p)^n \dots (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ahora expresemos } (1-p)^n \text{ en la forma } (1-p)^n &= \left[(1-p)^{-\frac{1}{p}} \right]^{-np} \\
 &= \left[(1-p)^{-\frac{1}{p}} \right]^{-\mu}
 \end{aligned}$$

Usando la definición del número real e

$$\lim_{z \rightarrow 0} (1+z)^{\frac{1}{z}} = e$$

Haciendo z = -p

$$\lim_{p \rightarrow 0} \left[(1-p)^{-\frac{1}{p}} \right]^{-\mu} = e^{-\mu} \dots (2)$$

Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\dots(1-\frac{x-1}{n})}{(1-p)^x} = 1 \dots (3)$$

(Puesto que p → 0 cuando n → ∞ y μ = np permanece constante)

Sustituyendo (2) y (3) en (1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!}$$

Aquí vemos que la media de Poisson $\lambda = y = np$. Este resultado se puede enunciar como un teorema.

TEOREMA:

Si la probabilidad de éxito en un ensayo es p y tiende a cero mientras el número de ensayos n tiende a infinito de tal manera que la media $\mu=nn$ permanezca constante, entonces la distribución binomial se aproxima a la distribución de Poisson con media $\lambda = np$.

La siguiente tabla muestra la aproximación de la distribución binomial mediante la distribución de Poisson para diferentes valores de n y p .

x	DISTRIBUCION BINOMIAL			DISTRIBUCION DE POISSON
	$n=4, p=\frac{1}{4}$	$n=8, p=1/8$	$n=100, p=1/100$	$\mu = 1$
0	0.316	0.344	0.366	0.368
1	0.422	0.392	0.370	0.368
2	0.211	0.196	0.185	0.184
3	0.047	0.056	0.061	0.061
4	0.004	0.010	0.015	0.015
5	—	0.001	0.003	0.003

Ejemplo 5.4: Supóngase que un conmutador de teléfonos maneja 300 llamadas en promedio durante una hora de actividad, y que el tablero puede hacer a lo más 10 conexiones por minuto. Estimar la probabilidad de que el tablero esté sobrecargado en un minuto dado.

Solución: $\lambda = \frac{300}{60} = 5$ llamadas por minuto.

$$P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - \sum_{x<10} P(X=x) = 1 - 0.986310 = 0.013690 \approx 1.4\%$$

Ejemplo 5.5: Si la probabilidad de que un individuo sufra una reacción desfavorable por una inyección de cierto suero es de 0.001. Determinar la probabilidad de que de 200 personas:

- a) Exactamente 3 sufren la reacción.
- b) 2 o más sufren la reacción.

Solución: $\lambda = (200)(0.001) = 0.2$

a) $P(X=3) = \frac{e^{-0.2}(0.2)^3}{3!} = 0.00109164 \approx 0.11\%$

b) $P(X \geq 2) = 1 - [f(0) + f(1)]$
 $= 1 - (0.818731 + 0.163746)$
 $= 1 - 0.982477$
 $= 0.017523$
 $\approx 1.75\%$

Varianza de la Distribución de Poisson:

Usando la función generatriz de momentos

$$\begin{aligned} G(t) &= \sum_x e^{tx} f(x) \\ &= \sum_x e^{tx} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_x \frac{(e^t \lambda)^x}{x!} \end{aligned}$$

Haciendo $e^t \lambda = y$, el desarrollo en serie de McLaurin de e^y es $\sum_x \frac{y^x}{x!}$, por lo que $e^{(e^t \lambda)} = e^y = \sum_x \frac{(e^t \lambda)^x}{x!}$, de donde

$$G(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t}$$

$$G(0) = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

Derivando dos veces

$$G'(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} \lambda e^t = \lambda e^t G(t)$$

$$\begin{aligned} G''(t) &= \lambda e^t G(t) + \lambda e^t G'(t) \\ &= \lambda e^t G(t) + G'(t) \end{aligned}$$

$$G'(0) = \mu = \lambda$$

$$G''(0) = E(X^2) = \lambda(1 + \lambda) = \lambda + \lambda^2$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda$$

COMPARACION ENTRE LAS DISTRIBUCIONES BINOMIAL Y DE POISSON

	BINOMIAL	POISSON
Resultados posibles	enteros entre 0 y n	enteros de 0 a ∞
Observaciones	conteo de éxitos o de fracasos	conteo solo de éxitos
Parámetros	n y p	λ
Función de Probabilidad	$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ $X = 0, 1, 2, \dots, n$	$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$ $X = 0, 1, 2, \dots$
Función de distribución acumulada	$F(x) = \sum_{k \leq x} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ $x \geq 0$	$F(x) = e^{-\lambda} \sum_{s \leq x} \frac{\lambda^s}{s!}, x \geq 0$
Media	$\mu = np$	λ
Varianza y desviación estándar	$\sigma^2 = npq, \sigma = \sqrt{npq}$	$\sigma^2 = \lambda \quad \sigma = \sqrt{\lambda}$

5.4 DISTRIBUCION MULTINOMIAL:

El modelo binomial que trata de ensayos independientes con dos resultados cada uno, solo es un caso particular del modelo multinomial, que se refiere a ensayos independientes con más de dos resultados.

Supóngase que tenemos un experimento que es capaz de dar k resultados mutuamente exclusivos posibles, E_1, E_2, \dots, E_k , con probabilidades respectivas p_1, p_2, \dots, p_k donde $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$. Si repetimos este experimento n veces independientemente, y las p permanecen constantes, la probabilidad de obtener x_1 ocurrencias de E_1, x_2 ocurrencias de $E_2, \dots, v x_k$ ocurrencias de E_k , dado que $x_1 + x_2 + x_3 + \dots = n$.

$$\text{es } f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!} (p_1)^{x_1} (p_2)^{x_2} \dots (p_k)^{x_k} \quad (1)$$

puesto que la probabilidad de cualquier serie de resultados mutuamente exclusivos provenientes de experimento independientes es igual al producto de sus probabilidades, es decir $(p_1)^{x_1} (p_2)^{x_2} \dots (p_k)^{x_k}$, además el número de resultados donde x_1 son de un tipo, x_2 de otro tipo, ..., x_k de otro tipo es $\frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!}$.

El nombre multinomial se debe a que la fórmula (1) se obtiene del desarrollo multinomial $(p_1 + p_2 + \dots + p_k)^n$ al igual que la distribución binomial recibe su nombre del desarrollo del binomio $(q + p)^n$.

Ejemplo 5.6: Un ingeniero sabe que el 80% de la producción de una máquina es aceptable, 15%, requiere de cierto trabajo adicional y 5% se debe descartar. En una muestra de $n=10$, ¿cuál es la probabilidad de obtener 8 partes buenas, 2 que necesiten ser repetidas, y ninguna que se deba descartar?

Solución:

$$f(8, 2, 0) = \frac{10!}{8! 2! 0!} (0.8)^8 (0.15)^2 (0.05)^0 = 0.17$$

5.5 DISTRIBUCION HIPERGEOMETRICA.

Al hacer extracciones con reemplazo los resultados son independientes por lo que la extracción con reemplazo lleva a la distribución binomial. La extracción sin reemplazo es de gran importancia también pero conduce a una distribución más complicada, la distribución hipergeométrica que se relaciona con situaciones con dos o más resultados, en los que la probabilidad de tener éxito cambia de ensayo a ensayo (no independientes).

Consideremos una población de N unidades, k de las cuales poseen cierta característica y $N-k$ de las cuales no la poseen. Si se hace una elección al azar de una unidad entre tal población, el resultado debe ser una de las k (éxitos) o una de las $N-k$ (fracasos). Pero si se hacen n elecciones al azar, sin reemplazo, entre la población, cada extracción sucesiva es dependiente y la probabilidad de éxito cambia en cada extracción. En estas condiciones, si deseamos obtener x unidades del tipo k (éxitos), en una muestra al azar de tamaño n , el número de éxitos en esta situación se llama variable hipergeométrica y es generada por tres números fijos N , n , y k .

Procedamos a derivar la función de probabilidad hipergeométrica para esta variable aleatoria.

Primero recordamos que el número de formas (combinaciones) de extraer n unidades de N cosas es $\binom{N}{n}$. Luego, observemos que el número total de formas mutuamente exclusivas de obtener exactamente x unidades de los k que poseen cierta característica en n extracciones sin reemplazo, v $n-x$, que no poseen la característica de un total de $N-k$ disponibles, es $\binom{k}{x} \binom{N-k}{n-x}$

Finalmente, si el proceso de muestreo es al azar, todas las unidades aún disponibles después de cualquier número de elecciones es igualmente probable que sean escogidas. Como resultado, podemos asignar iguales probabilidades a cada uno de los $\binom{N}{n}$ puntos del espacio muestra, $\frac{1}{\binom{N}{n}}$. Esto nos conduce a

$$f(x) = \frac{\binom{k}{x} \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

donde: a) $\binom{N}{n}$ es el número total de formas de elegir n artículos de los N

b) $\binom{k}{x}$ es el número de formas diferentes de elegir x artículos que posean la característica k .

c) $\binom{N-k}{n-x}$ es el número de formas diferentes de escoger $n-x$ artículos de los $N-k$ que no poseen la característica.

MEDIA Y VARIANZA DE LA DISTRIBUCION HIPERGEOMETRICA.

$$\text{Media: } \mu = n \left(\frac{k}{N} \right)$$

$$\text{Varianza: } \sigma^2 = n \left(\frac{k}{N} \right) \left(\frac{N-k}{N} \right) \left(\frac{n}{N-1} \right) = \frac{nk(N-n)}{N^2} \frac{(N-k)}{(N-1)}$$

Para demostrar que $\mu = n\left(\frac{k}{N}\right)$, observemos que la variable hipergeométrica X también puede ser considerada como una suma, al igual que la variable binomial, de n variables X_1 , excepto que en el modelo hipergeométrico X_1, X_2, \dots, X_n son dependientes. Pero como la propiedad aditiva de la esperanza matemática no requiere de la independencia de las X_i ,

$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$ donde cada $E(X_i)$ es la probabilidad de X en el i -ésimo ensayo $\left(\frac{k}{N}\right)$, si no se sabe lo sucedido en los ensayos anteriores o posteriores.

$$\text{Así: } E(X) = n\left(\frac{k}{N}\right)$$

La varianza no es aditiva para variables dependientes, pero puede demostrarse en el caso hipergeométrico introduciendo un factor de corrección $\frac{N-n}{N-1} \dagger$ cuando el muestreo se hace sin reemplazo a la varianza binomial (con reemplazo)

$$\sigma_B^2 = npq = n \left(\frac{k}{N} \right) \left(\frac{N-k}{N} \right)$$

[†] $\frac{N-n}{N-1}$ es llamado "factor de corrección por población finita"

Por lo tanto

$$\sigma^2_H = n \left(\frac{k}{N} \right) \left(\frac{N-k}{N} \right) \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$$

Ejemplo 5.7: En una caja de 10 fusibles, dos de ellos están defectuosos. Si se examina una muestra aleatoria de 4 fusibles.

¿Cuál es la probabilidad de encontrar: a) ninguno defectuoso ? b) uno defectuoso? c) uno o menos defectuosos?

Solución: N = 10 , k = 2 , n = 4

$$a) f(0) = \frac{\binom{2}{0} \binom{8}{4}}{\binom{10}{4}} = 0.3333$$

$$b) f(1) = \frac{\binom{2}{1} \binom{8}{3}}{\binom{10}{4}} = 0.5333$$

$$c) f(x \leq 1) = f(0) + f(1) = 0.3333 + 0.5333 = 0.8666$$

Ejemplo 5.8: En un estudio biológico se emplea un grupo de 10 individuos. El grupo contiene 3 personas con sangre tipo O, 4 con tipo A y 3 con tipo B. ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra aleatoria de 5 contenga 1 persona con sangre tipo O, 2 con tipo A y 2 con tipo B?

Solución: Empleando una distribución hipergeométrica con 3 resultados, donde N= 10 , k₁= 3 , k₂= 4 , k₃ = 3 , n = 5 , x₁ = 1 ,

$$x_2 = 2 , x_3 = 2 .$$

$$f(1,2,2) = \frac{\binom{3}{1} \binom{4}{2} \binom{3}{2}}{\binom{10}{5}} = 0.2143$$

Ejemplo 5.9: Una serie de ocho lámparas se conecta de tal forma que si una de ellas falla, el sistema no funcionará. Si dos lámparas fallan:

- ¿Cuál es la probabilidad de que la primera que se inspeccione, sea una de las que falló?
- ¿Cuál es la probabilidad de encontrar las dos que fallan si se inspeccionan cuatro de ellas?
- ¿Cuántas lámparas se deben inspeccionar para tener un 70% de probabilidades de encontrar las dos lámparas defectuosas?

Solución: a) $N = 8$, $k = 2$, $n = 1$, $x = 1$

$$f(1) = \frac{\binom{2}{1} \binom{6}{0}}{\binom{8}{1}} = \frac{2}{8} = 0.25$$

b) $N = 8$, $k = 2$, $n = 4$, $x = 2$

$$f(x) = \frac{\binom{2}{2} \binom{6}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{15}{70} = 0.2143$$

c) $N = 8$, $k = 2$, $n = ?$, $x = 2$

$$f(2) = \frac{\binom{2}{2} \binom{6}{n-2}}{\binom{8}{n}} = 0.70$$

$$\frac{\frac{6!}{(n-2)! (8-n)!}}{\frac{8!}{(8-n)! n!}} = 0.70 \iff \frac{6! n!}{8! (n-2)!} = 0.70$$

$$\frac{n(n-1)}{8 \cdot 7} = 0.70 \iff n^2 - n = 39.2 \iff n = 6.78$$

$n \approx 7$ (debido a que la variable es discreta).

COMPARACION ENTRE LAS DISTRIBUCIONES BINOMIAL, POISSON, MULTINOMIAL E HIPERGEOMETRICA:

	Función de Probabilidad	# de resultados	Ejemplos	Supuestos
BINOMIAL	$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$	dos resultados: éxito y fracaso	1) Lanzamiento de una moneda 2) Pruebas de verdadero-falso 3) Defectuoso y no defectuoso 4) Nacimiento de un niño	Observaciones independientes con probabilidad constante . muestreo con reemplazo.
POISSON	$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$	solamente éxitos	1) Accidentes por año 2) Defectos por metro 3) Llamadas por minuto.	Observaciones independientes con probabilidad constante .
MULTINOMIAL	$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{n! (p_1)^{x_1} (p_2)^{x_2} \dots (p_k)^{x_k}}{x_1! x_2! \dots x_k!}$	Más de dos resultados .	1) Pruebas de selección múltiple 2) Lanzamiento de un dado 3) Problemas de Genética	Muestra con reemplazo con más de dos resultados. Observaciones independientes con probabilidad constante .
HIPERGEOMÉTRICA	$f(x) = \frac{\binom{k}{x} \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	Dos o más resultados.	1) Muestreo sin reemplazo.	Observaciones dependientes.

5.6 DISTRIBUCION BINOMIAL NEGATIVA O DE PASCAL:

Consideremos un experimento cuyas propiedades son las mismas que las enlistadas para un experimento binomial, con la excepción de que los ensayos se repiten hasta que ocurra un número fijo de éxitos. Por ello, en lugar de encontrar la probabilidad de x éxitos en n ensayos, donde n es fijo, ahora nos interesa la probabilidad de que el k -ésimo éxito ocurra en el x -ésimo ensayo. A un experimento de este tipo se le llama experimento binomial negativo o de Pascal.

Como ejemplo, consideremos el uso de un medicamento que se sabe es eficaz en un 60% de los casos. Tomaremos como éxito cuando se proporciona algún alivio al paciente. Queremos encontrar la probabilidad de que el quinto paciente que experimente alivio, sea el séptimo que ha recibido el medicamento durante una semana dada. Si E denota éxito y F fracaso, uno de los resultados pudiera ser E E F F E E E que ocurre con la probabilidad $(0.6) (0.6) (0.4) (0.4) (0.6) (0.6) (0.6) = (0.6)^5 (0.4)^2$

Puesto que en el último ensayo debe haber un éxito, este es un resultado fijo, de manera que el número total de órdenes posibles precedentes al quinto éxito en las 6 ejecuciones o ensayos precedentes al quinto éxito es

$$\frac{6!}{4! 2!} = 15 = \binom{6}{4}$$

Así, si X representa el número de ensayos que produce k éxitos en un experimento binomial negativo, entonces X se llama variable aleatoria binomial negativa y

$$f(X = 7) = \binom{6}{4} (0.6)^5 (0.4)^2 = 0.1866$$

La distribución de probabilidad de la variable aleatoria binomial negativa depende del número de éxitos deseados y de la probabilidad de un éxito en un ensayo cualquiera. Para obtener la fórmula general, consideremos la probabilidad de que ocurra un éxito en el x -ésimo ensayo, precedido por $k-1$ éxitos y $x-k$ fracasos en algún orden. Como los ensayos son independientes, podemos multiplicar todas las probabilidades correspondientes a cada resultado. Cada éxito ocurre con probabilidad p y cada fracaso con probabilidad $q = 1 - p$. Por lo tanto, la probabilidad para un orden cualquiera, terminando en un éxito es

$$p^{k-1} q^{x-k} p = p^k q^{x-k}$$

El número total de resultados precedidos al k -éxito es igual al número de particiones de $x-1$ ensayos en dos grupos, $k-1$ éxitos y $x-k$ fracasos en cualquier orden es igual a $\binom{x-1}{k-1}$ cada uno mutuamente exclusivo y con igual probabilidad $p^k q^{x-k}$, donde

$$f(x) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k}, \quad x = k, k+1, k+2, \dots$$

Ejemplo 5.10: Encontrar la probabilidad de que al lanzar tres monedas al aire, se obtengan tres caras o tres sellos por segunda vez en el quinto tiro.

Solución: $x = 5, k = 2, p = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$$f(x) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k} = \binom{4}{1} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 0.1055$$

5.7- DISTRIBUCION GEOMETRICA

Si consideramos el caso especial de la distribución binomial negativa donde x representa el número de ensayos en que ocurre el primer éxito ($k=1$), tenemos una distribución de probabilidad para el número de ensayos en que ocurre un solo éxito con función de probabilidad

$$f(x) = p q^{x-1}, \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

Ejemplo 5.11: Se sabe que en cierto proceso de fabricación, en promedio, 1 de cada 100 piezas está defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que se inspeccionen 5 piezas antes de encontrar una defectuosa?

Solución: $x = 6, p = 0.01$

$$f(x) = p q^{x-1} = (0.01) (0.99)^5 = 0.0055099$$

MEDIA Y VARIANZA DE LA DISTRIBUCION GEOMETRICA

La función generatriz de momentos para esta distribución es

$$\begin{aligned} G(t) &= E(e^{tx}) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} f(x) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} p q^{x-1} \\ &= p \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} q^{x-1} \left(\frac{q}{q}\right) = \frac{p}{q} \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} q^x \\ &= \frac{p}{q} \sum_{x=1}^{\infty} (e^{tq})^x = \frac{p}{q} \left[\frac{1}{1 - e^{tq}} - 1 \right]^+ \end{aligned}$$

† La serie geométrica $\sum_{x=1}^{\infty} (e^{tq})^x$ converge a $\frac{1}{1 - e^{tq}} - 1$ ya que la suma de los $n-1$ primeros términos

$$\begin{aligned} e^{tq} + (e^{tq})^2 + \dots + (e^{tq})^{n-1} &= 1 + e^{tq} + (e^{tq})^2 + \dots + (e^{tq})^{n-1} - 1 \\ &= \left[\frac{1 - (e^{tq})^n}{1 - e^{tq}} \right] - 1 \\ &= \left[\frac{1}{1 - e^{tq}} \right] - 1 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty \text{ y } |e^{tq}| < 1 \end{aligned}$$

$$G'(t) = \frac{p}{q} \left[\frac{e^t q}{(1-e^t q)^2} \right]$$

$$\mu = G'(0) = \frac{p}{q} \left[\frac{q}{(1-q)^2} \right] = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$\mu = \frac{1}{p}$$

$$\text{La varianza } \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

$$= G''(0) - \mu^2$$

$$G''(t) = \frac{p}{q} \left[\frac{e^t q (1+e^t q)}{(1-e^t q)^3} \right]$$

$$G''(0) = \frac{p}{q} \left[\frac{q(1+q)}{(1-q)^3} \right] = \frac{p(1+q)}{p^3} = \frac{1+(1-p)}{p^2} = \frac{2-p}{p^2}$$

$$\sigma^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{2-p-1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

- 5.1. Asumiendo que las probabilidades de que nazca un niño o niña son iguales, ¿cuál es la probabilidad de que una familia que tiene 4 hijos tenga:
- exactamente un varón?
 - exactamente una niña?
 - por lo menos un varón?
- 5.2.- La probabilidad de que un televisor de determinada marca salga defectuoso es de 0.20. Si se toma una muestra aleatoria de 20 televisores, ¿cuál es la probabilidad de que la muestra contenga:
- exactamente dos defectuosos?
 - ningún defectuoso?
- 5.3.- La probabilidad de que un estudiante que entra a la Universidad termine su primer año satisfactoriamente es de 0.75. ¿Cuál es la probabilidad que de 10 estudiantes seleccionados aleatoriamente 9 terminen su primer año satisfactoriamente?
- 5.4.- Se sabe que de cada 10 divorcios 9 son por incompatibilidad de caracteres. ¿Cuál es la probabilidad de que de 8 casos de divorcio, exactamente 4 sean por incompatibilidad?
- 5.5.- Noventa por ciento de las personas empleadas después de pasar un test de aptitud se desempeñan favorablemente en dicho trabajo. ¿Cuál es la probabilidad que 6 de 8 personas que acaban de pasar el test serán trabajadores exitosos?
- 5.6.- Una fábrica envía al depósito 500 artículos. La probabilidad de deterioro de un artículo en el camino es de 0.002. Hallar la probabilidad de que en el camino se deterioren:
- exactamente 3 artículos
 - menos de tres
 - más de tres
 - por lo menos un artículo

5. 7.- Un manual se edita con un tiraje de 100,000 ejemplares. La probabilidad de que un manual esté encuadrado en tela incorrectamente es de 0.0001. Hallar la probabilidad que el tiraje contenga exactamente 5 libros defectuosos.
5. 8.- Hallar el promedio de artículos defectuosos en una partida de mercancías, si la probabilidad de que en esta partida haya por lo menos un artículo defectuoso, es igual a 0.95. Se supone que el número de artículos defectuosos en la partida examinada está distribuido por la ley de Poisson.
- 5.9.- Si el promedio de accidentes graves por año en una industria (donde el número de empleados permanece constante) es de 5 y si el número de accidentes se distribuye según Poisson, encontrar la probabilidad de que en el presente año haya:
- exactamente 7 accidentes
 - ningún accidente
 - máximo 5 accidentes
- 5.10.- Si en una ciudad 24% de la población tienen sangre tipo B y si tomamos una muestra de 20 personas de esa población. ¿Cuál es la probabilidad de que:
- exactamente 3 tengan sangre tipo B
 - ninguna o una persona tengan sangre tipo B
 - al menos 2 tengan sangre tipo B
- 5.11.- En un proceso de fabricación se intenta producir unidades precoladas en las cuales no haya más de un 2% de defectuosas. Todos los días se verifica esto al someter a prueba 10 unidades seleccionadas al azar en la producción diaria. Si existen fallas en una o más de la población de 10, se detiene el proceso y se le somete a un examen cuidadoso. Si de hecho, la probabilidad de producir una unidad defectuosa es de 0.01.
- ¿Cuál es la probabilidad de que haya una o más unidades defectuosas?
 - ¿Qué probabilidad hay de que no se presente ninguna defectuosa en determinada prueba?

c) Obtenga la media y la desviación estándar del número de unidades defectuosas en una muestra de 10.

5.12. El encargado de la sección de fundición de cierta fábrica observa que, en promedio, 1 de cada 5 piezas fundidas tiene defectos. Si la sección produce 8 piezas diarias, ¿qué probabilidad hay de que 2 de ellas estén defectuosas? ¿que tan probable es que 5 o más de las piezas que presenten fallas hayan sido fabricadas el mismo día?.

5.13.- Asumiendo que el número de partículas emitidas por una fuente radio activa se distribuye según Poisson con un promedio de emisión de 2 partículas por segundo. Encuentre la probabilidad de que como máximo 1 partícula sea emitida en 3 segundos.

5.14,- Se conoce que en un líquido en promedio hay 4 bacterias por centímetro cúbico. Se llenan 10 tubos de ensayo de un centímetro cúbico de capacidad, con el líquido. Suponiendo que la distribución de Poisson es aplicable en este problema, calcular la probabilidad de que:

- por lo menos haya una bacteria en cada uno de los diez tubos.
- por lo menos haya una bacteria en exactamente 8 tubos.

5.15.- Se llevó a cabo un estudio de cuatro manzanas de casas donde hay 52 lugares de estacionamiento de 1 hora, obteniéndose los resultados siguientes:

Número de lugares de estacionamiento vacantes por período de observación	0	1	2	3	4	5	≥ 6
Frecuencia observada	30	45	20	15	7	3	0

Suponiendo que los datos siguen una distribución de Poisson, determine:

- El número promedio de lugares para estacionarse libres.
- La desviación estándar, y
- La probabilidad de encontrar uno o más lugares para estacionarse que estén desocupados.

- 5.16.- Cierta zona de un continente sufre en promedio seis huracanes por año, encuentre la probabilidad de que, en un año dado,
- sufra menos de cuatro huracanes.
 - sufra entre seis y ocho huracanes inclusive.
- 5.17.- De acuerdo con la teoría de la genética, cierto cruce de conejillos de indias da por resultado crías rojas, negras y blancas en una proporción 8:4:4. Halle la probabilidad de que, en ocho descendientes, cinco sean rojos, dos negros y uno blanco.
- 5.18.- Se tiene una caja con 52 bolitas numeradas del 1 al 52. Suponiendo que de la 1 a la 13 son las premiadas y se sacan dos bolitas aleatoriamente. ¿Cuál es la probabilidad de que:
- ambas sean premiadas
 - ninguna sea premiada
 - por lo menos una sea la premiada.
- 5.19.- Un hombre planta seis bulbos, seleccionados al azar de una caja que contiene cinco, de tulipán y cuatro de narciso. ¿Cuál es la probabilidad de que plante dos de narciso y cuatro de tulipán?
- 5.20.- Una caja contiene 100 artículos de los cuales 4 son defectuosos. Sea X el número de artículos defectuosos en una muestra de 9. Cálculo la probabilidad de $X = 2$, usando:
- la distribución Binomial.
 - la distribución de Poisson.
- 5.21.- Un determinado antibiótico se envía a las farmacias en cajas de 24 botellas. El farmacéutico sospecha que la cantidad de antibiótico en algunos frascos es deficiente y decide analizar el contenido de 5 frascos. Suponga que 10 de las 24 botellas tienen cantidad deficiente de antibiótico.
- Sea X el número de frascos que contiene una cantidad deficiente de antibiótico en la muestra de 5. Explique por qué X es, o no es una variable aleatoria hipergeométrica.
 - Encuentre la probabilidad de que ninguno de los frascos analizados tenga una cantidad deficiente de antibiótico.
 - Encuentre la probabilidad de que $x=1$.

5.22.- Una urna contiene 15 bolas, de las cuales 10 son rojas y 5 blancas. Si se sacan 6 sin volverlas a meter, hallar la probabilidad de que haya:

- a) Dos bolas blancas y 4 rojas
- b) A lo más, 2 canicas blancas,
- c) Al menos, 4 canicas rojas,
- d) Al menos, 2 canicas rojas.

3.2 3.-Una compañía de raxis tiene 12 Chevrolets y 8 Fords. Si 5 de estos taxis se encuentran en el taller de reparación y las averías que pueden existir en un Chevrolet se presentan con la misma frecuencia en un Ford, ¿Cuál es la probabilidad de que:

- a) ¿Tres de los taxis sean Chevrolet y 2 Ford?
- b) ¿Los 5 sean de la misma marca?

5.24.- Un dado se gira 8 veces, ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 doses, 2 cuatros, 1 cinco y 2 seises?

5.25.- Los ladrillos de vidrio defectuosos se clasifican en una fábrica de acuerdo con que tengan roturas, estén decolorados, o ambas cosas.

Si la probabilidades respectivas son: 0.50, 0.40 y 0.10, hallar la probabilidad de que seis de entre diez de estos ladrillos tengan roturas, 3 estén decolorados y uno presente ambos defectos.

5.26.- Si las probabilidades de que un accidente de un avión produzca daños menores, graves o mortales al piloto son, respectivamente, 0.20, 0.50 y 0.10, hallar la probabilidad de que, en seis accidentes, el piloto sufra daños mortales en tres de ellos, no sufra daños en uno y sufra daños graves en dos.

5.27.- Se estima que la probabilidad de que una persona instale un teléfono negro en una casa es de 0.3. Encuentre la probabilidad de que el décimo teléfono instalado sea el quinto teléfono negro.

- 5.28.- Un investigador inocula a varios ratones, uno a la vez, con un virus de una enfermedad hasta encontrar que dos la han contraído. Si la probabilidad de contagio es de $\frac{1}{6}$, ¿cuál es la probabilidad de que se requieran ocho ratones?
- 5.29.- La probabilidad de que un estudiante de aviación apruebe el examen escrito para obtener su licencia de piloto es 0.7. Encuentre la probabilidad de que una persona apruebe el examen.
- en el tercer intento.
 - antes del cuarto intento.
- 5.30.- El número de averías semanales de una computadora es una variable aleatoria que tiene una distribución de Poisson con $\lambda = 0.4$. ¿Cuál es la probabilidad de que la computadora trabaje sin averías durante dos semanas consecutivas?
- 5.31.- El número de rayos gamma emitidos por un segundo por una sustancia radio-activa es una variable aleatoria que sigue una distribución de Poisson con $\lambda = 5.5$. Si un instrumento de medida se bloquea cuando hay más de 12 rayos por segundo, ¿cuál es la probabilidad de que el instrumento se bloquee durante un segundo dado?
- 5.32.- El número de huracanes que llega a la costa oriental de los Estados Unidos por año, es una variable aleatoria que sigue una distribución de Poisson con $\lambda = 1.8$. Hallar la probabilidad de que en un año dado el número de huracanes sea:
- cero.
 - exactamente 3.
 - dos o más.
- 5.33.- Una reciente encuesta nacional señaló que a las 9 p.m. del sábado, 40% del teleauditorio sintoniza el canal A, 30% el canal B y 30% el canal C.
- En una muestra aleatoria de 10 televidentes, ¿cuántos se esperaría que estuvieran viendo cada canal?

- b) ¿Cuál es la probabilidad de que todos sintonicen el canal A?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que 4 sintonicen el canal A, 3 el canal B y 3 el canal C?

5.34.- Tres individuos venden refacciones. El vendedor A provee del 50% de las partes, el B del 40% y el C del 10%. Si se seleccionan aleatoriamente 5 refacciones del suministro total y se le buscan defectos.

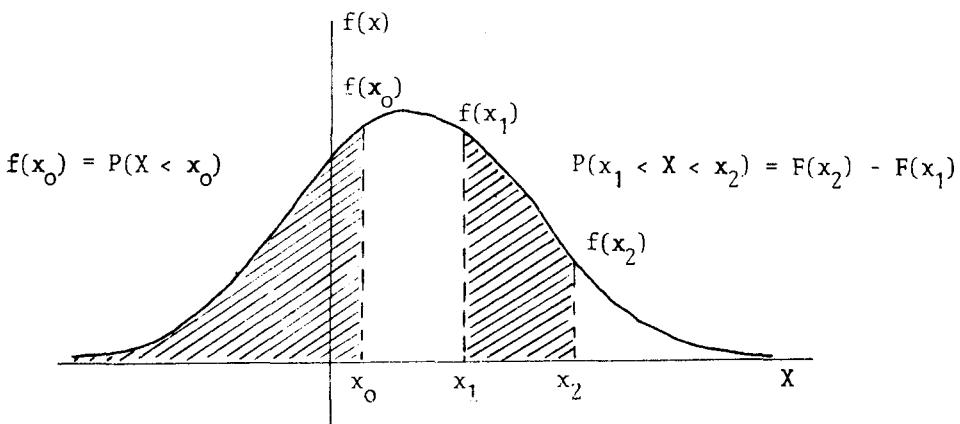
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que las 5 las haya proporcionado el vendedor A?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que 2 sean del vendedor A, 2 del B y 1 del C?

5.35.- El 30% de los alumnos de una Universidad son de primer año, el 30% de segundo, el 20% de tercero y el 20% de cuarto año. De una lista se toma una muestra aleatoria de 8 estudiantes. Calcule la probabilidad de que en esta lista resulten:

- a) dos alumnos de cada año.
- b) tres del primero, tres de segundo, dos de tercero y ninguno de cuarto.

CAPITULO 6: DISTRIBUCIONES CONTINUAS

Hasta ahora nos hemos ocupado exclusivamente de las distribuciones de variables aleatorias discretas. Para una variable aleatoria discreta, la función de distribución acumulada es una función escalonada, una función que solo se incrementa por saltos finitos y es constante entre dos valores adyacentes cualesquiera de la variable. Si la variable aleatoria es continua, tiene un número incontable de valores posibles. La función de distribución acumulada será continua en el sentido de que su gráfica es suave, es decir, no hay saltos en la probabilidad en cualquiera de los valores de la variable. Debido a la continuidad, la probabilidad de X en un punto cualquiera de sus valores posibles es cero. Así, aunque la función de distribución acumulada de una variable aleatoria continua puede ser aplicada, no da resultados útiles. En su lugar, representamos la función de X , $f(x)$ como una función densidad de probabilidades. Por tanto, la función densidad es una medida de la concentración de probabilidad dentro de un intervalo. Esta probabilidad puede interpretarse como un área (una integral) bajo la curva de $f(x)$, llamada curva de densidad, limitada por las ordenadas de los extremos del intervalo. Más, precisamente, si X es una variable aleatoria continua, la probabilidad de que asuma un valor en el intervalo (x_1, x_2) , puede representarse por $P(x_1 < X < x_2)$ y es igual al área bajo la curva de $f(x)$ encerrada por las ordenadas erigidas en x_1 y x_2 .



6.1 DISTRIBUCION CONTINUA UNIFORME:

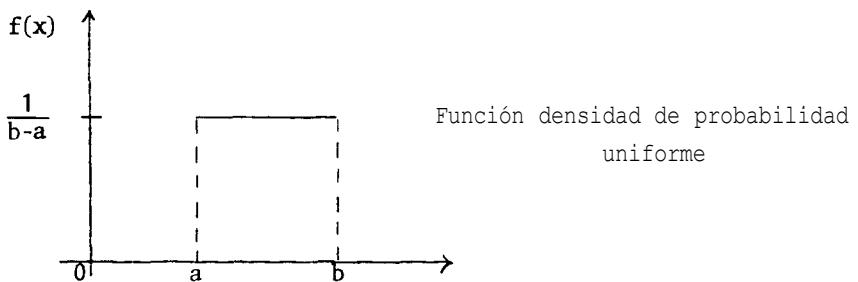
Iniciamos nuestro estudio de las distribuciones continuas con el modelo más sencillo, la distribución uniforme continua o distribución rectangular.

La función densidad uniforme está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$$

La función de distribución acumulada uniforme es:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$



Ejemplo 6.1: Supóngase que X tiene una distribución uniforme en el intervalo $-1 \leq X \leq 1$. Encuentre la función densidad $f(x)$, y la función de distribución, $F(x)$. Calcular $P(X > 0)$, $P(0 \leq X \leq 0.3)$ y $P(X = 0.5)$.

Solución:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & , x \notin [-1,1] \end{cases}$

b) $F(x) = \begin{cases} 0 & , x \notin [-1,1] \\ \frac{x+1}{2} & , -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$

c) $P(X > 0) = 1 - F(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$P(0 \leq X \leq 0.3) \approx F(0.3) - F(0) \approx \frac{1.3}{2} - \frac{1}{2} = 0.65 - 0.5 = 0.15$$

$$P(X = 0.5) = 0$$

6.2 DISTRIBUCION NORMAL:

Sin lugar a duda, el modelo de mayor uso de todas las distribuciones continuas es la distribución normal o distribución Gaussiana (atribuida a C.F. Gauss, quien primero hizo referencia a ella en 1809 en relación con la teoría de los errores de medidas físicas; sin embargo, ya había sido descubierta por De Moivre en 1733 como la forma limitante a la binomial. También fue conocida por Laplace en 1774, pero por un error histórico ha sido acreditada a Gauss). Esta distribución no solo sirve como distribución modelo de muchos problemas prácticos de la vida real sino que también es utilizada en muchas investigaciones teóricas.

La distribución normal es la distribución continua más importante, por las siguientes razones:

- 1) Muchas variables aleatorias que aparecen en relación con experimentos u observaciones prácticas están distribuidas normalmente.
- 2) Otras variables están distribuidas normalmente en forma aproximada.
- 3) Algunas veces una variable no está distribuida normalmente, ni siquiera en forma aproximada, pero se puede convertir en una variable con

distribución normal por medio de una transformación sencilla.

- 4) Ciertas distribuciones se pueden aproximar mediante la distribución normal (como el caso de las distribuciones binomial y de Poisson).
- 5) En estadística teórica, muchos problemas pueden ser resueltos fácilmente en el supuesto de una población normal. En el trabajo aplicado, encontramos que métodos elaborados según la ley de probabilidades normal dan resultados satisfactorios, aunque no se cumpla totalmente el supuesto de una población normal.
- 6J Ciertas variables que son básicas para justificar pruebas estadísticas están distribuidas normalmente.

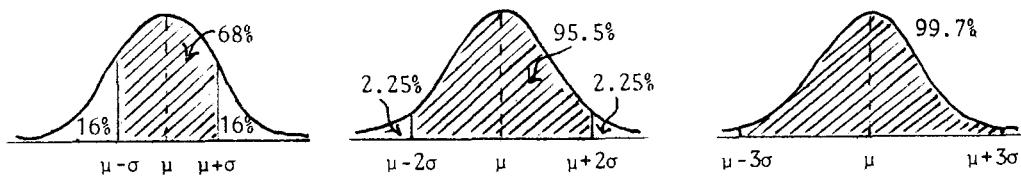
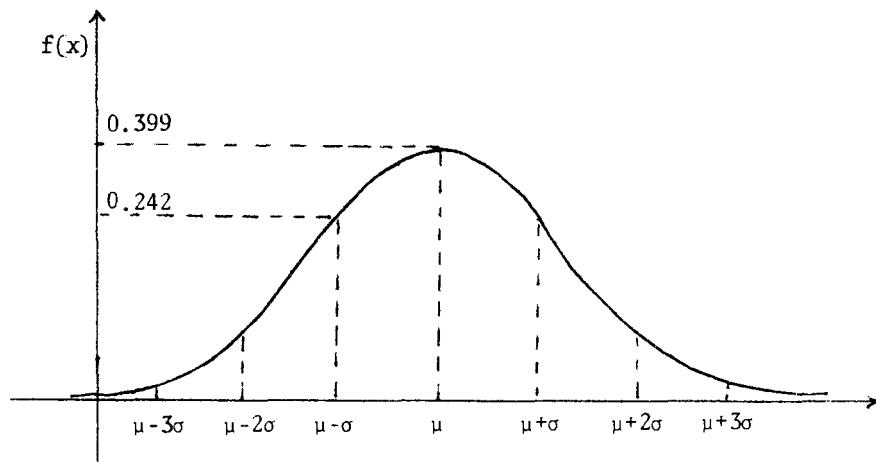
La distribución normal se define mediante su función densidad de probabilidad

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

donde μ y σ son, respectivamente, la media y la desviación estándar de la variable aleatoria normal general X .

Esta fórmula aparentemente tan complicada, especialmente si deseamos calcular densidades y probabilidades con ella, puesto que su función de distribución acumulada es una integral que no se puede evaluar por métodos elementales, no nos debe preocupar porque se pueden calcular fácilmente usando las tablas que se han publicado para tal efecto (Tabla A-4). Pero si debemos familiarizarnos con las propiedades geométricas de la densidad normal.

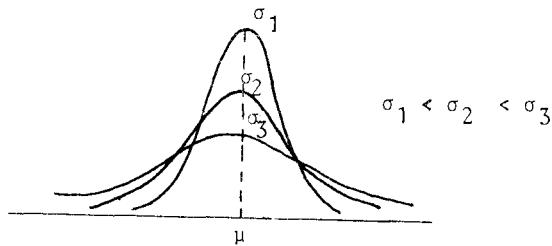
- 1J La curva que representa a $f(x)$ se denomina "*campana de Gauss*" y es simétrica respecto a μ , X toma valores entre $-\infty$ y $+\infty$
 - 2) En los valores $\mu-\sigma$ y $\mu+\sigma$ ocurren puntos de inflexión.
 - 3J El área total bajo la curva es 1.
- $P(\mu-\sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.68$
- $P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma) \approx 0.955$
- $P(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma) \approx 0.997$



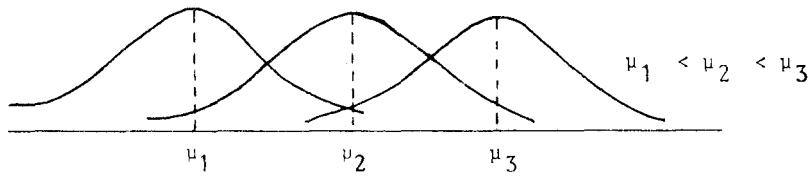
Prácticamente casi toda el área bajo la curva se localiza entre $\mu - 3\sigma$ y $\mu + 3\sigma$.

4.) La curva es asintótica con el eje \bar{X} .

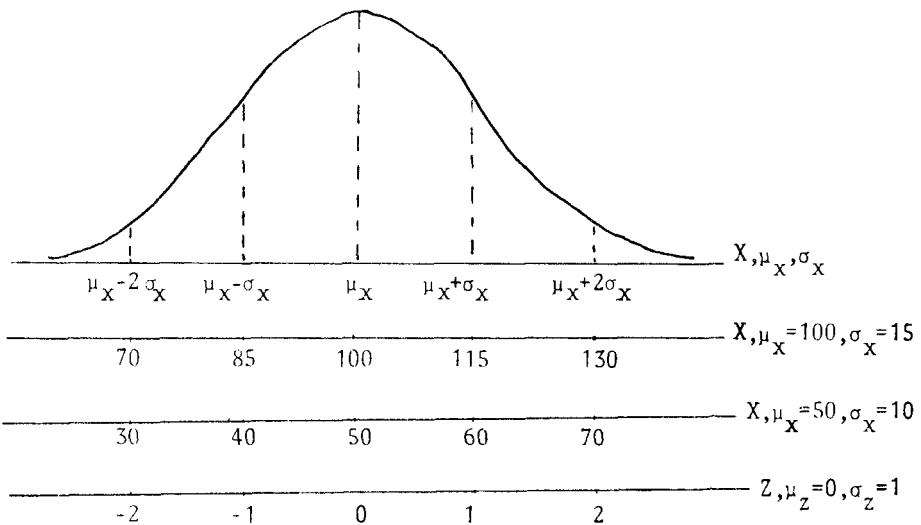
5.) Como el exponente $-\frac{1}{2} \left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)^2$ de e es negativo, cuanto mayor es la desviación de X con relación a μ , tanto menor es la densidad de probabilidad de X , $f(x)$.



- 6) Un cambio en el valor de μ desplaza la distribución normal a la izquierda o a la derecha.



- 7) Realmente no existe la distribución normal sino infinitas distribuciones normales, para cada pareja de valores de μ y de σ existe una distribución normal; pero se puede establecer una relación entre ellas.



LA DISTRIBUCION NORMAL ESTANDAR:

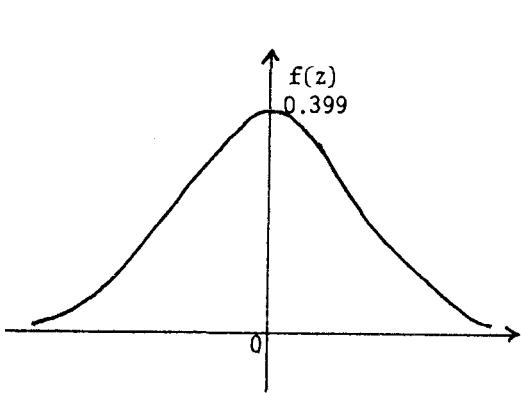
La distribución normal cuya media es cero y cuya desviación estándar es 1 se llama distribución normal estandar y para distinguirla de las demás, usamos la letra z para la variable normal estandar.

Su función densidad es:

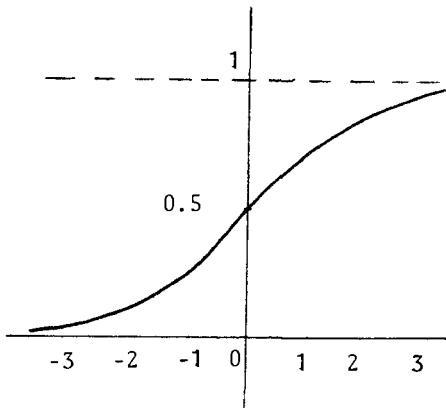
$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

Comparando $f(z)$ con $f(x)$ vemos que la fórmula que relaciona cualquier variable normal X con la normal estandar z es:

$$z = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}$$



Función densidad normal estandar



Función distribución acumulada normal estandar

USO DE LA TABLA A-4

Los siguientes ejemplos ayudan a entender el uso práctico de la tabla A-4.

Ejemplo 6.2: Determinar las siguientes probabilidades:

a) $P(z > 1)$

b) $P(z < 1.26)$

c) $P(-2 < z < 2)$

d) $P(z < -1.16)$

e) $P(0 < z < 1.96)$

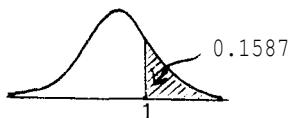
f) $P(-2.19 < z < 0)$

g) $P(-2.4 < z < 1.25)$

h) $P(z < -2.5) + P(z > 2.5)$

Solución:

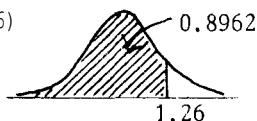
a) $P(z > 1)$



La columna B nos da esta probabilidad: 0.1587

$$P(z > 1) = 0.1587$$

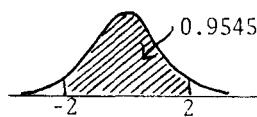
b) $P(z < 1.26)$



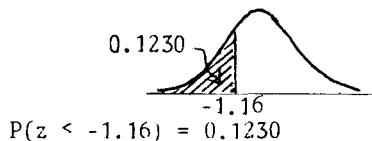
En la columna E vemos que para $z = 1.26$

$$P(z < 1.26) = 0.8962$$

c) $P(-2 < z < 2) = 0.9545$ (columna C)

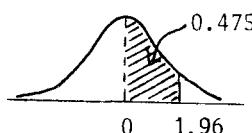


d) $P(z < -1.16)$ Como la curva normal es simétrica, buscamos en la columna B el valor de área correspondiente a $z = 1.16$.



$$P(z < -1.16) = 0.1230$$

e) $P(0 < z < 1.96) = 0.475$ (columna A)



f) $P(-2.19 < z < 0) = 0.4857$ (columna A) por simetría de la curva.

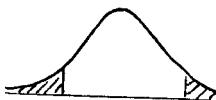


g) $P(-2.4 < z < 1.25)$ Usamos dos veces la columna A y sumamos las dos probabilidades.



$$P(-2.4 < z < 1.25) = 0.4918 + 0.3944 = 0.8862$$

h) $P(z < -2.5) + P(z > 2.5) = 0.0124$ (columna D)



Ejemplo 6.3: Determinar las probabilidades:

a) $P(X < 2.44)$

d) $P(X > 1)$

b) $P(X < -1.16)$

e) $P(X > -2.9)$

c) $P(X < 1.923)$

f) $P(2 < X < 10)$

donde X es una variable normal con media 0.8 y varianza 4.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X < 2.44) &= P\left(z < \frac{2.44 - 0.8}{2}\right) \\ &= P(z < 0.82) = 0.7939 \text{ (columna E)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(X < -1.16) &= P\left(z < \frac{-1.16 - 0.8}{2}\right) \\ &\approx P(z < -0.98) = 0.1635 \text{ (columna B)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(X < 1.923) &= P\left(z < \frac{1.923 - 0.8}{2}\right) \\ &= P(z < 0.5615) = 0.7128 \text{ (columna E)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } P(X > 1) &= P\left(z > \frac{1 - 0.8}{2}\right) \\ &= P(z > 0.1) = 0.4602 \text{ (columna B)} \end{aligned}$$

$$e) P(x > -2.9) = P(z > \frac{-2.9 - 0.8}{2}) \\ = P(z > -1.85) = 0.9678 \quad (\text{columna E})$$

$$f) P(2 < X < 10) = P(\frac{2 - 0.8}{2} < z < \frac{10 - 0.8}{2}) \\ = P(0.6 < z < 4.6) \\ = 0.5 - 0.2257 \text{ ó } 1 - 0.7257 \\ = 0.2743 \quad (\text{columna A dos veces o columna E dos veces})$$

Ejemplo 6.4: Sea X normal con media -2 y varianza 0.25. Determinar la constante k tal que:

- a) $P(X > k) = 0.2$
- b) $P(-2 - k < X < -2 + k) = 0.9$
- c) $P(-k < X < -1) = 0.5$
- d) $P(-2 - k < X < -2 + k) = 0.996$

Solución: Como $\sigma^2 = 0.25$, $\sigma = 0.5$

$$a) P(X > k) = 0.2$$

$$P(z > \frac{k - (-2)}{0.5})$$

$$P(z > \frac{k + 2}{0.5}) = 0.2$$

0.2 de la columna B corresponde a $z = 0.8416$

$$\frac{k + 2}{0.5} = 0.8416 \iff k + 2 = 0.4208$$

$$k = -1.5792$$

$$b) P(-2 - k < X < -2 + k) = 0.9$$

$$P\left(\frac{-2-k-(-2)}{0.5} < z < \frac{-2+k-(-2)}{0.5}\right) = 0.9$$

$$P\left(\frac{-k}{0.5} < z < \frac{k}{0.5}\right) = 0.9$$

0.9 de la columna C corresponde a $z = 1.645$

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{k}{0.5} = -1.645 \\ \frac{k}{0.5} = +1.645 \end{array} \right\} \quad k = 0.8225$$

c) $P(-k < X < -1) = 0.5$

$$P\left(\frac{-k+(-2)}{0.5} < z < \frac{-1+(-2)}{0.5}\right) = 0.5$$

$$P\left(\frac{-k+2}{0.5} < z < 2\right) = 0.5$$

$$P(4-2k < z < 2) = 0.5$$

Usando la columna E para $z = 2$

$$F(2) = 0.9772$$

$$F(4-2k) = 0.9772 - 0.5 = 0.4772$$

0.4772 de la columna B corresponde a $z = -0.057236$ †

$$4 - 2k \approx -0.057236 \iff -2k = -4 - 0.057236$$

$$k = 2.0286 \iff k \approx 2.03$$

d) $P(-2-k < X < -2+k) = 0.996$

$$P\left(\frac{-2-k+2}{0.5} < z < \frac{-2+k+2}{0.5}\right) = 0.996$$

$$P(-2k < z < 2k) = 0.996$$

0.996 de la columna C corresponde a $z = 2.878$

$$2K = 2.878$$

$$k = 1.439$$

este valor se obtiene interpolando.

APROXIMACION DE LA DISTRIBUCION BINOMIAL MEDIANTE LA DISTRIBUCION NORMAL

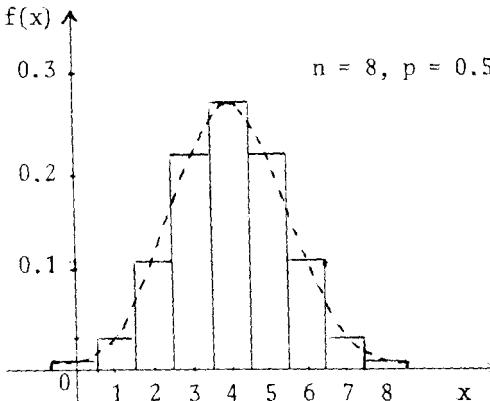
Sabemos que cuando n es muy grande los cálculos de las probabilidades binomiales resultan muy laboriosos debido a la obtención de los coeficientes binomiales y a las potencias de p y q . Por ello en la sección 5.3 vimos como aproximar estas probabilidades por medio de la distribución de Poisson cuando n es muy grande y p muy pequeño. Ahora veremos que la distribución normal resulta una buena aproximación de las distribuciones binomiales cuando n es grande y p no necesariamente pequeño.

Antes de conocer esta aproximación estudiemos el comportamiento gráfico de algunas distribuciones binomiales para diferentes valores de n y p .

- a) $n = 8, p = 0.5$
- b) $n = 15, p = 0.4$
- c) $n = 15, p = 0.8$
- d) $n = 25, p = 0.2$

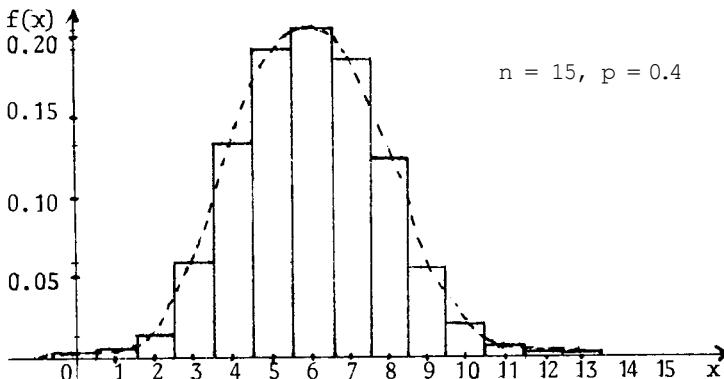
a) $n = 8, p = 0.5$, de la tabla A-2, obtenemos las probabilidades:

$$\begin{aligned}
 f(0) &= 0.0039 \\
 f(1) &= 0.0313 \\
 f(2) &= 0.1093 \\
 f(3) &= 0.2188 \\
 f(4) &= 0.2734 \\
 f(5) &= 0.2188 \\
 f(6) &= 0.1093 \\
 f(7) &= 0.0313 \\
 f(8) &= 0.0039
 \end{aligned}$$



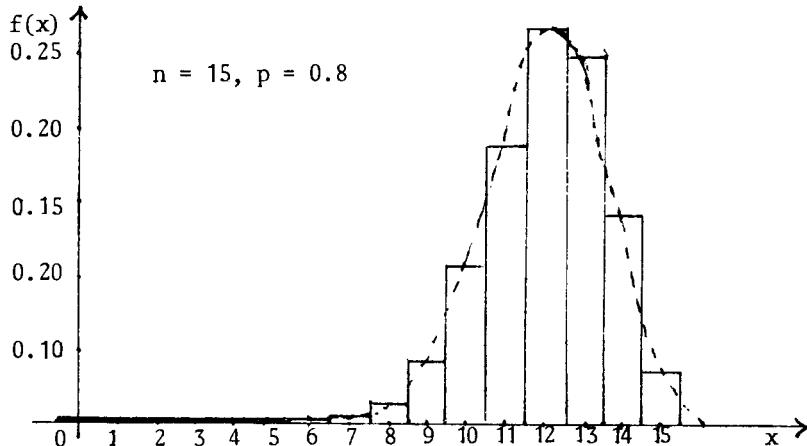
b) $n = 15$, $p = 0.4$, usando la tabla A-2, obtenemos

$f(0) = 0.0005$	$f(4) = 0.1268$	$f(8) = 0.1181$	$f(12) = 0.0016$
$f(1) = 0.0047$	$f(5) = 0.1859$	$f(9) = 0.0612$	$f(13) = 0.0003$
$f(2) = 0.0219$	$f(6) = 0.2066$	$f(10) = 0.0245$	$f(14) = 0.0000$
$f(3) = 0.0634$	$f(7) = 0.1771$	$f(11) = 0.0074$	$f(15) = 0.0000$



c) $n = 15$, $p = 0.8$, de la tabla A-2, las probabilidades son:

$f(0) = 0.0000$	$f(4) = 0.0000$	$f(8) = 0.0139$	$f(12) = 0.2502$
$f(1) = 0.0000$	$f(5) = 0.0001$	$f(9) = 0.0430$	$f(13) = 0.2309$
$f(2) = 0.0000$	$f(6) = 0.0007$	$f(10) = 0.1031$	$f(14) = 0.1319$
$f(3) = 0.0000$	$f(7) = 0.0034$	$f(11) = 0.1876$	$f(15) = 0.0352$



d) $n = 25$, $p = 0.2$, como la tabla A-2 solo tiene valores de n hasta 20, para que resulten más fáciles los cálculos para cualquier n veamos como obtener la probabilidad para $x+1$ dada la de x .

$$f(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$f(x+1) = \frac{n!}{(x+1)!(n-x-1)!} p^{x+1} q^{n-x-1}$$

$$f(x+1) = \frac{n!}{(x+1)x!} \frac{(n-x-1)!(n-x)}{(n-x)} p^x \cdot p \cdot \frac{q^{n-x}}{q}$$

$$= \frac{n!}{x!(n-x)!} \frac{n-x}{x+1} p^x \frac{p}{q} q^{n-x}$$

$$= \left(\frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} \right) \left(\frac{n-x}{x+1} \cdot \frac{p}{q} \right)$$

$$= \frac{n-x}{x+1} \cdot \frac{p}{q} f(x)$$

$$f(x+1) = \frac{n-x}{x+1} \frac{p}{q} f(x)$$

$$\text{Así: } f(0) = 0.003778$$

$$f(1) = f(0+1) = \frac{25-0}{1} \frac{0.2}{0.8} f(0) = 0.03612$$

$$f(2) = f(1+1) = \frac{25-1}{2} \frac{0.2}{0.8} f(1) = 0.070835$$

$$f(3) = f(2+1) = \frac{25-2}{3} \frac{0.2}{0.8} f(2) = 0.135768$$

$$f(4) = f(3+1) = \frac{25-3}{4} \frac{0.2}{0.8} f(3) = 0.186681$$

$$f(5) = f(4+1) = \frac{25-4}{5} \frac{0.2}{0.8} f(4) = 0.196015$$

$$f(6) = f(5+1) = \frac{25-5}{6} \frac{0.2}{0.8} f(5) = 0.163346$$

$$f(7) = f(6+1) = \frac{25-6}{7} \frac{0.2}{0.8} f(6) = 0.110842$$

$$f(8) = f(7+1) = \frac{25-7}{8} \frac{0.2}{0.8} f(7) = 0.062349$$

$$f(9) = f(8+1) = \frac{25-8}{9} \cdot \frac{0.2}{0.8} \quad f(8) = 0.029442$$

$$f(10) = f(9+1) = \frac{25-9}{10} \cdot \frac{0.2}{0.8} \quad f(9) = 0.011777$$

$$f(11) = f(10+1) = \frac{25-10}{11} \cdot \frac{0.2}{0.8} \quad f(10) = 0.004018$$

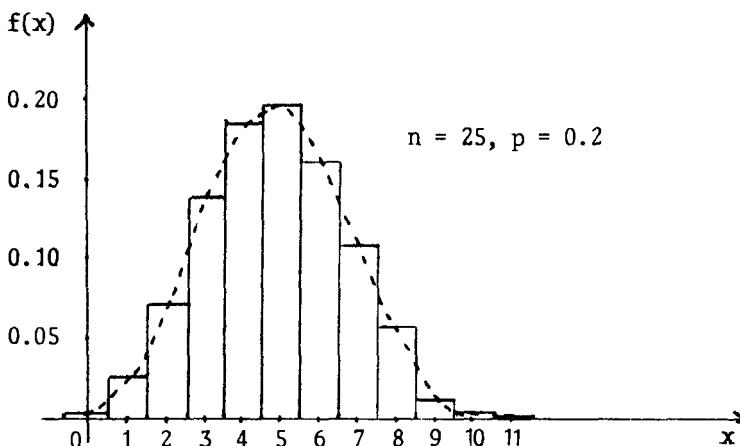
$$f(12) = f(11+1) = \frac{25-11}{12} \cdot \frac{0.2}{0.8} \quad f(11) = 0.001171$$

$$f(13) = f(12+1) = \frac{25-12}{13} \cdot \frac{0.2}{0.8} \quad f(12) = 0.000293$$

$$f(14) = f(13+1) = \frac{25-13}{14} \cdot \frac{0.2}{0.8} \quad f(13) = 0.000063$$

$$f(15) = f(14+1) = \frac{25-14}{15} \cdot \frac{0.2}{0.8} \quad f(14) = 0.000012$$

$$f(16) = f(15+1) = \frac{25-15}{16} \cdot \frac{0.2}{0.8} \quad f(15) = 0.000002$$



Vemos que las gráficas se aproximan más a la normal cuanto mayor es n y p más próximo a 0.5.

Además sabemos que si deseamos estimar $f(4)$ por medio de la normal tendríamos que calcular el área bajo la curva normal desde 3,5 a 4.5, ya que el área bajo la curva normal para un punto en particular es cero y debemos introducir un factor de corrección igual a 0.5 para convertir la variable discreta binomial x en continua, para luego transformar X en z por la fórmula.

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}, \text{ donde } \sigma \text{ y } \mu \text{ son la media y la desviación estándar binomiales dadas por } \mu = np \text{ y } \sigma = \sqrt{npq}.$$

Entonces el valor aproximado de $f(4)$, $n = 8$, $p = 0.5$

$$f(4) \approx P(3.5 < X < 4.5) \approx P\left(\frac{3.5 - \mu}{\sigma} < z < \frac{4.5 - \mu}{\sigma}\right)$$

$$\approx P\left(\frac{3.5 - 4}{2} < z < \frac{4.5 - 4}{2}\right)$$

$$\approx P(-0.35 < z < 0.35)$$

$$\approx 0.2737 \text{ (Tabla A-4, columna C)}$$

El valor exacto binomial para $X = 4$, $f(4) = 0.2734$

Veamos otro ejemplo: Sea $n = 25$, $p = 0.2$

$$f(6) = 0.1633 \text{ (valor exacto)}$$

$$f(6) \approx P(5.5 < X < 6.5) \approx P\left(\frac{5.5 - 5}{\sigma} < z < \frac{6.5 - 5}{\sigma}\right)$$

$$P(0.25 < z < 0.75) \approx 0.2734 - 0.0987 \approx 0.1747$$

$$0.1747$$

La aproximación será conveniente siempre y cuando:

- a) $n \rightarrow \infty$, ó
- b) $p \rightarrow 0.5$ aún cuando n sea pequeño, ó
- c) $p < \frac{1}{2}$ y $np > 5$, ó
- d) $p > \frac{1}{2}$ y $nq > 5$

En general, para pasar de una distribución binomial a normal se usa un factor de conversión de una variable discreta a continua de 0.5

$$\text{i)} \quad P(X = k) \approx P\left(\frac{k - 0.5 - np}{\sqrt{npq}} < z < \frac{k + 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$\text{ii)} \quad P(X \geq k) \approx P(z > \frac{k - 0.5 - np}{\sqrt{npq}})$$

$$\text{iii)} \quad P(X \leq k) \approx P(z < \frac{k + 0.5 - np}{\sqrt{npq}})$$

$$\text{iv)} \quad P(X > k) \approx P(z > \frac{k + 0.5 - np}{\sqrt{npq}})$$

$$\text{v)} \quad P(X < k) \approx P(z < \frac{k - 0.5 - np}{\sqrt{npq}})$$

Todo lo anterior se puede resumir en un teorema, El Teorema de Límite de Demoivre y Laplace.

TEOREMA DEL LIMITE DE DEMOIVRE Y LAPLACE

Sea $0 < p < 1$. Entonces para n grande, la distribución binomial se puede aproximar por medio de la distribución normal con media $\mu = np$ y varianza $\sigma^2 = npq$, esto es

$$f(x) \approx f^*(x), \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

donde $f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ (es la función de probabilidad binomial)

$$f^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{npq}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-np}{\sqrt{npq}} \right)^2} \quad (\text{es la densidad normal})$$

$$\text{Además } P(a \leq X \leq b) = F\left(\frac{b + 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right) - F\left(\frac{a - 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

El término 0.5 es la corrección provocada por el cambio de una distribución discreta a una continua.

Ejemplo 6.5: Un fabricante sabe por experiencia que 4% de su producto es rechazado por defectos. Un nuevo lote de 800 unidades se van a inspeccionar, ¿cuál es la probabilidad aproximada de que menos de 35 unidades sean rechazadas?

$$\underline{\text{Solución:}} \quad P(X < 35) \approx P(z < \frac{34.5 - 32}{5.54})$$

$$\approx P(z < 0.45)$$

$$\approx 0.6736$$

6.3 DISTRIBUCION JI-CUADRADA. Y FUNCION GANMA

Sean X_1, X_2, \dots, X_n , variables aleatorias normales independientes, cada una con media μ y varianza 1. La suma de sus cuadrados se representa por χ^2 (Ji-cuadrada).

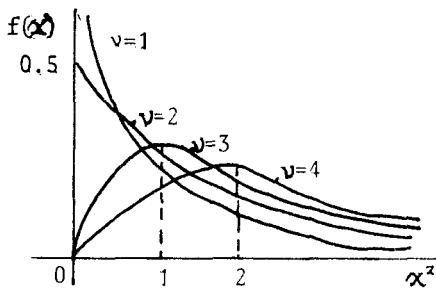
$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$$

A la distribución correspondiente a esta suma se le llama distribución Ji-cuadrada, cuya densidad es:

$$f(\chi^2) = \begin{cases} \frac{\nu^{-\nu/2}}{2^{\nu/2}} e^{-\chi^2/2}, & \chi^2 \geq 0 \\ 0, & \chi^2 < 0 \end{cases}$$

ν es un entero positivo y se le llama grados de libertad de la distribución Ji-cuadrada, la siguiente figura muestra las curvas para va-

rios valores de v ; para $v > 2$, las curvas tienen un máximo en $x = v - 2$; esto se observa haciendo $f'(x) = 0$.



La función de distribución acumulada para la distribución Ji-cuadrada es

$$F(x) = \frac{1}{2^{\frac{v}{2}} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \int_0^{x^2} u^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}} du, \quad x \geq 0$$

La distribución Ji-cuadrada fue introducida por F. R. Helmert (1876), y constituye la base de varias pruebas estadísticas que veremos después.

La expresión $\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)$ es el valor de la función gamma en el punto $\frac{v}{2}$, definida por

$$\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{\frac{v}{2}-1} e^{-t} dt$$

Se puede demostrar por integración por partes que $\Gamma(x+1) = \alpha \Gamma(\alpha)$.

Si α es un entero no-negativo.

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha+1) &= \alpha \Gamma(\alpha) = \alpha [(\alpha-1) \Gamma(\alpha-1)] = \dots \\ &= \alpha!, \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Por lo que a la función gamma se le llama función factorial.

Si v es par, entonces

$$\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) = \left(\frac{v}{2} - 1\right)! , \quad (v = 2, 4, \dots)$$

Cuando v es impar, sea $v = 1$, por ejemplo, entonces $\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Aplicando: $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\pi}\right) = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}.$$

etcétera.

La media y la varianza de la distribución Ji-cuadrada son respectivamente

$$\mu = v \quad y \quad \sigma^2 = 2v.$$

En la parte IV se verán las aplicaciones de la distribución Ji-cuadrada por lo que ahora no daremos ejemplos.

6.4 DISTRIBUCION t DE STUDENT:

La distribución t de student fue introducida por W. S. Gosset, quién hizo publicaciones bajo el pseudónimo de "student" en 1908.

La distribución t es la distribución de la variable aleatoria

$$t = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{v}}}$$

bajo la hipótesis de que v es un entero positivo llamado grados de libertad de la distribución t, X y Y son variables aleatorias independientes de las cuales X es normal con media 0 y varianza 1, y Y tiene una distribución Ji-cuadrada con v grados de libertad.

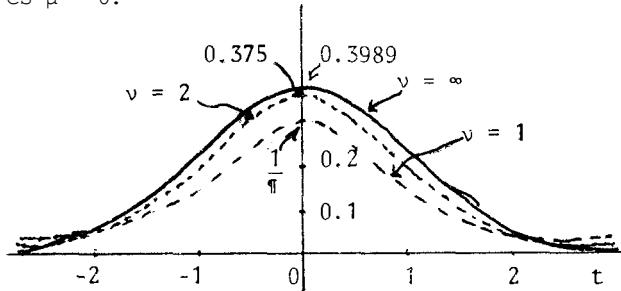
La distribución t tiene densidad

$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\sqrt{\pi v} \Gamma(\frac{v}{2})} \left[1 + \frac{t^2}{v} \right]^{-\frac{1}{2}(v+1)}$$

Su función de distribución acumulada es

$$F(t) = \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\sqrt{\pi v} \Gamma(\frac{v}{2})} \int_{-\infty}^t \frac{du}{(1 + \frac{u^2}{v})^{\frac{1}{2}(v+1)}}$$

Para $v = 1$, esta distribución no tiene valor medio y para $v = 2, 3, \dots, \infty$, el valor medio de la distribución t es $\mu = 0$.



Densidad de la distribución t

Para $v = 1$ y 2 , la distribución t no tiene varianza.

Para $v = 3, 4, \dots, \infty$, la varianza es

$$\sigma^2 = \frac{v}{v-2}$$

Cuando v aumenta, la función de distribución acumulada de la distribución t tiende a la función de distribución de la distribución normal estándar.

E J E R C I C I O S

- 6.1.- Sea X una variable aleatoria normal con media 15 y desviación estándar 5, calcular lo siguiente:
- a) $P(X < 20)$
 - b) $P(X < 12)$
 - c) $P(10 < X < 18)$
 - d) $P(19 < X < 30)$
- 6.2.- Una variable aleatoria tiene una distribución normal con $\mu = 100$ y $\sigma = 15$. ¿Cuál es la probabilidad que esta variable aleatoria asuma el valor?
- a) menor que 122.5
 - b) mayor que 90
- 6.3.- Una variable aleatoria X tiene una distribución normal con media 100 y desviación estándar 15. Determine el valor de k tal que:
- a) $P(X < k) = 0.50$
 - b) $P(X < k) = 0.8413$
 - c) $P(X < k) = 0.6808$
- 6.4.- Si X es una variable aleatoria normal con $\mu = 50$ y $\sigma = 10$, determine el valor de k tal que:
- a) $P(X < k) = 0.9115$
 - b) $P(X < k) = 0.9850$
- 6.5.- La duración en horas de una pila de linterna está aproximadamente normalmente distribuida, con media de 120 horas y desviación estándar de 36 horas. ¿Cuál es la probabilidad de que una batería de este tipo tenga una duración de:
- a) entre 84 y 138 horas?
 - b) mayor que 156 horas?
 - c) menos que 84 horas?
- 6.6.- La altura en centímetros de las plantas de maíz en una milpa están aproximadamente normalmente distribuidas, con $\mu = 180$ y $\sigma = 20$. ¿Cuál es la probabilidad de que una planta de maíz seleccionada al azar de esta milpa tenga una altura
- a) entre 160 y 200?
 - b) mayor que 170?
 - c) menor que 150?

- 6.7.- El volumen de una botella de vino está normalmente distribuida con $\mu = 16.02$ y $\sigma = 0.01$ onzas. ¿Cuál es la probabilidad de que una botella de vino seleccionada al azar contenga menos de 16.01 onzas?
- 6.8.- ¿Qué porcentaje de observaciones de una variable aleatoria se espera que se localice:
- entre $\mu - \sigma/4$ y $\mu + \sigma/4$
 - entre $\mu - \sigma/2$ y $\mu + \sigma/2$?
- 6.9.- Sea X normal con media 10 y o tal que la probabilidad de que X tome cualquier valor $X > 15$ no sea mayor que 5%. Encontrar el valor de σ más grande para el cual esta condición aún se cumple.
- 6.10.- Un productor de sobres de correo aéreo sabe por experiencia que el peso de los sobres está distribuido normalmente con media $\mu = 1.95$ gramos, y desviación estándar de $\sigma = 0.05$ gramos. ¿Alrededor de cuántos sobres que pesan 2 gramos o más se pueden encontrar en un paquete de 100 sobres?
- 6.11.- Un fabricante vende lámparas en cajas de 1000. ¿Cuál es la probabilidad de que alguna caja contenga no más del 1% de lámparas defectuosas, si se considera el proceso de producción como un experimento Binomial con $p = 1\%$ (la probabilidad de que alguna lámpara sea defectuosa) ?
- 6.12.- Un productor de pinzas sabe por experiencia que 6% de sus pinzas son defectuosas. Si vende las pinzas en cajas de 100 y garantiza que a lo más 10 pinzas serán defectuosas, ¿Cuál es la probabilidad aproximada de que una caja no cumpla la garantía?
- 6.13.- Suponiendo que el número de llamadas que llegan por minuto a un conmutador de teléfonos se distribuye según Poisson con un promedio de 10 llamadas por minuto, y que el conmutador puede tomar a lo sumo 20 llamadas por minuto, ¿Cuál es la probabilidad de que en un período de un minuto el conmutador esté sobrecargado? Use la aproximación normal.

PARTE III

**MUESTREO Y ESTADISTICA
DESCRIPTIVA**

CAPITULO 7 : MUESTREO

7.1 RAZONES PARA EL MUESTREO:

Cuando se hace una investigación estadística, como vimos en el capítulo 1 se deben seguir ciertos pasos o etapas; después de definir el problema en términos estadísticos y antes de recolectar los datos tenemos que decidir de que forma se van a colectar dichos datos; es decir, que procedimiento se va a utilizar para obtener la muestra, de manera que podamos aprender algo acerca de la población sobre la base de los datos extraídos de una parte de ella.

Las razones por las cuales se utiliza el muestreo y no toda la población (censo) son varias; los grandes progresos hechos en la teoría del muestreo durante las últimas décadas, hacen posible medir las propiedades de cantidades masivas de datos con precisión calculada sobre la base de muestras.

Además del hecho de que pueden obtenerse resultados fidedignos de procedimientos de muestreo correctos, hay otras importantes razones para su amplia adopción. Primero, las poblaciones que se investigan pueden ser infinitas, y en tales casos la muestra es el único procedimiento posible. Segundo, aún en el caso de poblaciones finitas, muy frecuentemente el muestreo es el único procedimiento práctico, pues, una población finita puede constar de millares o millones de elementos y su enumeración completa es prácticamente imposible.

En tercer lugar, la medición de las propiedades de una población a veces requiere de la destrucción de sus elementos ; por ejemplo si el productor desea averiguar si la resistencia a la tracción de un lote de alambres de acero cumple con las normas especificadas, se ejerce presión sobre el alambre hasta que se rompe. Un censo significaría entonces la destrucción completa de todos los alambres de acero, y no quedarían productos después de concluida la prueba.

Por último, aunque financiera, práctica y físicamente sea posible observar toda la población, el muestreo puede ser aún el procedimiento más eficiente.

Los resultados obtenidos por el estudio de una muestra pueden ser iguales o aún más precisos que los hallados de una cuenta completa del conjunto.

Como se explicará en seguida, cualquier encuesta estadística muestreo o censo, siempre contiene cierto error. Los errores estadísticos son de dos clases: no de muestreo y de muestreo. El error no de muestreo es generalmente grande para un censo, pero puede ser reducido mucho con el muestreo bien realizado. Además el error no de muestreo a menudo no puede ser estimado objetivamente, mientras que esto generalmente es posible en el error de muestreo. Por estas razones, no solo puede esperarse que el error total sea menor en un estudio de muestra, sino que los resultados de ella también pueden ser usados con un mayor grado de confianza por nuestro conocimiento del tamaño probable del error,

7.2 BASES TEORICAS DEL MUESTREO

Aunque la diversidad es una cualidad universal de los datos, no hay virtualmente ninguna población estadística en la práctica cuyos elementos varíen entre sí sin límite.

Los hechos de que cualquier población tiene propiedades características y que las variaciones en sus elementos son claramente limitadas hacen posible que escogamos una muestra relativamente pequeña y al azar que puede reflejar bastante bien las características de la población.

Otra propiedad interesante e importante de los datos es la regularidad o uniformidad. Las fuerzas relacionadas, pero independientes que producen variabilidad en una población están a menudo tan equilibradas y concentradas que tienden a generar iguales valores arriba y abajo

- de cierto valor central alrededor del cual tienden a agruparse la mayor parte de los valores.

Debido a la uniformidad estadística, si se escoge una muestra grande al azar, las características de esta muestra difieren muy poco de las características de la población. La uniformidad o regularidad es la tendencia de las características mensurables a agruparse alrededor de cierto "*centro de gravedad*". La medida de tal tendencia central es un promedio del que divergen las observaciones individuales en cierta forma definida. Los promedios son más estables que los valores individuales. Además, los promedios resultan más estables cuantas más observaciones haya en la muestra.

La razón básica de que cantidades mayores de datos tienden a exhibir menos fluctuación es una tendencia de las unidades de datos a "*compensarse unas con otras*". El mismo efecto de compensación puede esperarse cuando aumenta el tamaño de la muestra.

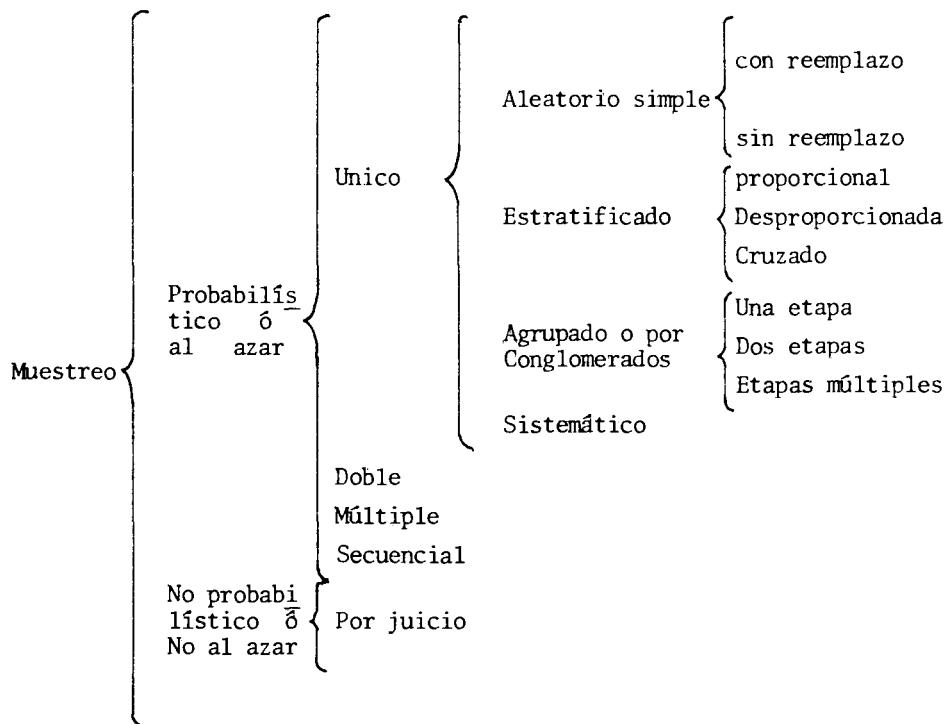
En la práctica, para hacer inferencias generalmente solo tomamos una muestra. Sea ésta grande o pequeña, estamos casi seguros de que sus características no son exactamente las de la población. ¿Cómo podemos estar seguros entonces sobre el grado de confianza de nuestras conclusiones? . La respuesta a tal pregunta es **Aleatoriedad** , La medición objetiva de los errores por muestreo requiere que la muestra sea al azar. Esto es así porque este conocimiento solo puede ser obtenido aplicando las leyes matemáticas de probabilidad, las que, a su vez, solo pueden ser aplicadas a muestras al azar.

7.3 TIPOS DE MUESTREO

Los modelos de muestreo pueden agruparse convenientemente como muestreo *al azar* y muestreo *no al azar*. El primero se conoce también como **muestreo probabilístico**, porque si el proceso de muestreo es al azar, pueden aplicársele las leyes de la probabilidad.

El muestreo *no al azar o por juicio* es un proceso de selección de muestras sin el uso del azar. En otras palabras, se escoge una muestra no al azar sobre una base distinta de consideraciones de probabilidad, tal como el juicio de un experto, conveniencia o algunos otros criterios. En consecuencia, la probabilidad de que cada elemento individual sea extraído de la población es desconocida y la fidelidad de sus resultados no puede ser objeto del análisis de probabilidades, sino que debe depender del juicio personal del investigador.

Los distintos tipos de muestreo se pueden resumir en el siguiente cuadro:



7.3.1. MUESTREO ALEATORIO SIMPLE:

Se puede describir este método fundamental de selección de la muestra de la siguiente manera. A partir de una población de N unidades selecciónese una, dando igual probabilidad a todas las unidades. La mejor forma de proceder es con la ayuda de una tabla de números aleatorios. Tome nota de la unidad seleccionada y regrésela a la población. Si esta operación se realiza n veces, obtenemos una muestra aleatoria simple de n unidades, seleccionadas con reemplazo. Sin embargo, si se continua este procedimiento hasta que n unidades diferentes son seleccionadas y se ignoran todas las repeticiones, se obtiene una muestra aleatoria simple, seleccionada sin reemplazo. Este último procedimiento es exactamente el mismo que retener la unidad (o unidades) seleccionada, y seleccionar otra unidad adicional con igual probabilidad entre las unidades restantes en la población.

El muestreo aleatorio simple es ciertamente un procedimiento práctico si la población no es grande y si es relativamente fácil y barato encontrar las unidades de muestreo. También podría ser un procedimiento práctico para poblaciones grandes cuyos elementos están concentrados dentro de un área pequeña.

Un inconveniente de aplicar el muestreo aleatorio simple a poblaciones grandes es que la población debe ser numerada.

7.3.2 MUESTREO ESTRATIFICADO:

Si la población es muy heterogénea y las consideraciones de costo limitan el tamaño de la muestra, podría ser imposible obtener un estimador lo suficientemente preciso tomando una muestra aleatoria simple de toda la población. En la práctica las poblaciones con que se trabaja son por lo general muy heterogéneas, cualquier estimación hecha con base en una muestra aleatoria directa estará sometida a fluctuaciones muy grandes de muestreo. Pero, supongamos que sea posible encontrar una forma de subdividir la población de tal manera que se reduzca considerablemente

la variación dentro de las subdivisiones, entonces podrá hacerse una mejor estimación de la población total.

El proceso de estratificación requiere que la población sea dividida en grupos o clases llamados estratos. Entonces, se toma una muestra de cada estrato por métodos simples al azar o aleatorios simples, y la muestra resultante se llama *muestra estratificada*.

Una muestra estratificada puede ser proporcional o desproporcionada.

En el muestreo estratificado proporcional, el número de unidades extraídas de cada estrato es proporcional al tamaño de éste. Por ejemplo, si la población es dividida en cuatro estratos, siendo sus tamaños respectivos 10, 20, 30 y 40 por ciento de la población y ha de extraerse una muestra de tamaño 500, la muestra proporcional deseada deberá obtenerse de la siguiente manera:

Estrato	I	500 (0.10) = 50 unidades
Estrato	II	500 (0.20) = 100 unidades
Estrato	III	500 (0.30) = 150 unidades
Estrato	IV	500 (0.40) = 200 unidades
Tamaño de la muestra		= 500 unidades

El muestreo estratificado desproporcionado comprende los procedimientos de tomar un número igual de unidades de cada estrato, sin tener en cuenta su tamaño, o de dar solo una pequeña representación a uno o más estratos cuyos miembros son demasiado costosos de investigar, pero cierta representación de ellos es valiosa.

La eficiencia en la estratificación puede aumentar aún más cuando la naturaleza de los datos lo permite, clasificando los estratos en subestratos, los que, a su vez, pueden ser subdivididos en grupos más peque-

-ños. Este refinamiento en la estratificación de grupos de población con respecto a varias características relevantes simultáneamente se conoce como estratificación cruzada.

La estratificación es más eficaz con poblaciones heterogéneas o altamente asimétricas. En tales situaciones podemos estratificar la población de tal manera que: 1) *dentro de cada estrato haya la mayor uniformidad posible, y 2) entre los distintos estratos las diferencias sean lo más grandes posibles.*

Así, antes de decidir sobre la estratificación, debemos poseer algún conocimiento de las características de la población. Tal conocimiento puede basarse en datos pasados, observación preliminar de estudios piloto, juicio experto o simplemente intuición o buenas conjeturas.

7.3.3 MUESTREO AGRUPADO O POR CONGLOMERADOS:

El muestreo agrupado o por conglomerados es el procedimiento de dividir la población en grupos o regiones y extraer una muestra de ellos para representar la población. Cuando los grupos o regiones que son las unidades primarias, son extraídos, podemos incluir en la muestra todas las unidades elementales de las regiones escogidas o tomar una muestra de unidades primarias más pequeñas o unidades elementales de las regiones escogidas. Cuando se han observado todas las unidades elementales de las regiones, tenemos lo que se conoce como *muestreo de una sola etapa*. Cuando se extrae una muestra de unidades elementales de las regiones, tenemos un tipo de diseño llamado *muestreo en dos etapas o submuestreo*. En ambas etapas se escoge una muestra simple al azar. Cuando el muestreo por agrupación supone más de dos etapas para escoger la muestra final, se llama *muestreo en múltiples etapas*.

Los principios que dictan la diferencia máxima en el muestreo por conglomerados o agrupado son los puestos a los usados en la estratificación. En el muestreo por conglomerados es eficiente tener: 1) *diferencias entre las unidades elementales del mismo grupo lo más grandes posibles, y 2) diferencias entre los grupos lo más pequeñas posibles.*

7.3.4. MUESTREO SISTEMATICO

Otro diseño al azar usado frecuentemente es el muestreo sistemático; para obtener una *muestra sistemática al azar* podemos numerar también las unidades de muestreo de la población serialmente de 1 a N y determinar primero lo que se conoce por intervalo de muestreo, $k = \frac{N}{n}$, Luego, se escoge al azar un número del primer intervalo de muestreo. Si este número es, por ejemplo, a , con $a < k$, entonces la muestra con tamaño n tendría como sus miembros las unidades de muestreo cuyos números de serie corresponden $a : a, a + k, a + 2k, a + 3k, \dots$.

Por ejemplo, supóngase que deseamos tomar una muestra sistemática de 200 de una población de 100,000 miembros. Determinamos primero el intervalo de muestreo, que es, $k = 100,000/200 = 500$. Despues escogemos un número al azar de 001 a 500, Suponiendo que este número es 253; entonces, comenzariamos con el miembro 253 de la población numerada y escogeríamos cada 500 un nuevo miembro, el 753, el 1253

7.3.5. MUESTREO DOBLE Y MULTIPLE.

Todos los tipos de muestreo anteriores se concocen como muestreo único, pués cada diseño se usa para obtener una sola muestra de la cual se hace una estimación o una prueba de hipótesis. Sin embargo, a últimas fechas se ha generalizado el uso del muestreo doble, múltiple y secuencial.

El muestreo doble es el proceso por cual se observa primero una muestra pequeña y se toma una decisión sobre aceptar, rechazar o tomar una segunda muestra. Así, por ejemplo, en el muestreo doble podemos formular esta regla de decisión. Escoja una muestra al azar de 40 unidades, si se encuentran 2 o menos unidades defectuosas, acepte el lote; si se encuentran 4 o más defectuosas, rechace el lote; si se encuentran 3 defectuosas, tome una segunda muestra de 60 unidades, el total muestreado es ahora de 100.

El procedimiento que utiliza una serie de muestras pequeñas tal que el número acumulado de defectos es comparado con un criterio de aceptar y uno de rechazar después de extraída cada muestra hasta que finalmente puede tomarse una decisión, se llama muestreo múltiple.

7.4 PARAMETROS Y ESTADIGRAFOS.

Antes de seguir adelante, se necesita presentar brevemente la diferencia entre parámetros y estadígrafo. Un valor que describe en forma global a la población se llama parámetro mientras que un valor que describe en forma global a una muestra se llama estadígrafo o estadístico o estimador. Generalmente los parámetros se denotan con letras griegas y los estadígrafos o estimadores con letras latinas; así, para indicar la media aritmética de la población usamos la letra griega μ (mu) y para la media aritmética de la muestra la letra latina \bar{X} (X barra). De igual manera la varianza poblacional se representa por σ^2 (sigma cuadrada) y la varianza muestral por s^2 .

7.5 ERRORES ESTADISTICOS:

Un error es un estadígrafo o estimador es la diferencia entre el valor del estimador y el del parámetro correspondiente. Se combinan varias causas para producir desviaciones de un estimador con relación al parámetro, y los errores, de conformidad con las diferentes causas, son clasificados en errores no de muestreo y de muestreo.

El término *error no de muestreo* se deriva del hecho de que este tipo de error puede ocurrir en cualquier encuesta, sea ésta un censo o un muestreo. Los errores de muestreo comprenden errores sistemáticos y equivocaciones. Puede decirse que existe un *error sistemático* cuando el valor de un estadígrafo indica una tendencia persistente a desviarse en una dirección con relación al valor del parámetro. Es decir, si este tipo de error está presente, los resultados de la muestra tienden a encontrarse siempre por encima o por debajo del parámetro y, por consiguiente, no pueden compensarse por promediación. Factores que causan error sistemático son: definición descuidada de la población, falta de

definición del cuestionario, una vaga concepción de la información deseada, respuestas exageradas o irrelevantes a preguntas mal elaboradas, métodos imprecisos de entrevistas, errores en el uso de una tabla de números aleatorios para escoger la muestra, etc.

Los errores de muestreo son el resultado de la relación casual de unidades de muestreo, más precisamente el error de muestreo es la diferencia entre el resultado de la muestra y el del censo cuando se obtienen ambos resultados usando los mismos procedimientos. La propiedad más importante de los errores de muestreo es que siguen las variaciones casuales y tienden a compensarse cuando se promedian.

Los errores de muestreo se miden por lo que se conoce como *precisión*, que es la desviación estándar de los estadígrafos calculados de muestras sucesivas al azar del mismo tamaño (σ_{Md} , $\sigma_{\bar{x}}$, σ_{S^2}), Cuanto menor es el error estándar, tanto mayor es la precisión.

La *exactitud* de la estimación de una muestra es la diferencia entre el estadígrafo y el parámetro verdadero. La exactitud de una estimación no es mensurable directamente porque el parámetro verdadero es una constante desconocida. Pero la exactitud depende del grado de precisión y de la ausencia de error sistemático.

E J E R C I C I O S

7.1.- Diga tres razones para el muestreo.

7.2.- ¿Qué es error de muestreo y error de no muestreo?

7.3.- ¿Cuáles son las ventajas e inconvenientes del muestreo sistemático.

7.4.- ¿Está usted de acuerdo con las siguientes afirmaciones? Explique su respuesta.

- a) Los estudios de muestra nunca pueden ser tan precisos como las cuentas completas de poblaciones.
- b) Puede tomarse una muestra aleatoria simple de obreros de una empresa tomando un nombre de la nómina cada diez nombres.
- c) Una muestra aleatoria simple de las familias de un estado puede obtenerse tomando todos los nombres de cien en cien del directorio de registro de automóviles del estado.

7.5.- Para extraer una muestra de un proceso de fabricación, se ha sugerido tres planes de muestreo;

- a) Inspecciones cada i -ésima unidad o una unidad cada j minutos.
- b) Inspeccione una muestra aleatoria simple de n unidades de la población durante cada hora,
- c) Inspeccione n unidades consecutivas a intervalos de una hora.
¿Que tipo de muestra se obtiene en cada caso? ¿Que plan de muestreo parece el más apropiado?

7.6.- Con los siguientes datos de los pesos en gramos de ambos riñones de 50 hombres normales de 40 a 49 años, determine una muestra aleatoria simple (sin reemplazo) de 10 pesos de riñones y describa en detalle como utilizó la tabla de números aleatorios.

374	363	252	305	323	309	358	332	387	329
323	355	403	349	327	288	361	277	303	311
301	265	208	293	256	345	311	322	356	310
358	388	307	350	342	340	240	379	470	247
329	360	319	362	329	309	288	369	288	358

7.7.- Supóngase que los 100 individuos cuyos valores de colinesterasa en el suero sanguíneo se dan en la siguiente tabla, se van a asignar de manera aleatoria a uno de dos tratamientos. Cincuenta se someterán a una droga de estudio y 50 a un placebo. Asignar los individuos de modo aleatorio a los dos grupos y describir por completo el sistema utilizado.

2.29	1.95	1.52	1.93	1.59	1.92	2.59	1.92	1.15	1.70
2.67	1.75	1.67	1.65	1.09	2.55	1.35	1.48	1.04	2.27
3.09	1.92	1.40	2.23	2.02	1.61	1.84	1.35	1.18	2.14
2.65	1.92	2.13	1.32	1.16	1.72	1.65	1.21	1.08	1.44
2.52	1.46	1.23	1.75	2.26	1.71	1.68	1.37	1.39	1.89
1.75	1.15	1.83	1.16	2.60	1.65	1.22	1.30	1.44	1.55
2.12	1.70	1.91	1.24	2.76	1.57	1.27	1.24	1.26	2.17
1.54	1.86	1.78	1.32	3.27	1.86	1.25	1.04	1.43	1.88
1.94	1.04	2.10	1.03	2.54	1.15	1.59	1.03	1.40	1.42
1.82	1.06	1.92	1.51	2.14	1.69	1.70	1.13	1.52	2.15

7.8.- Se desea determinar la cantidad de dióxido de carbono (CO_2) y ozono en el aire de la ciudad de México para conocer el grado de contaminación ambiental. Para ello se instalan monitores en diferentes zonas y se toman medidas a diferentes horas del día y diferentes épocas del año. Identifique el tipo de muestreo empleado y explique brevemente si es el tipo más adecuado y proponga algún otro tipo de muestreo que pudiera ser usado.

7.9.- Si se conoce de antemano que el alimento preparado para gatos inhibe el desarrollo de *Toxoplasma gondii* (microorganismos en las heces de los gatos que produce malformaciones en los fetos) y se desea saber el porcentaje de gatos infectados con toxoplasmosis en la ciudad de México, ¿Cómo tomaría usted una muestra de los gatos de la ciudad y dentro de qué clasificación del muestreo estaría su muestra?

7.10,- Describa por completo el sistema utilizado para investigar que porcentaje de nacimientos con malformaciones congénitas está relacionado

nado con madres que sufrieron toxoplasmosis y diga que tipo de muestreo utilizó.

- 7.11.- Se desea determinar el porcentaje de cerdos infectados con *Triquinia* y *Cisticerco* en los rastros de la ciudad de México. ¿Qué tipo de muestreo utilizaría y por qué?
- 7.12.- ¿Qué tipo de muestreo usarla para estudiar que porcentaje de personas hospitalizadas se infectan en el hospital (% de casos de infecciones intrahospitalarias)? ¿ Por qué?

CAPITULO 8; ESTADISTICA DESCRIPTIVA

8.1 ORGANIZACION Y REPORTE DE DATOS: TABLAS Y GRAFICAS

Los datos tal como se obtienen de una investigación están en forma desordenada por lo que es difícil su interpretación y análisis. Debido a esto se deben organizar en forma de tablas y gráficas para permitir una visualización clara y rápida de todo el conjunto. En la tabulación y descripción de los datos se deben seguir ciertos principios generales.

8.1.1. PRINCIPIOS GENERALES SOBRE LA CONSTRUCCION DE TABLAS:

1.- Las tablas se explicarán por si mismas enteramente, se ha de dar suficiente información en el título y en los encabezados de las columnas para permitir que el lector identifique fácilmente su contenido.

2.- Cada variable numérica debe contener sus unidades.

3.- La función del rayado debe ser de dar claridad de interpretación, debe evitarse el rayado excesivo e innecesario.

4.- No se debe incluir demasiada información en una sola tabla.

5.- Las anotaciones numéricas de cero se deben escribir explícitamente en vez de usar un guión; ya que éste se usará para indicar datos que faltan o que no se han observado.

6.- Una anotación numérica no debe comenzar con punto decimal.

7.- Los números que indican valores de una misma característica se han de dar con el mismo número de cifras decimales.

8.1.2. PRINCIPIOS GENERALES SOBRE LA CONSTRUCCION DE GRAFICAS

1,- Las gráficas se han de explicar enteramente por si mismas.

2.- Las escalas vertical (ordenadas) y horizontal (abscisas) estarán rotuladas con claridad dando las unidades y con los mismos intervalos para las ordenadas y abscisas respectivamente.

3.- No se debe abarcar demasiada información en un solo gráfico. Es mejor hacer varios gráficos que comprimir demasiada información en uno solo.

4.- La finalidad de las gráficas es dar una visión general y no una imagen detallada de un conjunto de datos.

5.- Debe evitarse la inclusión de números dentro del cuerpo de la gráfica,

8.1.3, GRAFICAS ENGAÑOSAS.

La figura 8.1 muestra la variación de la tasa de mortalidad por enfermedad del corazón para el estado de Michigan de 1900 a 1960. La gráfica ilustra el aumento de la tasa.

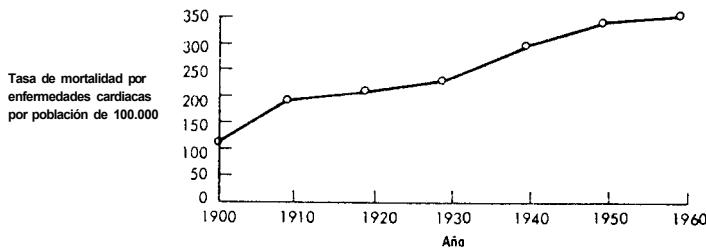


Fig. 8.1 Tasas de mortalidad por enfermedades cardíacas, Michigan, 1900-1960.

Fuente: Michigan Health Statistics 1961, Michigan Department of Health

Pero si el objeto es impresionar realmente a los lectores con la magnitud de este aumento, un sencillo artificio hará que la tendencia parezca mucho más notoria. Si se reduce la escala horizontal y se extiende la vertical, resulta una imagen mucho más impresionante de esta tendencia, como lo muestra la figura 8.2.

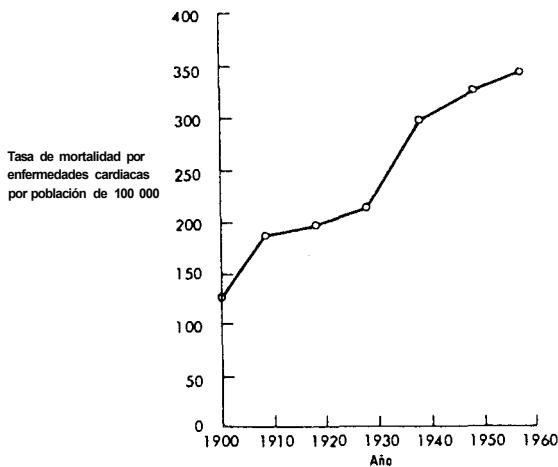
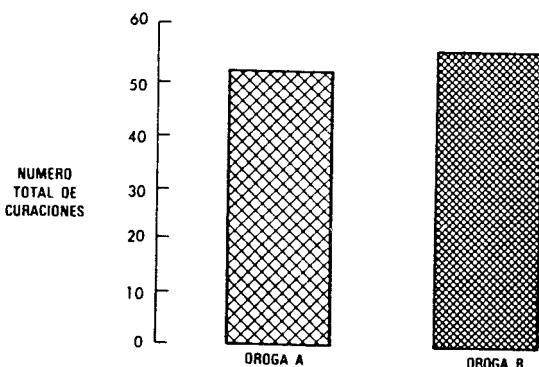


Fig. 8 -2 Tasa de mortalidad por enfermedades cardíacas, Michigan, 1900-1960.

Fuente: Michigan Health Statistics 1961, Michigan Department of Health

Téngase en cuenta que se han utilizado los mismos datos básicos en ambas presentaciones. Pero la impresión que se da al lector es diferente en los dos casos. Sería difícil decir si hay algo abiertamente incorrecto al presentar la fig. 8.2 en vez de la fig. 8.1. Por consiguiente quien prepara una gráfica tienen una obligación que va más allá de la mera presentación de los hechos y ha de hacer un esfuerzo consciente para captar la impresión que va a dar su gráfica y para evitar que sus propios prejuicios sin fundamento vayan a influir en esta impresión.

Como otro caso tenemos el diagrama de barras truncadas, supóngase que se estudian dos drogas A y B, en una experiencia clínica contra una enfermedad particular. Supóngase que de 100 pacientes tratados con la droga A, 52 se curen, en tanto que la droga B cura 56 pacientes de 100 tratados con dicha droga. La figura 8.3 muestra los resultados en forma de diagrama de barras.



Pero supóngase que se quiere presentar los resultados de manera ligeramente diferente, posiblemente algo más favorable para la droga B. La figura 8.4 muestra una manera de hacer esto.

Aquí, la escala vertical se ha truncado o interrumpido de modo que comience en 50 en vez de 0 y, naturalmente, la vista nos dice que la droga B es superior a la droga A. Otra vez se tiene que ambas figuras presentan los mismos datos. Se deja al lector el cuidado de sacar sus propias conclusiones.

Claro, que el artificio consiste aquí en romper la escala vertical, con lo que no hay manera directa de comparar las longitudes verticales de las dos barras.

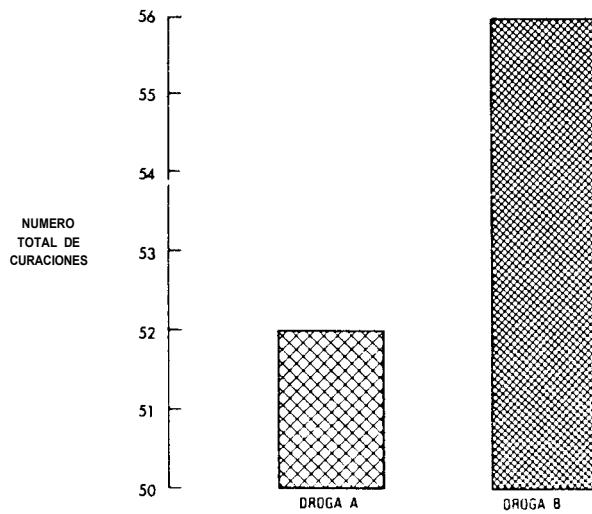


Fig. 8-4 Número total de curaciones con dos drogas distintas.

Acaso, el aspecto más engañoso de la Fig. 8.4 es el no advertir directamente al lector que se ha utilizado una interrupción de escala. Tales interrupciones no deberán utilizarse sino en casos de necesidad, como cuando las barras fueran excesivamente altas si no se cortaran. De todos modos, una ruptura debe ser claramente perceptible para el lector, lo que probablemente se logra interrumpiendo tanto la escala vertical como las barras mismas, según se ve en la fig. 8,5

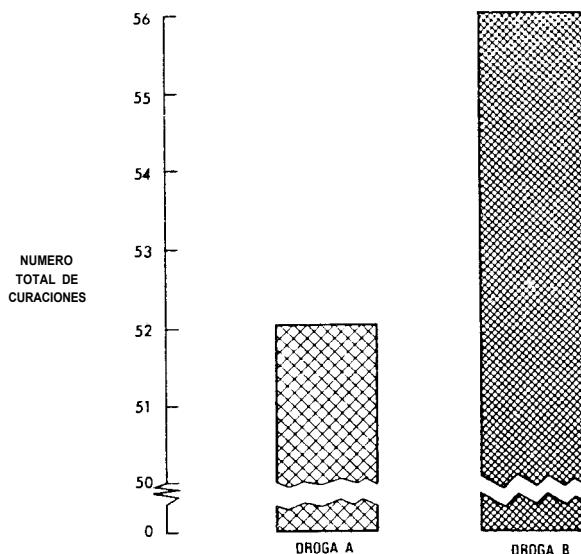


Fig.8-5 Número total de curaciones con dos drogas distintas.

El pictograma es un medio de presentación gráfica que usan frecuentemente los economistas, pero que también tiene cierta aplicación en otros campos de estudio. Una presentación pictográfica compara magnitudes utilizando objetos que tienen relación con la materia tratada. Por ejemplo, una unidad pictográfica para presentar la producción de tornillos podría ser un tomillo; para presentar la producción de trigo podría ser un saco de trigo; o para representar tasas de natalidad, un bebé.

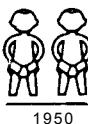
Desafortunadamente, como ocurre con otras muchas técnicas gráficas, la presentación pictórica puede ser engañosa. Supóngase que se quiere presentar el hecho de que la tasa de natalidad en Michigan en 1950 es el doble de lo que fue en 1920, lo cual puede ilustrar muy adecuadamente dibujando la imagen de un bebé para indicar la tasa de natalidad en 1920 y dos bebés para indicar la tasa de natalidad en 1950, según se ve en la Fig. 8.6.

Pero si lo que queremos es impresionar realmente a los lectores con la magnitud de este aumento, se podría utilizar el artificio de la Fig. 8.7, donde el mismo bebé se emplea para ilustrar la tasa de natalidad en 1920, pero con el objeto de señalar que la tasa es el doble en 1950, se ha dibujado un bebé dos veces más largo y dos veces más ancho. Naturalmente, esta presentación es más llamativa puesto que resalta el aumento de la tasa de natalidad con más fuerza. La dificultad reside en que al observar un pictograma somos propensos a ser influidos por el área o acaso hasta el volumen. El bebé de 1950 en la Fig. 8.7 no tiene ya dos veces el área del bebé de 1920, sino 4 veces.

En suma, los pictogramas deberán comparar magnitudes relativas por un aumento o disminución del número de objetos y no por el aumento de tamaño del objeto básico.



1920



1950



1920



1950

Fig. 8-6 Número total de nacidos vivos, Michigan, 1920 y 1950.

Fig. 8-7 Número total de nacidos vivos, Michigan, 1920 y 1950.

8.2. DATOS ESTADISTICOS. TIPOS DE DATOS.

Los datos estadísticos se obtienen mediante la observación o medición de las características de las unidades elementales de una muestra. Como ya vimos una variable es una función que asigna valores a los resultados obtenidos de un experimento. Para seleccionar un procedimiento estadístico a utilizar es necesario conocer que tipo de datos tenemos, estos pueden ser: continuos, discretos, ordinales o jerarquizados y nominales o categóricos.

Los que provienen de variables continuas tales como : altura, peso, longitud, velocidad, viscosidad, temperatura, etc. están dentro de esta categoría. En general los datos continuos son los que se obtienen al medir con algún instrumento.

Una variable discreta es la que puede asumir solo ciertos valores, por lo general enteros. Los datos discretos surgen al contar el número de conceptos que poseen cierta característica, como por ejemplo la cantidad de alumnos en un salón de clase, los defectos de un lote de tela, los accidentes de trabajo en una fábrica, el número de huevos por nido, etc.

Tanto los datos continuos como los discretos se conocen como datos cuantitativos. Por otra parte los dos tipos de datos restantes, los ordinales y los nominales son datos cualitativos y se les convierte a números antes de trabajar con ellos.

Los datos nominales comprenden categorías, como sexo, color de ojos o de piel de los animales, animales con o sin el síntoma de determinada enfermedad, moscas de fruta con alas o sin alas, etc.

Por último los datos ordinales o jerarquizados se refieren a evaluaciones subjetivas según preferencia o logro. Por ejemplo si un investigador desea analizar el efecto de cierta lesión cerebral sobre la conducta materna en los ratones, uno de los criterios para medir la conducta materna es la calidad del nido que construye la hembra . El experi-

-mentador puede establecer entonces, ciertos criterios que hagan posible evaluar un nido como excelente, bueno, regular o malo. Estos términos son reducidos luego a los números 1, 2, 3 y 4, calificándose así los nidos en orden creciente de calidad.

Ninguna de las características anteriores es numérica por naturaleza, sin embargo, es posible asignar un individuo o animal a una de las categorías o jerarquías y luego contar cuantos hay en cada una.

Es interesante observar que algunas poblaciones pueden proporcionar los cuatro tipos de datos. Por ejemplo:

POBLACION	CONTINUOS	DISCRETOS	NOMINALES	ORDINALES
RATAS DE LABORATORIO	Peso edad	números de crias por rata	color: negro, blanco, gris	calidad del nido: excelente bueno regular malo
AUTOMOVILES	peso longitud	número de defectos por auto	colores	tamaño

8.3. TRATAMIENTO DE DATOS:

El tratamiento de datos suele realizarse de diversas maneras, dependiendo del tipo y de la cantidad de datos.

8.4. DATOS CUALITATIVOS:

Si los datos son cualitativos simplemente se agrupan según la frecuencia y la proporción o porcentaje de cada categoría y se representan gráficamente mediante diagramas circulares (gráficas de pastel) y

-diagramas de barras. Por ejemplo: de 80 cuyos observados 48 son blancos 12 son negros, 16 son manchados de blanco, negro y pardo y, 4 son pardos Resumiendo esto en una tabla tenemos:

Color	frecuencia	%
blancos	48	60
manchados	16	20
negros	12	15
pardos	4	5

Para construir el diagrama circular procedemos a dividir un círculo de acuerdo a las proporciones dadas, así 360° equivale al 100%, 60% equivale a 216° , 20% a 72° , 15% a 54° y 5% a 18° . Para distinguir las distintas regiones se utilizan diferentes colores o puntos, rayas, cruces, etc, como se muestran a continuación.

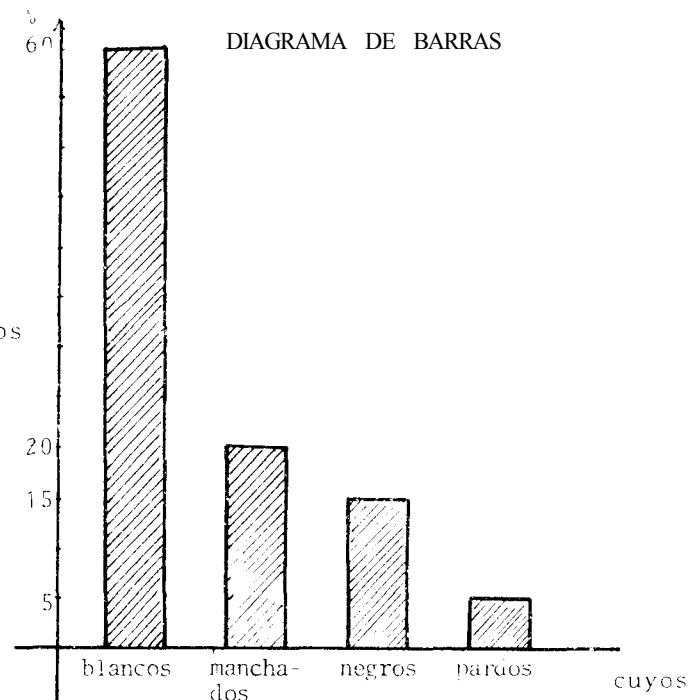
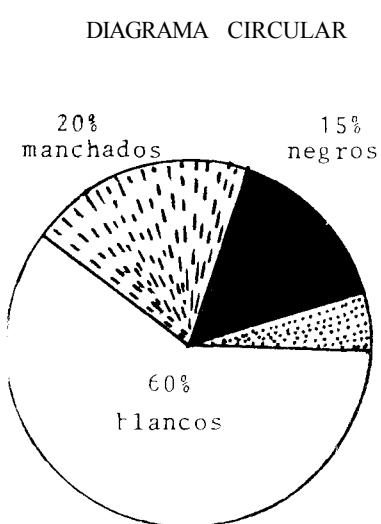


Fig. 8.8

Fig. 8.9

8.5. DATOS CUANTITATIVOS -MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL Y DE VARIABILIDADO DE DISERSION

Si los datos son cuantitativos, dependiendo del tamaño de la muestra se tratarán en forma agrupada o no. Si se tienen muchos datos diferentes es conveniente agruparlos en clases o intervalos, ya que su distribución de frecuencia y gráficas resultan muy complicadas y hasta confusas. Sin embargo, debe tomarse en cuenta que el agrupamiento siempre significa pérdida de información, y en consecuencia pérdida de exactitud en las medidas obtenidas de las distribuciones o gráficas.

Dos importantes características de los datos son:

1) El valor central o típico del conjunto en el sentido que es el más representativo de un conjunto de datos. También se le llama promedio. Hay muchos promedios cada uno de los cuales posee propiedades particulares y cada uno es típico en alguna forma única. A los promedios se les llama MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL y los más frecuentemente encontrados son la Media Aritmética la Mediana y la Moda o Modo. Otros menos usados son: El Centro de Amplitud, la Media Armónica, la Media Geométrica y la Media Aritmética Ponderada.

2) Además de la tendencia de los valores a agruparse en las cercanías de un valor promedio, es necesario saber cuánto se dispersan o varían, es decir si están uno cerca del otro o alejados; las medidas de este acercamiento o alejamiento se conocen como MEDIDAS DE VARIABILIDAD O DE DISPERSION y las más usadas son: la Amplitud total o Rango, la Varianza, la Desviación Estándar, la Desviación Media y el Coeficiente de Variación.

A continuación estudiaremos las Medianas de Tendencia Central y las de Variabilidad o Dispersion, primero para datos no agrupados y luego para datos agrupados.

8.6. MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL PARA DATOS NO AGRUPADOS

8.6.1. MEDIA ARITMÉTICA

Es la medida de tendencia central más utilizada en estadística y es la que se conoce como el promedio de las observaciones, sin embargo, debido a la confusión que hay con el término promedio, los estadísticos han decidido de manera unánime llamarla "*media aritmética*" o simplemente "*media*".

La media aritmética de un conjunto de n observaciones X_1, X_2, \dots, X_n es igual a la suma de las observaciones dividida entre n . En forma simbólica, la media muestral es :

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

Ejemplo 8.1 Las siguientes 11 observaciones son el contenido de sólidos en el agua en partes por millón (ppm) : 4520, 4570, 4520, 4490, 4570, 4500, 4520, 4520, 4540, 4500, y 4590. La media aritmética para estas 11 observaciones es:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \frac{49840}{11} = 4530.91 \text{ ppm}$$

Obsérvese que 4530.91 no es ninguna de las 11 observaciones sino que se refiere al conjunto de datos como un todo.

Cuando la frecuencia de alguna de las observaciones es mayor que 1, los cálculos se pueden simplificar ordenando los datos en forma tabular, como se muestra a continuación y luego se calcula \bar{X} por medio de la fórmula:

$$\bar{X} = \frac{\sum f_i X_i}{\sum f_i}$$

Contenido de sólidos X_i (ppm)	frecuencia f_i	$f_i X_i$
4490	1	4490
4500	2	9000
4520	4	18080
4540	1	4540
4570	2	9140
4590	1	4590
Total:	$\sum f_i = 11$	$\sum f_i X_i = 49840$

$$\bar{X} = \frac{\sum f_i X_i}{\sum f_i} = \frac{49840}{11} = 4530.91 \text{ ppm}$$

8.6.2 MEDIANA:

La mediana representada por Md o P_{50} , es el valor central de una serie cuando los valores se disponen según su magnitud, y es aquel que divide a una serie de tal forma que 50% de los valores son menores o iguales que él, y 50% de los valores son mayores o iguales que él.

Dado que la mediana es un valor posicional (en comparación con la naturaleza aritmética de la media), se ve menos afectada por valores extremos dentro del grupo, que la media. Esta propiedad de la mediana la convierte en algunos casos, en una útil medida de tendencia central. La mediana de 2, 3, 6, 8, 9, 9 y 12 es 8. Si los valores extremos cambian de manera que la serie resulte: 2, 3, 6, 8, 9, 9 y 26, la mediana seguirá siendo 8, pero la media habrá aumentado de 7 a 9.

Ejemplo 8.2:

Para determinar la mediana de los datos acerca del contenido de sólidos en el agua de los que se habló en el ejemplo 8.1 se disponen los

-datos en orden ascendente o descendente; 4490, 4500, 4500, 4520, 4520, 4520, 4540, 4570, 4570, 4590 y el valor que tiene 50% de los valores por encima y 50% por debajo de él es 4520 ppm, ésta es entonces mediana.

Ejemplo 8.3: Determinar la mediana de cada uno de los siguientes conjuntos de datos:

- a) 2, 3, 3, 4 ----- $M_d = 3$
- b) 7, 18, 19, 20 ----- $M_d = 18.5$
- c) 5.1, 6.5, 8.3, 9.2, 10.1, 15.5 ----- $M_d = 8.75$
- d) 2, 5, 5, 5, 9, 15 ----- $M_d = 5$
- e) 9, 40, 80, 81, 100----- $M_d = 80$

8.6.3. LA MODA O MODO:

La moda se denota por M o M_o y es el valor que con más frecuencia se presenta en un conjunto de datos. Es muy fácil de determinar, basta con observar detenidamente al conjunto de datos y ver cual es el que más se repite; sin embargo, no es muy útil porque puede ocurrir que una distribución tenga dos o más valores que se repitan con la misma frecuencia, en tal caso se tienen dos o más modas. También puede ocurrir que no exista ningún valor que se repita y entonces no habrá moda. Por otra parte puede ser un valor extremo el de mayor frecuencia y difícilmente podría ser considerado una medida de tendencia central .

Ejemplo 8.4: Determinar la moda para cada uno de los siguientes conjuntos de datos:

- a) 10, 10, 10, 8, 6 ----- $M = 10$
- b) 2, 5, 5, 6, 6, 8 ----- $M = 5.5$
- c) 4.5, 4.5, 5, 5 ----- $M = \text{no hay moda}$
- d) 2, 5, 8, 8, 15, 20 ----- $M = 8$
- e) 6.2, 8.5, 8.5, 10, 12.3, 12.3, 14 ----- $M_1 = 8.5$ y $M_2 = 12.3$

COMPARACION ENTRE LA MEDIA, LA MEDIANA Y LA MODA

Nombre	Símbolo	Definición	Ventajas	Desventajas
Media	\bar{X}	$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$	1) Refleja cada valor 2) Propiedades algebraicas. 3) Es la más usada en análisis estadísticos.	1) Puede ser excepcionalmente influenciada por valores extremos
Mediana	M_d	50% de los valores son mayores y 50% son menores que ella.	1) Menos sensible a valores extremos que la media.	1) Difícil de calcular si hay muchos datos. 2) No tiene propiedades algebraicas.
Moda	M	Valor con la frecuencia más alta.	1) Fácil de calcular 2) Valor "típico" más valores reunidos en este punto que en cualquier otro.	1) No se presta para el análisis estadístico. 2) Puede haber más de una moda o ninguna.

La relación entre la media, la mediana y la moda se ilustra en las siguientes figuras. Si la distribución es simétrica los valores de la media (\bar{X}), la mediana (M_d) y la moda (M) coinciden. Fig. 8.12(a)

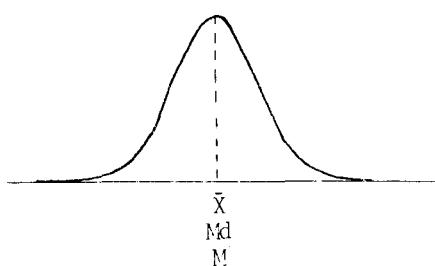
Distribución simétrica

Fig. 8.12 (a)

Si la distribución es negativamente asimétrica (de cola izquierda prolongada) la media, la mediana y la moda están en este orden como se muestra en la Fig. 8.12 (b) o en orden inverso (moda, mediana y media) si es positivamente asimétrica (de cola derecha prolongada) como se muestra en la Fig. 8.12 (c)

Distribuciones Asimétricas

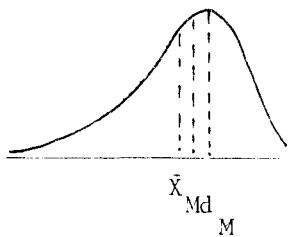


Fig. 8.12 (b)

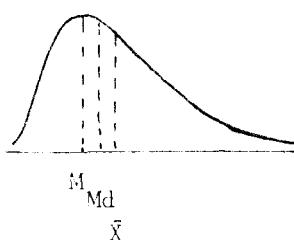


Fig. 8.12 (c)

8.6.4. CENTRO DE AMPLITUD

Es el valor que queda en medio de los valores mínimo y máximo, es decir la media de dichos valores. Si X_1 es la observación más pequeña y X_n es la más grande, entonces:

$$C.A. = \frac{X_1 + X_n}{2}$$

Ejemplo 8.5 : El centro de amplitud para los datos del contenido de sólidos en el agua es:

$$C.A. = \frac{4490 + 4590}{2} = 4540$$

Obviamente, el C.A. está influido por los valores extremos y no toma en cuenta los otros datos.

8.6.5 MEDIA GEOMETRICA:

La media geométrica (G) de un conjunto de n observaciones X_1, X_2, \dots, X_n , es la raíz n -ésima del producto de las n observaciones.

$$G = \sqrt[n]{X_1 \cdot X_2 \cdots \cdots X_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n X_i}$$

La media geométrica se emplea en microbiología para calcular títulos de disolución promedio y para promediar cantidades en forma de proporciones y tasas de crecimiento y en general cuando convenga hacer una transformación logarítmica, ya que

$$\log G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log X_i$$

CARACTERÍSTICAS DE LA MEDIA GEOMÉTRICA

- 1.- El cálculo de la media geométrica está basado en todos los elementos de un conjunto de datos. El valor de cada elemento de dicho conjunto afecta así el valor de la media geométrica.
- 2.- Si uno de los valores es cero, el valor de G es cero.

$$G = \sqrt[3]{(2)(4)(0)} = \sqrt[3]{0} = 0$$

- 3.- Si uno de los valores es negativo y el número de datos es par, el valor de G es imaginario y no tiene interpretación, tal como

$$G = \sqrt{(-2)(3)} = \sqrt{-16}$$

Si uno de los valores es negativo y el número de datos es impar, aunque G existe, su valor no es representativo, como se observa a continuación

$$G = \sqrt[3]{(-1)(4)(16)} = \sqrt[3]{-64} = -4$$

- 4.- La media geométrica es afectada por valores extremos en una menor cantidad que lo es la media aritmética. Por ejemplo, la media geo-

métrica de Los valores 1, 4 y 16 es 4 ($G = \sqrt[3]{(1)(4)(16)} = 4$), mientras que la media aritmética de los mismos valores es ⁷

($\bar{X} = \frac{1 + 4 + 16}{3} = 7$). El valor 7 es más cercano al valor alto

16 que el valor 4 lo es de 16. El valor de G es siempre menor que el valor de \bar{X} de los mismos datos, excepto cuando todos los valores en una serie son iguales, tai como G y \bar{X} para los valores 4, 4 y 4 que son ambas 4.

$$G \leq \bar{X}$$

- 5.- La media geométrica da igual ponderación a las tasas de cambio iguales. iin otras palabras, al promediar tasas de cambio geométricamente, la tasa que muestra el doble de su base es compensada por la otra que muestra la mitad de su base; la tasa que muestra cinco veces su base, es compensada por otra que muestra un quinto de su base; y así sucesivamente. Las tasas de cambio son ordinariamente expresadas en procentajes. Puesto que la base de cada proporción expresada en porciento es siempre igual a 100%, el promedio de dos proporciones las cuales se compensan deberá ser 100% también. La tabla 8.1 nos da una ilustración de que la media geométrica proporciona una mejor respuesta que la que proporciona la media aritmética.

Tabla 8.1

COMPARACION DE LAS UNIDADES VENDIDAS POR LA COMPAÑIA II EN 1984 v 1935

Elemento	Unidades vendidas		Tasas de cambio	
	1984	1985	1984(base)	1985
A	5 yd	25 yd	100%	500%
B	50 lb	10 lb	100%	20%
Media aritmética		100%	260% = $\frac{20\% + 500\%}{2}$	
Media geométrica		100%	100% = $\sqrt{20 \cdot 500}$	

6.- La media geométrica de las proporciones de los valores individuales con respecto a cada valor precedente en una secuencia de valores es la única medida de tendencia central apropiada para las proporciones. La media aritmética de las proporciones no dará un resultado consistente. El ejemplo 8.6 es usado para ilustrar los dos diferentes tipos de medias al promediar proporciones.

Ejemplo 8.6

Las ventas mensuales de una tienda por departamentos y las proporciones de las ventas mensuales a las ventas en cada mes previo de Enero a Mayo, están dadas en la tabla siguiente:

CALCULOS PARA EL EJEMPLO 3.6

Mes	Ventas mensuales (en millones)	Tasa con respecto al mes previo
Enero	\$ 5,000	
Febrero	\$ 5,600	0.72 = $(3600/5000)$
Marzo	\$ 5,760	1.60 = $(5760/3600)$
Abril	\$ 5,184	0.90 = $(5184/5760)$
Mayo	\$ 10,368	2.00 = $(10368/5184)$
Total	\$ 29,912	5.22

La media geométrica de las tasas es 1.20 ó 120%, y la media aritmética es 1.305 ó 130.5%.

Las ventas basadas en las dos diferentes medidas de tendencia central de las tasas con respecto al mes previo (G y X) son comparadas en la siguiente tabla. Solamente la media geométrica da el resultado satisfactorio, puesto que la cantidad de ventas calculada mediante la media geométrica para el mes de Mayo es consistente con las ventas reales del mes.

COMPARACION DE LAS VENTAS CALCULADAS MEDIANTE
LA MEDIA ARITMETICA Y LA MEDIA GEOMETRICA PARA
EL EJEMPLO 8.6

Mes	Ventas reales	Ventas basadas en G	Ventas basadas en X
Enero	\$ 5,000	—	—
Febrero	\$ 3,600	6,000 (= 5000 x 120%)	6,525 (= 5000 x 130.5%)
Marzo	\$ 5,760	7,200 (= 6000 x 120%)	8,515 (= 6525 x 130.5%)
Abril	\$ 5,184	8,640 (= 7200 x 120%)	11,112 (= 8515 x 130.5%)
Mayo	\$10,368	10,368 (= 8640 x 120%)	14,501 (=11112 x 130.5%)
Total	\$29,912		

8.6.6 MEDIA ARMÓNICA:

La media armónica (H) de n observaciones X_1, X_2, \dots, X_n es el inverso (multiplicativo) de la media aritmética de los inversos de las observaciones .

$$H = \frac{n}{\sum \frac{1}{X_i}}$$

Ejemplo 8.7:

La media armónica suele emplearse para promediar velocidades, así por ejemplo, si un automóvil recorre las primeras 10 millas a 30 mph y las segundas a 60 mph, a primera vista pareciera que la velocidad promedio de 30 y 60 es de 45 mph. Pero este tipo de media se suele definir en Física como la distancia total recorrida dividida entre el tiempo total empleado en recorrerla, y como la distancia total es de 20 millas y el tiempo total es $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ de hora, se tiene que la velocidad media es:

$$\bar{v} = \frac{20}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{20}{\frac{5}{6}} = \frac{120}{3} = 40 \text{ mph}$$

Es interesante observar que esta media se puede calcular como una media armónica de 30 y 60, esto es:

$$H = \frac{\frac{2}{1} + \frac{2}{60}}{\frac{1}{30} + \frac{1}{60}} = \frac{\frac{2}{1} + \frac{2}{3}}{\frac{1}{30} + \frac{1}{60}} = \frac{\frac{120}{3}}{\frac{3}{60}} = 40 \text{ mph}$$

CARACTERISTICAS DE LA MEDIA ARMONICA:

- 1.- La media armónica como la media aritmética y la geométrica, se calcula usando todos los elementos en un conjunto de valores. El valor de cada elemento en todos los datos afecta, por lo tanto, al valor de la media armónica. Sin embargo, la media armónica es aún menos afectada por valores extremos que la media geométrica. La magnitud relativa de las tres diferentes medias para los mismos datos puede ser expresada como sigue:

$$H \leq G \leq \bar{X}$$

- 2.- La media armónica no es tan frecuentemente usada como una medida de tendencia central de un conjunto de datos como lo es la media aritmética. Sin embargo, es útil en casos especiales para promediar velocidades. La razón de cambio usualmente indica la relación entre dos tipos diferentes de unidades de medida que pueden ser expresadas recíprocamente. Por ejemplo, si una persona caminó 10 millas en dos horas, la razón se su velocidad de caminar puede ser expresada:

$$\frac{10 \text{ millas}}{2 \text{ horas}} = 5 \text{ millas por hora}$$

ó reciprocamente,

$$\frac{2 \text{ horas}}{10 \text{ millas}} = \frac{1}{5} \text{ hora por milla}$$

- 3.- La media armónica deberá usarse cuando un valor constante, el cual tiene la misma unidad que el numerador (millas) de cada razón dada, es igualmente aplicable a cada elemento en los datos; es decir, en el ejemplo 8.7, el mismo número de millas fue recorrido por el automóvil en ambos recorridos.

8.6.7 MEDIA PONDERADA:

En ciertas circunstancias no todas las observaciones tienen el mismo peso, entonces sería un error calcular la media aritmética,. Por ejemplo, tres laboratorios están investigando cultivos de garganta para averiguar la presencia de estreptococos hemolíticos beta. El laboratorio A examina 50 cultivos de los cuales 25 dan positivo (50%), el laboaratorio B examina 80 cultivos y encuentra que hay 60 positivos (75%), el laboratorio C examina 120 cultivos de los cuales solo 30 dan positivo (25%). Para hallar la tasa media positiva para los tres laboratorios se debe calcular una media que tome en cuenta los pesos, puesto que los tres laboratorios no examinaron el mismo número de cultivos.

$$\bar{X}_w = \frac{50(50\%) + 80(75\%) + 120(25\%)}{50 + 80 + 120} = \frac{11500\%}{250} = 46\%$$

En general, si se tienen n observaciones X_1, X_2, \dots, X_n , con pesos respectivos w_1, w_2, \dots, w_n , la media ponderada de las n observaciones se define como:

$$\bar{X}_w = \frac{\sum w_i X_i}{\sum w_i}$$

Al considerar la media aritmética para datos agrupados, como se verá más adelante, las frecuencias de clase pueden ser consideradas como los pesos para los distintos centros de clase.

8.7 MEDIDAS DE DISPERSION O VARIABILIDAD PARA DATOS NO AGRUPADOS

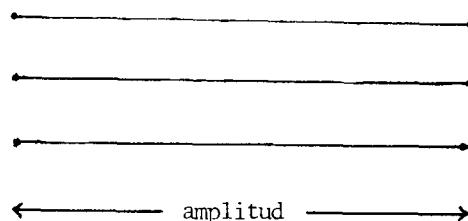
8.7.1 AMPLITUD RANGO O RECORRIDO:

El rango es la medida de la distancia total en la escala numérica a lo largo de la cual varían las observaciones y se define como la diferencia entre la observación máxima y la mínima.

$$R = X_n - X_1$$

Con el rango no se obtiene una idea clara de la dispersión, puesto que varias distribuciones diferentes pueden tener la misma amplitud o rango

La siguiente figura muestra tres conjuntos diferentes con la misma amplitud o rango.



8.7.2 LA DESVIACION MEDIA:

Si \bar{X} es la media de un conjunto de n observaciones, la desviación de la media de cada observación es $(X_i - \bar{X})$, la suma de todas estas desviaciones es cero, porque unas desviaciones son positivas y otras son negativas, por lo tanto la suma de estas desviaciones no nos sirve como una medida de dispersión o variabilidad del conjunto de datos. Pero, si se omite el signo de estas desviaciones; es decir, se considera su valor absoluto, se suman y se divide entre n , tenemos la media de los valores absolutos de las desviaciones, que es el promedio de las distancias a la media. A esta medida se le llama *desviación media*, esto es:

$$D.M. = \frac{\sum |X_i - \bar{X}|}{n}$$

Ejemplo 8.8:

Calcular la desviación media para las observaciones: 85, 70, 60, 90 y 80.

X_i	$X_i - \bar{X}$	$ X_i - \bar{X} $	
60	- 17	17	
70	- 7	7	$\bar{X} = \frac{385}{5} = 77$
80	3	3	
85	8	8	$D.M. = \frac{48}{5} = 9.60$
90	13	13	
385	0	48	

8.7.3 VARIANZA Y DESVIACION ESTANDAR O DESVIACION TIPICA:

Otro mecanismo para resolver el problema de la cancelación entre las desviaciones de la media es elevar al cuadrado cada desviación, sumarlas y dividir entre n ; es decir, obtener el promedio de los cuadrados de las desviaciones. Sin embargo, por razones que se explicarán en el próximo capítulo, cuando se trata de muestras, no se divide entre n sino entre $n-1$. El valor así obtenido se llama **varianza muestral**, se denota por s^2 y su fórmula de definición es:

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

Usando las propiedades de las sumatorias, se puede demostrar fácilmente que esta fórmula es equivalente a:

$$s^2 = \frac{\sum x_i^2 - n \bar{x}^2}{n-1}$$

la cual simplifica los cálculos.

A la raíz cuadrada (positiva) de la varianza se le llama **desviación estándar o desviación típica**, así

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad \text{o} \quad s = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - n \bar{x}^2}{n-1}}$$

La desviación estándar presenta grandes ventajas sobre la varianza, pues sus unidades físicas son las mismas que las de las observaciones, mientras que las de la varianza son unidades físicas cuadradas. Por otra parte, la desviación estándar es la más usada en análisis estadístico.

Como vimos en el capítulo 6, una interpretación de la desviación estándar es que si la distribución es aproximadamente normal, el intervalo:

- a) $\bar{X} \pm s$, contiene aproximadamente 68% de las observaciones,
- b) $\bar{X} \pm 2s$, contiene aproximadamente 95% de las observaciones.
- c) $\bar{X} \pm 3s$, contiene aproximadamente casi todas las observaciones (99.7%)

Un teorema un poco conservador a este respecto es el "Teorema de chevyshev" que se aplica a cualquier conjunto de datos (no necesariamente normales)

TEOREMA DE CHEVYSHEV

"Dado un número $k \geq 1$ y un conjunto de n observaciones x_1, x_2, \dots, x_n , por lo menos $1 - \frac{1}{k^2}$ de las observaciones se encuentran en el intervalo $\bar{x} \pm ks$ "

Esto es:

$$k \quad 1 - \frac{1}{k^2} \quad \bar{x} \pm ks$$

1 0 por lo menos hay 0 observaciones en el intervalo $\bar{x} \pm s$.

2 $\frac{3}{4}$ por lo menos hay 75% de las observaciones en el intervalo $\bar{x} \pm 2s$.

3 $\frac{8}{9}$ por lo menos hay 89% de las observaciones en el intervalo $\bar{x} \pm 3s$.

Ejemplo 8.9: La varianza y la desviación estándar para las 5 observaciones del ejemplo 8.8 son:

$$s^2 = \frac{30225 - 5(77)^2}{4} = \frac{30225 - 29645}{4} = \frac{580}{4} = 145$$

$$s = 12.04$$

Obsérvese que la relación que hay entre s^2 y σ^2 es:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \sigma^2 \quad \text{ó} \quad \sigma^2 = \frac{n-1}{n} s^2$$

8.7.4. COEFICIENTE DE VARIACION:

Es una medida de dispersión relativa, pues está exenta de unidades y se expresa en porcentaje. Se usa para comparar distribuciones con diferentes unidades o para comparar las dispersiones de dos distribuciones diferentes. Su fórmula es: $C.V. = \frac{s}{\bar{x}} (100)$

Ejemplo 8.10 Consideremos las siguientes muestras de los pesos de hombres de 25 años y de niños de 11 años.

MUESTRAS		
	1	2
edad	25 años	11 años
\bar{x}	66 Kg.	36 Kg.
s	4.5 Kg.	4.5 Kg,

Aparentemente las dos muestras tienen la misma variabilidad, sin embargo.

$$C.V._1 = \frac{4.5}{66} (100) = 6.82\%$$

$$C.V._2 = \frac{4.5}{36} (100) = 12.5 \%$$

Los pesos de los niños son relativamente más variables que los de los adultos.

8.8 REPRESENTACION GRAFICA JE DATOS NO AGRUPADOS

Las gráficas para datos no agrupados son al igual que las empleadas para representar una distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta (capítulo 4), la gráfica de líneas, el histograma, el polígono de frecuencia y la gráfica escalonada o polígono de frecuencias acumuladas.

Así para el ejemplo de los contenidos sólidos en el agua, la gráfica de líneas, el histograma, el polígono de frecuencia y la gráfica escalonada se muestran a continuación:



Fig. 8.13 Gráfica de líneas para las 11 observaciones de los contenidos sólidos en el agua.

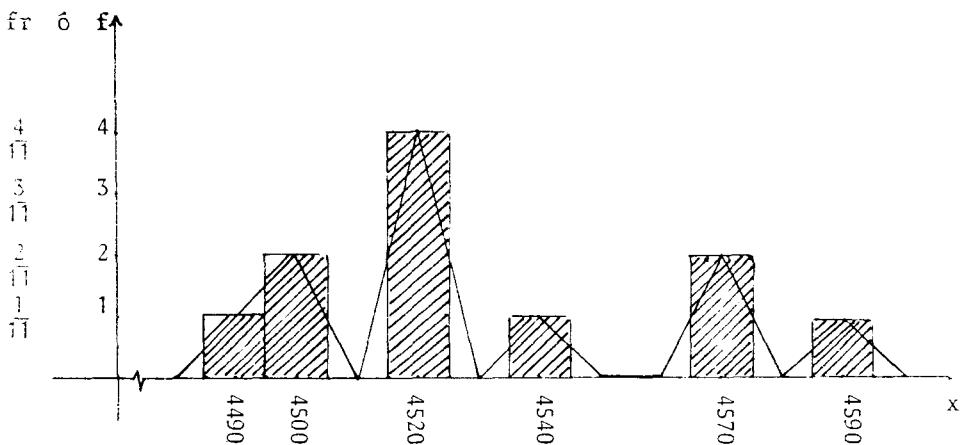


Fig. 8.14 Histograma y Polígono de frecuencia para las 11 observaciones de los contenidos sólidos en el agua.

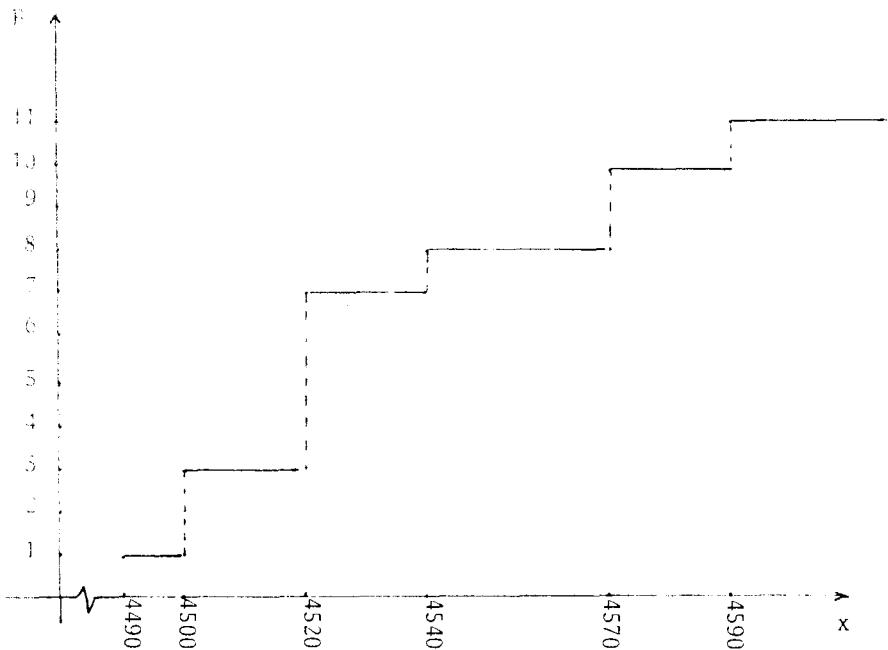


Fig. 8.15 Gráfica escalonada para las 11 observaciones de los contenidos sólidos en el agua.

8.9 DATOS AGRUPADOS - TABLAS DE FRECUENCIA:

Para construir tablas de frecuencia además de los principios generales expuestos anteriormente debemos seguir las siguientes reglas:

- 1) El primer intervalo o clase debe contener la observación mínima y el último, la máxima,
- 2) Los intervalos deben ser mutuamente exclusivos; es decir, cada observación debe quedar exactamente en una sola clase, no en dos al mismo tiempo.
- 3) Los intervalos deberán ser exhaustivos en cuanto a los datos; es decir, cada observación deberá quedar en alguna clase (no deben quedar datos por fuera)
- 4) Todos los intervalos deberán tener la misma longitud o amplitud, de ser posible.
- 5) Los intervalos se escogerán de manera que los centros de clase o marcas de clase correspondan a números con pocos dígitos decimales diferentes de cero,
- 6) Mientras menos clases escojamos será más fácil el trabajo, pero se perderá más información. En la práctica se escogerán entre 10 y 25 clases; pero para nuestros fines, de ejemplos escogeremos entre 7 y 15.
- 7) Básicamente hay dos formas diferentes de denotar las clases como se muestran a continuación:

límites de clase	fronteras o límites reales de clase	límites de clase	fronteras o límites reales de clase.
<2 , 8]	[2 , 8]	3 - 8	2.5 - 8,5
<8 , 14]	[8 , 14]	9 - 14	8.5 - 14.5
<14 , 20]	[14 , 20]	15 - 20	14.5 - 20,5
<20 , 26]	[20 , 26]	21 - 26	20.5 - 26.5

Siguiendo las reglas expuestas, probablemente se pueda agrupar el mismo conjunto de datos en diversas tablas de frecuencia igualmente aceptables, por lo que necesariamente no ha de haber una única tabla de frecuencia mejor que otras. Por otra parte, puede ser necesario violar una o más de estas reglas por alguna buena razón. Si la razón se conoce y es buena, adelante. Las reglas son una ayuda y no una restricción.

Vemos ahora un ejemplo detallado de construcción de una tabla de frecuencia.

Ejemplo 8.11 : Los siguientes datos representan la cantidad de hemoglobina (Hb) en g/dl encontrados en 30 pacientes entre 2 y 12 años que acudieron al laboratorio central de la E.N.E.P. Zaragoza:

12.8	10.8	14.0	14.1	11.1	13.7	14.0	11.7	14.0	12.8
16.3	14.0	13.2	13.7	13.6	14.3	13.7	14.1	10.1	13.7
11.2	11.5	13.4	13.9	11.4	10.1	12.0	12.0	12.9	14.2

Construir una tabla de frecuencia con 8 clases que contenga: límites, fronteras y centros de clase, frecuencias, frecuencias acumuladas y % de frecuencias acumuladas o porcentaje acumulado.

Primero buscamos la amplitud o rango, restando la observación máxima menos la mínima:

$$R = 16.3 - 10.1 = 6.2$$

Como nos piden 8 clases, dividimos el rango 6.2 entre 8 para cono-
cer la amplitud de cada clase: c

$$c = 6.2 : 8 \approx 0.8$$

Como la primera clase debe contener la menor de las observacio-
nes, comenzamos con <10.0, 10.8] y además como todas deben tener la misma
amplitud y ser mutuamente exclusivas, la segunda clase será <10.8, 11.6] ,
para garantizar que 10.8 estará en la primera clase pero no en la segunda.
Así continuamos construyendo las clases hasta que la última (octava) con-
tenga la mayor de las observaciones, 16.3. Así tenemos que:

límite de clase	fronteras o límites reales de clase	centros de clase	frecuencia f	frecuencia acumulada	% acu- mulado
< 10.0, 10.8]	[10.0, 10.8]	10.4	3	3	10.00
<= 10.8, 11.6]	[10.8, 11.6]	11.2	4	7	23.33
< 11.6, 12.4]	[11.6, 12.4]	12.0	3	10	33.33
< 12.4, 13.2]	[12.4, 13.2]	12.8	4	14	46.67
< 13.2, 14.0]	[13.2, 14.0]	13.6	11	25	83.33
< 14.0, 14.8]	[14.0, 14.8]	14.4	4	29	96.67
< 14.8, 15.6]	[14.8, 15.6]	15.2	0	29	96.67
< 15.6, 16.4]	[15.6, 16.4]	16.0	1	30	100.00

$$c = 0.8$$

$$n = 30$$

Tabla 8.1

Si quisieramos usar la otra notación, entonces la tabla quedaría
como sigue:

límites de clase	fronteras de clase	centros de clase	f	F	% acum.
10.1-10.8	10.05-10.85	10.45	4	4	13.33
10.9-11.6	10.85-11.65	11.25	4	8	26.67
11.7-12.4	11.65-12.45	12.05	3	11	36.67
12.5-13.2	12.45-13.25	12.85	3	14	46.67
13.3-14.0	13.25-14.05	13.65	11	25	83.33
14.1-14.8	14.05-14.85	14.45	4	29	96.67
14.9-15.6	14.85-15.65	15.25	0	29	96.67
15.7-16.4	14.65-16.45	16.05	1	30	100.00

c = 0.8

n = 30

Tabla 8.2

En adelante, para todos nuestros cálculos nos referiremos a la primera tabla(8.1), la de intervalos semiabiertos.

8.10 REPRESENTACION GRAFICA DE DATOS AGRUPADOS:

Las gráficas más empleadas para representar datos agrupados son: el Histograma, el Polígono de frecuencia y la Ojiva.

HISTOGRAMA PARA EL CONTENIDO DE Hb (g/dl) DE 30 NIÑOS
DE 2 A 12 AÑOS.

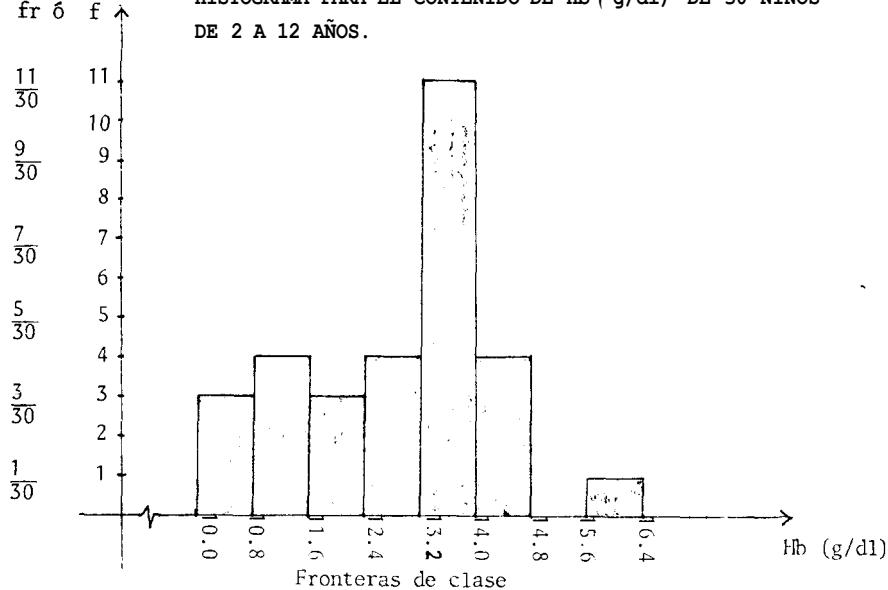
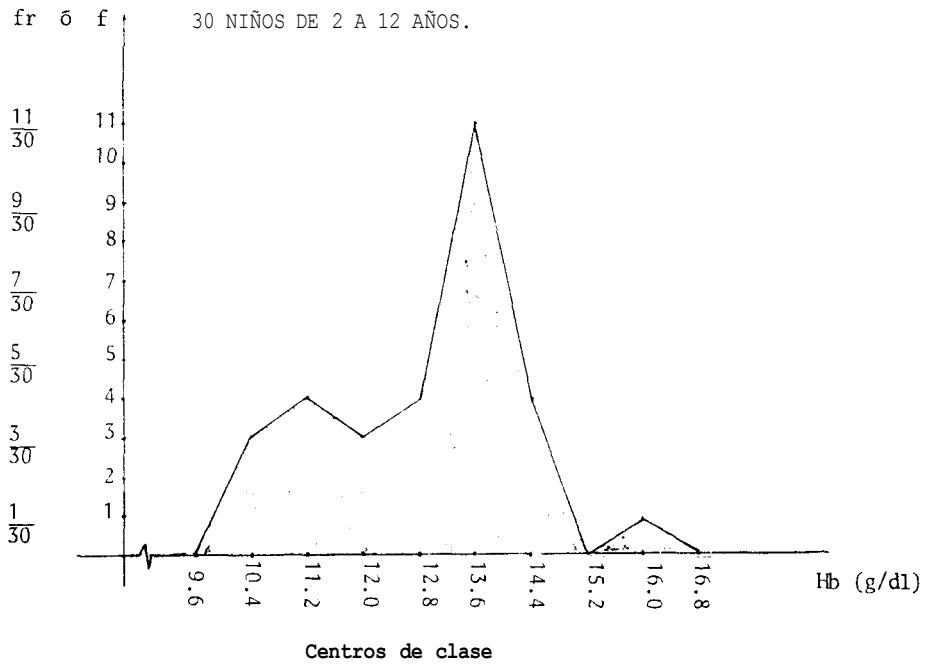


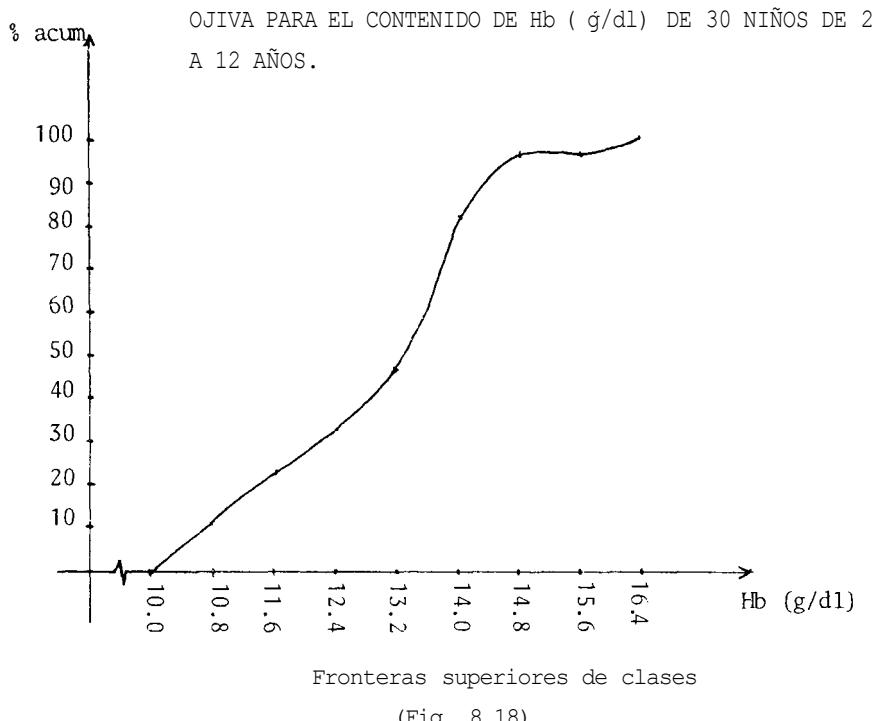
Fig. 8.16

POLIGONO DE FRECUENCIA PARA EL CONTENIDO DE Hb(g/dl) DE
30 NIÑOS DE 2 A 12 AÑOS.



Centros de clase

Fig. 8.17



(Fig. 8.18)

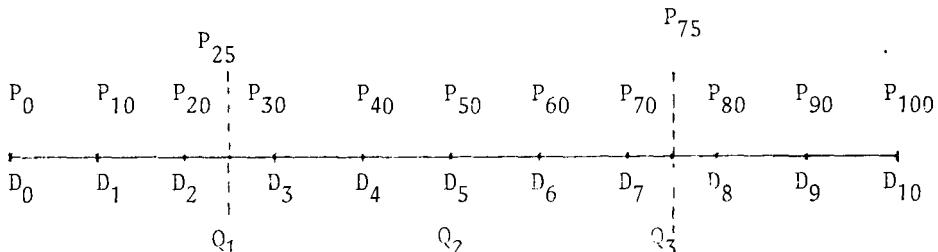
8.11 PERCENTILES, CUANTILES Y RANGOS PERCENTILES

"Los percentiles" de un conjunto de observaciones dividen en centésimos la frecuencia total. Esto es, el p -percentil o el percentil- $p(P)$ es el valor por debajo del cual cae el $p\%$ de las observaciones. Así por ejemplo, el percentil 30 (P_{30}) es el valor por debajo del cual cae el 30% de las observaciones.

A veces se necesitan valores que dividen el porcentaje total en partes iguales como, cuartos, décimos, quintos o tercios. Los puntos de división para estas distintas particiones se llaman cuartiles, deciles, quintiles y terciles, respectivamente. Así el primer cuartil (Q_1) es el percentil 25 (P_{25}), el séptimo decil (D_7) es el percentil 70 (P_{70}). El segundo cuartil (Q_2) o el quinto decil (D_5) son otras formas de llamar a la mediana (Md ó P_{50}).

El término cuantil es el nombre genérico para un punto de división relacionado con cualquier partición; es decir, los percentiles, deciles, cuartiles quintiles son todos cuantiles.

RELACION ENTRE LOS CUANTILES



El rango percentil de un valor X es el porcentaje de todas las observaciones que son menores o iguales a ese valor X.

Téngase en cuenta que un percentil es un valor de la variable observada, en tanto que el rango percentil es un porcentaje. Esto lo vemos más claro en la Ojiva (determinación gráfica de percentiles y rango percentiles) y en la tabla de frecuencia (determinación algebraica).

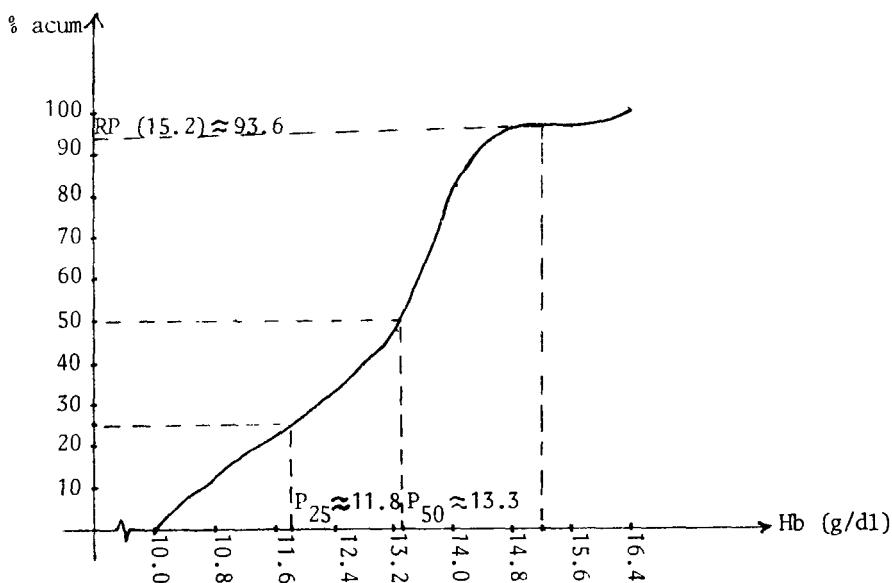


Fig. 8.19

Para calcular percentiles y rango percentiles analíticamente, extraemos de la tabla la parte que nos es útil para el caso, las fronteras superiores y los porcentajes acumulados.

Ejemplo 8.12: Para calcular el P_{25} , sabemos que es un valor X entre 11.6 y 12.4 porque 25% está entre 23.33 y 33.33%; entonces interpolando, tenemos:

$$\begin{array}{c} 33.33 \% \longrightarrow 12.4 \\ 25 \% \quad \longrightarrow \quad X \\ 23.33 \% \longrightarrow 11.6 \end{array}$$

$$\frac{33.33 - 25}{25 - 23.33} = \frac{12.4 - X}{X - 11.6}$$

despejando X: $X = 11.733$

de donde $P_{25} = 11.733$

Ejemplo 8.13: El rango percentil de 13.5 será un % entre 46.67 y 83.33%
Así :

$$14.0 \longrightarrow 83.33 \%$$

$$13.5 \longrightarrow y$$

$$13.2 \longrightarrow 46.67 \%$$

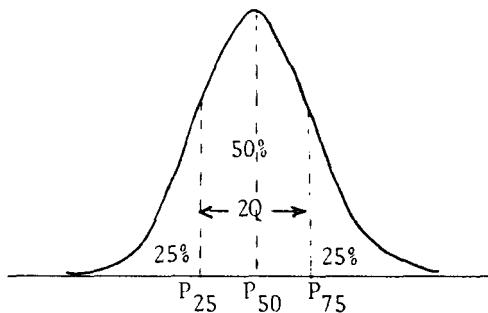
$$\frac{0.5}{0.3} = \frac{83.33 - y}{y - 46.67}$$

despejando y : $y = 60.42$

Esto es: Rango percentil de 13.5 es 60.42%

El rango intercuartil contiene el 50% central, con un 25% por de_ bajo y otro 25% por arriba de dicho intervalo y a menudo se emplea como medida de dispersión cuando la mediana es usada como medida de tendencia central.

$$2Q = Q_3 - Q_1 = P_{75} - P_{25}$$



A Q se le llama rango semi-intercuartílico y si la distribución es simétrica significa la distancia entre la mediana y P_{25} y entre la mediana y P_{75} .

Los percentiles también se pueden calcular mediante la fórmula:

$$P_p = L + \left(\frac{\frac{pn}{100} - F}{f} \right) c$$

donde: L = frontera de la clase precedente a la clase que contiene el percentil p .

n = tamaño de la muestra.

F = frecuencia acumulada de la clase precedente a la que contiene a p .

f = frecuencia de la clase que contiene a p .

c = longitud de clase.

$$\text{Así; } P_{25} = 11.6 + \left(\frac{\frac{(25) - (30)}{100}}{3} \right) (0.8) = 11.6 + 0.133 = 11.733$$

8.12 MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL PARA DATOS AGRUPADOS:

8.12.1 MEDIA ARITMETICA:

Debido a que los valores individuales de la muestra se pierden al agruparse, para calcular las medidas de tendencia central y las de dispersión se usan los puntos medios o centros de clase como representantes de clase. En consecuencia, si m_i es el centro de clase y f_i la frecuencia de clase para la clase i -ésima, la media aritmética puede definirse como:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i m_i}{n}$$

donde k es el número de clases, esto es, para nuestro ejemplo $k = 8$.

Ejemplo 8.14: La media aritmética para el contenido de Hb para los 30 niños de 2 a 12 años (usando la tabla 8,1) es:

m_i	f_i	$f_i m_i$
10.4	3	31.20
11.2	4	44.80
12.0	3	36.00
12.8	4	51.20
13.6	11	149.60
14.4	4	57.60
15.2	0	0.00
16.0	1	16.00
<hr/>		
	n=30	386.40

$$\bar{X} = \frac{386.40}{30} = 12.88$$

8.12.2 MEDIANA:

Como la mediana es el percentil $50(P_{50})$ para determinarla usamos los métodos descritos en la sección anterior para cálculo de percentiles: gráficamente, por interpolación o por la fórmula.

Ejemplo 8.15: La mediana para nuestro ejemplo de la hemoglobina es:

$$\begin{array}{rccc} 83.33 & \text{---} & 14.0 \\ 50 & \text{---} & X \\ 46.67 & \text{---} & 13.2 \end{array}$$

$$\frac{33.33}{3.33} = \frac{14.0 - X}{X - 13.2}$$

despejando X , tenemos: $P_{50} = 13.27$

Usando la fórmula : $P_{50} = 13.2 + \left(\frac{\frac{50x30}{100} - 14}{\frac{100}{11}} \right) (0,8) = 13.2 + 0.07$

$$P_{50} = 13.27$$

8.12.3 LA MODA:

La moda de una distribución de frecuencias puede ser aproximada a menudo por el centro de clase de la clase modal, la clase con mayor frecuencia absoluta. Así para nuestro ejemplo, la moda será $M = 13.6$, el punto medio de la clase $<13.2, 14.0]$ cuya frecuencia de 11 es la más alta. Esta forma de localizar la moda es satisfactoria cuando las frecuencias de las clases anterior y posterior (pre - y postmodal, respectivamente) a la modal, son aproximadamente iguales. Cuando no se cumple esta condición, pueden obtenerse resultados más satisfactorios por interpolación algebraica con la siguiente ecuación, siempre y cuando todas las clases tengan la misma amplitud.

$$M = L_1 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right) c$$

Donde : L_1 es el límite real inferior (frontera inferior) de la clase modal.

Δ_1 : es la diferencia entre la frecuencia de la clase modal y la premodal.

Δ_2 : es la diferencia entre la frecuencia de la clase modal y la postmodal.

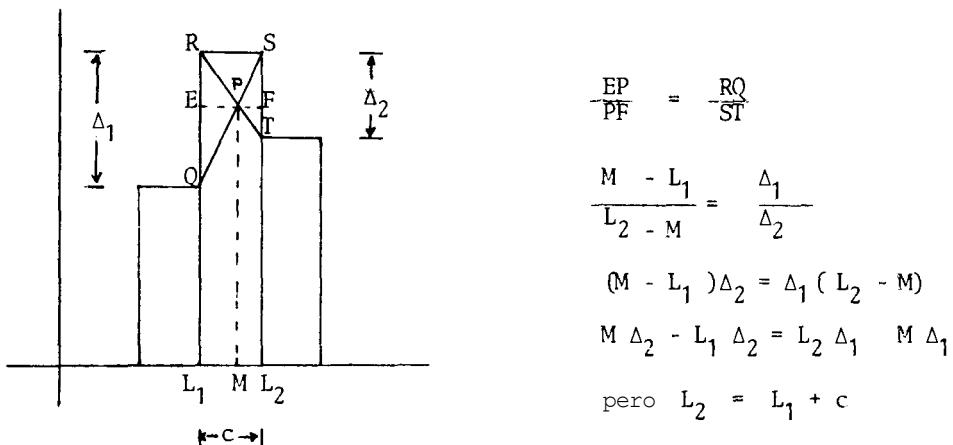
c: es la amplitud de clase.

Ejemplo 8.16: Para nuestro ejemplo

$$M = 13.2 + \left(\frac{7}{7+7} \right) (0.8)$$

$$M = 13.2 + 0.40 = 13.60$$

Demostración de la fórmula de la moda: Los triángulos RPQ y PST son semejantes (congruentes), por lo tanto:



de donde $M \Delta_2 \sim L_1 \Delta_2 = (L_1 + c) \Delta_1 - M \Delta_1$

$$M (\Delta_1 + \Delta_2) = L_1 (\Delta_1 + \Delta_2) + \Delta_1 c$$

$$M = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2} L_1 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right) c$$

$$M = L_1 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right) c$$

8.12.4 MEDIA ARMONICA:

La media armónica para datos agrupados se calcula usando la fórmula

$$H = \frac{n}{\sum_{i=1}^k f_i \left(\frac{1}{m_i} \right)}$$

Ejemplo 8.17: Para nuestro ejemplo de la hemoglobina:

$$H = \frac{30}{3 \left(\frac{1}{10.4} \right) + 4 \left(\frac{1}{11.2} \right) + \dots}$$

$$H = \frac{30}{2.3572} = 12.7269$$

8.12.5 MEDIA GEOMETRICA:

La media geométrica para datos agrupados se calcula por la fórmula:

$$G = \sqrt[n]{(m_1)^{f_1} (m_2)^{f_2} \dots \dots \dots (m_k)^{f_k}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^k (m_i)^{f_i}}$$

Ejemplo 8.18 : Para nuestro ejemplo:

$$G = \sqrt[30]{(10.4)^3 (11.2)^4} \dots \dots \dots$$

$$G = 12.8045$$

8.13 MEDIDAS DE DISPERSION PARA DATOS AGRUPADOS:

8.13.1 LA VARIANZA Y LA DESVIACION ESTANDAR:

La varianza muestral para datos agrupados se define mediante la fórmula:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i (m_i - \bar{x})^2}{n - 1} \quad \text{ó bien por la fórmula equivalente:}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i m_i^2 - n \bar{x}^2}{n - 1}.$$

Ejemplo 8.19 : Para nuestro ejemplo:

m_i	f_i	$f_i m_i^2$
10.4	3	324.48
11.2	4	501.76
12.0	3	432.00
12.8	4	655.36
13.6	11	2034.56
14.4	4	829.44
15.2	0	0
16.0	1	256.00
<hr/> n= 30		5033.60

$$s^2 = \frac{5033.60 - 30(12.88)^2}{29} = 1.96$$

La desviación estándar

$$s = \sqrt{1.96} = 1.40$$

8.13.2. LA DESVIACION MEDIA:

La desviación media para datos agrupados se calcula mediante la fórmula:

$$D.M. = \frac{\sum f_i |m_i - \bar{x}|}{n}$$

Ejemplo 8.20: La desviación media para los datos de la hemoglobina es:

m_i	f_i	$f_i m_i - \bar{x} $
10.4	3	7.44
11.2	4	6.72
12.0	3	2.64
12.8	4	0.32
13.6	11	7.92
14.4	4	6.08
15.2	0	0.00
16.0	1	3.12
<hr/>		
	n = 30	34.24

$$D.M. = \frac{34.24}{30} = 1.1413$$

8.14 PROPIEDADES DE LA MEDIA. VARIANZA Y DESVIACION ESTANDAR:

1) Si $y_i = x_i + c$ (c constante), entonces:

a) $\bar{y} = \bar{x} + c$

b) $s_y^2 = s_x^2$

c) $s_y = s_x$

2) Si $Y_i = c X_i$ (c constante), entonces :

a) $\bar{Y} = c \bar{X}$

b) $s_y^2 = c^2 s_x^2$

c) $s_y = c s_x$

Demostración: 1a) $\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{\sum (X_i + c)}{n} = \frac{\sum X_i + nc}{n} = \frac{\sum X_i}{n} + \frac{nc}{n}$

$$\bar{Y} = \bar{X} + c$$

1b) $s_y^2 = \frac{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}{n-1} = \frac{\sum (X_i + c - (\bar{X} + c))^2}{n-1} = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$

$$s_y^2 = s_x^2$$

2a) $\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{\sum (cX_i)}{n} = \frac{c \sum X_i}{n} = c \bar{X}$

$$s_y^2 = \frac{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}{n-1} = \frac{\sum (cX_i - c\bar{X})^2}{n-1} = \frac{c^2 \sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = c^2 s_x^2$$

Ejemplo 8.21: Si las calificaciones de un examen se cambian a) agregando 10 puntos a cada una, b) agregando 10% a todas las calificaciones.

¿Qué efecto tendrán estos cambios sobre la media, la desviación estandar y la varianza?

Solución:

a) $Y_i = X_i + 10$

$$Y = \bar{X} + 10$$

$$s_y = s_x$$

$$s_y^2 = s_x^2$$

$$\text{b) } Y_i = X_i + 0.10 X_i = 1.10 X_i$$

$$\bar{Y} = 1.10 \bar{X}$$

$$s_y = 1.10 s_x$$

$$s_y^2 = (1.10)^2 s_x^2 = 1.21 s_x^2$$

EJERCICIOS

8.1.- Clasificar cada uno de los siguientes datos según pertenezcan al tipo: nominales, ordinales, discretos o continuos:

- a) Temperaturas en grados centígrados.
- b) Presión sanguínea.
- c) pH de un líquido conocido.
- d) Pulsaciones del corazón.
- e) Recuento de glóbulos rojos.
- f) Números de teléfono de los habitantes de una ciudad.
- g) Edad de un conejo de laboratorio.
- h) Tiempo de incubación de un huevo de una gallina.
- i) Presencia o ausencia de placas ateromatosas en un adulto.
- j) Posición académica de un profesor (asistente, asociado, titular).

8.2.- En la elaboración de microcápsulas de liberación sostenida para un medicamento, se les da un color que identifica el número de capas de recubrimiento. El encargado de la producción desea tener una representación gráfica de la proporción en que se encuentra cada color. Para lo cual toma una muestra obteniendo los siguientes resultados:

azul	verde	verde	verde	rojo
azul	verde	azul	azul	verde
verde	azul	rojo	verde	verde
rojo	rojo	rojo	azul	azul
rojo	azul	azul	azul	verde
verde	rojo	verde	rojo	azul

¿Qué tipo de datos son los obtenidos? ¿Qué tipo de gráfica construiría usted para estos datos? Hágala.

8.3.- Los siguientes datos muestran el número de toneladas de materiales transportados por vía acuática en los Estados Unidos en 1972.

Producto	Cantidad (Ton.)
Petróleo y derivados	63,150
Carbón	20,100
Acero	13,800
Arena y grava	11,700
Fibras	7,650
Madera	4,650
Químicos	8,700
Conchas marinas	1,650
Otros	18,600

- a) ¿Qué tipo de datos son los descritos en la tabla anterior?
- b) Construya una tabla de porcentajes para los datos anteriores y calcule la porción angular que se debe asignar a cada categoría.
- c) Construya una gráfica circular (de pastel) que describa los datos de la tabla anterior.

8.4.- La distribución en la siguiente tabla muestra el número de accionistas de una empresa clasificados por el número de acciones que posee:

Acciones	número de accionistas
menos de 1000	486
1000 - 1999	372
2000 - 2999	210
3000 - 3999	117
4000 - 4999	43
5000 - 5999	27
6000 ó más	13

- a) ¿Qué tipo de datos son los descritos en la tabla anterior?
- b) Construya un diagrama de barras para los datos anteriores.
- c) Construya una gráfica circular (de pastel) que describa los datos anteriores.

8.5.- Las siguientes son 15 medidas del esfuerzo de compresión de ciertas piezas de acero (en libras por pulgadas cuadradas)

40150	65100	49500	22400	38200
60400	43400	26350	31200	55600
47250	73200	35900	45250	52400

Calcular la media, la mediana, la moda y la desviación estándar

8.6.- A continuación se presentan los datos de consumo de O_2 (oxígeno) por el salmón (mm^3 / hr),

105	95	94	112
83	80	96	93
69	71	108	75
94	84	102	94

a) Calcule: la media, la moda y la mediana.

b) Obtenga la varianza y la desviación estándar.

.7.- Los siguientes son los números de imperfecciones observadas en 50 muestras tomadas de rollos de tela:

2	0	4	4	1	4	0	3	2	0
0	1	1	1	0	1	2	4	1	1
1	5	2	2	5	3	4	Q	4	0
0	0	3	0	1	4	2	1	2	0
3	1	3	4	2	0	5	6	3	2

a) Calcular la media, la varianza, la desviación estándar, la mediana y la moda para datos no agrupados.

b) Agrupar los datos en una tabla de frecuencias, mostrando clases, límites reales o fronteras, frecuencias, frecuencias acumuladas y % acumulado.

c) Construir unaojiva para los datos agrupados y calcular P_{25} , P_{75} , D_9 gráfica y analíticamente.

- 8.8.- A continuación se muestran los datos de contenido de cafeína de tabletas de diferentes laboratorios:

LABORATORIOS	mg de cafeína/tableta	# de tabletas
E.N.E.P ZARAGOZA	150	5
E.N.E.P. CUAUTITLAN	205	3
E.N.E.P. IZTACALA	180	1
E.N.E.P ARAGON	250	2
E.X.Z.P. 4	300	4
	Total	15

Si se mezclan 15 tabletas como se indica en la tabla, ¿Cuál es el contenido medio de cafeína por tableta?

- 8.9.- Se quiere probar la toxicidad de un insecticida, para ello se toma una gran cantidad de insectos y se les rocía de insecticida, se observa que aproximadamente 20% de ellos mueren inmediatamente; 45 minutos después mueren 30% más y 3 horas más tarde mueren 15%; el resto no mueren. ¿ Cuál es la medida de tendencia central que usara usted para saber la vida media de estos insectos cuando son rociados con el insecticida? ¿Cuál es el valor de esta medida?

- 8.10.- Si el segundo cuartil de un determinado polígono de frecuencia acumulada de los pesos de canguros machos adultos es 59.6. Determine el rango percentil de este valor indicando su significado.

- 8.11.- En un estudio diseñado a investigar la efectividad de una potencial anestesia local, varias dosis fueron administradas a 15 animales de laboratorio. El tiempo de respuesta (en minutos) fue medido y los resultados son los siguientes:

Animal	Duración de Respuesta	Animal	Duración de Respuesta
1	31	9	22
2	14	10	20
3	19	11	32
4	17	12	19
5	34	13	27
6	25	14	11
7	17	15	23
8	35		

Calcule la media, mediana, varianza y desviación estándar para los datos anteriores en forma no agrupada.

- 8.12.- En el siguiente cuadro se da una lista de materiales con su área superficial por gramo. Si formamos una mezcla de estas partículas con las cantidades que se muestran en la tabla. ¿Cuál es el área superficial por gramo?

muestra	área superficial (mm ² / g)	g en la mezcla
1	1090	3
2	490	2
3	10430	1.5
4	7429	2.5
5	4236	4
6	20000	3
	Total	16 g

- 8.13. - Los siguientes datos corresponden al pH isoeléctrico de 18 aminoácidos corrientes que encontramos en las proteínas de cualquier ser vivo.

Gly	5.97	Met	5.74	Trp	5.89
Ala	6.00	Leu	5.98	Asp	2.77
Ser	5.68	He	6.02	Glu	3.22
Cys	5.05	Phe	5.48	Arg	10.76
Thr	6.16	Tir	5.66	Lys	9.74
Val	5.96	Pro	6.30	His	7.59

Calcular: \bar{X} , Md, M, s

8.14.- Si entre el pueblo A el pueblo B hay 100 km. de distancia y si un automóvil recorre de ida esa distancia a 80 km/h y de regreso a 50 km/h. ¿Cuál es la velocidad promedio de recorrido total?

¿Cuál es la mejor medida de tendencia central para estimar este promedio?

8.15.- En una primera vez, un agricultor ara un campo a razón de 0.50 Ha/h; en una segunda vez era a razón de 0.75 Ha/h. ¿Cuál es el promedio de Ha/h que ara el agricultor?

8.16.- En una muestra de maíz, el peso del grano fue $8/9$ del peso del maíz en mazorca; en otra muestra el peso fue $49/72$. ¿Cuál es la proporción media de estas muestras?

8.17.- Un comerciante vendió 25 radios como sigue: 8 radios a \$350.00 cada uno; 10 radios a \$ 387.50 cada uno; 4 a \$425.00 cada uno; y 3 a \$450.00 cada uno. ¿Cuál fue el precio promedio por radio ?

8.18.- Ciertos inspectores de salubridad examinan toneladas de mariscos el inspector Z examinó 30 toneladas de las cuales 10 toneladas no sirven, es decir, el 66.67% sirve; el inspector Y examina 50 toneladas de las cuales 40 están en perfectas condiciones; es decir el 80% y el inspector X examina 80 toneladas de las cuales 40 sirven; es decir el 50% están en buenas condiciones. Encuentre la tasa media positiva para los tres inspectores.

8.19.- La siguiente tabla muestra 178 porcentajes de carbón contenido en una mezcla de polvo alimentada a una planta en un período de un mes.

% carbón	f
<4.10 , 4.20]	1
<4.20 , 4.30]	2
<4.30 , 4.40]	7
<4.40 , 4.50]	20
<4.50 , 4.60]	24
<4.60 , 4.70]	31
<4.70 , 4.80]	38
<4.80 , 4.90]	24
<4.90 , 5.00]	21
<5.00 , 5.10]	7
<5.10 , 5.20]	3

- a) Completar la tabla de frecuencia con límites reales de clase, puntos medios, frecuencia acumulada y porcentaje acumulado.
- b) Construir un histograma, un polígono de frecuencia y una ojiva.
- c) Calcular la media aritmética, la mediana y la moda.
- d) Calcular la varianza, la desviación estándar y la desviación media.
- 8.20.- Los siguientes datos representan la eficiencia de oxidación del amoniaco por unidad en una planta de ácido nítrico; esto es, el porcentaje de amoniaco convertido en óxido nítrico.

%	f
90.0 - 90.4	1
90.5 - 90.9	4
91.0 - 91.4	3
91.5 - 91.9	3
92.0 - 92.4	9
92.5 - 92.9	7
93.0 - 93.4	9
93.5 - 93.9	16
94.0 - 94.4	9
94.5 - 94.9	5
95.0 - 95.4	5
95.5 - 95.9	6
96.0 - 96.4	5
96.5 - 96.9	5
97.0 - 97.4	5
97.5 - 97.9	2
98.0 - 98.4	1

- a) Completar la tabla de frecuencias con límites reales de clase, puntos medios, frecuencia acumulada y porcentaje acumulado.
- b) Construir un histograma, un polígono de frecuencia y una ojiva
- c) Calcular la media, la mediana y la moda.
- d) Calcular los percentiles 25 y 75 y el rango semi-intercuartílico, así como el rango percentil de 93.7.
- e) Calcular la varianza, la desviación estándar y la desviación media.

8.21.- Considere la siguiente muestra (la resistencia de 50 lotes de algodon, en libras necesarias para romper un madeja)

74	100	90	99	97	89	108	94	87	79
101	90	105	83	91	96	81	98	81	98
105	110	91	99	101	94	106	98	93	82
90	86	96	88	97	103	85	106	92	115
97	101	102	96	100	76	96	81	101	93

Hacer una tabla de frecuencias de la muestra no agrupada,

Agrupar la muestra y escoger intervalos cuyos puntos medios sean 75, 80, 85,..... Dibujar y comparar los histogramas de la muestra no agrupada y la agrupada.

.22.- Las siguientes 100 medidas representan el índice de solución de hierro en muestras de hojalata destinadas a medir la resistencia a la corrosión de la hojalata de acero.

0.78	0.38	0.72	0.65	0.72	0.92	0.78	0.65	0.92	0.78
1.36	1.43	0.65	0.48	0.83	0.48	0.72	0.48	0.65	0.78
0.65	1.00	0.78	0.78	1.03	1.26	0.48	0.48	1.06	0.96
0.65	0.92	0.72	0.78	0.78	0.48	0.28	0.36	0.83	0.48
0.78	0.49	0.36	0.78	0.78	0.83	0.88	0.96	1.03	1.21
0.88	0.57	0.72	1.03	0.92	0.96	0.78	1.09	0.92	1.12
0.65	0.65	0.83	0.72	0.72	0.78	0.72.	1.09	0.83	0.83
0.83	1.06	0.57	0.78	1.23	1.09	1.03	0.18	0.65	1.34
0.96	0.65	0.48	1.18	1.12	0.18	0.48	0.72	0.57	0.55
0.96	0.65	0.96	0.51	0.65	1.21	1.48	0.96	0.96	1.40

- a) Hacer una tabla de frecuencia para datos agrupados con 14 clases.
- b) Dibujar el histograma, polígono de frecuencia yojiva para los datos anteriores.

- c) Calcular gráfica y analíticamente P_{25} , P_{75} , P_{50} , y el rango percentil de 0.90
- d) Calcular la media, desviación estándar, mediana, moda y rango semi-intercuartílico usando la tabla del inciso (a)

8.23.- Las siguientes 20 medidas indican las pérdidas de peso (en g) de ciertas bolas de un molino. Multiplique cada una de estas medidas por 10, calcule la media la varianza de estas medidas así obtenidas, a partir de esto diga cual es la media y la varianza de las pérdidas de peso en gramos:

0.094	0.108	0.114	0.132	0.128
0.117	0.099	0.093	0.105	0.119
0.126	0.122	0.125	0.115	0.097
0.113	0.109	0.111	0.130	0.120

8.24.- Las siguientes son 20 lecturas de temperatura (en °F) tomadas en varios puntos de un horno de gran tamaño

415	460	510	475	430
410	425	490	500	470
450	425	485	470	450
455	460	480	475	465

Hallar \bar{x} , s , s^2

8.25.- Utilizando la transformación $Y_i = \frac{x_i}{5} - 80$ y los datos del problema anterior, calcular \bar{y} , s_y , s_y^2 , luego transformar estas a \bar{x} , s_x , s_y^2 .

8.26.- Para producir cierta marca de automóvil en Francia se requieren diferentes clases de mano de obra en las siguientes cantidades:

mano de obra calificada 50 horas

mano de obra semicalificada 100 horas

mano de obra no calificada 300 horas

Si las tasa salariales por hora para estas tres clases de mano de obra son diez, cinco y dos francos respectivamente, ¿Cuál es el costo medio de la mano de obra por hora para producir un automóvil?

8.27.- Calcular:

a) media aritmética

b) media geométrica

c) media armónica

para los valores dados en la siguiente tabla de frecuencias.

<u>intervalo</u>	<u>f</u>
< 1 , 3]	1
< 3 , 5]	3
< 5 , 7]	4
< 7 , 9]	2

¿Cuál de las tres medias es el más grande? Ordénelas en orden creciente.

PARTE IV

DISTRIBUCIONES MUESTRALES

Y

ESTADISTICA INFERENCIAL

CAPITULO 9 : ESTIMACION Y PRUEBAS DE HIPOTESIS9.1 DISTRIBUCIONES MUESTRALES

Se llama distribución muestral de un estadígrafo a la distribución de probabilidad de todos los valores posibles que pueden ser tomados por dicho estadígrafo, calculados a partir de muestras del mismo tamaño extraídos aleatoriamente de una población.

Para construir una distribución muestral. se procede de la siguiente manera:

- 1) De una población finita discreta, de tamaño N , se extraen aleatoriamente todas las muestras de tamaño n . En general para muestreo con reemplazo, el número de muestras posibles de tamaño n de una población de tamaño N , es igual a N^n , y para muestreo sin reemplazo e ignorando el orden, el número de muestras de tamaño n es $\binom{N}{n}$
- 2) Se calcula el estadígrafo de interés para cada muestra.
- 3) Se construye una tabla de los valores del estadígrafo de interés con sus respectivas probabilidades.
- 4) Se calculan los parámetros μ y σ^2 de la distribución.

Ejemplo 9.1: Consideremos la población formada por los números 5,7,8 y 10 cuya media $\mu = 7.50$ y varianza $\sigma^2 = 3.25$. Determinemos todas las muestras de tamaño 2 sin reemplazo e ignorando el orden de esta población y obtengamos la distribución muestral de la media.

muestra	\bar{X}	\bar{X}	f	$f(\bar{X})$
5 , 7	6	6	1	1/6
5 , 8	6.5	6.5	1	1/6
5 , 10	7.5	7.5	2	2/6
7 , 8	7.5	8.5	1	1/6
7 , 10	8.5	9	1	1/6
8 , 10	9			
			6	$\frac{6}{6} = 1$

Tabla 9.1

Tabla 9.2

$$\mu_{\bar{X}} = \sum \bar{X} f(\bar{X}) = 7.50$$

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \sum \bar{X}^2 f(\bar{X}) - \mu_{\bar{X}}^2 = 57.3333 - 56.25 = 1.0833$$

Observemos que: a) $\mu_{\bar{X}} = \mu$

$$\text{b)} \quad \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \quad \frac{N-n}{N-1}$$

Ejemplo 9.2: Consideremos la misma población que en el ejemplo 9.1 determinemos todas las muestras con reemplazo de tamaño 2 y obtengamos la distribución muestral de la media.

muestra	\bar{X}	\bar{X}	f	$f(\bar{X})$
5 , 5	5	5	1	1/16
5 , 7	6	6	2	2/16
5 , 8	6.5	6.5	2	2/16
5 , 10	7.5	7	1	1/16
7 , 5	6	7.5	4	4/16
7 , 7	7	8	1	1/16
7 , 8	7.5	8.5	2	2/16
7 , 10	8.5	9	2	2/16
8 , 5	6.5	10	1	1/16
8 , 7	7.5			
8 , 8	8			
8 , 10	9			
10 , 5	7.5			
10 , 7	8.5			
10 , 8	9			
10 , 10	10			

Tabla 9.4

Tabla 9.3

$$\mu_{\bar{X}} = 7.50$$

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = 1.6250$$

Observemos que: a) $\mu_{\bar{X}} = \mu$

$$b) \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

9.2. ERROR ESTANDAR:

A la desviación estándar de la distribución muestral de un estadígrafo se le denomina *error estándar o error típico* del estadígrafo en cuestión.

Así, $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ es el error estándar de la media o simplemente

error estándar, cuando el muestreo se hace con reemplazo.

También se puede tener el error estándar de la varianza o de la mediana o de la proporción, etc.

$$\sigma_s^2, \sigma_{Md}, \sigma_p$$

9.3. TEOREMA DEL LIMITE CENTRAL: †

Dada una población cualquiera con media μ y varianza σ^2 . La distribución muestral de \bar{X} , calculada a partir de todas las muestras aleatorias de tamaño n con reemplazo de esta población, estará distribuida en forma aproximadamente normal con media $\mu_{\bar{X}} = \mu$ y varianza $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ y la aproximación a la normal será mejor cuanto mayor sea n .

† La demostración de este teorema utiliza conocimientos de probabilidad no al alcance de este libro, ver Hoel, P. G, pag. 359-361.

Si el muestreo se hace sin reemplazo, entonces $\mu_{\bar{x}} = \mu$, y

$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$, donde $\frac{N-n}{N-1}$ se le llama factor de corrección por población finita, o por muestreo sin reemplazo.

Ejemplo 9.3: Extraigamos todas las muestras de tamaño 3 con reemplazo de la población 5, 7, 8, 10 cuya media es $\mu = 7.50$ y varianza $\sigma^2 = 3.25$ y obtengamos las distribuciones muestrales de la media, de la mediana y de la varianza.

Solución : El número de muestras de tamaño 3 con reemplazo es $4^3 = 64$. Después de ordenar las medias, medianas y varianzas de todas las muestras, tenemos las distribuciones muestrales siguientes:

\bar{x}	$f(\bar{x})$	Md	$f(Md)$	s^2	$f(s^2)$
5	1/64	5	10/64	0	4/64
5.6667	3/64	7	22/64	0.3333	6/64
6	3/64	8	22/64	1.3333	12/64
6.3333	3/64	10	10/64	2.3333	12/64
6.6667	9/64		64/64	3	12/64
7	4/64			6.3333	12/64
7.3333	9/64			8.3333	6/64
7.6667	9/64				64/64
8	4/64		Tabla 9.6		
8.3333	9/64				
8.6667	3/64			Tabla 9.7	
9	3/64				
9.3333	3/64				
10	1/64				
	64/64				

Tabla 9.5

De las tres distribuciones obtenidas tenemos que:

a) $\mu_{\bar{x}} = 7.50$

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = 1.0833 = \frac{3.25}{3} = \frac{\sigma^2}{n}$$

b) $\mu_{Md} = 7.50$

$$\sigma_{Md}^2 = 2.13 > 1.0833 = \sigma_{\bar{x}}^2$$

c) $\mu_{S^2} = 3.25 = \sigma^2$

$$\sigma_{S^2}^2 = 6.52$$

9.4 ESTADISTICA INFERENCIAL

Ya antes hemos hecho mención de la llamada Estadística Inferencial, que toma como base las relaciones existentes entre las muestras y la población para "inferir" acerca de ésta a partir de las muestras, es decir, hace generalizaciones a partir de las muestras.

La Estadística Inferencial pretende resolver dos problemas fundamentales: la estimación de parámetros poblacionales a partir de estadígrafos muestrales conocidos, y la toma de decisiones estadísticas acerca de hipótesis establecidas sobre la población, también con base al conocimiento de sus muestras.

9.5 ESTUACION

El primer problema del cual se ocupa la estadística inferencial, la estimación, puede ser a través de un número simple, generalmente el estadígrafo correspondiente llamado estimación puntual o por medio de dos valores numéricos que definen un intervalo, el cual contiene el parámetro estimado con cierto grado de confiabilidad llamado intervalo de

-confianza.

9.5.1. CARACTERISTICAS DE UN BUEN ESTIMADOR PUNTUAL

Son cuatro las características que debe tener un buen estimador puntual.

a) **Insesgabilidad:** Un estimador puntual es insesgado si la media de la distribución muestral del estadígrafo (Esperanza matemática del estadígrafo) es igual al parámetro por estimar; es decir, si $\hat{\theta}$ es un estadígrafo cualquiera y θ es el parámetro correspondiente y si $\mu_{\hat{\theta}} = E(\hat{\theta}) = \theta$, entonces $\hat{\theta}$ es un estimador insesgado de θ .

Como vimos en el ejemplo 9.3, $E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \mu$, $E(Md) = \mu_{Md} = \mu$ y $E(s^2) = \mu_{s^2} = \sigma^2$, de donde se concluye que \bar{x} y Md son estimadores insesgados de μ , y s^2 de σ^2 . Sin embargo, si usamos la fórmula

$$\frac{s^2}{n} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \quad \text{en vez de} \quad s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

para estimar la varianza de una muestra, entonces

$$\mu_{\frac{s^2}{n}} \neq \sigma^2, \text{ como se muestra a continuación}$$

$$\begin{aligned} \mu_{\frac{s^2}{n}} &= E\left(\frac{s^2}{n}\right) = E\left[\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}\right] = E\left[\frac{n-1}{n} \cdot \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}\right] \\ &= \frac{n-1}{n} E(s^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2 = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

El sesgo en este caso es $-\frac{\sigma^2}{n}$, el cual desaparecerá cuando n

tienda a infinito.

b) Consistencia: Generalmente, un estimador no es idéntico al parámetro que se estima, debido a error de muestreo, que es la diferencia $|\hat{\theta} - \theta|$; pero, si aumentamos el tamaño de la muestra suficientemente, la probabilidad de que esta diferencia $|\hat{\theta} - \theta|$ sea mayor que un número fijo $\epsilon > 0$ tenderá a cero. Esto es :

$$P[|\hat{\theta} - \theta| > \epsilon] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

Claramente, \bar{x} y Md son estimadores consistentes de μ , así como s^2 y s_n^2 lo son de σ^2 .

c) Eficiencia: Se dice que un estimador $\hat{\theta}_1$ es más eficiente que otro estimador $\hat{\theta}_2$ de θ si la varianza del primero es menor que la del segundo; esto es: $\hat{\theta}_1^2 < \hat{\theta}_2^2$, entonces $\hat{\theta}_1$ es más eficiente que $\hat{\theta}_2$.

Como vimos en el ejemplo 9.3, \bar{x} y Md son estimadores insesgados de μ y también consistentes; sin embargo,

$$\sigma_{\bar{x}}^2 < \sigma_{Md}^2$$

de donde, \bar{x} es un estimador de μ más eficiente que Md .

d) Suficiencia: Intuitivamente, decimos que un estimador es suficiente, si transmite tanta información de la muestra como es posible acerca del parámetro, de modo que no será proporcionada mayor información por cualquier otro estimador calculado de la misma muestra; y si se obtiene el valor de un estadígrafo suficiente, los valores de muestra mismos no proporcionan más información sobre el parámetro. Por ejemplo, tanto la Media (\bar{x}) como la Mediana (Md), como el Centro de Amplitud (C.A.) pueden ser usados como estimadores de μ ; sin embargo, solo la media \bar{x} toma en cuenta cada valor o toda la información de la muestra, mientras que el centro de amplitud solo toma en cuenta el primer y último valor, y la mediana es una medida de tendencia central de posición. Así pues, la media \bar{x} es un estimador suficiente para μ .

9.5.2 ESTIMACION POR INTERVALO DE CONFIANZA

Dado un estimador puntual ($\hat{\theta}$) y el método de generarlo, se puede saber si tiene o no las características deseables; pero al emplearlo en vez del parámetro correspondiente (θ), se requiere del tamaño del error estándar del estimador, de manera que, cuando se da una estimación puntual también debe darse el error estándar ($\sigma_{\hat{\theta}}$) de la estimación.

Si se requiere una expresión más formal de la estimación y su precisión, podemos obtener una *estimación por intervalo*, que es una *estimación del parámetro por un intervalo al azar*, llamado *intervalo de confianza*, cuyos extremos son funciones de las variables aleatorias observadas, de manera que la probabilidad de que el parámetro se encuentre en el intervalo se expresa en términos de un número predeterminado $1 - \alpha$, llamado *coeficiente de confianza*. Así, se define un intervalo de confianza de manera general como:

$$P(\hat{\theta} - k \sigma_{\hat{\theta}} < \theta < \hat{\theta} + k \sigma_{\hat{\theta}}) := 1 - \alpha$$

donde k es un valor crítico correspondiente al *coeficiente o nivel de confianza* $1 - \alpha$. α es el nivel de significancia o de significación y representa la probabilidad de que el intervalo no incluya al parámetro.

$\hat{\theta} - k \sigma_{\hat{\theta}}$ es el límite inferior de confianza y $\hat{\theta} + k \sigma_{\hat{\theta}}$ es el límite superior de confianza.

Para mayor claridad, supongamos que el parámetro a estimar por intervalo de confianza es la media μ . Sabemos que la distribución muestral de \bar{x} es aproximadamente normal por el *Teorema del Límite Central* y que aproximadamente 95.5% de los valores de \bar{x} están dentro de dos desviaciones estándar de la media; esto es, entre $\mu - 2\sigma_{\bar{x}}$ y $\mu + 2\sigma_{\bar{x}}$ hay aproximadamente 95.5% de los valores de \bar{x} . Pero como no conocemos μ , no tenemos los valores de los extremos del intervalo; sin embargo tenemos una estimación puntual de μ , que es \bar{x} ; construimos entonces, el intervalo alrededor de este valor \bar{x} , la pregunta es ¿será útil este intervalo construido

alrededor de un estimador puntual \bar{x} ? La respuesta es, si. Supóngase que se construyen todos los posibles intervalos alrededor de cada uno de los posibles valores de \bar{x} de todas las muestras aleatorias del mismo tamaño (n) escogidas de la población de interés.

Tendremos una gran cantidad de intervalos de la forma $(\bar{x} - 2 \sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + 2 \sigma_{\bar{x}})$ todos con la misma amplitud del intervalo alrededor del parámetro desconocido μ . Aproximadamente 95.5% de estos intervalos tendrían centros que caen dentro de $\pm 2 \sigma_{\bar{x}}$ alrededor de μ . Esta situación se muestra en la siguiente figura:

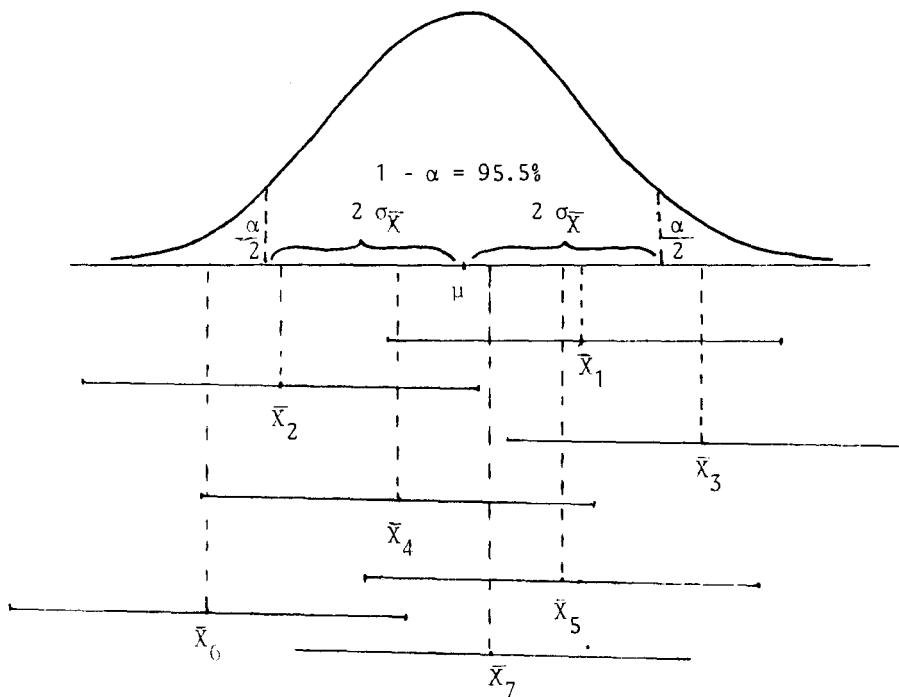


Fig 9.1

Asimismo, habrán 4.5% de los intervalos construidos alrededor de \bar{x} , $\bar{x} \pm 2 \sigma_{\bar{x}}$ que no contienen a μ , pero como el valor \bar{x} proviene de una muestra al azar, el intervalo así construido es al azar.

Nótese que si $1 - \alpha$ no es 95.5% sino cualquiera otro valor, la amplitud del intervalo no es de $2 \sigma_{\bar{x}}$ sino el valor crítico de Z correspondiente a $1 - \alpha$, generalmente denotado por $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ multiplicado por el error estándar $\sigma_{\bar{x}}$; esto es, $z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma_{\bar{x}}$. Esto lo podemos observar en las figuras 9.2(a) y 9.2(b).

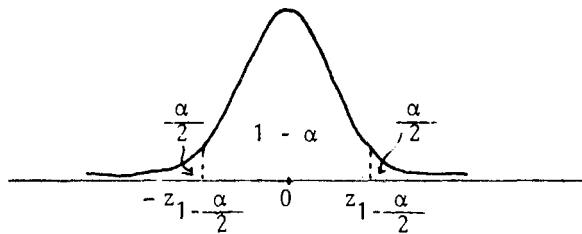


Fig. 9.2 (a)

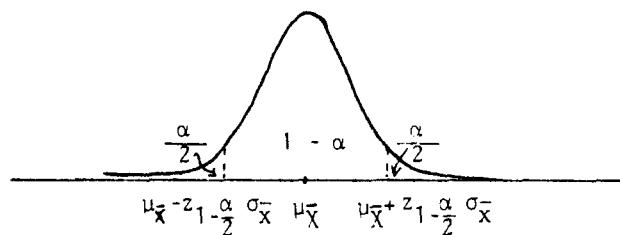


Fig. 9.2 (b)

9.6 CONTRASTES O PRUEBAS DE HIPOTESIS

Antes de estudiar todos los casos de estimación por intervalo de confianza para los diferentes parámetros, pasaremos a las generalidades del segundo problema que trata la Estadística Inferencial, la prueba de hipótesis acerca de parámetros. Posteriormente para cada parámetro, haremos simultáneamente la estimación por intervalo de confianza y el contraste o prueba de hipótesis para cada caso. Pues la estimación y el contraste de hipótesis no son cosas tan diferentes como aparentan ser por el hecho de que la mayoría de los libros estudian estos aspectos en capítulos separados. Podemos, como veremos posteriormente, llegar a la misma conclusión usando intervalos de confianza o contrastes de hipótesis.

Las pruebas de significación o de hipótesis permiten verificar la veracidad de alguna hipótesis establecida acerca de una población, determinando si los valores difieren significativamente de los esperados por la hipótesis o si las diferencias observadas son debidas solo al azar.

Una **Hipótesis Estadística** es una suposición que se plantea respecto a un problema o a una población, con el fin de probar si es o no verdadera.

En las pruebas de hipótesis se distinguen dos tipos de hipótesis: la **hipótesis nula**, designada por H_0 , conocida también como hipótesis de no diferencia, es cualquier hipótesis estadística que se establece en principio con el único propósito de rechazarla o anularla; y la **hipótesis alternativa**, H_a , que es cualquier suposición que difiera de la nula. La hipótesis nula generalmente se especifica en una forma opuesta a la que se supone cierta. Las hipótesis nula y alternativa deben ser mutuamente exclusivas.

El procedimiento mediante el cual se decide aceptar o rechazar una hipótesis estadística, o se trata de determinar, cuando las muestras observadas difieren significativamente de los resultados esperados se

denomina prueba o contraste de hipótesis. Así, hablamos de probar una hipótesis nula contra una alternativa en el supuesto de que la hipótesis nula es verdadera.

9.6.1 TIPOS DE PRUEBA

Hay dos tipos de pruebas, bilaterales y unilaterales; las bilaterales o de dos colas cuya forma general es:

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

$$H_a : \theta \neq \theta_0$$

Donde θ representa cualquier parámetro y θ_0 es un valor supuesto del parámetro.

Las pruebas unilaterales o de una cola, pueden ser: a) unilateral de cola inferior o de cola izquierda, cuya forma general es:

$$H_0 : \theta \geq \theta_0$$

$$H_a : \theta < \theta_0$$

y b) unilateral de cola superior o de cola derecha de la forma:

$$H_0 : \theta \leq \theta_0$$

$$H_a : \theta > \theta_0$$

9.6.2 TIPOS DE ERRORES

El procedimiento de probar una hipótesis nula contra una alternativa sobre la base de información obtenida de la muestra, conducirá a dos tipos de errores posibles, debido a fluctuaciones al azar en el muestreo. Si la hipótesis nula es en realidad cierta, pero los datos de la muestra son incompatibles con ella y se rechaza, se comete un *error de tipo I*; es decir, un error de tipo I se comete cuando se rechaza una hi-

hipótesis nula verdadera. Por otro lado, se comete un *error de tipo II* cuando se acepta una hipótesis nula falsa. En resumen se tiene el siguiente cuadro:

		Decisiones	
		Aceptar	Rechazar
Eventos	$H_0 \text{ V}$	Correcta	Error tipo I.
	$H_0 \text{ F}$	Error tipo II	Correcta (Poder)

Las probabilidades de cometer errores de tipo I y II, pueden considerarse como los riesgos de decisiones incorrectas. La probabilidad de cometer un error de tipo I se llama nivel de significancia o de significación y se designa por α ; la probabilidad de cometer un error de tipo II no tiene un nombre en particular, pero se representa por β . Esto es;

$$P(\text{E.T.I.}) = P(\text{Rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ V}) = \alpha$$

$$P(\text{E.T.II}) = P(\text{Aceptar } H_0 \mid H_0 \text{ F}) = \beta$$

El nivel de significación α lo fija el investigador, en la práctica se usa, 5° ó 10 y a veces 0.1% y 10% ; pero al disminuir α aumenta β , el cual es considerado más grave.

9.6.3. ESTADIGRAFO DE PRUEBA O ESTADIGRAFO DE CONTRASTE:

Puesto que la decisión de aceptar H_0 ó H_a se hace en base a la muestra, es necesario escoger una función de las n observaciones de la muestra como *estadígrafo de prueba*. En general, el estadígrafo de prueba debe ser uno cuya distribución muestral sea conocida en el supuesto de que H_0 sea cierta. El estadígrafo de prueba generalmente resulta el estimador convencional del parámetro previsto en H_0 .

Para generalizar: Un estadígrafo de prueba $\hat{\theta}$ es una variable aleatoria cuya distribución es conocida, en el supuesto de que la $H_0 : \theta = \theta_0$ sea cierta.

9.6.4. REGION CRITICA O REGION DE RECHAZO:

La *región de rechazo* o *región crítica* es la región que contiene los resultados menos favorables a H_0 en el supuesto que H_0 sea verdadera y la *región de aceptación* es la que contiene los resultados más favorables a H_0 . Estas regiones están separadas o limitadas por los *valores críticos* del estadígrafo de prueba que corresponden al nivel de significación dado; también son llamados valores teóricos del estadígrafo de prueba.

Para los dos tipos de pruebas, tenemos las regiones críticas como siguen:

1) Prueba bilateral o de dos colas

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

$$H_a : \theta \neq \theta_0$$

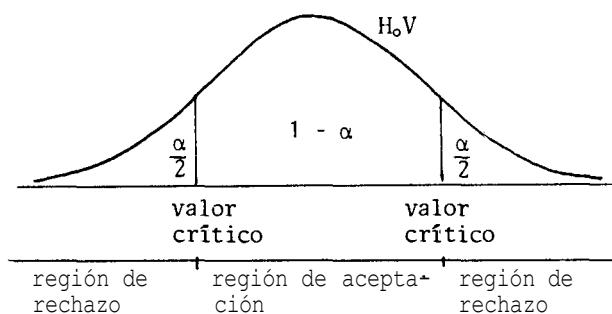


Fig. 9.3

2) Pruebas unilaterales o de una cola:

a) Unilateral de cola izquierda o inferior

$$H_0 : \theta \geq \theta_0$$

$$H_a : \theta < \theta_0$$

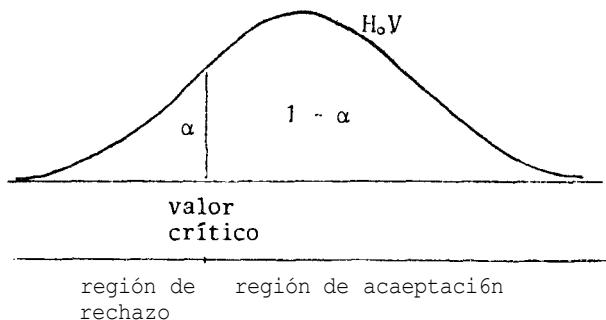


Fig. 9.4

b) Unilateral de cola derecha o superior

$$H_0 : \theta \leq \theta_0$$

$$H_a : \theta > \theta_0$$

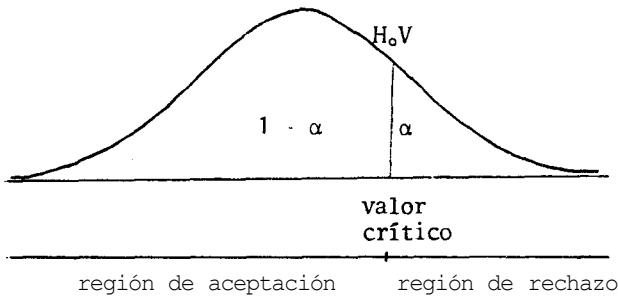


Fig. 9.5

9.6.5. PROCEDIMIENTO DE PRUEBA:

Las pruebas de hipótesis se presentan como un procedimiento que implica los siguientes pasos:

- 1) Datos y suposiciones
- 2) Formular hipótesis acerca del parámetro o parámetros de acuerdo con el problema que se tiene (H_0 y H_a) .
- 3) Escoger un nivel de significación o riesgo, α .
- 4) Escoger el estadígrafo de prueba cuya distribución muestral es conocida en el supuesto de que H_0 sea cierta.
- 5) Determinar la región critica, misma que depende del tipo de hipótesis, del nivel de significación y del estadígrafo de prueba.
- 6) Calcular el estadígrafo de prueba para los valores de la muestra al azar, de modo que puedan ser comparados con los valores críticos (teóricos).
- 7) Decidir la aceptación o rechazo de H_0 y dar una conclusión al problema planteado.

9.7. INTERVALOS DE CONFIANZA Y PRUEBAS DE HIPÓTESIS ACERCA DE UN PARÁMETRO:

Habiendo desarrollado el procedimiento general para hallar intervalos de confianza y para probar hipótesis, procedemos a continuación a estudiar los diferentes casos de estimaciones por intervalo de confianza y pruebas de hipótesis acerca de un solo parámetro (una sola población está involucrada) .

9.7.1-. INTERVALO DE CONFIANZA Y PRUEBA DE HIPOTESIS ACERCA DE μ CON σ

CONOCIDA:

Como vimos en la sección 9.5.2 el intervalo de confianza para μ cuando la población está normalmente distribuida y la muestra es aleatoria es de la forma:

$$P(\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

Si σ es conocida por el Teorema del Límite Central, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, quedando:

$$P(\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

Ejemplo 9.4: Supongamos un investigador que está interesado en estimar el nivel medio de alguna enzima en una cierta población, toma una muestra de 10 individuos, determina el nivel de la enzima en cada uno y calcula la media $\bar{X} = 22$. Supongamos además que se sabe que la variable de interés está distribuida en forma aproximadamente normal con varianza σ^2 de 45. Entonces el intervalo de confianza del 95% para μ es:

$$P(22 - 1.96 \sqrt{\frac{45}{10}} < \mu < 22 + 1.96 \sqrt{\frac{45}{10}}) = 0.95$$

$$P(22 - 4.1578 < \mu < 22 + 4.1578) = 0.95$$

$$P(17.84 < \mu < 26.1578) = 0.95$$

Ejemplo 9.5: Sunogramos ahora que la pregunta es la siguiente: ¿Se puede concluir que el nivel medio de la enzima es diferente de 25? Para responder esta pregunta debemos hacer una prueba de hipótesis:

1) Datos y Suposiciones:

$$n = 10$$

$$\bar{X} = 22$$

Se supone que la muestra es aleatoria y fue extraída de una población aproximadamente normal con varianza $\sigma^2 = 45$.

2) Hipótesis

$$H_0 : \mu = 25$$

$$H_a : \mu \neq 25$$

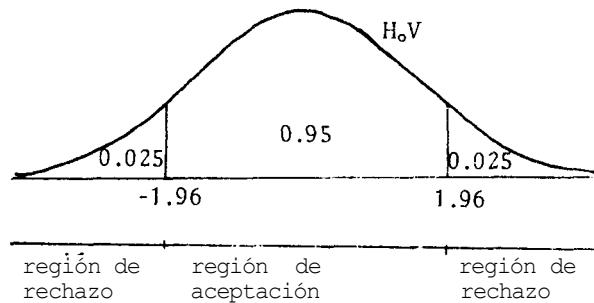
3) Nivel de significación:

$$\alpha = 0.05$$

4) Estadígrafo de prueba:

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

5) Región Crítica:



6) Cálculo del estadígrafo de prueba:

$$z = \frac{22 - 25}{\sqrt{\frac{45}{10}}} = -1.4142$$

7) Decisión y Conclusión:

Se acepta H_0 porque -1.4142 cae en la región de aceptación, por consiguiente, concluimos que el nivel de la enzima no es significativamente diferente de 25 al 5% de nivel de significación.

NOTA: Como dijimos anteriormente, los intervalos de confianza no son un concepto aislado de las pruebas de hipótesis; en efecto, son equivalentes a una prueba bilateral o de dos colas, como podemos observar el valor $\mu = 25$ está dentro del intervalo $(17.8422, 26.1578)$ por lo que concluimos que μ no es significativamente diferente de 25. Sin embargo, un intervalo de confianza no será jamás equivalente a una prueba unilateral o de una cola.

Ejemplo 9.6 : Un físico-terapista desea estimar, con 99% de confianza la media de la fuerza máxima de un cierto músculo de un grupo de individuos. El supone que los valores de la fuerza muscular están distribuidos aproximadamente en forma normal con una varianza de 144. Toma una muestra de 15 sujetos y obtiene una media $\bar{x} = 84.3$ ¿Cuál es el intervalo?

$$P\left(84.3 - 2.576 \frac{12}{\sqrt{15}} < \mu < 84.3 + 2.576 \frac{12}{\sqrt{15}}\right) = 0.99$$

$$P(84.3 - 7.9814 < \mu < 84.3 + 7.9814) = 0.99$$

$$P(76.3186 < \mu < 92.2814) = 0.99$$

9.7.2 TAMAÑO DE MUESTRA PARA ESTIMACIONES DE LA MEDIA μ CON σ CONOCIDA:

La determinación del tamaño de la muestra es muy importante puesto que si tomamos una muestra muy pequeña no será significativa y si la tomamos muy grande estamos desperdiciando recursos.

Usaremos los intervalos de confianza para calcular tamaños de muestra; si vemos con cuidado el intervalo de confianza para la media

$$P(\bar{X} - z_1 - \frac{\alpha}{2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_1 - \frac{\alpha}{2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

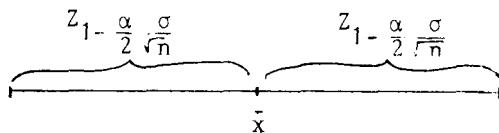
y deseamos estrechar el intervalo, tenemos varias opciones:

i) Disminuir el nivel de confianza : $1 - \alpha$

ii) Aumentar el tamaño de la muestra, lo que disminuye el error estándar, puesto que σ es fija:

De estas dos opciones, la primera no es muy recomendable porque aumentamos α , el riesgo de que μ no esté en el intervalo.

Hay una consecuencia interesante que se desprende de la relación entre el *error máximo de estimación* (diferencia entre el estimador y el parámetro) y el *riesgo* (a definido anteriormente) que es la determinación del tamaño de la muestra. Observemos que la longitud o amplitud del intervalo: $L = 2 z_1 - \frac{\alpha}{2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$



donde el error máximo de estimación es

$$E = \frac{L}{2} = z_1 - \frac{\alpha}{2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

de donde podemos despejar n si conocemos el error máximo de estimación E ; el riesgo α y la varianza poblacional

$$n = \left(\frac{z_1 - \frac{\alpha}{2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{E} \right)^2$$

Si el muestreo es sin reemplazo, introducimos el factor de corrección por población finita: $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$, de donde:

$$E = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

que al resolver para n, se tiene:

$$n = \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \sigma^2}{E^2(N-1) + z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \frac{\sigma^2}{N-1}}$$

Si N es muy grande en comparación con n se puede ignorar el factor de corrección por población finita.

Ejemplo 9.7:

Un Nutriólogo del Instituto de Nutrición desea hacer una encuesta en la población de mujeres adolescentes, para determinar el promedio de gramos de proteínas que consumen diariamente, para ello consulta un estadístico acerca del tamaño de la muestra; pero antes de que se le pueda ayudar, el nutriólogo debe proporcionarnos tres datos: la amplitud del intervalo, el nivel de confianza deseado y la magnitud de la varianza poblacional.

Supongamos que la longitud deseada es de 10 unidades, o sea el parámetro debe estar dentro de 5 unidades a cada lado del estimador. Supongamos que $1 - \alpha = 0.995$ y que la experiencia le dice al nutriólogo que $\sigma \approx 20$ gramos. Con esta información, el estadístico sabe que

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96, \quad \sigma = 20, \quad E = 5, \quad \text{entonces:}$$

$$n = \left[\frac{(1.96)(20)}{5} \right]^2 = 61.4656$$

pero n es un número entero, puesto que no podemos tomar 0.4656 de persona, entonces tomamos una muestra de tamaño 62.

9.7.3. INTERVALO DE CONFIANZA Y PRUEBA DE HIPOTESIS ACERCA DE π (LA PROPORCIÓN BINOMIAL POBLACIONAL) :

Sea p el estimador de π , entonces sabemos que la media μ y la desviación estándar de la variable aleatoria binomial x son;

$$\mu = n\pi$$

$$\sigma = \sqrt{n\pi(1-\pi)}$$

de donde el estadígrafo de prueba es:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma_x} \quad \text{ó} \quad z = \frac{x - n\pi}{\sqrt{n\pi(1-\pi)}}$$

dividiendo el numerador y el denominador entre n , tenemos:

$$z = \frac{\frac{x}{n} - \pi}{\sqrt{\frac{n\pi(1-\pi)}{n}}} = \frac{\frac{x}{n} - \pi}{\sqrt{\frac{n\pi(1-\pi)}{n^2}}} = \frac{\frac{x}{n} - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}}$$

donde $\frac{x}{n}$ es la estimación p de π .

Así tenemos que el error estándar de p es: $\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$

pero como no conocemos π usamos su estimador p , de donde

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \quad \text{ó} \quad \sigma_p = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

En consecuencia, el intervalo de confianza para π es :

$$P(p - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma_p < \pi < p + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma_p) = 1 - \alpha$$

$$P(p - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{pq}{n}} < \pi < p + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{pq}{n}}) = 1 - \alpha$$

Ejemplo 9.8: En un estudio designado a determinar la relación entre cierta droga y cierta anomalía en embriones de pollo, se inyectaron 50 huevos fertilizados con la droga en el 4º día de incubación. En el vigésimo día de incubación los embriones fueron examinados y 12 presentaron la anomalidad. Encuentre un intervalo de confianza del 99% para π .

Datos: $p = \frac{x}{n} = \frac{12}{50} = 0.24$, $q = 1 - p = 0.76$, $1 - \alpha = 0.99$

$$P(0.24 - 2.576 \sqrt{\frac{(0.24)(0.76)}{50}} < \pi < 0.24 + 2.576 \sqrt{\frac{(0.24)(0.76)}{50}}) = 0.99$$

$$P(0.0844 < \pi < 0.3956) = 0.99$$

Ejemplo 9.9 : Supongamos que queremos averiguar si la proporción poblacional es inferior a 0.25 con un nivel de significación de 0.05, entonces

1) *Datos y suposiciones:*

$$n = 50$$

$$x = 12$$

$$p = 0.24$$

$$q = 0.76$$

La distribución muestral de p es aproximadamente normal con estadígrafo de prueba:

$$Z = \frac{p - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}}$$

nótese que aquí usamos π_0 en vez de p en la raíz porque las pruebas de hipótesis asumen que H_0 es verdadera.

2) *Hipótesis*

$$H_0 : \pi \geq 0.25$$

$$H_a : \pi < 0.25$$

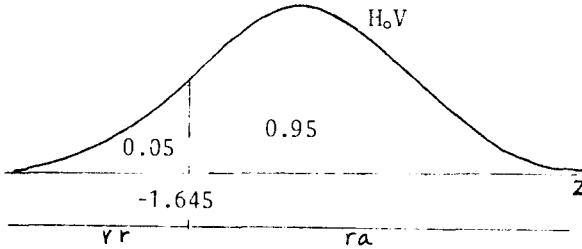
3) *Nivel de significación*

$$\alpha = 0.05$$

4) *Estadígrafo de prueba en el supuesto de que H_0 es verdadera:*

$$Z = \frac{p - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}}$$

5) *Región Crítica:*



6) *Cálculo de z :*

$$Z = \frac{0.24 - 0.25}{\sqrt{\frac{(0.25)(0.75)}{50}}} = -0.1633$$

7) *Decisión y conclusión*

Se acepta H_0 con $\alpha = 0.05$ lo que significa que la proporción de embriones que presentan anormalidad al ser

inyectados con una droga no es significativamente inferior a 0,25.

9.7.4. TAMAÑO DE MUESTRA PARA ESTIMACION DE LA PROPORCIÓN π :

La determinación del tamaño de muestra cuando se hace la estimación de la proporción poblacional es esencialmente la misma que la descrita en la sección 9.7.2 para la determinación del tamaño de muestra en la estimación de la media poblacional. Hacemos uso del hecho de que la mitad de la amplitud del intervalo es el error máximo de estimación.

$$E = z_{1 - \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

Asumiendo muestreo aleatorio y distribución de p aproximadamente normal, conduce a la siguiente fórmula, cuando el muestreo es con reemplazo.

$$n = \frac{z_{1 - \frac{\alpha}{2}}^2 pq}{E^2} \dots \dots \quad (9.1)$$

Si el muestreo es sin reemplazo

$$E = z_{1 - \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{pq}{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

de donde :

$$n = \frac{N z_{1 - \frac{\alpha}{2}}^2 p q}{E^2 (N-1) + z_{1 - \frac{\alpha}{2}}^2 p q} \dots \dots \quad (9.2)$$

Si N es muy grande en comparación con n (Esto es, $\frac{n}{N} < 0.05$)

el factor de corrección por población finita puede ser ignorado y podemos usar 9.1 en vez de 9.2.

Ejemplo 9.10:

La reacción de un individuo a un estímulo en un experimento psicológico puede tomar una de dos formas, A O B. Si un investigador desea estimar la proporción π de que una persona reaccione a favor de A, ¿Cuántas personas deben incluirse en el experimento? Supongamos que el investigador quedará satisfecho si el error máximo de estimación es menor que 0.04 con una probabilidad de 0.90. Supongamos también que él espera que π tenga un valor cercano a 0.6.

$$\text{Solución: } 1 - \alpha = 0.90$$

$$E = 0.04$$

Como no conocemos p ni π , pero se sospecha que $\pi \approx 0.6$, entonces usamos esta aproximación para el valor de p .

$$n = \frac{(1.645)^2(0.6)(0.4)}{(0.04)^2} = 405.9038$$
$$\pi \approx 406$$

9.7.5 POBLACIONES NO NORMALES:

No siempre es posible o prudente asumir que la población de interés está normalmente distribuida. Gracias al TEOREMA DEL LIMITE CENTRAL, esto no nos debe preocupar demasiado si podemos tomar una **muestra suficientemente grande**, puesto que para muestras grandes la distribución de \bar{X} es aproximadamente normal, sin importar como está distribuida la población de donde proviene la muestra.

9.7.6 INTERVALO DE CONFIANZA Y PRUEBA DE HIPOTESIS PARA μ CON σ DESCONOCIDA:

En la sección 9.7.1 construimos el intervalo de confianza y probamos hipótesis acerca de μ con σ conocida. Pero parece extraño que conozcamos la varianza σ^2 y no la media de la población μ . En efecto, generalmente si se desconoce μ , también se desconoce σ . Esto presenta un problema, ya que:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad \text{no puede ser usada si no se conoce } \sigma^2.$$

Como resultado del trabajo de W. S. Gosset, quien publicó en 1908 su trabajo bajo el pseudónimo de "student", hay una distribución disponible para la estimación y prueba de hipótesis acerca de μ cuando σ es desconocida, "la distribución t de student" o simplemente la *distribución t*, cuya expresión es:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

que tiene las siguientes propiedades:

- i) Su media es $\mu_t = 0$.
- ii) Es simétrica respecto a μ_t .
- iii) En general, su varianza σ_t^2 es mayor que 1, pero se approxima a 1 cuando n es grande.

[†] Algunos autores usan Z aún sin conocer σ , si el tamaño de la muestra es mayor que 30, puesto que

$$s = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n - 1}} \quad \text{se approxima a } \sigma \text{ cuando } n$$

es grande, entonces usan el estimador s en vez de σ . Nosotros solo usaremos Z cuando σ es conocida o en el caso de que $n > 200$. Si $n < 200$ será obligatorio buscar un procedimiento alterno para hallar intervalos de confianza y probar hipótesis cuando σ sea desconocida.

- iv) La variable t toma valores de $-\infty < t < +\infty$
- v) La distribución t es realmente una familia de distribuciones (curvas), ya que hay una distribución diferente para cada valor de $v=n-1$, el denominador de s^2 .

La siguiente figura muestra diferentes distribuciones t para varios grados de libertad (véase sección 6.4)

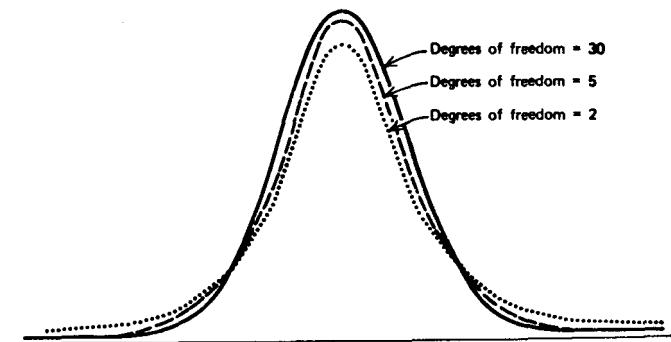


Fig. 9.6 Distribución t para diferentes grados de libertad

- vi) Comparando la distribución normal con la distribución t , la distribución t es menos "picada" en el centro y tiene las colas más altas.

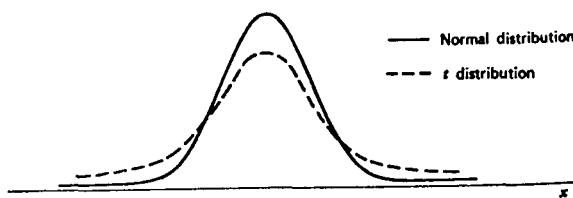


Fig. 9.7 Comparación entre la distribución Normal y la distribución t.

- vii) La distribución t se aproxima a la Normal cuando $n-1$ se aproxima a infinito.

GRADOS DE LIBERTAD:

La cantidad $n-1$ es llamada grados de libertad (g.l) y es el número de observaciones que son linealmente independientes o que pueden escogerse libremente. En general, dado el tamaño de muestra (n), el número de grados de libertad (g.l) es $n-k$, donde k es el número de restricciones para los cálculos de un estadígrafo que abarque sumas de cuadrados. Así, por ejemplo, para calcular $s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$ y una restricción, el cálculo de $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ y conocida \bar{x} y $n-1$ observaciones podemos calcular la n -ésima observación; esto es, la otra observación es automáticamente linealmente dependiente de las $n-1$ observaciones linealmente independientes.

Después de los preliminares, tenemos que, el intervalo de confianza para μ cuando el muestreo es de *una población normal* cuya desviación estándar σ es desconocida, viene dado por:

$$P(\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

y el estadígrafo de prueba es:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \quad \text{con } n - 1 \text{ grados de libertad.}$$

Ejemplo 9.11: Se ha realizado un experimento muy costoso para evaluar un nuevo proceso para producir diamantes sintéticos. Con el nuevo proceso se han generado seis diamantes con pesos : 0.46, 0.61, 0.52, 0.48, 0.57 y 0.54 quilates. Un estudio de los costos del proceso indica que el peso debe ser mayor que 0.5 quilates para que el proceso rinda utilidades. ¿ Presentan los seis pesos observados suficiente evidencia de que el peso medio de los diamantes producidos por el nuevo proceso es superior a 0.5 quilates ?

Solución:

1) Datos y suposiciones

pesos; 0.46, 0.61, 0.52, 0.48, 0.57, 0.54

Población normal, muestra aleatoria.

2) Nivel de significación

$\alpha = 0.05$

3) Hipótesis:

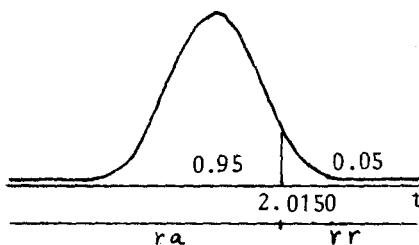
$H_0 : \mu \leq 0.5$

$H_a : \mu > 0.5$

4) Estadígrafo de prueba;

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}, \text{ gl. } = 6 - 1 = 5$$

5) Región Crítica:



6) Cálculos:

$$\tilde{x} = 0.53$$

$$s = 0.055857$$

$$t = \frac{0.53 - 0.5}{\frac{0.055857}{\sqrt{6}}} = 1.3156$$

7) Decisión y conclusión:

Se acepta H_0 , los seis pesos observados no presentan suficiente evidencia de que el peso medio de los diamantes producidos sea superior a 0.5 quilates.

Ejemplo 9.12: Determinese el intervalo de confianza del 95% para el peso medio poblacional de los diamantes del ejemplo 9.11

$$P(0.53 - 2.5706 \frac{0.055857}{\sqrt{6}} < \mu < 0.53 + 2.5706 \frac{0.055857}{\sqrt{6}}) = 0.95$$

$$P(0.53 - 0.0586 < \mu < 0.53 + 0.0586) = 0.95$$

$$P(0.4714 < \mu < 0.5886) = 0.95$$

9.7. 7 INTERVALO DE CONFIANZA Y PRUEBA DE HIPOTESIS PARA LA VARIANZA

(σ^2) O LA DESVIACION ESTANDAR (σ) DE UNA DISTRIBUCION NORMAL:

De una muestra aleatoria de tamaño n , se obtiene la varianza muestral s^2 , a partir de la cual se trata de estimar o probar hipótesis acerca de σ^2

Si x_1, x_2, \dots, x_n son variables aleatorias normales e independientes, con la misma media μ y misma varianza σ^2 , la suma de los cuadrados de estas variables, se dice que es una variable ji-cuadrada (χ^2) con $n-1$ grados de libertad; es decir:

$$\chi^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

La función densidad ji-cuadrada, como vimos en la sección 6.3 es:

$$f(\chi^2) = \frac{(\chi^2)^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{\chi^2}{2}}}{2^{\frac{v}{2}} \Gamma(\frac{v}{2})}, \quad \chi^2 \geq 0$$

Sin embargo, así como no trabajamos con la densidad de la variable normal z , tampoco trabajamos con la de ji-cuadrada; lo que nos importa son sus propiedades geométricas:

- 1) Si X es una variable normal y si x_i son n -observaciones que constituyen una muestra al azar, siendo x_i un valor de X entonces

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \quad \text{se distribuye como } \chi^2 \text{ con } n-1 \text{ grados de libertad.}$$

- 2) χ^2 toma valores de $[0, \infty)$ porque es una suma de cuadrados.

- 3) Una distribución ji-cuadrada se define completamente por sus grados de libertad, su media y varianza son:

$$\mu_{\chi^2} \text{ E } (\chi^2) = n - 1$$

$$\sigma_{\chi^2}^2 = 2(n-1)$$

- 4) Las distribuciones ji-cuadradas son positivamente asimétricas, pero cuando aumentan los grados de libertad se aproximan a la normal.

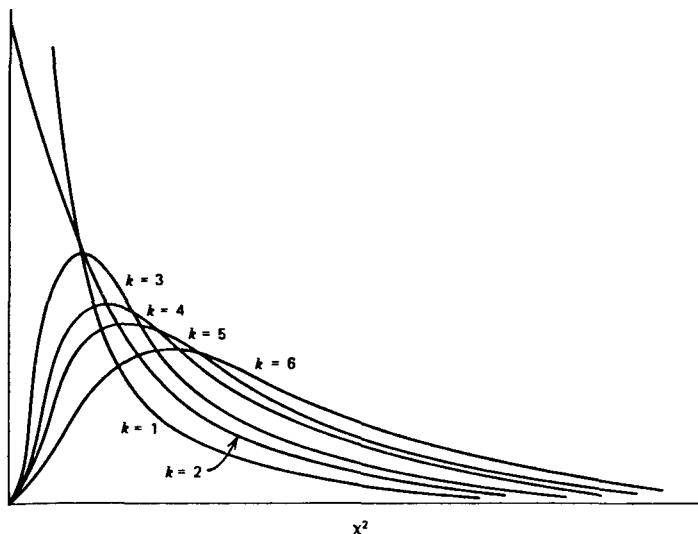


Fig. 9.8 Distribución ji-cuadrada para diferentes grados de libertad.

Si en la propiedad 1 se sustituye \bar{x} por μ y la varianza mues--

tral $s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$, tenemos

$$\chi^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1) s^2}{\sigma^2} \text{ con } n-1 \text{ grados de libertad,}$$

como estadígrafo de prueba para σ^2

Así, el intervalo de confianza para σ^2 es:

$$P\left(\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2 < \chi^2 < \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2}{\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}} < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2\right) = 1 - \alpha$$

despejando el parámetro a estimar σ^2 , se tiene

$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2}\right) = 1 - \alpha$$

Ejemplo 9.13: Se hicieron determinaciones del suero amiláceo de 15 sujetos aparentemente sanos y se encontró una media de 96 $\frac{\text{unidades}}{100 \text{ ml}}$ y una desviación estándar de 35 $\frac{\text{unidades}}{100 \text{ ml}}$. Suponiendo que la distribución de

donde provino la muestra está normalmente distribuida, construyamos el intervalo de confianza del 95% para σ^2 .

$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2}\right) = 1 - \alpha$$

$$1 - \alpha = 0.95$$

$$s = 35 \implies s^2 = 1225$$

$$n = 15 \implies g_1 = 14$$

$$\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 = 26.119 \quad y \quad \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2 = 5.629$$

sustituyendo:

$$P\left(\frac{14(1225)}{26.119} < \sigma^2 < \frac{14(1225)}{5.629}\right) = 0.95$$

$$P(656.6101 < \sigma^2 < 3046.7223) = 0.95$$

Si quisiéramos el intervalo para σ , extraemos raíz cuadrada a ambos límites de confianza, obteniéndose:

$$P(25.62 < \sigma < 55.20) = 0.95$$

Ahora supongamos que nos interesa probar la hipótesis: $\sigma^2 = 2500$

Solución:

1) *Datos y Suposiciones;*

$$s^2 = 1225$$

$$n = 15$$

Los 15 datos constituyen una muestra aleatoria extraída de una población normalmente distribuida.

2) *Hipótesis:*

$$H_0: \sigma^2 = 2500$$

$$H_a: \sigma^2 \neq 2500$$

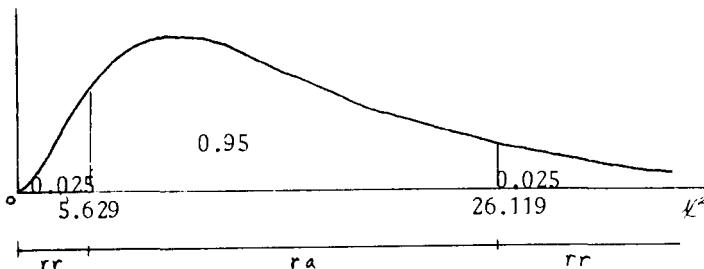
3) *Nivel de significación*

$$\alpha = 0.05$$

4) *Estadígrafo de prueba:*

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}, g_1 = 14$$

5) Región Crítica:



6) Cálculos:

$$\chi^2 = \frac{14(1225)}{2500} = 6.86$$

7) Decisión y conclusión:

Se acepta H_0 , por consiguiente la varianza no es significativamente diferente de 2500.

9.8 INTERVALOS DE CONFIANZA Y PRUEBAS DE HIPOTESIS ACERCA DE DOS PARAMETROS.

En las secciones precedentes hemos hallado intervalos de confianza y probado hipótesis acerca de un solo parámetro, ahora nos ocupamos de aquellos casos en que dos poblaciones están involucradas (dos parámetros)

9.8.1. INTERVALO DE CONFIANZA Y PRUEBA DE HIPOTESIS ACERCA DEL COCIENTE DE DOS VARIANZAS $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ DE DOS POBLACIONES NORMALMENTE DISTRIBUIDAS.

Frecuentemente es necesario comparar dos varianzas y, una manera de hacerlo es colocarlas en forma de razón $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$. Si las varian-

-zas son iguales, su razón es igual a 1.

Como normalmente no conocemos las varianzas de las poblaciones de interés, cualquier comparación que se desee tendrá que estar basada en las varianzas muestrales s_1^2 y s_2^2 , las cuales deberán ser independientes porque las muestras aleatorias deben ser independientes y extraídas de poblaciones normales; entonces s_1^2 será un estimador insesgado

de σ^2 y $\frac{(n-1)s_1^2}{\sigma_1^2}$ tendrá una distribución χ^2 con $n_1 - 1$ grados de libertad. Similarmente s_2^2 será un estimador insesgado de σ_2^2 y $\frac{(n-1)s_2^2}{\sigma_2^2}$

estarán distribuidas como χ^2 con $n_2 - 1$ grados de libertad. La razón de estos dos estimadores:

$$\frac{\frac{s_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{s_2^2}{\sigma_2^2}}$$

sigue una distribución F de Fisher o simplemente *distribución F* que posee las siguientes propiedades:

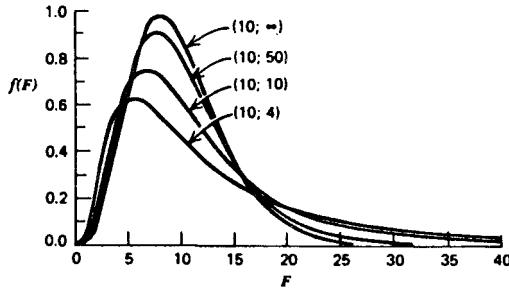
- 1-) La distribución F depende de dos valores de grados de libertad uno correspondiente al numerador ($n_1 - 1$) y otro al denominador ($n_2 - 1$), a los cuales nos referiremos como *grados de libertad del numerador* ($gl_{num} = v_1 = n_1 - 1$) y *grados de libertad del denominador* ($gl_{den} = v_2 = n_2 - 1$)

- 2.) La densidad de la variable F viene dada por

$$f(F) = \left[\frac{\Gamma(\frac{v_1 + v_2}{2})}{\Gamma(\frac{v_1}{2}) \Gamma(\frac{v_2}{2})} \right] \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{\frac{v_1}{2}} F^{\left(\frac{v_1}{2} - 1 \right)} \left[1 + \frac{1}{v_2} F \right]^{-\frac{v_1 + v_2}{2}}$$

3.) La distribución F varía de 0 a $+\infty$ por ser un razón de dos cantidades cuadradas.

4.) Hay una distribución F para cada par de valores de grados de libertad v_1 y v_2 .



Fig, 9.9 Distribución F para diferentes grados de libertad.

5.) Como la distribución x^2 , una distribución F es positivamente asimétrica, pero su asimetría se reduce con los aumentos de

6.) Si X tiene distribución F_{v_1, v_2} , entonces $Y = \frac{1}{X}$ tendrá una distribución F_{v_2, v_1} , esto es:

$$F_{\frac{\alpha}{2}, v_1, v_2} = \frac{1}{F_{1 - \frac{\alpha}{2}, v_2, v_1}}$$

Así el intervalo de confianza para $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ será

$$P \left(F_{\frac{\alpha}{2}, v_1, v_2} < \frac{\frac{1}{s_1^2}}{\frac{s_2^2}{\sigma_2^2}} < F_{1 - \frac{\alpha}{2}, v_1, v_2} \right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(F_{\frac{\alpha}{2}}, v_1, v_2 < \frac{s_1^2}{s_2^2} - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < F_{1-\frac{\alpha}{2}}, v_1, v_2\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(F_{\frac{\alpha}{2}}, v_1, v_2 - \frac{s_2^2}{s_1^2} < \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < F_{1-\frac{\alpha}{2}}, v_1, v_2 \frac{s_2^2}{s_1^2}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{s_1^2}{s_2^2 F_{1-\frac{\alpha}{2}}, v_1, v_2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2 F_{\frac{\alpha}{2}}, v_1, v_2}\right) = 1 - \alpha$$

El estadígrafo de prueba es entonces

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2 \left[\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \right]} = \frac{s_1^2}{s_2^2 R_0}, \quad v_1 = \text{glnum}, \quad v_2 = \text{gldem}$$

donde R_0 es el valor supuesto del cociente $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ en H_0 .

Ejemplo 9.14: La variabilidad de la cantidad de impurezas presentes en un compuesto químico usado para un proceso particular, depende del tiempo en que el proceso está en operación. Un fabricante que usa las líneas de producción 1 y 2, ha introducido un ligero ajuste al proceso 2, con la esperanza de reducir tanto la variabilidad como la media de la cantidad de impurezas en el compuesto químico. Muestras de $n_1 = 25$ y $n_2 = 25$ observaciones de los dos procesos tuvieron las medias y varianzas siguientes:

$$\bar{x}_1 = 3.2 \quad s_1^2 = 1.04$$

$$\bar{x}_2 = 3.0 \quad s_2^2 = 0.51$$

¿Presentan los datos suficiente evidencia que indique que la variabilidad del proceso 2 es menor que la del proceso 1?. Use $\alpha = 0.05$

Solución:

- 1) Datos $n_1 = 25$, $\bar{x}_1 = 3.2$, $s_1^2 = 1.04$
 $n_2 = 25$, $\bar{x}_2 = 3.0$, $s_2^2 = 0.51$

Suposiciones: muestras aleatorias independientes y poblaciones normales

- 2) *Hipótesis:*

$$H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \iff \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq 1$$

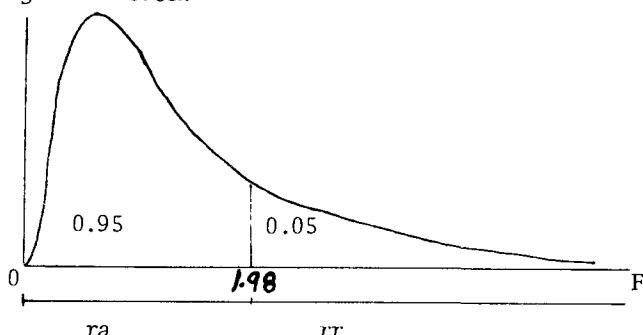
$$H_a : \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \iff \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$$

- 3) *Nivel de significación:* $\alpha = 0.05$

- 4) *Estadígrafo de prueba:*

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} R_o, \quad v_1 = 24, \quad v_2 = 24$$

- 5) *Región Crítica*



6) *Cálculos:* $R_0 = 1$

$$F = \frac{1.04}{0.51} = 2.0392$$

7) *Decisión y conclusión:* Se rechaza H_0 ; por lo tanto, la muestra indica al 5% de significancia que la varianza del proceso 2 es menor que la del proceso 1.

Ejemplo 9.15: Determinemos el intervalo de confianza del 90% para $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ del ejemplo 9.14

$$P \left(\frac{1.04}{(0.51)(1.98)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{1.04}{(0.51)(0.5051)} \right) = 0.90$$

$$P \left(1.0299 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 4.0376 \right) = 0.90$$

9.8.2 INTERVALO DE CONFIANZA Y PRUEBA DE HIPÓTESIS ACERCA DE LA DIFERENCIA DE DOS PROPORCIONES : $\pi_1 - \pi_2$.

La distribución muestral de $\Delta p = p_1 - p_2$, dado que p_1 y p_2 vienen de muestras al azar independientes con n_1 y n_2 suficientemente grandes, es aproximadamente normal con

$$\mu_{p_1 - p_2} = \mu_{\Delta p} = E(\Delta p) = \Delta \pi, \quad \text{y}$$

$$\sigma_{p_1 - p_2}^2 = \sigma_{\Delta p}^2 = \sigma_{p_1}^2 + \sigma_{p_2}^2 = \frac{\pi_1(1 - \pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1 - \pi_2)}{n_2} \quad \dagger$$

$$\sigma_{\Delta p} = \sqrt{\frac{\pi_1(1 - \pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1 - \pi_2)}{n_2}}$$

† La varianza de la suma o diferencia de dos muestras aleatorias independientes es la suma de las varianzas respectivas.

No se requieren nuevos conocimientos para la construcción de límites de confianza para $\Delta_{\pi} = \pi_1 - \pi_2$. Sin embargo, nos enfrentamos a la misma dificultad ahora que en el caso de estimaciones para π , necesitamos los valores de π_1 y π_2 (que son desconocidos) para el cálculo de $\sigma_{\Delta p}$. Usamos entonces, sus estimaciones p_1 y p_2 y hallamos el intervalo como sigue:

$$P(p_1 - p_2 - Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}} < \pi_1 - \pi_2 < p_1 - p_2 + Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}) = 1 - \alpha$$

donde p_1 y p_2 se derivan de muestras al azar independientes. En el supuesto de que $\pi_1 = \pi_2 = \pi$

$$\sigma_{\Delta p} = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n_1} + \frac{\pi(1-\pi)}{n_2}} = \sqrt{\pi(1-\pi) \left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \right)}$$

Pero como las proporciones poblacionales son desconocidas tomamos la proporción ponderada de los dos estimadores.

$$\bar{p} = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2} \quad \text{y} \quad \bar{q} = 1 - \bar{p}$$

sustituyendo \bar{p} en $\sigma_{\Delta p}$ tenemos

$$\sigma_{\Delta p} = \sqrt{\bar{p}\bar{q} \left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \right)} = \sqrt{\bar{p}\bar{q} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}$$

Así, el estadígrafo de prueba es:

$$Z = \frac{p_1 - p_2 - \Delta_0}{\sqrt{\bar{p}\bar{q} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

Ejemplo 9.16: Un fabricante de insecticidas para moscas, desea comparar dos nuevos tipos. Para el experimento se colocan 1000 moscas en cada uno de dos cuartos del mismo tamaño. En uno de ellos se usa el insecticida I y en el otro, la misma cantidad del insecticida II. Un total de 825 y 760 moscas sucumbieron a los insecticidas I y II, respectivamente. Estime la diferencia entre las tasas de mortalidad para los dos insecticidas con un 95% de confianza.

Solución:

$$P(0.825 - 0.760 - 1.96 \sqrt{\frac{(0.825)(0.175)}{1000} + \frac{(0.760)(0.240)}{1000}} < \pi_1 - \pi_2 < \dots) = 0.95$$

$$P(0.065 - 1.96 (0.0181) < \pi_1 - \pi_2 < 0.065 + 1.96 (0.0181)) = 0.95$$

$$P(0.065 - 0.0354 < \pi_1 - \pi_2 < 0.065 + 0.0354) = 0.95$$

$$P(0.0296 < \pi_1 - \pi_2 < 0.1004) = 0.95$$

Ejemplo 9.17: Los archivos de un hospital muestran que 52 hombres y 23 mujeres de sendas muestras de 1000 hombres y 1000 mujeres fueron admitidos debido a enfermedades del corazón. ¿ Presentan estos datos suficiente evidencia al 5% de significancia que indique una tasa mayor de enfermedades del corazón entre los hombres admitidos en el hospital que entre las mujeres?

Solución:

$$I) \quad \text{Datos:} \quad n_H = 1000$$

$$n_M = 1000$$

$$x_H = 52$$

$$x_M = 23$$

1) *Suposiciones:*

Poblaciones normalmente distribuidas Muestras Aleatorias e independientes.

2) *Hipótesis:*

$$H_0 : \pi_H \leq \pi_M \iff \pi_H - \pi_M \leq 0$$

$$H_a : \pi_H > \pi_M \iff \pi_H - \pi_M > 0$$

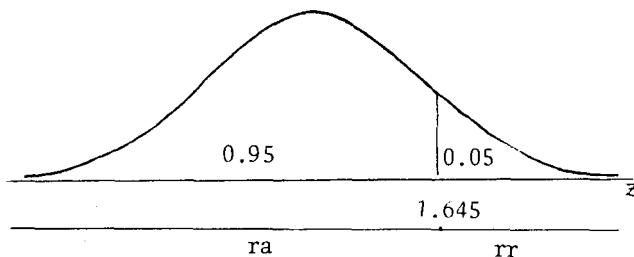
3) *Nivel de identificación*

$$\alpha = 0.05$$

4) *Estadígrafo de prueba:*

$$Z = \frac{p_H - p_M - \Delta_0}{\sqrt{\bar{p} \bar{q} \left(\frac{1}{n_H} + \frac{1}{n_M} \right)}} \quad \text{con } \bar{p} = \frac{n_H p_H + n_M p_M}{n_H + n_M}$$

5) *Región crítica:*



6) *Cálculos:*

$$p_H = \frac{x_H}{n_H} = 0.052$$

$$p_M = \frac{x_M}{n_M} = 0.023$$

$$\hat{p} = 0.0375$$

$$\bar{q} = 0.9625$$

$$Z = \frac{0.052 - 0.023 - 0}{\sqrt{(0.0375)(0.9625) \left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{1000}\right)}} = 3.4132$$

7) Decisión y Conclusión

Se rechaza H_0 , por consiguiente los datos presentan suficiente evidencia de que el porcentaje de hombres que ingresan al hospital por enfermedades del corazón es mayor que el de las mujeres. (Nota: Esto no implica que la incidencia de enfermedades del corazón es mayor en los hombres. Tal vez menos mujeres ingresan al hospital cuando son afectadas por la enfermedad).

9.8.3 INTERVALO DE CONFIANZA Y PRUEBA DE HIPOTESIS ACERCA DE LA DIFERENCIA DE DOS MEDIAS $\mu_1 - \mu_2$ CON σ_1 Y σ_2 CONOCIDAS.

En ciertas ocasiones nos interesa estimar la diferencia de dos medias poblacionales o compararlas. Cuando este es el caso y ambas poblaciones están normalmente distribuidas con medias μ_1 y μ_2 y varianzas σ_1^2 y σ_2^2 , la distribución muestral de la diferencia de las medias $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$

de dos muestras aleatorias independientes de tamaño n_1 y n_2 por el Teorema del Límite Central está normalmente distribuida con media:

$$\mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \mu_{\Delta\bar{x}} = \mu_1 - \mu_2$$

y varianza :

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}^2 = \sigma_{\Delta\bar{x}}^2 = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

Por lo tanto, el intervalo de confianza de nivel $1-\alpha$ para la diferencia de medias $\mu_1 - \mu_2$ es:

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}) = 1 - \alpha$$

y el estadígrafo de prueba es

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Ejemplo 9.18:

En un estudio hecho con niños con cierto retraso mental, a 11 niños y 10 niñas, después de un año de educación especial combinado con terapia, se les aplicó un examen de conocimientos. La media para los niños fue de $\bar{X}_1 = 67.0$ y para las niñas $\bar{X}_2 = 61.5$

Si se considera que las calificaciones obtenidas por niños y niñas bajo estas circunstancias están normalmente distribuidas con desviaciones estándar $\sigma_1 = 11$ y $\sigma_2 = 10$. Hallar el intervalo de confianza del 90% para $\mu_1 - \mu_2$.

Solución:

$$P(67 - 61.5 - 1.645 \sqrt{\frac{121}{11} + \frac{100}{10}} < \mu_1 - \mu_2 < 67 - 61.5 + 1.645 \sqrt{\frac{121}{11} + \frac{100}{10}}) = 0.90$$

$$P(5.5 - 1.645 (4.5826) < \mu_1 - \mu_2 < 5.5 + 1.645 (4.5826)) = 0.90$$

$$P(-2.0383 < \mu_1 - \mu_2 < 13.0383) = 0.90$$

¿ Es la diferencia entre μ_1 y μ_2 significativamente diferente, con $\alpha = 0.10$?

La respuesta es no, como el intervalo contiene a cero, no hay diferencia significativa entre las medias con $\alpha = 0.10$.

9.8.4 INTERVALO DE CONFIANZA Y PRUEBA DE HIPOTESIS ACERCA DE LA DIFERENCIA DE DOS MEDIAS $\mu_1 - \mu_2$ CON σ_1 Y σ_2 DESCONOCIDAS E IGUALES.

Cuando las desviaciones estándar poblacionales σ_1 y σ_2 no se conocen y deseamos estimar la diferencia de medias $\mu_1 - \mu_2$ se tiene que agregar una suposición adicional para poder usar la distribución t; esto es además de que las poblaciones deben estar normalmente distribuidas y las muestras deben ser aleatorias e independientes, las varianzas poblacionales aunque sean desconocidas deberán ser iguales. Así, una prueba de igualdad de varianzas $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ se deberá llevar a cabo antes de estimar o probar una hipótesis acerca de la diferencia de medias.

Habiendo cumplido con esta suposición, el error estándar de la diferencia de medias es:

$$s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}} = s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

Considerándose s_p^2 la varianza común de las dos muestras s_1^2 y s_2^2 , pero como estas no son exactamente iguales sino no significativamente diferentes, s_p^2 es la varianza ponderada de s_1^2 y s_2^2 ,

$$s_p^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Así, el intervalo de confianza del 100 $(1-\alpha)\%$ es:

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{1-\frac{\alpha}{2}} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + t_{1-\frac{\alpha}{2}} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}) = 1-\alpha$$

y el estadígrafo de prueba es:

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \Delta_0}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \text{ con } n_1 + n_2 - 2 \text{ grados de libertad}$$

Ejemplo 9.7.9: El tiempo de recuperación fue observado para pacientes asignados al azar y sometidos a dos tipos de procedimientos quirúrgicos. Los datos en días, son los siguientes:

P R O C E D I M I E N T O S		
	I	II
n	21	23
\bar{x}	7.3	8.9
s^2	1.23	1.49.

¿Presentan los datos suficiente evidencia para concluir que hay diferencia significativa entre los tiempos medios de recuperación de los dos procedimientos? Use $\alpha = 0.05$. Suponga que los tiempos de recuperación para los dos tratamientos están normalmente distribuidos con varianzas iguales.

Solución:

1) Datos y suposiciones:

$$n_1 = 21 \quad n_2 = 23$$

$$\bar{X}_1 = 7.3 \quad \bar{X}_2 = 8.9$$

$$s_1^2 = 1.23 \quad s_2^2 = 1.49$$

Poblaciones normalmente distribuidas

Muestras Aleatorias e Independientes.

Varianzas iguales

2) Hipótesis

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

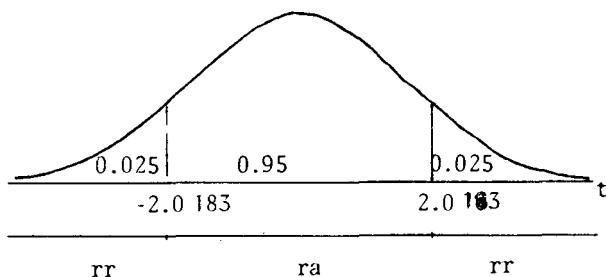
3) Nivel de significación

$$\alpha = 0.05$$

4) Estadigráfico de prueba:

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \Delta_0}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \text{ gl.} = n_1 + n_2 - 2$$

5) Región crítica



6) Cálculos:

$$s_p = \sqrt{\frac{20(1.23) + 22(1.49)}{21 + 23 - 2}} = \sqrt{\frac{57.38}{42}} = \sqrt{1.3662} = 1.1688$$

$$t = \frac{7.3 - 8.9 - 0}{1.1688 \sqrt{\frac{1}{21} + \frac{1}{23}}} = \frac{-1.6}{0.3528} = -4.5354$$

7) Desición y Conclusión:

Se rechaza H_0 . Los datos presentan evidencia de que los tiempos de recuperación de los dos tratamientos son significativamente diferentes.

Ejemplo 9.20: Halle el intervalo de confianza del 90% para el ejemplo 9.19.

Solución:

$$P(7.3 - 8.9 - 1.6821 \cdot 0.3528 < \mu_1 - \mu_2 < 7.3 - 8.9 + 1.6821 \cdot 0.3528) = 0.90$$

$$P(-1.6 - 0.5934 < \mu_1 - \mu_2 < -1.6 + 0.5934) = 0.90$$

$$P(-2.1934 < \mu_1 - \mu_2 < -1.0065) = 0.90$$

9.8.5 INTERVALO DE CONFIANZA Y PRUEBA DE HIPOTESIS ACERCA DE LA DIFERENCIA DE DOS MEDIAS $\mu_1 - \mu_2$ CON σ_1 Y σ_2 DESCONOCIDAS Y DIFERENTES

Hasta ahora las inferencias referentes a la diferencia entre medias de dos poblaciones se han presentado bajo el supuesto de que las varianzas poblacionales son conocidas o, desconocidas e iguales. Una solución al problema de varianzas desconocidas y distintas fue propuesta por Behrens (1929) y verificado luego por Fisher (1939). También propusieron

soluciones Neyman (1941), Scheffé (1943) y Welch (1937 y 1947).

La controversia se debe a que al usar los estimadores insesgados s_1^2 y s_2^2 en vez de σ_1^2 y σ_2^2 , la cantidad

$$t' = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

no sigue la distribución t de student con $n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad. Pero si se estiman los grados de libertad por la fórmula

$$\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} \right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} \right)^2}{n_1+1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2} \right)^2}{n_2+1}} - 2 \quad \dots \dots \dots \quad (9.3)$$

propuesta por Dixon y Massey en su libro "Introducción al Análisis Estadístico" la expresión

$$t' = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \quad \text{se aproxima a la distribución t de student si las suposiciones de normalidad se cumplen.}$$

Los grados de libertad calculados por la fórmula (9.3), generalmente no son enteros, en cuyo caso se aproximan al entero más cercano o se interpola el valor de t en la tabla A-5 si se desea mayor precisión.

Así, si las poblaciones están normalmente distribuidas, las muestras son aleatorias e independientes y las varianzas muestrales son significativamente diferentes, el intervalo de confianza aproximado de nivel 1- α para la diferencia de medias es:

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}) = 1-\alpha$$

Ejemplo 9.27: Para probar la efectividad de dos cementos dentales para pegar coronas aisladas se usan 41 moldes de dientes diferentes con cada uno. Los valores de la fuerza necesaria para quitar cada corona cementada fueron:

$$\text{cemento 1 : } \bar{X} = 45 \frac{\text{pies}}{\text{libra}}, \quad s = 6.2 \frac{\text{pies}}{\text{libra}}, \quad n = 41$$

$$\text{cemento 2 : } \bar{X} = 42 \frac{\text{pies}}{\text{libra}}, \quad s = 4.3 \frac{\text{pies}}{\text{libra}}, \quad n = 41$$

Para probar la hipótesis $H_0: \mu_1 = \mu_2$ con $\alpha = 0.05$

Solución: I) Datos y Suposiciones

$$n_1 = 41, \quad \bar{X}_1 = 45, \quad s_1 = 6.2$$

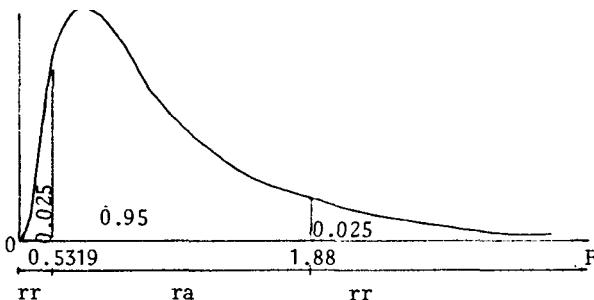
$$n_2 = 41, \quad \bar{X}_2 = 42, \quad s_2 = 4.3$$

Poblaciones normalmente distribuidas muestras independientes al azar. Probar igualdad de varianzas.

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \iff \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$$

$$H_a: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \iff \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} R_s$$



$$F = \frac{\left(\frac{6.2}{4.3}\right)^2}{\left(\frac{4.3}{6.2}\right)^2} = 2.0790$$

Se rechaza H_0 , por lo tanto $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

2) *Hipótesis:*

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \iff \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_a : \mu_1 \neq \mu_2 \iff \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

3) Nivel de significación:

$$\alpha = 0.05$$

4) Estadígrafo de prueba:

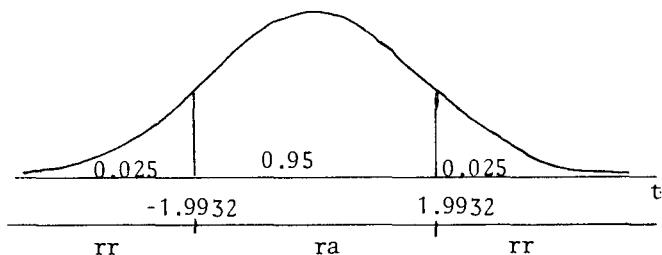
$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}, \quad g_1 = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1+1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2+1}} - 2$$

$$g_1 = \frac{\left(\frac{38.44}{41} + \frac{18.49}{41}\right)^2}{\left(\frac{38.44}{41}\right)^2 + \left(\frac{18.49}{41}\right)^2} - 2$$

$$g_1 = \frac{1.92803385}{0.02577142} - 2 = 72.8129$$

$$g_1 \approx 73$$

5) Región crítica:



6) Cálculos:

$$t = \frac{\frac{45 - 42 - 0}{\sqrt{\frac{38.44}{41} + \frac{18.49}{41}}}}{1.178362} = \frac{3}{1.178362} = 2.5459$$

7) Decisión y conclusión.

Se rechaza H_0 . Las fuerzas medias necesarias para quitar las coronas son significativamente diferentes.

9.8.6. INTERVALO DE CONFIANZA Y PRUEBA DE HIPÓTESIS ACERCA DE LA DIFERENCIA DE DOS MEDIAS $\mu_1 - \mu_2$ CON MUESTRAS DEPENDIENTES O APAREADAS.

En los casos anteriores relacionados con la diferencia de dos medias se asumía la independencia de las muestras. Frecuentemente en experimentación, con el fin de eliminar la variación de factores ajenos al de interés, se usa una muestra como su propio grupo control, haciendo una prueba antes y otra después del tratamiento al mismo grupo.

Así los pares de observaciones son similares respecto a muchas variables excepto la variable que se está midiendo o probando.

A este tipo de experimento se le conoce como "muestras apareadas o dependientes"

La obtención de observaciones apareadas se puede hacer de varias formas; puede medirse el mismo grupo antes y después de determinado test o tratamiento, usar mellizos idénticos de manera que cada mellizo de cada par sea asignado al azar a tratamientos diferentes; o también, comparar dos métodos de análisis, el material a analizar puede ser dividido en dos partes iguales de tal forma que cada mitad sea analizada por diferentes métodos.

Cuando se tienen muestras apareadas se trabaja con las diferencias de los pares de observaciones en vez de las observaciones individuales.

Los datos recopilados por pares requieren formas especiales de análisis y en ciertas circunstancias pueden producir inferencias muy refinadas.

Nótese que, el apareamiento se debe hacer al diseñar el experimento, no después de recolectar los datos (este es un ejemplo simple del diseño experimental en bloques aleatorizados). El apareamiento implica que los tamaños de las muestras de los dos grupos sean iguales . Si X_{1j} y X_{2j} , $j = 1, 2, \dots, n$ denotan las observaciones del j-ésimo par, donde n es el número de pares; y $d_j = X_{1j} - X_{2j}$ es la diferencia entre las observaciones hechas en el j-ésimo par , entonces

$$\bar{D} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \quad \text{donde} \quad \bar{D} = \frac{\sum d_j}{n}$$

Esto sugiere un enfoque diferente al problema, en vez de considerar dos poblaciones que dan observaciones X_{1j} y X_{2j} , se considera una sola población cuyas unidades son pares. El resultado $\bar{D}' = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$ se refleja en las poblaciones y así, $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ donde μ_D es la media de la población de diferencias. Un intervalo de confianza para μ_D es un intervalo para $\mu_1 - \mu_2$

Obsérvese que la suposición de igualdad de varianzas queda eliminada, puesto que ahora solo hay una población.

Entonces el intervalo de confianza de nivel $1 - \alpha$ es:

$$P(\bar{D} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s_D}{\sqrt{n}} < \mu_1 - \mu_2 < \bar{D} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s_D}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

donde $\frac{s_D}{\sqrt{n}}$ es el error estándar de la diferencia de medias

$$(\sigma_{\bar{D}} = \sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \frac{s_D}{\sqrt{n}})$$

El estadígrafo de prueba es:

$$t = \frac{\bar{D} - \Delta_0}{\frac{s_D}{\sqrt{n}}} \quad \text{con g.l.} = n - 1$$

Ejemplo 9.22 : Un fabricante desea comparar la resistencia al desgaste de dos tipos distintos de llantas A y B . Para hacer la comparación, asignó al azar una llanta A y una B a las ruedas posteriores de cinco automóviles. Los automóviles recorrieron un número específico de kilómetros y se observó el desgaste de cada llanta. Estos valores aparecen en la siguiente tabla:

automóvil	llanta A	llanta B
1	10.6	10.2
2	9.8	9.4
3	12.3	11.8
4	9.7	9.1
5	8.8	8.3

¿Hay diferencia significativa entre el desgaste medio de los dos tipos de llantas ? Use $\alpha = 0.05$

Solución: Datos:

Auto	l l a n t a s		diferencias
	A	B	d
1	10.6	10.2	0.4
2	9.8	9.4	0.4
3	12.3	11.8	0.5
4	9.7	9.1	0.6
5	8.8	8.3	0.5

$$D = 0.48$$

$$s_D = 0.0837$$

Hipótesis:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

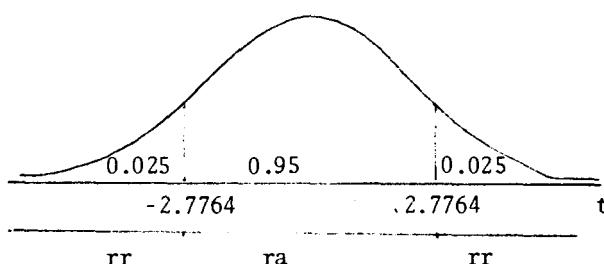
Nivel de Significación:

$$\alpha = 0.05$$

Estadígrafo de prueba:

$$t = \frac{\bar{D} - \Delta_0}{\frac{s_D}{\sqrt{n}}} , \quad gl = 5 - 1 = 4$$

Región crítica:



Cálculos:

$$t = \frac{0.48 - 0}{\frac{0.0837}{\sqrt{5}}} = 12.8285$$

Decisión y conclusión:

Se rechaza H_0 . Si hay diferencia significativa entre los dos tipos de llantas en cuanto al desgaste.

A continuación se da un cuadro resumen de todos los casos de estimación por intervalos de confianza y pruebas de hipótesis.

Tabla 9.8 CUADRO RESUMEN DE LAS PRUEBAS DE HIPOTESIS Y

CASO	HIPOTESIS A CONTRASTAR	SUPUESTOS	ESTADIGRAFO DE CONTRASTE	g.l.
1	$H_0: \mu = \mu_0$	* σ conocida	$z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	—
2	$H_0: \pi = \pi_0$	* —	$z = \frac{p - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1 - \pi_0)}{n}}}$	—
3	$H_0: \mu = \mu_0$	* σ desconocida	$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$	$n - 1$
4	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$	* —	$\chi^2 = \frac{(n-1) s^2}{\sigma_0^2}$	$n - 1$
5	$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = R_0$	* —	$F = \frac{s_1^2}{s_2^2 R_0}$	$v_1 = n_1 - 1$ $v_2 = n_2 - 1$
6	$H_0: \pi_1 - \pi_2 = \Delta_0$	* —	$z = \frac{p_1 - p_2 - \Delta_0}{\sqrt{\bar{p} \bar{q} (\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$	—
7	$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$	* Muestras independientes. σ_1^2 y σ_2^2 conocidas	$z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	—
8	$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$	* Muestras independientes σ_1^2 y σ_2^2 desconocidas e iguales.	$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \Delta_0}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$	$n_1 + n_2 - 2$
9	$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$	* Muestras independientes. σ_1^2 y σ_2^2 desconocidas y diferentes.	$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$	$\left[\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} \right]^2 - 2$ $\frac{\left[\frac{s_1^2}{n_1} \right]^2 + \left[\frac{s_2^2}{n_2} \right]^2}{\frac{n_1 + 1}{n_1 + 1} + \frac{n_2 + 1}{n_2 + 1}}$
10	$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$	* Muestras dependientes o aparcadas.	$t = \frac{\bar{D} - \Delta_0}{\frac{s_D}{\sqrt{n}}}$	$n - 1$

ESTIMACIONES POR INTERVALO DE CONFIANZA

INTERVALO DE CONFIANZA	TAMAÑO DE MUESTRA	NOTAS
$P(\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$	$n = \left[\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma}{E} \right]^2$	* Población(es) normalmente distribuida(s) y muestra(s) aleatoria(s)
$P(p - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{pq}{n}} < \pi < p + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{pq}{n}}) = 1 - \alpha$	$n = \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 pq}{E^2}$	
$P(\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$	—	
$P\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha}^2} \right) = 1 - \alpha$	—	
$P\left(\frac{s_1^2}{s_2^2 F_{1-\frac{\alpha}{2}}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2 F_{\alpha}} \right) = 1 - \alpha$	—	$F_{\frac{\alpha}{2}, v_1, v_2} = \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}, v_2, v_1}}$
$P(p_1 - p_2 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}} < \pi_1 - \pi_2 < \dots)$	—	$p_1 = \frac{x_1}{n_1}, \quad p_2 = \frac{x_2}{n_2}$ $\bar{p} = \frac{p_1 n_1 + p_2 n_2}{n_1 + n_2}$
$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \dots)$	—	
$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{1-\frac{\alpha}{2}} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \dots)$	—	$s_p = \sqrt{\frac{s_1^2(n_1-1) + s_2^2(n_2-1)}{n_1 + n_2 - 2}}$
$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \dots)$	—	
$P(\bar{D} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s_D}{\sqrt{n}} < \mu_1 - \mu_2 < \bar{D} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s_D}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$	—	

9.9 GRAFICAS DE CONTROL DE CALIDAD

En esta sección describiremos un simple artificio gráfico que es útil en el curso del mantenimiento de calidad en la producción. Este artificio es una gráfica o carta de control. Aquí el control implica que existe alguna condición estática y no que estamos mejorando o variando la calidad. Si la calidad varía o mejora significativamente decimos que está fuera de "**control**" y dependemos de nuestra gráfica para detectar el cambio.

Ningún proceso de producción es tan perfecto como para que todos los productos sean completamente iguales. Existe también una pequeña variación que es provocada por un gran número de pequeños factores incontrolables, por lo cual se considera como una variación casual. Es importante estar seguros de que los productos tienen los valores necesarios (por ejemplo, longitud, resistencia, o cualquier propiedad que pueda ser de importancia en un caso particular). Con este propósito se hace la prueba de hipótesis de que los productos tienen la propiedad necesaria, digamos, $\mu = \mu_0$; donde μ_0 es el valor requerido. Si esto se hace después de que se ha producido un lote entero (por ejemplo, 100,000 tornillos), la prueba nos dirá que tan buenos o malos son los productos, pero es obvio que ya es demasiado tarde para alterar los resultados que no se desean. Es mucho mejor **probar durante la producción**. Esto se hace a intervalos regulares de tiempo (por ejemplo, cada 30 minutos, cada hora o cada día) y se llama **control de calidad**.

9.9.1 . GRAFICA DE CONTROL PARA LA MEDIA

Supongamos que se está fabricando un artículo que debe tener una media μ_0 . tomaremos una muestra del *mismo tamaño* a intervalos regulares de tiempo (cada hora o día, etc.) que en la práctica es de tres a diez artículos, calculamos la media de las observaciones y las dibujamos en una gráfica como la de la figura 9.10, en la cual se ha trazado una línea continua por el valor de la media (μ_0) y dos líneas de nuntos paralelas

una por encima y otra por debajo de la línea continua, estas líneas son los (*límites superior e inferior de control*) (LCS y LCI) que en la práctica es costumbre usar $\mu_0 \pm 2.576 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ donde μ_0 y σ se establecen con base a las 20 o 30 primeras muestras (muestras piloto) y el valor 2.576 es el correspondiente a z para $\alpha = 1\%$

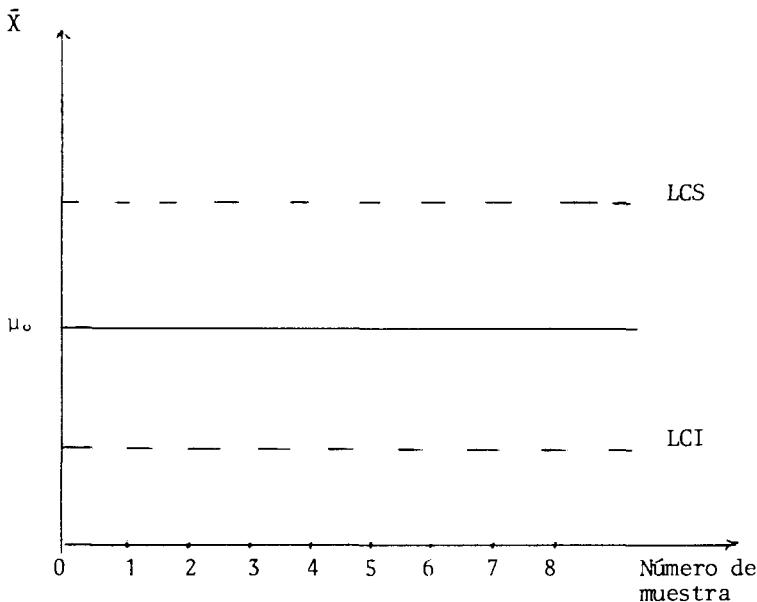


Fig. 9.10 Gráfica de control para μ

Una forma alterna de calcular los límites de control para μ es $\mu_0 \pm A_2 R_0$ donde A_2 es un valor que depende de n (véase tabla 9.9) y R_0 es el rango o recorrido medio de todas las muestras.

FACTORES PARA GRAFICAS DE CONTROL DE LA MEDIA Y DEL RANGO.

n	A ₂	D _I	D _S
2	1.88	0.009	3.52
3	1.02	0.000	2.58
4	0.73	0.185	2.26
5	0.58	0.254	2.09
6	0.48	0.308	1.97
7	0.42	0.351	1.90
8	0.37	0.386	1.84
9	0.34	0.415	1.79
10	0.31	0.441	1.76
11	0.29	0.463	1.72
12	0.27	0.482	1.70
13	0.25	0.498	1.68
14	0.24	0.511	1.66
15	0.22	0.524	1.64

Tabla 9.9

Después de construida la gráfica, observamos la inedia de una mués tra todos los días o cada hora y la marcamos en dicha gráfica. Si el punto está entre las líneas, decimos que el proceso de producción está bajo control y si el punto está por encima o por debajo de los límites de control, decimos que el proceso está fuera de control, y entonces procura mos encontrar el factor que causa las observaciones extremas; es decir, se detiene el proceso y se inspecciona para localizar el desperfecto que provoca la desviación.

Si escogemos límites de control demasiado alejados, no detectamos desviaciones del proceso. Por otra parte, si escogemos límites que sean demasiado cercanos, estaremos imposibilitados para manejar el proceso debido a constantes interrupciones y a un frecuente registro de perturba ciones no existentes.

Si detenemos el proceso de producción, aún considerando que marcha en forma apropiada, cometemos un **error de tipo I**. Si no lo detenemos aún cuando pensamos que alguna cosa no está en orden, cometemos un **error de tipo II**.

Generalmente, se usa otra gráfica de control además de la media que puede ser la de la desviación estándar, de la varianza o la del recorrido o rango.

9.9.2 GRAFICA DE CONTROL PARA EL RANGO O RECORRIDO

Debido a la velocidad y facilidad con que puede calcularse, el rango R se utiliza más que la varianza o la desviación estándar. Realmente, para pequeñas muestras, R es muy eficiente ($n \leq 10$). Una gráfica de control de R tiene la misma apariencia, en general, que una de y . El rango se marca en el eje vertical y los períodos de tiempo o el número de muestra en el horizontal.

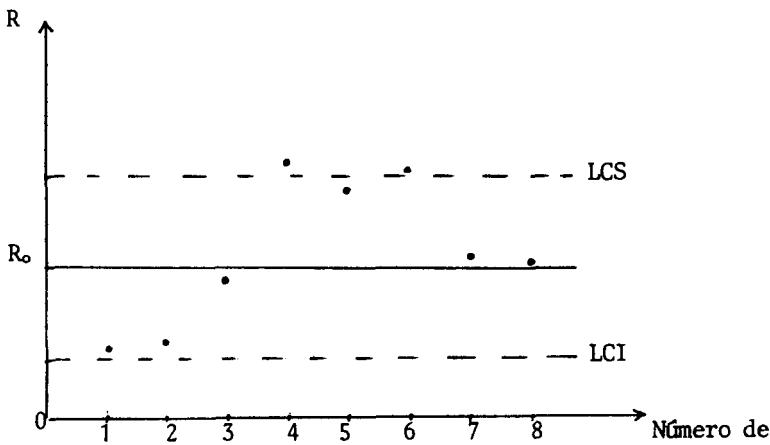


Fig. 9.11 Gráfica de control para el rango.

R_0 es el rango o recorrido medio para las primeras 20 ó 30 muestras piloto. Los límites de control para el recorrido o rango se hallan usando la tabla 9.9. Si R_0 representa el rango típico o hipotético, los límites de

control son $D_I R_o$ y $D_S R_o$, donde D_I y D_S se deducen del tamaño (n) de la muestra. Estos factores se calculan para dar una probabilidad del 1% de que el rango de la muestra exceda a $D_S R_o$ si sea inferior a $D_I R_o$.

Ejemplo 9.23; Consideremos las siguientes 12 muestras con 5 valores cada una de los diámetros de pequeños cilindros medidos en milímetros.

Supóngase que la población es normal con $\mu=4.10 \text{ mm}$ y $\sigma = 0.02 \text{ mm}$.

número de muestra	Valores de la muestra					\bar{X}	S	R
1	4.06	4.08	4.08	4.08	4.10	4.080	0.014	0.04
2	4.10	4.10	4.12	4.12	4.12	4.112	0.011	0.02
3	4.06	4.06	4.08	4.10	4.12	4.084	0.026	0.06
4	4.06	4.08	4.08	4.10	4.12	4.088	0.023	0.06
5	4.08	4.10	4.12	4.12	4.12	4.108	0.018	0.04
6	4.08	4.10	4.10	4.10	4.12	4.100	0.014	0.04
7	4.06	4.08	4.08	4.10	4.12	4.088	0.023	0.06
8	4.08	4.08	4.10	4.10	4.12	4.096	0.017	0.04
9	4.06	4.08	4.10	4.12	4.14	4.100	0.032	0.08
10	4.06	4.08	4.10	4.12	4.16	4.104	0.038	0.10
11	4.12	4.14	4.14	4.14	4.16	4.140	0.014	0.04
12	4.14	4.14	4.16	4.16	4.16	4.152	0.011	0.02
					$\bar{X}=4.1043$	$S=0.0201$	$R=Rg_0$	

Tabla 9.10

Entonces los límites de control para \bar{X} y R son:

$$\bar{X} : \mu_0 + 2.576 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \delta \quad \mu_0 + A_2 R_o$$

$$\bar{X} : 4.10 + 2.576 \frac{0.02}{\sqrt{5}} \quad \delta \quad 4.10 + 0.58 \quad (0.05)$$

$$LCI = 4.0770$$

$$\bar{\delta}$$

$$LCI = 4.0710$$

$$LCS = 4.1230$$

$$\delta$$

$$LCS = 4.129$$

La media de los 12 rangos o recorridos es $R_{\bar{o}} = 0.05$, por lo tanto los límites de control para R son:

$$R : D_I R_{\bar{o}} \quad y \quad D_S R_{\bar{o}}$$

$$R : LCI = 0.254 (0.05) = 0.0127$$

$$LCS = 2.09 (0.05) = 0.1045.$$

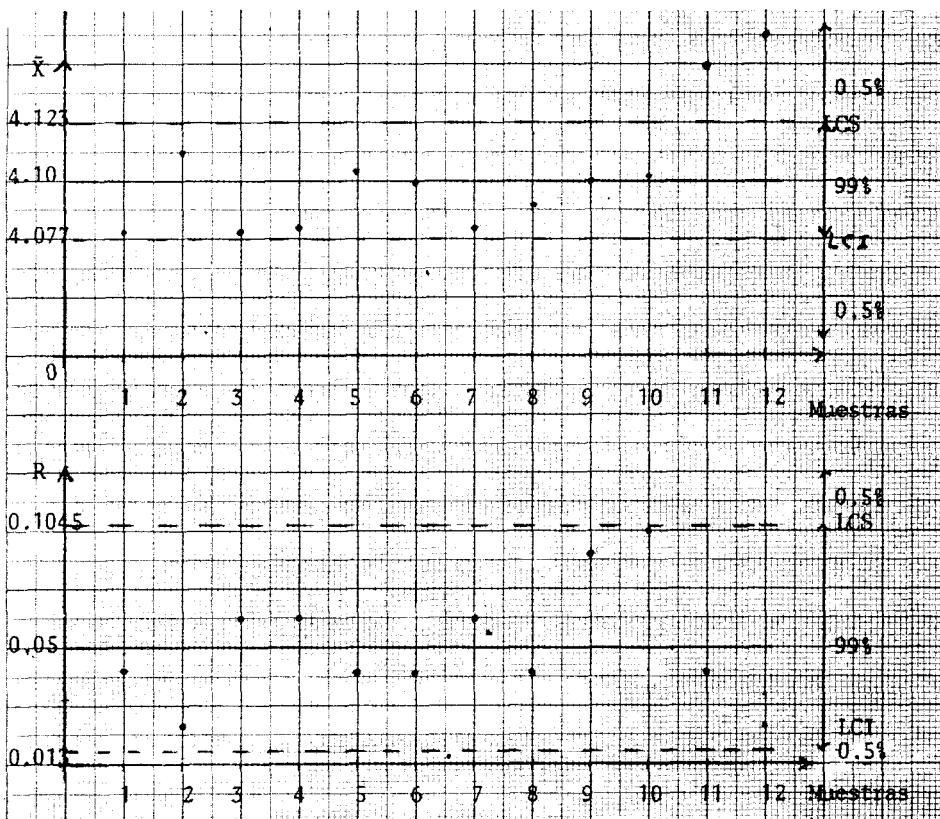


Fig. 9.12 Gráficas de control para la media y el rango del ejemplo 9.23

9.9.3 GRAFICA DE CONTROL PARA LA VARIANZA Y LA DESVIACION ESTANDAR

Para establecer una gráfica de control para la Varianza o de la desviación estándar en el caso de una distribución normal, podemos emplear los límites de confianza para σ^2 o para la desviación estándar o y la tabla de x^2 con $n-1$ grados de libertad. Aquí $\alpha(1\%)$ es la probabilidad de que el valor observado s_1^2 de s^2 en una muestra sea mayor que el límite de control superior. Es común usar solo el límite de control superior (LCS).

Así, el límite de control para la varianza es:

$$LCS = \frac{\sigma^2 X_{1-\alpha}^2}{n-1}$$

Para la desviación estándar es:

$$LCS = \frac{\sigma \sqrt{X_{1-\alpha}^2}}{\sqrt{n-1}}$$

Ejemplo 9.24: Usando los datos del ejemplo 9.23, calculamos el límite de control para la desviación estándar y trazamos su gráfica

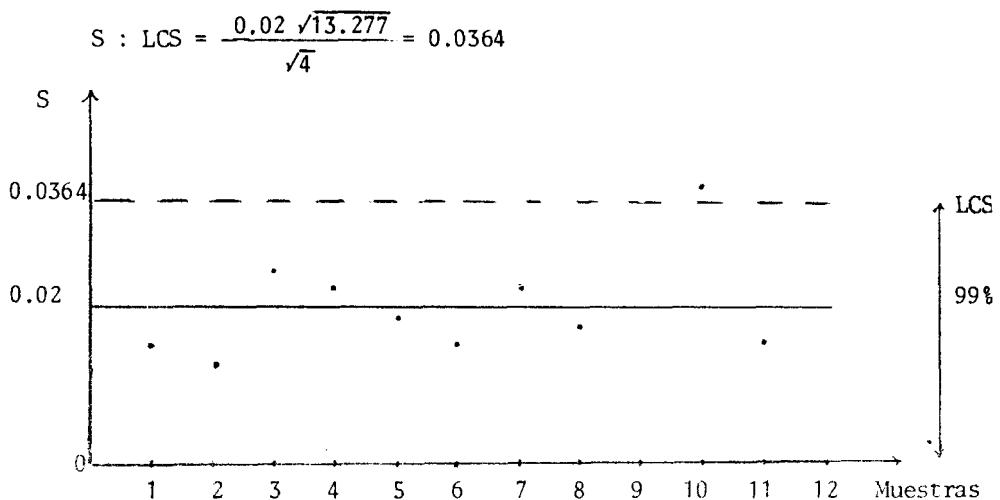


Fig. 9.13 Gráfica de control para la desviación
estándar del ejemplo 9.24

En resumen tenemos el siguiente cuadro de fórmulas para los límites de control

ESTADIGRAFO	LINEA CENTRAL	LIMITES DE CONTROL
Media: \bar{X} usando σ	$\mu_0 \quad \delta \quad \bar{X}$	$\mu_0 \pm 2.576 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
Media : \bar{X} usando R_o	$\mu \quad \delta \quad \bar{X}$	$\mu_0 \pm A_2 R_o$
Rango o Recorrido R	$R_o = \bar{R}$	$LCI = D_I R_o$ $LCS = D_S R_o$
Varianza : S^2	$\sigma_0^2 \quad \delta \quad \bar{S}^2$	$LCS = \frac{\sigma^2 \chi_{1-\alpha}^2}{n-1}$
Desviación estándar : s	$\sigma \quad \delta \quad \bar{s}$	$LCS = \frac{\sigma \sqrt{\chi_{1-\alpha}^2}}{\sqrt{n-1}}$

Tabla 9.11

9.10 INTERVALOS DE TOLERANCIA:

Hemos visto que los límites de confianza pueden determinarse de modo que el intervalo entre estos límites recubra un parámetro de la población con cierta confianza; es decir, una cierta proporción de veces. Se desea, algunas veces, obtener un intervalo que contenga una parte *fija de la distribución de la población* con una confianza determinada. Estos intervalos se llaman *intervalos de tolerancia*, y los extremos de estos intervalos se llaman *límites de tolerancia*. Por ejemplo, es de considerable interés para un fabricante estimar que proporción de los

artículos fabricados tendrán dimensiones dentro de un recorrido. Los límites de tolerancia pueden ser de la forma $\bar{X} \pm Ks$, donde K se determina de modo que el intervalo recubra una proporción π de la población con una confianza $1 - \alpha$. Los límites de confianza para μ son también de la forma $\bar{X} \pm ks$. Sin embargo, determinamos k de modo que el intervalo de confianza cubriera la media de la población μ una cierta proporción de veces. Es evidente que el intervalo de tolerancia debe ser más amplio para que contenga el único valor μ . La tabla A-8 da los valores de K para π de 0.75, 0.90, 0.95 y 0.99; y $1 - \alpha$ de 0.75, 0.90, 0.95 y 0.99; y para muchos tamaños de muestra diferentes, suponiendo que las observaciones proceden de poblaciones normales.

Ejemplo 9.25: Si $\bar{X} = 14.0$, $s=1.5$, $n=18$, $1 - \alpha = 0.95$ y $\pi=0.99$. Entonces el intervalo de tolerancia del 95% que contiene 99% de la población es:

$$\bar{X} \pm Ks = 14.0 \pm 3.702 (1.5) = 14.0 \pm 5.553 \quad \delta$$

$$P(8.447, 19.553) = 0.95$$

9.11 CALCULO DE LA PROBABILIDAD DEL ERROR DE TIPO II (β) Y DEL PODER O POTENCIA DE UNA PRUEBA ($1 - \beta$)

Como sabemos, cometemos un error de tipo II, al aceptar una hipótesis nula cuando esta es falsa. A fin de calcular la probabilidad de que esto ocurra, es útil considerar la probabilidad como el área bajo la distribución muestral, con base a la media real de la población, superpuesta a la distribución muestral supuesta en la hipótesis nula, y en la región de aceptación. Esto se ilustra en la figura 9.14.

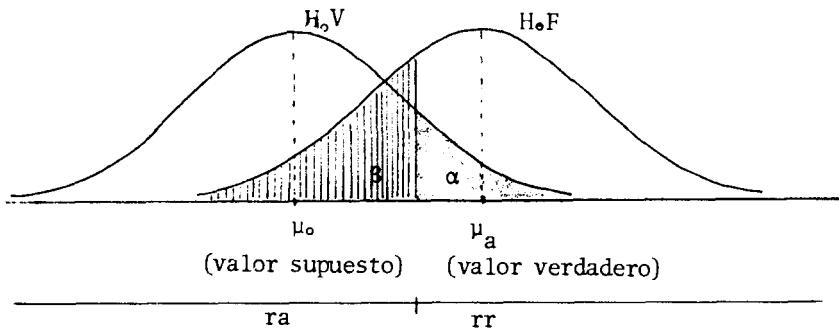
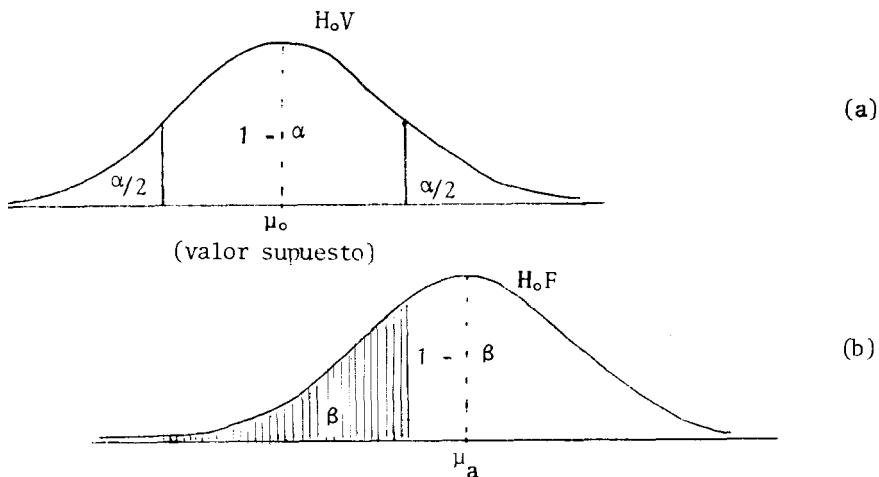


Fig. 9.14

El procedimiento para calcular el error de tipo II es como sigue:

- 1) Establecer la región de aceptación para H_0 , utilizando la media de la población supuesta en H_0 y los datos específicos del problema. Véase figura 9.15 (a)



Región de aceptación (valor verdadero)
ción.

Fig. 9.15 Pasos para calcular la probabilidad del
error de tipo II.

2) Determinar los puntos críticos correspondientes a α ($-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ y $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$) si la prueba es de dos colas y $-Z_{1-\alpha} \leq Z_{1-\alpha}$ si la prueba es de una cola).

3) Determinar el (los) valor(es) de \bar{X} correspondiente(s) a los valores de Z ; esto es, despejando \bar{X} de la fórmula :

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

4) Asignar una distribución muestral que tenga como base la media verdadera de la población (H_0 verdadera o H_0 falsa) Fig. 9.15 (b)

5) Determinar los valores críticos de Z correspondientes a los valores de \bar{X} hallados en el paso 3, usando μ_a y la fórmula:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

6) Usar la tabla A-4 para determinar β y $1 - \beta$.

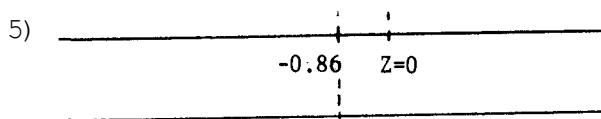
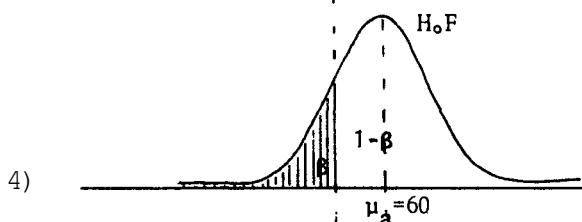
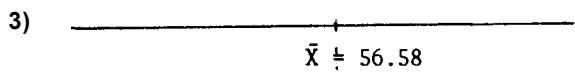
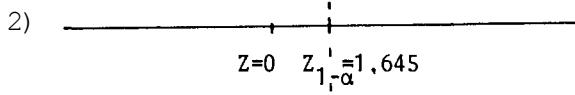
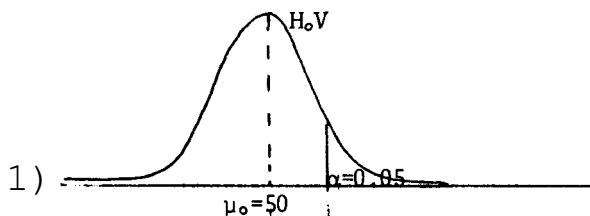
Ejemplo 9.26: Sea $\sigma = 12$, $n = 9$, $\alpha = 0.05$

$$H_0: \mu \leq 50 \quad (\mu_0 = 50)$$

$$H_a: \mu > 50 \quad (\mu_a = 60)$$

Hallar β y $1 - \beta$.

Solución;



- 6) Usando las columnas B y E de la tabla A-4

$$\beta = 0.1949 \quad \text{y} \quad 1 - \beta = 0.8051$$

$$P(\text{ETII}) \approx 19.49\% \quad \text{y} \quad \text{Poder} \approx 80.51\%$$

Como $\alpha = 0.05$ y la prueba es unilateral, entonces $Z_{1-\alpha} = 1.645$ de la tabla A-4

$$\bar{X} = Z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \mu_0 = 1.645 \left(\frac{12}{\sqrt{9}} \right) + 50$$

$$\bar{X} = 56.58$$

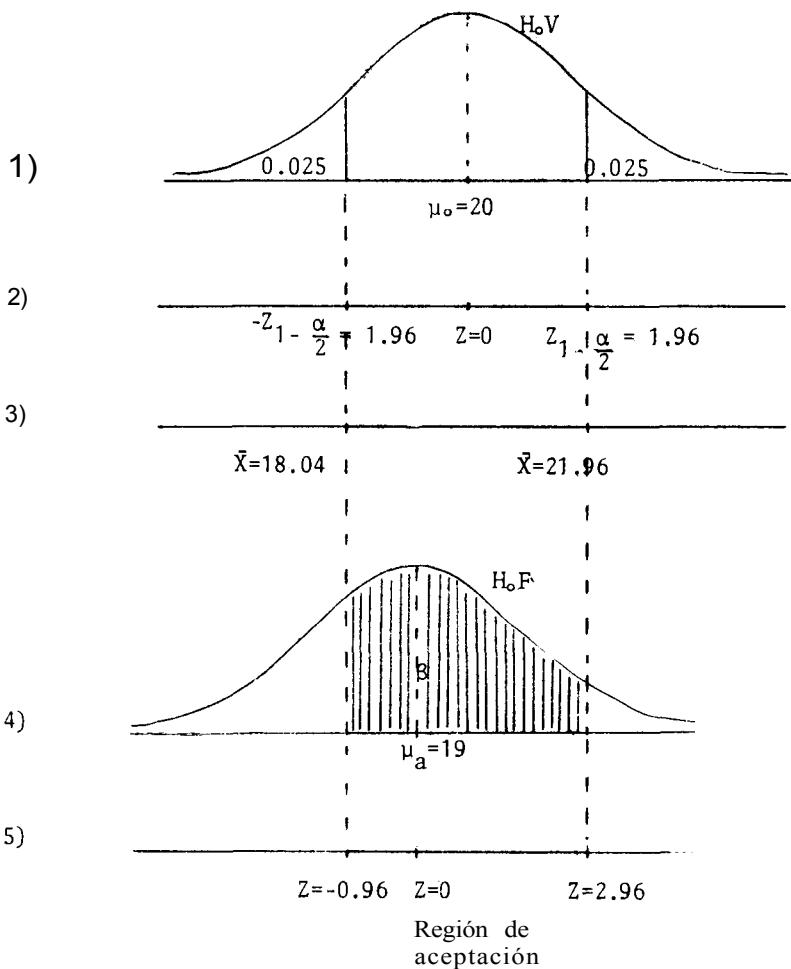
$$Z_\beta = \frac{\bar{X} - \mu_a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{56.58 - 60}{\frac{12}{\sqrt{9}}} = -0.86$$

Ejemplo 9.27: Sea $\sigma=10$, $n=100$, $\alpha=0.05$

$$H_0: \mu = 20 \quad (\mu_0 = 20)$$

$$H_a: \mu \neq 20 \quad (\mu_a = 19)$$

Solución:



- 6) Usando dos veces la columna A de la tabla A-4, se tiene:

$$\beta = 0.3315 + 0.4985 = 0.8300$$

$$1 - \beta = 0.1700$$

Ejemplo 9.28: Un proceso para fabricar tubos de acero está bajo control si el diámetro de cada tubo tiene una media de 3.0000 pulgadas con una desviación estándar de 0.0250 pulgadas. Para verificar si el proceso está bajo control, se toma una muestra de tamaño 10 todos los días y se rechaza la hipótesis nula, si la muestra tiene una \bar{X} menor que 2.9960 o mayor que 3.0040. Determine:

- La probabilidad de cometer un error de Tipo I.
- La probabilidad de cometer un error de Tipo II.

Solución:

1) Datos: $\bar{X}_1 = 2.9960$

$\bar{X}_2 = 3.0040$

$\sigma = 0.0250$

$n = 10$

$\mu_a = 3.0050$

2) $H_0: \mu = 3.0000$

$H_a: \mu \neq 3.0000$

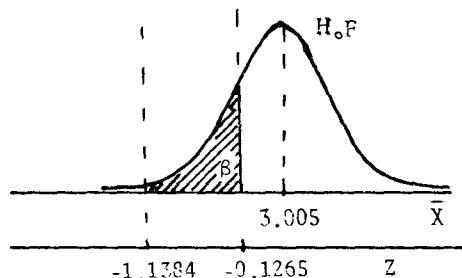
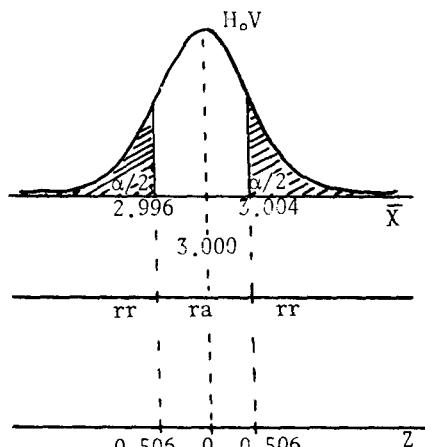
3) $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

4) $Z_1 = \frac{2.996 - 3.000}{\frac{0.025}{\sqrt{10}}} = -0.506$

$Z_2 = \frac{3.004 - 3.000}{\frac{0.025}{\sqrt{10}}} = 0.5060$

5) $\alpha \approx 0.6129$

6) $Z_\beta = \frac{\bar{X} - \mu_a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$



$$z_{\beta_2} = \frac{3.004 - 3.005}{\frac{0.025}{\sqrt{10}}} = -0.1265$$

$$z_{\beta_1} = \frac{2.996 - 3.005}{\frac{0.025}{\sqrt{10}}} = -1.1384$$

7) Usando dos veces la columna B de la tabla A-4, se tiene:

$$\beta = 0.45 - 0.1271 = 0.3229$$

$$1 - \beta = 0.6771$$

CARACTERISTICAS DE β Y $1 - \beta$:

1) Si α disminuye, β aumenta y $1 - \beta$ disminuye, cuando n permanece fija.

(Fig 9.16)

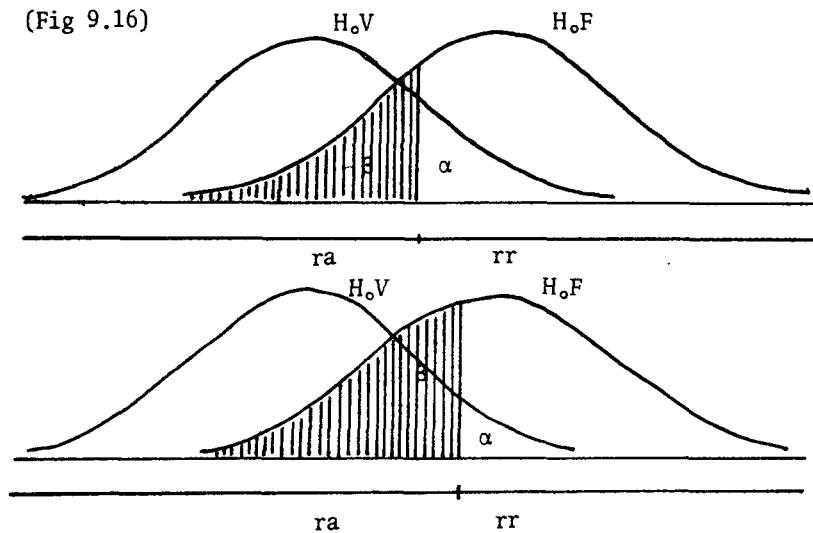


Fig. 9.16

2) Cuanto más grande es la diferencia entre μ_0 y μ_a mayor es el poder, para valores fijos de n y α . (Fig. 9.17)

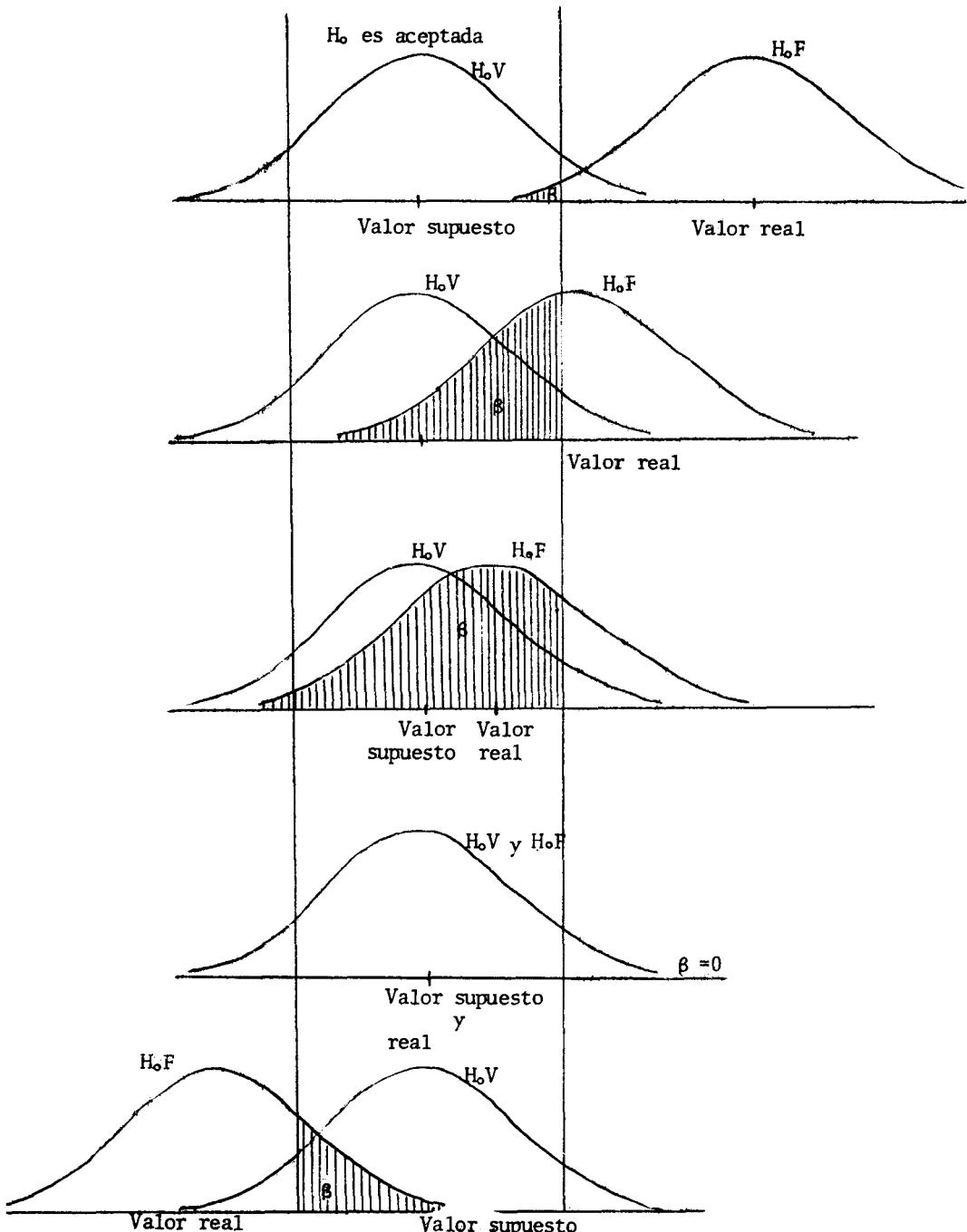


Fig. 9.17 La probabilidad de un error de tipo II depende de cuan lejos de la media supuesta se encuentre la media verdadera (real).

- 3) Si n aumenta, $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ disminuye, β disminuye y $1 - \beta$ aumenta para. α fijo, (Fig. 9.18)

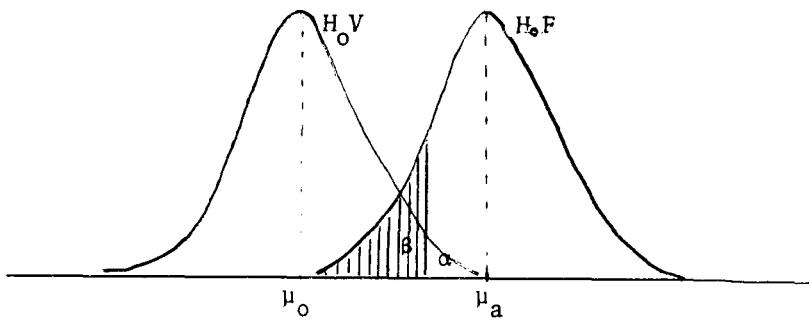
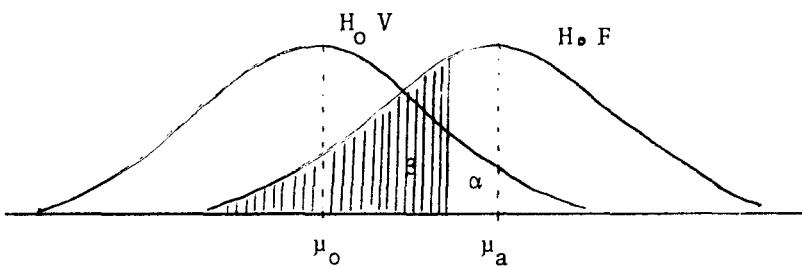


Fig. 9.18

E J E R C I C I O S

- 9.1 Considere la población compuesta por los números: 2,3,5,8 y 9,
- Obtenga todas las muestras aleatorias sin reemplazo de tamaño 3.
 - Calcule la media poblacional.
 - Calcule la media muestral para cada una de las muestras obtenidas en el inciso (a)
 - Grafique los resultados obtenidos en los incisos (b) y (c).
 - Obtenga todas las muestras aleatorias con reemplazo de tamaño 3.
 - Repita los incisos (c) y (d) con las muestras obtenidas en (e)
- 9.2 Se sabe que para una gran población la longitud de la cavidad craneal es aproximadamente normal con una media de 185.6 mm y una desviación estándar de 12.7 mm. ¿Cuál es la probabilidad de que si tomamos una muestra de 10 personas la media será mayor que 190 mm?
- 9.3 La captura diaria de un pescador de langostas es el total X , en libras, de langostas capturadas en un número fijo de trampas. ¿Cómo es_ esperaría que fuese la distribución de la captura diaria y por que' ? Si la captura media por trampa, por dia, es de 30 libras con $\sigma_x = 5$ libras, y si el pescador tiene 50 trampas, obtenga la media y la desviación estándar de la distribución de probabilidad de la captura total diaria X .
- 9.4 Un fabricante de papel de envolver requiere una resistencia mínima de 20 kilos por centímetro cuadrado. Para verificar la calidad del papel, cada hora se selecciona una muestra de 10 piezas de papel y se mide la resistencia de cada una de ellas.
 La desviación estándar σ de la resistencia, calculada combinando las sumas de cuadrados de las desviaciones de muchas muestras, es igual a 2 kilos por centímetro cuadrado.
- ¿Como es la distribución aproximada de la media muestral de las $n=10$ piezas de papel?.
 - Si la media de la población de resistencias es 21 kilos por centímetro cuadrado, ¿Cuál es la probabilidad de que, para una muestra aleatoria de $n=10$ piezas de papel sea $X < 20$?

c) -¿Qué valor debe tener la resistencia media del papel para que
 $P(\bar{X} < 20) = 0.001$?

9.5 Se toma una muestra de 64 medidas de una población, y se determina una media muestral de 32.0. La desviación estándar de la población es de 2.4. Se va a hacer una estimación por intervalo de la media, con un nivel de confianza de 0.90. Determine o declare los valores siguientes:

a) \bar{X} b) σ c) $1 - \alpha$ d) $Z_{1-\alpha/2}$ e) n f) $\sigma_{\bar{x}}$

- g) E (error máximo de estimación)
h) Límite superior de confianza
i) Límite inferior de confianza

9.6 En vista de la disminución de recursos energéticos, la Administración Nacional de Aeronáutica y del Espacio (NASA) de los Estados Unidos se ha dado a la tarea de encontrar sitios en aquel país en donde resulte factible instalar molinos de viento para generar energía eléctrica. Un oficial de la NASA, D.J. Vargo, ha dicho que la velocidad del viento debe tener una media de al menos 15 millas por hora para que un sitio pueda considerarse aceptable. Se hicieron 36 mediciones de la velocidad del viento a intervalos aleatorios en un sitio bajo consideración para instalar un molino; la velocidad media del viento fue $X = 14.2 \text{ mph}$ con desviación estándar de 3 mph.

- a) ¿Puede considerarse que los datos indican que el sitio no satisface los requerimientos de la NASA para la instalación de un generador de energía a base de viento?. Use $\alpha = 0.10$.
b) Diga en qué condiciones se cometería un error de tipo I.
c) Diga en qué condiciones se cometería un error de tipo II.
d) Si usted fuese un oficial de la NASA ¿recomendaría usted el uso de un valor extremadamente pequeño para α (0.01) o bien un valor moderado (0.05) o un valor razonablemente grande (0.10) para determinar la aceptabilidad de un sitio en base a la velocidad media del viento? Explique porque:

- 9.7 En cada parte, enuncie la hipótesis nula (H_0) y la hipótesis alternativa (H_a):
- La temperatura media en la ciudad de Rochester, New York, durante los meses de enero y febrero no es más fría que 4.4°C .
 - La edad media de los alumnos del turno vespertino de nuestra Universidad es de 24 años.
 - La longitud media de los peces "conservados" por los pescadores en el lago de Patzcuaro el año pasado fue de 36 cm.
 - La proporción de recién nacidos varones en el Hospital Central no es mayor que 0.51.
 - El hogar promedio en los suburbios de la ciudad de los Angeles no dista más de 8 km. de la más próxima estación de bomberos.
- 9.8 Supongamos que el agente de compras de una tienda por departamentos se interesa en comprar cierta marca de cajas de cartón que según las especificaciones del fabricante tienen una resistencia media al aplastamiento de 30 libras y una desviación estándar de 3 libras.
- Estas especificaciones son las que él desea cuando menos.
¿Cuáles son las hipótesis nula y alternativa?
 - El agente desea evitar el error de comprar cuando no debe hacerlo es decir, la resistencia media al aplastamiento podría ser menor o igual que 30 libras, y en tal caso no quiere correr el riesgo de comprar un producto inútil ¿Cuáles son las hipótesis en este caso?
- 9.9 Se sabe que la tasa de mortalidad, π , de determinada enfermedad es de 0.10 al aplicar tratamiento médico convencional, Al investigar la efectividad de una nueva medicina para el tratamiento de esta enfermedad, un laboratorio desea probar la hipótesis nula $\pi = 0.10$, frente a una posibilidad adecuada.
- ¿Qué hipótesis alterna deberá usar el fabricante si quiere introducir la nueva medicina sólo en el caso de que sea claramente superior?
 - ¿Qué hipótesis deberá usar el fabricante si experimenta una gran urgencia de poner la medicina en el mercado?; es decir desea venderla a menos que resulte definitivamente inferior al tratamiento convencional de la enfermedad.

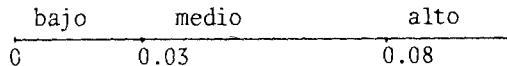
- 9.10 El verano anterior, el condado plantó muchos árboles con el fin de embellecer la ciudad,. Algunos residentes se quejaron de que eran muy pequeños. El director del programa replicó " La altura media de estos árboles recién plantados fue, por lo menos, de 3.1 metros". Para verificar su declaración se obtuvieron aleatoriamente 75 alturas de árboles, observando una media muestral de 2.70 metros. Llévese a cabo una prueba de hipótesis, con $\sigma = 33\text{cm}$. y $\alpha = 0.05$.
- 9.11 Calcule el intervalo de confianza del 95% para estimar la altura media de los árboles recién plantados del problema 10.
- 9.12 En una muestra de 400 automóviles, se observaron 47 de color rojo.
- Pruebe la siguiente hipótesis: " no había más de un 10% de automóviles de color rojo". Utilice $\alpha = 0.10$
 - Construya el intervalo de confianza del 90% para la estimación de la verdadera proporción de automóviles rojos.
- 9.13 En un sondeo de 1000 votantes aleatoriamente seleccionados, 469 de ellos se sentían "alentados" por recientes sucesos de política exterior.
- Pruebe la hipótesis: "el presidente goza del apoyo de la mayoría de los votantes en lo que se refiere a sus actuales medidas de política exterior" ($\alpha = 0.05$).
 - Construya el intervalo de confianza del 90% para la estimación de la verdadera proporción de votantes que apoyan la actual política exterior.
- 9.14 En el centro estudiantil Chiapaneco se ha instalado una nueva máquina vendedora de dulces. En las primeras 400 ocasiones de uso, no ha funcionado correctamente 16 veces. Construya un intervalo de confianza del 98% para estimar la verdadera proporción de las veces que la máquina fallará.
- 9.15 Una encuesta de una muestra aleatoria de 150 casas de una comunidad urbana, reveló que en 781 de los casos, por lo menos un miembro de

- la casa tenía algún tipo de seguro de enfermedad. Construya los intervalos de confianza del 904, 95% y 99% para π , la proporción de casas en la comunidad con la característica de interés.
- 9.16 Antes de iniciar un programa de vacunación contra la rubeola en una comunidad, una encuesta reveló que 150 niños de una muestra aleatoria de 500 niños de primaria de la comunidad estaban ya vacunados contra dicha enfermedad. ¿Está esto de acuerdo con la afirmación de que menos del 504 de los niños de la escuela primaria de la comunidad han sido vacunados contra la rubeola?. Sea $\alpha=0.05$.
- 9.17 Un epidemiólogo desea saber que proporción de adultos que viven en una zona metropolitana grande sufren de hepatitis. Determine el tamaño de muestra necesario para estimar la verdadera proporción con 0.03 de error y 95% de confianza.
- 9.18 Un fabricante de automóviles desea estimar el kilometraje medio por litro de gasolina que sus clientes obtendrán con su nuevo modelo compacto, ¿cuántos viajes de prueba debe efectuar a fin de que su estimación tenga una precisión de 0.2 Km/l., con una confianza del 994? (Supóngase $\sigma=1.5$)
- 9.19 Se va a hacer una estimación de la media de una población, de modo que el error máximo de estimación sea de 2.5 . Si la desviación estándar de población es 7.5 y $1-\alpha=0.95$, ¿que tamaño debe usarse?
- 9.20 En un experimento diseñado a estimar el número promedio de latidos del corazón por minuto de una cierta población, el promedio de latidos por minuto para 49 sujetos fue de 90. Si esos 49 sujetos se consideran una muestra aleatoria de la población y que ésta está normalmente distribuida con una desviación estándar de 10. Hallar el intervalo de confianza del 994 para la media.
- 9.21 El nivel medio de bilirrubina de 16 infantes de 4 días de nacidos fue de 5.98 mg/100cc. Asumiendo que el nivel de bilirrubina en los bebés de 4 días de nacidos está normalmente distribuido con una desviación estándar de 3.5 mg/100cc, encontrar el intervalo de confianza del 994 para y.

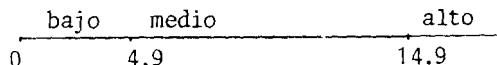
- 9.22 El director del departamento antirrábico de la Secretaría de Salubridad desea sacar una muestra del archivo del departamento de personas que sufrieron mordidas de perros rabiosos durante el año pasado con el fin de estimar la edad de las personas mordidas. El quiere un 95% de confianza y un error máximo de estimación de $E=2.5$. Se conoce por estudios previos que la desviación estándar de la población es de 15 años. ¿De qué tamaño debe ser su muestra?
- 9.23 Se hizo una encuesta en una región rural de un país subdesarrollado a 500 adultos, sobre nutrición. Se encontró que el promedio de calorías que toman diariamente es de 1985 y la desviación estándar de 210. ¿Se puede concluir a partir de estos datos que la media de la población es menor que 2000 calorías? ($\alpha = 0.05$)
- 9.24 Supongamos que se desea probar una hipótesis de que el punto de fusión de una mezcla es 1200°C . Si el punto de fusión difiere por más de 20°C se tendrá que cambiar la composición. Sea $\alpha=0.01$ y $\sigma=15^{\circ}\text{C}$. ¿Cuántas determinaciones se deben hacer?
- 9.25 La contaminación atmosférica se mide mediante la observación de tres factores: a) dióxido de azufre, b) monóxido de carbono y c) polvo. Las tres muestras siguientes de lecturas diarias se obtuvieron de un periódico local:

	Factor / dia									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dióxido de azufre	0.02	0.02	0.02	0.03	0,02	0,04	0.02	0.04	0.04	0.02
SO_2										
Monóxido de carbono CO	3.5	3.1	3.1	3.5	2.5	3.4	3.4	3.4	2.4	2.5
Polvo	0.6	0.5	0.8	0.5	0.3	0.3	0.3	0.4	0.3	0.5

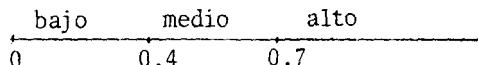
- a) Calcule la media y la desviación estándar muestrales para cada una de las tres muestras.
- b) El dióxido de azufre se mide y se interpreta de acuerdo con la siguiente escala.



- b1) Mediante el uso de la muestra anterior, pruebe la siguiente hipótesis: "el dióxido de azufre no está a un nivel bajo"; es decir, $H_0: \mu \geq 0.03$ con $\alpha = 0.05$.
- b2) Construya el intervalo de confianza de 90% para la estimación del nivel medio de contaminación por dióxido de azufre.
- c) El monóxido de carbono se mide e interpreta de acuerdo con la escala siguiente:



- c1) Por medio de los resultados muestrales citados, pruebe la siguiente hipótesis: "el nivel de monóxido de carbono no está a un nivel bajo", es decir, $H_0: \mu \geq 4.9$ con $\alpha = 0.05$
- c2) Construya el intervalo de confianza del 95% para estimar el nivel medio de contaminación por monóxido de carbono.
- d) El polvo se mide e interpreta de acuerdo con esta escala:



- d1) Mediante los resultados muestrales anteriores, pruebe la siguiente hipótesis "el nivel medio de polvo no está a un nivel alto"; es decir, $H_0: \mu \leq 0.7$.
- d2) Construya el intervalo de confianza del 95% para estimar el nivel medio de contaminación por polvo.

9.26 Un laboratorio produce una cierta droga cuyo peso tiene una desviación estándar de S mg. El equipo de investigación de la compañía propuso

un nuevo método de producir la droga. Sin embargo, esto ocasionaría algunos costos y será adoptado solo si hay fuerte evidencia de que la desviación estándar de los pesos de la droga es menor que 5 mg. La compañía realiza el experimento usando $n = 10$. Los datos en gramos son los siguientes:

5.728	5.731
5.722	5.719
5.727	5.724
5.718	5.726
5.723	5.722

¿Con estos datos debe la compañía adoptar el nuevo método?

- 9.27 En el pasado la desviación estándar de los pesos de determinados paquetes de 32.0 onzas que llena automáticamente una máquina se ha logrado establecer en 0.25 onzas. Una muestra aleatoria de 20 paquetes da una desviación estándar de 0.40 onzas. ¿Tiene significación este incremento observado con $\alpha=0.10$?
- 9.28 La cantidad de glóbulos blancos en una muestra aleatoria de 10 hombres con algún tipo de leucemia dió una varianza de 2,500,000. Construya el intervalo de confianza del 95% para σ^2 y para σ .
- 9.29 Se determinaron las cantidades de hemoglobina de 16 animales expuestos a un producto químico tóxico. Las siguientes son las observaciones:

15.6	14.8	14.4	16.6	13.8	14.0	17.3	17.5
17.4	18.6	16.2	14.7	15.7	16.4	13.9	14.8

Construya un intervalo de confianza del 95% para σ^2 y para σ .

- 9.30 Se observaron los porcentajes de hemoglobina de una muestra de 20 niños que sufren leucemia. La varianza de las observaciones fue 5. ¿Hay suficiente evidencia que indique que la varianza de la población es mayor que 4? ($\alpha=0.05$).

9.31 Encuentre los siguientes valores de F:

- | | | |
|--------------------|--------------------|---------------------|
| a) F(0.95, 20, 12) | b) F(0.99, 24, 40) | c) F(0.95, 12, 20) |
| d) F(0.975, 5, 20) | e) F(0.99, 15, 18) | f) F(0.95, 5, 9) |
| g) F(0.99, 40, 30) | h) F(0.975, 8, 40) | i) F(0.995, 24, 27) |

9.32 Encuentre los siguientes valores de F:

- | | | |
|--------------------|---------------------|--------------------|
| a) F(0.05, 20, 12) | b) F(0.025, 5, 24) | c) F(0.01, 18, 15) |
| d) F(0.05, 7, 10) | e) F(0.005, 25, 15) | f) F(0.005, 22.30) |

9.33 Se compararon dos tipos de pastillas en cuanto a su efectividad en base al tiempo que tardan en quitar el dolor desde el momento de su ingestión. Trece pacientes recibieron la pastilla 1 y 13 la 2. Las varianzas de las muestras fueron $s_1^2 = 64$ y $s_2^2 = 16$. Pruebe la hipótesis de que las varianzas poblacionales son iguales. Use $\alpha=5\%$.

9.34 A fin de estimar la razón de las varianzas entre los pesos de una lata de duraznos de la marca "lider" con los de su propia marca, un gerente de tienda hace tomar muestras, con los resultados siguientes:

$$\text{Marca lider : } n=16, \quad s^2 = 1.968$$

$$\text{Su propia marca: } n=25, \quad s^2 = 2.834$$

- a) Determine el intervalo de confianza del 90% para estimar la razón de varianzas.
- b) Determine el intervalo de confianza del 95% para estimar la razón de desviaciones estándar.

9.35 La desviación estándar de las temperaturas anuales de una ciudad durante un período de 100 años ha sido de 9°C . Utilizando la temperatura media en el dia 15 de cada mes durante los últimos 12 meses, se calculó una desviación estándar de 5.7°C . Pruebe la hipótesis de que las temperaturas de la ciudad se han vuelto menos variables que en el pasado, con un nivel de significancia de 0.05.

- 9.36 La cantidad de cera en cada lado del papel encerado es una variable aleatoria. Se cree que hay mayor variación en la cantidad de cera en la cara interior que en la exterior. Se tomó una muestra de 75 observaciones de la cantidad de cera en cada lado y se obtuvieron los siguientes resultados:

Cera en Ibs. por unidad de área de la muestra

Cara exterior	Cara interior
$\bar{X} = 0.948$	$\bar{Y} = 0.652$
$\sum X_i^2 = 91$	$\sum Y_i^2 = 84$
$n_x = 75$	$n_y = 75$

Haga una prueba de hipótesis para determinar si la variabilidad de la cantidad de cera de la cara interior es mayor que la de la exterior. $\alpha=5\%$

- 9.37 Las cantidades de nicotina en muestras de orina de dos grupos de hombres fueron medidas, el grupo 1 consistió de 25 fumadores aparentemente sanos y el grupo 2 de 31 fumadores con cáncer en la uretra. Las varianzas calculadas para los dos grupos fueron respectivamente $s_1^2 = 1.00$ y $s_2^2 = 3.5$. Determine el intervalo de confianza del 90% para σ_2^2 / σ_1^2 .

- 9.38 Organismos de *Toxoplasma gondii* fueron inyectados en 21 conejillos de indias normales y en 21 que estaban enfermos crónicamente de toxoplasmosis. Después de 24 horas se midieron los diámetros del eritema en el lugar de la reacción. Las varianzas calculadas de estas observaciones fueron 10 mm^2 para el grupo ya enfermo y 3 mm^2 para el grupo normal. ¿ Se puede concluir a partir de estos datos que la varianza de la población enferma es mayor que la de la normal ? $\alpha=5\%$

- 9.39 En un experimento diseñado para determinar los efectos del humo del cigarrillo en las ratas, 11 animales fueron expuestos al humo y 11 no (grupo control). Al final del experimento se midieron las frecuencias del pestañeo en cada animal. Las varianzas fueron para el grupo

expuesto de 3400 y para el de control 1200. ¿Indican estos datos que las varianzas de las poblaciones representadas por estos grupos son diferentes?

- 9.40 En un estudio diseñado para investigar los efectos secundarios de dos drogas, a 50 animales se les suministra la droga A y otros 50 la droga B. De los 50 que recibieron la droga A, 11 tuvieron efectos secundarios desagradables, y de los que recibieron la droga B, 8. Encuentre los intervalos de confianza del 90%, 95% y 99% para la diferencia de proporciones.
- 9.41 Si 250 vaciados producidos en el molde A contienen 19 piezas defectuosas mientras que 300 vaciados en el molde B contienen 27 piezas defectuosas pruebe la hipótesis nula de que no existe diferencia entre las verdaderas proporciones de artículos defectuosos producidos en los dos moldes. $\alpha = 5\%$
- 9.42 Dos grupos de cierto tipos de pacientes, A y B, constituidos cada uno de 200 personas, son usados para probar la eficacia de un suero. Ambos grupos son tratados idénticamente, excepto que al grupo A se le da el suero, mientras que al grupo B no se le da. Se encuentra que 70% y 60% de los grupos A y B respectivamente, se recuperan de la enfermedad. ¿Es prueba suficiente este resultado observado para la conclusión de que el nuevo suero ayuda a curar la enfermedad si estamos dispuestos a asumir un riesgo α de 0.01?.
- 9.43 Se realiza un experimento para comparar la media de la absorción de medicamentos en especímenes de tejido muscular. Se dividieron 72 especímenes en dos grupos iguales, siguiendo un procedimiento aleatorio. Cada grupo fue probado con una de dos medicinas. Suponiendo que la varianza de absorción para este tipo de medicamentos es de 0.10 y que las medias observadas fueron $\bar{X}_1 = 7.9$ y $\bar{X}_2 = 8.5$, construya el intervalo de confianza del 98% para estimar la diferencia en las tasas medias de absorción.

Grupo	Tamaño de la muestra	X (an)	s (an)
Hombres	12	13.21	1.05
Mujeres	9	11.00	1.01

Asumiendo distribuciones normalmente distribuidas con varianzas iguales, construir los intervalos de confianza del 90%, 95% y 99% para $\mu_1 - \mu_2$

- 949 Se examinaron dos grupos de niños en cuanto a su agudeza visual. El grupo 1 estaba compuesto por 11 niños, quienes habían sido controlados y tratados por médicos particulares, obteniéndose una media de 26 y una desviación estándar de 5. El segundo grupo, compuesto por 14 niños habían recibido atención médica por instituciones del gobierno, obteniéndose una media de, 21 y una desviación de 6. Asumiendo distribuciones normales con varianzas iguales, encontrar los intervalos de confianza de niveles 0.90, 0.95 y 0.99 para $\mu_1 - \mu_2$.
- 9.50 Se dividieron 70 pacientes de epilepsia en dos muestras aleatorias iguales. Al grupo A se les dió tratamiento que incluía dosis diarias de vitamina D. Al grupo B se le dió el mismo tratamiento excepto que no recibió vitamina D sino placebo en su lugar. Las medias del número de ataques experimentados durante el tratamiento por los dos grupos fueron:

$$\bar{x}_A = 15, \quad \bar{x}_B = 24, \quad s_A^2 = 8, \quad s_B^2 = 12$$

¿Hay suficiente evidencia que indique que la vitamina D reduce el número de ataques epilépticos ? Sea $\alpha = 0.05$

- 9,5 1 Se realizó un experimento para probar la diferencia de efectividad de dos métodos para cultivar trigo. Diez lotes fueron arados superficialmente y quince profundamente. La media muestral para el primer grupo rindió 44.3 toneladas por hectárea y para el segundo grupo 44.7 Asumiendo que la desviación estándar para el arado superficial es de

9.44 Suponiendo que la varianza de los pesos de los hombres universitarios es de 400 libras y que la varianza de los pesos de las mujeres es de 144 libras., construya un intervalo de confianza del 90% para estimar la diferencia de los pesos medios. Utilice los datos del primer día:

$$\bar{X}_H = 171.8 \quad n_H = 30 \quad \bar{X}_M = 119.5 \quad n_M = 20$$

9.45 Con la información del ejercicio anterior, pruebe la hipótesis de que la diferencia entre los pesos medios de los varones y las mujeres en la Universidad no excede de 42 libras. Use $\alpha=0.10$

9.46 Estime en un intervalo de confianza del 95% la diferencia en CI (Conociente intelectual) entre los miembros mayores y menores (hermanos y hermanas) de una familia, en base a la siguiente muestra aleatoria.

Mayores	145	133	116	128	85	100	105	150	97	110
Menores	131	119	103	93	108	100	111	130	135	113

Enuncie los supuestos y si es necesario pruébelos.

9.47 Las medias de las alturas de una muestra de 10 niñas de 12 años y de una muestra de 10 niños de 12 años son respectivamente $\bar{X}_1 = 59.8$ plg y $\bar{X}_2 = 58.5$ plg. Asumiendo distribuciones normales de alturas con $\sigma_1 = 2$ plg. y $\sigma_2 = 3$ plg. encontrar:

- a) El intervalo de confianza del 90% para $\mu_1 - \mu_2$
- b) El intervalo de confianza del 95% para $\mu_1 - \mu_2$
- c) El intervalo de confianza del 99% para $\mu_1 - \mu_2$

9.48 Las medidas de la sección transversal de los corazones de adultos hombres y mujeres dieron los siguientes resultados:

0,6 Ton/Ha y para el profundo de 0.8. Probar la igualdad de los dos métodos al nivel de significancia del 1%.

9.52 En un cierto laboratorio un método X_1 para producir gasolina de un tipo de petróleo crudo se está investigando. Antes de terminar el experimento, se propone un nuevo método X_2 . Siendo todas las demás variables iguales, se decidirá abandonar el método X_1 y adoptar el X_2 solo si el rendimiento medio del 2° es sustancialmente mayor que el del 1° . Asumiendo que las desviaciones estándar son iguales y si $\alpha = 0.05$ ¿Cuál será su recomendación, basado en las siguientes muestras aleatorias? Los números representan rendimientos en porcentaje.

X_1	;	23.2	26.6	24.4	23.5	22.6	25.7	25.5
X_2	:	25.7	27.7	26.2	27.9	25.0	21.4	26.1

9.53 Las siguientes son 16 determinaciones independientes de puntos de fusión en $^{\circ}\text{C}$ de un compuesto; 8 hechas por un analista y 8 por otro

Analista I	Analista II
164.5	163.5
169.7	162.0
169.2	163.0
169.5	163.2
161.8	160.7
168.7	161.5
169.5	160.9
163.9	162.0

Concluiría usted a partir de estos datos que hay cierta tendencia de un analista de obtener resultados más altos que el otro? Use 1% de nivel de significancia y pruebe los supuestos si es necesario.

9.54 Encontrar el intervalo de confianza del 90% para la diferencia de las medias para los dos analistas del problema anterior, asumiendo que las varianzas son desconocidas pero iguales.

9.55 Dos analistas tomaron medidas de la dureza del agua de la ciudad al mismo tiempo y en el mismo lugar. Determine si un analista tiene tendencia a hacer mediciones más altas que el otro, usando los siguientes datos:

Analista X	Analista Y
0.42	0.82
0.62	0.61
0.37	0.89
0.40	0.51
0.44	0.33
0.58	0.48
0.48	0.23
0.53	0.25
	0.67
	0.88

Sugerencia: Pruebe primero si las varianzas son iguales o diferentes:

9.56 Pruebe con $\alpha=0.05$ la hipótesis de que la media de la población A es mayor que la media de la población B, donde muestras aleatorias tomadas de cada población arrojan los siguientes estadígrafos muéstrales.

$$\begin{array}{lll} A : \quad \bar{x} = 57.5 & s = 8.2 & n = 50 \\ B : \quad \bar{x} = 54.4 & s = 10.6 & n = 60 \end{array}$$

Sugerencia: Enuncie los supuestos y si es necesario pruébelos.

9.57 Se desea comparar dos dietas. Se seleccionaron ochenta individuos al azar en una población de músicos excedidos de peso. Cuarenta y cinco integrantes de este grupo recibieron la dieta A y los otros 35 la dieta B. Las pérdidas de peso en libras, durante un periodo de una semana, resultaron ser las siguientes:

	Tamaño muestral	Media maestral en libras	Varianza muestral
Dieta A	45	10.3	7
Dieta B	35	7.3	3.25

- a) Pruebe la hipótesis de que $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$ con $\alpha = 0.10$
- b) ¿Permiten estos datos concluir que la pérdida de peso bajo la dieta A es mayor que la pérdida de peso bajo la dieta B? Use 10% de nivel de significancia.
- c) Construya un intervalo de confianza del 90% para $\mu_A - \mu_B$

9.58 Se seleccionaron aleatoriamente 10 automóviles para probar dos nuevas mezclas de gasolina sin contenido de plomo. Cada automóvil recibió una porción medida de gasolina, y fue conducido, después de lo cual se midió la distancia recorrida. La segunda mezcla se probó inmediatamente de la misma manera. El orden en que se probaron las mezclas X y Y se asignó también aleatoriamente. A continuación aparecen los resultados en Km/l.

Automóvil	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Mezcla X	7.9	5.6	9.2	6.7	8.1	7.3	8.1	5.4	6.9	6.1
Mezcla Y	7.7	6.1	8.9	7.1	7.9	6.7	8.2	5.0	6.2	5.7

Con una significación del 104, pruebe que no hay diferencia entre las dos mezclas en lo que respecta a sus efectos sobre kilometraje.

9.59 Para revisar dos básculas, se pesaron 8 muestras en cada una de ellas. Sugieren los resultados que existe una diferencia significativa entre ambas básculas? Use $\alpha = 5\%$.

A.	10.063	8.051	9.036	9.067	3.056	5.076	5.074	2.006
B	10.063	8.050	9.033	9.062	3.060	5.070	5.070	2.000

9.60 Se sospecha que en un laboratorio las medidas de viscosidad obtenidas en la mañana eran menores que en la tarde. Por lo tanto se dividieron a la mitad diez muestras, una de las mitades se pone a prueba en la mañana y la otra en la tarde. ¿Sugieren los datos que la "viscosidad vespertina" es mayor? Use $\alpha = 5\%$.

Viscosidad (codificada)

Muestra	Mañana	Tarde
1	43	45
2	48	48
3	48	50
4	50	53
5	55	54
6	50	52
7	72	73
8	75	75
9	73	7
10	54	56

9.61 Graficar las medias de las 10 muestras siguientes (espesor de rondañas, valores codificados) en una gráfica de control para medias, suponiendo que la población es normal con media $\mu = 5$ y desviación estándar $\sigma = 1.55$.

HORA	8:00	8:30	9:00	9:30	10:00	10:30	11:00	11:30	12:00	12:30
Valores	3	3	5	7	7	4	5	6	5	5
de las	4	6	2	5	3	4	6	4	5	2
mues- tras.	8	6	5	4	6	3	4	6	6	5
	4	8	6	4	5	6	6	4	4	3

9.62 Graficar los rangos de las muestras del problema 9.61 en una gráfica de control para rangos.

9,63 En la fábrica de tubos electrónicos para amplificadores, se desea saber con una probabilidad de 0.99 los límites entre los cuales 90% de la transconductancia de los futuros tubos caerá. Se hacen pruebas con 9 tubos y las transconductancias observadas en micro-ohmios son:

4330	4287	4450
4295	4340	4407
4295	4388	4356

¿Cuáles son esos límites?

9.64 Las siguientes observaciones son las medidas del contenido neto del volumen en litros de ciertas botellas:

5.68	5.65	5.59	5.64	5.66
5.61	5.62	5.64	5.63	5.61
5.64	5.66	5.60	5.65	5.63
5.67	5.64	5.60	5.60	5.65
5.60	5.65	5.63	5.60	5.60

Encontrar el intervalo en el cual 99% del volumen de las botellas se encontrará con un 95% de probabilidad.

9.65 Las medidas de los porcentajes de encogimiento al secar 40 artículos de plástico fueron:

19.3	20.5	17.9	17.3	15.8
16.9	17.1	19.5	20.7	18.5
18.2	22.5	19.1	18.4	18.7
18.8	17.5	14.9	12.3	19.4
16.8	17.3	19.5	17.4	16.3
21.3	23.4	18.5	19.0	16.1
18.8	17.5	18.2	18.6	18.3
16.5	17.4	20.5	16.9	17.5

Encontrar un intervalo que contenga 75% de los productos con una probabilidad de 0.99.

9.66 Suponga que se cuenta con la siguiente información:

$$H_0: \mu \leq 5$$

$$H_a: \mu > 5$$

$$n = 25, \sigma = 1, \alpha = 0.04$$

Encuentre $\beta = P(\text{ET II})$ y la potencia $1 - \beta$ si H_a es como sigue:

a) $\mu = 5.2$ b) $\mu = 6.0$ c) $\mu = 5$

9.67 Suponga que se cuenta con la siguiente información;

$$H_0: \mu \geq 25 \quad n = 36$$

$$H_a: \mu < 25 \quad \sigma = 3 \\ \alpha = 0.01$$

Calcule β y $1 - \beta$ si H_a es:

a) $\mu = 24.5$ b) $\mu = 24$

9.68 Suponga que se cuenta con la siguiente información:

$$H_0: \mu \geq 25 \quad n = 36$$

$$H_a: \mu < 25 \quad s = 3 \\ \alpha = 0.01$$

Calcule β y $1 - \beta$ si H_a es:

a) $\mu = 24.5$ b) $\mu = 24$

9.69 Suponga la siguiente información:

$$H_0: \mu = 20 \quad n = 100$$

$$H_a: \mu \neq 20 \quad \sigma = 10 \\ \alpha = 0.05$$

Obtenga β y $1 - \beta$ para $\mu_a = 22$

9.70 Sea una distribución normal con varianza igual a 0.20 y media desconocida. Si a partir de una muestra de tamaño 9 se tiene que $\bar{X} = 1.30$.

Bajo la hipótesis $H_0: \mu \leq 1$ y $H_a: \mu > 1$, y si $\mu_a = 1.5$, ¿Cuál es la probabilidad de cometer:

- a) el error de tipo I?
- b) el error de tipo II?
- c) ¿cuál es el poder de la prueba?

CAPITULO 10: DATOS DE FRECUENCIA - PRUEBAS DE BONDAD DE AJUSTE Y PRUEBA
DE INDEPENDENCIA (TABLAS DE CONTINGENCIA)

10.1 DATOS DE FRECUENCIA

Ya hemos estudiado y utilizado, en el capítulo 9 la distribución ji-cuadrada (χ^2), tanto para estimar como para probar hipótesis acerca de la varianza o desviación estándar de una población. La distribución ji-cuadrada se emplea también para: a) probar hipótesis acerca de datos de frecuencia, es decir, para comparar resultados experimentales, obtenidos en forma de frecuencias o proporciones, con frecuencias esperadas. Esto es, probar estadísticamente si la distribución de frecuencias observadas es compatible ("se ajusta a") con alguna distribución teórica conocida: Uniforme, Multinomial, Binomial, Poisson, Normal, etc. A estas pruebas se les denomina "*Pruebas de bondad de ajuste*"; y b) para probar preferencias o pruebas de independencia, llamadas también tablas de Contingencia .

10.2 PRUEBAS DE BONDAD DE AJUSTE USANDO LA DISTRIBUCION JI-CUADRADA

Para resolver el primer tipo de problema planteado en la sección anterior se puede utilizar la distribución χ^2 de Karl Pearson o la prueba de Kolmogorov y Smirnov. La primera prueba conviene tanto para distribuciones continuas como para discretas; mientras que la de Kolmogorov y Smirnov solo sirve para distribuciones continuas.

A continuación se establece la prueba χ^2 para bondad de ajuste

Supóngase que al realizar un experimento aleatorio n veces, se presentan los resultados R_1, R_2, \dots, R_k con frecuencias observadas O_1, O_2, \dots, O_k , y que de acuerdo con las leyes de la probabilidad, se espera que los mismos resultados se presenten con frecuencias E_1, E_2, \dots, E_k

Una medida de las diferencias entre frecuencias observadas y las esperadas está dada por el estadígrafo χ^2 definido por:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}, \quad k > 2 \quad +$$

$$\text{donde } \sum_{i=1}^k O_i = \sum_{i=1}^k E_i = n$$

Si las frecuencias observadas coinciden o se aproximan mucho a las esperadas, el valor del estadígrafo χ^2 tiende a cero. Por el contrario, si las frecuencias observadas difieren significativamente de las esperadas, el valor del estadígrafo χ^2 será positivo y tan grande cuanto mayor sean las diferencias entre las frecuencias. Bajo estas condiciones se tiene que la región de rechazo es solamente la región derecha (cola de recha o unilateral superior), y las hipótesis son las siguientes:

H_0 : Los datos provienen de una muestra al azar de una población distribuida de acuerdo a un modelo teórico.

H_a : Los datos no provienen de una población distribuida de acuerdo al modelo teórico.

El estadígrafo de contraste es :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad \text{o} \quad \chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{O_i^2}{E_i} - n$$

+ Si $k=2$, se debe usar la fórmula corregida de Yates;

$$\chi^2_y = \sum_{i=1}^2 \frac{(|O_i - E_i| - 0.5)^2}{E_i}$$

con $k-r$ grados de libertad, donde:

k : es el número de eventos o categorías

r : es el número de restricciones ($r \geq 1$, ya que $\sum_{i=1}^k O_i = \sum_{i=1}^k E_i$ es siempre

una restricción, y cada parámetro que se tenga que estimar es una restricción más).

En ocasiones, las frecuencias esperadas dan resultados menores que 1, y los investigadores frecuentemente hacen notar en la literatura

que el estadígrafo $\sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$ no se distribuye como x^2 si las

frecuencias esperadas son pequeñas; pero no se ponen de acuerdo en el valor que al menos deben tener las E_i . Algunos establecen que para poder usar la ji-cuadrada las E_i deben ser al menos 5 ($E_i \geq 5$). Otros no tan conservadores, como Cochran, opinan que se puede usar la x^2 si las E_i tienen un valor de por lo menos 1 ($E_i \geq 1$) y la distribución es unimodal (como la normal). Si, en la práctica resultaran una o varias $E_i < 1$ se juntan las categorías adyacentes para que se cumpla este supuesto ($E_i \geq 1$). Al combinar dos o más categorías adyacentes, el número de éstas se reduce y por tanto los grados de libertad también se reducen. Además Dixon y Massey establecen que no más de 20% de las E_i deben ser menores que 5; no sotros no consideraremos esta suposición.

Ejemplo 10.1 {Distribución Uniforme}

Una pequeña fabrica de dulces que elabora y empaca pequeños caramelos de azúcar, mezcla, con igual proporción, seis colores de los caramelos. Para probar la proposición de proporciones iguales, se toma una muestra al azar, con los siguientes resultados:

color	rosado	lila	amarillo	anaranjado	verde	blanco
frecuencia	20	17	18	14	10	11

probar la proposición de proporciones iguales con $\alpha = 0.05$

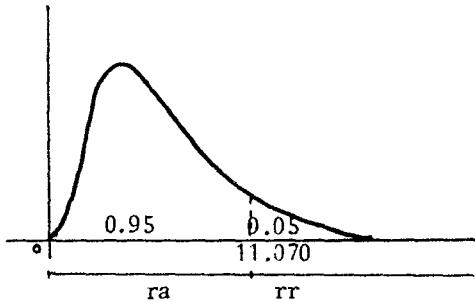
Solución: H_0 : Los datos provienen de una distribución uniforme (proporciones iguales; esto es: $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{6}$)

H_a : No provienen de una distribución uniforme

Estadígrafo de prueba:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{6} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}, \quad g_1 = 6-1=5$$

Región crítica:



Cálculos: Las proporciones esperadas son todas $E_i = \frac{1}{6}$ y las frecuencias esperadas son todas $E_i = p_i n = \frac{1}{6} (90) = 15$. Entonces:

O_i	E_i	O_i^2 / E_i
20	15	$20^2 / 15$
17	15	$17^2 / 15$
18	15	$18^2 / 15$
14	15	$14^2 / 15$
10	15	$10^2 / 15$
11	15	$11^2 / 15$
$\Sigma O_i = 90 = n$	$\Sigma E_i = 90 = n$	$\Sigma \frac{O_i^2}{E_i} = \frac{1430}{15} = 95.33$

$$\chi^2 = \sum \frac{O_i^2}{E_i} - n = 95.33 - 90 = 5.33$$

Decisión:

Se acepta H_0 en consecuencia la muestra observada no presenta suficiente evidencia que indique que los datos no provienen de una distribución uniforme.

Ejemplo 10.2 (Distribución Multinomial)

Una caja contiene gran cantidad de tornillos de 4 diferentes tamaños. Se supone que están en la proporción : 8:7:3:2.. Una muestra de 400 contiene 180 del tamaño 1, 120 del 2, 40 del 3 y 60 del 4.

- a) Estime las proporciones de cada tipo de tornillos en la caja.
- b) Pruebe la hipótesis de que los tornillos están en la proporción 8:7:3:2 con $\alpha = 0.005$

Solución:

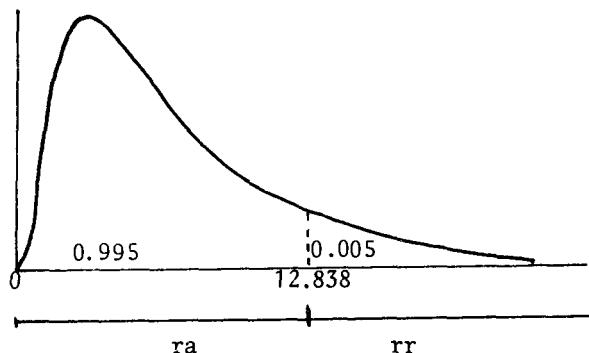
a) $p_1 = \frac{8}{20}$, $p_2 = \frac{7}{20}$, $p_3 = \frac{3}{20}$, $p_4 = \frac{2}{20}$

b) $H_0: p_1 = \frac{8}{20}$, $p_2 = \frac{7}{20}$, $p_3 = \frac{3}{20}$, $p_4 = \frac{2}{20}$

Ha: Los tornillos no están en las proporciones esperadas.

Estadígrafo de prueba:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^4 \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}, g_1 = 4-1 = 3$$

Región crítica:

Cálculo: $E_i = p_i n$, $E_1 = \frac{8}{20} (400) = 160$, $E_2 = \frac{7}{20} (400) = 140$,

$$E_3 = \frac{3}{20} (400) = 60, E_4 = \frac{2}{20} (400) = 40.$$

O_i	E_i	O_i^2 / E_i
180	160	202.5000
120	140	102.8571
40	60	26.6667
60	40	90.0000
$\Sigma O_i = 400$		$\Sigma E_i = 400$
		$\Sigma \frac{O_i^2}{E_i} = 422.0238$
$\chi^2 = \Sigma \frac{O_i^2}{E_i} - n = 422.0238 - 400 = 22.0238$		

Decisión:

Se rechaza H_0 , por lo tanto los tornillos no están en las proporciones esperadas 8: 7: 3: 2.

Ejemplo 10.3 (Distribución binomial)

En un estudio designado a determinar la aceptación por los nacientes de un nuevo analgésico, cada uno de 100 médicos seleccionaron 25 pacientes para participar en el estudio. Cada paciente probó el nuevo analgésico por un período de tiempo determinado en vez del usual. Los resultados son los siguientes:

Tabla 10.1

# de pacientes de un total de 25 que prefieren el nuevo analgésico	# de médicos que reportaron este número (O_i)	# total de pacientes que prefieren el nuevo analgésico por médico.
0	5	0
1	6	6
2	8	16
3	10	30
4	10	40
5	15	75
6	17	102
7	10	70
8	10	80
9	9	81
10 6 más	0	0
	100	500

Queremos determinar si estos provienen de una población que sigue una distribución binomial.

Como el parámetro binomial n no se conoce, deberá ser estimado a partir de la muestra. Se tienen 500 pacientes que prefieren el nuevo

analgésico de un total de 2500 que participaron en el estudio, entonces

$$p = \frac{500}{2500} = 0.20,$$

Con este valor de p podemos determinar las probabilidades binomiales esperadas para $x = 0, 1, 2, 3, \dots, 25$; usando la fórmula:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

Obtenidas estas probabilidades (frecuencias relativas esperadas) multiplicamos por 100 = ΣO_i para obtener las frecuencias esperadas E_i

$$(Nótese que f(x \geq 10) = 1 - \sum_{x=0}^9 f(x))$$

Tabla 10.2

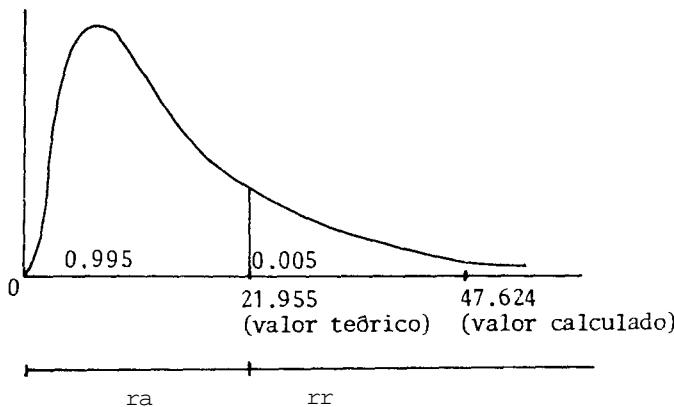
x_i	O_i	$f(x_i)$	E_i
0	5	0.0038	0.38
1	6	0.0236	2.36
2	8	0.0708	7.08
3	10	0.1358	13.58
4	10	0.1867	18.67
5	15	0.1960	19.60
6	17	0.1633	16.33
7	10	0.1109	11.09
8	10	0.0623	6.23
9	9	0.0295	2.95
10 6 más	0	0.0173	1.73

Podemos ver que $E_1 < 1$, por lo tanto juntamos las primeras dos categorías en una. Así: $k = 10$ y $gl = 10 - 2 = 8$ porque hay dos restricciones: $\sum O_i = \sum E_i$ y la estimación de π .

La χ^2 -cuadrada calculada es:

$$\chi^2 = \sum \frac{O_i^2}{E_i} - 100 = 47.624$$

El valor crítico es 21.955 para $\alpha = 0.005$



Se rechaza H_0 , lo cual indica que los datos obtenidos no provienen de una distribución binomial.

Ejemplo 10.4 (Distribución de Poisson)

El administrador de un hospital ha estado estudiando el número de urgencias que llegan al hospital por día y sospecha que estas se distribuyen según Poisson. También ha determinado que el número medio de urgencias por día es de 3. Para determinar si efectivamente el número de urgencias por día que llegan al hospital siguen la ley de Poisson, tomamos una muestra al azar de 90 días de los archivos del hospital. Los datos se resumen en la siguiente tabla.

Tabla 10 .3

Número de urgencias por día	Número de días con este número de urgencias.
0	5
1	14
2	15
3	23
4	16
5	9
6	3
7	3
8	1
9	1
10 o más	0
	90

Solución: Con $\lambda=3$ y la tabla A-3, determinamos las probabilidades de Poisson para $X= 0,1,2,\dots,9$ y para $X \geq 10$, restamos de 1 la suma de las anteriores, esto es:

$$f(X=0) = 0.049787$$

$$f(X=1) = 0.149361, \text{ etc.}$$

$$f(X > 10) = 1 - 0.998898 = 0.001102$$

Para obtener las frecuencias esperadas E_i , multiplicamos las probabilidades por $n = 90$. Veáse la tabla 10.4

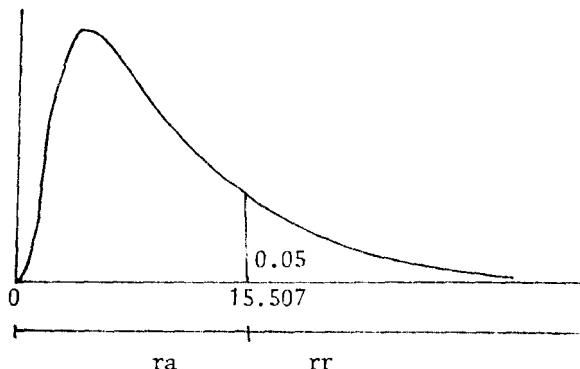
Tabla 10.4

X_i	O_i	$f(X_i)$	E_i	
0	5	0.049787	4.481	
1	14	0.149361	13.442	
2	15	0.224042	20.164	
3	23	0.224042	20.164	
4	16	0.168031	15.123	
5	9	0.100819	9.074	
6	3	0.050409	4.537	
7	3	0.021604	1.944	
8	11	0.008102	0.729	
9	12	0.002701	0.243	1.071
10	0	0.001102	0.099	
TOTAL	90	1	90.00	

El valor calculado de χ^2 es

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{9} \frac{O_i^2}{E_i} - 90 = 93.7563 - 90 = 3.7563$$

El valor teórico para $9 - 1 = 8$ grados de libertad ($K=9$, $r=1$, puesto que λ fue dada) y $\alpha = 0.05$ es 15.507



Concluimos, por tanto que el número de urgencias por día que llegan al hospital sigue una distribución de Poisson con $\lambda=3$.

Ejemplo 10.5 (Distribución Normal)

Supongamos la siguiente muestra de 100 observaciones como se indican en la tabla 10.5

Tabla 10.5

Clases	f
<80,90]	8
<90,100]	15
<100,110]	21
<110,120]	23
<120,130]	16
<130,140]	9
<140,150]	8
	100

Determinemos si la muestra provino de una distribución normal con $\alpha=0.05$.

Solución : Debemos calcular \bar{X} y s puesto que no se conocen μ y σ , para ello, seguimos el procedimiento del capítulo 8 para calcular \bar{X} y s a una distribución de frecuencias. Esto es, determinamos los puntos medios de las clases

Tabla 10.6

clases	$f_i = O_i$	mi
$< 80, 90]$	8	85
$< 90, 100]$	15	95
$< 100, 110]$	21	105
$< 110, 120]$	23	115
$< 120, 130]$	16	125
$< 130, 140]$	9	135
$< 140, 150]$	8	145
$n=100$		

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i m_i}{n} = 113.30$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum f_i m_i^2 - n \bar{x}^2}{n-1}} = 16.64$$

Tabla 10.7

clases	O_i	$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$
≤ 90	8	-1.40
$< 90, 100]$	15	-0.80
$< 100, 110]$	21	-0.20
$< 110, 120]$	23	+0.40
$< 120, 130]$	16	+1.00
$< 130, 140]$	9	+1.60
> 140	8	---

n=100

Para determinar la probabilidad de la clase $(-\infty, 90]$ usamos la columna B de la tabla A-4 y el valor de $z=1.40$, obteniéndose 0.0808 . La probabilidad de la segunda clase $(90, 100]$ la obtenemos utilizando el valor de $z=0.80$, la columna B y restando a este valor la probabilidad correspondiente a la clase $(-\infty, 90]$; esto es, $0.2119 - 0.0809 = 0.1311$. Al llegar al valor de $z = 0.40$ cambiamos de la columna B a la E y seguimos el mismo procedimiento . Ver figura 10.1 y tabla 10.8

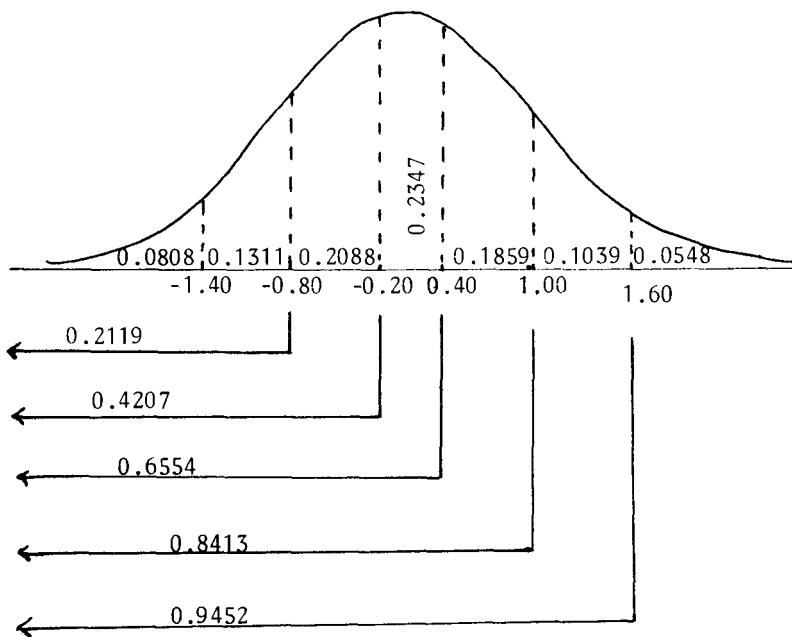


Fig. 10.8

Tabla 10.8

Clases	O _i	Z	p _i	E _i
≤90	8	-1.40	0.0808	8.08
90,100]	15	-0.80	0.1311	13.11
100,110]	21	-0.20	0.2088	20.88
110,120]	23	+0.40	0.2347	23.47
120,130]	16	+1.00	0.1859	18.59
130,140]	9	+1.60	0.1039	10.39
>140	8	—	0.0548	5.48
	100		1	100.00

El valor calculado de χ^2 es

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^7 \frac{O_i^2}{E_i} - n = 101.9890 - 100 = 1.9890$$

El valor teórico para 4 grados de libertad (7 clases menos 3 restricciones, debidas a $\Sigma O_i = \Sigma E_i$ y a la estimación de μ y σ) es:

$$\chi^2_{0.95,4} = 9.488$$

Concluimos que la muestra proviene de una distribución Normal.

10.3 PRUEBA DE BONDAD DE AJUSTE NORMAL DE KOLMOGOROV-SMIRNOV

La prueba de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov es una alternativa para probar que una muestra proviene de una distribución continua (Normal). Esta prueba se basa en la comparación entre la función de distribución acumulada de una distribución teórica $F(x)$ con la función de distribución acumulada de la muestra $F_m(x)$.

Si las funciones de distribución acumulada teórica y muestral no son significativamente diferentes, entonces decimos que la muestra proviene de la Distribución cuya función de distribución acumulada es $F_T(x)$. Sin embargo, si las diferencias entre las funciones de distribución acumuladas son muy grandes como para que no sean debidas solamente al azar, rechazamos H_0 .

Los pasos a seguir en la prueba de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov son los siguientes:

- a) Plantear la hipótesis:

$$H_0: F_m(x) = F_T(x) \quad \forall x \in R$$

$$H_a: F_m(x) \neq F_T(x) \quad \text{por lo menos para un } x.$$

- b) Calcular todos los valores $F_m(x)$ de la muestra x_1, \dots, x_n .

- c) Determinar la desviación máxima

$$D = \sup \left| F_m(x) - F_T(x) \right|$$

entre $F_m(x)$ y $F_T(x)$

- d) Escoger un nivel de significación α (5%, 1% o semejante).

- e) Se acepta H_0 , si el valor calculado D es menor o igual que el valor de la tabla A-10 y se rechaza H_0 si el valor calculado D es mayor que el de la tabla.

Las suposiciones en la prueba de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov son:

- 1) Muestras aleatorias.
- 2) La distribución debe ser continua

- 3) La prueba no es válida si se tienen que estimar uno o más parámetros usando los datos de la muestra.

Ejemplo 10.6

La tabla 10.9 muestra las determinaciones de glucosa en la sangre de 36 hombres adultos no-obesos y aparentemente sanos. Deseamos probar si estos datos provienen de una distribución Normal con media de 80 y desviación estándar de 6.

Tabla 10.9 Valores de glucosa en la sangre de 36 adultos hombres no obesos, aparentemente sanos en (mg/100.ml)

75	92	80	80	84	72
84	77	81	77	75	81
80	92	72	77	78	76
77	86	77	92	80	78
68	78	92	68	80	81
87	76	80	87	77	86

Solución: La hipótesis apropiada es:

$$H_0 : F_m(x) = F_T(x) \quad \forall x \in (-\infty, +\infty)$$

$$H_a : F_m(x) \neq F_T(x) \quad \text{por lo menos para algún } x.$$

Los cálculos de $F_m(x)$ se muestran en la tabla 10.10.

Tabla 10.10 Valores de $F_m(x)$

x	frecuencia	Frecuencias acumuladas	$F_m(x)$ (Frecuencias acumuladas relativas).
68	2	2	0.0556
72	2	4	0.1111
75	2	6	0.1667
76	2	8	0.2222
77	6	14	0.3889

x	frecuencia	Frecuencias acumuladas	$f_m(x)$ (Frecuencias acumuladas relativas).
78	3	17	0.4722
80	6	23	0.6389
81	3	26	0.7222
84	2	28	0.7778
86	2	30	0.8333
87	2	32	0.8889
92	4	36	1.0000
		36	

Para obtener los valores de $F_T(x)$ debemos estandarizar los valores de x; esto es, pasarlos a z, este procedimiento es similar al usado en la prueba de bondad de ajuste con χ^2 . Véase, tabla 10.11.

Tabla 10.11 Cálculo de $F_T(x)$

x	$z = \frac{x - 80}{6}$	$F_T(x)$ (de columnas B y E)	
68	-2.00	0.0228	
72	-1.33	0.0918	
75	-0.83	0.2033	
76	-0.67	0.2514	columna B
77	-0.50	0.3085	
78	-0.33	0.3707	
80	0.00	0.5000	
81	0.17	0.5675	
84	0.67	0.7486	
86	1.00	0.8413	columna E
87	1.17	0.8790	
92	2.00	0.9772	

La tabla 10.12 nos muestra como calcular el valor

$$D = \sup \left\{ |F_T(x) - F_m(x)| \right\} = 0.1547$$

x	$F_m(x)$	$F_T(x)$	$ F_T(x_i) - F_m(x_i) $	$ F_T(x_i) - F_m(x_{i-t}) $
68	0.0556	0.0228	0.0328	0.0228
72	0.1111	0.0918	0.0193	0.0362
75	0.1667	0.2033	0.0366	0.0922
76	0.2222	0.2514	0.0292	0.0847
77	0.3889	0.3085	0.0804	0.0863
78	0.4722	0.3707	0.1015	0.0182
80	0.6389	0.5000	0.1389	0.0278
81	0.7222	0.5675	0.1547	0.0714
84	0.7778	0.7486	0.0292	0.0264
86	0.8333	0.8413	0.0080	0.0635
87	0.8889	0.8790	0.0099	0.0457
92	1.0000	0.9772	0.0228	0.0883

Para $\alpha = 5\%$ y $n=36$, buscamos el valor teórico en la tabla A-10 que es 0.2212 (valor interpolado) y como $D=0.1547 < 0.2212$ se acepta H_0 , por lo tanto la muestra proviene de una distribución Normal.

10.4 PRUEBA JI-CUADRADA DE INDEPENDENCIA-TABLAS DE CONTINGENCIA.

Otro uso de la distribución ji-cuadrada es la prueba de hipótesis de que dos criterios de clasificación, cuando son aplicados a las mismas unidades elementales, son independientes.

La clasificación en dos criterios de los mismos individuos se hace en las llamadas **Tablas de Contingencia**, en la cual las "f" filas representan los niveles de un criterio y las "c" columnas representan los niveles del otro criterio de clasificación. Por ejemplo, un criterio de clasificación puede ser los ingresos anuales por familia y el otro criterio las zonas donde viven los habitantes de una ciudad. Si los ingresos anuales por familia y las zonas donde viven **son independientes**, entonces

tendríamos que en todas las zonas de la ciudad vivirían la misma proporción de familias de bajos, medios y altos ingresos.

Una tabla de contingencia mostrando esta situación sería como la tabla 10.13

Tabla 10.13 Tabla de Contingencia de 4 x 3

ZONAS	INGRESOS			Total
	Bajos	Medios	Altos	
A	n_{11}	n_{12}	n_{13}	$n_{1\cdot}$
B	n_{21}	n_{22}	n_{23}	$n_{2\cdot}$
C	n_{31}	n_{32}	n_{33}	$n_{3\cdot}$
D	n_{41}	n_{42}	n_{43}	$n_{4\cdot}$
Total	$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	$n_{\cdot 3}$	n

Estamos interesados en probar la hipótesis nula de que en la población los dos criterios de clasificación son independientes. Si se rechaza, la hipótesis nula, concluimos que los dos criterios de clasificación **no son independientes** sino dependientes.

Un cuadro ij cualquiera de la tabla formado por la interacción de un nivel de uno de los criterios con un nivel del otro criterio se le llama *celda*. Las frecuencias observadas se designan por O_{ij} y las esperadas por E_{ij} . El estadígrafo de prueba viene dado por

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^c \sum_{i=1}^f \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \quad \text{con } (c-1)(f-1) \text{ grados de libertad}$$

Las frecuencias esperadas E_{ij} de una celda cualquiera ij se obtiene multiplicando la frecuencia relativa correspondiente a la fila i **por** la frecuencia relativa correspondiente a la columna j por el tamaño

de la muestra.

$$\text{Así } E_{ij} = \left(\frac{n_{i\cdot}}{n} \right) \left(\frac{n_{\cdot j}}{n} \right) (n) = \frac{(n_{i\cdot}) (n_{\cdot j})}{n} \text{ puesto que si}$$

son eventos independientes la probabilidad de la intersección es el producto de las probabilidades.

Si la tabla es de 2×2 ($c=2$ y $f=2$) los grados de libertad son $(2-1)(2-1)=1$ y se usa la fórmula corregida de Yates.

$$\chi_y^2 = \frac{n (|ad - bc| - \frac{n}{2})^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} \text{ con 1 grado de libertad.}$$

Tabla 10.14 Tabla de Contingencia de 2×2

2º criterio de clasificación	1er. criterio de clasificación		Total
	1	2	
1	a	b	$a + b$
2	c	d	$c + d$
Total	$a + c$	$b + d$	n

Ejemplo 10.7

Un equipo de investigación que quiere estudiar la relación entre el tipo de sangre y la severidad de cierta condición en una población, tomó una muestra de 1500 individuos y los clasificaron como se muestra en la tabla 10.15.

Tabla 10.15

	TIPO DE SANGRE				
	A	B	AB	0	TOTAL
Severidad de la condición					
Ausente	543	211	90	476	1320
Suave	44	22	8	31	105
Severa	28	9	7	31	75
Total	615	242	105	538	1500

Los investigadores desean saber si la severidad de la condición y el tipo de sangre son independientes. El primer paso en este análisis es calcular las frecuencias esperadas de cada celda, La frecuencia esperada para una persona con tipo de sangre AB y condición severa será:

$$\begin{aligned}
 E_{33} &= n \left[P(\text{sangre AB} \cap \text{condición severa}) \right] = n \left[P(\text{AB}) \cdot P(\text{cond. severa}) \right] \\
 &= 1500 \left[\left(\frac{105}{1500} \right) \left(\frac{75}{1500} \right) \right] \\
 &= \frac{(105)(75)}{1500} \\
 &= 5.25
 \end{aligned}$$

Las frecuencias esperadas se muestran en la tabla 10.16

Tabla 10.16 Frecuencias Observadas y Esperadas para el ejemplo 10.7

Severidad de la condición	TIPO DE SANGRE				Total
	A	B	AB	O	
Ausente	543 541.20	211 212.96	90 92.40	476 473.44	1320
Suave	44 43.05	22 16.94	8 7.35	31 37.66	105
Severa	28 30.75	9 12.10	7 5.25	31 26.90	75
TOTAL	615	242	105	538	1500

El valor calculado de χ^2 es:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^c \sum_{i=1}^f \frac{O_{ij}^2}{E_{ij}} - n = 1505.1163 - 1500 = 5.1163$$

El valor teórico para $a = 0.10$ y $(3 - 1) (4 - 1) = 6$ grados de libertad es 10.645 por lo que se acepta H_0 , por consiguiente, el tipo de sangre es independiente de la severidad de la condición.

E J E R C I C I O S

- 10.1 La serie mundial de "Baseball" puede durar 4,5,6 ó 7 juegos. Desde 1922, la distribución de frecuencias del número de juegos celebrados es

Número de juegos	4	5	6	7
Frecuencia	12	13	12	26

Pruebe la proposición de que 4, 5, 6 ó 7 juegos son igualmente probables.

- 10.2 De acuerdo con la fórmula de Hardy-Weinberg, el número de cierto tipo de moscas provenientes de ciertos cruces deberían estar en

2 2
las proporciones: $q^2 : 2pq : p^2$, donde $p+q = 1$. Si los resultados experimentales dan las frecuencias : 40, 50, 20 ; ¿Son estos resultados compatibles con la fórmula teórica, si para estimar q se usa la fórmula $\hat{q} = \frac{n_1 + (\frac{n_2}{2})}{n_1 + n_2 + n_3}$?

- 10.3 Una región petrolera se divide en 48 subáreas, al contar el número de pozos en cada subárea se obtuvieron los siguientes resultados:

# de pozos de petróleo	0	1	2	3	4	5	6	7 ó más
# de subáreas	5	10	11	10	6	4	0	2

En base a tales resultados, ¿puede concluirse que esta distribución obedece a la distribución de Poisson?

- 10.4 A falta de una tabla de números aleatorios, un investigador decide emplear una tabla de logaritmos naturales con cinco dígitos. El número de veces que aparece cada dígito en una muestra de tamaño $n=50$ se da en la siguiente tabla.

dígito	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
frecuencia	1	8	3	3	6	6	7	5	7	4

¿Puede afirmarse que los dígitos en la citada tabla se distribuyen aproximadamente con la misma frecuencia?

Use $\alpha = 0.05$

- 10.5 Un Ingeniero de control de calidad toma diariamente muestras de 10 componentes electrónicos y los revisa para ver sus imperfecciones. Si en 200 días de trabajo consecutivos obtuvo 112 muestras con 0 defectos, 76 muestras con 1 defecto y 12 muestras con 2 defectos, contrastar, si dichas muestras se pueden considerar como provenientes de una distribución binomial con $a = 0.05$

- 10.6 Supóngase que los datos siguientes representan recuentos de plancton en 100 partes alicuotas pequeñas de agua de mar.

recuento de plancton por parte alicuota	0	1	2	3	4
frecuencia	36	40	18	5	1

Probar la hipótesis de que los datos obedecen a una distribución de Poisson.

- 10.7 Un químico efectuó una separación a contracorriente (Técnica de Craig) de 100 mg de Mebendazol (Antihelmíntico) usando un total de 5 vasos . Encontrando que la cantidad total del Antihelmíntico en mg en cada vaso por espectrofotometría al ultravioleta, fueron las siguientes:

vaso	Mebendazol (mg)
1	0.011
2	0.344
3	4.805
4	29.500
5	65.340

¿Se ajustan estos datos a un modelo de distribución Binomial $\binom{n}{x}(0.9)^x(0.1)^{n-x}$ donde $n = 4$ y $x \in \{0,1,2,3,4\}$ en el cual, la cantidad esperada de Mebendazol en cada vaso, será la probabilidad respectiva de x en la expansión binomial multiplicada por 100?

- 10.8 Los datos siguientes son cuentas radiológicas en décimas de minuto con una misma fuente. Contrastar con $\alpha=0,05$ para ver si proceden de una distribución tipo Poisson.

2	4	3	3	3	1	1	4	3	5
4	1	0	0	4	3	1	2	3	2
2	2	3	5	5	4	3	0	1	2
1	1	1	0	3	2	1	1	2	3
2	2	3	2	3	5	4	2	2	3
1	4	1	0	4	2	2	3	0	3
1	4	3	0	3	1	4	3	2	3
2	3	0	2	2	1	2	2	2	4
3	3	3	2	1	2	2	1	0	4
3	2	0	1	1	1	5	2	2	0

- 10.9 La primera página de las historias clínicas contienen 10 espacios en blanco para ser llenados. Una muestra de 100 historias clínicas reveló la siguiente distribución de errores en la primera pagina:

# errores en un total de 10 entradas	# de historias clínicas
0	8
1	25
2	32
3	24
4	10
5 ó más	1

Pruebe que estos datos están distribuidos Binomialmente.

- 10.10 Los siguientes datos son las cantidades de microorganismos encontrados en 100 muestras de agua tomadas de un pozo.

# de microorganismos por muestra	f
0	15
1	30
2	25
3	20
4	5
5	4
6	1
7 ó más	0
	100

Pruebe la hipótesis de que los datos fueron tomados de una distribución de Poisson.

- 10.11 Aplique la prueba de bondad de ajuste normal de Kolmogorov-Smirnov a las siguientes 500 determinaciones de la longitud de onda de la luz. O_i y E_i son las frecuencias observadas y esperadas, respectivamente para las diferentes longitudes de onda,

O_i	5	12	43	61	105	103	89	54	19	7	2
E_i	5	14	36	69	102	109	85	50	21	7	2

- 10.12 Pruebe la hipótesis de que la población de la que se ha tomado la siguiente muestra es normal (x = resistencia a la tensión en Kg/mm^2 de láminas de acero de 0.3 mm de espesor)

X	frecuencia
$< - \infty , 42.0]$	15
$< 42.0 , 42.5]$	11
$< 42.5 , 43.0]$	15
$< 43.0 , 43.5]$	14
$< 43.5 , 44.0]$	23
$< 44.0 , 44.5]$	19
$< 44.5 , 45.0]$	12
$< 45.0 > + \infty >$	19

- 10.13 Los siguientes datos representan la altura en centímetros de 300 niñas de 8 años. Pruebe la hipótesis nula de que los datos fueron extraídos de una población normalmente distribuida con $a = 0.05$, usando la prueba ji-cuadrada.

altura (cm)	f
$< \infty , 110]$	5
$< 116 , 118]$	10
$< 118 , 120]$	14
$< 120 , 122]$	21
$< 122 , 124]$	30
$< 124 , 126]$	40

altura (cm)	f
$< 126 , 128]$	45
$< 128 , 130]$	43
$< 130 , 132]$	42
$< 132 , 134]$	30
$< 134 , 136]$	11
$< 136 , 138]$	5
$< 138 > + \infty >$	4

- 10.14 En un estudio reciente se averiguó que la trisomía 21 en los niños venía asociado con la hepatitis infecciosa (HI) de la madre durante el embarazo. Supóngase que en un estudio de 2000 futuras madres tomadas al azar, se obtuvo la siguiente tabla tras los nacimientos de los niños.

		Niño	
		Con Trisomía 21	Sin Trisomía 21
Madre	con HI	26	34
	sin HI	4	1936

Efectúe un análisis estadístico para determinar si la Trisomía 21 depende de que la madre haya sufrido hepatitis o no.

- 10.15 Supóngase que se conjectura que el color de los ojos está relacionado con la ocurrencia de desprendimiento de retina. Se comparan 100 individuos escogidos al azar entre sanos, con 100 individuos con desprendimiento de retina y los resultados son:

		Color de Ojos		
		Azul	Marrón	Otro
DESPRENDIMIENTO DE RETINA.	SI	32	51	17
	NO	37	40	23

Enunciar y contrastar la hipótesis apropiada.

- 10.16 Se hacen las dos siguientes preguntas a 100 personas:

- 1) ¿ Fuma usted mucho?
- 2) ¿ Tose usted por las mañanas?

Las respuestas son:

		Fuma mucho	
		Si	No
Tos	Si	63	12
	No	7	18

Enuncie y contraste la hipótesis correspondiente.

- 10.17 Se entrevistó a un millar de personas para determinar que tipo de analgésico prefieren (aspirina, aspirina cubierta con capa entérica u otros analgésicos en tableta). En la siguiente tabla se resumen las observaciones:

	Aspirina	Cubierta	Otros
Hombres	196	131	158
Mujeres	223	116	176

Pruebe con $\alpha = 0.01$ la independencia entre el sexo del adulto y el tipo de analgésico favorecido.

- 10.18 Se ha tomado una muestra de cada una de dos máquinas que envuelven caramelos:

Máquina	Rosado	Lila	Amarillo	Anaranjado	Verde	Blanco
A	11	7	6	5	7	3
B	6	7	10	7	3	6

Pruebe la independencia de la mezcla de colores con la máquina que los envuelve, con $\alpha = 0.01$

- 10.19 Se llevó a cabo un experimento para determinar si la cantidad de metal removido es la misma, a dos temperaturas diferentes, en un baño limpiador de ácido nítrico. Los resultados observados son los siguientes y representan el grosor de metal removido expresado en 0.001 pulgadas:

Temperatura	Cantidad de metal removido						
	90°	2.3	2.7	2.9	2.7	2.6	2.4
	120°	2.2	2.4	2.0	1.9	2.1	2.0

Pruebe la hipótesis de que la temperatura no afecta la cantidad de metal removido con un 5% de significancia.

- 10.20 ¿Es la ceguera independiente del sexo en una población de la que se ha tomado la siguiente muestra?

	Masculino	Femenino
Normal	442	514
Ciego	38	6

- 10.21 ¿Se relaciona la actitud disciplinaria del padre con el comportamiento de los hijos? (Datos del Tribunal de Jóvenes de la Ciudad de Nueva York)

Actitud del padre	Comportamiento del hijo	
	Delincuente	No Delincuente
Firme pero cariñoso	26	255
Indisciplinado	122	82
Demasiado estricto	120	40
Errático	191	82

PARTE V

ANALISIS DE VARIANZA - REGRESION Y CORRELACION

CAPITULO 11: ANALISIS DE VARIANZA

11.1 ¿QUE ES EL ANALISIS DE VARIANZA?

En este capítulo se desarrollarán métodos para contrastar las diferencias entre las *medias de más de dos poblaciones*.

Frecuentemente, las circunstancias hacen necesario diseñar un experimento de tal forma que varias variables o poblaciones puedan estudiarse simultáneamente. Si deseamos investigar las diferencias entre cinco medias, se podría sugerir en primera instancia, el uso de la distribución t de student para contrastar los diez pares de medias por separado. Hay varias razones por las cuales éste no es un buen procedimiento estadístico. Primera, la cantidad de trabajo involucrado en estos diez contrastes es considerable, pero valdría la pena hacerlo solamente si no existiera un método más eficiente para el análisis, además de que el uso de la distribución t de student en este caso conduciría a una conclusión falsa. Por otra parte, si seleccionamos un nivel de significación del 5% para cada uno de estos diez contrastes, la probabilidad de aceptar una hipótesis de no diferencia en cada caso sería de 0.95 y si estos diez eventos fueren independientes se tendría que la probabilidad de aceptar la no diferencia en los diez casos sería $(0.95)^{10} = 0.5937$; por lo tanto, la probabilidad de rechazar cuando menos una de estas hipótesis de no diferencia sería $1 - 0.5937 = 0.4013$ y el error de Tipo I sería del 40%. En la práctica el problema se vuelve aún más complicado porque no todos los contrastes de nares son independientes.

Así, hemos visto que es necesario un método más eficiente para comparar más de dos medias. El análisis de varianza (ANDEVA) es el método que necesitamos

El *análisis de varianza* (ANDEVA) se puede definir como *una técnica mediante la cual la variación total presente en un conjunto de datos se divide en varias componentes, cada una de las cuales tiene asociada*

una fuente de variación específica, de manera que en el análisis es posible conocer la magnitud de las contribuciones de cada fuente de variación a la variación total.

El desarrollo del análisis de varianza se debe principalmente a los trabajos de Sir R. A. Fisher realizados entre 1912 y 1962,

El análisis de varianza se aplica ampliamente en la investigación, pues está intimamente relacionado con el *Diseño Experimental*. Aunque aquí no se estudia el Diseño de Experimentos, algunos conceptos relacionados con el Diseño aparecerán a lo largo de este capítulo. La relación entre estos dos tópicos se puede resumir diciendo, que cuando se diseña un experimento el cual queremos someter a un análisis, los investigadores pueden, antes de llevar a cabo su investigación, identificar aquellas fuentes de variación que consideran importantes y pueden seleccionar un modelo que les permita medir la extensión de la contribución de esas fuentes a la variación total.

El análisis de varianza puede ser usado para dos tipos de análisis : (a) para estimar y contrastar hipótesis acerca de varianzas, y (b) para estimar y contrastar hipótesis acerca de medias. Nosotros lo usaremos para contrastar hipótesis acerca de inédias; sin embargo, *nuestras conclusiones acerca de las medias dependerán de la magnitud de las varianzas observadas.*

En el análisis de varianza a las variables se les suele llamar factores y a los diferentes niveles de cada variable o factor se les llama tratamientos o categorías.

Discutiremos cuatro modelos: (1) Análisis de varianza de un factor (una variable de clasificación) en el Diseño Completamente Aleatorio. (2) Análisis de Varianza de un factor (una variable de clasificación) en el Diseño de Bloques Aleatorios Completos. (3) Análisis de Varianza de dos factores en el Diseño Completamente Aleatorio y (4) Cuadrados Latinos.

11.2 LAS SUPOSICIONES EN EL ANALISIS DE VARIANZA

Las suposiciones en el análisis de varianza son fundamentalmente: la normalidad de las distribuciones, igualdad de varianzas, muestreo aleatorio y datos de tipo cuantitativo.

En los casos prácticos no es posible asegurar que se satisfacen las suposiciones, pero en general es posible tener una buena idea de qué tan razonables son para los datos. Como ilustración, se ha demostrado que los métodos inferenciales del capítulo 9 no se ven seriamente afectados por desviaciones moderadas de la normalidad, pero sería poco razonable suponer que la distribución de X es aproximadamente normal si sólo toma tres valores, digamos $X = 10, 11$ y 12 .

La suposición de igualdad de varianzas para los diferentes tratamientos debe satisfacerse aproximadamente, aunque la violación de esta suposición no es muy seria si los tamaños de muestra de los diferentes tratamientos son iguales. Sin embargo, si la respuesta es binomial, se sabe que la varianza de una proporción (σ_p^2) depende del valor de p . Entonces la varianza varía de un tratamiento a otro y no se satisface la suposición del análisis de varianza.

Una situación semejante se presenta cuando las respuestas tienen una distribución de Poisson (digamos el número de accidentes de trabajo por mes en una planta industrial) en cuyo caso las varianzas de las respuestas son iguales a las medias ($\sigma^2 = \lambda = \mu$). En consecuencia los datos de respuesta de Poisson violan las suposiciones del análisis de varianza.

Los datos que no se pueden medir no pueden usarse en el análisis de varianza. Por ejemplo, muchas respuestas no pueden medirse pero se pueden ordenar o jerarquizar. Los estudios de productos producen generalmente resultados de este tipo. Es posible saber que una persona le gusta más el producto A que el B y le gusta más el B que el C, pero no es posible asignar cantidades al grado de preferencia.

¿Qué se puede hacer cuando los datos no satisfacen las suposiciones?. Por ejemplo, supóngase que las varianzas de las respuestas para diferentes tratamientos no son iguales. Esta situación puede arreglarse transformando las mediciones. Es decir, en lugar de usar las mediciones originales, se podrían usar las raíces cuadradas, logaritmos o alguna otra función. Se han encontrado transformaciones que tienden a estabilizar la varianza de la respuesta y al mismo tiempo hacen que las distribuciones de probabilidad de las respuestas transformadas estén más cerca de la normalidad.

Cuando es *imposible* lograr que se satisfagan las suposiciones del análisis de varianza, se deben utilizar procedimientos NO-PARAMETRICOS de pruebas de hipótesis. Estos procedimientos se basan en las magnitudes comparativas de las mediciones y son *casi tan* eficientes y poderosos para detectar diferencias de tratamientos como las pruebas que se presentan en este capítulo y las presentadas en el capítulo 9. En el capítulo 13 se estudian algunos métodos no-paramétricos.

11.3 ANALISIS DE VARIANZA DE UN FACTOR EN EL DISEÑO COMPLETAMENTE ALEATORIO:

Este modelo supone que hay K poblaciones distintas A_1, A_2, \dots, A_K normalmente distribuidas con medias $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K$ que poseen todas la misma varianza σ^2 . Además suponemos que estas K poblaciones constituyen juntas una gran población con media μ , llamada *Gran Media* (media poblacional).

Deseamos probar la hipótesis nula de que todas las medias de tratamientos o categorías son iguales, es decir:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_k = \mu$$

H_A : no todas las u. son iguales.

Si esta hipótesis nula es cierta esperaríamos que todas las $\mu_j = \mu$; en caso contrario, esperaríamos que las μ_j se desviaran de μ en una cantidad τ_j debida a los tratamientos, entonces podemos escribir

$$\tau_j = \mu_j - \mu \quad \text{y} \quad \mu_j = \mu + \tau_j \quad \dots \quad (11.1)$$

Por razones obvias, a estas desviaciones se les denomina **efectos de tratamiento**. Además por una propiedad de la Media Aritmética, tenemos

$$\sum_j \tau_j = \sum_j (\mu_j - \mu) = 0$$

.Por otra parte, si X_{ij} es la i -ésima observación que recibe el j -ésimo tratamiento, entonces tenemos que debido a fluctuaciones usuales en el muestreo al azar, las X_{ij} se desviarán dentro de su propio grupo de las μ_j , a estas desviaciones las llamaremos **error residual** y las representaremos por ϵ_{ij} , entonces:

$$\epsilon_{ij} = X_{ij} - \mu_j \quad \text{y} \quad X_{ij} = \mu_j + \epsilon_{ij} \quad \dots \quad (11.2)$$

Sustituyendo la ecuación (11.1) en (11.2) obtenemos una relación para una observación individual:

$$X_{ij} = \mu_j + \epsilon_{ij} = (\mu + \tau_j) + \epsilon_{ij} \quad \dots \quad (11.3)$$

Finalmente, sabemos que cada observación X_{ij} difiere de la media de la población μ ; así tenemos el modelo básico para el Diseño Completamente Aleatorio de una variable de la siguiente forma:

$$X_{ij} - \mu = \tau_j + \epsilon_{ij} \quad \dots \quad (11.4)$$

Sustituyendo (11.1) y (11.2) en (11.4) se tiene:

$$X_{ij} - \mu = (\mu_j - \mu) + (X_{ij} - \mu_j) \quad \dots \quad (11.5)$$

$$i = 1, 2, \dots, n_j \quad \text{y} \quad j = 1, 2, \dots, K$$

Observando nuestro modelo, vemos que la **desviación de una observación con relación a la gran media (desviación total)** se descompone en **efecto de tratamiento** (desviación entre tratamientos) o desviación de cada tratamiento con relación a la gran media y, **error residual** (desviación dentro de tratamientos) o desviación de cada observación con relación a su propio grupo.

CALCULOS:

Para facilitar los cálculos se dispondrán los datos en una tabla como la que se muestra a continuación (Tabla 11.1) y se introduce la **Notación de puntos**.

Tabla 11.1
Tabla de valores de muestras para el Diseño
Completamente Aleatorio

T R A T A M I E N T O S

	1	2	3.....	K	
	x_{11}	x_{12}	$x_{13}.....$	x_{1K}	
	x_{21}	x_{22}	$x_{23}.....$	x_{2K}	
	x_{31}	x_{32}	$x_{33}.....$	x_{3K}	

	x_{n_11}	x_{n_22}	$x_{n_33}.....$	x_{n_KK}	Gran total
Tamaño de muestra	n_1	n_2	n_3	n_K	N
Sumas	$x_{\cdot 1}$	$x_{\cdot 2}$	$x_{\cdot 3}$	$x_{\cdot K}$	$x_{\cdot \cdot}$
Medias	$\bar{x}_{\cdot 1}$	$\bar{x}_{\cdot 2}$	$\bar{x}_{\cdot 3}$	$\bar{x}_{\cdot K}$	$\bar{x}_{\cdot \cdot}$

Los símbolos usados en esta tabla están definidos por:

X_{ij} = i-ésima observación recibiendo el j-ésimo tratamiento,
 $i = 1, 2, \dots, n_j : j = 1, 2, \dots, K.$

$\bar{X}_{\cdot j} = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}}{n_j} =$ suma del j-ésimo tratamiento (j -ésima columna)

$\bar{X}_{\cdot j} = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}}{n_j} =$ media del j-ésimo tratamiento

$\bar{X}_{..} = \frac{\sum_{j=1}^K \bar{X}_{\cdot j}}{N} = \frac{\sum_{j=1}^K (\sum_{i=1}^{n_j} X_{ij})}{N} =$ suma de todas las observaciones

$\bar{X}_{..} = \frac{\sum_{j=1}^K \bar{X}_{\cdot j}}{N} =$ Gran media.

Como definimos anteriormente el análisis de varianza es un proceso donde la variación total de un conjunto de datos se divide en componentes procedentes de diferentes fuentes. Aquí entendemos **variación como la suma de cuadrados de las desviaciones de las observaciones con relación a sus respectivas medias o simplemente "Sumas de Cuadrados"**.

Observemos que la identidad correspondiente a nuestro modelo (ecuación 11.5) para muestras es:

$$X_{ij} - \bar{X}_{..} = (\bar{X}_{\cdot j} - \bar{X}_{..}) + (X_{ij} - \bar{X}_{\cdot j})$$

Si elevamos al cuadrado los términos de ambos miembros de esta ecuación y sumamos, obtenemos las distintas sumas de cuadrados:

$$(X_{ij} - \bar{X}_{..})^2 = (\bar{X}_{\cdot j} - \bar{X}_{..})^2 + (X_{ij} - \bar{X}_{\cdot j})^2 + 2(\bar{X}_{\cdot j} - \bar{X}_{..})(X_{ij} - \bar{X}_{\cdot j})$$

$$\sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{..})^2 = \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{X}_{\cdot j} - \bar{X}_{..})^2 + \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{\cdot j})^2 + 2 \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{X}_{\cdot j} - \bar{X}_{..})(X_{ij} - \bar{X}_{\cdot j})$$

El ultimo término se puede escribir como

$$2 \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{X}_{\cdot j} - \bar{X}_{\dots}) \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{\cdot j}) , \text{ pero } \sum_{j=1}^K (\bar{X}_{\cdot j} - \bar{X}_{\dots}) = 0$$

$$\text{y } \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{\cdot j}) = 0 \quad \text{por una propiedad de la media aritmética.}$$

Entonces la suma de cuadrados se reduce a:

$$\sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{\dots})^2 = \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{X}_{\cdot j} - \bar{X}_{\dots})^2 + \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{\cdot j})^2$$

$$= \sum_{j=1}^K n_j (\bar{X}_{\cdot j} - \bar{X}_{\dots})^2 + \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{\cdot j})^2$$

donde:

$$\sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{\dots})^2 = SC_{\text{total}} = \text{es la suma de cuadrados total}$$

$$\sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{X}_{\cdot j} - \bar{X}_{\dots})^2 = SC_{\text{trat.}} = \text{es la suma de cuadrados entre tratamientos}$$

$$\sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{\cdot j})^2 = SC_{\text{error}} = \text{es la suma de cuadrados dentro tratamientos o debida a error residual.}$$

Se puede demostrar fácilmente, usando propiedades de las sumatorias que:

$$SC_{\text{total}} = \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{\dots})^2 = \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}^2 - \frac{\bar{X}_{\dots}^2}{N}$$

$$SC_{trat.} = \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{X}_{ij} - \bar{X}_{\cdot j})^2 = \sum_{j=1}^K \frac{\bar{x}_{\cdot j}^2}{n_j} - \frac{\bar{x}_{\cdot \cdot}^2}{N}$$

$$SC_{error} = \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{X}_{\cdot j})^2 = \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - \sum_{j=1}^K \frac{\bar{x}_{\cdot j}^2}{n_j}$$

El lector reconocerá que estas sumas de cuadrados son los numeradores de las varianzas respectivas, que en ANDEVA son llamadas **Cuadrados Medios.**

A partir de las sumas de cuadrados que acabamos de construir es posible obtener dos estimadores insesgados de la varianza poblacional σ^2 . Se puede demostrar que cuando las medias de los tratamientos son iguales (H_0 verdadera) tanto la suma de cuadrados de los tratamientos como la suma de cuadrados del error divididas entre sus respectivos grados de libertad proporcionan estimadores insesgados e independientes de σ^2 .

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{X}_{\cdot j})^2}{n_j - 1} \quad \text{proporciona un estimador insesgado de la varianza de su grupo y bajo el supuesto de que las varianzas de los grupos (tratamientos) son iguales se pueden ponderar las varianzas de los } K \text{ grupos para obtener:}$$

$$\frac{\sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{X}_{\cdot j})^2}{\sum_{j=1}^K (n_j - 1)} = \frac{\sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{X}_{\cdot j})^2}{N - K} = S_{error}^2 = CM_{error}$$

que es la varianza dentro de tratamientos o varianzas del error o Cuadrado Medio del error.

El segundo estimador de σ^2 se obtiene de la conocida varianza de medias (Teorema del Límite Central) $\frac{\sigma^2}{N} = \sigma^2 / n$ que al despejar σ^2 se

tiene $\sigma_{\bar{X}}^2 = n \frac{\sigma^2}{K}$. Pero, un estimador insesgado de $\sigma_{\bar{X}}^2$ calculado de nuestras K muestras es:

$$s_{\bar{X}}^2 = \frac{\sum_{j=1}^K (\bar{X}_{\cdot j} - \bar{X}_{..})^2}{K - 1}$$

De donde $n s_{\bar{X}}^2 = \frac{n \sum_{j=1}^K (\bar{X}_{\cdot j} - \bar{X}_{..})^2}{K - 1}$

El lector podrá reconocer que el numerador de esta expresión es la suma de cuadrados entre tratamientos para el caso particular en que todos los tratamientos tienen el mismo tamaño n. Esta suma de cuadrados dividida entre los correspondientes grados de libertad K - 1, es llamada la **varianza entre tratamientos o Cuadrado Medio entre tratamientos.**

Si la hipótesis nula es cierta, se esperará que estos dos estimadores de σ^2 sean aproximadamente iguales y el cociente

$$\frac{CM_{trat.}}{CM_{error}} = \frac{s_{trat.}^2}{s_{error}^2}$$

que es una variable F de Fisher será la unidad o casi la unidad. Por el contrario si H_0 es falsa; es decir, si los efectos de tratamiento no son nulos, esta razón tenderá a ser significativamente mayor que la unidad. Así, se rechazará H_0 si

$$\frac{CM_{trat.}}{CM_{error}}$$

es mayor que la F de tablas: (F teórica) $F_{1-\alpha, gl.trat., gl.error}$,

donde $gl_{trat.} = K - 1$

$$gl_{error} = N - K$$

Todo lo anterior se puede sintetizar en una tabla llamada TABLA DE ANDEVA.

Tabla III .2

TABLA DE ANDEVA PARA EL DISEÑO COMPLETAMENTE ALEATORIO

fuente de variación	Grados de libertad g.l.	Sumas de Cuadrados (SC)	Varianza σ^2 Cuadrados Medios (CM)	F calc	F teórica
"entre" tratamientos	K - 1	$\sum_{j=1}^K \frac{X_{\cdot j}^2}{n_j} - \frac{X_{\cdot \cdot}^2}{N} = SC_{trat}$	$CM_{trat} = \frac{SC_{trat}}{K-1}$	$F_{calc} = \frac{CM_{trat}}{CM_{error}}$	$F_{teórica} = F_{1-\alpha, K-1, N-K}$
"dentro" tratamientos o error residual	N - K	$\sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}^2 - \sum_{j=1}^K \frac{X_{\cdot j}^2}{n_j} = SC_{error}$	$CM_{error} = \frac{SC_{error}}{N-K}$		
Total	N - 1	$\sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}^2 - \frac{X_{\cdot \cdot}^2}{N} = SC_{total}$			

Ejemplo 11.1:

Supongamos que una compañía industrial ha adquirido tres máquinas nuevas de diferentes marcas y desea determinar si son diferentes en producción de cierto producto. Los datos indican el número de unidades producidas durante 1 hora por cada máquina; las observaciones se hicieron al azar y los datos se muestran en la tabla 11.3. Use $\alpha = 0.05$.

Tabla 11.3

Producción por hora de tres máquinas durante cinco horas								
M	A	Q	U	I	N	A	S	
			A_1	A_2		A_3		
			25		31		24	
			30		39		30	
			36		38		28	
			38		42		25	
			31		35		28	
Tamaño de muestra: n_j 5 5 5 N = 15								
Sumas: $X_{\cdot j}$ 160 185 135 $X_{\cdot \cdot} = 480$								
Medias: $\bar{X}_{\cdot j}$ 32 37 27 $\bar{X}_{\cdot \cdot} = 32$								

Los cálculos se resumen en la tabla 11.4 y a continuación se toma una decisión.

Decisión:

Como F_{calc} es mayor que $F_{\text{teórica}}$ se rechaza H_0 , por lo que concluimos que la producción de las tres máquinas es significativamente diferente al 5% de significación.

Tabla III.4

TABLA DE ANDEVA. Para la producción por hora de tres máquinas durante cinco horas

Fuente de Variación	g.l.	S.C.	C.M.	$F_{calc.}$	$F_{teórica}$
Tratamiento-Máquinas	$3 - 1 = 2$	$\frac{(160)^2}{5} + \frac{(185)^2}{5} + \frac{(135)^2}{5} - \frac{(480)^2}{15} =$ $15610 - 15360 = 250$	$\frac{250}{2} = 125$	$\frac{125}{16.6667} =$ F	$0.95, 2, 12$
Error	$15 - 3 = 12$	$(25)^2 + (30)^2 + (36)^2 + \dots + (25)^2 + (28)^2 - 15610$ $15810 - 15610 = 200$	$\frac{200}{12} = 16.6667$	$= 7.50$	$= 3.89$
Total	$15 - 1 = 14$	$15810 - 15360 = 450$	—	—	—

Ejemplo 11.2:

Una compañía que fabrica computadoras ha instituido cuatro programas diferentes de entrenamiento para los empleados que trabajan en operaciones de ensamblado. Veinte y cuatro trabajadores repartidos en grupos de seis, tomaron los programas de entrenamiento. Después del entrenamiento, se registraron los tiempos medios necesarios para el ensamblado de un determinado circuito, para cada uno de los trabajadores. Cuatro trabajadores renunciaron a su empleo durante el programa de entrenamiento. Los datos aparecen en la tabla 11.5.

Tabla 11.5

Tiempo medio de ensamblado (min.) de veinte trabajadores sometidos a cuatro programas de entrenamiento.

PROGRAMAS DE ENTRENAMIENTO					
A	B	C	D		
60	30	97	67		
80	31	84	84		
69	73	93	90		
65	69	79	78		
	75	92	61		
	72				
<hr/>					
n_j	4	6	5	5	$N = 20$
$\bar{x}_{\cdot j}$	274	450	445	380	$\bar{x}_{\cdot \cdot} = 1549$
$\bar{x}_{\cdot j}$	63.5	75.0	89.0	76.0	$\bar{x}_{\cdot \cdot} = 77.45$

Los cálculos se encuentran en la tabla de ANDEVA que se muestra a continuación (Tabla 11.6).

Tabla 11.6

Tabla de ANDEVA para los datos de los programas de entrenamiento.

Fuente	g. 1.	SC	M	F calc.	F teor.
Programas de Entrenamiento	$4 - 1 = 3$	$121,004 - 119,970.05 =$ 1033.95	$\frac{1033.95}{3} = 344.65$		$F_{teor.} = 3.24$
Error	$20 - 4 = 16$	$122,115 - 121,004 = 1111$	$\frac{1111}{16} = 69.44$		
Total	$20 - 1 = 19$	$122,115 - 119,970.05 =$ 2144.95	—		

$$F_{teor.} = 3.24$$

$$F_{calc.} = \frac{344.65}{69.4375} = 4.96$$

Decisión:

Puesto que $F_{\text{calc}} = 4.96 > 3.24$ se rechaza H_0 , lo cual indica que hay diferencia significativa entre los tiempos de ensamblado para los cuatro programas de entrenamiento. Sin embargo, hay que aclarar que quizás estas diferencias no se deban totalmente a los programas sino a otros factores, como habilidad, inteligencia o interés de los trabajadores aún en el caso de que hayan sido asignados al azar a los cuatro programas de entrenamiento.

Ejemplo 11.3:

Una empresa tiene cuatro plantas y sabe que la planta A satisface los requisitos impuestos por el gobierno para el control de desechos de fabricación, pero quisiera determinar cuál es la situación de las otras tres. Para el efecto se toman cinco muestras de los líquidos residuales de cada una de las plantas y se determina la cantidad de contaminantes. Los resultados del experimento aparecen en la tabla 11.7

Tabla. 11.1

Cantidad de contaminantes para cuatro plantas de una empresa

Planta	contaminantes					n_i	X_i	\bar{X}_i
A	1.65	1.72	1.50	1.37	1.60	5	7.84	1.568
B	1.70	1.85	1.46	2.05	1.80	5	8.86	1.772
C	1.40	1.75	1.38	1.65	1.55	5	7.73	1.546
D	2.10	1.95	1.65	1.88	2.00	5	9.58	1.916
Total: N = 20 $\sum X_i = 34.01$								$\bar{X} = 1.7005$

Los cálculos se muestran en la tabla de ANDEVA siguiente (tabla 11.8).

Tabla 11.8

Tabla de ANDEVA para los contaminantes

Fuente	g.1.	SC	CM	$F_{\text{calc.}}$	$F_{\text{teor.}}$
Plantas	$4 - 1 = 3$	$58.2989 - 57.834 = 0.4649$	0.1550	$F = \frac{0.1550}{0.0298}$	$F_{0.95, 3, 16} = 3.24$
Error	$20 - 4 = 16$	$58.7757 - 58.2989 = 0.4768$	0.0298		
Total	$20 - 1 = 19$	$58.7757 - 57.834 = 0.9417$		= 5.20	

Decisión:

Puesto que $F_{calc.} > F_{teor.}$, se rechaza H_0 , por lo que concluimos que hay diferencia significativa (al 5%) entre las cantidades medias de contaminantes para las diferentes plantas.

11.4 PRUEBAS DE SIGNIFICACION DE DIFERENCIAS ENTRE PARES DE MEDIAS:

Cuando rechazamos la hipótesis nula de no diferencia de más de dos medias ($H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_K$) en un análisis de varianza surge la pregunta acerca de cuales pares de medias son diferentes, puesto que el rechazo de una hipótesis nula con cuatro tratamientos ($H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$) podría deberse a uno o varios de los seis pares de diferencias que se pueden tener, esto es: $\mu_1 \neq \mu_2$ ó $\mu_1 \neq \mu_3$ ó $\mu_1 \neq \mu_4$ ó $\mu_2 \neq \mu_3$ ó $\mu_2 \neq \mu_4$ ó $\mu_3 \neq \mu_4$.

Existen varios procedimientos para determinar cuales son los pares de medias que son diferentes. El primero de estos procedimientos y el más usado en el pasado es el de la **Diferencia Significativa Mínima** (D.S.M.) publicado por Fisher en 1935 en su libro **The Design of Experiments**. Este procedimiento es una extensión de la prueba t de Student para el caso de comparación de dos medias con varianza ponderada.

Otros procedimientos más recientemente usados para el mismo propósito son : la prueba de **Student-Neuman-Keuls**, la prueba de **Diferencia Significativa Honesta de Tukey** (D.S.H.), la prueba del **Rango Múltiple de Duncan** y la prueba de **Scheffé** entre otras. Véase Steel and Torrie y Federer.

A continuación desarrollamos algunas de estas pruebas.

11.4.1 PRUEBA DE LA DIFERENCIA SIGNIFICATIVA MINIMA DE FISHER (D.S.M.)

Cuando el Análisis de Varianza indica la existencia de una diferencia significativa, deseamos conocer cual de los pares de medias causa

la diferencia. Cuando las muestras (tratamientos) son de igual tamaño, la **Diferencia Significativa Mínima** (D.S.M.) de Fisher nos ayuda a localizar esta fuente.

La Diferencia Significativa Mínima (D.S.M.) se define como la diferencia mínima que podría existir entre dos medias de muestras significativamente diferentes. Para derivar una fórmula para DSM, recordemos que la prueba t de Student para la diferencia entre dos medias cuando las varianzas son iguales tiene por estadígrafo

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_{\Delta\bar{X}}} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}$$

Si este valor calculado es mayor que el valor teórico (de tablas) decimos que la diferencia entre μ_1 y μ_2 es significativa. Así, DSM puede considerarse como la menor de las diferencias $|\bar{X}_i - \bar{X}_j|$ es decir

$$DSM = |\bar{X}_i - \bar{X}_j| = t S_{\Delta\bar{X}}$$

Además, si se supone $n_i = n_j = n$ y $S_i^2 = S_j^2$

$$S_{\Delta\bar{X}} = \sqrt{\frac{S_i^2}{n_i} + \frac{S_j^2}{n_j}} = \sqrt{\frac{2 S^2}{n}}$$

donde $t = t_{1-\frac{\alpha}{2}, gl_{\text{error}}}$ y $S^2 = CM_{\text{error}} = S_{\text{error}}^2$

Por lo tanto, tenemos

$$DSM = t_{1-\frac{\alpha}{2}, gl_{\text{error}}} \sqrt{\frac{2 S_{\text{error}}^2}{n}}$$

Ejemplo 11.4:

Apliquemos la DSM de Fisher a los resultados del ejemplo 11.3.

$$\text{DSM} = t_{0.975, 16} \sqrt{\frac{2(0.0298)}{5}} = 2.1199 \sqrt{0.0119}$$

$$\text{DSM} = 0.0253$$

Los valores absolutos de las diferencias entre \bar{X}_1 , \bar{X}_2 , \bar{X}_3 y \bar{X}_4 del ejemplo 11.3 se muestran en la tabla 11.9

Tabla 11.9

DIFERENCIAS ENTRE \bar{X}_1 , \bar{X}_2 , \bar{X}_3 y \bar{X}_4 del ejemplo 11.3

	\bar{X}_1	\bar{X}_2	\bar{X}_3	\bar{X}_4
\bar{X}_1	—	0.204	0.022	0.348
\bar{X}_2	—	—	0.226	0.144
\bar{X}_3	—	—	—	0.370
\bar{X}_4	—	—	—	—

Como podemos observar todas las diferencias excepto $|\bar{X}_1 - \bar{X}_3|$ son mayores que DSM, por lo que las diferencias:

$$\left. \begin{array}{l} |\mu_1 - \mu_2| \\ |\mu_1 - \mu_4| \\ |\mu_2 - \mu_3| \\ |\mu_2 - \mu_4| \\ |\mu_3 - \mu_4| \\ |\mu_1 - \mu_3| \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{son significativas} \\ \\ \\ \\ \\ \text{no es significativa.} \end{array}$$

Es importante tener presente que la prueba DSM *solo debe ser empleada cuando el ANOVA ha conducido al rechazo de H_0* . En el caso de que los tratamientos no sean de igual tamaño no se puede usar DSM.

11.4.2 PRUEBA DE DIFERENCIA SIGNIFICATIVA HONESTA (DSH) DE TUKEY.

La prueba de *Diferencia Significativa Honesta [DSH] de Tukey*, al igual que la DSM solo se puede usar después que se ha rechazado la hipótesis nula en el Análisis de Varianza y cuando los tamaños de muestra son todos iguales; pero a diferencia de la DSM emplea el valor $q_{\alpha, K, gl_{\text{error}}}$ en vez de $t_{1-\frac{\alpha}{2}, gl_{\text{error}}}$. Este valor q se obtiene de la tabla A-9, para el nivel de significación α , el número de tratamientos K y los grados de libertad del error, entonces:

$$DSH = q_{\alpha, K, gl_{\text{error}}} \sqrt{\frac{s^2_{\text{error}}}{n}}$$

Para los datos del ejemplo 11.3 y $\alpha = 0.05$,

$$DSH = 4.05 \sqrt{\frac{0.0298}{5}} = 4.05 (0.0772)$$

$$DSH = 0.3127$$

La cual indica que el rechazo en el Análisis de varianza se debe a que hay diferencia significativa entre $|\mu_1 - \mu_4|$ $|\mu_3 - \mu_4|$, puesto que estas diferencias (tabla 11.9) son mayores que DSH.

11.4.3 PRUEBA DEL RANGO MULTIPLE DE DUNCAN:

La *Prueba del Rango Múltiple de Duncan* es otra prueba para determinar la diferencia entre pares de medias después que se ha rechazado la hipótesis nula en el Análisis de Varianza. Duncan asegura que su prueba es mejor que las otras porque permite al investigador cometer menor error de Tipo II.

Este procedimiento emplea los valores de la tabla A-11 y consiste en calcular varios "rangos" (Duncan los llama rangos significativos mínimos) dados por la fórmula

$$D_p = d_{\alpha, p, gl} \sqrt{\frac{s_{\text{error}}^2}{n}}$$

donde p toma valores entre 2 y K (K es el número de tratamientos), d se obtiene de la tabla A-11 y s_{error}^2 es el cuadrado medio del error.

Ejemplo 11.5:

Se realizó un experimento para determinar la cantidad (en gramos) de grasa absorbida por 48 doughnuts usando ocho tipos diferentes de grasas (aceites y mantecas), las medias para los ocho tratamientos se muestran a continuación:

$$\bar{x}_1 = 172, \quad \bar{x}_2 = 178, \quad \bar{x}_3 = 182, \quad \bar{x}_4 = 185, \quad \bar{x}_5 = 165, \quad \bar{x}_6 = 176,$$

$$\bar{x}_7 = 161 \quad \text{y} \quad \bar{x}_8 = 162.$$

Se usaron 6 doughnuts en cada tipo de grasa y se obtuvo una varianza de error $s_{\text{error}}^2 = 141.6$, los grados de libertad del error son $48 - 8 = 40$ y $\sqrt{\frac{141.6}{6}} = 4.86$

Seleccionando $\alpha = 0.05$ para este ejemplo, los rangos de Duncan son:

$$D_8 = 3.300 (4.86) = 16.03$$

$$D_7 = 3.266 (4.86) = 15.87$$

$$D_6 = 3.224 (4.86) = 15.66$$

$$D_5 = 3.171 (4.86) = 15.40$$

$$D_4 = 3.102 (4.86) = 15.07$$

$$D_5 = 5.006 (4.86) = 14.60$$

$$D_2 = 2.853 (4.86) = 13.88$$

Los valores 3.300, 3.266, ..., 2.888 fueron obtenidos de la tabla de Duncan (A-11) para $\alpha = 0.05$, $2 \leq p \leq 8$ y 40 grado de libertad.

Como siguiente paso se ordenan las medias en orden creciente para establecer los "rangos".

\bar{x}_7	\bar{x}_8	\bar{x}_5	\bar{x}_1	\bar{x}_6	\bar{x}_2	\bar{x}_3	\bar{x}_4
161	162	165	172	176	178	182	185

El rango entre las medias máxima y mínima se compara con D_8 esto es

$\bar{x}_4 - \bar{x}_7 = 24 > D_8$, entonces existe diferencia significativa entre las grasas 4 y 7.

$$\mu_4 \neq \mu_7$$

El próximo paso es comparar subconjuntos de 7 medias con el rango D_7 .

$$\bar{x}_4 - \bar{x}_8 = 23 > D_7, \text{ entonces } \mu_4 \neq \mu_8$$

$$\bar{x}_3 - \bar{x}_7 = 21 > D_7, \text{ entonces } \mu_3 \neq \mu_7$$

Como los dos exceden el rango D_7 se subdividen estos dos subconjuntos en conjuntos de 6 medias.

$$\bar{x}_4 - \bar{x}_5 = 20 > D_6, \text{ entonces } \mu_4 \neq \mu_5$$

$$\bar{x}_3 - \bar{x}_8 = 20 > D_6, \text{ entonces } \mu_3 \neq \mu_8$$

$$\bar{x}_2 - \bar{x}_7 = 17 > D_6, \text{ entonces } \mu_2 \neq \mu_7$$

Nuevamente estos exceden D_6 , entonces estos se subdividen en subconjuntos de 5 medias

$$\bar{X}_4 - \bar{X}_1 = 13 < D_5 , \text{ entonces } \mu_4 = \mu_1$$

$$\bar{X}_3 - \bar{X}_5 = 17 > D_5 , \text{ entonces } \mu_3 \neq \mu_5$$

$$\bar{X}_2 - \bar{X}_8 = 16 > D_5 , \text{ entonces } \mu_2 \neq \mu_8$$

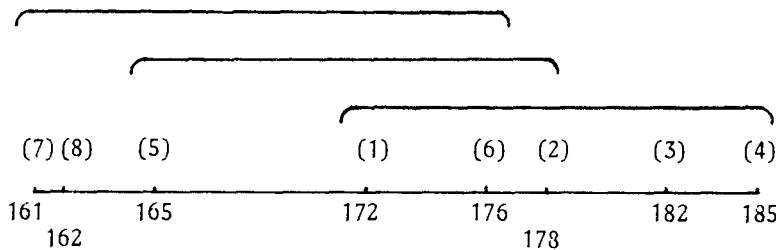
$$\bar{X}_6 - \bar{X}_7 = 15 < D_5 , \text{ entonces } \mu_6 = \mu_7$$

Como las medias para las grasas 3,2,6 y 1 están incluidos en el conjunto 43261 que fue declarado no significativo, los rangos de las medias en el subconjunto 3261 no se compara con D_4 : solamente los rangos de las medias en el subconjunto 2615 se comparan con D_4 ; por lo tanto:

$$\bar{X}_2 - \bar{X}_5 = 13 < D_4 , \text{ entonces } \mu_2 = \mu_5$$

Los otros subconjuntos de 4 medias (3261) y (6153) no se comparan con D_4 porque ya fueron declarados no significativos en los conjuntos de 5 medias. Por lo tanto, el proceso termina.

Los resultados se muestran gráficamente en la siguiente figura



El investigador puede concluir que las cantidades absorbidas usando las grasas 4 y 3 son significativamente mayores que las 5,8 y 7 y que la 2 es significativamente mayor que las 8 y 7 y las demás grasas no son significativamente diferentes con relación a la cantidad absorbida por las doughnuts.

11.4.4 PRUEBA DE SCHEFFE:

Esta prueba es similar a la prueba de Tukey, difiere de ella en que en vez de usar la tabla A-9 para obtener valores studentizados q, utiliza la tabla F de Fisher (A-7) para obtener el factor

$$\sqrt{(K - 1) F_{1-\alpha, K-1, gl_{\text{error}}}}$$

donde K es el número de tratamientos y α el nivel de significación.

Este factor $\sqrt{(K - 1) F_{1-\alpha, K-1, gl_{\text{error}}}}$ se multiplica por el error estándar de la diferencia entre dos medias $\sqrt{\frac{2 S_{\text{error}}^2}{n}}$ para obtenerse la cantidad:

$$S = \sqrt{(K - 1) F_{1-\alpha, K-1, gl_{\text{error}}}} \sqrt{\frac{2 S_{\text{error}}^2}{n}}$$

que se comparará con las diferencias entre los pares de medias de los tratamientos. Usando los datos del ejemplo 11.5, tenemos:

$$S = \sqrt{(8 - 1) F_{0.95, 7, 40}} \sqrt{\frac{2(141.6)}{6}}$$

$$S = \sqrt{7(2.25)} (6.87)$$

$$S = (3.969) (6.87) = 27.3$$

Si la diferencia entre cualquier par de medias excede este valor, se dice que hay diferencia significativa entre las medias comparadas. Las diferencias entre las ocho medias se muestran en la tabla 11.10.

Tabla. 11.10

Diferencias entre las ocho medias del ejemplo 11.5

	x_4	x_3	x_2	x_6	x_1	x_5	x_3	x_7
x_4	—	3	7	9	13	20	23	24
x_3	—		4	6	10	17	20	21
x_2	—	—	—	2	6	13	16	17
x_6	—	—		—	4	11	14	15
x_1	—	—		—	—	7	10	11
x_5	—	—		—	—	—	5	4
x_8	—	—		—	—	—	—	1
x_7	—	—	—	—	—	—	—	—

En este ejemplo todas las diferencias entre los pares de medias son menores que 27.3 por lo que no hay diferencia significativa entre los pares de grasas.

NOTA:

Todas las pruebas estudiadas para comparar pares de medias requieren que todos los tratamientos tengan el mismo número de observaciones n . Algunos autores entre ellos Snedecor y Cochran han recomendado usar la media armónica n_h , entre los tamaños de muestra n , cuando el número de observaciones no es el mismo. Aparentemente esta aproximación no altera el error de Tipo I.

Algunos escritores (Balaam y Carmer and Swanson) se han dado a la tarea de estudiar cual de las pruebas entre pares de medias es mejor, tomando como criterio los valores de los errores de Tipo I y de Tipo II. En este tipo de comparaciones hay más oportunidades de cometer error de Tipo II, por lo que en estos estudios las pruebas que resultaron mejor -

res fueron las que tienen mayor poder con menor control de Tipo I, tomando este criterio las que resultaron mejores son: la prueba del rango múltiple de Duncan y la DSM de Fisher, seguidas por la SNK (Student-Newman-Kewls), la DSH de Tukey y la S de Scheffé.

11.5 ANALISIS DE VARIANZA DE UN FACTOR EN EL DISEÑO DE BLOQUES ALEATORIOS COMPLETOS:

El Diseño de Bloques Aleatorios es una generalización del diseño de diferencias apareadas de la sección 9.8.6 (caso 10 de la tabla resumen) . El propósito de este diseño es el de hacer comparaciones entre un conjunto de tratamientos dentro de bloques de material experimental relativamente homogéneo.

En este diseño las unidades experimentales a las cuales se aplican los tratamientos se subdividen en grupos homogéneos llamados bloques, de manera que el número de unidades experimentales en un bloque es igual al número (ó algún múltiplo del número) de tratamientos estudiados. Los tratamientos se asignan al azar a las unidades experimentales dentro de cada bloque. Se hace necesario enfatizar que cada tratamiento aparece en cada bloque y cada bloque debe recibir todos los tratamientos.

El objetivo de usar este diseño es el de aislar y remover de la variación del error la variación atribuida a los bloques para asegurar que las ***medias de los tratamientos estarán libres del efecto de bloques.***

Algunos autores llaman al Diseño de Bloques Aleatorios, Diseño Factorial (de dos factores) con observación única. Cabe señalar que en el Diseño Factorial las variables deben ser ***independientes*** mientras que en el Diseño de Bloques hay homogeneidad o ***dependencia*** entre los niveles de una variable para un mismo bloque. Por consiguiente, en un diseño de dos factores debe haber más de una observación para cada combinación de niveles de las dos variables para garantizar la independencia.

En experimentos con animales se puede tener que diferentes cepas pueden responder en forma diferente a un mismo tratamiento, las cepas pueden ser usadas como un factor bloque. En experimentos con humanos, si se desea eliminar las diferencias debidas a edad, se pueden clasificar a las personas en grupos de edades y a uno o varios integrantes de cada grupo de edades se les asigna un tratamiento al azar. El diseño de bloques también puede ser usado efectivamente cuando un experimento se tiene que llevar a cabo en diferentes laboratorios (bloques), o cuando varios días (bloques) son necesarios para realizarlo. Otro caso en que este diseño puede emplearse es para determinar diferencias en productividad de, por ejemplo, K marcas de máquinas (tratamientos), podemos aislar los posibles efectos debidos a diferencias en la eficiencia entre operarios (bloques), por operarios escogidos al azar y luego asignar a las máquinas rotativamente al azar de tal modo que cada operario trabaje en todas las máquinas. La idea básica aquí es comparar los niveles de tratamientos (máquinas) dentro de un bloque de material experimental relativamente homogéneo (el mismo operario), y luego repetir la comparación de otro bloque y así sucesivamente.

En general, los datos de un experimento utilizando el diseño de bloques aleatorios se arreglan en una tabla como la siguiente (tabla 11.11),

Tabla. 11.11

TABLA DE VALORES DE MUESTRA PARA EL DISEÑO DE BLOQUES ALEATORIOS

BLOQUES	TRATAMIENTOS				Sumas $x_{i\cdot}$	Medias $\bar{x}_{i\cdot}$
	1	2	3	K		
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{1K}	$\bar{x}_{1\cdot}$
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{2K}	$\bar{x}_{2\cdot}$
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{3K}	$\bar{x}_{3\cdot}$
.
.
n	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	x_{nK}	$\bar{x}_{n\cdot}$
Sumas $x_{\cdot j}$	$x_{\cdot 1}$	$x_{\cdot 2}$	$x_{\cdot 3}$	$x_{\cdot K}$	—
Medias $\bar{x}_{\cdot j}$	$\bar{x}_{\cdot 1}$	$\bar{x}_{\cdot 2}$	$\bar{x}_{\cdot 3}$	$\bar{x}_{\cdot K}$	$\bar{x}_{\cdot \cdot}$

EL MODELO:

Siguiendo el mismo razonamiento que en la sección 11.5 para derivar, el modelo en el Diseño Completamente Aleatorio, se llega al siguiente modelo:

$$x_{ij} = \mu + \beta_i + \tau_j + \epsilon_{ij}$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, k$$

donde:

x_{ij} = es una observación cualquiera.

μ = gran media desconocida (poblacional).

β_i = efecto de bloques.

τ_j = efecto de tratamientos.

ϵ_{ij} = efecto de error residual.

como: $\beta_i = \mu_{i\cdot} - \mu$

$\tau_j = \mu_{\cdot j} - \mu$

$$\epsilon_{ij} = x_{ij} - \mu_{i\cdot} - \mu_{\cdot j} + \mu$$

Nuestro modelo puede expresarse en la forma:

$$x_{ij} - \mu = (\mu_{i\cdot} - \mu) + (\mu_{\cdot j} - \mu) + (x_{ij} - \mu_{i\cdot} - \mu_{\cdot j} + \mu)$$

que para el caso de muestras es:

$$x_{ij} - \bar{x}_{\dots} = (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\dots}) + (\bar{x}_{\cdot j} - \bar{x}_{\dots}) + (x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{x}_{\dots})$$

Se puede demostrar que la suma de cuadrados total se puede descomponer en tres sumas, una debida a bloques, otra debida a tratamientos y otra a error residual.

$$\sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_{..})^2 = \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^n (\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..})^2 + \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^n (\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{..})^2 +$$

$$+ \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x}_{..})^2$$

Esto es:

$$SC_{\text{Total}} = SC_{\text{Bloques}} + SC_{\text{Trat.}} + SC_{\text{error}}$$

Las cuales, se pueden demostrar que son equivalentes a las siguientes fórmulas, más fáciles de usar:

$$SC_{\text{Total}} = \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^n x_{ij}^2 - \frac{x_{..}^2}{N}$$

$$SC_{\text{Bloques}} = \sum_{i=1}^n \frac{x_{i.}^2}{K} - \frac{x_{..}^2}{N}$$

$$SC_{\text{Trat.}} = \sum_{j=1}^K \frac{x_{.j}^2}{n} - \frac{x_{..}^2}{N}$$

$$SC_{\text{error}} = SC_{\text{Total}} - SC_{\text{Bloques}} - SC_{\text{Trat.}}$$

$$N = K n$$

Las hipótesis en este Diseño son:

$$H_0: \tau_j = 0, j = 1, 2, \dots, K$$

$$H_a: \text{no todas las } \tau_j \text{ son cero.}$$

o equivalentemente:

$$H_0: \mu_{.1} = \mu_{.2} = \mu_{.3} = \dots = \mu_{.K} = \mu_{..}$$

$$H_a: \text{no todas las medias son iguales.}$$

Todos los cálculos se pueden resumir en una tabla de ANDEVA para el Diseño de Bloques Aleatorios, tabla 11.12.

Tabla 11.12Tabla de ANDEVA para el Diseño de Bloques Aleatorios

Fuente	$g\ell$	Sumas de Cuadrados (SC)	Varianzas Cuadrados Medios	$F_{\text{calc.}}$	$F_{\text{teórica}}$
Tratamientos	K-1	$SC_{\text{trata.}} = \sum_{j=1}^K \frac{x_{\cdot j}^2}{n} - \frac{x_{\cdot \cdot}^2}{N}$	$S_{\text{trat.}}^2 = \frac{SC_{\text{trat.}}}{K-1}$	$F = \frac{S_{\text{trat.}}^2}{S_{\text{error}}^2}$	$F_{1-\alpha, K-1, g\ell}$ error
Bloques	n-1	$SC_{\text{bloques}} = \sum_{i=1}^n \frac{x_{i \cdot}^2}{K} - \frac{x_{\cdot \cdot}^2}{N}$	$S_{\text{bloques}}^2 = \frac{SC_{\text{bloques}}}{n-1}$		
Error	(K-1)(n-1)	$SC_{\text{error}} = SC_{\text{total}} - SC_{\text{trat.}} - SC_{\text{bloques}}$		$S_{\text{error}}^2 = \frac{SC_{\text{error}}}{(K-1)(n-1)}$	
Total	N-1	$SC_{\text{total}} = \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^n x_{ij}^2 - \frac{x_{\cdot \cdot}^2}{N}$			

Ejemplo 11.6:

Un técnico laboratorista mide la resistencia a la ruptura de cinco clases de fibras textiles por medio de cuatro distintos instrumentos, y obtiene los resultados (en onzas) que se muestran en la tabla 11.13.

Tabla 11.15

FIBRAS	INSTRUMENTOS DE MEDICION				$X_{i\bullet}$
	I ₁	I ₂	I ₃	I ₄	
F ₁	20.6	20.7	20.0	21.4	82.70
F ₂	24.7	26.5	27.1	24.3	102.60
F ₃	25.2	23.4	21.6	23.9	94.10
F ₄	24.5	21.5	23.6	25.2	94.80
F ₅	19.3	21.5	22.2	20.6	83.60
X _{\bullet j}	114.30	113.60	114.50	115.40	457.80

Considerando las fibras como tratamientos y los instrumentos como bloques, realizaremos un análisis de varianza para determinar si existe diferencia significativa entre los cinco tipos de fibras textiles con $\alpha =$

Los cálculos de los Cuadrados Medios y de los valores de F calculada y F teórica se muestran en la tabla de ANDEVA (tabla 11.14).

Tabla 11.14

TABLA DE ANDEVA PARA LA RESISTENCIA A LA RUPTURA DE CINCO CLASES DE FIBRAS

Fuente	g_1	S.C,	C.M.	$F_{\text{calc.}}$	$F_{\text{teórica}}$
Tratamien- tos Fibras	5-1 = 4	10549.2150 - 10479.0420 = 70.175	17.5433		$F_{0.99,4,12} = 5.41$
Bloques Instrumen- tos	4-1 = 3	10479.3720 - 10479.0420 = 0.3300	0.1100		
Error	(4) (3) = 12	95.818 - 70.173 - 0.33 = 25.315	2.1096		
Total	20-1 = 19	10574.8600 - 10479.0420 = 95.818			

$$F_{0.99,4,12} = 5.41$$

$$F_{\text{calc.}} = \frac{17.5433}{2.1096} = 8.3160$$

Decisión y Conclusión:

Se rechaza H_0 , de tal modo que la resistencia a la ruptura de las cinco clases de fibras son significativamente diferentes al 1% de significación.

11.6 ANALISIS DE VARIANZA DE DOS FACTORES EN EL DISEÑO COMPLETAMENTE ALEATORIO

Este modelo es un diseño completamente aleatorio en el que los datos de muestra son clasificados en función de **dos variables aleatorias independientes**. Cada variable posee varias categorías o niveles para su estudio. Si se hace el mismo número de observaciones para cada una de las combinaciones de niveles, el experimento se llama **Experimento Factorial Completo** y si el número es diferente se le llama **Incompleto**.

Para diseñar una investigación con varias variables independientes se debe escoger las diferentes combinaciones de niveles de las variables que serán incluidas en el experimento (los tratamientos), decidir el número aproximado de observaciones por tratamiento, y entonces decidir como aplicar los tratamientos a las unidades experimentales.

Algunos ejemplos de análisis de varianza de dos factores son:

1.- Un experimento para probar el efecto de respuesta anticuerpo de 4 preparaciones diferentes de vacunas y de 6 cantidades diferentes de cierto aditivo a la vacuna. Aquí los dos factores son **tipo de vacuna y cantidad de aditivo**. El primero con 4 niveles y el segundo con 6.

2.- Un experimento para determinar si tres máquinas diferentes y cuatro fuentes de materias primas son las fuentes de variación en la producción de artículos defectuosos. Cada máquina se hace funcionar en condiciones idénticas con cada fuente de material por dos períodos de una hora y se registra el número de artículos defectuosos por hora para cada combinación máquina-materia prima.

5.- Un experimento para estudiar simultáneamente los factores genético y dietético sobre el escorbuto en conejillos de Laboratorio. Supóngase que se escogen 3 variedades de conejillos y 5 dietas diferentes para el estudio con 3 animales por cada combinación variedad-dieta.

Obsérvese que en el análisis de varianza de dos factores hay tres hipótesis a contrastar; es decir, nos interesa la significación de ambas variables y la posible interacción entre ellas. Específicamente:

- 1) H_0 : Los efectos de las J columnas son cero , o dicho de otro modo, no hay diferencia entre las medias de los distintos niveles de la variable "columna".

H_A : Hay diferencia.

- 2) H_0 : Los efectos de las I filas son cero, o no hay diferencia entre las medias de los distintos niveles de la variable "fila".

H_A : Hay diferencia.

- 3) H_0 : No hay diferencia entre las distintas interacciones fila-columna.

H_A : Hay diferencia.

EL MODELO:

El modelo lineal para el análisis de varianza de dos factores es:

$$x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

Los datos experimentales en el diseño de dos factores completamente aleatorios, en general, se arreglan en una tabla como la que se muestra a continuación (tabla 11.15).

Tabla 11.15

		Factor B						
Factor A		B ₁	B ₂	B _J	n _{i..}	x _{i..}	$\bar{x}_{i..}$
A ₁		x ₁₁₁	x ₁₂₁	x _{1J1}			
		x ₁₁₂	x ₁₂₂	x _{1J2}			
		:	:	:			
		x _{11n₁₁}	x _{12n₁₂}	x _{1Jn_{1J}}			
		n ₁₁	n ₁₂	n _{1J}	n _{1..}	x _{1..}	$\bar{x}_{1..}$
		x _{11..}	x _{12..}	x _{1J..}			
A ₂		x ₂₁₁	x ₂₂₁	x _{2J1}			
		x ₂₁₂	x ₂₂₂	x _{2J2}			
		:	:	:			
		x _{21n₂₁}	x _{22n₂₂}	x _{2Jn_{2J}}			
		n ₂₁	n ₂₂	n _{2J}	n _{2..}	x _{2..}	$\bar{x}_{2..}$
		x _{21..}	x _{22..}	x _{2J..}			
.
.
.
A _I		x _{I11}	x _{I21}	x _{IJ1}			
		x _{I12}	x _{I22}	x _{IJ2}			
		:	:	:			
		x _{I1n_{I1}}	x _{I2n_{I2}}	x _{IJn_{IJ}}			
		n _{I1}	n _{I2}	n _{IJ}	n _{I..}	x _{I..}	$\bar{x}_{I..}$
		x _{I1..}	x _{I2..}	x _{IJ..}			
n _{..j}	n _{..1}	n _{..2}	n _{..J}	N			
x _{..j..}	x _{..1..}	x _{..2..}	x _{..J..}		x _{... ..}		
$\bar{x}_{..j..}$	$\bar{x}_{..1..}$	$\bar{x}_{..2..}$	$\bar{x}_{..J..}$			$\bar{x}_{... ..}$	

donde:

$$n_{i\cdot} = \sum_{j=1}^J n_{ij} = \text{número de observaciones por fila.}$$

$$n_{\cdot j} = \sum_{i=1}^I n_{ij} = \text{número de observaciones por columna.}$$

$$N = \sum_{i=1}^I n_{i\cdot} = \sum_{j=1}^J n_{\cdot j} = \text{número total de observaciones.}$$

$$x_{ij\cdot} = \sum_{k=1}^{n_{ij}} x_{ijk} = \text{sumas de las observaciones de la casilla } ij.$$

$$x_{i\cdot\cdot} = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_{ij}} x_{ijk} = \text{suma de las observaciones de la fila } i.$$

$$x_{\cdot j\cdot} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{n_{ij}} x_{ijk} = \text{suma de las observaciones de la columna } j.$$

$$x_{\cdot\cdot\cdot} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^{n_{ij}} x_{ijk} = \text{suma de todas las observaciones.}$$

i = índice de fila.

j = índice de columna.

k = índice de la observación individual de una casilla.

J = número de columnas.

I = número de filas.

FACTOR FIJO Y FACTOR ALEATORIO:

Antes de proceder a contrastar la significación de un factor en el análisis de varianza en que intervengan más de un factor, dicho factor debe clasificarse como fijo o como aleatorio. Entendiéndose como factor.

fijo aquél cuyos niveles son escogidos a propósito; es decir, son seleccionados por una razón especial por el experimentador y, factor aleatorio aquél cuyos niveles se pueden considerar como muestra aleatoria de cierta población de tratamientos.

Para ilustrar esto, supongamos que deseamos comparar tres medicamentos para el dolor de *cabeza*, tales como Aspirina, Anacin y Excedrin para verificar si hay o no diferencias significativas de eficacia entre ellos. En este caso solo estamos interesados en estos tres medicamentos; por lo tanto, los tratamientos son fijos. Dicho de otra manera, queremos ver si hay diferencias significativas entre las tres *poblaciones teóricas fijas* de pacientes con dolor de cabeza a quienes se pueda administrar estos medicamentos.

En cambio si estuviésemos interesados en saber si hay una variabilidad significativa entre todos los medicamentos para el dolor de *cabeza*, entonces habríamos seleccionado aleatoriamente tres, cuatro o cinco o cualquier número de medicamentos de la *población total de medicamentos para el dolor de cabeza* que debe incluir a miles de marcas distintas. En este caso no estamos interesados en las diferencias entre tratamientos específicos o fijas en su lugar nos interesa el grado en que puede, en general, variar la eficacia de los medicamentos para el dolor de cabeza.

Otros ejemplos de factores relativamente sencillos de clasificar son:

Si se están investigando diferencias entre sujetos, es raro que los sujetos del experimento sean los únicos sobre quienes se desean inferencias. De ordinario se quiere considerar los sujetos como una muestra de alguna población grande. El factor "*sujetos*" será considerado como un "*factor, aleatorio*". Análogamente, si se está investigando la variación en el tiempo de alguna variable de respuesta y se recopilan observaciones durante varias semanas, probablemente se considerará "*semanas*" como un "*factor aleatorio*", pues se suele esperar hacer inferencias a muchas semanas distintas de las utilizadas en el estudio mismo.

Si se están comparando los dos sexos con respecto a alguna variable de respuestas, el factor "sexo" quedará plenamente representado en el estudio al incluir sus dos niveles, varón y hembra, y será, pues un factor fijo. Análogamente, si se clasifica la población de estudio en grupos de edad individuales y se comparan sujetos de todos los grupos, el factor edad será fijo. En una prueba clínica en que se comparan una droga activa y un placebo, el factor tratamiento es fijo. Análogamente, si se comparan tres máquinas estas serán factor fijo.

En un experimento de dos factores, la decisión acerca de si ambos factores son fijos, ambos aleatorios o uno fijo y el otro aleatorio es cuestión importante y ha de determinarse antes de efectuar el análisis de varianza. Por otra parte, la gran mayoría de los experimentos biológicos involucra el modelo de factores fijos.

La tabla 11.16 resume todas las fórmulas para el Análisis de Varianza de dos factores.

Ejemplo 11.7:

Se realizó un experimento para indicar los efectos del tipo de material y el calor de tratamiento en el desgaste por abrasión de chumaceras. Se probaron dos chumaceras en cada una de las 10 combinaciones de tratamientos. Los datos se muestran en la tabla 11.17.

HIPOTESIS 1: Las medias para los distintos tipos de material son iguales.

HIPOTESIS 2: Las medias para los tratamientos térmicos no son diferentes.

HIPOTESIS 3: No hay efecto de interacción.

Tabla. 11.16

ANALISIS DE VARIANZA DE DOS FACTORES

Fuente	g.l.	S.C.	C.M.	F Modelo Fijo	F Modelo Aleatorio	F Modelo Mixto Filas Fijas Columnas a- leatorias.
Filas (A)	I - 1	$SC_A = \sum_{i=1}^I \frac{X_{i\bullet\bullet}}{n_i} - \frac{\bar{X}_{\bullet\bullet\bullet}}{N}$	$S_A^2 = \frac{SC_A}{I-1}$	$F_A = \frac{S_A^2}{S_{AB}^2}$	$F_A = \frac{S_A^2}{S_{AB}^2}$	$F_A = \frac{S_A^2}{S_{AB}^2}$
Columnas (B)	J - 1	$SC_B = \sum_{j=1}^J \frac{X_{\bullet j\bullet}}{n_{\bullet j}} - \frac{\bar{X}_{\bullet\bullet\bullet}}{N}$	$S_B^2 = \frac{SC_B}{J-1}$	$F_B = \frac{S_B^2}{S_{AB}^2}$	$F_B = \frac{S_B^2}{S_{AB}^2}$	$F_B = \frac{S_B^2}{S_{AB}^2}$
Interacción (AB)	(I-1)(J-1)	$SC_{AB} = SC_{\text{subtotal}} - SC_A - SC_B$	$S_{AB}^2 = \frac{SC_{AB}}{(I-1)(J-1)}$	$F_{AB} = \frac{S_{AB}^2}{S_{\text{error}}^2}$	$F_{AB} = \frac{S_{AB}^2}{S_{\text{error}}^2}$	$F_{AB} = \frac{S_{AB}^2}{S_{\text{error}}^2}$
Subtotal	IJ - 1	$SC_{\text{subtotal}} = \sum_{i=j=1}^{IJ} \frac{X_{ij\bullet}}{n_{ij}} - \frac{\bar{X}_{\bullet\bullet\bullet}}{N}$				
Error Residual	N - IJ	$SC_{\text{error}} = SC_{\text{total}} - SC_{\text{subtotal}}$	$S_{\text{error}}^2 = \frac{SC_{\text{error}}}{N - IJ}$			
Total	N - 1	$SC_{\text{total}} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^{n_{ij}} X_{ijk}^2 - \frac{\bar{X}_{\bullet\bullet\bullet}}{N}$				

Tabla. 11.17

CANTIDAD DE DESGASTE DE CHUMACERAS DEL EJEMPLO 11.7
(datos codificados)

Tratamiento Térmico	M	A	T	E	R	I	A	L		$n_{i..}$	$x_{i..}$	$\bar{x}_{i..}$
	A	B	C	D	E							
Secado al Horno	23 25 $n_{11} = 2$ $X_{11..} = 48$	42 44 $n_{12} = 2$ $X_{12..} = 86$	37 38 $n_{13} = 2$ $X_{13..} = 75$	41 42 $n_{14} = 2$ $X_{14..} = 83$	20 25 $n_{15} = 2$ $X_{15..} = 45$					10	337	33.7
Húmedo	30 31	45 50	39 39	44 49	24 30							
Saturado	$n_{21} = 2$ $X_{21..} = 61$	$n_{22} = 2$ $X_{22..} = 95$	$n_{23} = 2$ $X_{23..} = 78$	$n_{24} = 2$ $X_{24..} = 93$	$n_{25} = 2$ $X_{25..} = 54$					10	381	38.1
$n_{.j}$	4	4	4	4	4					N=20		
$x_{.j..}$	109	181	153	176	99						$x_{...} = 718$	
$\bar{x}_{.j..}$	27.25	45.25	38.25	44.00	24.75							$\bar{x}_{...} = 35.9$

CALCULOS: Los cálculos se muestran en la tabla 11.18.

DECISION Y CONCLUSION:

1.- Se rechaza la hipótesis 1, lo cual implica que hay diferencia significativa entre los distintos tipos de material.

2.- Se rechaza la hipótesis 2, por lo tanto hay diferencia significativa entre los tratamientos térmicos.

3.- Se acepta la hipótesis 3 y se concluye que no hay diferencia significativa entre las medias de interacción de material y tratamiento térmico.

TABLA 11.18

TABLA DE ANDEVA PARA LOS DATOS DEL EJEMPLO 11.7

Fuente	$g.l$	S.C.	VAR	$F_{\text{calc.}}$	$F_{\text{teor.}}$
Tratamiento Término	$2 - 1 = 1$	$SC_{T.T} = \frac{(337)^2 + (381)^2}{10} - \frac{(718)^2}{20} = 25873 - 25776.2 = 96.8$	$s^2_{T.T.} = \frac{96.8}{1} = 96.80$	$F_{T.T.} = \frac{96.8}{6.1} = 15.87$	$F_{0.95,1,10} = 4.96$
Material	$5 - 1 = 4$	$SC_{\text{Mat.}} = \frac{(109)^2 + (181)^2 + \dots + (99)^2}{4} - \frac{(718)^2}{20} = 27,207 - 25,776.2 = 1430.8$	$s^2_{\text{Mat.}} = \frac{1430.8}{4} = 357.70$	$F_{\text{Mat.}} = \frac{357.7}{6.1} = 58.64$	$F_{0.95,4,10} = 3.48$
Interacción	$(4)(1) = 4$	$SC_{\text{Int.}} = 1540.8 - 1430.8 - 96.8 = 13.20$	$s^2_{\text{Int.}} = \frac{13.2}{4} = 3.30$	$F_{\text{Int.}} = \frac{3.3}{6.1} = 0.54$	$F_{0.95,4,10} = 3.48$
Subtotal	$(5)(2) - 1 = 10 - 1 = 9$	$\frac{(48)^2 + (86)^2 + \dots + (54)^2}{2} - \frac{(718)^2}{20} = 27317 - 25776.2 = 1540.8$			
Error	$20 - (5)(2) = 10$	$1601.8 - 1540.8 = 61.0$	$s^2_{\text{error}} = \frac{61.0}{10} = 6.1$		
Total	$20 - 1 = 19$	$(23)^2 + (25)^2 + \dots + (30)^2 - \frac{(718)^2}{20} = 27378 - 25776.2 = 1601.8$			

Ejemplo 11.8

Se hizo un estudio para comparar 3 drogas en cuanto al efecto en el tiempo de respuesta a cierto estímulo de ciertos animales. Estos mismos animales se sometieron a tres métodos de entrenamiento de manera que hay interacción (droga-entrenamiento). Los resultados del tiempo de reacción en segundos después de que 4 de los 27 animales murieron durante el experimento se muestran en la tabla 11.19.

Tabla 11.19

Método de entrenamiento	D	R	O	G	A		
	A	B	C			n_i	X_i
I	5	8	10				
	8	10	12				
	7		10				
	$n_{11} = 3$	$n_{12} = 2$	$n_{13} = 3$			8	
II	$X_{11 \cdot} = 20$	$X_{12 \cdot} = 18$	$X_{13 \cdot} = 32$				70
	6	10	15				
	8	12	14				
		11					
III	$n_{21} = 2$	$n_{22} = 3$	$n_{23} = 2$			7	
	$X_{21 \cdot} = 14$	$X_{22 \cdot} = 33$	$X_{23 \cdot} = 29$				76
	8	12	16				
	6	12	16				
$n_{\cdot j}$	14		18				
	$n_{31} = 2$	$n_{32} = 3$	$n_{33} = 3$			8	
	$X_{31 \cdot} = 14$	$X_{32 \cdot} = 38$	$X_{33 \cdot} = 50$				102
	7	8	8				
$X_{\cdot \cdot \cdot}$	48	89	111				
						N=23	
							$X_{\cdot \cdot \cdot} = 248$

Las tres hipótesis para este ejemplo son:

HIPOTESIS 1: No existe diferencia entre las inedias de las distintas drogas.

HIPOTESIS 2: No existe diferencia entre las medias de los distintos tratamientos.

HIPOTESIS 3: No hay efecto de interacción.

CALCULOS: Los cálculos se resumen en la tabla 11.20.

DECISION Y CONCLUSION:

- 1) Se rechaza la hipótesis 1 por lo que existe diferencia significativa entre las drogas al 5%.
- 2) Se rechaza la hipótesis 2 , en consecuencia existe diferencia significativa entre los métodos de entrenamiento al 5%.
- 3) Se acepta la hipótesis 3, y se concluye que no hay efecto de interacción al 5% de significación.

TABLA 11.20

TABLA DE ANDEVA PARA LOS DATOS DEL EJEMPLO 11.8

Fuente	<i>g.l.</i>	S.C.	VAR.	$F_{\text{cal.}}$	$F_{\text{teo.}}$
Droga	5-1= 2	2859.39 - 2674.09= 185.31	$S^2_{\text{Droga}} = \frac{185.31}{2} = 92.65$	$F_{\text{Droga}} = \frac{92.65}{1.51} = 61.27$	$F_{0.95,2,14} = 3.74$
Método	5-1= 2	2738.14 - 2674.09= 64.06	$S^2_{\text{Met.}} = \frac{64.06}{2} = 32.03$	$F_{\text{Met.}} = \frac{32.03}{21.18} = 1.51$	$F_{0.95,2,14} = 3.74$
Interac- ción	(2) (2)= 4	256.75 - 185.31 - 64.06 = 7.38	$S^2_{\text{Int.}} = \frac{7.38}{4} = 1.845$	$F_{\text{Int.}} = \frac{1.845}{1.22} = 1.51$	$F_{0.95,4,14} = 3.11$
Subtotal	(5)(5)-1= 8	2930.83 - 2674.09 = 256.75	-----	-----	-----
Error	23-(3)(3)= 14	277.91 - 256.75 = 21.17	$S^2_{\text{error}} = \frac{21.17}{14} = 1.51$	-----	-----
Total	23-1=22	2952.0 - 2674.09 = 277.91	-----	-----	-----

11.7 CUADRADOS LATINOS:

Este diseño especial , en general, permite al investigador delimitar, con toda seguridad, los efectos relativos de cierto factor, cuando se impone a las unidades experimentales una restricción del tipo de *doble bloqueo*. En otras palabras el *Diseño de Cuadrados Latinos* es una ampliación lógica del diseño de bloques completos al azar, en el cual una fuente externa de variación (primer bloqueo) se asigna a las filas del Cuadrado Latino y una segunda fuente externa de variación (segundo bloqueo) se asigna a las columnas, y los tratamientos, o diferentes niveles del factor usualmente designados, por *letras latinas*, son asignados de tal manera que cada tratamiento ocurra *una y solo una* vez en cada fila y cada columna; el siguiente ejemplo nos ilustrará lo aquí expuesto.

Ejemplo 11.9:

Considere el problema de probar cuatro máquinas con el objeto de ver si difieren significativamente en su capacidad de producción de una cierta pieza manufacturada. Es perfectamente conocido que diferentes trabajadores y diferentes periodos de tiempo en un día de trabajo tendrán un efecto sobre la producción. Entonces, elegimos a 4 operadores como columnas y 4 períodos de tiempo como filas y así asignamos *al azar* la máquina correspondiente a cada una de las celdas del cuadrado, respetando la restricción de que cada máquina sea usada por un solo operador en cada periodo de tiempo.

Este ejemplo familiariza al lector con los conceptos básicos que implica un diseño de cuadrado latino.

Es evidente que el número de filas y columnas y el número de tratamientos son iguales; es decir, para investigar m tratamientos, necesitamos m^2 unidades experimentales.

La suposición básica de un diseño de cuadrado latino es que las observaciones pueden representarse mediante un modelo estadístico lineal; tal modelo podemos representarlo de la manera siguiente:

$$X_{ij(k)} = \mu + \rho_i + \gamma_j + \tau_k + \epsilon_{ij(k)}$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

$$j = 1, 2, \dots, m$$

$$k = 1, 2, \dots, m$$

donde $\sum_{i=1}^m \rho_i = \sum_{j=1}^m \gamma_j = \sum_{k=1}^m \tau_k = 0$ y los valores $\epsilon_{ij(k)}$ están distribuí-

dos independientemente y normalmente con media 0 y varianza σ^2 . El paréntesis en el subíndice k , indica que éste no depende de i y j . Los símbolos ρ_i , γ_j y τ_k son los efectos asociados con la i -ésima fila, la j -ésima columna y el k -ésimo tratamiento, respectivamente.

A causa de las economías posibles debidas a tamaño de muestra reducidas, el diseño de cuadrado latino tiene mayor atracción para los investigadores en todos los campos que los otros diseños, pero desafortunadamente, no siempre se ha usado este diseño prudentemente. En muchos experimentos que implican un diseño de cuadrado latino (donde filas y columnas se refieren a factores químicos, físicos o de cualquier otra naturaleza), con mucha frecuencia, el investigador subestima precisamente la suposición de que las interacciones entre filas, columnas y tratamientos debe ser cero, y aún sin cumplirla, utiliza este diseño.

CALCULOS:

Los cálculos correspondientes al Cuadrado Latino se resumen en la tabla 11.21.

†

Cuando la información respecto a las interacciones es deficiente o cuando la suposición de interacción cero (0) es de validez dudosa, deberá emplearse un diseño factorial completo.

Tabla 11.21

TABLA DE ANDEVA PARA EL DISEÑO DE CUADRADO LATINO (m) x (m)

Fuente	g.r.	Suma de cuadrados	Varianzas	p calculada
Filas	m - 1	$SC_{filas} = \sum_{i=1}^m \frac{X_{i\cdot}^2}{m} - \frac{X_{\cdot\cdot}^2}{m^2}$	$S_{filas}^2 = \frac{SC_{filas}}{m - 1}$	—
Columnas	m - 1	$SC_{column.} = \sum_{j=1}^m \frac{X_{\cdot j}^2}{m} - \frac{X_{\cdot\cdot}^2}{m^2}$	$S_{column.}^2 = \frac{SC_{column.}}{m - 1}$	—
Tratamientos	m - 1	$SC_{trat.} = \sum_{k=1}^m \frac{X_k^2}{m} - \frac{X_{\cdot\cdot}^2}{m^2}$	$S_{trat.}^2 = \frac{SC_{trat.}}{m - 1}$	$F_{calc.} = \frac{S_{trat.}^2}{S_{error}^2}$ $\frac{2}{2}$ Error
Error	(m-1) (m-2)	$SC_{error} = SC_{total} - SC_{filas} - SC_{column.} - SC_{trat.}$	$S_{error}^2 = \frac{SC_{error}}{(m-1)(m-2)}$	—
Total	$m^2 - 1$	$SC_{total} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m X_{ij}^2 - \frac{X_{\cdot\cdot}^2}{m^2}$	—	—

donde:

m es el número de filas, columnas y tratamientos.

$X_{i\cdot}$ es la suma de las observaciones de la i -ésima fila.

$X_{\cdot j}$ es la suma de las observaciones de la j -ésima columna.

X_k es la suma de las observaciones de las posiciones del Cuadrado en que se halla la k -ésima letra.

$X_{\cdot \cdot}$ es la suma total de las observaciones.

$X_{ij}^{(k)}$ es la observación en la posición ij del Cuadrado.

HIPOTESIS:

La hipótesis a contrastar es:

H : No existe diferencia significativa entre los tratamientos (letras latinas).

Por último, un cuadrado latino se ha de tomar al azar entre un gran número de cuadrados disponibles del mismo tamaño.

Ejemplo 11.10:

Supóngase que se investiga la variación entre observaciones, al tomar lecturas de presiones sistólicas de la sangre. Sean cinco observadores y cinco sujetos que aceptan participar en el estudio. Cada observador toma 3 lecturas de presión sistólica en rápida sucesión sobre un sujeto dado, y la observación registrada será la media de estas 3 lecturas. Como el orden en que se toma la presión en cada sujeto puede ser importante, por ejemplo, el conjunto de las 3 primeras lecturas sobre un sujeto puede ser ligeramente superior al de las últimas 3, el orden de observación constituye otro factor que el investigador desea controlar.

HIPOTESIS:

H_0 : No existe diferencia significativa entre los observadores.

MODELO:

Se tomó el siguiente cuadrado latino al azar de entre varios de 5x5.

A	C	E	B	D
B	A	C	D	E
E	D	B	C	A
C	E	D	A	B
D	B	A	E	C

Este modelo significa que para el sujeto 1, las presiones fueron tomadas primero por el observador A, segundo por el C, tercero por el E, cuarto por el B y quinto por el D; y así sucesivamente.

DATOS:

Sujeto	O R D E N					X_i
	1	2	3	4	5	
1	(A) 126	(C) 121	(E) 118	(B) 113	(D) 108	586
2	(B) 137	(A) 130	(C) 135	(D) 137	(E) 129	668
3	(E) 126	(D) 127	(B) 117	(C) 129	(A) 119	618
4	CC) 113	(E) 118	(D) 113	(A) 112	(B) 104	560
5	(D) 117	(B) 115	(A) 116	(E) 110	(C) 118	576
$X_{\cdot j}$	619	611	599	601	578	$3008 = X$
Observador	A	B	C	D	E	
X_k	603	586	616	601	601	

CALCULOS:

$$SC_{\text{filas}} = \sum_{i=1}^m \frac{x_{i\cdot}^2}{m} - \frac{x_{\cdot\cdot}^2}{m^2} = \frac{(586)^2 + (668)^2 + \dots + (576)^2}{5} - \frac{(3008)^2}{25} = \\ = 1461.44$$

$$SC_{\text{colum.}} = \sum_{j=1}^m \frac{x_{\cdot j}^2}{m} - \frac{x_{\cdot\cdot}^2}{m^2} = \frac{(619)^2 + (611)^2 + \dots + (578)^2}{5} - \frac{(3008)^2}{25} = \\ = 191.04$$

$$SC_{\text{trat.}} = \sum_{k=1}^m \frac{x_k^2}{m} - \frac{x_{\cdot\cdot}^2}{m^2} = \frac{(603)^2 + (586)^2 + \dots + (601)^2}{5} - \frac{(3008)^2}{25} = \\ = 90.64$$

$$SC_{\text{total}} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m x_{ij}^2 - \frac{x_{\cdot\cdot}^2}{m^2} = (126)^2 + (121)^2 + \dots + (118)^2 - \frac{(3008)^2}{25} = \\ = 1967.44$$

$$SC_{\text{error}} = SC_{\text{total}} - SC_{\text{filas}} - SC_{\text{colum.}} - SC_{\text{trat.}} \\ = 1967.44 - 1461.44 - 191.04 - 90.64 \\ = 224.32$$

Estos cálculos se resumen en la tabla 11.22.

DECISION Y CONCLUSION:

Se acepta la hipótesis nula por lo que se concluye que no hay diferencia significativa entre los cinco observadores.

Tabla 11.22

TABLA VE ANDEVA CORRESPONDIENTE AL EJEMPLO 11.10

Fuente	g.l.	Suma de Cuadrados	Varianza	$F_{\text{calc.}}$	$F_{\text{teor.}}$
filas (sujetos)	4	1461.44	365.36		$F_{0.95,4,12} = 3.26$
columnas (orden)	4	191.04	47.76		
tratamientos (observ.)	4	90.64	22.66		
error	12	224.32	18.6933	$F_{\text{calc.}} = \frac{22.66}{18.6933} = 1.2126$	
Total	24	1967.44			

11.8 OBSERVACIONES FINALES:

Los cuatro diseños estudiados en este capítulo no son los únicos; sin embargo, los aquí presentados son los de mayor uso y sencillez. El diseño factorial, por ejemplo, puede extenderse a tres, cuatro o más factores con las respectivas complicaciones en los cálculos. El diseño *Greco-Latino* es una extensión del Cuadrado Latino, el cual permite la identificación y aislamiento de tres fuentes externas de variación. El diseño Greco-Latino es llamado así porque una nueva variable representada por letras griegas se sobrepone a las letras latinas (tratamientos) del cuadrado latino de tal manera que cada letra griega ocurre una y sola una vez en cada fila y cada columna y una sola vez en cada letra latina.

Cuando una variable de respuesta no cumple con la suposición de normalidad o de igualdad de varianzas, se pueden utilizar ciertas transformaciones como: $\ln(x)$, \sqrt{x} , $\log(x)$, $\arcsen(x)$, etc. para hacer que dichas suposiciones se cumplan, todo depende de la habilidad para elegir la transformación adecuada, ver Ostle y Bartlett.

EJERCICIOS

- 11.1.- En un laboratorio hay muchos termómetros, los cuales se usan indistintamente para medir temperaturas. Realizar un experimento con todos los termómetros resulta costoso, por lo que se tomó una muestra de 4 de ellos para ver si hay diferencia significativa entre los termómetros. Estos fueron colocados en una célula, la cual se tiene a temperatura constante. Los datos son los siguientes en °C y se obtuvieron 3 lecturas de cada uno de ellos.

TERMOMETROS

1	2	3	4
0.98	0.33	-2.15	1.05
1.06	-1.46	1.70	1.27
1.96	0.20	0.48	-2.05

- a) Haga una tabla de análisis de varianza.
b) ¿Son los termómetros homogéneos?
- 11.2.- Se sospecha que cuatro máquinas llenadoras en una planta están sacando productos con diferentes pesos. Se realizó un experimento para comprobarlo y los datos en onzas son los siguientes:

Máquina	Pesos netos				
A	12.25	12.27	12.24	12.25	12.20
B	12.18	12.25	12.26		
C	12.24	12.23	12.23	12.20	
D	12.20	12.17	12.19	12.18	12.16

- a) Haga una tabla de ANDEVA.
b) ¿Hay diferencia significativa entre las máquinas con $\alpha = 0.05$?

11.3.- Se realizó un experimento con germinado de semillas, el cual tenía por objeto determinar el contenido de proteína de diferentes especies. El experimento se realizó con un diseño completamente al azar, obteniéndose los siguientes resultados:

lenteja	trébol	girasol	trigo	maíz	alegría
2.25	5.13	4.97	1.45	1.29	5.78
2.46	4.17	4.86	1.60	1.69	3.99
3.02	5.67	5.08	2.03	1.49	4.15
2.74	4.21	4.08	1.52	1.62	3.41
2.53	3.89	4.27	1.56	1.34	2.90
1.86	4.01	3.77	1.68	3.29	3.32

- a) ¿Existe diferencia en el contenido de proteína en las diferentes especies?. Use un nivel de significación del 5%.
- b) Identifique los pares de medias, si los hay, que son diferentes entre sí,

11.4.- Se tratan por irradiación del tumor a 8 ratones con adenocarcinoma mamario, a razón de 667 r, 5 veces por semana. Se toma una biopsia de cada tumor a las 48 horas de cesar la radiación y se hacen recuentos mitósicos de 3 minutos en serie, con los resultados siguientes:

Número de ratón							
1	2	3	4	5	6	7	8
19	73	50	11	1	26	12	47
26	70	59	10	11	15	12	47
			12	12	11	9	
					11		

¿Hay diferencia significativa entre los recuentos mitósicos medios de los distintos ratones?

11.5.- Un químico se interesa por determinar los efectos de la temperatura de almacenamiento en la conservación de manzanas. La repuesta en este estudio es el número de manzanas que se pudren después de un mes de almacenamiento. Decide usar cinco lotes de manzanas como bloques de material experimental. Escoge 120 manzanas de cada lote, las divide en cuatro porciones de igual tamaño y asigna los tratamientos al azar a las porciones. La variable tratamientos (temperaturas) es fijada deliberadamente en los siguientes niveles: 50°F, 55°F, 60°F y 70°F. Los resultados en número de manzanas podridas, son como sigue:

Lote	TRATAMIENTOS			
	50°F	55°F	60°F	70°F
1	8	5	7	10
2	14	10	3	5
5	12	8	6	5
4	9	8	5	7
5	12	9	4	8

- a) ¿ Son significativos los efectos de la temperatura con $\alpha = 54\%$?
- b) Identique los pares de medias, si los hay, que son significativamente diferentes entre si.
- 11.6.- Se utilizan cuatro medicamentos diferentes, A., para el tratamiento de cierta enfermedad. Estos medicamentos son ensayados en pacientes de tres diferentes hospitales. Los resultados siguientes muestran el número de casos que se han recuperado de la enfermedad por cada 100 personas que han tomado los medicamentos. El diseño de bloques aleatorizados ha sido empleado para eliminar los efectos de los diferentes hospitales.

HOSPITALES	MEDICAMENTOS			
	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄
B ₁	10	11	12	10
B ₂	19	9	18	7
B ₃	11	3	23	5

¿Son significativos los efectos de los medicamentos con $\alpha = 0.01$?

- 11.7.- Se hizo un estudio para determinar la cantidad de piretrina (una sustancia química extraída de una variedad de crisantemos usada en insecticidas). Se usaron cuatro métodos de extracción y las muestras fueron obtenidas de flores conservadas en tres condiciones diferentes: flores frescas, flores secas y conservadas por un año, y flores secas y conservadas por un año pero tratadas con un conservador. Los datos son los siguientes:

Condiciones de Conservación	% de píertrina obtenido				
	M E T O D O		C	D	
	A	B			
1	1.35	1.13	1.06	0.98	
2	1.40	1.13	1.26	1.22	
3	1.49	1.46	1.40	1.35	

¿Pueden considerarse los métodos de extracción diferentes con un nivel de significación del 1%?

- 11.8.- La rapidez con que sale la gasolina en tres tipos de llaves de mangueras de las gasolineras fue objeto de estudio. Se seleccionaron 5 operadores de un grupo de 25 para operar las llaves. Los datos obtenidos fueron en cc/seg, los siguientes:

OPERADORES	TIPO DE LLAVE		
	A	B	C
1	96.5	96.5	97.1
2	97.4	96.1	96.4
3	96.0	97.9	95.6
4	97.8	96.3	95.7
5	97.2	96.3	97.3

- a) ¿Existe diferencia significativa entre los tipos de llaves a un nivel de 1 %
- b) Identifique los pares de medias, si los hay, que son significativamente diferentes entre si.

11.9.- Se desea determinar de que manera la solubilidad del metronidazol se ve afectada por los parabenos (conservadores) y las macromoléculas no iónicas, para lo cual se realiza el siguiente experimento: se presparan 4 soluciones de macromoléculas no iónicas diferentes y se coloca cada una en tres conservadores; luego se determinan las solubilidades de cada una de la macromoléculas, obteniéndose los siguientes resultados:

CONSERVADORES	MACROMOLECULA NO IONICA				
	myrj 52	pluronic F-68	tween 80	peg 4000	
metilparabeno	146	107	153	107	
etilparabeno	199	114	310	104	
propilparabeno	364	115	781	108	

Haga una tabla de ANDEVA y determine si existe diferencia significativa entre los conservadores con $\alpha = 0.05$,

(11.10.- Una analista de un laboratorio farmacéutico necesita decidir si es necesario agregar o no conservador a una solución de acacia al 25%. Ella sabe que si no cambia el pH de la solución después

de agregar el conservador, no es necesario agregar más de éste; por lo que decide realizar el siguiente experimento: prepara una solución de acacia al 25% y la divide en cuatro porciones. Cada porción estará en almacenamiento durante un tiempo definido: después de ese tiempo se tomarán 6 muestras; a cada una de ellas se le agregará un conservador excepto a una. Luego se mide el pH de la muestra, obteniéndose los siguientes resultados.

CONSERVADOR	TIEMPO DE ALMACENAMIENTO			
	0 días	1 sem.	2 sem.	6 sem.
ninguno	4.80	4.78	4.60	4.30
ácido benzoico	4.72	4.7»	4.48	4.47
propilparabeno	4.79	4.60	4.65	4.35
metilparabeno	4.79	4.70	4.70	4.25
clorobutanol	4.80	4.78	4.62	4.34
cloruro de benzalconio	4.79	4.75	4.70	4.32

La química de este laboratorio farmacéutico no sabe como analizar los resultados, ¿ de qué manera le ayudaría usted?

11.11.- Considérese el estudio siguiente para comparar 3 vitaminas. Se reunieron para el estudio 7 conjuntos de trillizos de 1 año de edad. Cada niño de una familia dada recibió al azar uno de 3 regímenes vitamínicos por un período de 2 años. Se pensó que un indicador del efecto global de las vitaminas era el crecimiento. Supóngase que los siguientes datos son pesos ganados en libras:

FAMILIA	VITAMINA		
	A	B	C
1	11.2	9.3	10.4
2	9.7	12.0	11,5
3	8.2	9.4	8.9
4	9.1	10.1	7.9
5	11.0	10.3	10.8
6	7.3	9.1	8.4
7	8.2	8.3	10.1

Contrastar para ver si las vitaminas producen la misma media de ganancia de peso.

11.12.- Tres métodos clínicos para determinar el contenido de hemoglobina fueron ensayados para determinar si había diferencia significativa entre los resultados. Se emplearon seis sujetos, constituyendo cada sujeto un bloque. Analizar los datos de la tabla siguiente, en la cual las cifras representan g/100 mL.

METODOS	BLOQUES (INDIVIDUOS)					
	A	B	C	D	E	F
1	14	12	15	15	10	11
2	18	16	17	19	12	13
3	15	14	12	14	12	9

11.13.- Se probaron dietas en hamsters, en busca de diferencias significativas en peso final medido después de un período de tiempo específico. Los sujetos fueron agrupados en bloques de dos, basándose los bloques en una predicción del peso final. Los pesos se expresan en gramos. Establezca si hay diferencia significativa entre las dietas.

Dieta	BLOQUES									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	105	101	103	108	106	109	105	106	104	103
B	110	108	106	112	110	112	110	106	108	108

11.14.- Tres especies de Drosophila pseudoobscura fueron producidas para resistir un insecticida. Tres niveles de concentración de insecticidas fueron analizados en las tres especies engendradas por endogamia. Los datos, expresados en porcentajes de mortalidad durante un período determinado, están basados en cinco duplicaciones por combinación de tratamiento. Analizar con estos datos la diferencia significativa en la tasa de mortalidad entre especies y entre niveles de insecticida, y determinar si hay interacción entre la especie y el insecticida.

NIVEL DE INSECTICIDA

ESPECIE	1	2	3
A	60	44	46
	55	37	51
	52	54	63
	38	57	66
	31	65	74
B	58	63	63
	53	59	44
	50	54	46
	55	38	66
	30	38	71
C	37	59	51
	43	51	80
	57	53	68
	60	62	71
	66	71	55

11.15.- Tres técnicos de laboratorio determinan colesterol en la sangre en miligramos por centímetro. Para contrastar la conformidad de resultados de los tres técnicos, se reparten sueros procedentes de cinco sujetos normales en sextas partes para que cada técnico haga dos determinaciones. Los datos son:

SUJETO	OBSERVADOR					
	1		2		3	
1	190	193	187	186	192	190
2	172	170	164	166	168	169
3	180	178	176	177	178	181
4	206	204	200	201	203	205
5	175	173	172	173	176	177

- a) Decir y examinar si cada factor es fijo o aleatorio.
 b) Efectuar el análisis de varianza de dos factores adecuado.

11.16.- Considérese el experimento siguiente como investigación del efecto de fumar sobre la actividad física. Se clasificaron 27 individuos en tres grupos según sus hábitos de fumar y se les asignó al azar a una de las tres pruebas siguientes: ergómetro de bicicleta, banda de esfuerzo ó caminata, registrándose el tiempo en minutos hasta la máxima absorción de oxígeno; los resultados son:

PRUEBA			
HABITOS DE FUMAR	Bicicleta	Banda de esfuerzo	Caminata
No fumadores	12.8	16.2	22.6
	13.5	18.1	19.3
	11.2	17.8	18.9
Fumadores moderados	10.9	15.5	20.1
	11.1	13.8	21.0
	9.8	16.2	15.9
Grandes fumadores	8.7	14.7	16.2
	9.2	13.2	16.1
	7.5	8.1	17.8

- a) Decir de cada factor si es fijo o aleatorio.
 b) Contrastar las diversas hipótesis valiéndose del análisis apropiado de varianza de dos factores.

11.17.- Se realizó un experimento para fijar los efectos de la temperatura y humedad en la resistencia efectiva de un tipo normal de resistencia. Se obtuvieron los siguientes datos. Analice e interprete los datos.

VALORES CODIFICADOS DE RESISTENCIAS

TEMPERATURA	- 29 °C		21 °C		71 °C	
HUMEDAD	10%	50%	10%	50%	10%	50%
	23	24	26	24	25	27
	24	24	25	25	26	26
	25	25	26	26	26	23
	24	26	26	26	28	28

11.18.- Se probaron cinco variedades de duraznos y cuatro fertilizantes. De cada parcela experimental se seleccionaron al azar 3 cuadros y se anotaron sus cosechas como sigue:

FERTILIZANTES	VARIEDADES				
	1	2	3	4	5
1	57	26	39	23	48
	46	38	39	36	35
	28	20	43	18	48
2	67	44	57	74	61
	72	68	61	47	60
	66	64	61	69	75
3	95	92	91	98	78
	90	89	82	85	89
	89	99	98	85	95
4	92	96	98	99	99
	88	95	93	90	98
	99	99	98	98	99

- a) Construya una tabla de ANDEVA.
- b) Pruebe la hipótesis de iguales medias de variedad,
- c) Pruebe la hipótesis de iguales medias de fertilizantes.
- d) ¿A qué conclusiones llega usted como resultado de este experimento?

11.19.- Un superintendente de construcción desea comparar las velocidades relativas de ejecución de varias combinaciones de piso y tiempo de lustrado. Se dispone de tres ceras para investigarse juntas con tres tiempos de lustrado. Se seleccionaron 18 áreas de pisos homogéneos y se asignaron 2 al azar a cada una de las 9 combinaciones de tratamiento. Analice y evalúe los siguientes datos:

CERA	VELOCIDADES DE EJECUCION (alta es mejor que baja)								
	A			B			C		
TIEMPO DE LUSTRADO (en min.)	15	30	45	15	30	45	15	30	45
	7	7.5	8.2	7	7.2	7.1	8	9.2	9.6
	8	7.4	8.6	7	7.6	7	8	9.4	9.5

11.20.- Se hace una investigación sobre la variabilidad en el orden que se toman las presiones a un sujeto por distintos observadores. Se utilizó un CUADRADO LATINO de 8 por 8 para asignar los sujetos a los observadores. Los bloques y el tratamiento fueron asignados de la siguiente forma: (columnas) observadores, (filas) sujetos y (letras) orden de asignación de sujetos a observadores. A continuación aparecen las presiones sanguíneas leidas con la letra entre paréntesis indicando el diseño utilizado,

SUJETOS	OBSERVADORES							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	(A) 128	(D) 108	(C) 110	(B) 106	(E) 100	(F) 102	(G) 112	(H) 110
2	(B) 122	(C) 100	(D) 120	(A) 128	(F) 108	(E) 130	(H) 120	(G) 110
3	(D) 110	(A) 48	(B) 110	(C) 120	(G) 102	(H) 108	(E) 108	(F) 104
4	(C) 96	(B) 96	(A) 90	(D) 106	(H) 96	(G) 90	(F) 98	(E) 98
5	(E) 120	(F) 128	(G) 130	(H) 128	(A) 110	(D) 132	(C) 128	(B) 134
6	(F) 140	(E) 128	(H) 130	(G) 130	(B) 126	(C) 108	(D) 142	(A) 140
7	(G) 110	(H) 108	(E) 110	(F) 106	(D) 114	(A) 110	(B) 114	(C) 118
8	(H) 102	(G) 118	(F) 108	(E) 110	(C) 114	(B) 110	(A) 122	(D) 110

Determine si hay diferencia significativa entre los órdenes con $\alpha = 5\%$

11.21.- Se desea saber si la intensidad de flujo de los combustibles a través de diferentes tipos de inyectores se ve afectada por la temperatura. Seis operadores elegidos al azar, realizaron un experimento a seis temperaturas distintas con seis diferentes tipos de inyectores. En la siguiente tabla se presentan los resultados codificados, donde: A = 0°C, B = 5°C, C = 10°C, D = 20°C, E = 40°C y F = 80°C.

Volumen de combustible que atraviesa el inyector

OPERADORES	TIPO DE INYECTOR					
	1	2	3	4	S	6
1	(A) 2 4 (B) 15	(F) 30	(E) 32	(C) 13	(D) 24	
2	(E) 26	(F) 34	(c) 24	(D) 22	(B) 19	(A) 18
3	(D) 24	(C) 22	(B) 18	(A) 16	(F) 29	(E) 27
4	(C) 16	(A) 20	(E) 28	(F) 28	(D) 30	(B) 10
5	(B) 20	(D) 32	(A) 22	(C) 18	(E) 30	(F) 33
6	(F) 33	(E) 29	(D) 27	(B) 11	(A) 12	(C) 15

Determine si hay diferencia significativa en el volumen de combustible que atraviesa el inyector para las distintas temperaturas con $\alpha = 0.01$.

CAPITULO 12: REGRESION Y CORRELACION12.1 INTRODUCCION:

Frecuentemente en investigación estamos interesados en estudiar la relación entre dos variables como cantidad de fertilizante y producción, concentración de una droga inyectada a un animal de laboratorio y latidos del corazón, dureza de los plásticos tratados con calor durante diferentes períodos de tiempo. La naturaleza y grado de relación entre las variables como estas pueden ser analizadas por dos técnicas: *Regresión* y *Correlación* que aunque están relacionadas tienen propósitos diferentes e interpretaciones diferentes.

Hay una distinción entre estos dos procedimientos y no debe sustituirse uno por el otro en una situación experimental dada.

La palabra *regresión* surgió en 1880 cuando el científico inglés Sir Francis Galton, dedicado a investigaciones genéticas, trató de establecer la relación entre las características de padre e hijo. Al comparar las alturas de padres con las de sus respectivos hijos, notó que cuando los padres eran altos, los hijos, en general, no alcanzaban sus alturas y cuando los padres eran bajos de estatura, los hijos tendían a ser más altos que sus padres, de lo cual concluyó que las características genéticas tendían a "regresar" a un valor medio de la población.

El análisis de regresión es útil para determinar la forma probable de la relación entre las variables (la ecuación que relaciona a ambas variables) cuando hay un fenómeno de causa y efecto; y su objetivo principal es el de predecir o estimar el valor de una variable (dependiente (Y)) correspondiente al valor dado de la otra variable (independiente (X)). En otras palabras, el investigador **decide cuales valores** tomará la variable independiente, mientras que los **valores de la variable dependiente** están determinados por la relación que existe, si la hay, entre la variable dependiente y la independiente. Por lo tanto, debe emplearse el análisis de regresión en situaciones experimentales en las cuales el in-

vestigador controla la variable independiente.

El análisis de correlación, por otra parte, consiste en la medición del grado o intensidad de **asociación** entre dos variables sin importar cual es causa y cual es efecto. Cuando se puede demostrar que la variación de una variable está de algún modo asociada con la variación de otra, entonces se puede decir que las dos variables están **correlacionadas**. Una correlación puede ser **positiva** (cuando al aumentar una variable la otra también aumenta) o **negativa** (cuando al aumentar una variable la otra disminuye). Por otro lado, si la variación de una variable no corresponde en absoluto a la variación de la otra, entonces no existe **ninguna** asociación y, por lo tanto, **ninguna correlación** entre las dos variables. Así, por ejemplo, si un investigador desea determinar el grado de asociación que existe entre la biomasa del fitoplancton y la cantidad de clorofila "a". El investigador saca repetidas muestras de agua de un lugar de muestreo en un lago y mide la clorofila "a" y la biomasa en cada muestra. En esta situación, el investigador no tiene control sobre una u otra variable, puesto que los valores de la clorofila "a" y de la biomasa encontrados en cada muestra serán "**los que la Naturaleza provee**". Por lo tanto, se deduce que la clorofila "a" y la biomasa son ambas variables aleatorias, y la correlación es , por lo tanto, el procedimiento estadístico adecuado.

Es importante enfatizar que en lo que respecta al análisis de correlación, ni X, ni Y representa una variable independiente; en otras palabras, tanto X como Y son variables aleatorias. Por otra parte, en el análisis de regresión, X representa la variable independiente y Y la variable dependiente.

12.2 DIAGRAMAS DE DISPERSION:

El primer paso a realizar en el estudio de la relación entre dos variables es el **diagrama de dispersión** que consiste en representar los pares de valores (X.,Y-) como puntos en un sistema de ejes cartesianos XY. Debido a la variación del muestreo, los puntos estarán dispersos.



Fig. 72.7 Diagrama de Dispersion

Si los puntos muestran una tendencia lineal positiva o negativa se le puede ajustar una linea recta que servirá entre otras cosas para predecir valores de Y correspondientes a valores de X.

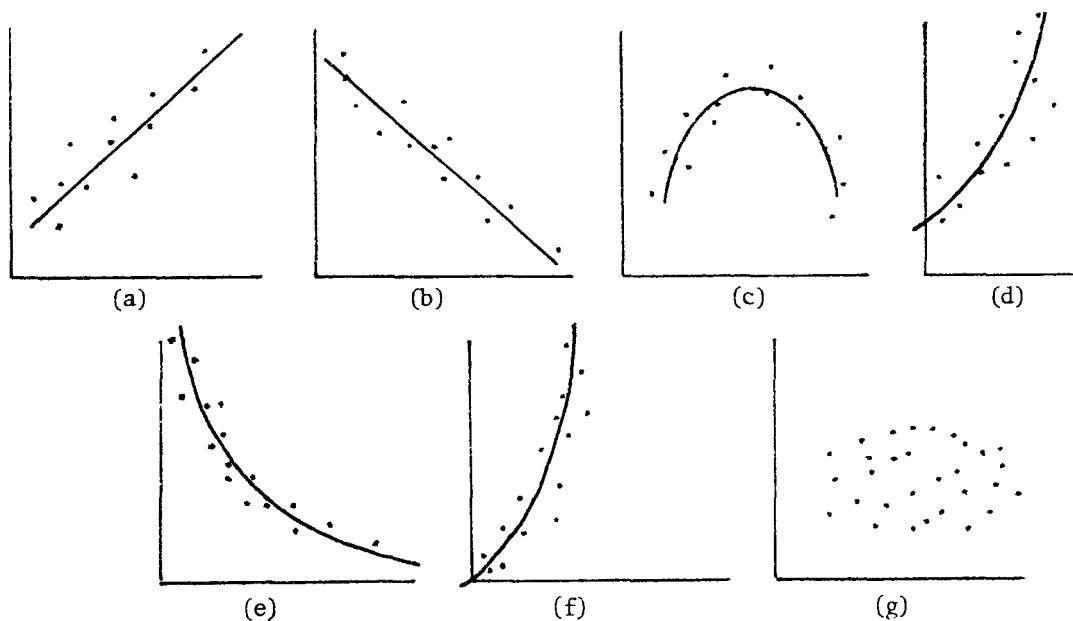


Fig. 12.2 Diagramas de dispersión que muestran: (a) relación lineal positiva, (b) relación lineal negativa, (c) relación parabólica, (d) relación exponencial, (e) y (f) relaciones potenciales y (g) no relación.

Después que se han dibujado los puntos, un examen del diagrama puede revelar que los puntos siguen un patrón, mismo que indicará el modelo matemático a utilizarse en el análisis. Otra forma de llegar al modelo puede ser por consideraciones teóricas o porque se sabe por experiencia o por referencia como se comportan las variables.

El análisis de regresión puede ser lineal o no lineal (curvilinear) y también lineal simple o lineal múltiple; el lineal simple se ocupa solo de dos variables y el múltiple de tres o más variables. A continuación se estudiará el análisis de regresión simple y posteriormente en este capítulo nos ocuparemos de los demás casos.

12.3 REGRESION LINEAL SIMPLE:

Después que se ha determinado el modelo matemático a utilizar y se conoce que es lineal se procede a ajustar una recta llamada **Recta de Regresión o Recta de Ajuste**.

SUPOSICIONES PARA LA REGRESION LINEAL:

Las suposiciones para la **Regresión Lineal** son:

- 1.- Los valores de la variable independiente X son fijos, a X se le llama variable no aleatoria,
- 2.- Para cada valor de X hay una subpoblación de valores de Y y cada subpoblación de valores de Y debe estar normalmente distribuida.
- 5.- Las varianzas de las subpoblaciones de Y deben ser iguales.

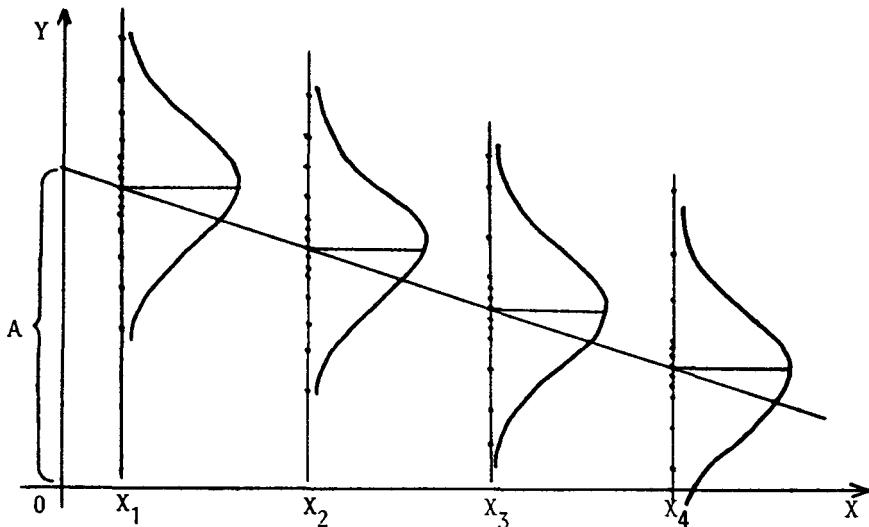


Fig. 12.3 Para cada valor de X hay una subpoblación de valores de Y normalmente distribuida.

- 4.- Las medias de las subpoblaciones de Y todas están sobre una recta.
(Suposición de linealidad).

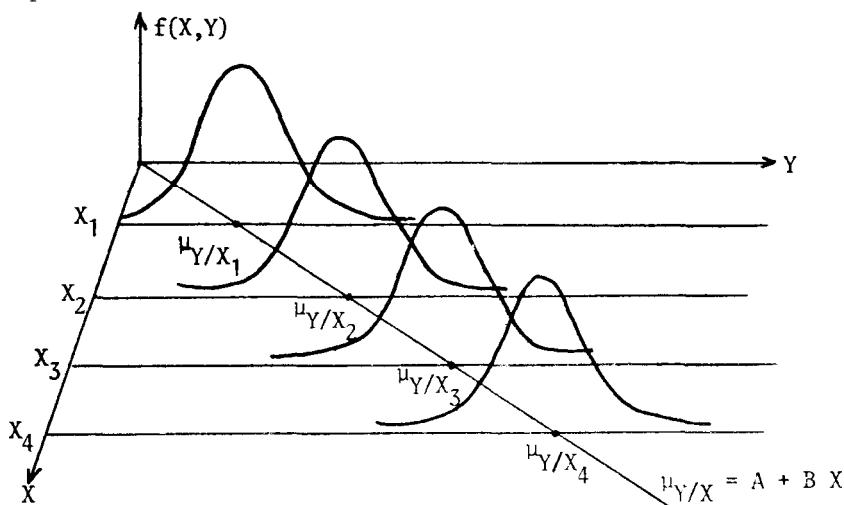


Fig. 12.4 Las medias de las subpoblaciones de Y están todas sobre una recta.

- 5.- Los valores de Y son estadísticamente independientes; es decir, los valores de Y correspondientes a un valor de X no dependen de los valores de Y para otro valor de X.

Bajo estas suposiciones la relación que queremos estimar es:

Esto significa que el valor medio de Y para un valor fijo de X es igual a $A + BX$. Las constantes A y B son la *ordenada al origen* y la *pendiente* respectivamente.

Nuestro problema es utilizar la información en la muestra de tamaño n para estimar los parámetros A y B ;

Una Y seleccionada aleatoriamente se representa de la siguiente manera:

$$Y_i = A + B X_i + \epsilon_i$$

donde ϵ , es el error, y si lo despejamos:

$$\varepsilon_i = Y_i - (A + B X_i) = Y_i - \mu_{Y|X}$$

Podemos ver que ϵ_i es la desviación de cada valor de Y observado con respecto a la media de la subpoblación de valores de Y .

Siguiendo nuestra convención de usar letras griegas para parámetros y letras latinas para estadígrafos, aquí deberíamos haber usado α y β , pero estas han sido usadas para las probabilidades de errores de Tipo I y II; para evitar confusiones utilizamos A y B (mayúsculas) para los parámetros de regresión y a y b (minúsculas) para estadígrafos muestrales.

12.4 MINIMOS CUADRADOS:

La ecuación de regresión de la población (12.1) se estima con la ecuación

$$\hat{Y} = a + b X$$

donde: \hat{Y} , a y b son estimadores de $\mu_{Y/X}$, A y B respectivamente. Para obtener los estimadores a y b utilizamos el método de **Mínimos Cuadrados**

El método de **Mínimos Cuadrados** consiste en ajustar la recta que cumpla con la condición de que la suma de los cuadrados de las desviaciones de cada valor observado Y de su correspondiente valor de predicción \hat{Y} , sea mínima. En otras palabras, la suma:

$$\sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - a - b X_i)^2$$

debe ser mínima. Esto se ilustra en la fig 12.5.

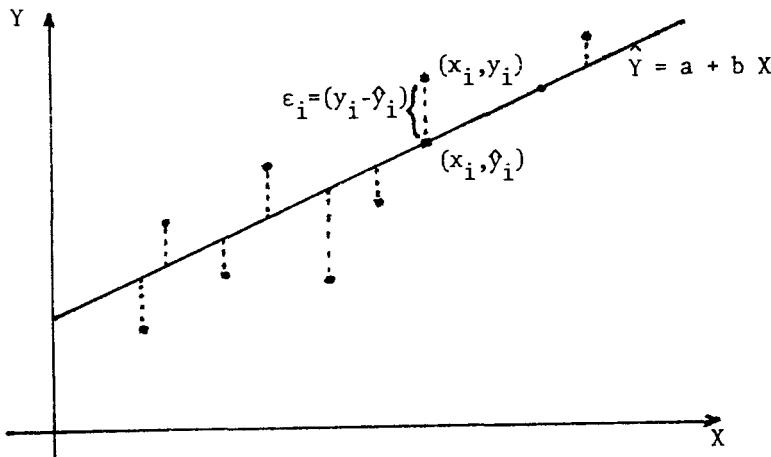


Fig. 12.5 Desviaciones de valores observados de los valores de predicción.

Derivando parcialmente la suma de cuadrados con respecto a "a" y a "b" e igualando a cero para minimizarla, tenemos:

$$- 2 \sum (Y_i - a - bX_i) = 0$$

$$- 2 \sum (Y_i - a - bX_i) X_i = 0$$

que dan origen a las **ecuaciones normales** para la **recta de menores cuadrados**.

despejando "a" de (12.2) y sustituyéndola en (12.3), obtenemos "b"

$$b = \frac{\sum X_i Y_i - n \bar{X} \bar{Y}}{\sum X_i^2 - n \bar{X}^2} \quad \dots \dots \dots \quad (12.5)$$

Al dividir el numerador y el denominador de (12.5) entre $(n-1)$ podemos escribir b en términos del estimador de la varianza de $x_i(S^2_x)$

y de $\frac{\sum X_i Y_i - n \bar{X} \bar{Y}}{n - 1}$ que es el estimador de la varianza combinada de

las dos variables X y Y , llamada **Covarianza**,

$$C_{x,y} = \frac{\sum X_i Y_i - n \bar{X} \bar{Y}}{n - 1}$$

por lo tanto, $b = \frac{c_{x,y}}{s_x^2}$ (12.6)

En términos de desviaciones de las medias, las sumas de cuadrados y de los productos cruzados pueden definirse como sigue:

$$m_{11} = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum Y_i^2 - n \bar{Y}^2$$

$$m_{22} = \sum (X_i - \bar{X})^2 = \sum X_i^2 - n \bar{X}^2$$

$$m_{12} = \sum (Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X}) = \sum Y_i X_i - n \bar{Y} \bar{X}$$

Con estas definiciones, la fórmula para calcular "b" (12.5) se puede escribir en forma compacta por:

$$b = \frac{m_{12}}{m_{22}}$$

Obtenidos los valores de "a" y "b" por las ecuaciones (12.4) y (12.5) se sustituyen en la ecuación de la recta

$$\hat{Y} = a + b X$$

Para representarla sobre el diagrama de dispersión sabemos que basta tomar dos puntos, para lo cual se asignan valores arbitrarios a X y se obtienen los correspondientes valores de \hat{Y} .

Ejemplo 12.1:

Sí! llevó a cabo un experimento para estudiar el efecto de cierta droga en la disminución del ritmo cardíaco en adultos. La variable independiente es la dosis de la droga en miligramos, y la variable dependiente es la diferencia entre el ritmo más bajo registrado después de la administración de la droga y el ritmo antes de la administración de la droga (control). Los datos se muestran a continuación:

Dosis (mg)	Reducción del ritmo cardíaco (latidos/min)
X	Y
0.50	10
0.75	8
1.00	12
1.25	12
1.50	14
1.75	12
2.00	16
2.25	18
2.50	17
2.75	20
3.00	18
3.25	20
3.50	21

Podemos observar que la variable X de este ejemplo cumple con la suposición de valores fijos. Los valores de X fueron fijados de antemano y no se les permitieron variar aleatoriamente.

Como se mencionó anteriormente el primer paso en un análisis de regresión es el de representar los puntos en un diagrama de dispersión.

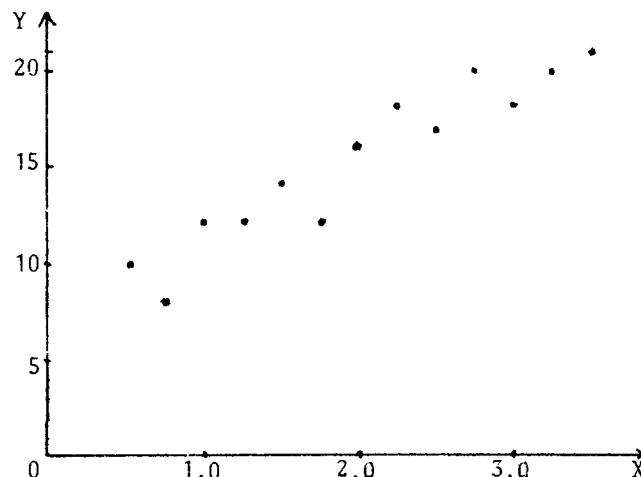


Fig. 12.6 Diagrama de dispersión para los datos del Ejemplo 12.1

Como podemos observar los puntos siguen una relación lineal positiva, por lo tanto, se procede a determinar la recta de ajuste.

X	Y	X^2	XY
0.50	10	0.2500	5.0
0.75	8	0.5625	6.0
1.00	12	1.0000	12.0
1.25	12	1.5625	15.0
1.50	14	2.2500	21.0
1.75	12	3.0625	21.0
2.00	16	4.0000	32.0
2.25	18	5.0625	40.5
2.50	17	6.2500	42.5
2.75	20	7.5625	55.0
3.00	18	9.0000	54.0
3.25	20	10.5625	65.0
3.50	21	12.2500	75.5

$\bar{X} = 2.00$	$\bar{Y} = 15.2308$		
$S_x = 0.9736$	$S_y = 4.1864$	$\Sigma X^2 = 63.3750$	$\Sigma XY = 442.500$
$S_x^2 = 0.9479$	$S_y^2 = 17.5256$		

$$b = \frac{\sum XY - n \bar{X} \bar{Y}}{\sum X^2 - n \bar{X}^2} = \frac{442.5 - (13)(2)(15.2308)}{63.3750 - (13)(2)^2} = 4.0879$$

$$a = \bar{Y} - b \bar{X} = 15.2308 - 4.0879 (2) = 7.0549$$

La ecuación de la recta de ajuste es:

$$\hat{Y} = 7.0549 + 4.0879 X$$

Al sustituir X por los valores 1.00 y 3.00 se obtienen los puntos: (1.00, 11.14) y (3.00, 19.52) que se utilizan para representar la recta sobre el diagrama de dispersión (Fig. 12.7)

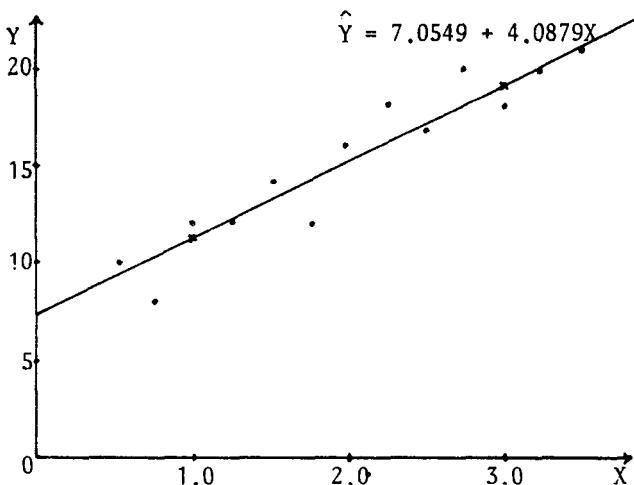


Fig. 12.7 Recta de ajuste del ejemplo 12.1

Aunque la recta obtenida se desvía de muchos de los puntos, estamos seguros que cualquier otra recta que tracemos, la suma de los cuadrados de las desviaciones verticales a ella será mayor que la suma de cuadrados de las desviaciones a la recta de mínimos cuadrados.

12.5 INFERENCIAS EN EL ANALISIS DE REGRESION:

Aunque la recta de mínimos cuadrados es la recta que mejor se ajusta a los puntos, todavía muchos de estos se desvian de ella. La medida numérica de tales desviaciones es el estimador insesgado de la varianza de la regresión de la población, que se define como:

$$\begin{aligned}
 S_{Y/X}^2 &= \frac{\sum \epsilon_i^2}{n - 2} = \frac{\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n - 2} \\
 &= \frac{\sum (Y_i - a - b X_i)^2}{n - 2} \\
 &= \frac{\sum (Y_i - \bar{Y} + b \bar{X} - b X_i)^2}{n - 2} \\
 &= \frac{\sum [(Y_i - \bar{Y}) - b (X_i - \bar{X})]^2}{n - 2} \quad \dots \dots \dots (12.7)
 \end{aligned}$$

Desarrollando el cuadrado, aplicando propiedades de las sumas y sustituyendo la ecuación (12,6) en (12,7) se llega a la expresión:

$$S_{Y/X}^2 = \frac{n-1}{n-2} (S_Y^2 - b^2 S_X^2) \quad \dots \dots \dots (12.8)$$

La raíz cuadrada positiva de la expresión $(12,8)$ es llamada **Error Estándar de Estimación**, esto es:

$$S_{Y/X} = \sqrt{\frac{n-1}{n-2} (S_y^2 - b^2 S_x^2)}$$

Ejemplo 12.2:

Para los datos del ejemplo 12, 1,

$$S_{Y/X} = \sqrt{\frac{12}{\pi} [17.5256 - (4.0879)^2 (0.9479)]}$$

$$= \sqrt{1.8385}$$

$$= 1.3558$$

12.5.1 ESTIMACION Y PRUEBA DE HIPOTESIS ACERCA DE LA PENDIENTE PE LA RECTA DE REGRESION POBLACIONAL, B:

Para probar la hipótesis nula:

$$H_O : B = B_O$$

se utiliza la distribución *t de Student* con $n - 2$ grados de libertad ya que se desconoce la varianza poblacional σ_B^2 ; el estimador de esta varianza se define por:

$$S_b^2 = \frac{S_{Y/X}^2}{(n-1)S_x^2}$$

Por lo tanto el estadígrafo de prueba se define como:

$$t = \frac{b - B_0}{\frac{s_{Y/X}}{\sqrt{n-1} s_x}}, \quad gl = n-2$$

El intervalo de confianza de nivel $1 - \alpha$ está dado por:

$$P(b - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-2} \frac{s_{Y/X}}{\sqrt{n-1} s_x} < B < b + t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-2} \frac{s_{Y/X}}{\sqrt{n-1} s_x}) = 1 - \alpha$$

Una prueba muy sencilla y útil es la *prueba de independencia* entre las variables. Si la hipótesis nula $H_0 : B = 0$ es aceptada, Y no depende linealmente de X, en caso contrario, se dice que Y depende de X.

Ejemplo 12.3:

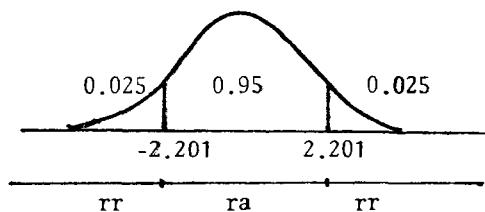
Usando los datos del ejemplo 12.1 probaremos la hipótesis de independencia, $H_0 : B = 0$ y determinaremos el intervalo de confianza del 901, para B.

$$H_0 : B = 0$$

$$H_a : B \neq 0$$

$$\alpha = 0.05, \quad n = 13$$

$$t = \frac{b - 0}{\frac{s_{Y/X}}{\sqrt{n-1} s_x}}, \quad gl = n-2 = 11$$



$$t = \frac{4.0879}{\frac{1.3558}{\sqrt{12} 0.9736}} = 10.1692$$

Como el valor calculado de t cae en la región de rechazo, se rechaza la hipótesis nula y por consiguiente Y depende significativamente de X en forma lineal.

El intervalo de confianza para B es:

$$P(4.0879 - 1.7939 \frac{1.3558}{\sqrt{12} 0.9736} < B < 4.0879 + 1.7939 \frac{1.3558}{\sqrt{12} 0.9736}) = 0.90$$

$$P(4.0879 - 0.7211 < B < 4.0879 + 0.7211) = 0.90$$

$$P(3.3668 < B < 4.8090) = 0.90$$

12.5.2 ESTIMACION Y PRUEBA DE HIPOTESIS ACERCA DE LA ORDENADA AL ORIGEN, A

Para probar la hipótesis nula $H_0: A = A_0$, se utiliza la distribución ***t de student*** con $n - 2$ grados de libertad y cuya expresión está dada por:

$$t = \frac{a - A_0}{S_{Y/X} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{(n-1) S_x^2}}}, \quad g.l. = n-2$$

El intervalo de confianza de nivel $1-\alpha$ para A es:

$$P\left(a - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-2} S_{Y/X} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{(n-1) S_x^2}} < A < a + t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-2} S_{Y/X}^2 \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{(n-1) S_x^2}}\right) = 1-\alpha$$

Ejemplo.12.4:

Para nuestro ejemplo ilustrativo 12.1, el intervalo de confianza del 95% para A es:

$$P(7.0549 - 2.2010(1.355) \sqrt{\frac{1}{13} + \frac{2^2}{T_2(0.9479)}} < A < \dots) = 0.95$$

$$P(7.0549 - 1.9538 < A < 7.0549 + 1.9538) = 0.95$$

$$P(5.1014 < A < 9.0085) = 0.95$$

12.5.3 ESTIMACION ACERCA DE LA MEDIA $\mu_{Y/X}$:

A veces es conveniente estimar el valor medio o esperado de Y para un valor dado de X, tal estimación se hace con el intervalo de confianza

$$P(\hat{Y}_o - t_{1-\alpha/2, n-2} s_{Y/X} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(X_o - \bar{X})^2}{(n-1) S_x^2}} < \mu_{Y/X} < \dots) = 1 - \alpha$$

donde $\hat{Y}_o = a + b X_o$

Al calcular los límites de confianza para los valores medios, estos se obtienen para cada valor de X_o ; tales límites serán más estrechos a medida que se aproximan a la media de la variable independiente y más amplios a medida que se alejan de ella, por esta razón se obtienen límites curvos llamados **bandas de confianza** dentro de los cuales queda comprendida la recta verdadera para un nivel de significación α .

Para trazar las bandas de confianza se elegirán cuando menos 3 valores de X_o dos valores extremos y uno intermedio, y se harán las estimaciones por intervalo. Estos intervalos se dibujan sobre el diagrama de dispersión uniendo todos los puntos generados por los límites inferiores

y por otro lado, todos los correspondientes a los límites superiores.

Ejemplo 12.5:

Volviendo a nuestro ejemplo numérico (ejemplo 12.1), para $X_0 = 3.15$, $\hat{Y}_0 = 7.0549 + 4.0879(3.15) = 19.9318$. El intervalo de confianza de $\mu_{Y/X}$ del 95%, es:

$$P(19.9318 - 2.2010(1.3558) \sqrt{\frac{1}{13} + \frac{(3.15 - 2)^2}{12(0.9479)}} < \mu_{Y/X} < \dots) = 0.95$$

$$P(19.9318 - 1.3116 < \mu_{Y/X} < 19.9318 + 1.3116) = 0.95$$

$$P(18.6202 < \mu_{Y/X} < 21.2435) = 0.95$$

Intervalos de confianza del 95% de $\mu_{Y/X}$ para otros valores de X_0 se muestran en la siguiente tabla:

Estimación por intervalo de confianza para $\mu_{Y/X}$ para la construcción de una banda de confianza del 95%.

X_0	\hat{Y}_0	$\hat{Y}_0 \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-2} S_{Y/X} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{(n-1)S_x^2}}$
0.1	7.4637	(5.5900, 9.3575)
0.9	10.7341	(9.4565, 12.0116)
1.8	14.4132	(13.5668, 15.2595)
2.4	16.8659	(15.9658, 17.7661)
3.1	19.7275	(18.4499, 21.0051)
4.0	23.4066	(21.4530, 25.3601)

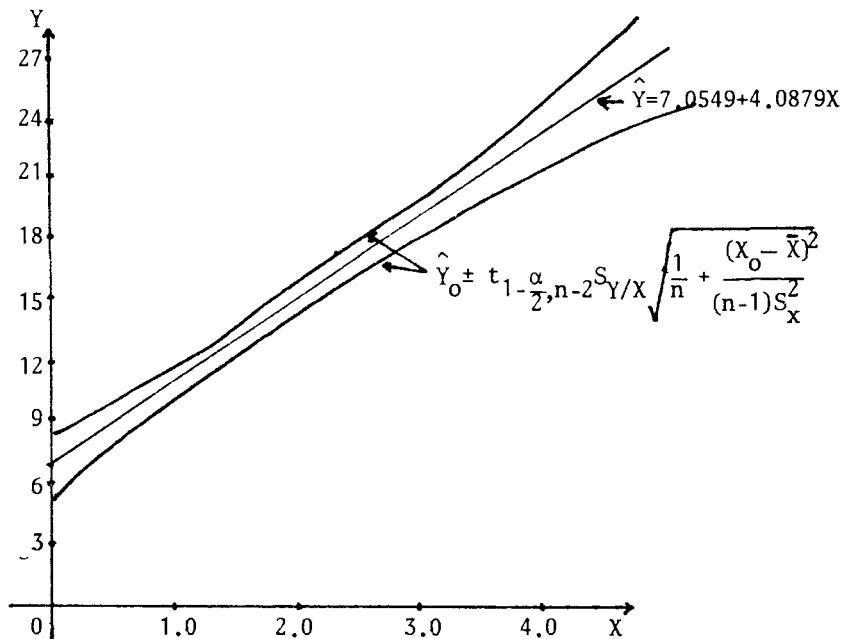


Fig. 12.8 Bandas de confianza para la media $\mu_{Y/X}$

12.5.4 INTERVALO DE CONFIANZA ACERCA DE UN VALOR INDIVIDUAL DE PREDICCIÓN O ESTIMACIÓN \hat{Y} :

Como las bandas de confianza se abren a medida que X_0 se aleja de la media \bar{X} , resulta aventurado hacer predicciones sobre Y para valores fuera de la escala de valores de X empleada para establecer la ecuación de regresión de la muestra. A menos que se esté razonablemente seguro que existe la misma función de regresión sobre un amplio rango de valores de X , por haberse experimentado en una muestra, se podrá usar valores de X_0 alejados de \bar{X} para predecir valores de Y .

Cuando se hacen predicciones, éstas, más que ser sobre valores medios de Y , ($\hat{\mu}_{Y/X}$) son para valores individuales \hat{Y} , por lo tanto el

error debido al azar (error de estimación ϵ_i) es una fuente adicional de variación, por ello la varianza se ve aumentada y el intervalo de confianza para un valor de predicción \hat{Y} es más amplio que el de $\mu_{Y/X}$.

$$P(\hat{Y}_o - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-2} s_{Y/X} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_o - \bar{x})^2}{(n-1)s_x^2}} < \hat{Y} < \dots) = 1 - \alpha$$

Ejemplo 12.6:

En la siguiente tabla se muestran los intervalos de confianza del 95% para distintos valores individuales de predicción, usando los datos del ejemplo 12.1.

Estimación por intervalo para la construcción de una banda de confianza del 95% para \hat{Y} .

x_o	\hat{Y}_o	$\hat{Y}_o \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-2} s_{Y/X} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_o - \bar{x})^2}{(n-1)s_x^2}}$
0.1	7.4637	(3.9401 , 10.9873)
0.9	10.7341	(7.4880 , 13.9801)
1.8	14.4132	(11.3114 , 17.5150)
2.4	16.8659	(13.7490 , 19.9828)
3.1	19.7275	(16.4814 , 22.9735)
4.0	23.4066	(19.8399 , 26.9733)

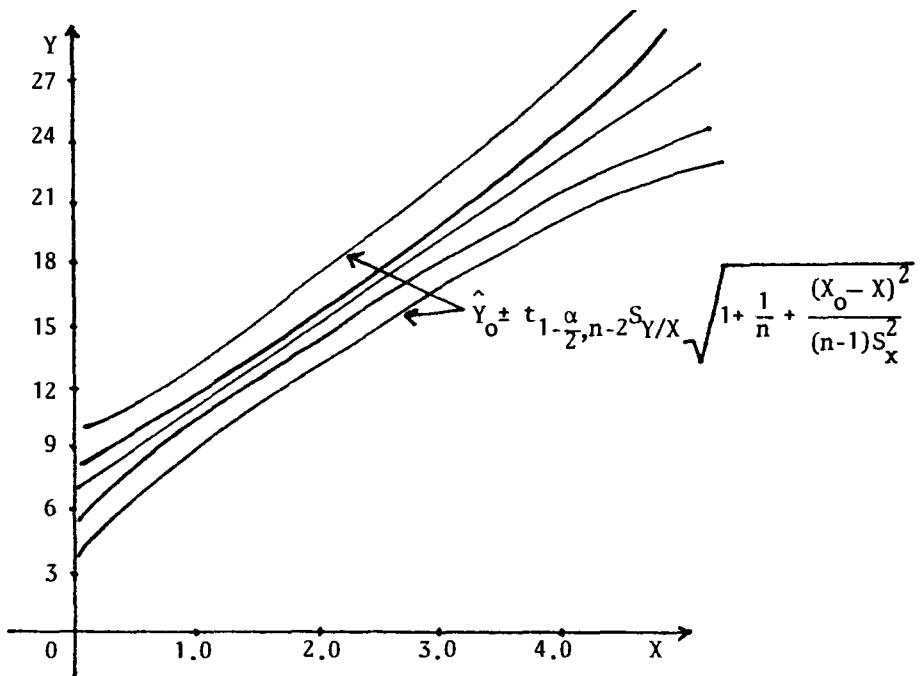


Fig. 12.9 Bandas de confianza para un valor de predicción \hat{Y} .

12.5.5 INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA VARIANZA DE REGRESION $\sigma_{Y/X}^2$:

Otra estimación por intervalo que es conveniente realizar es la estimación de la varianza de las desviaciones de los valores observados Y de su correspondiente valor de predicción \hat{Y} para un valor fijo de X , $\sigma_{Y/X}^2$. Esta estimación está dada por:

$$P \left(\frac{\frac{S_{Y/X}^2 (n-2)}{X^2}}{t_{1-\alpha/2, n-2}^2} < \sigma_{Y/X}^2 < \frac{\frac{S_{Y/X}^2 (n-2)}{X^2}}{t_{\alpha/2, n-2}^2} \right) = 1 - \alpha$$

Si se desea estimar el **error estándar de estimación poblacional** $\sigma_{Y/X}$ trabajamos con el intervalo para la varianza y al final extraemos raíz cuadrada a los límites de confianza.

Ejemplo 12.7:

Los intervalos de confianza del 95% para la varianza y el error estándar de estimación para nuestro ejemplo numérico son:

$$P\left(\frac{1.8382 (11)}{21.920} < \sigma_{Y/X}^2 < \frac{1.8382 (11)}{3.816}\right) = 0.95$$

$$P(0.9224 < \sigma_{Y/X}^2 < 5.2987) = 0.95$$

$$P(0.9604 < \sigma_{Y/X} < 2.3019) = 0.95$$

12.6 ANALISIS DE CORRELACION:

Como mencionamos al inicio de este capítulo usamos el **análisis de regresión** cuando nos interesa establecer **el tipo de relación** que hay entre dos variables; pero, cuando solo nos interesa establecer **el grado de relación** entre dos variables aleatorias usamos **el análisis de correlación**.

La medida del grado de relación entre dos variables se llama **coeficiente de correlación**, representado universalmente por p . En el modelo de correlación, se asume que X y Y varían conjuntamente en una **distribución conjunta**. Si esta distribución está distribuida normalmente, entonces es llamada **distribución normal bivariante**. Las suposiciones que constituyen un modelo de correlación lineal bivariante, para el cual se estima p , se describen a continuación:

- 1) Y y X son variables aleatorias. Como tales, no deben ser designadas como dependiente e independiente; cualquier designación dará el mismo resultado.

- 2) La población bivariable es normal. Una población normal bivariable es, entre otras cosas, aquella en la que Y y X están normalmente distribuidas.
- 3) La relación entre Y y X es, en cierto sentido, lineal. Este supuesto implica que todas las medias de Y asociadas con valores de X, $\mu_{Y/X}$, caen sobre una línea recta, que es la línea de regresión de Y sobre X: $\mu_{Y/X} = A + B X$. Igualmente todas las medias de X asociadas con valores de Y, $\mu_{X/Y}$ caen sobre una línea recta, que es la línea de regresión de X sobre Y: $\mu_{X/Y} = A' + B' Y$.

Según los supuestos anteriormente, el coeficiente de correlación de Pearson de la población se define de la siguiente forma;

$$\rho = \frac{C_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sum X_i Y_i - n \mu_x \mu_y}{\sqrt{(\sum X_i^2 - n \mu_x^2)(\sum Y_i^2 - n \mu_y^2)}}$$

Pueden observarse algunas cosas acerca de la definición anterior. Primera, es una ecuación que contiene los cinco parámetros de la población normal bivariable: μ_x , σ_x , μ_y , σ_y y ρ . El último, como se mencionó anteriormente, es el coeficiente de correlación para la población normal bivariable. Segunda, ρ es simétrico con respecto a Y y a X; es decir, el intercambio entre X y Y no cambia a ρ . Tercera, cuando la covarianza es cero, ρ es cero, indicando que no hay relación entre las variables. Cuando hay covarianza perfecta entre X y Y y ambas varían en la misma dirección, $\rho = 1$. Análogamente cuando hay covarianza perfecta, pero Y y X varían en sentidos opuestos, $\rho = -1$. Por otra parte, cuando existe cierto grado de covarianza entre X y Y, tenemos

$$-1 < \rho < 0 \quad y \quad 0 < \rho < 1$$

En general: $-1 \leq \rho \leq 1$

Cuando se extrae una muestra de n pares de valores, donde cada valor X es una observación al azar de la población X y cada valor Y es una observación al azar de la población Y ; pero las dos no son necesariamente independientes. Además, cuando se cumple el supuesto de una población normal bivariante, el estimador de ρ es r , definido por:

$$r = \frac{\sum X_i Y_i - n \bar{X} \bar{Y}}{\sqrt{(\sum X_i^2 - n \bar{X}^2)(\sum Y_i^2 - n \bar{Y}^2)}} = \frac{\sum X_i Y_i - n \bar{X} \bar{Y}}{(n-1) S_x S_y}$$

que puede variar, como ρ , entre -1 y 1 . ($-1 \leq r \leq 1$), pero su interpretación se hará por medio de su cuadrado (r^2) el *coeficiente de determinación*. Este valor puede emplearse como interpretación de la intensidad de la asociación entre las dos variables que parecen estar correlacionadas. Específicamente, el *coeficiente de determinación indica el porcentaje de la variación de X que está asociada con (o "es explicada por") la variación de Y, o viceversa*. Por ejemplo, si la correlación muestral entre dos variables tales como la clorofila y la biomasa es $r = 0.50$, elevando al cuadrado este coeficiente da un coeficiente de determinación $r^2 = 0.25$, Esto sugiere que el 25% de la variación de una de las dos variables, está asociada con o "es explicada por" la variación de la otra. No podemos decir cual "explica" cual, porque ambas son consideradas variables aleatorias.

Puede señalarse que r es un estimador sesgado de ρ , excepto cuando $\rho = 0$. Cuando $\rho = 0$, la distribución muestral de r sigue una distribución t de student con $n-2$ grados de libertad

$$t = \frac{r \sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - r^2}}$$

Puesto que este estadígrafo solo se aplica al caso en que $\rho = 0$, no puede ser empleado para estimaciones por intervalo,

Si deseamos probar una hipótesis acerca de que ρ tiene cierto valor ρ_0 , ρ_0 distinto de cero, o si queremos construir un intervalo de confianza para ρ , debemos usar la transformación Z de Fisher, Es decir, pode-

mos transformar la distribución de r en una distribución aproximadamente normal como sigue:

$$z_r = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right|$$

cuyo error estándar es $\sigma_{z_r} = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$

Por lo tanto, el estadígrafo de prueba es:

$$z_F = \frac{z_r - z_{\rho_0}}{\frac{1}{\sqrt{n-3}}}$$

que es aproximadamente normal.

Para evitar los cálculos con logaritmos se podrán determinar z y z_{ρ_0} en la tabla A-12.

Aunque se conozca que hay una alta correlación entre las dos variables no sabemos cual es el valor del parámetro poblacional ρ , por lo tanto debemos estimarlo y para ello calculamos un intervalo de confianza para conocer entre que límites se encuentra. Esto se hace indirectamente, calculando el intervalo de confianza para z_{ρ} y luego usando la tabla A-12 para determinar los límites de ρ .

$$P(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < z_F < z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

$$P(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{1}{\sqrt{n-3}}(z_r - z_{\rho}) < z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

$$P(z_r - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{n-3}} < z_{\rho} < z_r + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{n-3}}) = 1 - \alpha$$

Ejemplo 12.8:

Supongamos que estamos interesados en investigar si hay o no correlación entre el peso del cuerpo y la concentración de colesterol en la sangre. Seleccionamos aleatoriamente 15 sujetos de una población de varones adultos entre 50 y 55 años de edad con una estatura entre 1.75 y 1.78 m. Medimos entonces, el peso y la concentración de colesterol en cada sujeto. Los datos se muestran en la tabla 12.1. Aunque, tanto el peso como el contenido de colesterol son obviamente variables aleatorias, por conveniencia asignamos los símbolos tradicionales X y Y a las variables.

Tabla 12.1

Sujeto	peso (lb) X	colesterol (mg/100ml) Y
1	146	181
2	205	228
3	157	182
4	165	249
5	184	259
6	153	201
7	220	339
8	181	224
9	151	112
10	188	241
11	181	225
12	163	223
13	198	257
14	193	337
15	157	197

Cálculos.

Con la ayuda de una calculadora obtenemos:

$$\begin{array}{ll}
 n = 15 & \sum XY = 622508 \\
 \bar{X} = 176.1333 & \bar{Y} = 230.3333 \\
 S_x = 22.1581 & S_y = 57.3544
 \end{array}$$

El coeficiente de correlación es entonces,

$$r = \frac{\sum XY - n \bar{X} \bar{Y}}{(n-1) S_x S_y} = \frac{622508 - 15 (176.1333)(230.3333)}{14 (22.1581)(57.3544)}$$

$$r = 0.785$$

El coeficiente de determinación es:

$$r^2 = 0.6163$$

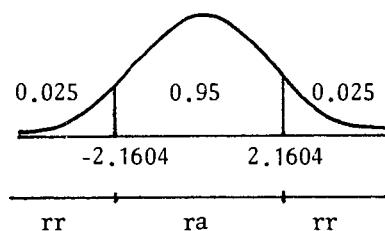
lo que significa que 61.63% de la variación de una de las variables es explicada por la variación de la otra.

Probemos, ahora la hipótesis de *linealidad* con $\alpha = 0.05$

$$H_0: \rho = 0$$

$$H_a: \rho \neq 0$$

$$t = \frac{r \sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - r^2}} \quad g.l. = n-2 = 13$$



$$t = \frac{0.785 \sqrt{13}}{\sqrt{1 - 0.6163}} = 4.569$$

Se rechaza H_0 por lo tanto existe correlación entre las variables X y Y.

Aunque hayamos encontrado que existe correlación entre el peso y el colesterol no sabemos cual es el valor del parámetro ρ , por lo tanto, debemos estimar el valor de este parámetro poblacional.

$$\text{Sea: } 1 - \alpha = 0.95$$

$$r = 0.785$$

$$z_r = 1.0585$$

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

$$P(z_r - z_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{\sqrt{n-3}} < z_\rho < z_r + z_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{\sqrt{n-3}}) = 1 - \alpha$$

$$P(1.0585 - 1.96(0.2887) < z_\rho < 1.0585 + 1.96(0.2887)) =$$

$$P(0.4927 < z_\rho < 1.6247) = 0.95$$

Regresando a la tabla A-12, transformamos z_ρ en ρ en forma aproximada, de donde:

$$P(0.456 < \rho < 0.926) = 0.95$$

12.7 COEFICIENTE DE DETERMINACION Y ANALISIS DE VARIANZA EN REGRESION

LINEAL:

En la sección 12.5 se evaluó la ecuación de regresión con pruebas de hipótesis y estimaciones, otra forma de hacerlo es usando el coeficiente de determinación; esto es, comparando las desviaciones de los puntos con relación a la recta de regresión con las desviaciones alrededor de la rec-

ta \bar{Y} , (\bar{Y} valor medio de los valores observados de Y) Usando el diagrama de dispersión del ejemplo 12.1 podremos visualizar lo expuesto en forma gráfica (Fig. 12.10).

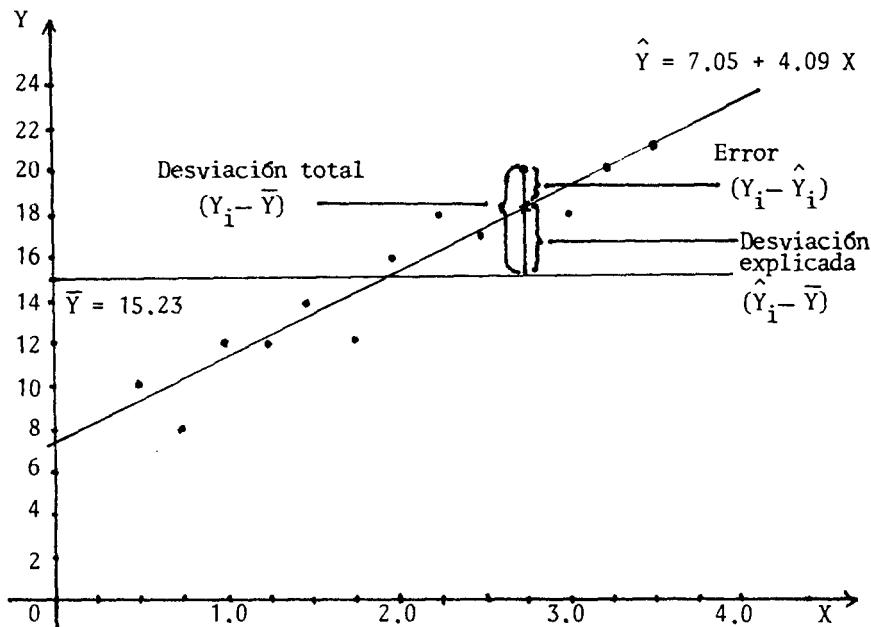


Fig. 12.10 Desviaciones: explicada, no explicada y total.

Como vemos en la figura 12.10 si consideramos un punto cualquiera (X_i, Y_i) , la distancia vertical del valor observado Y_i a \bar{Y} es llamada **desviación total** y la designamos por $(Y_i - \bar{Y})$.

Si medimos la distancia vertical desde la recta de regresión \hat{Y}_i a la recta \bar{Y} , obtenemos $(\hat{Y}_i - \bar{Y})$ que llamamos **desviación explicada**, y finalmente, a la distancia vertical del punto (X_i, Y_i) a la recta de regresión \hat{Y}_i , $(Y_i - \hat{Y}_i)$ que es el error, la llamamos **desviación inexplicada**.

Entonces tenemos:

$$(Y_i - \bar{Y}) = (\hat{Y}_i - \bar{Y}) + (Y_i - \hat{Y}_i)$$

desviación desviación desviación
total explicada inexplicada

Si se miden estas desviaciones para todos los puntos, se elevan al cuadrado y se suman se obtiene:

$$\begin{array}{l} \sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \dots \dots \end{array} \quad (12.9)$$

suma de cuadros total suma de cuadros explicados suma de cuadros inexplicados

$$\begin{aligned} \text{Nótese que el término } & 2 \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})(Y_i - \hat{Y}_i) = 2 \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})\epsilon_i \\ & = 2 \sum (a + bX_i - \bar{Y})\epsilon_i \end{aligned}$$

es cero porque $\sum \epsilon_i = 0$ y X_i es estadísticamente independiente de Y_i .

Si dividimos la ecuación (12.9) entre la suma de cuadrados total, tenemos:

$$1 = \frac{\sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2} + \frac{\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}$$

$$\text{o bien: } \frac{\sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2} \dots \dots \quad (12.10)$$

$$\frac{\text{Suma de cuadrados explicada}}{\text{Suma de cuadrados total}} = 1 - \frac{\text{Suma de cuadrados inexplicada}}{\text{Suma de cuadrados total}}$$

Esta suma de cuadrados explicada entre la suma de cuadrados total es el **coeficiente de determinación r^2** , que se puede calcular usando una fórmula más conveniente obtenida a partir de la ecuación (12.10), esto es:

$$r^2 = \frac{b^2 s_x^2}{s_y^2}$$

Es obvio que r^2 varía entre 0 y 1, ($0 \leq r^2 \leq 1$). Si $r^2 = 1$, $\hat{Y}_i - \bar{Y}_i = 0$ y $\epsilon_i = 0$, por lo tanto todos los puntos están sobre la recta de regresión. Si $r^2 = 0$, la linea de regresión \hat{Y} y la recta \bar{Y} coinciden y por lo tanto no hay variación explicada por la regresión.

Usando las tres sumas de cuadrados y los grados de libertad asociados a ellas, podemos construir una tabla de análisis de varianza para la regresión lineal. Tabla 12.2.

En general, los grados de libertad asociados con la suma de cuadrados debida a la regresión es igual al número de coeficientes en la ecuación de regresión menos 1. En el caso de regresión lineal simple hay dos constantes a y b , por lo tanto, el número de grados de libertad debidos a regresión lineal simple es $2-1=1$.

Tabla 12.2

TABLA DE ANDEVA PARA REGRESION LINEAL SIMPLE

fuente	g.l.	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	$F_{\text{calc.}}$
Regresión	$2-1 = 1$	$SC_{\text{explicada}}$	$S_{\text{exp1}}^2 = \frac{SC_{\text{exp1}}}{1}$	$F = \frac{S_{\text{exp1}}^2}{S_{\text{inexp}}^2}$
Error	$n-2$	$SC_{\text{inexplicada}}$	$S_{\text{inexp}}^2 = \frac{SC_{\text{inexp}}}{n-2}$	
Total	$n-1$	SC_{total}		

La prueba F es equivalente a la prueba t bilateral sobre la pendiente de regresión B. Esto significa que la hipótesis nula a contrastar es:

$$H : Y \text{ no depende de } X. \quad (B = 0)$$

$$H : Y \text{ depende de } X. \quad (B \neq 0)$$

La diferencia entre las dos pruebas es que F puede ser generalizada a análisis de regresión múltiple (más de una variable independiente), mientras que la prueba t solo puede usarse para un coeficiente de regresión (B) cada vez.

Ejemplo 12.9:

Usando los datos del ejemplo 12.1, tenemos:

X_i	Y_i	\hat{Y}_i
0.50	10	9.0989
0.75	8	10.1209
1.00	12	11.1429
1.25	12	12.1648
1.50	14	13.1868
1.75	12	14.2088
2.00	16	15.2308
2.25	18	16.2527
2.50	17	17.2747
2.75	20	18.2969
3.00	18	19.3187
3.25	20	20.3407
3.50	21	21.3626

$$\bar{Y} = 15.2308 \quad SC_{\text{total}} = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 = 210.3072$$

$$S_y^2 = 17.5256 \quad SC_{\text{expl.}} = \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = 190.0753$$

$$SC_{\text{inex.}} = SC_{\text{total}} - SC_{\text{expl.}} = 20.2319$$

TABLA DE ANDEVA PARA LA REGRESION DEL EJEMPLO 12.1

fuente	g.l.	Suma de Cuadrados	Varianzas	$F_{\text{calc.}}$	$F_{\text{teor.}}$
Regresión	1	$SC_{\text{expl.}} = 190.0753$	190.0753	$F = 190.0753$	$F_{0.95, 1, 11} = 4.84$
Error	11	$SC_{\text{error}} = 20.2319$	1.8393		
Total	12	$SC_{\text{total}} = 210.3072$	—		

Al igual que en la prueba de $B = 0$ (ejemplo 12.3) se concluye que Y depende significativamente de X .

12.8 REGRESION NO LINEAL (EXPONENCIAL Y POTENCIAL).

A partir del diagrama de dispersión o de la teoría, podemos conocer que la relación entre las dos variables puede representarse adecuadamente solo por cierta función matemática curvilínea (no lineal), por ejemplo la tendencia general del crecimiento poblacional sigue un modelo exponencial positivo, el decaimiento radioactivo sigue un modelo exponencial negativo, etc.

12.8.1 REGRESION EXPONENCIAL O SEMILOGARITMICA:

Cuando se sospecha que la relación es de tipo exponencial, proponemos una ecuación de regresión de la forma:

$$\hat{Y} = c \cdot d^X$$

Como sugiere el nombre exponencial, la variable independiente X aparece en el exponente.

Por necesidad teórica y conveniencia práctica transformamos nuestras ecuaciones de regresión a otra, tomando logaritmos a ambos lados

$$\log \hat{Y} = \log c + X \log d \quad \dots \dots \dots \quad (12.11)$$

Ahora hacemos: $\log c = a$

$$\log d = b$$

y entonces la ecuación (12.11) es transformada en:

$$\log \hat{Y} = a + b X \quad \dots \dots \dots \quad (12.12)$$

que es una ecuación lineal en $\log \hat{Y}$ y X , la cual es una función semilogarítmica, de manera que si llevamos los puntos a papel semilogarítmico obtendremos una recta.

Para transformar de nuevo la ecuación (12.12) a la forma original solo necesitamos tomar la función inversa del logaritmo, esto es la función exponencial de la base adecuada según haya sido la base de los logaritmos con que se esté trabajando; esto es, si tomamos logaritmos comunes (de base 10), entonces:

$$c = 10^a$$

$$d = 10^b$$

$$\hat{Y} = (10^a)(10^b)^X$$

Ejemplo 12.10:

Los datos de la tabla 12.3 se obtuvieron de observaciones periódicas hechas durante el crecimiento de una población de células de levadura. Se efectuaron recuentos cada dos horas.

La figura 12.11 muestra el diagrama de dispersión para este ejemplo.

Tabla. 12.3

Horas	Número de células
2	19
4	37
6	72
8	142
10	295
12	584
14	995

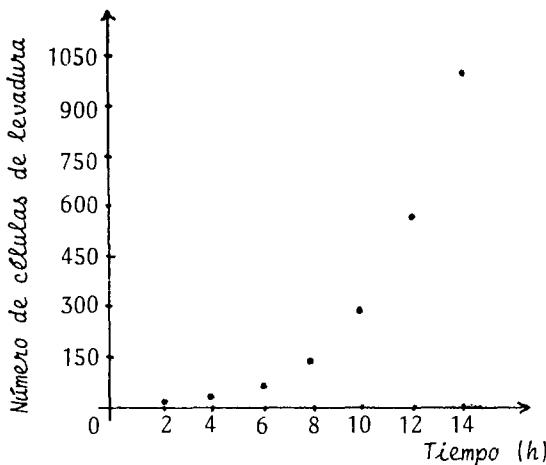


Fig. 12.11 Diagrama de dispersión para el ejemplo 12.10

Nótese que el número de células aumenta exponencialmente mientras el tiempo aumenta aritméticamente.

Con el fin de convertir la curva en recta tomamos logaritmos al número de células. [Fig. 12.12].

Horas X	Número de células Y	Log Y
2	19	1.2788
4	37	1.5682
6	72	1.8573
8	142	2.1523
10	295	2.4698
12	584	2.7664
14	995	2.9978

Nuevamente graficamos los puntos $(X, \log Y)$ (o equivalentemente los puntos (X, Y) en papel semilogarítmico).

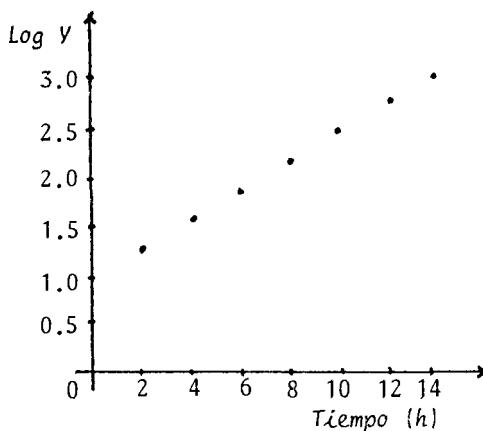


Fig. 12.12 Diagrama de dispersión para el ejemplo 12.10

Debido a que la relación entre X y $\log Y$ es lineal, se pueden aplicar los principios de regresión lineal estudiados en las secciones anteriores al caso de regresión exponencial.

La ecuación lineal en X y Log Y es:

$$\hat{\text{Log } Y} = 0.9892 + 0.1458 X$$

La ecuación exponencial es:

$$\hat{Y} = (9.7548)(1.399)^X$$

12.8.2 REGRESION POTENCIAL O DOBLE LOGARITMICA:

En ciertas ocasiones se puede tener que una función potencial tal como

$$\hat{Y} = c X^b \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (12.13)$$

puede representar la relación entre X y Y en la muestra. Aquí deseamos hallar c y b.

Para determinar c y b, tomamos logaritmo a ambos lados de la ecuación (12.13), obteniendo:

$$\hat{\text{Log } Y} = \text{Log } c + b \text{ Log } X \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (12.14)$$

Este resultado es una transformación doble logarítmica, porque ambas variables se expresan ahora en logaritmos.

Si hacemos $\text{Log } c = a$

$$\text{Log } X = U$$

$$\text{Log } Y = W$$

podemos escribir la ecuación (12.14) en forma lineal como sigue:

$$W = a + b U \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (12.15)$$

por lo tanto para hacer los cálculos, primero tomamos logaritmos a X y a Y y después procedemos como en la regresión lineal.

Para transformar nuevamente la ecuación (12.15) a la forma original, tomamos función inversa del logaritmo, entonces:

$$\begin{aligned} c &= 10^a \\ \hat{Y} &= (10^a) X^b \end{aligned}$$

Ejemplo 12.11:

Las cantidades Y de una sustancia no transformada en seis reacciones similares después de X minutos están dadas en la tabla 12.4, la figura 12.13 muestra el diagrama de dispersión para este ejemplo.

Tabla 12.4

X (min)	Y (mg)
1	23.5
2	16.9
2	17.5
3	14.0
5	9.8
6	8.9

El diagrama parece indicar una relación de tipo potencial

$$\hat{Y} = c X^b$$

tomando logaritmos es

$$\log \hat{Y} = \log c + b \log X$$

La tabla 12.5 muestra los logaritmos de X y de Y.

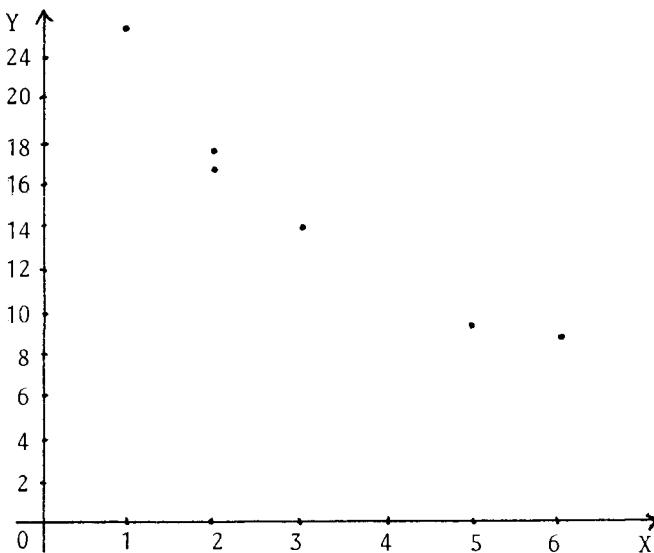


Fig. 12.13 Diagrama de dispersión para los datos del ejemplo 12.11

Tabla. 12.5

X	Y	$\log X$	$\log Y$
1	23.5	0	1.3711
2	16.9	0.3010	1.2279
2	17.5	0.3010	1.2430
3	14.0	0.4771	1.1461
5	9.8	0.6990	0.9912
6	8.9	0.7782	0.9494

La recta de regresión en función de logaritmos comunes es:

$$\hat{\log Y} = 1.3913 - 0.5551 \log X$$

La ecuación potencial es:

$$\hat{Y} = (24.6197) X^{-0.5551}$$

El valor de predicción \hat{Y} cuando X es 4 minutos es:

$$\hat{Y}(4) = 11,4048 \text{ mg.}$$

12.9 REGRESION LINEAL MULTIPLE (TRIPLE) Y REGRESION POLINOMICA (PARABOLICA) :

El modelo de regresión lineal estudiado en las secciones anteriores es un modelo de regresión lineal simple en el que hay una variable dependiente Y y una independiente X , ahora nos abocaremos a estudiar el modelo de regresión triple; es decir, donde tenemos una variable dependiente Y y dos independientes X_2 y X_3 , así en vez de obtener una función lineal en dos variables (línea recta), tendremos una función lineal en tres variables (ecuación del plano en el espacio tridimensional $X_2 X_3 Y$).

$$\hat{Y} = a + b X_2 + c X_3$$

Obviamente, si tuviéramos más de dos variables independientes, tendríamos una ecuación lineal con más de tres variables; en otras palabras, nuestro modelo trivariante se puede generalizar a más variables con los consecuentes problemas de cálculo, que serán fáciles de resolver con la ayuda de una computadora. Si una variable Y está relacionada linealmente con dos variables independientes X_2 y X_3 , su función lineal poblacional puede describirse por:

$$Y_i = (A + B X_{i2} + C X_{i3}) + \epsilon_i \dots \quad (12.16)$$

donde $(A + B X_{i2} + C X_{i3})$ es la parte de la variación total de Y que es explicada y ϵ_i es la parte de la variación total no explicada o debida a errores aleatorios.

En general, el modelo clásico de regresión lineal múltiple definido por (12.16) debe cumplir con las siguientes suposiciones:

- 1) Las variables independientes X_2 y X_3 son fijas o no aleatorias.
- 2) Pueden existir relaciones significativas de dependencia lineal entre dos

cualesquiera de las variables independientes, pero su correlación no debe ser perfecta.

- 3) Los errores ϵ_i tienen distribuciones normales con $\mu_{\epsilon_i} = 0$.
- 4) La varianza de la regresión es constante e igual a la varianza de los ϵ_i .

$$\sigma_{Y/X_2, X_3}^2 = \sigma_{\epsilon_i}^2 = \sigma^2$$

- 5) Los errores son estadísticamente independientes; es decir, los ϵ_i no están correlacionados ($\text{Cov}(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0, i \neq j$).
- 6) El número de observaciones de la muestra debe superar al número de coeficientes de regresión que han de estimarse para garantizar que el número de grados de libertad sea diferente de cero.

En regresión lineal triple todas las $m e d \mu_{Y/X_2, X_3}$ se basan en encontrarse en un plano, el punto de intersección del plano con el eje Y, A se le llama **constante de regresión**. Los coeficientes B y C son las pendientes de regresión del plano y suelen llamarse **coeficientes de regresión parcial**.

La estimación de los coeficientes A, B y C se hace en forma análoga a la estimación de A y B en el modelo de regresión lineal simple; es decir usando el método de mínimos cuadrados.

Sea $Y_i = a + b X_{i2} + c X_{i3} + \epsilon_i$

el modelo de regresión lineal triple para la muestra, y

$$\hat{Y}_i = a + b X_{i2} + c X_{i3}$$

la ecuación de regresión de la muestra de Y sobre X_2 y X_3 .

De estas expresiones, vemos que

$$\epsilon_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

El método de mínimos cuadrados establece que

$$\sum \epsilon_i^2 = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

debe ser mínima. Es decir:

$$\sum (Y_i - a - b X_{i2} - c X_{i3})^2$$

debe ser mínima.

Derivando parcialmente respecto a: a , b y c se llega a las siguientes ecuaciones normales:

$$(1) \quad \sum Y_i = na + b \sum X_{i2} + c \sum X_{i3}$$

$$(2) \quad \sum Y_i X_{i2} = a \sum X_{i2} + b \sum X_{i2}^2 + c \sum X_{i2} X_{i3}$$

$$(3) \quad \sum Y_i X_{i3} = a \sum X_{i3} + b \sum X_{i2} X_{i3} + c \sum X_{i3}^2$$

Dividiendo cada término de (1) entre n y despejando "a" tenemos:

$$a = \bar{Y} - b \bar{X}_2 - c \bar{X}_3 \quad \dots \quad (12.17)$$

Luego, tomando las desviaciones con relación a las respectivas medias de las muestras y productos cruzados pueden definirse

$$m_{12} = \sum (Y_i - \bar{Y})(X_{i2} - \bar{X}_2) = \sum Y_i X_{i2} - n \bar{Y} \bar{X}_2$$

$$m_{13} = \sum (Y_i - \bar{Y})(X_{i3} - \bar{X}_3) = \sum Y_i X_{i3} - n \bar{Y} \bar{X}_3$$

$$m_{22} = \Sigma (x_{i2} - \bar{x}_2)^2 = \Sigma x_{i2}^2 - n \bar{x}_2^2$$

$$m_{33} = \Sigma (x_{i3} - \bar{x}_3)^2 = \Sigma x_{i3}^2 - n \bar{x}_3^2$$

$$m_{23} = \Sigma (x_{i2} - \bar{x}_2)(x_{i3} - \bar{x}_3) = \Sigma x_{i2}x_{i3} - n \bar{x}_2\bar{x}_3$$

Sustituyendo (12.17) y las m's en las ecuaciones normales (2) y (3), estas se reducen a:

$$(2') \quad m_{12} = b m_{22} + c m_{23}$$

$$(3') \quad m_{13} = b m_{23} + c m_{33}$$

de donde:

$$b = \frac{m_{12} m_{33} - m_{13} m_{23}}{m_{22} m_{33} - m_{23}^2} \quad \dots \dots \dots \quad (12.18)$$

$$c = \frac{m_{13} m_{22} - m_{12} m_{23}}{m_{22} m_{33} - m_{23}^2} \quad \dots \dots \dots \quad (12.19)$$

Ejemplo 12.12:

Para comprobar el efecto de la velocidad en el consumo de gasolina, la Administración de Caminos Federales probó automóviles de varios pesos a varias velocidades. Los datos para tres pesos y cinco velocidades se presentan en la tabla 12.6

Aquí las variables independientes son el peso del automóvil y su velocidad (son no aleatorias) y la variable dependiente es la tasa de consumo de combustible (está sujeta a la influencia del azar así como al peso y a la velocidad del automóvil). El problema es expresar la variable dependiente de manera aproximada como una función lineal de las dos variables independientes. Las estimaciones de A, B y C se harán con la ayuda de la tabla 12.7.

Tabla. 12.6

Consumo de combustible para 3 pesos y 5 velocidades

Y

Peso del vehículo (en miles de lb)	Millas por galón a velocidades seleccionadas				
	X ₂	50 MPH	40 MPH	50 MPH	60 MPH
2.29		21.55	20.07	19.11	17.83
3.98		18.25	20.00	16.32	15.77
5.25		18.33	19.28	15.62	14.22
					12.74

Tabla 12.7

X ₂	X ₃	Y	Y X ₂	Y X ₃	X ₂ X ₃
2.29	30	21.55	49.3495	646.50	68.70
2.29	40	20.07	45.9603	802.80	91.60
2.29	50	19.11	43.7619	955.50	114.50
2.29	60	17.83	40.8307	1069.80	137.40
2.29	70	16.72	38.2888	1170.40	160.30
3.98	30	18.25	72.6350	547.50	119.40
3.98	40	20.00	79.6000	800.00	159.20
3.98	50	16.32	64.9536	816.00	199.00
3.98	60	15.77	62.7646	946.20	238.80
3.98	70	13.61	54.1678	952.70	278.60
5.25	50	18.33	96.2325	549.90	157.50
5.25	40	19.28	101.2200	771.20	210.00
5.25	50	15.62	82.0050	781.00	262.50
5.25	60	14.22	74.6550	853.20	315.00
5.25	70	12.74	66.8850	891.80	367.50

Sumas: 57.60 750 259.42 973.3097 12554.50 2 880.00

$$\bar{X}_2 = 3.84 \quad , \quad \bar{X}_3 = 50 \quad , \quad \bar{Y} = 17.2947$$

$$S_{X_2}^2 = 1.5751 \quad , \quad S_{X_3}^2 = 214.2854 \quad , \quad S_Y^2 = 6.6301$$

$$m_{12} = \sum Y_i X_{i2} - n \bar{Y} \bar{X}_2 = -22.865$$

$$m_{13} = \sum Y_i X_{i3} - n \bar{Y} \bar{X}_3 = -416.525$$

$$m_{22} = (n-1) S_{X_2}^2 = 22.0514$$

$$m_{33} = (n-1) S_{X_3}^2 = 3000$$

$$m_{23} = \sum X_{i2} X_{i3} - n \bar{X}_2 \bar{X}_3 = 0.0$$

$$b = \frac{m_{12} m_{33} - m_{13} m_{23}}{m_{22} m_{33} - m_{23}^2} = -1.0369$$

$$c = \frac{m_{13} m_{22} - m_{12} m_{23}}{m_{22} m_{33} - m_{23}^2} = -0.1388$$

$$a = 17.2947 - (-1.0369)(3.84) - (-0.1388)(50)$$

$$a = 28.2164$$

Así, la ecuación de predicción es:

$$\hat{Y} = 28.22 - 1.04 X_2 - 0.14 X_3$$

Para un vehículo que pesa 2500 lb y viaja a 55 MPH, el consumo de combustible debe ser alrededor de

$$Y(2.5, 55) = 28.22 - 1.04 (2.5) - 0.14 (55) = 17.92 \text{ mi/gal.}$$

12.9.1 INFERENCIAS SOBRE REGRESION TRIPLE:

Habiendo obtenido la ecuación de regresión de la muestra, debemos establecer si los resultados de la muestra son estadísticamente significativos para poder usar la ecuación de regresión como instrumento de predicción.

Con este fin, debemos estimar la varianza del plano de regresión ajustado, para lo cual usamos el análisis de varianza, descomponiendo la variación total en dos partes independientes como en el caso bivariante, la variación explicada por la regresión y la debida a errores aleatorios. Así vemos que se verifica la relación:

$$\sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

$$SC_{\text{total}} = SC_{\text{expl.}} + SC_{\text{error}}$$

$$\text{donde } SC_{\text{total}} = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 = m_{11}$$

$$SC_{\text{expl.}} = \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = b m_{12} + c m_{13}$$

$$SC_{\text{error}} = SC_{\text{total}} - SC_{\text{expl.}}$$

Los grados de libertad debidos a la regresión son el número de variables menos 1, ($3 - 1 = 2$). Los grados de libertad del error son el tamaño de muestra menos el número de variables ($n - 3$) y los totales ($n - 1$). Así, tenemos la tabla de ANDEVA para la regresión triple como sigue

Tabla 12.8

TABLA DE ANDEVA PARA REGRESIÓN TRIPLE

fuente	g.l.	SC	Varianza	F _{calc.}
Regresión	3-1	SC _{expl.}	$S_{\text{exp}}^2 = \frac{SC_{\text{exp}}}{2}$	
Error	n-3	SC _{error}	$S_{\text{error}}^2 = \frac{SC_{\text{error}}}{n-3}$	$F_{\text{calc.}} = \frac{S_{\text{exp}}^2}{S_{\text{error}}^2}$
Total	n-1	SC _{total}	—	

La hipótesis nula es este caso es:

$$H_0: B = C = 0$$

$$H_a: B \neq 0 \quad \text{y} \quad C \neq 0$$

Ejemplo 12.13:

Para los datos del ejemplo 12.12, tenemos:

$$SC_{\text{total}} \approx m_{11} = 92.82$$

$$\begin{aligned} SC_{\text{expl.}} &= b m_{12} + c m_{13} = (-10.369)(-22.865) + (-0.1388)(-416.525) \\ &= 81.52 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SC_{\text{error}} &= SC_{\text{total}} - SC_{\text{expl.}} = 92.82 - 81.52 \\ &\approx 11.30 \end{aligned}$$

El análisis de varianza se muestra en la tabla 12.9

Tabla 12.9

TABLA DE ANDEVÁ PARA EL EJEMPLO 12.13

fuente	g.1.	SC	Varianzas	F _{calc.}	F _{teor.}
Regresión	2	81.52	40.76	$F = \frac{40.76}{0.9415} = 43.2941$	0.95, 2, 12, 3, 80
Error	12	11.30	0.9415		
Total	14	92.82			

La hipótesis $H_0: B = C = 0$ es rechazada. Por lo tanto, deducimos que el consumo de combustible es significativamente dependiente del peso y velocidad del automóvil.

El coeficiente de determinación triple se define al igual que el simple como la razón de la variación explicada a la total, esto es:

$$r^2 = \frac{SC_{expl.}}{SC_{total}} = \frac{81.52}{92.82} = 0.8783$$

Por lo tanto , concluimos que 87.83% de la variación de Y (el consumo de combustible) es explicada por la variación de X_2 y X_3 (el peso y la velocidad del automóvil) .

El coeficiente de correlación lineal triple es la raíz cuadrada positiva del coeficiente de determinación.

$$r = \sqrt{r^2} = 0.9372$$

12.9.2 REGRESION POLINOMICA (CUADRATICA):

Muy frecuentemente hallamos que la relación no lineal más obvia entre dos variables es una en la que la variable dependiente Y puede ser aproximada por medio de un polinomio en la variable independiente X.

Una función de regresión polinómica se define por la ecuación:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \dots + b_k X^k$$

Una función de regresión polinómica comúnmente empleada es la de segundo grado (cuadrática) que es una **parábola** que viene dada por:

$$\hat{Y} = a + b X + c X^2$$

Para hallar los estimadores a, b y c.por mínimos cuadrados de la regresión cuadrática, hacemos los cambios de variable $X = X_2$, $X^2 = X$, y usamos las fórmulas (12.17), (12.18) y (12.19) para calcularlas.

Ejemplo 12.14:

La cantidad de una enzima en disolución se puede determinar cuantitativamente en relación al efecto catalítico que produce, así, un químico hace un experimento para determinar si la enzima (ureasa) actúa catalíticamente con el sustrato elegido (urea) y observar si hay aparición de producto NH₄. Para medir la cantidad de producto formado, si es que lo hay, se utiliza HC1. Los datos obtenidos se muestran a continuación

Enzima (ml)	NH ₄ (meq. urea transf.)
1	10.53
2	15.18
3	20.25
4	25.31
5	27.33
6	28.60
7	30.52
8	33.24
9	33.50
10	31.00
11	28.75
12	25.75

Aquí, la variable independiente es la enzima y la dependiente el producto formado.

Para determinar la ecuación que relaciona a las variables X y Y, primero dibujamos el diagrama de dispersión. (Fig. 12.14).

Se observa que los puntos del diagrama siguen una parábola, por lo tanto, procedemos a calcular los coeficientes de la ecuación de predicción parabólica:

$$\hat{Y} = a + bX + cX^2$$

para lo cual usaremos una tabla como la 12.10 donde $X = X_2$ y $X^2 = X_3$.

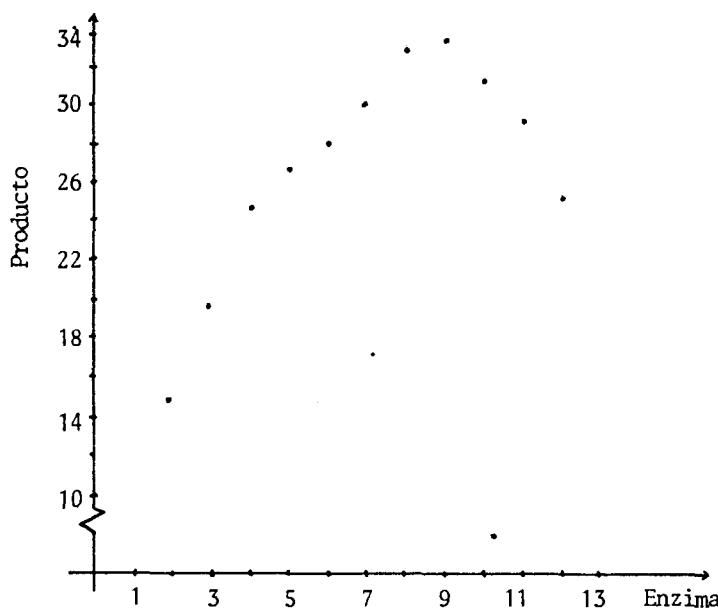


Fig. 12.14 Diagrama de dispersión para el ejemplo 12.14

Tabla 12.10

$X = X_2$	$X^2 = X_3$	Y	YX_2	YX_3	X_2X_3
1	1	10.53	10.53	10.53	1
2	4	15.18	30.35	60.72	8
3	9	20.25	60.75	182.25	27
4	16	25.31	101.24	404.96	64
5	25	27.33	136.65	683.25	125
6	36	28.60	171.60	1029.60	216
7	49	30.52	213.64	1495.48	343
8	64	33.24	265.92	2127.36	512
9	81	33.50	301.50	2713.50	729
10	100	31.00	310.00	3100.00	1000
11	121	28.75	316.25	3478.75	1331
12	144	25.75	309.00	3708.00	1728
$\bar{X}_2 = 6.5$		$\bar{X}_3 = 54.167$	$\bar{Y} = 25.83$	2227.43	18994.40
				6084	

$$S_{X_2} = 3.6055$$

$$S_{X_3} = 48.1491$$

$$S_Y = 7.1340$$

$$S_{X_2}^2 = 13.0$$

$$S_{X_3}^2 = 2318.333$$

$$S_Y^2 = 50.8943$$

$$m_{22} = 143$$

$$m_{33} = 25501.6667$$

$$m_{12} = 212.70$$

$$m_{13} = 2204.8897$$

$$m_{23} = 1858.9974$$

$$b = 6.9437$$

$$c = -0.4197$$

$$a = 3.4306$$

Sustituyendo tenemos la ecuación de la parábola de ajuste.

$$\hat{Y} = 3.4306 + 6.9437 X - 0.4197 X^2$$

12.10 OBSERVACIONES FINALES:

Vemos que al tratar las regresiones curvilíneas generalmente hacemos una transformación inicial de datos, por medio de logaritmos, de tal forma que la relación entre las variables transformadas sea aproximadamente lineal. Las transformaciones logarítmicas no son las únicas, pudiera darse el caso en que la transformación recíproca ($u = 1/X$) fuese más adecuada, como por ejemplo las curvas de la figura 12.15.

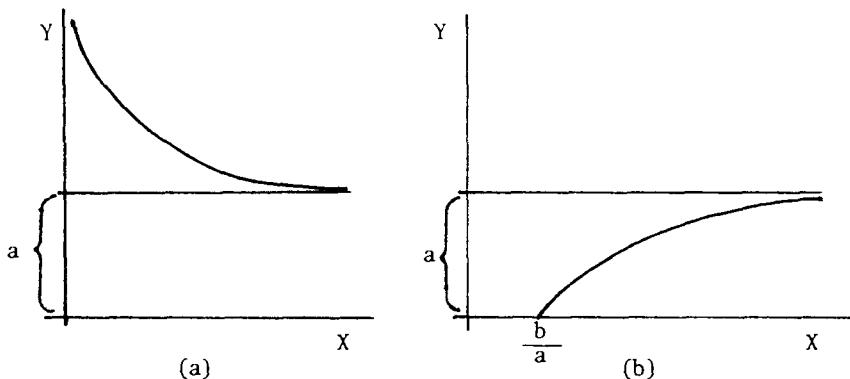


Fig. 12.15 Curvas de regresión : para (a) $\hat{y} = a + \frac{b}{x}$ y (b) $\hat{y} = a - \frac{b}{x}$

Las transformaciones en regresión lineal se hacen principalmente por dos razones. Primera, como el lector ya puede haber conjeturado, este procedimiento consiste en facilitar los cálculos. Segunda, las transformaciones en regresión lineal son convenientes porque la teoría estadística está especialmente bien desarrollada bajo el supuesto de linealidad.

El análisis curvilíneo, al igual que el lineal se realiza descomponiendo la variación por la variable o las variables independientes y la variable del error. El método de mínimos cuadrados tiene la función de minimizar la suma de cuadrados del error y maximizar la suma de cuadrados debida a la regresión.

El grado de ajuste en cada caso es medido por r^2 , el coeficiente de determinación que es la razón de la suma de cuadrados debida a regresión entre la suma de cuadrados total.

Finalmente, existen paquetes de computadoras para realizar análisis de regresión lineal simple, múltiple y no lineal, de manera que los cálculos aquí señalados se pueden hacer en forma rápida y por consiguiente solo tenemos que interpretar los resultados.

EJERCICIOS

12.1.- Se usa un reactivo químico para obtener un precipitado de una sustancia en una solución dada. Los datos son los siguientes:

Reactivo	Precipitado	Reactivo	Precipitado
7.2	8.4	6.0	8.4
4.8	5.4	6.7	9.5
5.2	6.3	7.0	10.4
4.9	6.8	8.0	12.7
5.4	8.0	7.3	10.3
6.4	11.1	4.6	7.0
6.8	12.3	4.2	5.1
8.0	13.3		

- a) Haga un diagrama de dispersión.
- b) Determine la ecuación de la recta por el método de mínimos cuadrados y represéntela en el diagrama.
- c) ¿Cuál es la cantidad de precipitado estimada si se usa 7.1 de reactivo?
- d) Determine el intervalo de confianza del 95% para la cantidad de precipitado estimada cuando la cantidad de reactivo usada es 7.1.
- e) Pruebe la hipótesis, al 11 de significación de que $B = 2$.
- f) Determine el intervalo de confianza del 95% para la cantidad media de precipitado esperada cuando la cantidad de reactivo es de 7.1.

12.2.- Se realizó una prueba para determinar la relación entre el contenido de fósforo en una solución y la temperatura de cristalización. Los datos son los siguientes.

Cantidad de P (g/l)	Temperatura de Cristalización (°C)
1.1	- 1.7
2.3	- 0.4
3.2	0.2
4.3	1.1
5.4	2.3
6.6	3.1
7.8	4.2
8.8	5.3

- a) Haga un diagrama de dispersión,
- b) Estime la relación por el método de mínimos cuadrados
- c) Pruebe la hipótesis de que $B = 0$ al 5% de nivel de significación,
- d) Determine el intervalo de confianza del 95% para la temperatura de cristalización de predicción cuando la cantidad de fósforo es de 5 g/l.
- e) Determine el coeficiente de determinación e interprete su resultado.

12.3.- El Comité Mexicano de Sustancias Farmacéuticas de referencia desarrolló un método analítico para el benzoilmotronidazol y desean saber si existe linealidad en el método. Se agrega una cantidad conocida de benzoilmotronidazol y se determina la cantidad de activo con el método analítico desarrollado. Se obtienen los siguientes resultados:

Benzoilmotronidazol (mg)	Activo (mg)
0.5	0.510
0.7	0.687
1.0	1.000
1.3	1.330
1.5	1.510

- a) Haga un diagrama de dispersión.
- b) Encuentre la mejor curva de ajuste.
- c) Pruebe la hipótesis nula: $B = 0$ con $\alpha = 0.05$.
- d) Calcule el coeficiente de correlación.
- e) Calcule el intervalo de confianza del 95% para la cantidad de activo encontrada cuando se agrega 1.2 mg de benzoilmetronidazol.

12.4.- Un estudiante obtuvo los siguientes datos sobre la cantidad de bromuro de potasio que se puede disolver en 100 gramos de agua, a distintas temperaturas:

$^{\circ}\text{C}$	0	10	20	30	40	50
g	52	60	64	73	76	81

- a) Calcular los coeficientes de la recta de regresión.
- b) Probar $H : B = 0.5$ a un nivel de significación de 0.05.
- c) Calcular el coeficiente de determinación e interpretar su resultado.
- d) Pruebe la hipótesis $H : \rho > 0.8$ con $\alpha = 0.05$.

12.5.- Los siguientes datos representan el efecto del tiempo en la pérdida de hidrógeno en muestras de acero almacenadas a una temperatura de 20°C.

Tiempo t (h)	Contenido de H perdido (ppm)
1	8.1
2	7.8
6	6.5
17	5.5
30	4.4

- a) Dibuje un diagrama de dispersión para los datos anteriores,
- b) Determine la ecuación de la recta de regresión lineal y dibújela en el diagrama.
- c) Determine el intervalo de confianza del 95% para el contenido de hidrógeno perdido en 20 horas.
- d) Determine el coeficiente de correlación lineal y pruebe la hipótesis $p = 0$ con $\alpha = 0.10$.
- 12.6.- En un experimento para determinar el efecto del espacio de tiempo en un termotratamiento sobre la resistencia de cierto tipo de alambre, se probaron cinco muestras de alambre en cada uno de cuatro períodos de tiempo diferentes. Las observaciones se efectuan sobre la resistencia por unidad de volumen de alambre. Nótese que hay 20 observaciones, cada valor de X se presenta con 5 Y 's diferentes.

	Tiempo (h)	X		
	2	4	6	8
Resistencia Y	21.3	23.2	25.5	25.9
	21.7	23.4	23.6	25.2
	21.4	23.3	24.7	27.6
	22.1	23.7	26.0	27.1
	20.7	23.0	24.3	26.3

- a) Encuentre la ecuación de regresión.
- b) Pruebe la hipótesis de que $B = 1.0$
- c) Estime la resistencia media dado que $X = 5$.
- d) Encuentre el intervalo de confianza del 95% para la resistencia media dado que $X = 5$.

12.7.- Los siguientes datos son observaciones sobre los caballos de fuerza de un motor a 1800 rpm como una función de la viscosidad del aceite

hp	viscosidad	hp	viscosidad
16.8	45	18.1	54
18.1	59	19.2	63
18.5	66	16.9	48
17.0	47	18.6	55
18.8	61	21.0	67
19.7	68	16.4	44
17.5	49	17.7	56
19.0	57	18.2	62
20.2	67	16.7	50
16.3	43	20.8	70

- a) Registre los puntos en papel cuadriculado,
- b) Encuentre y dibuje el punto (\bar{X}, \bar{Y}) .
- c) Encuentre a y b , por lo tanto, la ecuación de regresión
 $\hat{Y} = a + b X$. Trace esta línea en la gráfica.
- d) Construya una tabla de ANDEVA mostrando la partición de la suma de cuadrados y los grados de libertad.
- e) Encuentre el intervalo de confianza del 95% para B .
- f) Pruebe la hipótesis de que $B = 0$.
- g) ¿Cuál es la mejor estimación para la media de caballos de fuerza si la viscosidad de un aceite es 50?.
- h) Determine un intervalo de confianza del 99% para la media de caballos de fuerza, dado que la viscosidad es 60.

12.8.- Se hicieron determinaciones de la cantidad (ppm) de un compuesto soluble presente a dos diferentes profundidades en cierto número de suelos.

- a) Estime la correlación entre las dos cantidades presentes en las dos profundidades.

- b) Pruebe la significación de la correlación con $\alpha = 0.05$.

12 plg	20 plg	12 plg	20 plg
24	20	66	84
84	103	31	30
13	16	43	62
13	20	19	26
48	86	7	21
61	36	50	73
112	53	72	83

12.9.- Se realizó una prueba para determinar la relación entre la concentración de conservador en fase acuosa y la concentración en fase oleosa para la distribución de clorocrezol. Los resultados obtenidos son:

Conc. fase acuosa (g/l)	Conc. fase oleosa (g/l)
0.20	0.38
0.40	0.73
0.60	1.00
1.00	1.63
0.80	1.30
0.30	0.50
0.50	0.80
0.70	1.20

- a) Haga un diagrama de dispersión.
 b) Calcule el coeficiente de determinación e interprétele.
 c) Pruebe la hipótesis $H_0: \rho = 0.99$ con $\alpha = 1\%$.

12.10.- Una muestra de 12 hojas fue recogida alaetoriamente de un árbol, y la longitud y el ancho de cada hoja fueron medidos con una precisión de un milímetro. Los datos se muestran a continuación

Hoja	Longitud	Ancho
1	35	55
2	21	44
3	25	46
4	35	60
5	26	55
6	40	57
7	35	64
8	40	68
9	25	51
10	42	61
11	23	46
12	25	44

- a) Calcule el coeficiente de correlación muestral
- b) Pruebe la significación de la correlación con $\alpha = 0,05$.
- c) Encuentre el intervalo de confianza del 90% para p .

12.11.- Se ha establecido que la presión de vapor del Eugenol (mmHg) depende de la temperatura ($^{\circ}\text{C}$). La siguiente tabla muestra la relación entre estas dos variables.

T ($^{\circ}\text{C}$)	78.4	108.1	123.0	138.7	155.8	167.3	182.2	204.7	228.3	253.5
P (mmHg)	1	5	10	20	40	60	100	200	400	760

- a) Haga un diagrama de dispersión para estos datos.
- b) Determine la ecuación de ajuste.
- c) Calcule la presión de vapor del Eugenol cuando se emplea una temperatura de 93.7°C .

12.12.- Se desea purificar por destilación a presión reducida Salicilato de Metilo a una presión de 15 mmHg. Considerando que la temperatura de ebullición es una función de la presión y a partir de los siguientes datos experimentales de presión y temperatura del Salicilato de Metilo.

p (mmHg)	1	5	10	20	40	60	100	200	400	760
T (°C)	54	81.6	95.3	110	126.2	136.7	150	172.6	197.5	223.2

- a) Haga un diagrama de dispersión.
- b) Obtenga una ecuación que relacione la temperatura y la presión.
- c) Calcule la temperatura de ebullición a 15 mmHg del Salicilato de Metilo.

12.13.- La siguiente tabla presenta el porcentaje de artículos defectuosos producidos por una máquina. Este porcentaje depende de las impurezas presentes en la materia prima (plástico), medidas en gramos por centímetro cúbico de una solución de este material y las velocidades a las que opera la máquina, representadas con los números del 1 al 4 que son proporcionales a las diferentes velocidades de la máquina. Sea X_2 el monto de impurezas en el plástico, X_3 la velocidad de la máquina y Y el porcentaje de artículos defectuosos en la producción.

Velocidad (X_3)	Impurezas (X_2)				
	1	2	3	4	5
1	2.4	1.8	2.8	3.0	3.1
2	3.1	2.9	3.2	3.3	3.5
3	3.4	3.9	3.8	3.9	4.0
4	3.9	3.9	4.4	4.5	4.6

- a) Ajuste una ecuación de regresión lineal múltiple que exprese la medida de Y en términos de X_2 y X_3 .
- b) Prediga la media de Y para $X_2 = 3.5$ y $X_3 = 3$.

12.14.- Se ha observado que el útero, principalmente su epitelio llamado endometrio sufre una serie de transformaciones cíclicas relacionadas con la actividad ovárica. En esta actividad ovárica intervienen tres tipos de hormonas, pero solo dos de ellas actúan directa-

mente en el crecimiento y manutención del endometrio. Dichas hormonas son la hormona foliculo estimulante (FSH) y la hormona luteotrópica (LTH). Para observar como influyen estas dos hormonas en el crecimiento del endometrio se seleccionaron 10 ratas hembras al azar a las cuales se les controló tanto el FSH como la LTH, los resultados obtenidos fueron los siguientes:

crecimiento del útero (mm)	cantidad. de FSH (mg)	cantidad de LTH (mg)
0	0	0
3.4	2	0
5.1	3	1
7.2	4	2
8.0	6	4
10.2	8	5
8.5	5	8
6.3	3	6
5.4	2	3
4.3	0	2

Determine la ecuación de ajuste para la serie de datos obtenidos por el biólogo en el laboratorio.

- 12.15.- Hay una cierta demanda de un polímero sintético en el mercado industrial. Una industria química desea abastecer esa demanda, pero existe un tiempo limitado para entregar el producto al cliente. Se sabe que entre otros factores, la velocidad de reacción es afectada por la temperatura, por lo cual para producir la mayor cantidad de producto, en menos tiempo, un Ingeniero Químico efectúa en 10 tanques la reacción a diferentes temperaturas, pero a una misma presión de reacción, donde la temperatura varía de 100 en 100°C. Se sabe por procesos anteriores que para obtener una tonelada del polímero sintético a 100°C y una presión de una atmósfera, se lleva a cabo la reacción como máximo en 80 minutos.

X_2 = tiempo de reacción

X_3 = temperatura a la cual se lleva a cabo la reacción.

Y = eficiencia del proceso a esa temperatura que va de 1 a 3, donde 1 no es aceptable, 2 regular y 3 excelente .

Hallar la ecuación de ajuste para este problema, utilizando los datos de la siguiente tabla.

Y	X_3	X_2
3	75	140
3	65	110
3	105	72
2	115	67
2	125	60
2	135	56
2	145	49
1	155	43
1	165	39
1	175	33

- 12.16.- Los datos que aparecen en la tabla son los rendimientos mensuales de una fábrica de gas de agua, expresados en unidades de trabajo. Se insuflan aire y vapor de agua alternadamente a través de carbón de coque para producir una mezcla gaseosa cuyos principales componentes son nitrógeno, hidrógeno y monóxido de carbono. La medida del rendimiento es el coque consumido por 1000 m^3 de hidrógeno más monóxido de carbono producido; puesto que el nitrógeno recogido ya está presente en el aire empleado, y no entra en el cálculo del rendimiento. Se dan también las razones aire/vapor ($.1000 \text{ m}^3 / \text{toneladas de vapor}$).

Consumo mensual de carbón de coque y proporciones
aire/vapor en una fábrica de gas de agua

mes	consumo de carbón	proporción aire/vapor	mes	consumo de carbón	proporción aire/vapor
1	120	2.11	15	51	1.76
2	122	2.29	16	53	1.33
3	128	2.32	17	50	1.23
4	124	2.31	18	34	1.40
5	118	2.25	19	68	1.38
6	114	2.22	20	70	1.96
7	119	2.20	21	49	1.47
8	149	2.41	22	50	1.42
9	141	2.19	23	66	1.33
10	86	2.06	24	46	1.65
11	78	1.99	25	40	1.26
12	51	1.62	26	51	1.61
13	51	1.59	27	51	1.74
14	72	1.70			

- a) Haga un diagrama de dispersión.
- b);Cuál es la curva de ajuste más indicada para este conjunto de datos? Encuentre su ecuación.
- c) Calcule el rendimiento cuando se usa una proporción de aire/vapor de 1.9.

PARTE VI

ESTADISTICA NO PARAMETRICA

CAPITULO 13: METODOS NO PARAMETRICOS

13.1 METODOS NO PARAMETRICOS VERSUS METODOS PARAMETRICOS

La Estadística Inferencial estudiada en los capítulos 9, 11 y 12 está clasificada dentro de la llamada **Estadística Paramétrica**; mientras que las pruebas de Bondad de Ajuste y Prueba de Independencia estudiadas en el capítulo 10, utilizando la distribución Ji-cuadrada y la prueba de Kolmogorov-Smirnov están consideradas dentro de la **Estadística No-Paramétrica o Pruebas de Distribución Libre**.

La pregunta es, ¿Cuál es la diferencia entre las dos Estadísticas? La respuesta es sencilla, en la estadística paramétrica nuestro interés era siempre hacer estimaciones y pruebas de hipótesis acerca de uno o más **parámetros** de la población o poblaciones. Además, en todas estas estimaciones y pruebas de hipótesis se establece como suposición general que la población o poblaciones de donde provienen las muestras deben estar distribuidas normalmente, aunque sea en forma aproximada.

La Estadística No-Paramétrica en contraste con la Estadística Paramétrica no se ocupa de hacer estimaciones y pruebas de hipótesis acerca de **parámetros** y no depende del conocimiento de como se distribuye la población. De esto se deduce que los métodos no paramétricos son convenientes si no se conoce la distribución de la población, por ejemplo, en investigación exploratoria. Más aún, otra ventaja es que, por lo general, los cálculos necesarios son más sencillos. Sin embargo, no podemos esperar que en el caso de una cierta distribución, la cantidad de información dada por un método no paramétrico sea la misma que daría un método paramétrico que solo se aplica a esa distribución específica. Es decir, si se conoce que la distribución es normal, una prueba paramétrica es más eficiente que una no paramétrica.

Los métodos no paramétricos pueden ser usados para analizar datos de tipo cualitativo, ya sean ordinales o jerarquizados ó nominales; así como también para datos cuantitativos, mientras que los métodos paramétricos solo pueden usarse para datos cuantitativos (discretos y continuos)

13.2 PRUEBAS DE LA MEDIANA:

Sabemos que la media μ es una medida de tendencia central de una distribución, en particular si la distribución es simétrica o casi simétrica. Si no especificamos la distribución, la media perderá en muchos casos algunos de sus atractivos y puede preferirse la mediana Md como medida de tendencia central.

Como sabemos, la distribución t es usada para probar la hipótesis nula de que una media de la población es igual a un cierto valor ($H_0: \mu = \mu_0$) ó la hipótesis nula de que la diferencia de medias de dos poblaciones es cero ($H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$), en el supuesto de que las poblaciones estén **distribuidas normalmente**. Cuando el supuesto de normalidad no se cumple o cuando los datos no son de tipo cuantitativo sino de tipo nominal o jerarquizado, una prueba alternativa debe utilizarse. Aunque sabemos que la prueba t de student no es **demasiado sensible a la no-normalidad** de la población hay ocasiones en que una prueba alternativa es deseada.

Una prueba no paramétrica que no requiere de normalidad ni que los datos sean de tipo cuantitativo es la **prueba del signo para la mediana** y su única suposición es que la distribución sea continua. El nombre de **prueba del signo** se debe a que toma en cuenta los signos positivos y negativos en vez de los valores numéricos de los datos.

13.2.1 PRUEBA DEL SIGNO DE LA MEDIANA PARA UNA MUESTRA

Ahora describiremos una prueba muy sencilla de hipótesis de que la mediana Md tiene un cierto valor Md_0 , esto es:

$$H_0: Md = Md_0$$

$$H_a: Md \neq Md_0$$

Los pasos de este método se darán mediante un ejemplo.

Ejemplo 13.1:

Supóngase que en una escuela de educación especial para débiles mentales, 10 niñas fueron seleccionadas al azar y se les dió instrucciones acerca del arreglo personal. Después de dos semanas de instrucción se entrevistaron a las chicas y se les asignó un valor entre 0 y 10 de acuerdo a su apariencia general. Los datos se muestran en la tab la 13.1.

Usamos estos datos para probar la hipótesis nula $H_0: Md = 5$ con $\alpha = 0.05$ de nivel de significación

Tabla 13.1

Apariencia General de 10 niñas débiles mentales

niña	calificación
1	4
2	5
3	8
4	8
S	9
6	6
7	10
8	7
9	6
10	6

Como primer paso para probar dicha hipótesis, examinamos la tabla y vemos que calificaciones están por arriba y por debajo del valor hipotético de 5 y le asignamos un signo + a los que están por arriba de 5 y un signo - a los que están por debajo; Véase tabla 13.2

Tabla 13.2

niña	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
signo	-	0	+	+	+	+	+	+	+	+

Si la hipótesis nula fuera cierta se esperaría que el número de signos + y - fuesen aproximadamente iguales. Esto sugiere otra forma de establecer las hipótesis; es decir, que la probabilidad de un signo "más" debe ser igual a la probabilidad de un signo "menos", esto es

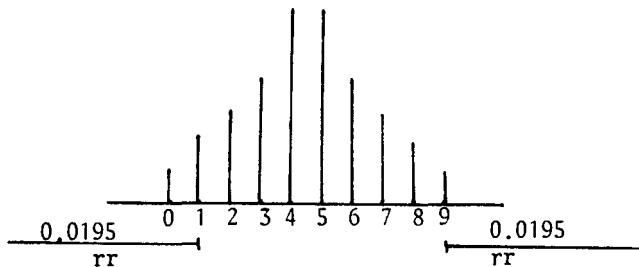
$$H_0: P(+)=P(-)=0.50$$

Si observamos la tabla 13.2 vemos que hay un predominio de signos +, exactamente 8 de ellos, un signo - y un cero. Usualmente en pruebas de este tipo los ceros se eliminan y se disminuye el tamaño de muestra n ; en este caso se reduce a 9 observaciones.

Como los signos solo son dos (+ ó -), la distribución de ellos sigue una Distribución Binomial donde podemos considerar "éxito" el signo menos y "fracaso" el signo más o viceversa. Puesto que en nuestro ejemplo hay -- menos signos - que +, seleccionamos a X como el número de signos "menos" que pueden ocurrir en las $n=9$ observaciones, entonces X es una variable aleatoria binomial con parámetro $\pi=0.5$, si la hipótesis nula es cierta. La hipótesis nula se rechazará si el valor de X es demasiado pequeño o demasiado grande. Por ejemplo, cuando $n=9$, de la tabla A-2 tenemos:

$$P(X \leq 1) = 0.0195 \quad y \quad P(X \geq 8) = 0.0195$$

y podemos tomar $X \leq 1$ y $X \geq 8$ como región de rechazo.



Puesto que $P(X \leq 1) = 0.0195 < 0.025 = \frac{\alpha}{2}$ y $P(X \geq 8) = 0.0195 < 0.025$ rechazamos H_0 y concluimos que la mediana no puede ser 5.

13.2.2 PRUEBA DEL SIGNO DE LA MEDIANA PARA DOS MUESTRAS APAREADAS.

Cuando los datos a analizar son apareados y las suposiciones del caso 10 (cuadro resumen de la página 286) no se cumplen para usar la prueba t de student o si los datos no son de tipo cuantitativo, la prueba del signo puede ser usada para probar la hipótesis de la la **diferencia de medianas** es cero o que $P(X_i > Y_i) = P(X_i < Y_i) = 0.5$.

Para un par de datos cualesquiera la diferencia $X_i - Y_i$ puede ser **+ δ** – dependiendo si X_i es mayor o menos que Y_i . Si la diferencia de medianas es cero, esperaríamos que las probabilidades de un **+ δ** – sean aproximadamente iguales, entonces

$$P(+\delta) = P(-\delta) = 0.5$$

Ejemplo 13.2:

Doce parejas de pacientes de una clínica dental fueron cuidadosamente seleccionados de manera que los elementos de cada pareja tuvieran la misma edad, sexo, inteligencia e igual puntuación en higiene oral al inicio del tratamiento. A un miembro de cada par se le da instrucciones de como cepillarse y al otro no. Despues de 6 meses los 24 sujetos fueron examinados por un higienista y se le dio una calificación en higiene oral, sin que el higienista supiera cuales elementos habían tenido instrucción y cuales no. Una **puntuación baja** indica un **nivel alto** de higiene, los datos se dan en la tabla 13.3.

Tabla. 13.3

pareja	Instrucción		
	con X_i	sin Y_i	signo de la diferencia $(X_i - Y_i)$
1	1.5	2.0	-
2	2.0	2.0	0
3	3.5	4.0	-
4	3.0	2.5	+
5	3.5	4.0	-
6	2.5	3.0	-
7	2.0	3.5	-
8	1.5	3.0	-
9	1.5	2.5	-
10	2.0	2.5	-
11	3.0	2.5	+
12	2.0	2.5	-

El investigador desea saber si la instrucción produjo un efecto benéfico o no. Si la instrucción tuvo efecto, la diferencia de medianas deberá ser negativa.

$$H_0: Md_x - Md_y \geq 0$$

$$H_a: Md_x - Md_y < 0$$

Usando $\alpha = 0.05$ y después de eliminar el cero, hay 2 signos + y 9 signos - ; por lo que $n = 11$.

Puesto que solo los signos - causarán el rechazo de H_0 , queremos saber la probabilidad que haya 9 ó más signos - en un total de 11. Entonces, si elegimos X la variable que cuenta el número de signos - tenemos que:

$P(X \geq 9) = 0.0527$ de la tabla A-2 y como $0.0327 < 0.05$ se rechaza H_0 y concluimos que la diferencia de medianas es negativa y por lo tanto la instrucción es benéfica.

13.2.3 PRUEBA DE LA MEDIANA PARA MUESTRAS INDEPENDIENTES

La prueba del signo de la mediana para dos muestras presentada en la sección anterior requiere que las muestras sean apareadas. Frecuentemente es de nuestro interés hacer inferencias basadas en dos muestras que no estén relacionadas; esto es, muestras independientes.

Para probar hipótesis acerca de dos *medias* de la población con muestras independientes, empleamos las distribuciones Z ó t (dependiendo si las varianzas poblacionales son conocidas o desconocidas) cuando se cumplen las condiciones para estas pruebas paramétricas. Una prueba no paramétrica para el caso de muestras independientes usando las medianas en vez de las medias fue desarrollada por Mood.

Esta prueba se puede usar cuando se cumplen las siguientes suposiciones:

- a) Las muestras son seleccionadas en forma aleatoria de sus respectivas poblaciones.
- b) Las poblaciones tienen la misma forma y difieren solamente en una traslación..
- c) Los datos deben ser de tipo jerarquizado cuando menos.
- d) Las dos muestras pueden ser de diferente tamaño.

El procedimiento se describe por medio de un ejemplo,

Ejemplo 13.3:

A sendas muestras aleatorias de 12 estudiantes varones de una escuela preparatoria rural y a 16 varones de una escuela preparatoria urbana se les aplicó un test para medir su "madurez mental". Los resultados se resumen en la tabla 13,4

Tabla 15.4

Valores del test de madurez mental aplicado a varones de preparatoria rural y urbana.

	urbana	rural	
35	25	29	50
26	27	50	37
27	45	43	34
21	46	22	31
27	33	42	
38	26	47	
23	46	42	
25	41	32	

Deseamos determinar si hay diferencia significativa entre las medianas para las medidas de la madurez de los varones de zonas rurales y urbanas con un nivel de significación de $\alpha = 0.05$.

El primer paso en este procedimiento es calcular la mediana combinada de las muestras, para lo cual debemos colocar los datos en orden ascendente o descendente y como el número combinado de datos $n_1 + n_2$ ($12+16 = 28$) es par, la mediana es la media aritmética de los dos datos centrales, esto es. (Véase tabla 13.5).

$$Md = \frac{33 + 34}{2} = 33.5$$

Tabla 13.5

Datos del ejemplo 13.3 en orden ascendente

21	27	54	43
22	27	35	45
23	27	37	46
25	29	38	46
25	31	41	47
26	32	42	50
26	33	42	50

Ahora, calculamos para cada muestra el número de observaciones que están por debajo y por encima de la mediana combinada y estas frecuencias se arreglan en una tabla de contingencia de 2x2, como se muestra en la tabla 13.6.

Tabla. 13.6

	urbana	rural	total
número de datos por encima de la mediana	6	8	14
número de datos por debajo de la mediana	10	4	14
total	16	12	28

Aplicando la fórmula corregida de Yates para tablas de contingencia de 2x2 (capítulo 10).

$$\chi_Y^2 = \frac{n (|ad - bc| - \frac{n}{2})^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} \quad \text{con un grado de libertad}$$

$$\chi_Y^2 = \frac{28(|6 \cdot 4 - 8 \cdot 10| - \frac{28}{2})^2}{(14)(14)(16)(12)} = \frac{49,392}{37,632} = 1.3125$$

Como $1.3125 < 3.841$, el valor crítico de χ^2 con $\alpha = 0.05$ y un grado de libertad, se acepta H_0 y concluimos que las dos muestras fueron extraídas de poblaciones con medianas no significativamente diferentes.

13.2.4 GENERALIZACION DE LA PRUEBA DE LA MEDIANA

La prueba de la mediana puede generalizarse usando cualquier número fijo de percentiles de los datos combinados en lugar de la mediana solamente. Los números de cada muestra que caen entre esos percentiles combinados se anotan en una tabla y luego se analizan como en una tabla de contingencia. La hipótesis de que las k muestras se han sacado aleatoriamente de

poblaciones con distribuciones iguales, se rechaza si la χ^2 observada es significativamente mayor que la teórica. En este problema el número de grados de libertad es $(k - 1)(r - 1)$, siendo r el número de categorías usado. Por ejemplo, la tabla 13.7 contiene para tres muestras ($k=3$) de tamaño 20 cada una, el número de observaciones por encima de P_{75} , entre P_{50} y P_{75} , entre P_{25} y P_{50} y por debajo de P_{25} .

El estadígrafo de prueba χ^2 tiene $(3-1)(4-1) = 6$ grados de libertad. Las frecuencias esperadas para este ejemplo son todas iguales a $\frac{15 \times 20}{60} = 5$.

Tabla 73.7

Muestras				
	1	2	3	total
Por encima de P_{75}	$O_{11}=5$ $E_{11}=5$	7 5	3 5	15
Entre P_{50} y P_{75}	3 5	3 5	9 5	15
Entre P_{25} y P_{50}	$O_{31}=4$ $E_{31}=5$	7 5	4 5	15
Por debajo de P_{25}	8 5	3 5	4 5	15
Total	20	20	20	60

El valor calculado de χ^2 es 10.4, el valor teórico es $\chi^2_{0.95,6} = 11.07$. Como el valor calculado es menor que el valor teórico, no se rechaza la hipótesis al 5% de significación y concluimos que las muestras fueron sacadas aleatoriamente de poblaciones con distribuciones significativamente iguales.

13.3 PRUEBA DEL RANGO CON SIGNO DE WILCOXON PARA MUESTRAS APAREADAS

La prueba del signo de la mediana para muestras apareadas estudiada en la sección 13.2.2 solo toma en cuenta el signo de cada diferencia de valores de las muestras, mientras que las magnitudes de las diferencias no las toma en cuenta. La prueba del rango de Wilcoxon considera tanto la magnitud como el signo de las diferencias de dos muestras apareadas, por lo que la pérdida de información no es tan grande como en la prueba del signo de la Mediana.

Los pasos a seguir en la prueba del rango con signo de Wilcoxon son:

- 1) Calcular las diferencias D_i entre los pares de valores.
- 2) Ordenar los valores absolutos de las diferencias D_i en orden ascendente; si alguna diferencia es cero se elimina y si hay más de una diferencia con el mismo valor se saca la media aritmética de los "rangos" que le corresponden y se le asigna el valor medio a todos los D_i con el mismo valor.
- 3) Reasignar los signos a las diferencias D_i ya ordenadas.
- 4) Sumar los "rangos" con signo positivo y los "rangos" con signo negativo por separado.
- 5) Sea T el menor de los valores absolutos de las sumas de los rangos positivos y negativos obtenidos en el inciso 4.
- 6) Comparar T con los valores de la tabla A-13. Si el valor calculado T es menor o igual que el valor teórico (de tablas) Techamos la hipótesis nula.
- 7) Si $n > 25$ se puede usar la distribución z y la tabla A-4 donde la media de T es:

$$\mu_T = \frac{n(n+1)}{4}$$

y la desviación estándar es:

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}$$

Entonces:

$$Z = \frac{T - \mu_T}{\sigma_T} = \frac{\frac{T - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}}$$

Antes de dar ejemplos numéricos, debemos señalar que la prueba del rango con signo también es aplicable en las siguientes situaciones:

- Para probar hipótesis de que la mediana de una población es igual a algún valor específico, digamos, Md_0 y se trabaja con $|X - Md_0|$ en lugar de $|D_i|$.
- Para probar la hipótesis de que la mediana de una población de diferencias es igual a algún valor específico, Md_0 y en este caso se trabaja con $|(X - Y) - Md_0|$ en lugar de $|D_i|$.

Ejemplo 13.4:

Supóngase que estamos tratando con dos métodos diferentes A y B para medir el contenido de almidón en las papas. Para comparar los dos métodos, diseñamos un experimento en el que cada una de 16 panas se corta en dos partes; a cada una de las dos partes se le aplica uno de los dos métodos; de esta manera, de cada papa obtenemos dos valores, uno procedente del método A y otro del método B. Luego calculamos la diferencia de los valores correspondientes; supóngase que los resultados (en múltiplos de 1% son):

D_i : 2 0 0 1 2 -5 3 -6 4 7 3 0 -1 1 -2 1

Deseamos probar la hipótesis de que los dos métodos dan el mismo resultado.

Como primeros pasos determinamos los valores absolutos de las diferencias, omitimos los ceros y luego anotamos los signos que le corresponden a los trece valores restantes. En otra columna escribimos los números del 1 al 13 en orden de magnitud de los valores absolutos de las diferencias.

En el caso de que todos los valores absolutos sean distintos, estos números indicarán el RANGO y, en el caso de que haya un valor absoluto repetido como en nuestro ejemplo que hay cuatro unos(1) el rango para los cuatro unos es la media aritmética de 1,2,3 y 4; esto es, $\frac{1+2+3+4}{4} = 2.5$.

Por último, escribimos el "RANGO CON SIGNO" en otras dos columnas. Veáse la tabla 13.8.

Tabla 13.8

D_i	$ D_i $	signo de D_i	orden de $ D_i $	Rango de $ D_i $	rango con signo positivo	rango con signo negativo
2	2	+	5	6	6
0	0
0	0
1	1	+	1	2.5	2.5
2	2	+	6	6	6
-5	5	-	11	11	...	-11
3	3	+	8	8.5	8.5
-6	6	-	12	12	...	-12
4	4	+	10	10	10
7	7	+	13	13	13
0	0
-1	1	-	2	2.5	...	-2.5
1	1	+	3	2.5	2.5
-2	2	-	7	6	...	-6
1	1	+	4	2.5	2.5
				TOTAL:	59.5	-31.5

La suma de los rangos con signo negativo es -31.5 y la suma de los rangos con signo positivo es 59.5. Entonces $T = 31.5$ y $n = m-3 = 13$. De la tabla A-13, el valor crítico inferior para una prueba bilateral con $\alpha = 0.05$ es 17. Por lo tanto se acepta H_0 de que $Md_1 - Md_2 = 0$ con $\alpha = 5\%$.

Ejemplo 13.5:

En una prueba Brinell de dureza, una esfera de acero endurecido se comprime, bajo una carga específica, sobre el material por probar. Se mide el diámetro de la indentación esférica. Se dispone de dos esferas (una por cada uno de dos fabricantes), cuyas indentaciones en 15 piezas de material se compararán. Cada pieza de material se probará dos veces, una con cada esfera. Los datos obtenidos se indican en la tabla 13.9. Use la prueba del RANGO CON SIGNO DE WILCOXON para determinar si los efectos de los tratamientos son iguales con $\alpha = 0.05$.

Tabla. 7 3.9

Datos obtenidos en una prueba Brinell de dureza

muestra número	diámetros		diferencias
	X	Y	X - Y = D _i
1	73	51	22
2	43	41	2
3	47	43	4
4	53	41	12
5	58	47	11
6	47	32	15
7	52	24	28
8	38	43	- 5
9	61	53	8
10	56	52	4
11	56	57	- 1
12	34	44	- 11
13	55	57	- 2
14	65	40	25
15	75	68	7

El procedimiento para calcular el valor T de Wilcoxon se muestra en la tabla 13.10.

Tabla 13.10

D_i	$ D_i $	signo	orden de $ D_i $	rango de $ D_i $	rango con signo posit. negat.
22	22	+	15	13	13
2	2	+	2	2.5	2.5
4	4	+	4	4.5	4.5
12	12	+	11	11	11
11	11	+	10	10	10
15	15	+	12	12	12
28	23	+	15	15	15
-5	5	-	6	6 -6
8	8	+	8	8	8
4	4	+	5	4.5	4.5
-1	1	-	1	1 -1
-10	10	-	9	9 -9
-2	2	-	3	2.5 -2.5
25	25	+	14	14	14
7	7	.+	7	7	7
Total:					101.5 -18.5

T es 18.5, que al compararlo con 25 que es el valor crítico obtenido de la tabla A-13 nos indica que debemos rechazar la H_0 , por lo tanto los efectos de tratamientos no son iguales.

15.4 PRUEBA DEL RANGO PARA MUESTRAS INDEPENDIENTES O PRUEBA U DE MANN-WHITNEY.

La prueba U de Mann-Whitney sirve para probar hipótesis acerca de dos medias de dos muestras independientes cuando los datos no alcanzan a ser de tipo cuantitativo sino ordinales.

En esta prueba, arreglamos primero los valores de las muestras en orden creciente desde 1 a $n_1 + n_2$ (donde n_1 es el tamaño de la muestra 1 y n_2 es el tamaño de la muestra 2), conservando cada valor dentro de su propia muestra. La suma de los rangos de la muestra 1 la llamamos R_1 y la suma de

los rangos de la muestra 2, R_2 .

Luego, aplicamos una de las siguientes fórmulas:

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} - R_1$$

$$U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2 + 2)}{2} - R_2$$

Una vez calculado cualquiera de los dos U_1 ó U_2 obtenemos otro valor

$$U' = n_1 n_2 - U$$

donde U es U_1 ó U_2 calculado anteriormente.

Luego, comparamos el menor de los valores calculados U ó U' con el menor de los valores críticos de la tabla A-14 para los tamaños de muestras n_1 y n_2 correspondientes y el nivel de significación α . Si el valor calculado es menor que el valor crítico (de la tabla) se rechaza $H : \mu_1 = \mu_2$.

En caso de que alguno de los n_1 ó n_2 sea mayor que 20 no podemos usar la tabla A-14, pero podemos obtener una estimación de μ_U y σ_U y luego aplicar la tabla A-4 de la distribución normal estándar.

Así:

$$\mu_U = \frac{n_1 n_2}{2}$$

$$\sigma_U = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}$$

$$Z = \frac{U - \mu_U}{\sigma_U}$$

Ejemplo 13.6:

Se mide el peso del polvo (en miligramos) en el gasto de gas en dos sistemas de tuberías diferentes. Los valores que se obtienen son los siguientes:

Tabla 13.11

A	8
20	75
37	21
55	72
50	71
64	85
41	43
	34
	65
	90
	35

Pruebe la hipótesis de que las poblaciones correspondientes son iguales al 5% de nivel de significación.

Los rangos de la muestra combinada se muestran en la tabla 13.12.

Tabla 13.12

A	rangos de A	B	rangos de B
20	1	75	14
37	5	21	2
55	9	72	13
50	8	71	12
64	10	85	15
41	6	43	7
		34	3
		65	11
		90	16
		35	4

$$n_1 = 6 \quad R_1 = 39 \quad n_2 = 10 \quad R_2 = 97$$

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} - R_1$$

$$U_1 = (6)(10) + \frac{(6)(7)}{2} - 39$$

$$U_1 = 60 + 21 - 39 = 42 = U$$

$$U'_1 = n_1 n_2 - 42 = 60 - 42 = 18$$

(obsérvese que si hubiéramos calculado $U_2 = 60 + \frac{(10)(11)}{2} - 97 = 18$, entonces $U'_2 = 60 - 18 = 42 = U$ y obtenemos los mismos valores 18 y 42 para las U' 's calculadas).

De la tabla A-14 para $\alpha = 0.05$ con $n_1 = 6$ y $n_2 = 10$, tenemos 11 y 49 como valores críticos; por lo tanto, se acepta H_0 , lo que significa que las medias no son significativamente diferentes.

Ejemplo 13.7:

Supóngase que se tienen dos muestras de tamaño $n_1 = 50$ y $n_2 = 100$ y que $U_1 = 3050$, entonces $U' = 50(100) - 3050 = 1950$ y

$$\mu_U = \frac{5000}{2} = 2500$$

$$\sigma_U = \sqrt{\frac{5000(151)}{12}} = 250.83$$

$$Z = \frac{1950 - 2500}{250.83} = \frac{-550}{250.83} = -2.19$$

Como $Z_{0.025} = -1.96 > -2.19$, se rechaza H_0 .

15.5 ANALISIS DE VARIANZA DE UN FACTOR POR RANGOS O PRUEBA H DE KRUSKAL-WALLIS.

Como vimos en el capítulo 11 el análisis de varianza nos sirve para probar hipótesis acerca de *más de dos medias* poblacionales. Cuando no se cumplen las suposiciones de normalidad y de igualdad de varianzas o cuando los datos a analizar son solamente rangos, una prueba no paramétrica puede ser usada para probar la hipótesis de igualdad de parámetros de posición (de tres o más medianas). Como vimos en la sección 13.2.4, la prueba de la Mediana puede extenderse a estos casos; sin embargo, esta prueba solo toma en cuenta una pequeña parte de la información disponible; esto es, si los datos están o no por arriba o por debajo de la mediana combinada o de ciertos percentiles. La prueba H de Kruskal-Wallis o análisis de varianza por rangos considera la magnitud de cada observación con relación a las otras observaciones. Esta prueba es una extensión de la prueba de Mann-Whitney y los pasos a seguir son:

- 1) Las observaciones n_1, n_2, \dots, n_k de las k muestras se combinan en una sola muestra de tamaño $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ y se arreglan en orden de magnitud (considerando su identidad dentro de cada muestra) desde la más pequeña a la más grande. Las observaciones son entonces, reemplazadas por sus rangos del 1 al n. Si dos o más observaciones tienen el mismo valor (están empatadas) se les asigna la media aritmética de los rangos correspondientes a las observaciones empatadas.
- 2) Se suman los rangos correspondientes a las observaciones de cada muestra por separado, dando origen a k sumas.
- 3) Se calcula el estadígrafo H por la fórmula:

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i} - 3(n+1)$$

donde: k = es el número de muestras o tratamientos.

n_i = es el número de observaciones en la muestra i.

n = es el número total de observaciones.

R_i = es la suma de los rangos en la muestra i.

- 4) Cuando hay tres muestras con 5 ó menos observaciones cada una, la significación de II se determina usando la tabla A-15. Cuando hay más de 5 observaciones en cada muestra ó más de 3 muestras se sabe que H está distribuida aproximadamente como χ^2 con k-1 grados de libertad.

Ejemplo 13.8:

Se estudiaron los efectos de dos drogas en el tiempo de reacción a cierto estímulo en tres grupos de animales experimentales. Se usó el grupo III como control, mientras que los grupos I y II fueron tratados con las drogas A y B previamente a la aplicación del estímulo. La siguiente tabla muestra los tiempos de reacción en segundos de 13 animales.

Tabla 13.13

TIEMPOS DE REACCION EN SEGUNDOS DE 13 ANIMALES

GRUPOS		
I	II	III
17	8	2
20	7	5
40	9	4
31	8	3
35		

¿Podemos concluir que los tres grupos difieren respecto al tiempo de reacción?

¿Podemos concluir esto si se rechaza la *hipótesis nula* de que los tres grupos *no difieren* en su tiempo de reacción.

La hipótesis nula será cierta si los rangos están bien distribuidos entre los tres grupos y en consecuencia, las sumas de los rangos de los tres grupos deben ser proporcionales a sus tamaños de muestra; si esto no ocurre el estadígrafo H será muy grande y por lo tanto se rechazará la hipótesis nula cuando el valor de H sea mayor que el valor crítico. Los rangos de la muestra combinada son los siguientes:

Tabla 13.14

RANGOS PARA LOS TIEMPOS DE REACCION DE 13 ANIMALES

I	rangos	II	rangos	III	rangos
15	9	8	6.5	2	1
20	10	7	5	5	4
40	13	9	8	4	3
31	11	3	6.5	3	2
35	12				

$$R_1 = 55$$

$$R_2 = 26$$

$$R_3 = 10$$

$$n_1 = 5$$

$$n_2 = 4$$

$$n_3 = 4$$

$$H = \frac{12}{13(14)} \left[-\frac{(55)^2}{5} + \frac{(26)^2}{4} + \frac{(10)^2}{4} \right] - 3(14)$$

$$H = 10.68$$

La tabla A-15 muestra que para n. de 5, 4 y 4, la probabilidad de que $H > 10.68$ es menor que 0.009. Por lo tanto, la hipótesis nula puede ser rechazada al 0.01 de nivel de significación; concluimos entonces, que hay una diferencia significativa entre los tiempos de reacción promedios para los tres grupos al nivel de 0.01.

Cuando hay varias observaciones con la misma magnitud (empatadas) y hay que promediar los rangos como en el caso de los dos 8's que tuvieron rango de 6.5 se calcula una H corregida por:

$$H' = \frac{H}{\frac{\sum_{i=1}^r (t_i^3 - t_i)}{n^3 - n}}$$

donde: t_i = es el número de observaciones empatadas,

r = es el número de conjuntos empatados.

Así, en nuestro ejemplo $r = 1$ y $t_i = 2$.

$$H' = \frac{10.68}{1 - \frac{2^3 - 2}{(13)^3 - 13}} = \frac{10.68}{0.9973} = 10.71$$

el cual sigue siendo significativo al nivel de 0.01.

Ejemplo 13.9:

Supongamos que se ha tomado una muestra al azar de cada una de las tres fuentes de alambres de acero de alta tensión y que se han medido sus resistencias a la tensión en cientos de libras. Deseamos probar si estas observaciones indican que las poblaciones progenituras están igualmente distribuidas. A continuación se dan los datos con sus rangos respectivos.

Tabla 13.15

DATOS DE ALAMBRE DE ACERO DE ALTA TENSION

MUESTRAS					
1	Rango	2	Rango	3	Rango
29	17.5	36	26.5	24	11.5
36	26.5	17	2	18	3
37	29.5	19	4	20	5
36	26.5	21	7	24	11.5
36	26.5	26	14	25	13
35	24	29	17.5	28	16
39	32	27	15	31	20
38	31	21	7	34	23
40	33	32	21	30	19
23	10	33	22	22	9
		37	29,5	21	7
				16	1
$R_1 = 256.5$		$R_2 = 165.5$		$R_3 = 139.0$	
$n_1 = 10$		$n_2 = 11$		$n_3 = 12$	

Para estos datos tenemos:

$$n = n_1 + n_2 + n_3 = 33$$

$$H = \frac{12}{33(34)} \left[\frac{(256.5)^2}{10} + \frac{(165.5)^2}{11} + \frac{(139)^2}{12} \right] - 3(34)$$

$$H = 12.22$$

Vimos que hay **tres** conjuntos de **dos** valores "empatados" (24, 24; 29, 29; y 57, 37), **un** conjunto de **tres** observaciones "empatadas" (21, 21, 21) y **un** conjunto de **cuatro** observaciones "empatadas" (36, 36, 36, 36). Por lo tanto:

$$H' = \frac{12.22}{1 - \frac{3(2^3 - 2) + (3^3 - 3) + (4^3 - 4)}{(33)^3 - 33}} = \frac{12.22}{0.997} = 12.26$$

Puesto que $\chi^2_{0.995, 2} = 10.577$ y $H > \chi^2_{0.995, 2}$, concluimos que las distribuciones son significativamente diferentes a un nivel menor que 0.005.

13.6 ANALISIS DE VARIANZA DE UN FACTOR CON BLOQUES ALEATORIOS COMPLETOS POR RANGOS DE FRIEDMAN.

Así como hubo la necesidad de una prueba no paramétrica análoga al análisis de varianza de un factor, en ocasiones es necesario tener una prueba no paramétrica análoga al análisis de varianza de un factor con bloques ya sea porque no se cumplen los supuestos o porque necesitamos de resultados con urgencia. Una prueba no paramétrica para estos casos es el análisis de varianza por rangos de Friedman, la cual ilustraremos con un ejemplo.

Ejemplo 13.10:

Se les pidió a nueve fisico-terapistas que clasificaran tres modelos de estimuladores eléctricos de bajo voltaje en orden de preferencia. El número 1 indica primera preferencia; el 2, segunda y el 3 tercera. Los datos se dan en la tabla 13.16

La hipótesis nula a contrastar es de que no hay diferencia en preferencia por los modelos. La prueba de Friedman permitirá determinar si es razonable asumir que las columnas de rangos han sido de la misma población.

Tabla. 13.16

MODELO

terapista	A	B	C
1	2	3	1
2	2	3	1
3	2	3	1
4	1	3	2
5	3	2	1
6	1	2	3
7	2	3	1
8	1	3	2
9	1	3	2

$$R_1=15 \quad R_2=25 \quad R_3=14$$

Si la hipótesis nula es cierta se tendrá que los rangos observados dentro de cada columna estarán distribuidos al azar y por ende esperaremos que los números 1, 2 y 3 ocurran con aproximadamente la misma frecuencia en cada columna. Si, por otra parte, la hipótesis nula es falsa (los modelos no son igualmente preferidos) se esperará una mayor preponderancia de rangos altos (o bajos) en alguna de las columnas. Esta condición será reflejada en la suma de rangos. La prueba de Friedman nos dirá si las sumas de los rangos son tan diferentes o no como para ser resultado del azar solamente.

Como los datos consisten de rangos dentro de los bloques (filas o terapistas), el primer paso es sumar los rangos por columnas (tratamientos). Estas sumas son R_i mostradas en la tabla 13.16. El estadígrafo de Friedman χ_r^2 se calcula por:

$$\chi_r^2 = \frac{12}{r k (k+1)} \sum_{i=1}^k (R_i)^2 - 3 r (k+1)$$

donde: r = es el número de filas (bloques).

k = es el número de columnas (tratamientos).

Los valores críticos para χ_r^2 para varios valores de r y k se obtienen en la tabla A-16.

Para nuestro ejemplo se tiene:

$$\chi_r^2 = \frac{12}{9(3)(4)} [(15)^2 + (25)^2 + (14)^2] - 3(9)(4)$$

$$\chi_r^2 = 8.222$$

La tabla A-16 nos indica que la probabilidad de obtener un valor de χ_r^2 tan grande como 8.222 debido solo al azar es de 0.016. Por lo tanto, podemos rechazar la hipótesis nula y concluir que los tres modelos no son igualmente preferidos con $\alpha \geq 0.016$.

Cuando los datos son medidas en vez de rangos se le asignan rangos basados en la magnitud dentro de los bloques. Si hay empates se toma la media como rango.

Cuando los valores de r y k exceden los dados en la tabla A-16 se puede usar los valores críticos de χ^2 de la tabla A-6 con $k-1$ grados de libertad.

Ejemplo 13.11:

La tabla 13.17 muestra las respuestas en porcentajes de la disminución en fluido salival de 16 animales después de diferentes dosis de atropina. Los rangos están dados entre paréntesis y la suma se los rangos también están dadas. Deseamos saber si podemos concluir que las dosis diferentes producen diferentes respuestas.

Tabla 13.17

animal	A	B	C	D
1	29 (1)	48 (2)	75 (3)	100 (4)
2	72 (2)	30 (1)	100 (3.5)	100 (3.5)
3	70 (1)	100 (4)	86 (2)	96 (3)
4	54 (2)	35 (1)	90 (3)	99 (4)
5	5 (1)	43 (3)	32 (2)	81 (4)
6	17 (1)	40 (2)	76 (3)	81 (4)
7	74 (1)	100 (3)	100 (3)	100 (3)
8	6 (1)	34 (2)	60 (3)	81 (4)
9	16 (1)	39 (2)	73 (3)	79 (4)
10	52 (2)	34 (1)	88 (3)	96 (4)
11	8 (1)	42 (3)	31 (2)	79 (4)
12	29 (1)	47 (2)	72 (3)	99 (4)
13	71 (1)	100 (3.5)	97 (2)	100 (3.5)
14	7 (1)	33 (2)	58 (3)	79 (4)
15	68 (1)	99 (4)	84 (2)	93 (3)
16	70 (2)	30 (1)	99 (3.5)	99 (3.5)
	R ₁ =20	R ₂ =36.5	R ₃ =44	R ₄ =59.5

De estos datos calculamos χ^2_r :

$$\chi^2_r = \frac{12}{16(4)(5)} [(20)^2 + (36.5)^2 + (44)^2 + (59.5)^2] - 3(16)(5)$$

$$\chi^2_r = 30.32$$

Como $\chi^2_{0.995,3} = 12.838$, la probabilidad de que H_0 sea verdadera es menor que 0.005. Rechazamos H_0 y concluimos que las diferentes dosis producen diferentes respuestas.

13.7 COEFICIENTE DE CORRELACION POR RANGOS DE SPEARMAN

Cuando se obtienen datos en parejas, tales como observaciones de dos variables para un mismo individuo, se pueden usar los rangos para medir la correlación entre las parejas de datos con la ventaja de que no se hacen suposiciones sobre las distribuciones de X y Y. Hay varios métodos no-paramétricos para medir la correlación entre dos variables, el más usado es el coeficiente de correlación por rangos de Spearman, denotado por r_S y cuya fórmula está dada por:

$$r_S = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

donde; n = es el número de parejas de datos

d_i = es la diferencia de los rangos de X_i y Y_i ($R_{X_i} - R_{Y_i}$).

Es importante hacer notar que el coeficiente de correlación por rangos de Spearman nos conduce al mismo resultado que el coeficiente de correlación de Pearson

$$r = \frac{\sum R_x R_y - n \bar{R}_x \bar{R}_y}{\sqrt{(\sum R_x^2 - n \bar{R}_x^2)(\sum R_y^2 - n \bar{R}_y^2)}}$$

calculado para los rangos asignados a X y Y pero no es el mismo valor de r calculado para los valores de X y Y, puesto que al trabajar con los rangos de X y Y hay pérdida de información.

La hipótesis nula a probar es la no correlación de las variables X y Y. Para probarla se siguen los siguientes pasos:

- 1) Asignar rangos de 1 a n a los valores de X (1 al menor y n al mayor). Luego asignar rangos a los valores de Y, también de menor a mayor. (Los rangos también pueden ser asignados de mayor a menor, pero debemos ser consistentes, si a X se le asignaron de mayor a menor, a Y también se le deben asignar en el mismo sentido).
- 2) Calcular las diferencias entre los rangos de X y de Y para cada pareja.
- 3) Calcular r_s que al igual que r varía de -1 a +1.
- 4) Si n está entre 4 y 30 se comparan los valores calculados de r_s con los valores críticos r_s^* de la tabla A-17 y se rechaza H_0 si el valor calculado es mayor que el valor r_s^* o menor que $-r_s^*$.
- 5) Si n es mayor que 30 podemos calcular

$$Z = r_s \sqrt{n-1}$$

y luego usar la tabla A-4 de la distribución Normal Estándar para obtener los valores críticos.

Ejemplo 13.12:

Las siguientes son las calificaciones obtenidas por 8 estudiantes de sexto grado en una prueba de aptitud para las Matemáticas y en un curso de Computación. Encuentre la correlación entre la aptitud para las Matemáticas y las calificaciones obtenidas en el curso de Computación. Pruebe la hipótesis de no correlación. Los números en paréntesis son los rangos de X y de Y.

estudiante	aptitud para las Matemáticas	calificaciones de Computación	d_i^2
1	10 (7)	74 (5)	4
2	8 (6)	91 (8)	4
3	2 (1)	54 (1)	0
4	12 (8)	61 (2)	36
5	3 (2)	84 (7)	25
6	7 (5)	66 (4)	1
7	5 (3)	79 (6)	9
8	6 (4)	64 (3)	1

$$\sum d_i^2 = 80$$

Obtenemos las diferencias de los rangos, las elevamos al cuadrado y sustituimos en la fórmula:

$$r_S = 1 - \frac{6 (80)}{8 (64 - 1)} = 1 - \frac{480}{504}$$

$$r_S = 1 - 0.9524$$

$$r_S = 0.0476$$

Los valores críticos para $\alpha = 0.05$ de la tabla A-17 son -0.7143 y 0.7143 , por ser una prueba de dos colas. Por lo que se acepta la H_0 y concluimos que las calificaciones en la prueba de aptitud para las Matemáticas y las calificaciones en el curso de Computación no están correlacionadas.

Ejemplo 13.13:

En la tabla 13.18 se muestran las edades y las concentraciones (ppm) de cierto mineral en los tejidos de 35 sujetos a los cuales se les practicó autopsias como parte de un proyecto de investigación.

Tabla 13.18

EPAP Y CONCENTRACION MINERAL (PPM) EN TEJIDO DE35 SUJETOS

Edad (X)	Concentración mineral (Y)	Edad (X)	Concentración mineral (Y)
82	169.63	50	4.48
85	48.94	71	46.93
83	41.16	54	30.91
64	63.95	62	34.27
82	21.09	47	41.44
53	5.40	66	109.88
26	6.33	34	2.78
47	4.26	46	4.17
57	3.62	27	6.57
49	4.82	54	61.73
65	108.22	72	47.59
40	10.20	41	10.46
32	2.69	35	3.06
50	6.16	75	49.57
62	23.87	50	5.55
33	2.70	76	50.23
36	3.15	28	6.81
53	60.59		

Los rangos y las diferencias se muestran en la tabla 13.19. Probaremos la hipótesis de no correlación.

Tabla 13.19RANGOS PARA LOS DATOS DEL EJEMPLO 7 3.73

rango de X	rango de Y	d _i	rango de X	rango de Y	d _i
32.5	35	-2.5	17	9	8
35	27	8	28	25	3
34	23	11	21.5	21	0.5
25	32	-7	23.5	22	1.5
32.5	19	15.5	13.5	24	-10.5
19.5	11	8.5	27	34	-7
1	14	-13	6	3	3
13.5	8	5.5	12	7	5
9	6	3	2	15	-13
15	10	5	21.5	31	-9.5
26	33	-7	29	26	3
10	17	-7	11	18	-7
4	1	3	7	4	3
17	13	4	30	28	2
23.5	20	3.5	17	12	5
5	2	3	31	29	2
8	5	3	3	16	-13
19.5	30	-10.5			

$$\sum d_i^2 = 1788.5$$

$$r_S = 1 - \frac{6(1788.5)}{35[(35)^2 - 1]} = 0.75$$

como $n > 30$, calculamos Z para probar la significación.

$$Z = 0.75 \sqrt{35 - 1} = 4.37$$

Se rechaza H_0 , ya que $4.37 > 1.96 = z_{1-\alpha/2}$ y concluimos que las variables X y Y están correlacionadas.

13.8 PRUEBA DE SECUENCIAS, RACHAS O CORRIDAS PARA ALEATORIEDAD DE LAS MUESTRAS.

Supóngase que arrojamos diez veces una moneda legal y que los resultados con A y S para representar águila y sol, respectivamente son:

A A S S S S A A S A

Los paréntesis que aparecen debajo de las letras agrupan letras semejantes que están adyacentes, y de esta manera nuestra muestra de diez valores se subdivide en cinco partes, que llamamos secuencias.

Si en una muestra hay pocas secuencias, por ejemplo:

A A A A A S S S S (2 secuencias)

o demasiadas secuencias, por ejemplo:

A S A S A S A S A S (10 secuencias)

puede ser indicio de que los valores de la muestra no están arreglados en forma aleatoria.

Si tenemos razón para creer que las observaciones que se hacen en algún intervalo de tiempo pueden no comportarse como un conjunto aleatorio, debemos probar la aleatoriedad de la secuencia de observaciones antes de aplicar algún método estadístico basado en la aleatoriedad.

En seguida veremos la manera de definir secuencias antes y después de la mediana, en el caso de observaciones numéricas.

Supongamos que tenemos una muestra de 26 observaciones reunidas en el siguiente orden:

97 89 25 81 11 83 16 96 44 32 98 19 68 33 25 54 74 82 17
 49 33 22 62 20 92 80

La mediana es $\frac{49+54}{2} = 51.5$

Procedemos a marcar con un signo (+) si la observación está por arriba de la mediana y con un signo menos (-) si está por debajo de ella. Así, para nuestras 26 observaciones tenemos:



(17 secuencias)

Como vemos el número de signos + y - es el mismo ($m = 13$) porque el tamaño de muestra ($n = 26$) es par. Puede suceder que para alguna muestra el número de signos + y - no sea el mismo, entonces m será el número mayor ya sea de signos + o de signos -

Si $m \geq 10$, el número de secuencias R es una variable aleatoria que está distribuida en forma aproximadamente normal con

$$\mu_R = m + 1$$

$$\sigma_R = \sqrt{\frac{m(m-1)}{2m-1}}$$

y podemos usar la tabla A-4 para hallar los valores del estadígrafo de prueba

$$Z = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R}$$

Para nuestro ejemplo: $R = 17$

$$m = 13 \geq 10$$

$$\mu_R = 13 + 1 = 14$$

$$\sigma_R = \sqrt{\frac{13(12)}{26 - 1}} = \sqrt{\frac{156}{25}} = \sqrt{6.24} = 2.498$$

$$Z = \frac{17 - 14}{2.498} = 1.20$$

Por lo que se acepta H_0 ya que 1.20 está entre - 1.96 y + 1.96 y concluimos que la muestra es aleatoria con $\alpha = 0.05$.

Consideremos la muestra:

0 1 0 2 4 1 3 1 2 0 2 1 1 1 0 0 1 1 0 2 1 3 2

ordenándolos tenemos:

0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 3 3 4

La mediana es $Md = 1$

Al eliminar los 1, puesto que no están por arriba ni por debajo de la mediana y asignar signos + y -, tenemos:

0 1 0 2 4 1 3 1 2 0 2 1 1 1 0 0 1 1 0 2 1 3 2

- - + + + + - + - - - + + +

($R = 6$ secuencias)

Aquí vemos que hay 8 valores por arriba de la mediana y 6 valores por debajo, tomamos $m = 8$ y usamos la tabla A-18 que para $m = 8$ y $a = 0.05$ ($\frac{\alpha}{2} = 0.025$) R debe estar entre 4 y 13, por lo que aceptamos H_0 y concluimos que la muestra es aleatoria.

EJERCICIOS

- 13.1.- A una muestra aleatoria de 15 estudiantes de enfermería se les aplicó un test para medir su nivel de autoritarismo con los siguientes resultados.

| estudiantes | calificación |
|-------------|--------------|
| 1 | 75 |
| 2 | 90 |
| 3 | 85 |
| 4 | 110 |
| 5 | 115 |
| 6 | 95 |
| 7 | 132 |
| 8 | 74 |
| 9 | 82 |
| 10 | 104 |
| 11 | 88 |
| 12 | 124 |
| 13 | 110 |
| 14 | 76 |
| 15 | 98 |

Pruebe la hipótesis de que la mediana para la población muestreada es de 100 con $\alpha = 0.05$ de nivel de significación.

- 13.2.- Se han almacenado empanadas de Huitlacoche durante 8 meses a bajas temperaturas en congeladores para el hogar. Ocho, empanadas se almacenan a temperatura constante de 0°F durante todo el tiempo, mientras que otras ocho se almacenan a temperaturas que fluctúan entre 0°F y 15°F . Después de esto, se invitan a ocho personas para que juzguen el sabor de una empanada de cada muestra. Siete personas prefieren las empanadas que se mantienen a 0°F , mientras que una sola persona prefiere el sabor de las otras. ¿Es significativa esta diferencia en sabor al 5%.

- 15.3.- En un programa ecológico sobre la contaminación de un río se tomaron muestras de agua en ocho diferentes lugares del río antes y después de 2 años, obteniéndose los siguientes resultados. Los números representan la medida de la contaminación , medidas altas indican alta contaminación.

| lugar | 1 | 2 | 5 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|------------------------|------|------|-------|------|------|------|------|------|
| medidas iniciales | 88.4 | 68.9 | 100.5 | 81.4 | 96.3 | 73.7 | 65.1 | 72.1 |
| medidas 2 años después | 87.1 | 69.1 | 91.1 | 75.6 | 96.9 | 69.2 | 66.3 | 68.3 |

Estamos interesados en saber si el programa de reabilitación ecológica ha tenido efecto en la reducción de la contaminación.

- 13.4.- Para comparar los efectos de dos drogas que inducen el sueño, se condujo el siguiente experimento. En noches diferentes cada uno de diez sujetos que padecen de insomnio se le administró una de las dos drogas A o B. La tabla da el número de horas adicionales de sueño en relación al promedio de horas que el sujeto acostumbra dormir para las dos drogas.

¿Existe diferencia significativa en el número de horas adicionales de sueño para las dos drogas?

| Paciente | Droga A | Droga B |
|----------|---------|---------|
| 1 | 0.7 | 1.9 |
| 2 | -1.6 | 0.8 |
| 3 | -0.2 | 1.1 |
| 4 | -1.2 | 0.1 |
| 5 | -0.1 | -0.1 |
| 6 | 3.4 | 4.4 |
| 7 | 3.7 | 5.5 |
| 8 | 0.8 | 1.6 |
| 9 | 0.0 | 4.6 |
| 10 | 2.0 | 3.6 |

- 13.5.- El diámetro de un cilindro fue medido por 16 personas. Cada persona hizo tres mediciones usando un calibrador micrométrico y tres mediciones usando un calibrador Vernier. Los promedios (media aritmética) de las tres lecturas (en centímetros), para cada instrumento de medida y para las 16 personas, se presentan en la siguiente tabla:

| micrómetro | vernier | micrómetro | vernier |
|------------|---------|------------|---------|
| 3.213 | 3.213 | 3.221 | 3.226 |
| 3.213 | 3.218 | 3.218 | 3.226 |
| 3.218 | 3.218 | 3.218 | 3.218 |
| 3.216 | 3.216 | 3.211 | 3.218 |
| 3.221 | 3.218 | 3.216 | 3.231 |
| 3.213 | 3.218 | 3.216 | 3.233 |
| 3.226 | 3.223 | 3.221 | 3.218 |
| 3.218 | 3.233 | 3.213 | 3.221 |

Use la prueba del signo para probar la hipótesis de no diferencia entre las dos muestras con $\alpha = 0.05$.

- 13.6.- Las siguientes son medidas de albúmina (en g/100mL) de 17 personas normales y 13 personas hospitalizadas.

Albúmina (g/100 mL)

| normales | hospitalizados |
|----------|----------------|
| 2.4 | 3.0 |
| 3.5 | 2.0 |
| 3.1 | 3.4 |
| 4.0 | 1.7 |
| 4.2 | 2.0 |
| 3.4 | 3.8 |
| 4.5 | 3.5 |
| 5.0 | 2.9 |
| | 3.6 |

¿Concluiría usted que las medianas de las dos poblaciones muestreadas son diferentes a un nivel de significación del 5%.

- 13.7.- Los siguientes datos son las calificaciones de los estudiantes de tres grupos de un curso de Estadística Elemental. Analícelos, utilizando la generalización de la prueba de la mediana, dividiendo los datos en cuatro partes iguales como en el ejemplo de la sección 13.2.4.

| Grupo 1 | | Grupo 2 | | Grupo 3 | |
|---------|-----|---------|-----|---------|-----|
| 121 | 122 | 97 | 131 | 134 | 162 |
| 117 | 141 | 145 | 143 | 98 | 128 |
| 145 | 126 | 119 | 107 | 108 | 133 |
| 108 | 145 | 139 | 86 | 88 | 93 |
| 142 | 114 | 143 | 94 | 146 | 118 |
| 154 | 136 | 133 | 164 | 153 | 126 |
| 115 | 151 | 149 | 139 | 130 | 127 |
| 31 | 105 | 107 | 151 | 144 | 150 |
| 122 | 103 | 154 | 141 | 125 | 138 |
| 127 | 108 | 102 | 131 | 111 | 119 |
| | | 108 | 65 | 87 | 142 |
| | | 131 | | | |

Si tuviera que analizar estos datos con Estadística paramétrica, ¿qué prueba haría? ¿Qué suposiciones tendría que hacer para ello?

- 13.8.- Un miembro de cada una de 10 parejas de semillas de maíz se trata con una pequeña corriente eléctrica, mientras que el otro miembro se deja sin tratar. Después de un período de crecimiento se miden las diferencias de alargamiento (tratada menos no tratada) y fueron

$D_i:$ 6.0 1.3 10.3 23.4 3.1 6.8 -1.5 -14.7 -3.3 11.1

Pruebe la hipótesis de que el tratamiento con corriente eléctrica no afecta el alargamiento.

- 13.9.- Use la prueba del rango con signo para probar la hipótesis de que la Mediana de la población es igual a 12 para la siguiente muestra. Complete la tabla.

| Observaciones
X | $X - Md_0$ | $ X - Md_0 $ | signo de
$ X - Md_0 $ | rango de
$ X - Md_0 $ | rango con
positivo | signo
negativo |
|--------------------|------------|--------------|--------------------------|--------------------------|-----------------------|-------------------|
| 12.55 | | | | | | |
| 14.62 | | | | | | |
| 12.93 | | | | | | |
| 12.46 | | | | | | |
| 11.95 | | | | | | |
| 14.55 | | | | | | |
| 13.11 | | | | | | |
| 10.90 | | | | | | |

13.10.- Un cierto estimulante administrado-a cada uno de nueve pacientes, produjo los siguientes incrementos de presión sanguínea: 5, 1, 8, 0, 3, 3, 5, -2, 4 mmHg. ¿Puede concluirse que el estimulante va acompañado de un incremento de la presión sanguínea?

13.11.- Una compañía dedicada al colado de hierro, está interesada en el porcentaje de sílice en el hierro. Los datos indicados a continuación constituyen una muestra al azar de los registros de producción Usando $a = 0.01$, pruebe la hipótesis de que la Mediana del proceso es 0.85 gramos de sílice por 100 gramos de hierro.

Número de gramos de sílice en muestras de 100 gramos de hierro

| | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|
| 1.13 | 0.80 | 0.85 | 0.60 | 0.97 | 0.92 |
| 0.94 | 0.72 | 1.17 | 0.87 | 0.36 | 0.68 |
| 0.73 | 0.82 | 0.79 | 0.87 | 0.92 | 0.81 |
| 0.97 | 0.48 | 1.00 | 0.92 | 0.61 | 0.81 |
| 0.71 | 0.97 | 0.87 | 1.16 | 0.68 | 1.00 |

13.12.- En 15 pares de parcelas se plantan dos variedades de soya y los rendimientos observados se registran en el siguiente cuadro. Verifique que esta información conduce a la aceptación de la hipótesis de que los rendimientos medios son iguales por la prueba del rango con signo. Use $a = 0.05$.

| Par | Variedad I | Variedad II |
|-----|------------|-------------|
| 1 | 135 | 134 |
| 2 | 129 | 137 |
| 3 | 130 | 151 |
| 4 | 146 | 142 |
| 5 | 127 | 138 |
| 6 | 128 | 142 |
| 7 | 125 | 140 |
| 8 | 151 | 122 |
| 9 | 151 | 121 |
| 10 | 128 | 138 |
| 11 | 134 | 122 |
| 12 | 132 | 119 |
| 13 | 121 | 130 |
| 14 | 136 | 139 |
| 15 | 121 | 128 |

13.13.- Se diseña un estudio de movimientos para probar la eficacia de dos procedimientos I y II de montaje de cierto mecanismo; los obreros son apareados sobre la base del cociente de inteligencia y número de años de educación. Los miembros de cada par son asignados por sorteo a uno de los dos procedimientos. El tiempo en segundos para terminar el montaje se registra en la siguiente tabla.

| Par | I | II | Par | I | II |
|-----|----|----|-----|----|----|
| 1 | 44 | 41 | 8 | 26 | 30 |
| 2 | 40 | 44 | 9 | 32 | 34 |
| 3 | 40 | 29 | 10 | 38 | 23 |
| 4 | 31 | 27 | 11 | 37 | 29 |
| 5 | 44 | 30 | 12 | 29 | 25 |
| 6 | 41 | 36 | 13 | 29 | 29 |
| 7 | 26 | 25 | 14 | 20 | 20 |

Aplique la prueba del rango con signo para probar la hipótesis de que la eficiencia de los dos procedimientos son iguales.

13.14.- Los siguientes son los resultados de sembrar maíz en dos tipos diferentes de fertilizantes en ocho pares de parcelas.

| Par | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| A | 164 | 165 | 158 | 149 | 170 | 155 | 154 | 162 |
| B | 150 | 143 | 152 | 160 | 151 | 145 | 148 | 134 |

Use la prueba T de Wilcoxon para probar la hipótesis de que los dos tipos de fertilizantes son iguales con $\alpha = 0.05$

13.15.- En un experimento apareado, las velocidades (en número de unidades empacadas por hora) para dos sistemas diferentes se dan en la tabla siguiente:

| Par | sistema I | sistema II | Par | sistema I | sistema II |
|-----|-----------|------------|-----|-----------|------------|
| 1 | 10 | 7 | 10 | 10 | 11 |
| 2 | 11 | 6 | 11 | 13 | 9 |
| 3 | 9 | 12 | 12 | 12 | 8 |
| 4 | 8 | 9 | 13 | 14 | 13 |
| 5 | 15 | 13 | 14 | 13 | 10 |
| 6 | 12 | 7 | 15 | 14 | 8 |
| 7 | 11 | 13 | 16 | 12 | 7 |
| 8 | 13 | 9 | 17 | 14 | 7 |
| 9 | 15 | 8 | 18 | 12 | 12 |

Use la prueba T de Wilcoxon para probar la hipótesis de no diferencia entre los dos sistemas de empacado con $\alpha = 0.01$.

13.16.- Ocho estudiantes de Inglés escribieron cuatro composiciones cada uno, una a continuación de la otra. Mientras que otros doce estudiantes escribieron cuatro composiciones cada uno pero a intervalos de 24 horas entre una y otra. Se contaron los errores de ortografía cometidos por uno y otro grupo y los siguientes valores son el número de errores por cada 100 palabras.

| Grupo "A"
(todas a la vez) | Grupo "B"
(a intervalos de 24 h) |
|-------------------------------|-------------------------------------|
| 3.65 | 0.45 |
| 4.23 | 1.02 |
| 5.61 | 1.22 |
| 1.08 | 0.23 |
| 0.23 | 0.14 |
| 1.75 | 1.05 |
| 0.98 | 0.02 |
| 6.62 | 0.13 |
| | 0.45 |
| | 0.96 |
| | 0.87 |

Pruebe la hipótesis de no diferencia significativa en el número de errores entre los dos grupos al 5% de nivel de significación.

- 13.17.- Durante tres meses se exponen muestras de dos tipos de pinturas a ciertas condiciones metereológicas, y las anotaciones son las siguientes :

| A | B |
|----|----|
| 92 | 78 |
| 95 | 74 |
| 94 | 81 |
| 85 | 69 |
| 82 | 88 |
| | 75 |

Pruebe la hipótesis de que no hay diferencia significativa entre las pinturas al 5% de significación.

- 13.18.- La efectividad de los sistemas de avalúos de propiedades puede analizarse a través de los cocientes entre el valor asignado (A) y el valor de venta (V) de las propiedades de determinada zona. Idealmente, $\frac{A}{V}$ debe ser constante para todas las propiedades de la zona.

De no ser así, los impuestos que se cobran no son equitativos. Un consultor de impuestos desea comparar el cociente entre el valor asignado y el valor de venta para las propiedades de dos zonas de una ciudad. El valor asignado se tomó de los registros y se calculó el cociente entre el valor asignado y el valor de venta. Se analizaron 24 propiedades vendidas, $n_1 = 11$ de la zona I y $n_2 = 13$ de la zona II, que se seleccionaron en forma aleatoria de las dos zonas de la ciudad. Los cocientes aparecen en la tabla siguiente.

| Zona I | Zona II |
|--------|---------|
| 0.55 | 0.49 |
| 0.67 | 0.67 |
| 0.43 | 0.59 |
| 0.51 | 0.72 |
| 0.48 | 0.67 |
| 0.60 | 0.75 |
| 0.71 | 0.65 |
| 0.53 | 0.77 |
| 0.44 | 0.62 |
| 0.65 | 0.48 |
| 0.75 | 0.59 |
| | 0.51 |
| | 0.66 |

¿Proporcionan los datos suficiente evidencia que indique una diferencia en las distribuciones de los cocientes entre el valor asignado y el valor de venta para las dos zonas de la ciudad? Use $\alpha = 0.05$.

- 13.19.- Para determinar si las distribuciones de tres marcas de gasolina han sido igualmente distribuidas en términos de número de millas recorridas por galón, se obtienen los siguientes datos:

| | | | | | | | | |
|-----|------|-----|------|------|------|------|------|------|
| I | 7.7 | 6,8 | 8,5 | 9,0 | 11,0 | 8,9 | 10,1 | 9,5 |
| II | 8.7 | 9.2 | 10.5 | 9.8 | 11.4 | 12.6 | 10.9 | 9.9 |
| III | 10.7 | 9.8 | 12.5 | 11.4 | 10.8 | 13.5 | 14.1 | 12.7 |

¿Qué conclusión puede extraerse según la prueba H?

- 13.20.- La siguiente tabla muestra los niveles residuales de pesticida (ppb) en la sangre de cuatro grupos de humanos. Use la prueba de Kruskal-Wallis para probar al 5% de nivel de significación que no hay diferencia entre los grupos con respecto al nivel medio residual de pesticida.

GRUPOS

| A | B | C | D |
|----|----|----|----|
| 10 | 4 | 15 | 7 |
| 37 | 35 | 5 | 11 |
| 12 | 32 | 10 | 10 |
| 31 | 19 | 12 | 8 |
| 11 | 33 | 6 | 2 |
| 9 | 18 | 6 | 5 |
| 44 | 11 | 9 | 4 |
| 12 | 7 | 11 | 5 |
| 15 | 32 | 9 | 2 |
| 42 | 17 | 14 | 6 |
| 23 | 8 | 15 | 3 |

- 13.21.- Cuatro grupos de pacientes de Terapia Física fueron sometidos a diferentes tratamientos. Al final de un tiempo determinado a cada grupo se le aplicó una prueba para medir la efectividad del tratamiento. Se obtuvieron los siguientes datos:

TRATAMIENTOS

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|----|----|----|----|
| 64 | 76 | 58 | 95 |
| 88 | 70 | 74 | 90 |
| 72 | 90 | 66 | 80 |
| 80 | 80 | 60 | 87 |
| 79 | 75 | 82 | 88 |
| 71 | 82 | 75 | 85 |

¿Presentan estos datos suficiente evidencia que indique una diferencia entre los tratamientos?

- 3.22.- Se condujo un experimento para comparar tres métodos de empacado de comida congelada. El criterio fue el contenido de ácido ascórbico (mg/100g) después de un cierto periodo de tiempo. Los datos se muestran en la siguiente tabla:

METODOS DE EMPACADO

| A | B | C |
|-------|-------|-------|
| 14.29 | 20.06 | 20.04 |
| 19.10 | 20.64 | 26.23 |
| 19.09 | 18.00 | 22.74 |
| 16.25 | 19.56 | 24.04 |
| 15.09 | 19.47 | 23.37 |
| 16.61 | 19.07 | 25.01 |
| 19.63 | 18.38 | 23.27 |

¿Presentan estos datos suficiente evidencia al 0.01 de nivel de significación que indique diferencia entre los métodos de empacado?

- 13.23.- Se determinaron los contenidos de azúcar en la sangre (mg/100ml) de 10 especímenes de cada uno de cinco crias de ciertos animales experimentales con los siguientes resultados

CRIAS

| | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 124 | 111 | 117 | 104 | 142 |
| 116 | 101 | 142 | 128 | 139 |
| 101 | 130 | 121 | 130 | 133 |
| 118 | 108 | 125 | 103 | 120 |
| 118 | 127 | 121 | 121 | 127 |
| 120 | 129 | 148 | 119 | 149 |
| 110 | 122 | 141 | 106 | 150 |
| 127 | 103 | 122 | 107 | 149 |
| 106 | 122 | 139 | 107 | 120 |
| 130 | 127 | 125 | 115 | 116 |

¿Indican estos datos una diferencia entre los niveles medios de azúcar en la sangre para los cinco grupos de crías? Use $\alpha = 0.05$.

- 13.24.- Dieciseis personas gordas participaron en un estudio para comparar cuatro dietas reductoras. Se agruparon a los sujetos de acuerdo a su peso inicial y cada uno de los cuatro sujetos de cada uno de los grupos se asignaron al azar a las dietas. Al final del experimento se pesaron los sujetos. La tabla siguiente muestra la reducción de peso en libras.

| PESOS INICIALES
(libras) | REDUCCION DE PESO EN LIBRAS | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|----|----|----|
| | DIETAS | | | |
| | A | B | C | D |
| 150 a 174 | 12 | 26 | 24 | 23 |
| 175 a 199 | 15 | 29 | 25 | 25 |
| 200 a 225 | 15 | 27 | 25 | 24 |
| sobre 225 | 18 | 38 | 35 | 31 |

Después de eliminar diferencias debidas al peso inicial, ¿proporcionan estos datos suficiente evidencia que indique una diferencia entre las dietas? Use $\alpha = 0.01$.

13.25.- Se compararon dos métodos para medir la salida de sangre de 10 animales experimentales, obteniéndose los siguientes resultados:

SALIDA DEL CORAZON (L/min)

| METODO I (X) | METODO II (Y) |
|--------------|---------------|
| 0.8 | 0.5 |
| 1.0 | 1.2 |
| 1.3 | 1.1 |
| 1.4 | 1.3 |
| 1.5 | 1.1 |
| 1.4 | 1.8 |
| 2.0 | 1.6 |
| 2.4 | 2.0 |
| 2.7 | 2.4 |
| 3.0 | 2 8 |

Calcule r_s y pruebe la hipótesis nula $H: \rho = 0$ con $\alpha = 0.05$.

15.26.- Las siguientes son 15 determinaciones del volumen de automóviles y de la concentración de monóxido de carbono obtenidas por la red de monitoreo para medir la calidad del aire en diferentes lugares de la ciudad.

| VOLUMEN DE AUTOMOVILES
(carros por hora) (X) | CO (ppm)
(Y) |
|---|-----------------|
| 100 | 8.8 |
| 110 | 9.0 |
| 125 | 9.5 |
| 150 | 10.0 |
| 175 | 10.5 |
| 190 | 10.5 |
| 200 | 10.05 |
| 225 | 11.0 |
| 275 | 12.1 |
| 300 | 12.1 |
| 325 | 12.5 |
| 350 | 13.0 |
| 375 | 13.2 |
| 400 | 14.5 |

Calcule r_s y pruebe la hipótesis de no correlación con $\alpha = 0.05$.

13.27.- Determine si cada una de las siguientes muestras son aleatorias o no:

- a) 87, 86, 85, 87, 86, 87, 86, 81, 77, 85, 86,
84, 83, 83, 82, 84, 83, 79, 82, 73.
- b) 44, 43, 41, 41, 44, 44, 43, 44, 42, 45, 43,
43, 44, 45, 46, 42, 45, 41, 44, 44, 43, 44,
46, 41, 43, 45, 45, 42, 44, 44.
- c) 1.3, 1.4, 1.1, 1.5, 1.4, 1.3, 1.2, 1.4, 1.5, 1.3, 1.2,
1.3, 1.5, 1.4, 1.4, 1.6, 1.3, 1.5, 1.1, 1.4.
- d) 46, 55, 62, 65, 67, 64, 65, 62, 54, 57, 51,
60, 59, 64, 66, 68, 60, 59, 51.

13.28.- Escriba una secuencia de ceros y unos hasta completar 40 dígitos de tal manera que sea aleatoria. Probar la aleatoriedad de la secuencia.

13.29.- Aplique la prueba de aleatoriedad al conjunto de los 50 dígitos del primer renglón de la tabla A-1.

13.30.- La colocación de plantas enfermas y sanas en una fila de fresas es

S S E S S S S S E S E E E S S S S S S S S S S

¿Nos hace dudar esta relación de la colocación aleatoria de las plantas enfermas entre las sanas?

13.31.- Un catador de té dice que puede distinguir entre dos clases de té. En un experimento él indica correctamente 14 veces en un total de 20 cataduras en el orden siguiente

+ - - + + + + + - - - + + + + + + -

donde + representa las identificaciones correctas. Analizar los datos usando la prueba del signo de la Mediana para una muestra (sección 13.2.1) y la prueba de aleatoriedad (sección 13.8).

APENDICE

TABLAS

Tabla A-1

NUMEROS ALEATORIOS*

| | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 53872 | 34774 | 19087 | 81775 | 71440 | 12082 | 75092 | 34608 | 75448 | 13148 |
| 04226 | 62404 | 71577 | 00984 | 56056 | 32404 | 87641 | 53392 | 92561 | 33388 |
| 28666 | 44190 | 75524 | 62038 | 21423 | 46281 | 92238 | 96306 | 72606 | 80601 |
| 63817 | 30279 | 14088 | 86434 | 16183 | 06401 | 90586 | 80292 | 54555 | 47371 |
| 22359 | 16442 | 83879 | 47486 | 19838 | 32252 | 39560 | 95851 | 36758 | 36141 |
| 50968 | 28728 | 83525 | 16031 | 77583 | 65578 | 84794 | 51367 | 32535 | 83834 |
| 39652 | 24248 | 96617 | 91200 | 10769 | 52386 | 39559 | 75921 | 49375 | 22847 |
| 35493 | 00529 | 69632 | 29684 | 80284 | 87828 | 72418 | 80950 | 86311 | 34016 |
| 75687 | 53919 | 80439 | 20534 | 96185 | 72345 | 96391 | 52625 | 50866 | 45132 |
| 31509 | 93521 | 10681 | 44124 | 88345 | 84969 | 88768 | 48819 | 22311 | 41235 |
| 40389 | 76282 | 37506 | 60661 | 23295 | 67357 | 95419 | 10864 | 87833 | 09152 |
| 59244 | 54664 | 63424 | 97899 | 44153 | 69251 | 08781 | 18604 | 02312 | 21658 |
| 99876 | 17075 | 40934 | 08912 | 96196 | 58503 | 63613 | 24486 | 98092 | 45672 |
| 06457 | 50072 | 18060 | 71023 | 84349 | 40984 | 59487 | 77782 | 32107 | 53770 |
| 14297 | 07687 | 05517 | 10362 | 35783 | 62236 | 63764 | 45542 | 68889 | 03862 |
| 51661 | 57130 | 97442 | 29590 | 21634 | 79772 | 73801 | 70122 | 46467 | 47152 |
| 53455 | 41788 | 16117 | 09698 | 24409 | 05079 | 76603 | 57563 | 33461 | 46791 |
| 48086 | 31512 | 62819 | 27689 | 63744 | 11023 | 11184 | 87679 | 22218 | 70139 |
| 19108 | 01602 | 96950 | 41536 | 39974 | 88287 | 83546 | 69187 | 45539 | 78263 |
| 39001 | 77727 | 33095 | 58785 | 29179 | 45421 | 71416 | 20418 | 38558 | 78700 |
| 72346 | 55617 | 14714 | 21930 | 14851 | 38209 | 52202 | 03979 | 05970 | 74483 |
| 19094 | 64359 | 89829 | 10942 | 53101 | 37758 | 29583 | 26792 | 42840 | 45872 |
| 82247 | 77127 | 01652 | 50774 | 04970 | 83300 | 33760 | 22172 | 67516 | 62135 |
| 75968 | 18386 | 31874 | 52249 | 21015 | 20365 | 57475 | 32756 | 58268 | 75739 |
| 01963 | 38095 | 99960 | 91307 | 99654 | 74279 | 80145 | 53303 | 11870 | 50485 |
| 64828 | 15817 | 80923 | 55226 | 51893 | 93362 | 15757 | 47430 | 84855 | 95822 |
| 64347 | 61578 | 44160 | 06266 | 35118 | 52558 | 56436 | 96155 | 10293 | 67506 |
| 54746 | 52337 | 84826 | 39012 | 59118 | 19851 | 10156 | 78167 | 41473 | 99025 |
| 22241 | 41501 | 02993 | 99340 | 91044 | 67268 | 51088 | 12751 | 74008 | 33773 |
| 11906 | 20043 | 10415 | 44425 | 31712 | 54831 | 85591 | 62237 | 88797 | 14382 |
| 76637 | 07609 | 95378 | 95580 | 86909 | 50609 | 99008 | 99042 | 50364 | 36664 |
| 93896 | 47120 | 98926 | 30636 | 28136 | 49458 | 84145 | 79205 | 79517 | 93446 |
| 75292 | 88232 | 14360 | 12455 | 13656 | 65736 | 70428 | 66917 | 64412 | 38502 |
| 98792 | 29828 | 10577 | 48184 | 29433 | 98278 | 22543 | 76155 | 82107 | 22066 |
| 65751 | 91049 | 94127 | 47558 | 99880 | 79667 | 86254 | 72797 | 67117 | 44699 |
| 72064 | 62102 | 39155 | 79462 | 82975 | 02638 | 00302 | 79476 | 72656 | 84003 |
| 01227 | 35821 | 80607 | 61734 | 02600 | 45564 | 72344 | 71034 | 48370 | 96826 |
| 44768 | 56504 | 13993 | 59701 | 88238 | 92483 | 09497 | 66058 | 36651 | 37927 |
| 69838 | 91226 | 85736 | 72247 | 64099 | 86305 | 49877 | 76215 | 66980 | 30228 |
| 01800 | 39313 | 57730 | 84410 | 47637 | 81369 | 51830 | 43536 | 58937 | 91901 |
| 11756 | 45441 | 59948 | 57975 | 92422 | 70057 | 50210 | 30345 | 55912 | 31638 |
| 39056 | 86614 | 53643 | 62909 | 27198 | 04454 | 33789 | 86463 | 66603 | 48083 |
| 88086 | 93172 | 68311 | 39164 | 42012 | 10447 | 45933 | 28844 | 36844 | 57684 |
| 12648 | 27948 | 76750 | 19915 | 66815 | 34015 | 43011 | 27150 | 94264 | 89516 |
| 16254 | 87661 | 66181 | 68609 | 58626 | 58428 | 75051 | 27558 | 49463 | 66646 |
| 69682 | 19109 | 94189 | 94626 | 09299 | 10649 | 55405 | 54571 | 57855 | 54921 |
| 61336 | 86663 | 13010 | 40412 | 50139 | 30769 | 13048 | 61407 | 41056 | 60510 |
| 65727 | 66488 | 12304 | 70011 | 93324 | 58764 | 87274 | 43103 | 96002 | 06984 |
| 55705 | 34418 | 99410 | 32635 | 42984 | 40981 | 91750 | 27431 | 05142 | 77950 |
| 95402 | 51746 | 98184 | 38830 | 97590 | 00066 | 82770 | 42325 | 28778 | 83571 |
| 79228 | 94510 | 57711 | 64366 | 89040 | 43278 | 69072 | 22003 | 89465 | 61483 |
| 48103 | 56760 | 82564 | 33649 | 35176 | 32278 | 51357 | 05489 | 47462 | 55931 |
| 70969 | 27677 | 99621 | 63065 | 73194 | 70462 | 19316 | 77945 | 45004 | 39895 |
| 69931 | 20237 | 75246 | 59124 | 12484 | 22012 | 79731 | 82435 | 56301 | 99752 |
| 37208 | 22741 | 41946 | 74109 | 03760 | 24094 | 40210 | 76617 | 52317 | 50643 |
| 60151 | 92327 | 85150 | 27728 | 64813 | 47667 | 66078 | 03628 | 95240 | 03808 |
| 46210 | 47674 | 53747 | 95354 | 67757 | 75477 | 26396 | 09592 | 96239 | 50854 |
| 55399 | 48142 | 12284 | 95298 | 56399 | 61358 | 87541 | 12998 | 79639 | 63633 |
| 23677 | 64950 | 97041 | 43088 | 80143 | 34294 | 91468 | 01066 | 90350 | 78891 |
| 41947 | 70066 | 90311 | 17133 | 11674 | 00826 | 75760 | 37586 | 33621 | 14199 |

* Tomados, con autorización, de *A Million Random Digits with 100,000 Normal Deviates*, por RAND Corporation, The Free Press of Glencoe, New York, 1955.

Tabla A-1 (*continuación*)

NUMEROS ALEATORIOS

| | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 16972 | 42181 | 87945 | 94104 | 95701 | 00743 | 75411 | 51930 | 54869 | 98991 |
| 74938 | 79042 | 38473 | 89672 | 45752 | 35715 | 89537 | 78155 | 09851 | 24983 |
| 78075 | 53671 | 81047 | 92759 | 94519 | 59473 | 91679 | 90536 | 41676 | 35230 |
| 76744 | 26190 | 21649 | 79753 | 21287 | 17698 | 39490 | 00533 | 34823 | 08134 |
| 82273 | 69293 | 23383 | 59365 | 18258 | 54530 | 47274 | 69686 | 55081 | 28731 |
| 30239 | 23081 | 09526 | 26055 | 87099 | 41372 | 55542 | 32754 | 87317 | 94638 |
| 41177 | 77163 | 38252 | 10349 | 49511 | 17540 | 61781 | 32769 | 51662 | 55606 |
| 07715 | 88600 | 69730 | 78912 | 19642 | 39764 | 47146 | 19472 | 84012 | 08887 |
| 16855 | 47454 | 98638 | 15189 | 87345 | 80509 | 33392 | 50866 | 17629 | 28208 |
| 27985 | 61979 | 02979 | 98092 | 41184 | 73815 | 57939 | 91057 | 04860 | 66667 |
| 77411 | 98433 | 42302 | 86602 | 26596 | 64175 | 64359 | 97570 | 64437 | 55592 |
| 19453 | 18731 | 01039 | 18933 | 92188 | 83767 | 56148 | 56261 | 79920 | 78514 |
| 03381 | 35119 | 30355 | 08287 | 00448 | 32800 | 24106 | 04054 | 70572 | 71063 |
| 11659 | 27315 | 09204 | 26213 | 57325 | 51470 | 56108 | 23141 | 16121 | 53925 |
| 35032 | 14283 | 20642 | 15311 | 36238 | 12079 | 67596 | 00017 | 51789 | 90737 |
| 32061 | 51250 | 39825 | 08554 | 88716 | 40945 | 68579 | 33784 | 62025 | 32535 |
| 81855 | 16888 | 24630 | 15077 | 47256 | 08529 | 54837 | 24161 | 95621 | 53483 |
| 48422 | 09247 | 43406 | 16093 | 01168 | 28523 | 31406 | 49360 | 99243 | 85090 |
| 86190 | 56195 | 31409 | 88248 | 52436 | 70161 | 98500 | 74702 | 99546 | 74570 |
| 90627 | 37048 | 50285 | 69189 | 97489 | 83007 | 31477 | 13908 | 97472 | 74448 |
| 60103 | 76739 | 57644 | 56746 | 63005 | 08804 | 47081 | 65928 | 65045 | 58629 |
| 09606 | 69465 | 16536 | 94055 | 86328 | 56533 | 16670 | 57295 | 26249 | 18524 |
| 62479 | 29610 | 03235 | 51050 | 15855 | 66828 | 08115 | 16166 | 32854 | 74206 |
| 40232 | 52840 | 02512 | 99258 | 09327 | 55073 | 86030 | 29933 | 00528 | 67359 |
| 10690 | 55550 | 81275 | 78369 | 33658 | 47000 | 89425 | 60573 | 81137 | 25474 |
| 73958 | 38949 | 99568 | 72713 | 22665 | 03244 | 17399 | 83950 | 66820 | 08704 |
| 56554 | 57926 | 41529 | 00619 | 51972 | 09442 | 60298 | 81066 | 28362 | 41165 |
| 35676 | 20333 | 77622 | 93718 | 57255 | 09780 | 26798 | 60083 | 58959 | 45691 |
| 01383 | 85677 | 96572 | 16401 | 31379 | 88519 | 41325 | 33938 | 36342 | 03327 |
| 29448 | 88487 | 05814 | 82402 | 42132 | 85708 | 89754 | 57495 | 57655 | 78644 |
| 56863 | 94737 | 68661 | 43498 | 33376 | 81659 | 07422 | 58435 | 24855 | 15523 |
| 20269 | 34456 | 48608 | 11787 | 86056 | 88290 | 17463 | 66628 | 03033 | 80771 |
| 06790 | 99803 | 86439 | 94235 | 48560 | 62912 | 82302 | 43198 | 97087 | 97104 |
| 73690 | 79726 | 06492 | 77431 | 49864 | 69775 | 46450 | 02122 | 09083 | 92746 |
| 76222 | 20006 | 98660 | 88690 | 01190 | 05588 | 76651 | 03461 | 11987 | 80756 |
| 18434 | 21893 | 80472 | 19499 | 80423 | 58643 | 27088 | 66458 | 78358 | 56606 |
| 20463 | 75133 | 41713 | 84279 | 56045 | 79079 | 20212 | 91560 | 60548 | 95128 |
| 27105 | 77095 | 72016 | 23683 | 01386 | 40381 | 74673 | 11811 | 36625 | 62958 |
| 47736 | 56338 | 07546 | 36084 | 73126 | 33364 | 78730 | 47282 | 76795 | 95719 |
| 60938 | 13970 | 90288 | 79457 | 50343 | 92054 | 12541 | 93216 | 58624 | 37392 |
| 02743 | 59982 | 92806 | 62853 | 39755 | 42550 | 31081 | 38860 | 35712 | 78632 |
| 74802 | 59354 | 91213 | 26293 | 18112 | 93831 | 01473 | 10798 | 18229 | 18642 |
| 06933 | 78651 | 45636 | 77509 | 28610 | 34307 | 68045 | 15107 | 62935 | 34149 |
| 40345 | 80092 | 50587 | 18535 | 19001 | 82179 | 12572 | 77589 | 33459 | 35130 |
| 70055 | 98685 | 10244 | 11760 | 21952 | 73985 | 68903 | 66934 | 42442 | 07608 |
| 34552 | 76373 | 40928 | 93696 | 97711 | 15818 | 31004 | 03263 | 05626 | 07460 |
| 45253 | 86947 | 42417 | 28778 | 14936 | 94099 | 90775 | 42001 | 86675 | 62770 |
| 71558 | 21692 | 84077 | 17814 | 33316 | 49494 | 31817 | 90127 | 39485 | 92302 |
| 95474 | 76468 | 12019 | 04274 | 01893 | 23930 | 88771 | 31142 | 65859 | 28948 |
| 34619 | 91898 | 28499 | 00279 | 35351 | 87736 | 83909 | 43736 | 19258 | 95068 |
| 44546 | 75524 | 68535 | 77434 | 18543 | 15479 | 58850 | 73802 | 10636 | 82735 |
| 22917 | 96024 | 04784 | 05809 | 52788 | 83577 | 02269 | 68632 | 23310 | 46261 |
| 33043 | 31433 | 47833 | 75234 | 74539 | 38529 | 57893 | 45997 | 71749 | 28666 |
| 99357 | 54593 | 21688 | 64216 | 85938 | 51742 | 12898 | 09737 | 61504 | 18946 |
| 01072 | 31679 | 80961 | 34029 | 56463 | 09594 | 11939 | 51777 | 64796 | 52452 |
| 90838 | 50179 | 42064 | 62987 | 13072 | 84227 | 24060 | 59438 | 05695 | 38136 |
| 35914 | 39441 | 90149 | 67957 | 16955 | 39960 | 26142 | 45600 | 75486 | 74103 |
| 87047 | 77284 | 12753 | 45644 | 47843 | 55781 | 06672 | 57548 | 84706 | 25453 |
| 93727 | 46613 | 48045 | 49685 | 28385 | 37200 | 98473 | 56808 | 86774 | 07305 |
| 37439 | 50362 | 44171 | 18495 | 57370 | 77691 | 28006 | 55318 | 39723 | 25299 |

Tabla A-1 (*continuación*)

NUMEROS ALEATORIOS

| | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 98892 | 53633 | 33909 | 81674 | 91956 | 84531 | 60422 | 55574 | 31670 | 61059 |
| 95398 | 77381 | 21912 | 24873 | 26372 | 12044 | 43234 | 08503 | 86716 | 08095 |
| 28982 | 24589 | 88986 | 31137 | 87512 | 33216 | 29665 | 26014 | 02919 | 17639 |
| 31303 | 70209 | 42174 | 10757 | 98531 | 35725 | 68208 | 61239 | 26705 | 43916 |
| 08457 | 10085 | 35741 | 79416 | 72457 | 59502 | 46986 | 09051 | 70963 | 19759 |
| 30698 | 80818 | 90073 | 78320 | 83675 | 78361 | 49929 | 70495 | 92247 | 04318 |
| 27142 | 41186 | 52273 | 81087 | 67396 | 16795 | 98542 | 83820 | 48765 | 24164 |
| 36775 | 63628 | 70856 | 43164 | 88426 | 51415 | 37514 | 24870 | 55665 | 05311 |
| 02560 | 51679 | 79600 | 23297 | 36434 | 17174 | 00109 | 02731 | 05909 | 58959 |
| 36744 | 66697 | 08331 | 50201 | 56303 | 09171 | 55995 | 60232 | 31305 | 30689 |
| 66482 | 04302 | 29770 | 46201 | 04588 | 42575 | 99318 | 84406 | 83405 | 21186 |
| 76375 | 41539 | 65940 | 57820 | 29283 | 94564 | 96598 | 00619 | 60468 | 97375 |
| 95772 | 72925 | 19454 | 63712 | 21401 | 96665 | 77750 | 21218 | 02990 | 50796 |
| 59013 | 81632 | 85000 | 39180 | 99975 | 73253 | 46534 | 59083 | 60243 | 27664 |
| 52392 | 04440 | 45628 | 34976 | 92012 | 16596 | 28596 | 15493 | 80754 | 48760 |
| 08027 | 07629 | 04339 | 77570 | 47155 | 77128 | 24498 | 67455 | 06320 | 82004 |
| 27284 | 39416 | 57313 | 03508 | 71443 | 42543 | 73335 | 68620 | 87559 | 77927 |
| 20513 | 38581 | 82309 | 69951 | 82658 | 60958 | 18290 | 60534 | 30741 | 89647 |
| 36076 | 12821 | 68723 | 37934 | 62818 | 61457 | 54590 | 98263 | 70109 | 06755 |
| 60679 | 43862 | 43675 | 03653 | 21060 | 81096 | 71332 | 28930 | 44207 | 08354 |
| 49416 | 58370 | 63738 | 87515 | 39290 | 87656 | 36130 | 23490 | 30963 | 57350 |
| 65757 | 39149 | 11780 | 92494 | 41335 | 35835 | 69882 | 56431 | 08091 | 01981 |
| 17379 | 77731 | 65133 | 44979 | 90939 | 29184 | 76634 | 58007 | 34873 | 83816 |
| 00757 | 13129 | 09648 | 07644 | 81689 | 68088 | 34882 | 04971 | 27565 | 66577 |
| 68276 | 79035 | 78273 | 83412 | 97328 | 81003 | 65938 | 85510 | 78367 | 29316 |
| 64716 | 91696 | 45448 | 92281 | 73854 | 67452 | 52145 | 41582 | 81549 | 82434 |
| 83695 | 11496 | 57066 | 48153 | 74754 | 56383 | 09253 | 65456 | 32438 | 96357 |
| 58275 | 66797 | 35380 | 41155 | 44389 | 94860 | 42074 | 31178 | 27967 | 12666 |
| 58005 | 84170 | 29999 | 23631 | 93032 | 41592 | 55688 | 78599 | 59902 | 21568 |
| 99993 | 80083 | 08810 | 07244 | 42067 | 76669 | 19686 | 64064 | 67141 | 80520 |
| 31692 | 51607 | 89056 | 74472 | 91284 | 20263 | 16039 | 94491 | 33767 | 73915 |
| 82997 | 58320 | 04852 | 52595 | 95514 | 56543 | 06636 | 61291 | 67504 | 57205 |
| 05043 | 40582 | 46051 | 60261 | 04996 | 82256 | 47375 | 87507 | 05112 | 88489 |
| 75781 | 38768 | 70475 | 00601 | 18378 | 32077 | 36523 | 30843 | 07057 | 78326 |
| 21033 | 15175 | 30741 | 45814 | 92222 | 16704 | 00197 | 51267 | 33224 | 40276 |
| 99092 | 60991 | 12571 | 71753 | 65214 | 33885 | 82939 | 50723 | 88987 | 69761 |
| 07204 | 93373 | 85112 | 29610 | 30375 | 64836 | 18459 | 08235 | 67650 | 72930 |
| 88859 | 97254 | 07771 | 21393 | 64657 | 42013 | 12753 | 03028 | 24224 | 24918 |
| 30497 | 91407 | 72900 | 15699 | 58653 | 38063 | 25072 | 48698 | 88083 | 48040 |
| 09726 | 18075 | 45852 | 54968 | 43743 | 82050 | 78412 | 79456 | 95032 | 10984 |
| 95330 | 01985 | 24128 | 60514 | 42539 | 91907 | 25694 | 37097 | 39566 | 24043 |
| 09760 | 32388 | 05601 | 49923 | 66126 | 54146 | 67213 | 52234 | 48381 | 89442 |
| 01534 | 81967 | 15337 | 95831 | 84643 | 40792 | 47562 | 95494 | 62087 | 18064 |
| 11234 | 59350 | 48368 | 57195 | 36287 | 03046 | 87136 | 36057 | 93913 | 70080 |
| 71056 | 48762 | 80221 | 59683 | 27504 | 21121 | 94711 | 11807 | 80882 | 48359 |
| 34208 | 05374 | 60304 | 43178 | 97247 | 24875 | 26259 | 67622 | 14657 | 80354 |
| 47132 | 62839 | 82198 | 92445 | 60650 | 76219 | 02772 | 48651 | 66449 | 89213 |
| 55685 | 93302 | 43019 | 45861 | 95493 | 16106 | 12783 | 37248 | 83533 | 25440 |
| 17803 | 18184 | 10510 | 27159 | 83008 | 20544 | 41665 | 99439 | 70606 | 28974 |
| 55045 | 17219 | 66737 | 59080 | 78489 | 12626 | 60661 | 53733 | 70062 | 14289 |
| 01923 | 33647 | 98442 | 59293 | 83318 | 33425 | 76412 | 87062 | 01295 | 11083 |
| 07202 | 76476 | 71888 | 54845 | 17468 | 41964 | 68694 | 59662 | 55905 | 26898 |
| 68825 | 68242 | 95750 | 11033 | 58634 | 78411 | 08523 | 19313 | 29327 | 47526 |
| 68525 | 06496 | 17446 | 41378 | 32368 | 82019 | 66101 | 56733 | 43308 | 82641 |
| 80819 | 33515 | 97373 | 43064 | 16221 | 99697 | 37951 | 07947 | 12935 | 49391 |
| 64200 | 96929 | 26044 | 49283 | 56545 | 67200 | 21325 | 85056 | 51345 | 06309 |
| 30156 | 29121 | 75874 | 42399 | 41121 | 90643 | 19585 | 06364 | 47203 | 19679 |
| 50467 | 14282 | 89098 | 66717 | 14753 | 73356 | 47781 | 34165 | 82842 | 00121 |
| 53764 | 83212 | 26675 | 64184 | 64455 | 29023 | 03181 | 13674 | 08838 | 83829 |
| 81727 | 35572 | 95469 | 36825 | 81882 | 95083 | 68323 | 14965 | 34166 | 32351 |

Tabla A-1 (*continuación*)

NUMEROS ALEATORIOS

| | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 30807 | 55558 | 96026 | 97398 | 21723 | 86560 | 52617 | 07771 | 61886 | 48234 |
| 75104 | 23682 | 78756 | 72728 | 85940 | 57290 | 75507 | 78715 | 01426 | 02310 |
| 06180 | 62724 | 36835 | 80288 | 25075 | 32609 | 33312 | 21348 | 87710 | 55457 |
| 22098 | 34834 | 66117 | 36252 | 82717 | 50585 | 43639 | 79999 | 07414 | 84003 |
| 13173 | 64783 | 20984 | 11929 | 18849 | 26211 | 77375 | 49561 | 96747 | 67007 |
| 75273 | 36108 | 55265 | 15653 | 82270 | 99216 | 27805 | 60088 | 06056 | 97377 |
| 89849 | 65756 | 44454 | 04602 | 14292 | 74458 | 57777 | 35934 | 05160 | 26359 |
| 91108 | 43562 | 18883 | 16569 | 49599 | 73871 | 67101 | 12054 | 56492 | 15981 |
| 51843 | 01542 | 17881 | 12954 | 94913 | 39583 | 94969 | 61146 | 35907 | 72184 |
| 02644 | 23564 | 85464 | 62947 | 92571 | 89377 | 85004 | 84654 | 20465 | 86212 |
| 38608 | 83374 | 74032 | 62183 | 08740 | 05279 | 30455 | 31032 | 71512 | 16476 |
| 43164 | 28909 | 88624 | 14992 | 85359 | 10193 | 32491 | 14769 | 63694 | 92640 |
| 80933 | 52950 | 45646 | 36636 | 05085 | 28053 | 27596 | 54873 | 68476 | 65823 |
| 67690 | 96766 | 69250 | 19344 | 47855 | 43489 | 77479 | 62418 | 54079 | 40069 |
| 68579 | 17014 | 25362 | 15114 | 30982 | 27250 | 29052 | 71115 | 83369 | 46776 |
| 46353 | 39733 | 44677 | 50133 | 26623 | 15979 | 10651 | 04263 | 34087 | 67005 |
| 30039 | 09532 | 52215 | 09164 | 20930 | 88230 | 43403 | 63230 | 83525 | 93550 |
| 89200 | 92772 | 42195 | 91634 | 39272 | 46462 | 76835 | 27755 | 03151 | 75692 |
| 58118 | 57942 | 14807 | 68214 | 76093 | 47484 | 24468 | 91764 | 52907 | 16675 |
| 97230 | 33027 | 70166 | 43232 | 98802 | 70715 | 30216 | 35586 | 18909 | 79658 |

Tabla A-2

PROBABILIDADES BINOMIALES

| X | P | | | | | | |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0.01 | 0.05 | 0.10 | 0.15 | 0.20 | 0.25 | 0.30 |
| 0 | 0.9900 | 0.9500 | 0.9000 | 0.8500 | 0.8000 | 0.7500 | 0.7000 |
| | 0.0100 | 0.0500 | 0.1000 | 0.1500 | 0.2000 | 0.2500 | 0.3000 |
| 1 | 0.9801 | 0.9025 | 0.8100 | 0.7225 | 0.6400 | 0.5625 | 0.4900 |
| | 0.0198 | 0.0950 | 0.1800 | 0.2550 | 0.3200 | 0.3750 | 0.4200 |
| 2 | 0.9703 | 0.8574 | 0.7290 | 0.6141 | 0.5120 | 0.4219 | 0.3430 |
| | 0.0091 | 0.0025 | 0.0100 | 0.0225 | 0.0400 | 0.0625 | 0.0900 |
| 3 | 0.9294 | 0.1354 | 0.2430 | 0.3251 | 0.3840 | 0.4219 | 0.4410 |
| | 0.0003 | 0.0071 | 0.0270 | 0.0574 | 0.0960 | 0.1406 | 0.1890 |
| 4 | 0.9606 | 0.8145 | 0.6561 | 0.5220 | 0.4096 | 0.3164 | 0.2401 |
| | 0.0388 | 0.1715 | 0.2916 | 0.3685 | 0.4096 | 0.4219 | 0.4116 |
| 5 | 0.9510 | 0.7738 | 0.5905 | 0.4437 | 0.3277 | 0.2373 | 0.1681 |
| | 0.0480 | 0.2036 | 0.3280 | 0.3915 | 0.4096 | 0.3955 | 0.3601 |
| 6 | 0.9415 | 0.7351 | 0.5314 | 0.3771 | 0.2621 | 0.1780 | 0.1176 |
| | 0.0510 | 0.2321 | 0.3543 | 0.3994 | 0.3932 | 0.3559 | 0.3026 |
| 7 | 0.9000 | 0.6306 | 0.3015 | 0.0984 | 0.1762 | 0.2458 | 0.2667 |
| | 0.0000 | 0.0021 | 0.0146 | 0.0414 | 0.0819 | 0.1318 | 0.1852 |
| 8 | 0.8500 | 0.5000 | 0.1612 | 0.0154 | 0.0055 | 0.0330 | 0.0586 |
| | 0.0000 | 0.0001 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0001 | 0.0044 | 0.0102 |
| 9 | 0.7900 | 0.3500 | 0.0900 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 0.0100 | 0.0500 | 0.1000 | 0.1500 | 0.2000 | 0.2500 | 0.3000 |

Tabla A-2 (continuación)

PROBABILIDADES BINOMIALES

| X | P | | | | | | | | | | | |
|-----|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0.01 | 0.05 | 0.10 | 0.15 | 0.20 | 0.25 | 0.30 | 1/3 | 0.35 | 0.40 | 0.45 | 0.50 |
| 7 | 0 | 0.9321 | 0.6983 | 0.4783 | 0.3206 | 0.2097 | 0.1335 | 0.0824 | 0.0585 | 0.0490 | 0.0280 | 0.0152 |
| | 1 | 0.0659 | 0.2573 | 0.3960 | 0.3720 | 0.3670 | 0.3114 | 0.2470 | 0.2048 | 0.1848 | 0.1306 | 0.0872 |
| | 2 | 0.0020 | 0.0406 | 0.1240 | 0.2096 | 0.2253 | 0.3115 | 0.3177 | 0.3073 | 0.2985 | 0.2613 | 0.2140 |
| | 3 | 0.0000 | 0.0036 | 0.0230 | 0.0617 | 0.1147 | 0.1730 | 0.2269 | 0.2561 | 0.2679 | 0.2903 | 0.2919 |
| | 4 | 0.0000 | 0.0002 | 0.0025 | 0.0109 | 0.0286 | 0.0577 | 0.0972 | 0.1280 | 0.1442 | 0.1935 | 0.2388 |
| | 5 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0002 | 0.0011 | 0.0043 | 0.0116 | 0.0250 | 0.0384 | 0.0466 | 0.0775 | 0.1172 |
| | 6 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0004 | 0.0012 | 0.0036 | 0.0064 | 0.0172 | 0.0320 |
| 8 | 7 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0005 | 0.0016 | 0.0037 | 0.0078 |
| | 0 | 0.9227 | 0.6634 | 0.4305 | 0.2725 | 0.1678 | 0.1001 | 0.0576 | 0.0390 | 0.0319 | 0.0168 | 0.0084 |
| | 1 | 0.0746 | 0.2794 | 0.3826 | 0.3847 | 0.3355 | 0.2670 | 0.1977 | 0.1561 | 0.1372 | 0.0896 | 0.0548 |
| | 2 | 0.0026 | 0.0514 | 0.1488 | 0.2376 | 0.2936 | 0.3114 | 0.2965 | 0.2731 | 0.2587 | 0.2090 | 0.1570 |
| | 3 | 0.0001 | 0.0054 | 0.0331 | 0.0838 | 0.1468 | 0.2077 | 0.2541 | 0.2731 | 0.2787 | 0.2787 | 0.2569 |
| | 4 | 0.0000 | 0.0004 | 0.0046 | 0.0185 | 0.0459 | 0.0865 | 0.1361 | 0.1707 | 0.1875 | 0.2322 | 0.2626 |
| | 5 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0004 | 0.0027 | 0.0092 | 0.0231 | 0.0467 | 0.0683 | 0.0808 | 0.1239 | 0.1718 |
| 9 | 6 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0002 | 0.0011 | 0.0038 | 0.0100 | 0.0171 | 0.0217 | 0.0413 | 0.0704 |
| | 7 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0004 | 0.0012 | 0.0024 | 0.0034 | 0.0078 | 0.0164 | 0.0313 |
| | 8 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0007 | 0.0017 | 0.0039 |
| | 0 | 0.9135 | 0.6302 | 0.3874 | 0.2316 | 0.1342 | 0.0751 | 0.0404 | 0.0260 | 0.0207 | 0.0101 | 0.0046 |
| | 1 | 0.0831 | 0.2986 | 0.3874 | 0.3678 | 0.3202 | 0.2252 | 0.1556 | 0.1171 | 0.1004 | 0.0604 | 0.0339 |
| | 2 | 0.0033 | 0.0628 | 0.1722 | 0.2597 | 0.3020 | 0.3004 | 0.2668 | 0.2341 | 0.2162 | 0.1613 | 0.1110 |
| | 3 | 0.0001 | 0.0078 | 0.0447 | 0.1070 | 0.1762 | 0.2336 | 0.2669 | 0.2731 | 0.2716 | 0.2508 | 0.2119 |
| 10 | 4 | 0.0000 | 0.0006 | 0.0074 | 0.0283 | 0.0660 | 0.1168 | 0.1715 | 0.2048 | 0.2194 | 0.2508 | 0.2600 |
| | 5 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0008 | 0.0050 | 0.0165 | 0.0389 | 0.0735 | 0.1024 | 0.1181 | 0.1672 | 0.2128 |
| | 6 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0006 | 0.0028 | 0.0087 | 0.0210 | 0.0341 | 0.0744 | 0.1160 | 0.1641 |
| | 7 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0003 | 0.0012 | 0.0039 | 0.0073 | 0.0098 | 0.0212 | 0.0407 | 0.0703 |
| | 8 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0004 | 0.0009 | 0.0013 | 0.0035 | 0.0083 | 0.0175 |
| 11 | 9 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0003 | 0.0020 |

Tabla A-2 (*continuación*)

PROBABILIDADES BINOMIALES

| <i>X</i> | <i>P</i> | | | | | | | | | | | |
|----------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0.01 | 0.05 | 0.10 | 0.15 | 0.20 | 0.25 | 0.30 | 1/3 | 0.35 | 0.40 | 0.45 | 0.50 |
| I | 0 | 0.9044 | 0.5987 | 0.3487 | 0.1969 | 0.1074 | 0.0563 | 0.0282 | 0.0173 | 0.0135 | 0.0060 | 0.0025 |
| | 1 | 0.0913 | 0.3152 | 0.1874 | 0.1211 | 0.0744 | 0.0484 | 0.0259 | 0.0151 | 0.0087 | 0.0040 | 0.0010 |
| | 2 | 0.0042 | 0.0746 | 0.1937 | 0.2759 | 0.3020 | 0.2816 | 0.2335 | 0.1951 | 0.1756 | 0.1209 | 0.0763 |
| | 3 | 0.0001 | 0.0105 | 0.0574 | 0.1298 | 0.2013 | 0.2503 | 0.2668 | 0.2601 | 0.2522 | 0.2150 | 0.1664 |
| | 4 | 0.0000 | 0.0009 | 0.0112 | 0.0401 | 0.0881 | 0.1460 | 0.2001 | 0.2176 | 0.2508 | 0.2384 | 0.1777 |
| | 5 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0015 | 0.0085 | 0.0264 | 0.0584 | 0.1030 | 0.1366 | 0.1536 | 0.2007 | 0.2340 |
| | 6 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0013 | 0.0055 | 0.0162 | 0.0367 | 0.0569 | 0.0689 | 0.1114 | 0.1596 |
| | 7 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0008 | 0.0031 | 0.0004 | 0.0015 | 0.0030 | 0.0043 | 0.0166 | 0.0425 |
| | 8 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0003 | 0.0005 | 0.0016 | 0.0229 |
| | 9 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0042 | 0.0097 |
| II | 10 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0003 | 0.0010 |
| | 11 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0005 |
| | 12 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0002 |
| | 13 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 14 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 15 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 16 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 17 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 18 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 19 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 20 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |

Tabela A-2 (Continua)

PROBABILIDADES BINOMIALES

| <i>n</i> | <i>x</i> | <i>p</i> | | | | | | | | | |
|----------|----------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | | 0.01 | 0.05 | 0.10 | 0.15 | 0.20 | 0.25 | 0.30 | 0.33 | 0.35 | 0.40 |
| 0 | 0.8601 | 0.4633 | 0.2059 | 0.0874 | 0.0352 | 0.0154 | 0.0047 | 0.0023 | 0.0016 | 0.0005 | 0.0000 |
| 1 | 0.1301 | 0.3667 | 0.2312 | 0.1319 | 0.0683 | 0.0319 | 0.0126 | 0.0047 | 0.0016 | 0.0005 | 0.0000 |
| 2 | 0.0092 | 0.1348 | 0.2669 | 0.2856 | 0.2491 | 0.1553 | 0.0915 | 0.0599 | 0.0219 | 0.0090 | 0.0032 |
| 3 | 0.0004 | 0.0307 | 0.1855 | 0.2855 | 0.2592 | 0.2252 | 0.1731 | 0.1299 | 0.0634 | 0.0317 | 0.0139 |
| 4 | 0.0000 | 0.0049 | 0.0429 | 0.1156 | 0.1876 | 0.2156 | 0.1948 | 0.1792 | 0.1268 | 0.0780 | 0.0416 |
| 5 | 0.0005 | 0.0105 | 0.0449 | 0.1031 | 0.1651 | 0.2143 | 0.2061 | 0.1859 | 0.1404 | 0.0917 | 0.0416 |
| 6 | 0.0001 | 0.0019 | 0.0132 | 0.0430 | 0.0918 | 0.1473 | 0.1786 | 0.1905 | 0.2066 | 0.1914 | 0.1527 |
| 7 | 0.0000 | 0.0003 | 0.0039 | 0.0139 | 0.0353 | 0.0841 | 0.1148 | 0.1320 | 0.1771 | 0.2013 | 0.1964 |
| 8 | 0.0000 | 0.0005 | 0.0034 | 0.0034 | 0.0131 | 0.0348 | 0.0574 | 0.0710 | 0.1181 | 0.1657 | 0.1649 |
| 9 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0007 | 0.0007 | 0.0034 | 0.0115 | 0.0223 | 0.0298 | 0.0612 | 0.1012 | 0.1527 |
| 10 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0007 | 0.0030 | 0.0067 | 0.0096 | 0.0245 | 0.0514 | 0.0917 |
| 11 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0006 | 0.0015 | 0.0023 | 0.0074 | 0.0192 | 0.0416 | 0.0416 |
| 12 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0004 | 0.0003 | 0.0052 | 0.0139 | 0.0139 |
| 13 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0003 | 0.0010 | 0.0032 | 0.0032 |
| 14 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0005 | 0.0005 |
| 15 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 16 | 0.8179 | 0.3585 | 0.1216 | 0.0388 | 0.0115 | 0.0032 | 0.0008 | 0.0003 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 |
| 17 | 0.1652 | 0.3773 | 0.2701 | 0.1368 | 0.0577 | 0.0211 | 0.0068 | 0.0030 | 0.0019 | 0.0001 | 0.0000 |
| 18 | 0.0159 | 0.1887 | 0.2852 | 0.2293 | 0.1369 | 0.0670 | 0.0279 | 0.0143 | 0.0040 | 0.0008 | 0.0002 |
| 19 | 0.0010 | 0.0596 | 0.1901 | 0.2428 | 0.2053 | 0.1339 | 0.0716 | 0.0429 | 0.0323 | 0.0140 | 0.0011 |
| 20 | 0.0000 | 0.0133 | 0.0598 | 0.1821 | 0.2182 | 0.1896 | 0.1302 | 0.0911 | 0.0738 | 0.0350 | 0.0146 |
| 21 | 0.0023 | 0.0023 | 0.0019 | 0.0029 | 0.0174 | 0.0225 | 0.0178 | 0.0157 | 0.0127 | 0.0745 | 0.0364 |
| 22 | 0.0003 | 0.0089 | 0.0454 | 0.1091 | 0.1686 | 0.1916 | 0.1821 | 0.1714 | 0.1244 | 0.0746 | 0.0370 |
| 23 | 0.0000 | 0.0160 | 0.0546 | 0.1121 | 0.1643 | 0.1821 | 0.1844 | 0.1659 | 0.1221 | 0.0739 | 0.0366 |
| 24 | 0.0003 | 0.0046 | 0.0221 | 0.0469 | 0.1454 | 0.1486 | 0.1614 | 0.1797 | 0.1623 | 0.1201 | 0.0656 |
| 25 | 0.0001 | 0.0011 | 0.0074 | 0.0277 | 0.0655 | 0.0987 | 0.1158 | 0.1597 | 0.1771 | 0.1602 | 0.1172 |
| 26 | 0.0000 | 0.0002 | 0.0020 | 0.0100 | 0.0309 | 0.0543 | 0.0686 | 0.0853 | 0.1153 | 0.1593 | 0.1762 |
| 27 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0005 | 0.0030 | 0.0120 | 0.0247 | 0.0356 | 0.0710 | 0.1185 | 0.1602 | 0.1602 |
| 28 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0007 | 0.0038 | 0.0092 | 0.0136 | 0.0245 | 0.0355 | 0.0728 | 0.1201 | 0.1201 |
| 29 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0002 | 0.0010 | 0.0028 | 0.0045 | 0.0145 | 0.0245 | 0.0455 | 0.0739 | 0.0739 |
| 30 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0003 | 0.0007 | 0.0017 | 0.0037 | 0.0057 | 0.0097 | 0.0150 | 0.0370 | 0.0370 |
| 31 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 |
| 32 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 33 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 34 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 35 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 36 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 37 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 38 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 39 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 40 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |

Tabla A-3

PROBABILIDADES INDIVIDUALES $e^{-\mu} \mu^x / x!$ PARA LA DISTRIBUCION DE POISSON *

| x | μ | | | | | | | | | |
|----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----|
| | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1.0 | 1.2 | 1.4 | 1.6 | | |
| 0 | 0.818731 | 0.670320 | 0.548812 | 0.449329 | 0.367879 | 0.301194 | 0.246597 | 0.201897 | 0 | |
| 1 | 0.163746 | 0.268128 | 0.329287 | 0.359463 | 0.367879 | 0.361433 | 0.345236 | 0.323034 | 1 | |
| 2 | 0.016375 | 0.053626 | 0.098786 | 0.143785 | 0.183940 | 0.216860 | 0.241665 | 0.258428 | 2 | |
| 3 | 0.001092 | 0.007150 | 0.019757 | 0.038343 | 0.061313 | 0.086744 | 0.112777 | 0.137828 | 3 | |
| 4 | 0.000055 | 0.000715 | 0.002964 | 0.007669 | 0.015328 | 0.026023 | 0.039472 | 0.055131 | 4 | |
| 5 | 0.000002 | 0.000057 | 0.000356 | 0.001227 | 0.003066 | 0.006246 | 0.011052 | 0.017642 | 5 | |
| 6 | | 0.000004 | 0.000036 | 0.000164 | 0.000511 | 0.001249 | 0.002579 | 0.004705 | 6 | |
| 7 | | | 0.000003 | 0.000019 | 0.000073 | 0.000214 | 0.000516 | 0.001075 | 7 | |
| 8 | | | | 0.000002 | 0.000009 | 0.000032 | 0.000090 | 0.000215 | 8 | |
| 9 | | | | | 0.000001 | 0.000004 | 0.000014 | 0.000038 | 9 | |
| 10 | | | | | | 0.000001 | 0.000002 | 0.000006 | 10 | |
| 11 | | | | | | | 0.000001 | 0.000001 | 11 | |
| | 1.8 | 2.0 | 2.5 | 3.0 | 3.5 | 4.0 | 4.5 | 5.0 | | |
| 0 | 0.165299 | 0.135335 | 0.082085 | 0.049787 | 0.030197 | 0.018316 | 0.011109 | 0.006738 | 0 | |
| 1 | 0.297538 | 0.270671 | 0.205212 | 0.149361 | 0.105691 | 0.073263 | 0.049990 | 0.033690 | 1 | |
| 2 | 0.267784 | 0.270671 | 0.256516 | 0.224042 | 0.184959 | 0.146525 | 0.112479 | 0.084224 | 2 | |
| 3 | 0.160671 | 0.180447 | 0.213763 | 0.224042 | 0.215785 | 0.195367 | 0.168718 | 0.140374 | 3 | |
| 4 | 0.072302 | 0.090224 | 0.133602 | 0.168031 | 0.188812 | 0.195367 | 0.189808 | 0.175467 | 4 | |
| 5 | 0.026029 | 0.036089 | 0.066801 | 0.100819 | 0.132169 | 0.156293 | 0.170827 | 0.175467 | 5 | |
| 6 | 0.007809 | 0.012030 | 0.027834 | 0.050409 | 0.077098 | 0.104196 | 0.128120 | 0.146223 | 6 | |
| 7 | 0.002008 | 0.003437 | 0.009941 | 0.021604 | 0.038549 | 0.059540 | 0.082363 | 0.104445 | 7 | |
| 8 | 0.000452 | 0.000859 | 0.003106 | 0.008102 | 0.016865 | 0.029770 | 0.046329 | 0.065278 | 8 | |
| 9 | 0.000090 | 0.000191 | 0.000863 | 0.002701 | 0.006559 | 0.013231 | 0.023165 | 0.036266 | 9 | |
| 10 | 0.000016 | 0.000038 | 0.000216 | 0.000810 | 0.002296 | 0.005292 | 0.010424 | 0.018138 | 10 | |
| 11 | 0.000003 | 0.000007 | 0.000049 | 0.000221 | 0.000730 | 0.001925 | 0.004264 | 0.008242 | 11 | |
| 12 | | 0.000001 | 0.000010 | 0.000055 | 0.000213 | 0.000642 | 0.001599 | 0.003434 | 12 | |
| 13 | | | 0.000002 | 0.000013 | 0.000057 | 0.000197 | 0.000554 | 0.001321 | 13 | |
| 14 | | | | 0.000003 | 0.000014 | 0.000056 | 0.000178 | 0.000472 | 14 | |
| 15 | | | | | 0.000001 | 0.000003 | 0.000015 | 0.000053 | 0.000157 | 15 |
| 16 | | | | | | 0.000001 | 0.000004 | 0.000015 | 0.000049 | 16 |
| 17 | | | | | | | 0.000001 | 0.000004 | 0.000014 | 17 |
| 18 | | | | | | | | 0.000001 | 0.000004 | 18 |
| 19 | | | | | | | | | 0.000001 | 19 |
| | 5.5 | 6.0 | 6.5 | 7.0 | 7.5 | 8.0 | 9.0 | 10.0 | | |
| 0 | 0.004087 | 0.002479 | 0.001503 | 0.000912 | 0.000553 | 0.000335 | 0.000123 | 0.000045 | 0 | |
| 1 | 0.022477 | 0.014873 | 0.009772 | 0.006383 | 0.004148 | 0.002684 | 0.001111 | 0.000454 | 1 | |
| 2 | 0.061812 | 0.044618 | 0.031760 | 0.022341 | 0.015555 | 0.010735 | 0.004998 | 0.002270 | 2 | |
| 3 | 0.113323 | 0.089235 | 0.068814 | 0.052129 | 0.038889 | 0.028626 | 0.014994 | 0.007567 | 3 | |

* Los datos de esta tabla se han tomado, con autorización, de *Biometrika Tables for Statisticians*, 3rd Ed. Vol. I, Table 39, 1966. London: Bentley House.

Tabla A-3 (*continuación*)PROBABILIDADES INDIVIDUALES $e^{-\mu} \frac{\mu^x}{x!}$ PARA LA DISTRIBUCION DE POISSON

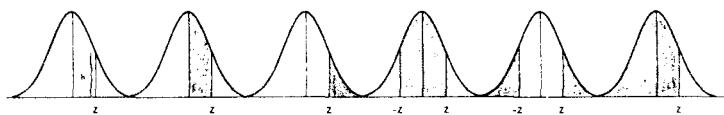
| x | μ | | | | | | | | x |
|-----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | 5.5 | 6.0 | 6.5 | 7.0 | 7.5 | 8.0 | 9.0 | 10.0 | |
| 4 | 0.155819 | 0.133853 | 0.111822 | 0.091226 | 0.072916 | 0.057252 | 0.033737 | 0.018917 | 4 |
| 5 | 0.171401 | 0.160623 | 0.145369 | 0.127717 | 0.109375 | 0.091604 | 0.060727 | 0.037833 | 5 |
| 6 | 0.157117 | 0.160623 | 0.157483 | 0.149003 | 0.136718 | 0.122138 | 0.091090 | 0.063055 | 6 |
| 7 | 0.123449 | 0.137677 | 0.146234 | 0.149003 | 0.146484 | 0.139587 | 0.117116 | 0.090079 | 7 |
| 8 | 0.084871 | 0.103258 | 0.118815 | 0.130377 | 0.137329 | 0.139587 | 0.131756 | 0.112599 | 8 |
| 9 | 0.051866 | 0.068838 | 0.085811 | 0.101405 | 0.114440 | 0.124077 | 0.131756 | 0.125110 | 9 |
| 10 | 0.028526 | 0.041303 | 0.055777 | 0.070983 | 0.085830 | 0.099262 | 0.118580 | 0.125110 | 10 |
| 11 | 0.014263 | 0.022529 | 0.032959 | 0.045171 | 0.058521 | 0.072190 | 0.097020 | 0.113736 | 11 |
| 12 | 0.006537 | 0.011264 | 0.017853 | 0.026350 | 0.036575 | 0.048127 | 0.072765 | 0.094780 | 12 |
| 13 | 0.002766 | 0.005199 | 0.008926 | 0.014188 | 0.021101 | 0.029616 | 0.050376 | 0.072908 | 13 |
| 14 | 0.001087 | 0.002228 | 0.004144 | 0.007094 | 0.011304 | 0.016924 | 0.032384 | 0.052077 | 14 |
| 15 | 0.000398 | 0.000891 | 0.001796 | 0.003311 | 0.005652 | 0.009026 | 0.019431 | 0.034718 | 15 |
| 16 | 0.000137 | 0.000334 | 0.000730 | 0.001448 | 0.002649 | 0.004513 | 0.010930 | 0.021699 | 16 |
| 17 | 0.000044 | 0.000118 | 0.000279 | 0.000596 | 0.001169 | 0.002124 | 0.005786 | 0.012764 | 17 |
| 18 | 0.000014 | 0.000039 | 0.000101 | 0.000232 | 0.000487 | 0.000944 | 0.002893 | 0.007091 | 18 |
| 19 | 0.000004 | 0.000012 | 0.000034 | 0.000085 | 0.000192 | 0.000397 | 0.001370 | 0.003732 | 19 |
| 20 | 0.000001 | 0.000004 | 0.000011 | 0.000030 | 0.000072 | 0.000159 | 0.000617 | 0.001866 | 20 |
| 21 | | 0.000001 | 0.000003 | 0.000010 | 0.000026 | 0.000061 | 0.000264 | 0.000899 | 21 |
| 22 | | | 0.000001 | 0.000003 | 0.000009 | 0.000022 | 0.000108 | 0.000404 | 22 |
| 23 | | | | 0.000001 | 0.000003 | 0.000008 | 0.000042 | 0.000176 | 23 |
| 24 | | | | | 0.000001 | 0.000003 | 0.000016 | 0.000073 | 24 |
| 25 | | | | | | 0.000001 | 0.000006 | 0.000029 | 25 |
| 26 | | | | | | | 0.000002 | 0.000011 | 26 |
| 27 | | | | | | | | 0.000001 | 0.000004 |
| 28 | | | | | | | | | 28 |
| 29 | | | | | | | | | 29 |
| | 11.0 | 12.0 | 13.0 | 14.0 | 15.0 | | | | |
| 0 | 0.000017 | 0.000006 | 0.000002 | 0.000001 | | | | | 0 |
| 1 | 0.000184 | 0.000074 | 0.000029 | 0.000012 | 0.000005 | | | | 1 |
| 2 | 0.001010 | 0.000442 | 0.000191 | 0.000081 | 0.000034 | | | | 2 |
| 3 | 0.003705 | 0.001770 | 0.000828 | 0.000380 | 0.000172 | | | | 3 |
| 4 | 0.010189 | 0.005309 | 0.002690 | 0.001331 | 0.000645 | | | | 4 |
| 5 | 0.022415 | 0.012741 | 0.006994 | 0.003727 | 0.001936 | | | | 5 |
| 6 | 0.041095 | 0.025481 | 0.015153 | 0.008696 | 0.004839 | | | | 6 |
| 7 | 0.064577 | 0.043682 | 0.028141 | 0.017392 | 0.010370 | | | | 7 |
| 8 | 0.088794 | 0.065523 | 0.045730 | 0.030435 | 0.019444 | | | | 8 |
| 9 | 0.108526 | 0.087364 | 0.066054 | 0.047344 | 0.032407 | | | | 9 |
| 10 | 0.119378 | 0.104837 | 0.085870 | 0.066282 | 0.048611 | | | | 10 |
| 11 | 0.119378 | 0.114368 | 0.101483 | 0.084359 | 0.066287 | | | | 11 |
| 12 | 0.109430 | 0.114363 | 0.109940 | 0.098418 | 0.082859 | | | | 12 |

Tabla A-3 (*continuación*)PROBABILIDADES INDIVIDUALES $e^{-\mu} \mu^x / x!$ PARA LA DISTRIBUCION DE POISSON

| x | μ | | | | | |
|----|----------|----------|----------|----------|----------|----|
| | 11.0 | 12.0 | 13.0 | 14.0 | 15.0 | |
| 13 | 0.092595 | 0.105570 | 0.109940 | 0.105989 | 0.095607 | 13 |
| 14 | 0.072753 | 0.090489 | 0.102087 | 0.105989 | 0.102436 | 14 |
| 15 | 0.053352 | 0.072391 | 0.088475 | 0.098923 | 0.102436 | 15 |
| 16 | 0.036680 | 0.054293 | 0.071886 | 0.086558 | 0.096034 | 16 |
| 17 | 0.023734 | 0.038325 | 0.054972 | 0.071283 | 0.084736 | 17 |
| 18 | 0.014504 | 0.025550 | 0.039702 | 0.055442 | 0.070613 | 18 |
| 19 | 0.008397 | 0.016137 | 0.027164 | 0.040852 | 0.055747 | 19 |
| 20 | 0.004618 | 0.009682 | 0.017657 | 0.028597 | 0.041810 | 20 |
| 21 | 0.002419 | 0.005533 | 0.010930 | 0.019064 | 0.029865 | 21 |
| 22 | 0.001210 | 0.003018 | 0.006459 | 0.012132 | 0.020362 | 22 |
| 23 | 0.000578 | 0.001575 | 0.003651 | 0.007385 | 0.013280 | 23 |
| 24 | 0.000265 | 0.000787 | 0.001977 | 0.004308 | 0.008300 | 24 |
| 25 | 0.000117 | 0.000378 | 0.001028 | 0.002412 | 0.004980 | 25 |
| 26 | 0.000049 | 0.000174 | 0.000514 | 0.001299 | 0.002873 | 26 |
| 27 | 0.000020 | 0.000078 | 0.000248 | 0.000674 | 0.001596 | 27 |
| 28 | 0.000008 | 0.000033 | 0.000115 | 0.000337 | 0.000855 | 28 |
| 29 | 0.000003 | 0.000014 | 0.000052 | 0.000163 | 0.000442 | 29 |
| 30 | 0.000001 | 0.000005 | 0.000022 | 0.000076 | 0.000221 | 30 |
| 31 | | 0.000002 | 0.000009 | 0.000034 | 0.000107 | 31 |
| 32 | | 0.000001 | 0.000004 | 0.000015 | 0.000052 | 32 |
| 33 | | | 0.000002 | 0.000006 | 0.000032 | 33 |
| 34 | | | 0.000001 | 0.000003 | 0.000010 | 34 |
| 35 | | | | 0.000001 | 0.000004 | 35 |
| 36 | | | | | 0.000002 | 36 |
| 37 | | | | | 0.000001 | 37 |

Tabla A-4

DISTRIBUCION NORMAL *



| <i>z</i> | <i>h</i> | <i>A</i> † | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>D</i> | <i>E</i> |
|----------|----------|------------|----------|----------|----------|----------|
| 0.00 | 0.3989 | 0.0000 | 0.5000 | 0.0000 | 1.0000 | 0.5000 |
| 0.01 | 0.3989 | 0.0040 | 0.4960 | 0.0080 | 0.9920 | 0.5040 |
| 0.02 | 0.3989 | 0.0080 | 0.4920 | 0.0160 | 0.9840 | 0.5080 |
| 0.0251 | 0.3988 | 0.01 | 0.49 | 0.02 | 0.98 | 0.51 |
| 0.03 | 0.3988 | 0.0120 | 0.4880 | 0.0239 | 0.9761 | 0.5120 |
| 0.04 | 0.3986 | 0.0160 | 0.4840 | 0.0319 | 0.9681 | 0.5160 |
| 0.05 | 0.3984 | 0.0199 | 0.4801 | 0.0399 | 0.9601 | 0.5199 |
| 0.0502 | 0.3984 | 0.02 | 0.48 | 0.04 | 0.96 | 0.52 |
| 0.06 | 0.3982 | 0.0239 | 0.4761 | 0.0478 | 0.9522 | 0.5239 |
| 0.07 | 0.3980 | 0.0279 | 0.4721 | 0.0558 | 0.9442 | 0.5279 |
| 0.0753 | 0.3978 | 0.03 | 0.47 | 0.06 | 0.94 | 0.53 |
| 0.08 | 0.3977 | 0.0319 | 0.4681 | 0.0638 | 0.9362 | 0.5319 |
| 0.09 | 0.3973 | 0.0359 | 0.4641 | 0.0717 | 0.9283 | 0.5359 |
| 0.10 | 0.3970 | 0.0398 | 0.4602 | 0.0797 | 0.9203 | 0.5398 |
| 0.1004 | 0.3969 | 0.04 | 0.46 | 0.08 | 0.92 | 0.54 |
| 0.11 | 0.3965 | 0.0438 | 0.4562 | 0.0876 | 0.9124 | 0.5438 |
| 0.12 | 0.3961 | 0.0478 | 0.4522 | 0.0955 | 0.9045 | 0.5478 |
| 0.1257 | 0.3958 | 0.05 | 0.45 | 0.10 | 0.9 | 0.55 |
| 0.13 | 0.3956 | 0.0517 | 0.4483 | 0.1034 | 0.8966 | 0.5517 |
| 0.14 | 0.3951 | 0.0557 | 0.4443 | 0.1113 | 0.8887 | 0.5557 |
| 0.15 | 0.3945 | 0.0596 | 0.4404 | 0.1192 | 0.8808 | 0.5596 |
| 0.1510 | 0.3944 | 0.06 | 0.44 | 0.12 | 0.88 | 0.56 |
| 0.16 | 0.3939 | 0.0636 | 0.4364 | 0.1271 | 0.8729 | 0.5636 |
| 0.17 | 0.3932 | 0.0675 | 0.4325 | 0.1350 | 0.8650 | 0.5675 |
| 0.1764 | 0.3928 | 0.07 | 0.43 | 0.14 | 0.86 | 0.57 |
| 0.18 | 0.3925 | 0.0714 | 0.4286 | 0.1429 | 0.8571 | 0.5714 |
| 0.19 | 0.3918 | 0.0753 | 0.4247 | 0.1507 | 0.8493 | 0.5753 |
| 0.20 | 0.3910 | 0.0793 | 0.4207 | 0.1585 | 0.8415 | 0.5793 |
| 0.2019 | 0.3909 | 0.08 | 0.42 | 0.16 | 0.84 | 0.58 |
| 0.21 | 0.3902 | 0.0832 | 0.4168 | 0.1663 | 0.8337 | 0.5832 |
| 0.22 | 0.3894 | 0.0871 | 0.4129 | 0.1741 | 0.8259 | 0.5871 |
| 0.2275 | 0.3888 | 0.09 | 0.41 | 0.18 | 0.82 | 0.59 |
| 0.23 | 0.3885 | 0.0910 | 0.4090 | 0.1819 | 0.8181 | 0.5910 |
| 0.24 | 0.3876 | 0.0948 | 0.4052 | 0.1897 | 0.8103 | 0.5948 |
| 0.25 | 0.3867 | 0.0987 | 0.4013 | 0.1974 | 0.8026 | 0.5987 |
| 0.2533 | 0.3863 | 0.10 | 0.40 | 0.20 | 0.80 | 0.60 |
| 0.26 | 0.3857 | 0.1026 | 0.3974 | 0.2051 | 0.7949 | 0.6026 |
| 0.27 | 0.3847 | 0.1064 | 0.3936 | 0.2128 | 0.7872 | 0.6064 |
| 0.2793 | 0.3837 | 0.11 | 0.39 | 0.22 | 0.78 | 0.61 |
| 0.28 | 0.3836 | 0.1103 | 0.3897 | 0.2205 | 0.7795 | 0.6103 |
| 0.29 | 0.3825 | 0.1141 | 0.3859 | 0.2282 | 0.7718 | 0.6141 |
| 0.30 | 0.3814 | 0.1179 | 0.3821 | 0.2358 | 0.7642 | 0.6179 |
| 0.3055 | 0.3808 | 0.12 | 0.38 | 0.24 | 0.76 | 0.62 |
| 0.31 | 0.3802 | 0.1217 | 0.3783 | 0.2434 | 0.7566 | 0.6217 |
| 0.32 | 0.3790 | 0.1255 | 0.3745 | 0.2510 | 0.7490 | 0.6255 |

* Tomado de *National Bureau of Standards- Applied Mathematics Series—23*, U.S. Govt. Printing Office. Washington, D.C., 1953.

† Las letras *A-E* se refieren a las áreas rayadas bajo las correspondientes curvas normales.

Pabla A-4 (*continuación*)

DISTRIBUCION NORMAL

| Z | <i>h</i> | <i>A</i> | <i>I3</i> | C | <i>D</i> | <i>E</i> |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|----------|
| 0.33 | 0.3778 | 0.1293 | 0.3707 | 0.2586 | 0.7414 | 0.6293 |
| 0.3319 | 0.3776 | 0.13 | 0.37 | 0.26 | 0.74 | 0.63 |
| 0.34 | 0.3765 | 0.1331 | 0.3669 | 0.2661 | 0.7339 | 0.6331 |
| 0.35 | 0.3752 | 0.1368 | 0.3632 | 0.2737 | 0.7263 | 0.6368 |
| 0.3585 | 0.3741 | 0.14 | 0.36 | 0.28 | 0.72 | 0.64 |
| 0.36 | 0.3739 | 0.1406 | 0.3594 | 0.2812 | 0.7188 | 0.6406 |
| 0.37 | 0.3725 | 0.1443 | 0.3557 | 0.2886 | 0.7114 | 0.6443 |
| 0.38 | 0.3712 | 0.1480 | 0.3520 | 0.2961 | 0.7039 | 0.6480 |
| 0.3853 | 0.3704 | 0.15 | 0.35 | 0.30 | 0.70 | 0.65 |
| 0.39 | 0.3697 | 0.1517 | 0.3483 | 0.3035 | 0.6965 | 0.6517 |
| 0.40 | 0.3683 | 0.1554 | 0.3446 | 0.3108 | 0.6892 | 0.6554 |
| 0.41 | 0.3668 | 0.1591 | 0.3409 | 0.3182 | 0.6818 | 0.6591 |
| 0.4125 | 0.3664 | 0.16 | 0.34 | 0.32 | 0.68 | 0.66 |
| 0.42 | 0.3653 | 0.1628 | 0.3372 | 0.3255 | 0.6745 | 0.6628 |
| 0.43 | 0.3637 | 0.1664 | 0.3336 | 0.3328 | 0.6672 | 0.6664 |
| 0.4399 | 0.3622 | 0.17 | 0.33 | 0.34 | 0.66 | 0.67 |
| 0.44 | 0.3621 | 0.1700 | 0.3300 | 0.3401 | 0.6599 | 0.6700 |
| 0.45 | 0.3605 | 0.1736 | 0.3264 | 0.3473 | 0.6527 | 0.6736 |
| 0.46 | 0.3589 | 0.1772 | 0.3228 | 0.3545 | 0.6455 | 0.6772 |
| 0.4677 | 0.3576 | 0.18 | 0.32 | 0.36 | 0.64 | 0.68 |
| 0.47 | 0.3572 | 0.1808 | 0.3192 | 0.3616 | 0.6384 | 0.6808 |
| 0.48 | 0.3555 | 0.1844 | 0.3156 | 0.3688 | 0.6312 | 0.6844 |
| 0.49 | 0.3538 | 0.1879 | 0.3121 | 0.3759 | 0.6241 | 0.6879 |
| 0.4959 | 0.3528 | 0.19 | 0.31 | 0.38 | 0.62 | 0.69 |
| 0.50 | 0.3521 | 0.1915 | 0.3085 | 0.3829 | 0.6171 | 0.6915 |
| 0.51 | 0.3503 | 0.1950 | 0.3050 | 0.3899 | 0.6101 | 0.6950 |
| 0.52 | 0.3485 | 0.1985 | 0.3015 | 0.3969 | 0.6031 | 0.6985 |
| 0.5244 | 0.3477 | 0.2 | 0.3 | 0.40 | 0.6 | 0.70 |
| 0.53 | 0.3467 | 0.2019 | 0.2981 | 0.4039 | 0.5961 | 0.7019 |
| 0.54 | 0.3448 | 0.2054 | 0.2946 | 0.4108 | 0.5892 | 0.7054 |
| 0.55 | 0.3429 | 0.2088 | 0.2912 | 0.4177 | 0.5823 | 0.7088 |
| 0.55334 | 0.3423 | 0.21 | 0.29 | 0.42 | 0.58 | 0.71 |
| 0.56 | 0.3410 | 0.2123 | 0.2877 | 0.4245 | 0.5755 | 0.7123 |
| 0.57 | 0.3391 | 0.2157 | 0.2843 | 0.4313 | 0.5687 | 0.7157 |
| 0.58 | 0.3372 | 0.2190 | 0.2810 | 0.4381 | 0.5619 | 0.7190 |
| 0.5828 | 0.3366 | 0.22 | 0.28 | 0.44 | 0.56 | 0.72 |
| 0.59 | 0.3352 | 0.224 | 0.2776 | 0.4448 | 0.5552 | 0.7224 |
| 0.60 | 0.3332 | 0.2257 | 0.2743 | 0.4515 | 0.5485 | 0.7257 |
| 0.61 | 0.3312 | 0.2291 | 0.2709 | 0.4581 | 0.5419 | 0.7291 |
| 0.6128 | 0.3306 | 0.23 | 0.27 | 0.46 | 0.54 | 0.73 |
| 0.62 | 0.3292 | 0.2324 | 0.2676 | 0.4647 | 0.5353 | 0.7324 |
| 0.63 | 0.3271 | 0.2357 | 0.2643 | 0.4713 | 0.5287 | 0.7357 |
| 0.64 | 0.3251 | 0.2389 | 0.2611 | 0.4778 | 0.5222 | 0.7389 |
| 0.6433 | 0.3244 | 0.24 | 0.26 | 0.48 | 0.52 | 0.74 |
| 0.65 | 0.3230 | 0.2422 | 0.2578 | 0.4843 | 0.5157 | 0.7422 |
| 0.66 | 0.3209 | 0.2454 | 0.2546 | 0.4907 | 0.5093 | 0.7454 |
| 0.67 | 0.3187 | 0.2486 | 0.2514 | 0.4971 | 0.5029 | 0.7486 |
| 0.6745 | 0.3178 | 0.25 | 0.25 | 0.50 | 0.50 | 0.75 |
| 0.68 | 0.3166 | 0.2517 | 0.2483 | 0.5035 | 0.4965 | 0.7517 |
| 0.69 | 0.3144 | 0.2549 | 0.2451 | 0.5098 | 0.4902 | 0.7549 |
| 0.70 | 0.3123 | 0.2580 | 0.2420 | 0.5161 | 0.4839 | 0.7580 |
| 0.7063 | 0.3109 | 0.26 | 0.24 | 0.52 | 0.48 | 0.76 |
| 0.71 | 0.3101 | 0.2611 | 0.2389 | 0.5223 | 0.4777 | 0.7611 |
| 0.72 | 0.3079 | 0.2642 | 0.2358 | 0.5285 | 0.4715 | 0.7642 |
| 0.73 | 0.3056 | 0.2673 | 0.2327 | 0.5346 | 0.4654 | 0.7673 |
| 0.7388 | 0.3037 | 0.27 | 0.23 | 0.54 | 0.46 | 0.77 |
| 0.74 | 0.3034 | 0.2704 | 0.2296 | 0.5407 | 0.4593 | 0.7704 |
| 0.75 | 0.3011 | 0.2734 | 0.2266 | 0.5467 | 0.4533 | 0.7734 |
| 0.76 | 0.2989 | 0.2764 | 0.2236 | 0.5527 | 0.4473 | 0.7764 |
| 0.77 | 0.2966 | 0.2794 | 0.2206 | 0.5587 | 0.4413 | 0.7794 |

Tabla A-4 (*continuación*)

DISTRIBUCIÓN NORMAL

| <i>z</i> | <i>h</i> | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>D</i> | <i>E</i> |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 0.7722 | 0.2961 | 0.28 | 0.22 | 0.56 | 0.44 | 0.78 |
| 0.78 | 0.2943 | 0.2823 | 0.2177 | 0.5646 | 0.4354 | 0.7823 |
| 0.79 | 0.2920 | 0.2852 | 0.2148 | 0.5705 | 0.4295 | 0.7852 |
| 0.80 | 0.2897 | 0.2881 | 0.2119 | 0.5763 | 0.4237 | 0.7881 |
| 0.8064 | 0.2882 | 0.29 | 0.21 | 0.58 | 0.42 | 0.79 |
| 0.81 | 0.2874 | 0.2910 | 0.2090 | 0.5821 | 0.4179 | 0.7910 |
| 0.82 | 0.2850 | 0.2939 | 0.2061 | 0.5878 | 0.4122 | 0.7939 |
| 0.83 | 0.2827 | 0.2967 | 0.2033 | 0.5935 | 0.4065 | 0.7967 |
| 0.84 | 0.2803 | 0.2995 | 0.2005 | 0.5991 | 0.4009 | 0.7995 |
| 0.8416 | 0.2800 | 0.30 | 0.20 | 0.60 | 0.40 | 0.80 |
| 0.85 | 0.2780 | 0.3023 | 0.1977 | 0.6047 | 0.3953 | 0.8023 |
| 0.86 | 0.2756 | 0.3051 | 0.1949 | 0.6102 | 0.3898 | 0.8051 |
| 0.87 | 0.2732 | 0.3078 | 0.1922 | 0.6157 | 0.3843 | 0.8078 |
| 0.8779 | 0.2714 | 0.31 | 0.19 | 0.62 | 0.38 | 0.81 |
| 0.88 | 0.2709 | 0.3106 | 0.1894 | 0.6211 | 0.3789 | 0.8106 |
| 0.89 | 0.2685 | 0.3133 | 0.1867 | 0.6265 | 0.3735 | 0.8133 |
| 0.90 | 0.2661 | 0.3159 | 0.1841 | 0.6319 | 0.3681 | 0.8159 |
| 0.91 | 0.2637 | 0.3186 | 0.1814 | 0.6372 | 0.3628 | 0.8186 |
| 0.9154 | 0.2624 | 0.32 | 0.18 | 0.64 | 0.36 | 0.82 |
| 0.92 | 0.2613 | 0.3212 | 0.1788 | 0.6424 | 0.3576 | 0.8212 |
| 0.93 | 0.2589 | 0.3238 | 0.1762 | 0.6476 | 0.3524 | 0.8238 |
| 0.94 | 0.2565 | 0.3264 | 0.1736 | 0.6528 | 0.3472 | 0.8264 |
| 0.95 | 0.2541 | 0.3289 | 0.1711 | 0.6579 | 0.3421 | 0.8289 |
| 0.9542 | 0.2531 | 0.33 | 0.17 | 0.66 | 0.34 | 0.83 |
| 0.96 | 0.2516 | 0.3315 | 0.1685 | 0.6629 | 0.3371 | 0.8315 |
| 0.97 | 0.2492 | 0.3340 | 0.1660 | 0.6680 | 0.3320 | 0.8340 |
| 0.98 | 0.2468 | 0.3365 | 0.1635 | 0.6729 | 0.3271 | 0.8365 |
| 0.99 | 0.2444 | 0.3389 | 0.1611 | 0.6778 | 0.3222 | 0.8389 |
| 0.9945 | 0.2433 | 0.34 | 0.16 | 0.68 | 0.32 | 0.84 |
| 1.00 | 0.2420 | 0.3413 | 0.1587 | 0.6827 | 0.3173 | 0.8413 |
| 1.01 | 0.2396 | 0.3438 | 0.1562 | 0.6875 | 0.3125 | 0.8438 |
| 1.02 | 0.2371 | 0.3461 | 0.1539 | 0.6923 | 0.3077 | 0.8461 |
| 1.03 | 0.2347 | 0.3485 | 0.1515 | 0.6970 | 0.3030 | 0.8485 |
| 1.036 | 0.2332 | 0.35 | 0.15 | 0.70 | 0.3 | 0.85 |
| 1.04 | 0.2323 | 0.3508 | 0.1492 | 0.7017 | 0.2983 | 0.8508 |
| 1.05 | 0.2299 | 0.3531 | 0.1469 | 0.7063 | 0.2937 | 0.8531 |
| 1.06 | 0.2275 | 0.3554 | 0.1446 | 0.7109 | 0.2891 | 0.8554 |
| 1.07 | 0.2251 | 0.3577 | 0.1423 | 0.7154 | 0.2846 | 0.8577 |
| 1.08 | 0.2227 | 0.3599 | 0.1401 | 0.7199 | 0.2801 | 0.8599 |
| 1.080 | 0.2226 | 0.36 | 0.14 | 0.72 | 0.28 | 0.86 |
| 1.09 | 0.2203 | 0.3621 | 0.1379 | 0.7243 | 0.2757 | 0.8621 |
| 1.10 | 0.2179 | 0.3643 | 0.1357 | 0.7287 | 0.2713 | 0.8643 |
| 1.11 | 0.2155 | 0.3665 | 0.1335 | 0.7330 | 0.2670 | 0.8665 |
| 1.12 | 0.2131 | 0.3686 | 0.1314 | 0.7373 | 0.2627 | 0.8686 |
| 1.1264 | 0.2115 | 0.37 | 0.13 | 0.74 | 0.26 | 0.87 |
| 1.13 | 0.2107 | 0.3708 | 0.1292 | 0.7415 | 0.2585 | 0.8708 |
| 1.14 | 0.2083 | 0.3729 | 0.1271 | 0.7457 | 0.2543 | 0.8729 |
| 1.15 | 0.2059 | 0.3749 | 0.1251 | 0.7499 | 0.2501 | 0.8749 |
| 1.16 | 0.2036 | 0.3770 | 0.1230 | 0.7540 | 0.2460 | 0.8770 |
| 1.17 | 0.2012 | 0.3790 | 0.1210 | 0.7580 | 0.2420 | 0.8790 |
| 1.175 | 0.2000 | 0.38 | 0.12 | 0.76 | 0.24 | 0.88 |
| 1.18 | 0.1989 | 0.3810 | 0.1190 | 0.7620 | 0.2380 | 0.8810 |
| 1.19 | 0.1965 | 0.3830 | 0.1170 | 0.7660 | 0.2340 | 0.8830 |
| 1.20 | 0.1942 | 0.3849 | 0.1151 | 0.7699 | 0.2301 | 0.8849 |
| 1.21 | 0.1919 | 0.3869 | 0.1131 | 0.7737 | 0.2263 | 0.8869 |
| 1.22 | 0.1895 | 0.3888 | 0.1112 | 0.7775 | 0.2225 | 0.8888 |
| 1.227 | 0.1880 | 0.39 | 0.11 | 0.78 | 0.22 | 0.89 |
| 1.23 | 0.1872 | 0.3907 | 0.1093 | 0.7813 | 0.2187 | 0.8907 |
| 1.24 | 0.1849 | 0.3925 | 0.1075 | 0.7850 | 0.2150 | 0.8925 |
| 1.25 | 0.1826 | 0.3944 | 0.1056 | 0.7887 | 0.2113 | 0.8944 |

Tabla A-4 (*continuación*)

DISTRIBUCION NORMAL

| <i>z</i> | <i>h</i> | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>D</i> | <i>E</i> |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1.26 | 0.1804 | 0.3962 | 0.1038 | 0.7923 | 0.2077 | 0.8962 |
| 1.27 | 0.1781 | 0.3980 | 0.1020 | 0.7959 | 0.2041 | 0.8980 |
| 1.28 | 0.1758 | 0.3997 | 0.1003 | 0.7995 | 0.2005 | 0.8997 |
| 1.282 | 0.1755 | 0.40 | 0.10 | 0.80 | 0.20 | 0.90 |
| 1.29 | 0.1736 | 0.4015 | 0.0985 | 0.8029 | 0.1971 | 0.9015 |
| 1.30 | 0.1714 | 0.4032 | 0.0968 | 0.8064 | 0.1936 | 0.9032 |
| 1.31 | 0.1691 | 0.4049 | 0.0951 | 0.8098 | 0.1902 | 0.9049 |
| 1.32 | 0.1669 | 0.4066 | 0.0934 | 0.8132 | 0.1868 | 0.9066 |
| 1.33 | 0.1647 | 0.4082 | 0.0918 | 0.8165 | 0.1835 | 0.9082 |
| 1.34 | 0.1626 | 0.4099 | 0.0901 | 0.8198 | 0.1802 | 0.9099 |
| 1.341 | 0.1624 | 0.41 | 0.09 | 0.82 | 0.18 | 0.91 |
| 1.35 | 0.1604 | 0.4115 | 0.0885 | 0.8230 | 0.1770 | 0.9115 |
| 1.36 | 0.1582 | 0.4131 | 0.0869 | 0.8262 | 0.1738 | 0.9131 |
| 1.37 | 0.1561 | 0.4147 | 0.0853 | 0.8293 | 0.1707 | 0.9147 |
| 1.38 | 0.1539 | 0.4162 | 0.0838 | 0.8324 | 0.1676 | 0.9162 |
| 1.39 | 0.1518 | 0.4177 | 0.0823 | 0.8355 | 0.1645 | 0.9177 |
| 1.40 | 0.1497 | 0.4192 | 0.0808 | 0.8385 | 0.1615 | 0.9192 |
| 1.405 | 0.1487 | 0.42 | 0.08 | 0.84 | 0.16 | 0.92 |
| 1.41 | 0.1476 | 0.4207 | 0.0793 | 0.8415 | 0.1585 | 0.9207 |
| 1.42 | 0.1456 | 0.4222 | 0.0778 | 0.8444 | 0.1556 | 0.9222 |
| 1.43 | 0.1435 | 0.4236 | 0.0764 | 0.8473 | 0.1527 | 0.9236 |
| 1.44 | 0.1415 | 0.4251 | 0.0749 | 0.8501 | 0.1499 | 0.9251 |
| 1.45 | 0.1394 | 0.4265 | 0.0735 | 0.8529 | 0.1471 | 0.9265 |
| 1.46 | 0.1374 | 0.4279 | 0.0721 | 0.8557 | 0.1443 | 0.9279 |
| 1.47 | 0.1354 | 0.4292 | 0.0708 | 0.8584 | 0.1416 | 0.9292 |
| 1.476 | 0.1343 | 0.43 | 0.07 | 0.86 | 0.14 | 0.93 |
| 1.48 | 0.1334 | 0.4306 | 0.0694 | 0.8611 | 0.1389 | 0.9306 |
| 1.49 | 0.1315 | 0.4319 | 0.0681 | 0.8638 | 0.1362 | 0.9319 |
| 1.50 | 0.1295 | 0.4332 | 0.0668 | 0.8664 | 0.1336 | 0.9332 |
| 1.51 | 0.1276 | 0.4345 | 0.0655 | 0.8690 | 0.1310 | 0.9345 |
| 1.52 | 0.1257 | 0.4357 | 0.0643 | 0.8715 | 0.1285 | 0.9357 |
| 1.53 | 0.1238 | 0.4370 | 0.0630 | 0.8740 | 0.1260 | 0.9370 |
| 1.54 | 0.1219 | 0.4382 | 0.0618 | 0.8764 | 0.1236 | 0.9382 |
| 1.55 | 0.1200 | 0.4394 | 0.0606 | 0.8789 | 0.1211 | 0.9394 |
| 1.555 | 0.1191 | 0.44 | 0.06 | 0.88 | 0.12 | 0.94 |
| 1.56 | 0.1182 | 0.4406 | 0.0594 | 0.8812 | 0.1188 | 0.9406 |
| 1.57 | 0.1163 | 0.4418 | 0.0582 | 0.8836 | 0.1164 | 0.9418 |
| 1.58 | 0.1145 | 0.4429 | 0.0571 | 0.8859 | 0.1141 | 0.9429 |
| 1.59 | 0.1127 | 0.4441 | 0.0559 | 0.8882 | 0.1118 | 0.9441 |
| 1.60 | 0.1109 | 0.4452 | 0.0548 | 0.8904 | 0.1096 | 0.9452 |
| 1.61 | 0.1092 | 0.4463 | 0.0537 | 0.8926 | 0.1074 | 0.9463 |
| 1.62 | 0.1074 | 0.4474 | 0.0526 | 0.8948 | 0.1052 | 0.9474 |
| 1.63 | 0.1057 | 0.4484 | 0.0516 | 0.8969 | 0.1031 | 0.9484 |
| 1.64 | 0.1040 | 0.4495 | 0.0505 | 0.8990 | 0.1010 | 0.9495 |
| 1.645 | 0.1031 | 0.45 | 0.05 | 0.90 | 0.10 | 0.95 |
| 1.65 | 0.1023 | 0.4505 | 0.0495 | 0.9011 | 0.0989 | 0.9505 |
| 1.66 | 0.1006 | 0.4515 | 0.0485 | 0.9031 | 0.0969 | 0.9515 |
| 1.67 | 0.0989 | 0.4525 | 0.0475 | 0.9051 | 0.0949 | 0.9525 |
| 1.68 | 0.0973 | 0.4535 | 0.0465 | 0.9070 | 0.0930 | 0.9535 |
| 1.69 | 0.0957 | 0.4545 | 0.0455 | 0.9090 | 0.0910 | 0.9545 |
| 1.70 | 0.0940 | 0.4554 | 0.0446 | 0.9109 | 0.0891 | 0.9554 |
| 1.71 | 0.0925 | 0.4564 | 0.0436 | 0.9127 | 0.0873 | 0.9564 |
| 1.72 | 0.0909 | 0.4573 | 0.0427 | 0.9146 | 0.0854 | 0.9573 |
| 1.73 | 0.0893 | 0.4582 | 0.0418 | 0.9164 | 0.0836 | 0.9582 |
| 1.74 | 0.0878 | 0.4591 | 0.0409 | 0.9181 | 0.0819 | 0.9591 |
| 1.75 | 0.0863 | 0.4599 | 0.0401 | 0.9199 | 0.0801 | 0.9599 |
| 1.751 | 0.0862 | 0.46 | 0.04 | 0.92 | 0.08 | 0.96 |
| 1.76 | 0.0848 | 0.4608 | 0.0392 | 0.9216 | 0.0784 | 0.9608 |
| 1.77 | 0.0833 | 0.4616 | 0.0384 | 0.9233 | 0.0767 | 0.9616 |
| 1.78 | 0.0818 | 0.4625 | 0.0375 | 0.9249 | 0.0751 | 0.9625 |

Tabla A-4 (*continuación*)

DISTRIBUCION NORMAL

| <i>z</i> | <i>h</i> | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>D</i> | <i>E</i> |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1.79 | 0.0804 | 0.4633 | 0.0367 | 0.9266 | 0.0734 | 0.9633 |
| 1.80 | 0.0790 | 0.4641 | 0.0359 | 0.9281 | 0.0714 | 0.9641 |
| 1.81 | 0.0775 | 0.4649 | 0.0352 | 0.9297 | 0.0703 | 0.9649 |
| 1.82 | 0.0761 | 0.4656 | 0.0344 | 0.9312 | 0.0688 | 0.9656 |
| 1.83 | 0.0748 | 0.4664 | 0.0336 | 0.9328 | 0.0672 | 0.9664 |
| 1.84 | 0.0734 | 0.4671 | 0.0324 | 0.9342 | 0.0658 | 0.9671 |
| 1.85 | 0.0721 | 0.4678 | 0.0322 | 0.9357 | 0.0643 | 0.9678 |
| 1.86 | 0.0707 | 0.4686 | 0.0314 | 0.9371 | 0.0629 | 0.9686 |
| 1.87 | 0.0694 | 0.4693 | 0.0307 | 0.9385 | 0.0645 | 0.9693 |
| 1.88 | 0.0681 | 0.4699 | 0.0301 | 0.9399 | 0.0601 | 0.9699 |
| 1.881 | 0.0680 | 0.47 | 0.03 | 0.91 | 0.06 | 0.97 |
| 1.89 | 0.0669 | 0.4706 | 0.0294 | 0.9412 | 0.0588 | 0.9700 |
| 1.90 | 0.0656 | 0.4713 | 0.0287 | 0.9426 | 0.0574 | 0.9713 |
| 1.91 | 0.0644 | 0.4719 | 0.0281 | 0.9439 | 0.056! | 0.9719 |
| 1.92 | 0.0632 | 0.4726 | 0.0274 | 0.9451 | 0.0549 | 0.9726 |
| 1.93 | 0.0620 | 0.4732 | 0.0268 | 0.9464 | 0.0536 | 0.9732 |
| 1.94 | 0.0608 | 0.4738 | 0.0262 | 0.9476 | 0.0524 | 0.9738 |
| 1.95 | 0.0596 | 0.4744 | 0.0256 | 0.9488 | 0.0512 | 0.9744 |
| 1.960 | 0.0585 | 0.475 | 0.025 | 0.95 | 0.05 | 0.975 |
| 1.97 | 0.0573 | 0.4756 | 0.0244 | 0.9512 | 0.0488 | 0.9756 |
| 1.98 | 0.0562 | 0.4761 | 0.0239 | 0.9523 | 0.0477 | 0.9761 |
| 1.99 | 0.0551 | 0.4767 | 0.0233 | 0.9534 | 0.0466 | 0.9767 |
| 2.00 | 0.0540 | 0.4772 | 0.0228 | 0.9545 | 0.0455 | 0.9772 |
| 2.01 | 0.0529 | 0.4778 | 0.0222 | 0.9556 | 0.0444 | 0.9778 |
| 2.02 | 0.0519 | 0.4783 | 0.0217 | 0.9566 | 0.0434 | 0.9783 |
| 2.03 | 0.0508 | 0.4788 | 0.0212 | 0.9576 | 0.0424 | 0.9788 |
| 2.04 | 0.0498 | 0.4793 | 0.0207 | 0.9586 | 0.0414 | 0.9793 |
| 2.05 | 0.0488 | 0.4798 | 0.0202 | 0.9596 | 0.0404 | 0.9798 |
| 2.054 | 0.0484 | 0.48 | 0.02 | 0.96 | 0.04 | 0.98 |
| 2.06 | 0.0478 | 0.4803 | 0.0197 | 0.9606 | 0.0394 | 0.9803 |
| 2.07 | 0.0468 | 0.4808 | 0.0192 | 0.9615 | 0.0385 | 0.9808 |
| 2.08 | 0.0459 | 0.4812 | 0.0188 | 0.9625 | 0.0375 | 0.9812 |
| 2.09 | 0.0449 | 0.4817 | 0.0183 | 0.9634 | 0.0366 | 0.9817 |
| 2.10 | 0.0440 | 0.4821 | 0.0179 | 0.9643 | 0.0357 | 0.9821 |
| 2.11 | 0.0431 | 0.4826 | 0.0174 | 0.9651 | 0.0349 | 0.9826 |
| 2.12 | 0.0422 | 0.4830 | 0.0170 | 0.9660 | 0.0340 | 0.9830 |
| 2.13 | 0.0413 | 0.4834 | 0.0166 | 0.9668 | 0.0332 | 0.9834 |
| 2.14 | 0.0404 | 0.4838 | 0.0162 | 0.9676 | 0.0324 | 0.9838 |
| 2.15 | 0.0396 | 0.4842 | 0.0158 | 0.9684 | 0.0316 | 0.9842 |
| 2.16 | 0.0387 | 0.4846 | 0.0154 | 0.9692 | 0.0308 | 0.9846 |
| 2.17 | 0.0379 | 0.4850 | 0.0150 | 0.9700 | 0.0300 | 0.9850 |
| 2.18 | 0.0371 | 0.4854 | 0.0146 | 0.9707 | 0.0293 | 0.9854 |
| 2.19 | 0.0363 | 0.4857 | 0.0143 | 0.9715 | 0.0285 | 0.9857 |
| 2.20 | 0.0355 | 0.4861 | 0.0139 | 0.9722 | 0.0278 | 0.9861 |
| 2.21 | 0.0347 | 0.4864 | 0.0136 | 0.9729 | 0.0271 | 0.9864 |
| 2.22 | 0.0339 | 0.4868 | 0.0132 | 0.9736 | 0.0264 | 0.9868 |
| 2.23 | 0.0332 | 0.4871 | 0.0129 | 0.9743 | 0.0257 | 0.9871 |
| 2.24 | 0.0325 | 0.4875 | 0.0125 | 0.9749 | 0.0251 | 0.9875 |
| 2.25 | 0.0317 | 0.4878 | 0.0122 | 0.9756 | 0.0244 | 0.9878 |
| 2.26 | 0.0310 | 0.4881 | 0.0119 | 0.9762 | 0.0238 | 0.9881 |
| 2.27 | 0.0303 | 0.4884 | 0.0116 | 0.9768 | 0.0232 | 0.9884 |
| 2.28 | 0.0297 | 0.4887 | 0.0113 | 0.9774 | 0.0226 | 0.9887 |
| 2.29 | 0.0290 | 0.4890 | 0.0110 | 0.9780 | 0.0220 | 0.9890 |
| 2.30 | 0.0283 | 0.4893 | 0.0107 | 0.9786 | 0.0214 | 0.9893 |
| 2.31 | 0.0277 | 0.4896 | 0.0104 | 0.9791 | 0.0209 | 0.9896 |
| 2.32 | 0.0270 | 0.4898 | 0.0102 | 0.9797 | 0.0203 | 0.9898 |
| 2.326 | 0.0267 | 0.49 | 0.01 | 0.98 | 0.02 | 0.99 |
| 2.33 | 0.0264 | 0.4901 | 0.0099 | 0.9802 | 0.0198 | 0.9901 |
| 2.34 | 0.0258 | 0.4904 | 0.0096 | 0.9807 | 0.0193 | 0.9904 |
| 2.35 | 0.0252 | 0.4906 | 0.0094 | 0.9812 | 0.0188 | 0.9906 |

Tabla A-4 (*continuación*)

DISTRIBUCION NORMAL

| <i>z</i> | <i>h</i> | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>D</i> | <i>E</i> |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 2.36 | 0.0246 | 0.4909 | 0.0091 | 0.9817 | 0.0183 | 0.9909 |
| 2.37 | 0.0241 | 0.4911 | 0.0089 | 0.9822 | 0.0178 | 0.9911 |
| 2.38 | 0.0235 | 0.4913 | 0.0087 | 0.9827 | 0.0173 | 0.9913 |
| 2.39 | 0.0229 | 0.4916 | 0.0081 | 0.9832 | 0.0168 | 0.9916 |
| 2.40 | 0.0224 | 0.4918 | 0.0082 | 0.9836 | 0.0164 | 0.9918 |
| 2.41 | 0.0219 | 0.4920 | 0.0089 | 0.9840 | 0.0160 | 0.9920 |
| 2.42 | 0.0213 | 0.4922 | 0.0078 | 0.9845 | 0.0155 | 0.9927 |
| 2.43 | 0.0208 | 0.4925 | 0.0075 | 0.9849 | 0.0151 | 0.9925 |
| 2.44 | 0.0203 | 0.4927 | 0.0073 | 0.9853 | 0.0147 | 0.9927 |
| 2.45 | 0.0198 | 0.4929 | 0.0071 | 0.9857 | 0.0143 | 0.9929 |
| 2.46 | 0.0194 | 0.4931 | 0.0069 | 0.9861 | 0.0139 | 0.9931 |
| 2.47 | 0.0189 | 0.4932 | 0.0068 | 0.9865 | 0.0135 | 0.9932 |
| 2.48 | 0.0184 | 0.4934 | 0.0066 | 0.9869 | 0.0131 | 0.993) |
| 2.49 | 0.0180 | 0.4936 | 0.0064 | 0.9872 | 0.0128 | 0.9936 |
| 2.50 | 0.0175 | 0.4938 | 0.0062 | 0.9876 | 0.0124 | 0.9938 |
| 2.51 | 0.0171 | 0.4940 | 0.0060 | 0.9879 | 0.0121 | 0.9940 |
| 2.52 | 0.0167 | 0.4941 | 0.0059 | 0.9883 | 0.0117 | 0.9941 |
| 2.53 | 0.0163 | 0.4943 | 0.0057 | 0.9886 | 0.0114 | 0.9943 |
| 2.54 | 0.0158 | 0.4945 | 0.0055 | 0.9889 | 0.0111 | 0.9945 |
| 2.55 | 0.0154 | 0.4946 | 0.0054 | 0.9892 | 0.0108 | 0.9946 |
| 2.56 | 0.0151 | 0.4948 | 0.0052 | 0.9895 | 0.0105 | 0.9948 |
| 2.57 | 0.0147 | 0.4949 | 0.0051 | 0.9898 | 0.0102 | 0.9949 |
| 2.576 | 0.0145 | 0.495 | 0.005 | 0.99 | 0.01 | 0.995 |
| 2.58 | 0.0143 | 0.4951 | 0.0049 | 0.9901 | 0.0099 | 0.9951 |
| 2.59 | 0.0139 | 0.4952 | 0.0048 | 0.9904 | 0.0096 | 0.9952 |
| 2.60 | 0.0136 | 0.4953 | 0.0047 | 0.9907 | 0.0093 | 0.9953 |
| 2.61 | 0.0132 | 0.4955 | 0.0045 | 0.9909 | 0.0091 | 0.9955 |
| 2.62 | 0.0129 | 0.4956 | 0.0044 | 0.9912 | 0.0088 | 0.9956 |
| 2.63 | 0.0126 | 0.4957 | 0.0043 | 0.9915 | 0.0085 | 0.9957 |
| 2.64 | 0.0122 | 0.4959 | 0.0041 | 0.9917 | 0.0083 | 0.9959 |
| 2.65 | 0.0119 | 0.4960 | 0.0040 | 0.9920 | 0.0080 | 0.9960 |
| 2.70 | 0.0104 | 0.4965 | 0.0035 | 0.9931 | 0.0069 | 0.9965 |
| 2.75 | 0.0091 | 0.4970 | 0.0030 | 0.9940 | 0.0060 | 0.9970 |
| 2.80 | 0.0079 | 0.4974 | 0.0026 | 0.9949 | 0.0051 | 0.9974 |
| 2.85 | 0.0069 | 0.4978 | 0.0022 | 0.9956 | 0.0044 | 0.9978 |
| 2.90 | 0.0060 | 0.4981 | 0.0019 | 0.9963 | 0.0037 | 0.9981 |
| 2.95 | 0.0051 | 0.4984 | 0.0016 | 0.9968 | 0.0032 | 0.9984 |
| 3.00 | 0.0044 | 0.4987 | 0.0013 | 0.9973 | 0.0027 | 0.9987 |
| 3.05 | 0.0038 | 0.4989 | 0.0011 | 0.9977 | 0.0023 | 0.9989 |
| 3.090 | 0.0034 | 0.499 | 0.001 | 0.998 | 0.002 | 0.999 |
| 3.10 | 0.0033 | 0.4990 | 0.0010 | 0.9981 | 0.0019 | 0.9990 |
| 3.15 | 0.0028 | 0.4992 | 0.0008 | 0.9984 | 0.0016 | 0.9992 |
| 3.20 | 0.0024 | 0.4993 | 0.0007 | 0.9986 | 0.0014 | 0.9993 |
| 3.25 | 0.0020 | 0.4994 | 0.0006 | 0.9988 | 0.0012 | 0.9994 |
| 3.291 | 0.0018 | 0.4995 | 0.0005 | 0.999 | 0.001 | 0.9995 |
| 3.30 | 0.0017 | 0.4995 | 0.0005 | 0.9990 | 0.0010 | 0.9995 |
| 3.35 | 0.0015 | 0.4996 | 0.0004 | 0.9992 | 0.0008 | 0.9996 |
| 3.40 | 0.0012 | 0.4997 | 0.0003 | 0.9993 | 0.0007 | 0.9997 |
| 3.45 | 0.0010 | 0.4997 | 0.0003 | 0.9994 | 0.0006 | 0.9997 |
| 3.50 | 0.0009 | 0.4998 | 0.0002 | 0.9995 | 0.0005 | 0.9998 |
| 3.55 | 0.0007 | 0.4998 | 0.0002 | 0.9996 | 0.0004 | 0.9998 |
| 3.60 | 0.0006 | 0.4998 | 0.0002 | 0.9997 | 0.0003 | 0.9998 |
| 3.65 | 0.0005 | 0.4999 | 0.0001 | 0.9997 | 0.0003 | 0.9999 |
| 3.70 | 0.0004 | 0.4999 | 0.0001 | 0.9998 | 0.0002 | 0.9999 |
| 3.75 | 0.0004 | 0.4999 | 0.0001 | 0.9998 | 0.0002 | 0.9999 |
| 3.80 | 0.0003 | 0.4999 | 0.0001 | 0.9999 | 0.0001 | 0.9999 |

Tabla A-5

PERCENTILES DE LA DISTRIBUCION t^*

| $\nu /$ | $t_{0.60}$ | $t_{0.70}$ | $t_{0.80}$ | $t_{0.90}$ | $t_{0.95}$ | $t_{0.975}$ | $t_{0.99}$ | $t_{0.995}$ | $t_{0.9995}$ |
|----------|------------|------------|------------|------------|------------|-------------|------------|-------------|--------------|
| 1 | 0.3250 | 0.7270 | 1.376 | 3.078 | 6.3138 | 12.706 | 31.821 | 63.657 | 636.619 |
| 2 | 0.2885 | 0.6172 | 1.061 | 1.886 | 2.9200 | 4.3027 | 6.965 | 9.9248 | 31.598 |
| 3 | 0.2766 | 0.5840 | 0.978 | 1.638 | 2.3534 | 3.1825 | 4.541 | 5.8409 | 12.924 |
| 4 | 0.2707 | 0.5692 | 0.941 | 1.533 | 2.1318 | 2.7764 | 3.747 | 4.6041 | 8.610 |
| 5 | 0.2672 | 0.5598 | 0.920 | 1.476 | 2.0150 | 2.5706 | 3.365 | 4.0321 | 6.869 |
| 6 | 0.2648 | 0.5536 | 0.906 | 1.440 | 1.9432 | 2.4469 | 3.143 | 3.7074 | 5.959 |
| 7 | 0.2632 | 0.5493 | 0.896 | 1.415 | 1.8946 | 2.3646 | 2.998 | 3.4995 | 5.408 |
| 8 | 0.2619 | 0.5461 | 0.889 | 1.397 | 1.8595 | 2.3060 | 2.896 | 3.3554 | 5.041 |
| 9 | 0.2610 | 0.5436 | 0.883 | 1.383 | 1.8331 | 2.2622 | 2.821 | 3.2498 | 4.781 |
| 10 | 0.2602 | 0.5416 | 0.879 | 1.372 | 1.8125 | 2.2281 | 2.764 | 3.1693 | 4.587 |
| 11 | 0.2596 | 0.5400 | 0.876 | 1.363 | 1.7939 | 2.2010 | 2.71» | 3.1058 | 4.437 |
| 12 | 0.2590 | 0.5387 | 0.873 | 1.356 | 1.7823 | 2.1788 | 2.681 | 3.0545 | 4.318 |
| 13 | 0.2586 | 0.5375 | 0.870 | 1.350 | 1.7709 | 2.1604 | 2.650 | 3.0123 | 4.221 |
| 14 | 0.2582 | 0.5366 | 0.868 | 1.345 | 1.7613 | 2.1448 | 2.624 | 2.9768 | 4.140 |
| 15 | 0.2579 | 0.5358 | 0.866 | 1.341 | 1.7530 | 2.1315 | 2.602 | 2.9467 | 4.073 |
| 16 | 0.2576 | 0.5358 | 0.865 | 1.337 | 1.7459 | 2.1199 | 2.583 | 2.9208 | 4.015 |
| 17 | 0.2574 | 0.5344 | 0.863 | 1.333 | 1.7396 | 2.1098 | 2.567 | 2.8982 | 3.965 |
| 18 | 0.2571 | 0.5338 | 0.862 | 1.330 | 1.7341 | 2.1009 | 2.552 | 2.8784 | 3.922 |
| 19 | 0.2569 | 0.5333 | 0.861 | 1.328 | 1.7291 | 2.0930 | 2.539 | 2.8609 | 3.883 |
| 20 | 0.2567 | 0.5329 | 0.860 | 1.325 | 1.7247 | 2.0860 | 2.528 | 2.8453 | 3.850 |
| 21 | 0.2566 | 0.5325 | 0.859 | 1.323 | 1.7207 | 2.0796 | 2.518 | 2.8314 | 3.819 |
| 22 | 0.2564 | 0.5321 | 0.858 | 1.321 | 1.7171 | 2.0739 | 2.508 | 2.8188 | 3.792 |
| 23 | 0.2563 | 0.5318 | 0.858 | 1.319 | 1.7139 | 2.0687 | 2.500 | 2.9073 | 3.767 |
| 24 | 0.2562 | 0.5315 | 0.857 | 1.318 | 1.7109 | 2.0639 | 2.492 | 2.7969 | 3.745 |
| 25 | 0.2561 | 0.5312 | 0.856 | 1.316 | 1.7081 | 2.0595 | 2.485 | 2.7874 | 3.725 |
| 26 | 0.2560 | 0.5309 | 0.856 | 1.315 | 1.7056 | 2.0555 | 2.479 | 2.7787 | 3.707 |
| 27 | 0.2559 | 0.5307 | 0.855 | 1.314 | 1.7033 | 2.0518 | 2.473 | 2.7707 | 3.690 |
| 28 | 0.2558 | 0.5304 | 0.855 | 1.313 | 1.7011 | 2.0484 | 2.467 | 2.7633 | 3.674 |
| 29 | 0.2557 | 0.5302 | 0.854 | 1.311 | 1.6991 | 2.0452 | 2.462 | 2.7564 | 3.659 |
| 30 | 0.2556 | 0.5300 | 0.854 | 1.310 | 1.6973 | 2.0423 | 2.457 | 2.7500 | 3.616 |
| 35 | 0.2553 | 0.5292 | 0.8521 | 1.3062 | 1.6896 | 2.0301 | 2.438 | 2.7239 | 3.5919 |
| 40 | 0.2550 | 0.5286 | 0.8507 | 1.3031 | 1.6839 | 2.0211 | 2.423 | 2.7045 | 3.5511 |
| 45 | 0.2549 | 0.5281 | 0.8497 | 1.3007 | 1.6794 | 2.0141 | 2.412 | 2.6896 | 3.5207 |
| 50 | 0.2547 | 0.5278 | 0.8489 | 1.2987 | 1.6759 | 2.0086 | 2.403 | 2.6778 | 3.4965 |
| 60 | 0.2545 | 0.5272 | 0.8477 | 1.2959 | 1.6707 | 2.0003 | 2.390 | 2.6603 | 3.4606 |
| 70 | 0.2543 | 0.5268 | 0.8468 | 1.2938 | 1.6669 | 1.9945 | 2.381 | 2.6480 | 3.4355 |
| 80 | 0.2542 | 0.5265 | 0.8462 | 1.2922 | 1.6641 | 1.9901 | 2.374 | 2.6388 | 3.4169 |
| 90 | 0.2541 | 0.5263 | 0.8457 | 1.2910 | 1.6620 | 1.9867 | 2.368 | 2.6316 | 3.4022 |
| 100 | 0.2540 | 0.5261 | 0.8452 | 1.2901 | 1.6602 | 1.9840 | 2.364 | 2.6260 | 3.3909 |
| 120 | 0.2539 | 0.5258 | 0.8446 | 1.2887 | 1.6577 | 1.9799 | 2.358 | 2.6175 | 3.3736 |
| 140 | 0.2538 | 0.5256 | 0.8442 | 1.2876 | 1.6558 | 1.9771 | 2.353 | 2.6114 | 3.3615 |
| 160 | 0.2538 | 0.5255 | 0.8439 | 1.2869 | 1.6545 | 1.9749 | 2.350 | 2.6070 | 3.3527 |
| 180 | 0.2537 | 0.5253 | 0.8436 | 1.2863 | 1.6534 | 1.9733 | 2.347 | 2.6035 | 3.3456 |
| 200 | 0.2537 | 0.5252 | 0.8434 | 1.2858 | 1.6525 | 1.9719 | 2.345 | 2.6006 | 3.3400 |
| ∞ | 0.2533 | 0.5244 | 0.8416 | 1.2816 | 1.6449 | 1.9600 | 2.326 | 2.5758 | 3.2905 |

* Los datos de esta tabla se han tomado, con permiso, de *Documenta Geigy Scientific Tables*. 6th Ed., pp. 32-35, Geigy Pharmaceuticals, Division of Geigy Chemical Corporation, Ardsley, N.Y.

Tabla A-6

PERCENTILES DE LA DISTRIBUCION JI-CUADRADO *

| g/l | $\chi^2_{0.0005}$ | $\chi^2_{0.005}$ | $\chi^2_{0.01}$ | $\chi^2_{0.025}$ | $\chi^2_{0.05}$ | $\chi^2_{0.10}$ | $\chi^2_{0.20}$ | $\chi^2_{0.30}$ | $\chi^2_{0.40}$ |
|-------|-------------------|------------------|-----------------|------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1 | 0.000000393 | 0.0000393 | 0.000157 | 0.000982 | 0.00393 | 0.0158 | 0.0642 | 0.148 | 0.275 |
| 2 | 0.00100 | 0.0100 | 0.0201 | 0.0506 | 0.103 | 0.211 | 0.446 | 0.713 | 1.022 |
| 3 | 0.0153 | 0.0717 | 0.115 | 0.216 | 0.352 | 0.584 | 1.005 | 1.424 | 1.869 |
| 4 | 0.0639 | 0.207 | 0.297 | 0.484 | 0.711 | 1.004 | 1.649 | 2.195 | 2.753 |
| 5 | 0.158 | 0.412 | 0.554 | 0.831 | 1.145 | 1.610 | 2.343 | 3.000 | 3.655 |
| 6 | 0.299 | 0.676 | 0.872 | 1.237 | 1.635 | 2.204 | 3.070 | 3.828 | 4.570 |
| 7 | 0.485 | 0.989 | 1.239 | 1.690 | 2.167 | 2.833 | 3.822 | 4.671 | 5.493 |
| 8 | 0.710 | 1.344 | 1.646 | 2.180 | 2.733 | 3.490 | 4.594 | 5.527 | 6.423 |
| 9 | 0.972 | 1.735 | 2.088 | 2.700 | 3.325 | 4.168 | 5.380 | 6.393 | 7.357 |
| 10 | 1.265 | 2.156 | 2.558 | 3.247 | 3.940 | 4.865 | 6.179 | 7.267 | 8.295 |
| 11 | 1.587 | 2.603 | 3.053 | 3.816 | 4.575 | 5.578 | 6.989 | 8.148 | 9.237 |
| 12 | 1.934 | 3.074 | 3.571 | 4.404 | 5.226 | 6.304 | 7.807 | 9.034 | 10.182 |
| 13 | 2.305 | 3.565 | 4.107 | 5.009 | 5.892 | 7.042 | 8.634 | 9.926 | 11.129 |
| 14 | 2.697 | 4.075 | 4.660 | 5.629 | 6.571 | 7.790 | 9.467 | 10.821 | 12.079 |
| 15 | 3.108 | 4.601 | 5.229 | 6.262 | 7.261 | 8.547 | 10.307 | 11.721 | 13.030 |
| 16 | 3.536 | 5.142 | 5.812 | 6.908 | 7.962 | 9.312 | 11.152 | 12.624 | 13.983 |
| 17 | 3.980 | 5.697 | 6.408 | 7.564 | 8.672 | 10.085 | 12.002 | 13.531 | 14.937 |
| 18 | 4.439 | 6.265 | 7.015 | 8.231 | 9.390 | 10.865 | 12.857 | 14.440 | 15.893 |
| 19 | 4.912 | 6.844 | 7.633 | 8.907 | 10.117 | 11.651 | 13.716 | 15.352 | 16.850 |
| 20 | 5.398 | 7.434 | 8.260 | 9.591 | 10.851 | 12.443 | 14.578 | 16.266 | 17.809 |
| 21 | 5.896 | 8.034 | 8.897 | 10.283 | 11.591 | 13.240 | 15.445 | 17.182 | 18.768 |
| 22 | 6.405 | 8.643 | 9.542 | 10.982 | 12.338 | 14.041 | 16.314 | 18.101 | 19.729 |
| 23 | 6.924 | 9.260 | 10.196 | 11.688 | 13.091 | 14.848 | 17.187 | 19.021 | 20.690 |
| 24 | 7.453 | 9.886 | 10.856 | 12.401 | 13.848 | 15.659 | 18.062 | 19.943 | 21.652 |
| 25 | 7.991 | 10.520 | 11.524 | 13.120 | 14.611 | 16.473 | 18.940 | 20.867 | 22.616 |
| 26 | 8.538 | 11.160 | 12.198 | 13.844 | 15.379 | 17.292 | 19.820 | 21.792 | 23.579 |
| 27 | 9.093 | 11.808 | 12.879 | 14.573 | 16.151 | 18.114 | 20.703 | 22.719 | 24.544 |
| 28 | 9.656 | 12.461 | 13.565 | 15.308 | 16.928 | 18.939 | 21.588 | 23.647 | 25.509 |
| 29 | 10.227 | 13.121 | 14.256 | 16.047 | 17.708 | 19.768 | 22.475 | 24.577 | 26.475 |
| 30 | 10.804 | 13.787 | 14.953 | 16.791 | 18.493 | 20.599 | 23.364 | 25.508 | 27.442 |
| 35 | 13.788 | 17.192 | 18.509 | 20.569 | 22.465 | 24.797 | 27.836 | 30.178 | 32.282 |
| 40 | 16.906 | 20.707 | 22.164 | 24.433 | 26.509 | 29.051 | 32.345 | 34.872 | 37.134 |
| 45 | 20.136 | 24.311 | 25.901 | 28.366 | 30.612 | 33.350 | 36.884 | 39.585 | 41.995 |
| 50 | 23.461 | 27.991 | 29.707 | 32.357 | 34.764 | 37.689 | 41.449 | 44.313 | 46.864 |
| 60 | 30.340 | 35.535 | 37.485 | 40.482 | 43.188 | 46.459 | 50.641 | 53.809 | 56.620 |
| 70 | 37.467 | 43.275 | 45.442 | 48.758 | 51.739 | 55.329 | 59.898 | 63.346 | 66.396 |
| 80 | 44.791 | 51.172 | 53.540 | 57.153 | 60.391 | 64.278 | 69.207 | 72.915 | 76.188 |
| 90 | 52.276 | 59.196 | 61.754 | 65.647 | 69.126 | 73.291 | 78.558 | 82.511 | 85.993 |
| 100 | 59.897 | 67.328 | 70.065 | 74.222 | 77.930 | 82.358 | 87.945 | 92.129 | 95.808 |
| 120 | 75.468 | 83.852 | 86.924 | 91.573 | 95.705 | 100.624 | 106.806 | 111.419 | 115.465 |
| 140 | 91.393 | 100.655 | 104.035 | 109.137 | 113.659 | 119.029 | 125.758 | 130.766 | 135.149 |
| 160 | 107.598 | 117.680 | 121.346 | 126.870 | 131.756 | 137.546 | 144.783 | 150.158 | 154.856 |
| 180 | 124.033 | 134.885 | 138.821 | 144.741 | 149.969 | 156.153 | 163.868 | 169.588 | 174.580 |
| 200 | 140.661 | 152.241 | 156.432 | 162.728 | 168.279 | 174.835 | 183.003 | 189.049 | 194.319 |

Tabla A-6 (continuación)

PERCENTILES DE LA DISITRIBUCION JI-CUADRADO

| v/f | $\chi^2_{0.50}$ | $\chi^2_{0.60}$ | $\chi^2_{0.70}$ | $\chi^2_{0.80}$ | $\chi^2_{0.90}$ | $\chi^2_{0.95}$ | $\chi^2_{0.975}$ | $\chi^2_{0.99}$ | $\chi^2_{0.995}$ | $\chi^2_{0.9995}$ |
|-------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|-----------------|------------------|-------------------|
| 1 | 0.455 | 0.708 | 1.074 | 1.642 | 2.706 | 3.831 | 5.024 | 6.635 | 7.879 | 12.116 |
| 2 | 1.386 | 1.833 | 2.458 | 3.219 | 4.605 | 5.991 | 7.378 | 9.210 | 10.597 | 15.202 |
| 3 | 2.366 | 2.946 | 3.665 | 4.642 | 6.251 | 7.815 | 9.348 | 11.345 | 12.838 | 17.730 |
| 4 | 3.357 | 4.045 | 4.878 | 5.889 | 7.779 | 9.488 | 11.143 | 13.277 | 14.860 | 19.998 |
| 5 | 4.351 | 5.132 | 6.064 | 7.289 | 9.216 | 11.070 | 12.832 | 15.086 | 16.750 | 22.105 |
| 6 | 5.348 | 6.211 | 7.231 | 8.588 | 10.645 | 12.592 | 14.449 | 16.812 | 18.548 | 24.103 |
| 7 | 6.346 | 7.283 | 8.383 | 9.803 | 12.017 | 14.067 | 16.013 | 18.475 | 20.278 | 26.018 |
| 8 | 7.344 | 8.351 | 9.524 | 11.030 | 13.362 | 15.507 | 17.535 | 20.090 | 21.955 | 27.868 |
| 9 | 8.343 | 9.414 | 10.656 | 12.242 | 14.684 | 16.919 | 19.023 | 21.666 | 23.589 | 29.666 |
| 10 | 9.342 | 10.473 | 11.781 | 13.442 | 15.987 | 18.307 | 20.483 | 23.709 | 25.188 | 31.419 |
| 11 | 10.341 | 11.530 | 12.899 | 14.631 | 17.275 | 19.678 | 21.126 | 23.723 | 26.757 | 33.136 |
| 12 | 11.340 | 12.584 | 14.011 | 15.812 | 18.519 | 21.026 | 23.536 | 26.217 | 28.300 | 34.821 |
| 13 | 12.340 | 13.636 | 15.119 | 16.985 | 19.812 | 22.362 | 24.736 | 27.688 | 29.819 | 36.478 |
| 14 | 13.339 | 14.685 | 16.222 | 18.151 | 21.064 | 23.665 | 26.119 | 29.141 | 31.319 | 38.109 |
| 15 | 14.339 | 15.733 | 17.322 | 19.311 | 22.367 | 24.996 | 27.438 | 30.578 | 32.601 | 39.719 |
| 16 | 15.338 | 16.780 | 18.418 | 20.465 | 23.532 | 26.420 | 28.845 | 32.620 | 34.267 | 41.308 |
| 17 | 16.338 | 17.824 | 19.511 | 21.615 | 24.769 | 27.887 | 30.491 | 33.699 | 35.718 | 42.879 |
| 18 | 17.338 | 18.868 | 20.601 | 22.760 | 26.982 | 28.869 | 31.526 | 34.805 | 37.156 | 44.434 |
| 19 | 18.338 | 19.910 | 21.689 | 23.960 | 27.104 | 30.144 | 32.852 | 36.191 | 38.582 | 45.973 |
| 20 | 19.337 | 20.951 | 22.775 | 25.048 | 27.312 | 31.410 | 34.170 | 37.565 | 39.997 | 47.498 |
| 21 | 20.337 | 21.991 | 23.858 | 26.141 | 29.455 | 32.671 | 35.479 | 38.932 | 41.301 | 49.010 |
| 22 | 21.337 | 23.031 | 24.939 | 27.991 | 30.813 | 33.524 | 36.781 | 40.283 | 42.796 | 50.511 |
| 23 | 22.337 | 24.069 | 26.918 | 28.122 | 31.007 | 35.172 | 38.976 | 41.638 | 44.181 | 52.000 |
| 24 | 23.337 | 25.106 | 27.936 | 30.583 | 32.496 | 36.943 | 39.564 | 42.980 | 45.558 | 53.479 |
| 25 | 24.337 | 26.143 | 28.117 | 30.775 | 33.382 | 37.452 | 40.446 | 43.314 | 46.928 | 54.947 |
| 26 | 25.336 | 27.179 | 29.136 | 31.995 | 35.763 | 39.885 | 43.573 | 45.642 | 48.290 | 56.407 |
| 27 | 26.336 | 28.214 | 30.119 | 32.412 | 36.541 | 37.143 | 47.194 | 48.503 | 48.645 | 57.858 |
| 28 | 27.336 | 29.249 | 31.391 | 33.627 | 39.246 | 41.251 | 44.491 | 48.278 | 50.993 | 59.300 |
| 29 | 28.336 | 30.283 | 32.461 | 35.109 | 37.481 | 42.810 | 45.727 | 49.758 | 52.336 | 60.734 |
| 30 | 29.336 | 31.318 | 33.530 | 36.763 | 41.756 | 45.773 | 47.753 | 50.362 | 53.672 | 62.161 |
| 35 | 33.336 | 36.476 | 38.859 | 41.748 | 48.459 | 49.892 | 53.203 | 57.347 | 60.275 | 69.198 |
| 40 | 36.335 | 41.672 | 44.165 | 47.720 | 51.965 | 55.743 | 59.742 | 63.091 | 66.766 | 76.095 |
| 45 | 40.335 | 46.361 | 49.452 | 52.729 | 57.355 | 61.656 | 65.410 | 69.657 | 73.166 | 82.876 |
| 50 | 44.335 | 51.892 | 54.723 | 58.164 | 63.167 | 67.505 | 71.470 | 76.154 | 79.490 | 89.561 |
| 60 | 53.335 | 62.155 | 65.226 | 68.972 | 74.397 | 79.082 | 83.138 | 88.119 | 91.952 | 102.695 |
| 70 | 69.334 | 72.358 | 75.689 | 79.715 | 85.527 | 90.531 | 95.623 | 100.425 | 104.215 | 115.577 |
| 80 | 79.334 | 82.566 | 86.120 | 90.405 | 96.578 | 101.879 | 106.629 | 112.329 | 116.321 | 128.261 |
| 90 | 89.334 | 92.761 | 96.524 | 101.054 | 107.565 | 113.145 | 118.136 | 124.416 | 128.299 | 140.783 |
| 100 | 99.334 | 102.946 | 106.906 | 111.667 | 118.498 | 124.342 | 129.561 | 135.806 | 140.169 | 153.165 |
| 120 | 119.334 | 123.289 | 127.616 | 132.806 | 140.233 | 146.567 | 152.211 | 158.950 | 163.648 | 177.602 |
| 140 | 139.334 | 143.604 | 148.269 | 153.854 | 161.827 | 168.613 | 174.648 | 181.840 | 186.846 | 201.682 |
| 160 | 159.334 | 163.898 | 168.876 | 174.828 | 183.311 | 190.516 | 196.915 | 204.530 | 209.824 | 225.480 |
| 180 | 179.334 | 184.173 | 189.446 | 195.743 | 204.704 | 212.304 | 219.044 | 227.056 | 232.620 | 249.048 |
| 200 | 199.334 | 204.434 | 209.985 | 216.609 | 226.021 | 235.994 | 241.058 | 249.445 | 255.264 | 272.422 |

* Los datos de esta tabla se han tomado, con permiso, de *Bruchmata Geigy Scientific Tables*, 6th Ed., pp. 36-39, Geigy Pocess Criticals, Division of Geigy Chemical Corporation, Ardsley, N.Y. and Hald, A. and Snedecor, S.A., "A Table of Percentage Points of the χ^2 -Distributions", *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 33, 168-175, 1950.

Tabela A²
 ORACIONES DE LA DISCRECIÓN $F_{\nu, \text{dis}}$

| f_2 | f_1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 4053* | 5469* | 5494* | 5615* | 5639* | 5657* | 5679* | 5697* | 5715* | 5733* |
| 2 | 998.5 | 999.0 | 999.2 | 999.3 | 999.3 | 999.3 | 999.4 | 999.4 | 999.4 | 999.4 |
| 3 | 167.0 | 168.5 | 169.1 | 170.1 | 170.2 | 170.2 | 170.3 | 170.3 | 170.3 | 170.3 |
| 4 | 44.14 | 45.55 | 46.98 | 48.42 | 49.75 | 50.75 | 51.75 | 52.75 | 53.75 | 54.75 |
| 5 | 47.18 | 47.52 | 48.20 | 48.69 | 49.75 | 50.75 | 51.75 | 52.75 | 53.75 | 54.75 |
| 6 | 35.51 | 27.00 | 23.70 | 21.92 | 20.81 | 20.61 | 19.46 | 19.09 | 18.69 | 18.33 |
| 7 | 29.25 | 21.69 | 18.77 | 17.19 | 16.21 | 15.52 | 15.02 | 14.63 | 14.33 | 14.03 |
| 8 | 25.42 | 18.69 | 15.83 | 15.39 | 15.39 | 15.39 | 15.39 | 15.39 | 15.39 | 15.39 |
| 9 | 22.86 | 16.89 | 15.90 | 15.54 | 15.54 | 15.54 | 15.54 | 15.54 | 15.54 | 15.54 |
| 10 | 21.04 | 14.91 | 12.55 | 12.58 | 12.58 | 12.58 | 12.58 | 12.58 | 12.58 | 12.58 |
| 11 | 19.69 | 13.81 | 11.56 | 10.35 | 9.58 | 9.08 | 8.66 | 8.35 | 8.12 | 7.91 |
| 12 | 18.64 | 12.97 | 10.80 | 9.63 | 8.59 | 8.38 | 8.00 | 7.71 | 7.48 | 7.24 |
| 13 | 17.81 | 12.31 | 10.25 | 9.17 | 8.12 | 7.86 | 7.49 | 7.21 | 6.98 | 6.74 |
| 14 | 17.14 | 11.78 | 9.72 | 8.71 | 7.92 | 7.67 | 7.08 | 6.80 | 6.58 | 6.34 |
| 15 | 16.59 | 11.34 | 9.34 | 8.25 | 7.57 | 7.09 | 6.74 | 6.47 | 6.26 | 5.99 |
| 16 | 16.12 | 10.97 | 9.00 | 7.94 | 7.27 | 6.84 | 6.45 | 6.16 | 5.88 | 5.60 |
| 17 | 15.72 | 10.66 | 8.73 | 7.68 | 7.02 | 6.56 | 6.22 | 5.96 | 5.75 | 5.56 |
| 18 | 15.38 | 10.39 | 8.59 | 7.56 | 7.02 | 6.55 | 6.22 | 5.96 | 5.75 | 5.56 |
| 19 | 15.08 | 10.16 | 8.36 | 7.36 | 6.82 | 6.45 | 6.18 | 5.92 | 5.71 | 5.51 |
| 20 | 14.82 | 9.95 | 8.10 | 7.10 | 6.46 | 6.02 | 5.69 | 5.44 | 5.24 | 5.04 |
| 21 | 14.59 | 9.77 | 7.94 | 6.95 | 6.32 | 5.98 | 5.66 | 5.34 | 5.11 | 4.89 |
| 22 | 14.38 | 9.61 | 7.80 | 6.83 | 6.19 | 5.84 | 5.51 | 5.19 | 4.96 | 4.73 |
| 23 | 14.19 | 9.47 | 7.67 | 6.68 | 6.08 | 5.74 | 5.41 | 5.08 | 4.86 | 4.63 |
| 24 | 14.03 | 9.34 | 7.55 | 6.56 | 5.96 | 5.62 | 5.29 | 4.96 | 4.73 | 4.50 |
| 25 | 13.88 | 9.22 | 7.45 | 6.49 | 5.88 | 5.54 | 5.21 | 4.88 | 4.65 | 4.42 |
| 26 | 13.74 | 9.12 | 7.34 | 6.41 | 5.80 | 5.47 | 5.14 | 4.81 | 4.58 | 4.35 |
| 27 | 13.61 | 9.02 | 7.27 | 6.37 | 5.73 | 5.40 | 5.07 | 4.74 | 4.51 | 4.28 |
| 28 | 13.50 | 8.93 | 7.14 | 6.25 | 5.60 | 5.27 | 4.94 | 4.61 | 4.38 | 4.15 |
| 29 | 13.39 | 8.83 | 7.02 | 6.12 | 5.49 | 5.16 | 4.83 | 4.50 | 4.27 | 4.04 |
| 30 | 13.29 | 8.77 | 6.95 | 5.92 | 5.33 | 5.12 | 4.80 | 4.47 | 4.24 | 3.99 |
| 40 | 12.61 | 8.25 | 6.69 | 5.70 | 5.13 | 4.73 | 4.31 | 3.90 | 3.60 | 3.29 |
| 60 | 11.97 | 7.76 | 6.17 | 5.21 | 4.76 | 4.37 | 3.95 | 3.54 | 3.23 | 2.82 |
| 120 | 11.38 | 7.32 | 5.79 | 4.83 | 4.42 | 4.04 | 3.64 | 3.23 | 2.82 | 2.41 |
| ∞ | 10.83 | 6.91 | 5.45 | 4.50 | 4.10 | 3.70 | 3.30 | 2.89 | 2.48 | 2.07 |

* Valores por 100 estímulos.

 n es el número de estímulos utilizados en el experimento.
 f_2 es el número de grados de libertad en el denominador.

 La tasa de $F_{\nu, \text{dis}}$ para G_1 es menor que para G_2 .

 Referencia de $F_{\nu, \text{dis}}$ para G_1 y G_2 en la tabla de F de Snedecor.

$F_{0.999}$

| f_1 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| f_2 | | | | | | | | | | |
| 1 | 6056* | 6107* | 6158* | 6209* | 6235* | 6161* | 6287* | 6313* | 6340* | 6366* |
| 2 | 999.4 | 999.4 | 999.4 | 999.4 | 999.5 | 999.5 | 999.5 | 999.5 | 999.5 | 999.5 |
| 3 | 129.2 | 128.3 | 127.4 | 126.4 | 125.9 | 125.4 | 125.0 | 124.5 | 124.0 | 123.5 |
| 4 | 48.05 | 48.41 | 46.76 | 46.10 | 45.77 | 45.43 | 45.09 | 44.75 | 44.40 | 44.05 |
| 5 | 26.42 | 26.91 | 25.39 | 25.14 | 24.87 | 24.60 | 24.33 | 24.06 | 23.79 | 23.79 |
| 6 | 18.41 | 17.99 | 17.56 | 17.12 | 16.89 | 16.67 | 16.44 | 16.21 | 15.99 | 15.75 |
| 7 | 14.08 | 13.71 | 13.32 | 12.93 | 12.73 | 12.53 | 12.33 | 12.12 | 11.91 | 11.70 |
| 8 | 11.54 | 11.19 | 10.84 | 10.48 | 10.30 | 10.11 | 9.92 | 9.73 | 9.53 | 9.33 |
| 9 | 9.89 | 9.57 | 9.24 | 8.90 | 8.72 | 8.55 | 8.37 | 8.19 | 8.00 | 7.81 |
| 10 | 8.75 | 8.45 | 8.13 | 7.80 | 7.64 | 7.47 | 7.30 | 7.12 | 6.94 | 6.76 |
| 11 | 7.92 | 7.63 | 7.32 | 7.01 | 6.85 | 6.68 | 6.52 | 6.35 | 6.17 | 6.00 |
| 12 | 7.29 | 7.00 | 6.71 | 6.40 | 6.25 | 6.09 | 5.93 | 5.76 | 5.59 | 5.42 |
| 13 | 6.80 | 6.52 | 6.23 | 5.93 | 5.78 | 5.63 | 5.47 | 5.30 | 5.14 | 4.97 |
| 14 | 6.40 | 6.13 | 5.85 | 5.56 | 5.41 | 5.25 | 5.10 | 4.94 | 4.77 | 4.60 |
| 15 | 6.08 | 5.81 | 5.54 | 5.25 | 5.10 | 4.95 | 4.80 | 4.64 | 4.47 | 4.31 |
| 16 | 5.81 | 5.55 | 5.27 | 4.99 | 4.85 | 4.70 | 4.54 | 4.39 | 4.23 | 4.06 |
| 17 | 5.58 | 5.32 | 5.05 | 4.78 | 4.63 | 4.48 | 4.33 | 4.18 | 4.02 | 3.85 |
| 18 | 5.39 | 5.13 | 4.87 | 4.59 | 4.45 | 4.30 | 4.15 | 4.00 | 3.84 | 3.67 |
| 19 | 5.22 | 4.97 | 4.70 | 4.43 | 4.29 | 4.14 | 3.99 | 3.84 | 3.68 | 3.51 |
| 20 | 5.08 | 4.82 | 4.56 | 4.29 | 4.15 | 4.00 | 3.86 | 3.70 | 3.54 | 3.38 |
| 21 | 4.95 | 4.70 | 4.44 | 4.17 | 4.03 | 3.88 | 3.74 | 3.58 | 3.42 | 3.26 |
| 22 | 4.83 | 4.58 | 4.33 | 4.06 | 3.92 | 3.78 | 3.63 | 3.48 | 3.32 | 3.15 |
| 23 | 4.73 | 4.48 | 4.23 | 3.96 | 3.82 | 3.68 | 3.53 | 3.38 | 3.22 | 3.05 |
| 24 | 4.64 | 4.39 | 4.14 | 3.87 | 3.74 | 3.59 | 3.45 | 3.29 | 3.14 | 2.97 |
| 25 | 4.56 | 4.31 | 4.06 | 3.79 | 3.66 | 3.52 | 3.37 | 3.22 | 3.06 | 2.89 |
| 26 | 4.48 | 4.24 | 3.99 | 3.72 | 3.59 | 3.44 | 3.30 | 3.15 | 2.99 | 2.82 |
| 27 | 4.41 | 4.17 | 3.92 | 3.66 | 3.52 | 3.38 | 3.23 | 3.08 | 2.92 | 2.75 |
| 28 | 4.35 | 4.11 | 3.86 | 3.60 | 3.46 | 3.32 | 3.18 | 3.02 | 2.86 | 2.69 |
| 29 | 4.29 | 4.05 | 3.80 | 3.54 | 3.41 | 3.27 | 3.12 | 2.97 | 2.81 | 2.64 |
| 30 | 4.24 | 4.00 | 3.75 | 3.49 | 3.36 | 3.22 | 3.07 | 2.92 | 2.76 | 2.59 |
| 40 | 3.87 | 3.64 | 3.40 | 3.15 | 3.01 | 2.87 | 2.73 | 2.57 | 2.41 | 2.23 |
| 60 | 3.54 | 3.31 | 3.08 | 2.83 | 2.69 | 2.55 | 2.41 | 2.25 | 2.08 | 1.89 |
| 120 | 3.24 | 3.02 | 2.78 | 2.53 | 2.40 | 2.26 | 2.11 | 1.95 | 1.76 | 1.54 |
| ∞ | 2.96 | 2.74 | 2.51 | 2.27 | 2.13 | 1.99 | 1.84 | 1.66 | 1.45 | 1.00 |

Tabla A-7 (*continuación*)

PERCENTILES DE LA DISTRIBUCION F
 $F_{0.995}$

| f_1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| f_2 | | | | | | | | | |
| 1 | 16211 | 20000 | 21615 | 22500 | 23056 | 23437 | 23715 | 23925 | 24091 |
| 2 | 198.5 | 199.0 | 199.2 | 199.2 | 199.3 | 199.3 | 199.4 | 199.4 | 199.4 |
| 3 | 55.5 | 49.80 | 47.47 | 46.19 | 45.39 | 44.84 | 44.43 | 44.13 | 43.88 |
| 4 | 31.33 | 26.28 | 24.26 | 23.15 | 22.46 | 21.97 | 21.62 | 21.35 | 21.14 |
| 5 | 22.78 | 18.31 | 16.53 | 15.56 | 14.94 | 14.51 | 14.20 | 13.96 | 13.77 |
| 6 | 18.63 | 14.54 | 12.92 | 12.03 | 11.46 | 11.07 | 10.79 | 10.57 | 10.39 |
| 7 | 16.24 | 12.40 | 10.88 | 10.05 | 9.52 | 9.16 | 8.89 | 8.68 | 8.51 |
| 8 | 14.69 | 11.04 | 9.60 | 8.81 | 8.30 | 7.95 | 7.69 | 7.50 | 7.34 |
| 9 | 13.61 | 10.11 | 8.72 | 7.96 | 7.47 | 7.13 | 6.88 | 6.69 | 6.54 |
| 10 | 12.83 | 9.43 | 8.08 | 7.34 | 6.87 | 6.54 | 6.30 | 6.12 | 5.97 |
| 11 | 12.23 | 8.91 | 7.60 | 6.88 | 6.42 | 6.10 | 5.86 | 5.68 | 5.54 |
| 12 | 11.75 | 8.51 | 7.23 | 6.52 | 6.07 | 5.76 | 5.52 | 5.35 | 5.20 |
| 13 | 11.37 | 8.19 | 6.93 | 6.23 | 5.79 | 5.48 | 5.25 | 5.08 | 4.94 |
| 14 | 11.06 | 7.92 | 6.68 | 6.00 | 5.56 | 5.26 | 5.03 | 4.86 | 4.72 |
| 15 | 10.80 | 7.70 | 6.48 | 5.80 | 5.37 | 5.07 | 4.85 | 4.67 | 4.54 |
| 16 | 10.58 | 7.51 | 6.30 | 5.64 | 5.21 | 4.91 | 4.69 | 4.52 | 4.38 |
| 17 | 10.38 | 7.35 | 6.16 | 5.50 | 5.07 | 4.78 | 4.56 | 4.39 | 4.25 |
| 18 | 10.22 | 7.21 | 6.03 | 5.37 | 4.96 | 4.66 | 4.44 | 4.28 | 4.14 |
| 19 | 10.07 | 7.09 | 5.92 | 5.27 | 4.85 | 4.56 | 4.34 | 4.18 | 4.04 |
| 20 | 9.94 | 6.99 | 5.82 | 5.17 | 4.76 | 4.47 | 4.26 | 4.09 | 3.96 |
| 21 | 9.83 | 6.89 | 5.73 | 5.09 | 4.68 | 4.39 | 4.18 | 4.01 | 3.88 |
| 22 | 9.73 | 6.81 | 5.65 | 5.02 | 4.61 | 4.32 | 4.11 | 3.94 | 3.81 |
| 23 | 9.63 | 6.73 | 5.58 | 4.95 | 4.54 | 4.26 | 4.05 | 3.88 | 3.75 |
| 24 | 9.55 | 6.66 | 5.52 | 4.89 | 4.49 | 4.20 | 3.99 | 3.83 | 3.69 |
| 25 | 9.48 | 6.60 | 5.46 | 4.84 | 4.43 | 4.15 | 3.94 | 3.78 | 3.64 |
| 26 | 9.41 | 6.54 | 5.41 | 4.79 | 4.38 | 4.10 | 3.89 | 3.73 | 3.60 |
| 27 | 9.34 | 6.49 | 5.36 | 4.74 | 4.34 | 4.06 | 3.85 | 3.69 | 3.56 |
| 28 | 9.28 | 6.44 | 5.32 | 4.70 | 4.30 | 4.02 | 3.81 | 3.65 | 3.52 |
| 29 | 9.23 | 6.40 | 5.28 | 4.66 | 4.26 | 3.98 | 3.77 | 3.61 | 3.48 |
| 30 | 9.18 | 6.35 | 5.24 | 4.62 | 4.23 | 3.95 | 3.74 | 3.58 | 3.45 |
| 40 | 8.83 | 6.07 | 4.98 | 4.37 | 3.99 | 3.71 | 3.51 | 3.35 | 3.22 |
| 60 | 8.49 | 5.79 | 4.73 | 4.14 | 3.76 | 3.49 | 3.29 | 3.13 | 3.01 |
| 120 | 8.18 | 5.54 | 4.50 | 3.92 | 3.55 | 3.28 | 3.09 | 2.93 | 2.81 |
| ∞ | 7.88 | 5.30 | 4.28 | 3.72 | 3.35 | 3.09 | 2.90 | 2.74 | 2.62 |

f_1 es el número de grados de libertad en el numerador.

f_2 es el número de grados de libertad en el denominador.

$F_{0.995}$

| f_1 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ | |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|-------|
| f_2 | 1 | 24224 | 24426 | 24630 | 24836 | 24940 | 25044 | 25148 | 25253 | 25359 | 25465 |
| 2 | 199.4 | 199.4 | 199.4 | 199.4 | 199.5 | 199.5 | 199.5 | 199.5 | 199.5 | 199.5 | 199.5 |
| 3 | 43.69 | 43.39 | 43.08 | 42.78 | 42.62 | 42.47 | 42.31 | 42.15 | 41.99 | 41.83 | 41.83 |
| 4 | 20.97 | 20.70 | 20.44 | 20.17 | 20.03 | 19.89 | 19.75 | 19.61 | 19.47 | 19.32 | 19.32 |
| 5 | 13.62 | 13.38 | 13.15 | 12.90 | 12.78 | 12.66 | 12.53 | 12.40 | 12.27 | 12.14 | 12.14 |
| 6 | 10.25 | 10.03 | 9.81 | 9.59 | 9.47 | 9.36 | 9.24 | 9.12 | 9.00 | 8.88 | 8.88 |
| 7 | 8.38 | 8.18 | 7.97 | 7.75 | 7.65 | 7.53 | 7.42 | 7.31 | 7.19 | 7.08 | 7.08 |
| 8 | 7.21 | 7.01 | 6.81 | 6.61 | 6.50 | 6.40 | 6.29 | 6.18 | 6.06 | 5.95 | 5.95 |
| 9 | 6.42 | 6.23 | 6.03 | 5.83 | 5.73 | 5.62 | 5.52 | 5.41 | 5.30 | 5.19 | 5.19 |
| 10 | 5.85 | 5.66 | 5.47 | 5.27 | 5.17 | 5.07 | 4.97 | 4.86 | 4.75 | 4.64 | 4.64 |
| 11 | 5.42 | 5.24 | 5.05 | 4.86 | 4.76 | 4.65 | 4.55 | 4.44 | 4.34 | 4.23 | 4.23 |
| 12 | 5.09 | 4.91 | 4.72 | 4.53 | 4.43 | 4.33 | 4.23 | 4.12 | 4.01 | 3.90 | 3.90 |
| 13 | 4.82 | 4.64 | 4.46 | 4.27 | 4.17 | 4.07 | 3.97 | 3.87 | 3.76 | 3.65 | 3.65 |
| 14 | 4.60 | 4.43 | 4.25 | 4.06 | 3.96 | 3.86 | 3.76 | 3.66 | 3.55 | 3.44 | 3.44 |
| 15 | 4.42 | 4.25 | 4.07 | 3.88 | 3.79 | 3.69 | 3.58 | 3.48 | 3.37 | 3.26 | 3.26 |
| 16 | 4.27 | 4.10 | 3.92 | 3.73 | 3.64 | 3.54 | 3.44 | 3.33 | 3.22 | 3.11 | 3.11 |
| 17 | 4.14 | 3.97 | 3.79 | 3.61 | 3.51 | 3.41 | 3.31 | 3.21 | 3.10 | 2.98 | 2.98 |
| 18 | 4.03 | 3.86 | 3.68 | 3.50 | 3.40 | 3.30 | 3.20 | 3.10 | 2.90 | 2.87 | 2.87 |
| 19 | 3.93 | 3.76 | 3.59 | 3.40 | 3.31 | 3.21 | 3.11 | 3.00 | 2.89 | 2.89 | 2.89 |
| 20 | 3.85 | 3.68 | 3.50 | 3.32 | 3.22 | 3.12 | 3.02 | 2.92 | 2.81 | 2.69 | 2.69 |
| 21 | 3.77 | 3.60 | 3.43 | 3.24 | 3.15 | 3.05 | 2.95 | 2.84 | 2.73 | 2.61 | 2.61 |
| 22 | 3.70 | 3.54 | 3.36 | 3.18 | 3.08 | 2.98 | 2.88 | 2.77 | 2.66 | 2.55 | 2.55 |
| 23 | 3.64 | 3.47 | 3.30 | 3.12 | 3.02 | 2.92 | 2.82 | 2.71 | 2.60 | 2.48 | 2.48 |
| 24 | 3.59 | 3.42 | 3.25 | 3.06 | 2.97 | 2.87 | 2.77 | 2.66 | 2.55 | 2.43 | 2.43 |
| 25 | 3.54 | 3.37 | 3.20 | 3.01 | 2.92 | 2.82 | 2.72 | 2.61 | 2.50 | 2.38 | 2.38 |
| 26 | 3.49 | 3.33 | 3.15 | 2.97 | 2.87 | 2.77 | 2.67 | 2.56 | 2.45 | 2.33 | 2.33 |
| 27 | 3.45 | 3.28 | 3.11 | 2.93 | 2.83 | 2.73 | 2.63 | 2.52 | 2.41 | 2.29 | 2.29 |
| 28 | 3.41 | 3.25 | 3.07 | 2.89 | 2.79 | 2.69 | 2.59 | 2.48 | 2.37 | 2.25 | 2.25 |
| 29 | 3.38 | 3.21 | 3.04 | 2.86 | 2.76 | 2.66 | 2.56 | 2.45 | 2.33 | 2.21 | 2.21 |
| 30 | 3.34 | 3.18 | 3.01 | 2.82 | 2.73 | 2.63 | 2.52 | 2.42 | 2.30 | 2.18 | 2.18 |
| 40 | 3.12 | 2.95 | 2.78 | 2.60 | 2.50 | 2.40 | 2.30 | 2.18 | 2.06 | 1.93 | 1.93 |
| 60 | 2.90 | 2.74 | 2.57 | 2.39 | 2.19 | 2.09 | 1.98 | 1.87 | 1.75 | 1.61 | 1.61 |
| 120 | 2.71 | 2.54 | 2.37 | 2.19 | 2.00 | 1.90 | 1.79 | 1.67 | 1.53 | 1.36 | 1.00 |
| ∞ | 2.52 | 2.36 | 2.19 | 2.00 | 1.90 | 1.79 | 1.67 | 1.53 | 1.36 | 1.00 | 1.00 |

Tábla A-7 (continuacióñ)
 PERCENTILES DE LA DISTRIBUCION F
 $F_{0.99}$

| f_1 | f_2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|----------|-------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 4052 | 4999.5 | 5403 | 5625 | 5764 | 5859 | 5928 | 5981 | 6022 | 6079 |
| 2 | 98.30 | 99.30 | 99.17 | 99.25 | 99.33 | 99.36 | 99.37 | 99.39 | 99.39 | 99.39 |
| 3 | 34.12 | 30.82 | 29.46 | 28.71 | 28.24 | 27.91 | 27.49 | 27.35 | 27.35 | 27.35 |
| 4 | 21.20 | 18.00 | 16.69 | 15.98 | 15.52 | 15.21 | 14.98 | 14.55 | 14.55 | 14.55 |
| 5 | 16.26 | 13.27 | 12.06 | 11.39 | 10.97 | 10.67 | 10.46 | 10.16 | 10.16 | 10.16 |
| 6 | 13.75 | 10.92 | 9.78 | 9.15 | 8.75 | 8.47 | 8.26 | 8.10 | 7.98 | 7.98 |
| 7 | 12.25 | 9.55 | 8.45 | 7.85 | 7.46 | 7.19 | 6.99 | 6.84 | 6.72 | 6.72 |
| 8 | 11.26 | 8.65 | 7.59 | 7.01 | 6.63 | 6.37 | 6.18 | 6.03 | 5.91 | 5.91 |
| 9 | 10.56 | 8.02 | 6.99 | 6.42 | 6.06 | 5.80 | 5.61 | 5.47 | 5.35 | 5.35 |
| 10 | 10.04 | 7.56 | 6.55 | 5.99 | 5.64 | 5.39 | 5.20 | 5.06 | 4.94 | 4.94 |
| 11 | 9.55 | 7.21 | 6.22 | 5.67 | 5.32 | 5.07 | 4.89 | 4.74 | 4.63 | 4.63 |
| 12 | 9.33 | 6.93 | 5.95 | 5.41 | 5.06 | 4.82 | 4.62 | 4.44 | 4.30 | 4.19 |
| 13 | 9.07 | 6.70 | 5.74 | 5.21 | 4.86 | 4.62 | 4.44 | 4.30 | 4.19 | 4.19 |
| 14 | 8.86 | 6.51 | 5.56 | 5.04 | 4.69 | 4.46 | 4.28 | 4.14 | 4.03 | 4.03 |
| 15 | 8.68 | 6.36 | 5.42 | 4.89 | 4.56 | 4.32 | 4.14 | 4.00 | 3.89 | 3.89 |
| 16 | 8.53 | 6.23 | 5.29 | 4.77 | 4.44 | 4.20 | 4.03 | 3.89 | 3.78 | 3.78 |
| 17 | 8.40 | 6.11 | 5.18 | 4.67 | 4.34 | 4.10 | 3.93 | 3.79 | 3.68 | 3.68 |
| 18 | 8.29 | 6.01 | 5.09 | 4.58 | 4.25 | 4.01 | 3.84 | 3.71 | 3.60 | 3.60 |
| 19 | 8.18 | 5.93 | 5.01 | 4.50 | 4.17 | 3.94 | 3.77 | 3.63 | 3.52 | 3.52 |
| 20 | 8.10 | 5.85 | 4.94 | 4.43 | 4.10 | 3.87 | 3.70 | 3.56 | 3.46 | 3.46 |
| 21 | 8.02 | 5.78 | 4.87 | 4.37 | 4.04 | 3.81 | 3.64 | 3.51 | 3.40 | 3.40 |
| 22 | 7.95 | 5.72 | 4.82 | 4.31 | 3.99 | 3.76 | 3.59 | 3.45 | 3.35 | 3.35 |
| 23 | 7.88 | 5.66 | 4.76 | 4.26 | 3.94 | 3.71 | 3.54 | 3.41 | 3.30 | 3.30 |
| 24 | 7.82 | 5.61 | 4.79 | 4.22 | 3.90 | 3.67 | 3.50 | 3.36 | 3.26 | 3.26 |
| 25 | 7.77 | 5.57 | 4.68 | 4.18 | 3.85 | 3.63 | 3.46 | 3.32 | 3.22 | 3.22 |
| 26 | 7.72 | 5.53 | 4.64 | 4.14 | 3.82 | 3.59 | 3.42 | 3.29 | 3.18 | 3.18 |
| 27 | 7.68 | 5.49 | 4.60 | 4.11 | 3.78 | 3.56 | 3.39 | 3.26 | 3.15 | 3.15 |
| 28 | 7.64 | 5.45 | 4.57 | 4.07 | 3.75 | 3.53 | 3.36 | 3.23 | 3.12 | 3.12 |
| 29 | 7.60 | 5.42 | 4.54 | 4.04 | 3.73 | 3.50 | 3.33 | 3.20 | 3.09 | 3.09 |
| 30 | 7.56 | 5.39 | 4.51 | 4.02 | 3.70 | 3.47 | 3.30 | 3.17 | 3.07 | 3.07 |
| 40 | 7.31 | 5.18 | 4.31 | 3.83 | 3.51 | 3.29 | 3.12 | 2.99 | 2.89 | 2.89 |
| 60 | 7.08 | 4.98 | 4.13 | 3.65 | 3.34 | 3.12 | 2.95 | 2.82 | 2.72 | 2.72 |
| 120 | 6.85 | 4.79 | 3.95 | 3.48 | 3.17 | 2.96 | 2.79 | 2.66 | 2.56 | 2.56 |
| ∞ | 6.63 | 4.61 | 3.78 | 3.32 | 3.02 | 2.80 | 2.64 | 2.51 | 2.41 | 2.41 |

f_1 es el número de grados de libertad en el numerador.
 f_2 es el numero de grados de libertad en el denominador.

$F_{0.99}$

| f_1 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| f_2 | 6036 | 6106 | 6157 | 6209 | 6235 | 6261 | 6287 | 6313 | 6339 | 6366 |
| 1 | 99.40 | 99.42 | 99.43 | 99.45 | 99.46 | 99.47 | 99.47 | 99.48 | 99.49 | 99.50 |
| 2 | 27.23 | 27.05 | 26.87 | 26.69 | 26.50 | 26.41 | 26.32 | 26.22 | 26.13 | 26.13 |
| 3 | 14.37 | 14.20 | 14.02 | 13.93 | 13.84 | 13.75 | 13.65 | 13.56 | 13.46 | 13.46 |
| 4 | 10.05 | 9.89 | 9.72 | 9.55 | 9.47 | 9.38 | 9.29 | 9.20 | 9.11 | 9.02 |
| 5 | | | | | | | | | | |
| 6 | 7.87 | 7.72 | 7.56 | 7.40 | 7.31 | 7.23 | 7.14 | 7.06 | 6.97 | 6.88 |
| 7 | 6.62 | 6.47 | 6.31 | 6.16 | 6.07 | 5.99 | 5.91 | 5.82 | 5.74 | 5.65 |
| 8 | 5.81 | 5.67 | 5.52 | 5.36 | 5.28 | 5.20 | 5.12 | 5.03 | 4.95 | 4.86 |
| 9 | 5.26 | 5.11 | 4.96 | 4.81 | 4.73 | 4.65 | 4.57 | 4.48 | 4.40 | 4.31 |
| 10 | 4.85 | 4.71 | 4.56 | 4.41 | 4.33 | 4.25 | 4.17 | 4.08 | 4.00 | 3.91 |
| 11 | | | | | | | | | | |
| 12 | 4.54 | 4.40 | 4.25 | 4.10 | 4.02 | 3.94 | 3.86 | 3.78 | 3.69 | 3.60 |
| 13 | 4.30 | 4.16 | 4.01 | 3.86 | 3.78 | 3.70 | 3.62 | 3.54 | 3.45 | 3.36 |
| 14 | 3.94 | 3.86 | 3.82 | 3.66 | 3.59 | 3.51 | 3.43 | 3.34 | 3.25 | 3.17 |
| 15 | 3.80 | 3.67 | 3.52 | 3.43 | 3.35 | 3.27 | 3.18 | 3.09 | 3.00 | 2.87 |
| 16 | 3.69 | 3.55 | 3.41 | 3.26 | 3.18 | 3.10 | 3.02 | 2.93 | 2.84 | 2.75 |
| 17 | 3.59 | 3.46 | 3.31 | 3.16 | 3.08 | 3.00 | 2.92 | 2.83 | 2.75 | 2.65 |
| 18 | 3.51 | 3.37 | 3.23 | 3.08 | 3.00 | 2.92 | 2.84 | 2.75 | 2.66 | 2.57 |
| 19 | 3.43 | 3.30 | 3.15 | 3.00 | 2.92 | 2.84 | 2.76 | 2.67 | 2.58 | 2.49 |
| 20 | 3.37 | 3.23 | 3.09 | 2.94 | 2.86 | 2.78 | 2.69 | 2.61 | 2.52 | 2.42 |
| 21 | 3.31 | 3.17 | 3.03 | 2.88 | 2.80 | 2.72 | 2.64 | 2.55 | 2.46 | 2.36 |
| 22 | 3.26 | 3.12 | 2.98 | 2.83 | 2.75 | 2.67 | 2.58 | 2.50 | 2.40 | 2.31 |
| 23 | 3.21 | 3.07 | 2.93 | 2.78 | 2.70 | 2.62 | 2.54 | 2.45 | 2.35 | 2.26 |
| 24 | 3.17 | 3.03 | 2.89 | 2.74 | 2.66 | 2.58 | 2.49 | 2.40 | 2.31 | 2.21 |
| 25 | 3.13 | 2.99 | 2.85 | 2.70 | 2.62 | 2.54 | 2.45 | 2.36 | 2.27 | 2.17 |
| 26 | 3.09 | 2.96 | 2.81 | 2.66 | 2.58 | 2.47 | 2.42 | 2.33 | 2.23 | 2.13 |
| 27 | 3.06 | 2.93 | 2.78 | 2.63 | 2.55 | 2.47 | 2.38 | 2.29 | 2.20 | 2.10 |
| 28 | 3.03 | 2.90 | 2.75 | 2.60 | 2.52 | 2.44 | 2.35 | 2.26 | 2.17 | 2.06 |
| 29 | 3.00 | 2.87 | 2.73 | 2.57 | 2.49 | 2.41 | 2.33 | 2.23 | 2.14 | 2.03 |
| 30 | 2.98 | 2.84 | 2.70 | 2.55 | 2.47 | 2.39 | 2.30 | 2.21 | 2.11 | 2.01 |
| 40 | 2.80 | 2.66 | 2.52 | 2.37 | 2.29 | 2.20 | 2.11 | 2.02 | 1.92 | 1.80 |
| 60 | 2.63 | 2.50 | 2.35 | 2.20 | 2.12 | 2.03 | 1.94 | 1.84 | 1.73 | 1.60 |
| 120 | 2.47 | 2.34 | 2.19 | 2.03 | 1.95 | 1.86 | 1.76 | 1.66 | 1.53 | 1.38 |
| ∞ | 2.32 | 2.18 | 2.04 | 1.88 | 1.79 | 1.70 | 1.59 | 1.47 | 1.32 | 1.00 |

Tabla A-7 (*continuación*)

PERCENTILES DE LA DISTRIBUCIÓN F
 $F_{0.9^{\dagger}, 5}$

| f_1 | f_2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 647.8 | 799.5 | 864.2 | 899.2 | 921.8 | 937.1 | 948.2 | 956.7 | 963.3 | 963.3 |
| 2 | 38.51 | 39.00 | 39.17 | 39.25 | 39.30 | 39.33 | 39.36 | 39.39 | 39.39 | 39.39 |
| 3 | 17.44 | 16.04 | 15.14 | 14.88 | 14.73 | 14.62 | 14.54 | 14.47 | 14.47 | 14.47 |
| 4 | 12.22 | 10.65 | 9.98 | 9.60 | 9.36 | 9.20 | 9.07 | 8.98 | 8.90 | 8.90 |
| 5 | 10.01 | 8.43 | 7.76 | 7.39 | 7.15 | 6.98 | 6.85 | 6.76 | 6.68 | 6.68 |
| 6 | 8.81 | 7.26 | 6.60 | 6.23 | 5.99 | 5.82 | 5.70 | 5.60 | 5.52 | 5.52 |
| 7 | 8.07 | 6.54 | 5.89 | 5.52 | 5.29 | 5.12 | 4.99 | 4.90 | 4.82 | 4.82 |
| 8 | 7.57 | 6.06 | 5.42 | 5.05 | 4.82 | 4.65 | 4.53 | 4.43 | 4.36 | 4.36 |
| 9 | 7.21 | 5.71 | 5.08 | 4.72 | 4.48 | 4.32 | 4.20 | 4.10 | 4.03 | 4.03 |
| 10 | 6.94 | 5.46 | 4.83 | 4.47 | 4.24 | 4.07 | 3.95 | 3.85 | 3.78 | 3.78 |
| 11 | 6.72 | 5.26 | 4.63 | 4.28 | 4.04 | 3.88 | 3.76 | 3.66 | 3.59 | 3.59 |
| 12 | 6.55 | 5.10 | 4.47 | 4.12 | 3.89 | 3.73 | 3.61 | 3.51 | 3.44 | 3.44 |
| 13 | 6.41 | 4.97 | 4.35 | 4.00 | 3.77 | 3.60 | 3.48 | 3.39 | 3.31 | 3.31 |
| 14 | 6.30 | 4.86 | 4.24 | 3.89 | 3.66 | 3.50 | 3.38 | 3.29 | 3.21 | 3.21 |
| 15 | 6.20 | 4.77 | 4.15 | 3.80 | 3.58 | 3.41 | 3.29 | 3.20 | 3.12 | 3.12 |
| 16 | 6.12 | 4.69 | 4.08 | 3.73 | 3.50 | 3.34 | 3.22 | 3.12 | 3.05 | 3.05 |
| 17 | 6.04 | 4.62 | 4.01 | 3.66 | 3.44 | 3.28 | 3.16 | 3.06 | 2.98 | 2.98 |
| 18 | 5.98 | 4.56 | 3.95 | 3.61 | 3.38 | 3.22 | 3.10 | 3.01 | 2.93 | 2.93 |
| 19 | 5.92 | 4.51 | 3.90 | 3.56 | 3.33 | 3.17 | 3.05 | 2.96 | 2.88 | 2.88 |
| 20 | 5.87 | 4.46 | 3.86 | 3.51 | 3.29 | 3.13 | 3.01 | 2.91 | 2.84 | 2.84 |
| 21 | 5.83 | 4.42 | 3.82 | 3.48 | 3.25 | 3.09 | 2.97 | 2.87 | 2.80 | 2.80 |
| 22 | 5.79 | 4.38 | 3.78 | 3.44 | 3.22 | 3.05 | 2.93 | 2.84 | 2.76 | 2.76 |
| 23 | 5.75 | 4.35 | 3.75 | 3.41 | 3.18 | 3.02 | 2.90 | 2.81 | 2.73 | 2.73 |
| 24 | 5.72 | 4.32 | 3.72 | 3.38 | 3.15 | 2.99 | 2.87 | 2.78 | 2.70 | 2.70 |
| 25 | 5.69 | 4.29 | 3.69 | 3.35 | 3.13 | 2.97 | 2.85 | 2.75 | 2.68 | 2.68 |
| 26 | 5.66 | 4.27 | 3.67 | 3.33 | 3.10 | 2.94 | 2.82 | 2.73 | 2.65 | 2.65 |
| 27 | 5.63 | 4.24 | 3.65 | 3.31 | 3.08 | 2.92 | 2.80 | 2.71 | 2.63 | 2.63 |
| 28 | 5.61 | 4.22 | 3.63 | 3.29 | 3.06 | 2.90 | 2.78 | 2.69 | 2.61 | 2.61 |
| 29 | 5.59 | 4.20 | 3.61 | 3.27 | 3.04 | 2.88 | 2.76 | 2.67 | 2.59 | 2.59 |
| 30 | 5.57 | 4.18 | 3.59 | 3.25 | 3.03 | 2.87 | 2.75 | 2.65 | 2.57 | 2.57 |
| 40 | 5.42 | 4.05 | 3.46 | 3.13 | 2.90 | 2.74 | 2.62 | 2.53 | 2.45 | 2.45 |
| 60 | 5.29 | 3.93 | 3.34 | 3.01 | 2.79 | 2.63 | 2.51 | 2.41 | 2.33 | 2.33 |
| 120 | 5.15 | 3.80 | 3.23 | 2.89 | 2.67 | 2.52 | 2.39 | 2.30 | 2.22 | 2.22 |
| ∞ | 5.02 | 3.69 | 3.12 | 2.79 | 2.57 | 2.41 | 2.29 | 2.19 | 2.11 | 2.11 |

f_1 es el número de grados de libertad en el numerador.
 f_2 es el número de grados de libertad en el denominador.

*F*_{0.975}

| <i>f₁</i> | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
|----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| <i>f₂</i> | | | | | | | | | | |
| 1 | 968.6 | 976.7 | 986.9 | 993.1 | 997.2 | 1001 | 1006 | 1010 | 1014 | 1018 |
| 2 | 39.40 | 39.41 | 39.43 | 39.45 | 39.46 | 39.47 | 39.48 | 39.49 | 39.50 | 39.50 |
| 3 | 14.42 | 14.34 | 14.25 | 14.17 | 14.12 | 14.08 | 14.04 | 13.99 | 13.95 | 13.90 |
| 4 | 8.84 | 8.75 | 8.66 | 8.56 | 8.51 | 8.46 | 8.41 | 8.36 | 8.31 | 8.26 |
| 5 | 6.62 | 6.52 | 6.43 | 6.33 | 6.28 | 6.23 | 6.18 | 6.12 | 6.07 | 6.02 |
| 6 | 5.46 | 5.37 | 5.27 | 5.17 | 5.12 | 5.07 | 5.01 | 4.96 | 4.90 | 4.85 |
| 7 | 4.46 | 4.67 | 4.57 | 4.47 | 4.42 | 4.36 | 4.31 | 4.25 | 4.20 | 4.14 |
| 8 | 4.30 | 4.20 | 4.10 | 4.00 | 3.95 | 3.89 | 3.84 | 3.78 | 3.73 | 3.67 |
| 9 | 3.96 | 3.87 | 3.77 | 3.67 | 3.61 | 3.56 | 3.51 | 3.45 | 3.39 | 3.33 |
| 10 | 3.72 | 3.62 | 3.52 | 3.42 | 3.37 | 3.31 | 3.26 | 3.20 | 3.14 | 3.08 |
| 11 | 3.53 | 3.43 | 3.33 | 3.23 | 3.17 | 3.12 | 3.06 | 3.00 | 2.94 | 2.88 |
| 12 | 3.37 | 3.28 | 3.18 | 3.07 | 3.02 | 2.96 | 2.91 | 2.85 | 2.79 | 2.72 |
| 13 | 3.25 | 3.15 | 3.05 | 2.95 | 2.89 | 2.84 | 2.78 | 2.72 | 2.66 | 2.60 |
| 14 | 3.15 | 3.05 | 2.95 | 2.84 | 2.79 | 2.73 | 2.67 | 2.61 | 2.55 | 2.49 |
| 15 | 3.06 | 2.96 | 2.86 | 2.76 | 2.70 | 2.64 | 2.59 | 2.52 | 2.46 | 2.40 |
| 16 | 2.99 | 2.89 | 2.79 | 2.68 | 2.63 | 2.57 | 2.51 | 2.45 | 2.38 | 2.32 |
| 17 | 2.92 | 2.82 | 2.72 | 2.62 | 2.56 | 2.50 | 2.44 | 2.38 | 2.32 | 2.25 |
| 18 | 2.87 | 2.77 | 2.72 | 2.62 | 2.51 | 2.45 | 2.39 | 2.33 | 2.27 | 2.20 |
| 19 | 2.82 | 2.82 | 2.72 | 2.62 | 2.51 | 2.46 | 2.41 | 2.35 | 2.29 | 2.22 |
| 20 | 2.77 | 2.68 | 2.57 | 2.46 | 2.41 | 2.35 | 2.31 | 2.29 | 2.22 | 2.16 |
| 21 | 2.73 | 2.64 | 2.53 | 2.42 | 2.37 | 2.31 | 2.25 | 2.18 | 2.11 | 2.04 |
| 22 | 2.70 | 2.60 | 2.50 | 2.39 | 2.33 | 2.27 | 2.21 | 2.14 | 2.08 | 2.00 |
| 23 | 2.67 | 2.57 | 2.47 | 2.36 | 2.30 | 2.24 | 2.18 | 2.11 | 2.04 | 1.97 |
| 24 | 2.64 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.27 | 2.21 | 2.15 | 2.08 | 2.01 | 1.94 |
| 25 | 2.61 | 2.51 | 2.41 | 2.30 | 2.24 | 2.18 | 2.12 | 2.05 | 1.98 | 1.91 |
| 26 | 2.59 | 2.49 | 2.39 | 2.28 | 2.22 | 2.16 | 2.09 | 2.03 | 1.95 | 1.88 |
| 27 | 2.57 | 2.47 | 2.36 | 2.25 | 2.19 | 2.13 | 2.07 | 2.00 | 1.93 | 1.85 |
| 28 | 2.55 | 2.45 | 2.34 | 2.23 | 2.17 | 2.11 | 2.05 | 1.98 | 1.91 | 1.83 |
| 29 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 30 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 31 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 32 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 33 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 34 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 35 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 36 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 37 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 38 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 39 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 40 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 41 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 42 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 43 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 44 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 45 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 46 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 47 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 48 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 49 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 50 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 51 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 52 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 53 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 54 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 55 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 56 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 57 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 58 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 59 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 60 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 61 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 62 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 63 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 64 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 65 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 66 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 67 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 68 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 69 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 70 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 71 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 72 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 73 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 74 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 75 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 76 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 77 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 78 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 79 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 80 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 81 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 82 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 83 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 84 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 85 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 86 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 87 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 88 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 89 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 90 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 91 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 92 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 93 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 94 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 95 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 96 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 97 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 98 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 99 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 100 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 101 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 102 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 103 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 104 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 105 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 106 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 107 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 108 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 109 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 110 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 111 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 112 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 113 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 114 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 115 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 116 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | 2.09 | 2.03 | 1.96 | 1.89 | 1.81 |
| 117 | 2.54 | 2.44 | 2.33 | 2.21 | 2.15 | | | | | |

Tabla A-7 (continuación)

PERCENTILES DE LA DISTRIBUCION F

$F_{0.95}$

| f_1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| f_2 | | | | | | | | | |
| 1 | 161.4 | 199.5 | 215.7 | 224.6 | 230.2 | 234.0 | 236.8 | 238.9 | 240.5 |
| 2 | 18.51 | 19.00 | 19.16 | 19.25 | 19.30 | 19.33 | 19.35 | 19.37 | 19.38 |
| 3 | 10.13 | 9.55 | 9.28 | 9.12 | 9.01 | 8.94 | 8.89 | 8.85 | 8.81 |
| 4 | 7.71 | 6.94 | 6.59 | 6.39 | 6.26 | 6.16 | 6.09 | 6.04 | 6.00 |
| 5 | 6.61 | 5.79 | 5.41 | 5.19 | 5.05 | 4.95 | 4.88 | 4.82 | 4.77 |
| 6 | 5.99 | 5.14 | 4.76 | 4.53 | 4.39 | 4.28 | 4.21 | 4.15 | 4.10 |
| 7 | 5.59 | 4.74 | 4.35 | 4.12 | 3.97 | 3.87 | 3.79 | 3.73 | 3.68 |
| 8 | 5.32 | 4.46 | 4.07 | 3.84 | 3.69 | 3.58 | 3.50 | 3.44 | 3.39 |
| 9 | 5.12 | 4.26 | 3.86 | 3.63 | 3.48 | 3.37 | 3.29 | 3.23 | 3.18 |
| 10 | 4.96 | 4.10 | 3.71 | 3.48 | 3.33 | 3.22 | 3.14 | 3.07 | 3.02 |
| 11 | 4.84 | 3.98 | 3.59 | 3.36 | 3.20 | 3.09 | 3.01 | 2.95 | 2.90 |
| 12 | 4.75 | 3.89 | 3.49 | 3.26 | 3.11 | 3.00 | 2.91 | 2.85 | 2.80 |
| 13 | 4.67 | 3.81 | 3.41 | 3.18 | 3.03 | 2.92 | 2.83 | 2.77 | 2.71 |
| 14 | 4.60 | 3.74 | 3.34 | 3.11 | 2.96 | 2.85 | 2.76 | 2.70 | 2.65 |
| 15 | 4.54 | 3.68 | 3.29 | 3.06 | 2.90 | 2.79 | 2.71 | 2.64 | 2.59 |
| 16 | 4.49 | 3.63 | 3.24 | 3.01 | 2.85 | 2.74 | 2.66 | 2.59 | 2.54 |
| 17 | 4.45 | 3.59 | 3.20 | 2.96 | 2.81 | 2.70 | 2.61 | 2.55 | 2.49 |
| 18 | 4.41 | 3.55 | 3.16 | 2.93 | 2.77 | 2.66 | 2.58 | 2.51 | 2.46 |
| 19 | 4.38 | 3.52 | 3.13 | 2.90 | 2.74 | 2.63 | 2.54 | 2.48 | 2.42 |
| 20 | 4.35 | 3.49 | 3.10 | 2.87 | 2.71 | 2.60 | 2.51 | 2.45 | 2.39 |
| 21 | 4.32 | 3.47 | 3.07 | 2.84 | 2.68 | 2.57 | 2.49 | 2.42 | 2.37 |
| 22 | 4.30 | 3.44 | 3.05 | 2.82 | 2.66 | 2.55 | 2.46 | 2.40 | 2.34 |
| 23 | 4.28 | 3.42 | 3.03 | 2.80 | 2.64 | 2.53 | 2.44 | 2.37 | 2.32 |
| 24 | 4.26 | 3.40 | 3.01 | 2.78 | 2.62 | 2.51 | 2.42 | 2.36 | 2.30 |
| 25 | 4.24 | 3.39 | 2.99 | 2.76 | 2.60 | 2.49 | 2.40 | 2.34 | 2.28 |
| 26 | 4.23 | 3.37 | 2.98 | 2.74 | 2.59 | 2.47 | 2.39 | 2.32 | 2.27 |
| 27 | 4.21 | 3.35 | 2.96 | 2.73 | 2.57 | 2.46 | 2.37 | 2.31 | 2.25 |
| 28 | 4.20 | 3.34 | 2.95 | 2.71 | 2.56 | 2.45 | 2.36 | 2.29 | 2.24 |
| 29 | 4.18 | 3.33 | 2.93 | 2.70 | 2.55 | 2.43 | 2.35 | 2.28 | 2.22 |
| 30 | 4.17 | 3.32 | 2.92 | 1.69 | 2.53 | 2.42 | 2.33 | 2.27 | 2.21 |
| 40 | 4.08 | 3.23 | 2.84 | 2.61 | 2.45 | 2.34 | 2.25 | 2.18 | 2.12 |
| 60 | 4.00 | 3.15 | 2.76 | 2.53 | 2.37 | 2.25 | 2.17 | 2.10 | 2.04 |
| 120 | 3.92 | 3.07 | 2.68 | 2.45 | 2.29 | 2.17 | 2.09 | 2.02 | 1.96 |
| 00 | 3.84 | 3.00 | 2.60 | 2.37 | 2.21 | 2.10 | 2.01 | 1.94 | 1.88 |

 f_1 es el número de grados de libertad en el numerador. f_2 es el número de grados de libertad en el denominador.

$F_{0.95}$

| f_1 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ | |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|-------|
| f_2 | 1 | 241.9 | 243.9 | 245.9 | 248.0 | 249.1 | 250.1 | 251.1 | 252.2 | 255.3 | 254.3 |
| 2 | 19.40 | 19.41 | 19.43 | 19.45 | 19.45 | 19.46 | 19.47 | 19.48 | 19.49 | 19.50 | 19.50 |
| 3 | 8.79 | 8.74 | 8.70 | 8.66 | 8.64 | 8.62 | 8.59 | 8.57 | 8.55 | 8.53 | 8.53 |
| 4 | 5.96 | 5.91 | 5.86 | 5.80 | 5.77 | 5.75 | 5.72 | 5.69 | 5.66 | 5.63 | 5.63 |
| 5 | 4.74 | 4.68 | 4.62 | 4.56 | 4.53 | 4.50 | 4.46 | 4.43 | 4.40 | 4.36 | 4.36 |
| 6 | 4.06 | 4.00 | 3.94 | 3.87 | 3.84 | 3.81 | 3.77 | 3.74 | 3.70 | 3.67 | 3.67 |
| 7 | 3.64 | 3.57 | 3.51 | 3.44 | 3.41 | 3.38 | 3.34 | 3.30 | 3.27 | 3.23 | 3.23 |
| 9 | 3.35 | 3.28 | 3.22 | 3.15 | 3.12 | 3.08 | 3.04 | 3.01 | 2.97 | 2.93 | 2.93 |
| 9 | 3.14 | 3.07 | 3.01 | 2.94 | 2.90 | 2.86 | 2.83 | 2.79 | 2.75 | 2.71 | 2.71 |
| 10 | 2.98 | 2.91 | 2.85 | 2.77 | 2.74 | 2.70 | 2.66 | 2.62 | 2.58 | 2.54 | 2.54 |
| 11 | 2.85 | 2.79 | 2.72 | 2.65 | 2.61 | 2.57 | 2.53 | 2.49 | 2.45 | 2.40 | 2.40 |
| 12 | 2.75 | 2.69 | 2.62 | 2.54 | 2.51 | 2.47 | 2.43 | 2.38 | 2.34 | 2.30 | 2.30 |
| 13 | 2.67 | 2.60 | 2.53 | 2.46 | 2.42 | 2.39 | 2.34 | 2.30 | 2.25 | 2.21 | 2.21 |
| 14 | 2.60 | 2.53 | 2.46 | 2.39 | 2.35 | 2.31 | 2.27 | 2.22 | 2.18 | 2.13 | 2.13 |
| 15 | 2.54 | 2.48 | 2.40 | 2.33 | 2.29 | 2.25 | 2.20 | 2.16 | 2.11 | 2.07 | 2.07 |
| 16 | 2.49 | 2.42 | 2.35 | 2.28 | 2.24 | 2.19 | 2.15 | 2.11 | 2.06 | 2.01 | 2.01 |
| 17 | 2.45 | 2.38 | 2.31 | 2.23 | 2.19 | 2.15 | 2.11 | 2.06 | 2.01 | 1.96 | 1.96 |
| 18 | 2.41 | 2.34 | 2.27 | 2.19 | 2.15 | 2.11 | 2.07 | 2.03 | 1.97 | 1.92 | 1.92 |
| 19 | 2.38 | 2.31 | 2.23 | 2.16 | 2.11 | 2.07 | 2.03 | 1.98 | 1.93 | 1.88 | 1.88 |
| 20 | 2.35 | 2.28 | 2.20 | 2.12 | 2.08 | 2.04 | 1.99 | 1.95 | 1.90 | 1.84 | 1.84 |
| 21 | 2.32 | 2.25 | 2.18 | 2.10 | 2.05 | 2.01 | 1.96 | 1.92 | 1.87 | 1.81 | 1.81 |
| 22 | 2.30 | 2.23 | 2.15 | 2.07 | 2.03 | 1.98 | 1.94 | 1.89 | 1.84 | 1.78 | 1.78 |
| 23 | 2.27 | 2.20 | 2.13 | 2.05 | 2.01 | 1.96 | 1.91 | 1.86 | 1.81 | 1.76 | 1.76 |
| 24 | 2.25 | 2.18 | 2.11 | 2.03 | 1.98 | 1.94 | 1.89 | 1.84 | 1.79 | 1.73 | 1.73 |
| 25 | 2.24 | 2.16 | 2.09 | 2.01 | 1.96 | 1.92 | 1.87 | 1.82 | 1.77 | 1.71 | 1.71 |
| 26 | 2.22 | 2.15 | 2.07 | 1.99 | 1.95 | 1.90 | 1.85 | 1.80 | 1.75 | 1.69 | 1.69 |
| 27 | 2.20 | 2.13 | 2.06 | 1.97 | 1.93 | 1.88 | 1.84 | 1.79 | 1.73 | 1.67 | 1.67 |
| 28 | 2.19 | 2.12 | 2.04 | 1.96 | 1.91 | 1.87 | 1.82 | 1.77 | 1.71 | 1.65 | 1.65 |
| 29 | 2.18 | 2.10 | 2.03 | 1.94 | 1.90 | 1.85 | 1.81 | 1.75 | 1.70 | 1.64 | 1.64 |
| 30 | 2.16 | 2.09 | 2.01 | 1.93 | 1.89 | 1.84 | 1.79 | 1.74 | 1.68 | 1.62 | 1.62 |
| 40 | 2.08 | 2.00 | 1.92 | 1.84 | 1.75 | 1.70 | 1.65 | 1.69 | 1.64 | 1.58 | 1.51 |
| 60 | 1.99 | 1.92 | 1.84 | 1.75 | 1.66 | 1.61 | 1.55 | 1.50 | 1.43 | 1.47 | 1.39 |
| 120 | 1.91 | 1.83 | 1.75 | 1.67 | 1.57 | 1.52 | 1.46 | 1.39 | 1.32 | 1.35 | 1.25 |
| ∞ | 1.83 | 1.75 | | | | | | | | 1.22 | 1.00 |

Tabla A-7 (*continuación*)PERCENTILES DE LA DISTRIBUCIÓN F $F_{0.90}$

| f_1 | f_2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 39.86 | 49.50 | 53.39 | 55.83 | 57.24 | 58.20 | 58.91 | 59.44 | 59.86 | 59.86 |
| 2 | 8.53 | 9.00 | 9.16 | 9.24 | 9.29 | 9.33 | 9.35 | 9.37 | 9.38 | 9.38 |
| 3 | 5.54 | 5.46 | 5.39 | 5.34 | 5.31 | 5.28 | 5.27 | 5.25 | 5.24 | 5.24 |
| 4 | 4.54 | 4.32 | 4.19 | 4.11 | 4.05 | 4.01 | 3.98 | 3.95 | 3.94 | 3.94 |
| 5 | 4.06 | 3.78 | 3.62 | 3.52 | 3.45 | 3.40 | 3.37 | 3.34 | 3.32 | 3.32 |
| 6 | 3.78 | 3.46 | 3.29 | 3.18 | 3.11 | 3.05 | 3.01 | 2.98 | 2.96 | 2.96 |
| 7 | 3.59 | 3.26 | 3.07 | 2.96 | 2.88 | 2.83 | 2.78 | 2.75 | 2.72 | 2.72 |
| 8 | 3.46 | 3.11 | 2.92 | 2.81 | 2.73 | 2.67 | 2.62 | 2.59 | 2.56 | 2.56 |
| 9 | 3.36 | 3.01 | 2.81 | 2.69 | 2.61 | 2.55 | 2.51 | 2.47 | 2.44 | 2.44 |
| 10 | 3.29 | 2.92 | 2.73 | 2.61 | 2.52 | 2.46 | 2.41 | 2.38 | 2.35 | 2.35 |
| 11 | 3.23 | 2.86 | 2.66 | 2.54 | 2.45 | 2.39 | 2.34 | 2.30 | 2.27 | 2.27 |
| 12 | 3.18 | 2.81 | 2.61 | 2.48 | 2.39 | 2.33 | 2.28 | 2.24 | 2.21 | 2.21 |
| 13 | 3.14 | 2.76 | 2.56 | 2.43 | 2.35 | 2.28 | 2.23 | 2.20 | 2.16 | 2.16 |
| 14 | 3.10 | 2.73 | 2.52 | 2.39 | 2.31 | 2.24 | 2.19 | 2.15 | 2.12 | 2.12 |
| 15 | 3.07 | 2.70 | 2.49 | 2.36 | 2.27 | 2.21 | 2.16 | 2.12 | 2.09 | 2.09 |
| 16 | 3.05 | 2.67 | 2.46 | 2.33 | 2.24 | 2.18 | 2.13 | 2.09 | 2.06 | 2.06 |
| 17 | 3.03 | 2.64 | 2.44 | 2.31 | 2.22 | 2.15 | 2.10 | 2.06 | 2.03 | 2.03 |
| 18 | 3.01 | 2.62 | 2.42 | 2.29 | 2.20 | 2.13 | 2.08 | 2.04 | 2.00 | 2.00 |
| 19 | 2.99 | 2.61 | 2.40 | 2.27 | 2.18 | 2.11 | 2.06 | 2.02 | 1.98 | 1.98 |
| 20 | 2.97 | 2.59 | 2.38 | 2.25 | 2.16 | 2.09 | 2.04 | 2.00 | 1.96 | 1.96 |
| 21 | 2.96 | 2.57 | 2.36 | 2.23 | 2.14 | 2.08 | 2.02 | 1.98 | 1.95 | 1.95 |
| 22 | 2.95 | 2.56 | 2.35 | 2.22 | 2.13 | 2.06 | 2.01 | 1.97 | 1.93 | 1.93 |
| 23 | 2.94 | 2.55 | 2.34 | 2.21 | 2.11 | 2.05 | 1.99 | 1.95 | 1.92 | 1.92 |
| 24 | 2.93 | 2.54 | 2.33 | 2.19 | 2.10 | 2.04 | 1.98 | 1.94 | 1.91 | 1.91 |
| 25 | 2.92 | 2.53 | 2.32 | 2.18 | 2.09 | 2.02 | 1.97 | 1.93 | 1.89 | 1.89 |
| 26 | 2.91 | 2.52 | 2.31 | 2.17 | 2.08 | 2.01 | 1.96 | 1.92 | 1.88 | 1.88 |
| 27 | 2.90 | 2.51 | 2.30 | 2.17 | 2.07 | 2.00 | 1.95 | 1.91 | 1.87 | 1.87 |
| 28 | 2.89 | 2.50 | 2.29 | 2.16 | 2.06 | 2.00 | 1.94 | 1.90 | 1.87 | 1.87 |
| 29 | 2.89 | 2.50 | 2.28 | 2.15 | 2.06 | 1.99 | 1.93 | 1.89 | 1.86 | 1.86 |
| 30 | 2.88 | 2.49 | 2.28 | 2.14 | 2.05 | 1.98 | 1.93 | 1.88 | 1.85 | 1.85 |
| 40 | 2.84 | 2.44 | 2.23 | 2.09 | 2.00 | 1.93 | 1.87 | 1.83 | 1.79 | 1.79 |
| 60 | 2.79 | 2.39 | 2.18 | 2.04 | 1.95 | 1.87 | 1.82 | 1.77 | 1.74 | 1.74 |
| 120 | 2.75 | 2.35 | 2.13 | 1.99 | 1.90 | 1.82 | 1.77 | 1.72 | 1.68 | 1.68 |
| α | 2.71 | 2.30 | 2.08 | 1.94 | 1.85 | 1.77 | 1.72 | 1.67 | 1.63 | 1.63 |

f_1 es el número de grados de libertad en el numerador.
 f_2 es el número de grados de libertad en el denominador.

*F*_{0.90}

| <i>f</i> ₁ | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
|-----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------------|
| <i>f</i> ₂ | | | | | | | | | | |
| 1 | 60.19 | 60.71 | 61.22 | 61.74 | 62.00 | 62.26 | 62.53 | 62.79 | 63.06 | 63.33 |
| 2 | 9.39 | 9.41 | 9.42 | 9.44 | 9.45 | 9.46 | 9.47 | 9.47 | 9.48 | 9.49 |
| 3 | 5.23 | 5.22 | 5.20 | 5.18 | 5.18 | 5.17 | 5.16 | 5.15 | 5.14 | 5.13 |
| 4 | 3.92 | 3.90 | 3.87 | 3.84 | 3.83 | 3.82 | 3.80 | 3.79 | 3.78 | 3.76 |
| 5 | 3.30 | 3.27 | 3.24 | 3.21 | 3.19 | 3.17 | 3.16 | 3.14 | 3.12 | 3.10 |
| 6 | 2.94 | 2.90 | 2.87 | 2.84 | 2.82 | 2.80 | 2.78 | 2.76 | 2.74 | 2.72 |
| 7 | 2.70 | 2.67 | 2.63 | 2.59 | 2.58 | 2.56 | 2.54 | 2.51 | 2.49 | 2.47 |
| 8 | 2.54 | 2.50 | 2.46 | 2.42 | 2.40 | 2.38 | 2.36 | 2.34 | 2.32 | 2.29 |
| 9 | 2.42 | 2.38 | 2.34 | 2.30 | 2.28 | 2.25 | 2.23 | 2.21 | 2.18 | 2.16 |
| 10 | 2.32 | 2.28 | 2.24 | 2.20 | 2.18 | 2.16 | 2.13 | 2.11 | 2.08 | 2.06 |
| 11 | 2.25 | 2.21 | 2.17 | 2.12 | 2.10 | 2.06 | 2.04 | 2.01 | 2.03 | 1.97 |
| 12 | 2.19 | 2.15 | 2.10 | 2.05 | 2.01 | 1.98 | 1.96 | 1.93 | 1.90 | 1.90 |
| 13 | 2.14 | 2.10 | 2.05 | 2.01 | 1.96 | 1.94 | 1.91 | 1.89 | 1.86 | 1.85 |
| 14 | 2.10 | 2.05 | 2.01 | 1.96 | 1.92 | 1.90 | 1.87 | 1.85 | 1.82 | 1.80 |
| 15 | 2.06 | 2.02 | 1.97 | | | | | | 1.79 | 1.76 |
| 16 | 2.03 | 1.99 | 1.94 | 1.89 | 1.87 | 1.84 | 1.81 | 1.78 | 1.75 | 1.72 |
| 17 | 2.00 | 1.96 | 1.91 | 1.86 | 1.84 | 1.81 | 1.78 | 1.75 | 1.72 | 1.69 |
| 18 | 1.98 | 1.93 | 1.89 | 1.84 | 1.81 | 1.79 | 1.76 | 1.73 | 1.70 | 1.66 |
| 19 | 1.96 | 1.91 | 1.86 | 1.81 | 1.79 | 1.77 | 1.74 | 1.71 | 1.68 | 1.63 |
| 20 | 1.94 | 1.89 | 1.84 | 1.80 | 1.79 | 1.77 | 1.74 | 1.71 | 1.68 | 1.61 |
| 21 | 1.92 | 1.87 | 1.83 | 1.78 | 1.75 | 1.72 | 1.69 | 1.66 | 1.62 | 1.59 |
| 22 | 1.90 | 1.86 | 1.81 | 1.76 | 1.73 | 1.70 | 1.67 | 1.64 | 1.60 | 1.57 |
| 23 | 1.89 | 1.84 | 1.80 | 1.74 | 1.72 | 1.69 | 1.66 | 1.62 | 1.59 | 1.55 |
| 24 | 1.88 | 1.83 | 1.78 | 1.73 | 1.70 | 1.67 | 1.64 | 1.61 | 1.57 | 1.53 |
| 25 | 1.87 | 1.82 | 1.77 | 1.72 | 1.69 | 1.66 | 1.63 | 1.59 | 1.56 | 1.52 |
| 26 | 1.86 | 1.81 | 1.76 | 1.71 | 1.68 | 1.65 | 1.61 | 1.58 | 1.54 | 1.50 |
| 27 | 1.85 | 1.80 | 1.75 | 1.70 | 1.67 | 1.64 | 1.60 | 1.57 | 1.53 | 1.49 |
| 28 | 1.84 | 1.79 | 1.74 | 1.69 | 1.66 | 1.63 | 1.59 | 1.56 | 1.52 | 1.48 |
| 29 | 1.83 | 1.78 | 1.73 | 1.68 | 1.65 | 1.62 | 1.58 | 1.55 | 1.51 | 1.47 |
| 30 | 1.82 | 1.77 | 1.72 | 1.67 | 1.64 | 1.61 | 1.57 | 1.54 | 1.50 | 1.46 |
| 40 | 1.76 | 1.71 | 1.66 | 1.61 | 1.57 | 1.54 | 1.51 | 1.47 | 1.42 | 1.38 |
| 60 | 1.71 | 1.66 | 1.60 | 1.54 | 1.51 | 1.48 | 1.44 | 1.40 | 1.35 | 1.29 |
| 120 | 1.65 | 1.60 | 1.55 | 1.48 | 1.45 | 1.41 | 1.37 | 1.32 | 1.26 | 1.19 |
| ~8J | 1.60 | 1.55 | 1.49 | 1.42 | 1.38 | 1.34 | 1.30 | 1.24 | 1.17 | 1.00 |

Tabla A-7 (continuación)

PERCENTILES DE LA DISTRIBUCIÓN F
 $F_{0.75}$

| f_1 | f_2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|----------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1 | 5.93 | 7.50 | 8.20 | 8.58 | 8.82 | 8.98 | 9.10 | 9.19 | 9.26 | 3.37 |
| 2 | 2.57 | 3.00 | 3.15 | 3.23 | 3.28 | 3.31 | 3.34 | 3.35 | 3.37 | 2.44 |
| 3 | 2.02 | 2.28 | 2.36 | 2.39 | 2.41 | 2.42 | 2.43 | 2.44 | 2.44 | 2.08 |
| 4 | 1.81 | 2.00 | 2.05 | 2.06 | 2.07 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 |
| 5 | 1.69 | 1.85 | 1.88 | 1.89 | 1.89 | 1.89 | 1.89 | 1.89 | 1.89 | 1.89 |
| 6 | 1.62 | 1.76 | 1.78 | 1.79 | 1.79 | 1.78 | 1.78 | 1.78 | 1.77 | 1.77 |
| 7 | 1.57 | 1.70 | 1.72 | 1.72 | 1.71 | 1.71 | 1.70 | 1.69 | 1.69 | 1.69 |
| 8 | 1.54 | 1.66 | 1.67 | 1.66 | 1.66 | 1.65 | 1.64 | 1.64 | 1.63 | 1.63 |
| 9 | 1.51 | 1.62 | 1.63 | 1.63 | 1.62 | 1.61 | 1.60 | 1.60 | 1.59 | 1.59 |
| 10 | 1.49 | 1.60 | 1.60 | 1.59 | 1.59 | 1.58 | 1.57 | 1.56 | 1.56 | 1.56 |
| 11 | 1.47 | 1.58 | 1.58 | 1.57 | 1.56 | 1.55 | 1.54 | 1.53 | 1.53 | 1.53 |
| 12 | 1.46 | 1.56 | 1.56 | 1.56 | 1.54 | 1.53 | 1.52 | 1.51 | 1.51 | 1.51 |
| 13 | 1.45 | 1.55 | 1.55 | 1.53 | 1.53 | 1.52 | 1.51 | 1.50 | 1.49 | 1.49 |
| 14 | 1.44 | 1.53 | 1.53 | 1.52 | 1.51 | 1.50 | 1.49 | 1.48 | 1.47 | 1.46 |
| 15 | 1.43 | 1.52 | 1.52 | 1.51 | 1.49 | 1.48 | 1.47 | 1.46 | 1.46 | 1.46 |
| 16 | 1.42 | 1.51 | 1.51 | 1.50 | 1.48 | 1.47 | 1.46 | 1.46 | 1.46 | 1.45 |
| 17 | 1.42 | 1.51 | 1.50 | 1.49 | 1.47 | 1.46 | 1.45 | 1.44 | 1.43 | 1.43 |
| 18 | 1.41 | 1.50 | 1.49 | 1.48 | 1.46 | 1.45 | 1.44 | 1.43 | 1.42 | 1.42 |
| 19 | 1.41 | 1.49 | 1.49 | 1.47 | 1.47 | 1.45 | 1.44 | 1.43 | 1.42 | 1.41 |
| 20 | 1.40 | 1.49 | 1.48 | 1.47 | 1.45 | 1.44 | 1.43 | 1.42 | 1.41 | 1.41 |
| 21 | 1.40 | 1.48 | 1.48 | 1.46 | 1.44 | 1.43 | 1.42 | 1.41 | 1.41 | 1.40 |
| 22 | 1.40 | 1.48 | 1.47 | 1.45 | 1.44 | 1.42 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.39 |
| 23 | 1.39 | 1.47 | 1.47 | 1.45 | 1.43 | 1.42 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.39 |
| 24 | 1.39 | 1.47 | 1.46 | 1.44 | 1.43 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.38 | 1.38 |
| 25 | 1.39 | 1.47 | 1.46 | 1.44 | 1.42 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.38 | 1.38 |
| 26 | 1.38 | 1.46 | 1.45 | 1.44 | 1.42 | 1.41 | 1.39 | 1.38 | 1.37 | 1.37 |
| 27 | 1.38 | 1.46 | 1.45 | 1.43 | 1.42 | 1.40 | 1.39 | 1.38 | 1.37 | 1.37 |
| 28 | 1.38 | 1.46 | 1.45 | 1.43 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.38 | 1.37 | 1.37 |
| 29 | 1.38 | 1.45 | 1.45 | 1.43 | 1.41 | 1.40 | 1.38 | 1.37 | 1.36 | 1.36 |
| 30 | 1.38 | 1.45 | 1.44 | 1.42 | 1.41 | 1.39 | 1.38 | 1.37 | 1.36 | 1.36 |
| 40 | 1.36 | 1.44 | 1.42 | 1.40 | 1.39 | 1.37 | 1.35 | 1.34 | 1.34 | 1.34 |
| 60 | 1.35 | 1.42 | 1.41 | 1.38 | 1.37 | 1.35 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.31 |
| 120 | 1.34 | 1.40 | 1.39 | 1.37 | 1.35 | 1.33 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.27 |
| ∞ | 1.32 | 1.39 | 1.37 | 1.35 | 1.33 | 1.31 | 1.29 | 1.28 | 1.27 | 1.27 |

f_1 es el número de grados de libertad en el numerador.

f_2 es el número de grados de libertad en el denominador.

Los datos de esta tabla se han tomado, con permiso, de *Biometrika Tables for Statisticians*, 3rd Ed., Vol. I, Table 18, 1966. London: Bentley House.

$F_{0,75}$

| f_1 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | 00 |
|-------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| f_2 | | | | | | | | | | |
| 1 | 9.32 | 9.41 | 9.49 | 9.58 | 9.63 | 9.67 | 9.71 | 9.76 | 9.80 | 9.85 |
| 2 | 3.38 | 3.39 | 3.41 | 3.43 | 3.44 | 3.45 | 3.46 | 3.47 | 3.47 | 3.48 |
| 3 | 2.44 | 2.45 | 2.46 | 2.46 | 2.47 | 2.47 | 2.47 | 2.47 | 2.47 | 2.47 |
| 4 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 |
| 5 | 1.89 | 1.89 | 1.89 | 1.88 | 1.88 | 1.88 | 1.88 | 1.87 | 1.87 | 1.87 |
| 6 | 1.77 | 1.77 | 1.76 | 1.76 | 1.75 | 1.75 | 1.75 | 1.74 | 1.74 | 1.74 |
| 7 | 1.69 | 1.68 | 1.68 | 1.67 | 1.67 | 1.66 | 1.66 | 1.65 | 1.65 | 1.65 |
| 8 | 1.63 | 1.62 | 1.62 | 1.61 | 1.60 | 1.60 | 1.59 | 1.59 | 1.58 | 1.58 |
| 9 | 1.59 | 1.58 | 1.57 | 1.56 | 1.56 | 1.55 | 1.54 | 1.54 | 1.53 | 1.53 |
| 10 | 1.55 | 1.54 | 1.53 | 1.52 | 1.52 | 1.51 | 1.51 | 1.50 | 1.49 | 1.48 |
| 11 | 1.52 | 1.51 | 1.50 | 1.49 | 1.49 | 1.48 | 1.47 | 1.47 | 1.46 | 1.45 |
| 12 | 1.50 | 1.49 | 1.48 | 1.47 | 1.46 | 1.46 | 1.45 | 1.45 | 1.44 | 1.43 |
| 13 | 1.48 | 1.47 | 1.46 | 1.45 | 1.45 | 1.44 | 1.43 | 1.42 | 1.42 | 1.42 |
| 14 | 1.46 | 1.45 | 1.44 | 1.43 | 1.43 | 1.42 | 1.42 | 1.41 | 1.41 | 1.40 |
| 15 | 1.45 | 1.44 | 1.43 | 1.43 | 1.41 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.39 | 1.38 |
| 16 | 1.44 | 1.43 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.38 | 1.38 | 1.37 | 1.36 | 1.35 |
| 17 | 1.43 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.38 | 1.37 | 1.37 | 1.36 | 1.35 | 1.34 |
| 18 | 1.42 | 1.40 | 1.39 | 1.38 | 1.37 | 1.37 | 1.36 | 1.35 | 1.34 | 1.33 |
| 19 | 1.41 | 1.40 | 1.38 | 1.37 | 1.36 | 1.35 | 1.34 | 1.33 | 1.32 | 1.30 |
| 20 | 1.40 | 1.39 | 1.37 | 1.36 | 1.35 | 1.34 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.29 |
| 21 | 1.39 | 1.38 | 1.37 | 1.35 | 1.34 | 1.33 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.30 |
| 22 | 1.39 | 1.37 | 1.36 | 1.34 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.28 |
| 23 | 1.38 | 1.37 | 1.35 | 1.34 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.28 | 1.27 |
| 24 | 1.38 | 1.36 | 1.35 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.28 | 1.26 |
| 25 | 1.37 | 1.36 | 1.34 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.29 | 1.28 | 1.27 | 1.25 |
| 26 | 1.37 | 1.35 | 1.34 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.28 | 1.26 | 1.25 |
| 27 | 1.36 | 1.35 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.28 | 1.27 | 1.25 | 1.24 |
| 28 | 1.36 | 1.34 | 1.33 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.27 | 1.26 | 1.25 | 1.23 |
| 29 | 1.35 | 1.34 | 1.32 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.27 | 1.26 | 1.25 | 1.23 |
| 30 | 1.35 | 1.34 | 1.32 | 1.30 | 1.29 | 1.28 | 1.27 | 1.26 | 1.24 | 1.23 |
| 40 | 1.33 | 1.31 | 1.30 | 1.28 | 1.26 | 1.25 | 1.24 | 1.22 | 1.21 | 1.19 |
| 60 | 1.30 | 1.29 | 1.27 | 1.25 | 1.24 | 1.22 | 1.21 | 1.19 | 1.17 | 1.15 |
| 120 | 1.28 | 1.26 | 1.24 | 1.22 | 1.21 | 1.19 | 1.18 | 1.16 | 1.13 | 1.10 |
| 250 | 1.25 | 1.24 | 1.22 | 1.19 | 1.16 | 1.14 | 1.14 | 1.12 | 1.08 | 1.00 |

Tabla A-8

FACTORES k PARA LIMITES DE TOLERANCIA BILATERALES PARA DISTRIBUCIONES NORMALES*

| n | $1 - \alpha = 0.75$ | | | | | $1 - \alpha = 0.90$ | | | | |
|----------|---------------------|-------|-------|-------|--------|---------------------|--------|--------|--------|--------|
| | II
0.75 | 0.90 | 0.95 | 0.99 | 0.999 | 0.75 | 0.90 | 0.95 | 0.99 | 0.999 |
| 2 | 4.498 | 6.301 | 7.414 | 9.531 | 11.920 | 11.407 | 15.978 | 18.800 | 24.167 | 30.227 |
| 3 | 2.501 | 3.538 | 4.187 | 5.431 | 6.844 | 4.132 | 5.847 | 6.919 | 8.974 | 11.309 |
| 4 | 2.035 | 2.892 | 3.431 | 4.471 | 5.657 | 2.932 | 4.166 | 4.943 | 6.440 | 8.149 |
| 5 | 1.825 | 2.599 | 3.088 | 4.033 | 5.117 | 2.454 | 3.494 | 4.152 | 5.423 | 6.879 |
| 6 | 1.704 | 2.429 | 2.889 | 3.779 | 4.802 | 2.196 | 3.131 | 3.723 | 4.870 | 6.188 |
| 7 | 1.624 | 2.318 | 2.757 | 3.611 | 4.593 | 2.034 | 2.902 | 3.452 | 4.521 | 5.750 |
| 8 | 1.568 | 2.238 | 2.663 | 3.491 | 4.444 | 1.921 | 2.743 | 3.264 | 4.278 | 5.446 |
| 9 | 1.525 | 2.178 | 2.593 | 3.400 | 4.330 | 1.839 | 2.626 | 3.125 | 4.098 | 5.220 |
| 10 | 1.492 | 2.131 | 2.537 | 3.328 | 4.241 | 1.775 | 2.535 | 3.018 | 3.959 | 5.046 |
| 11 | 1.465 | 2.093 | 2.493 | 3.271 | 4.169 | 1.724 | 2.463 | 2.933 | 3.849 | 4.906 |
| 12 | 1.443 | 2.062 | 2.456 | 3.223 | 4.110 | 1.683 | 2.404 | 2.863 | 3.758 | 4.792 |
| 13 | 1.425 | 2.036 | 2.424 | 3.183 | 4.059 | 1.648 | 2.355 | 2.805 | 3.682 | 4.697 |
| 14 | 1.409 | 2.013 | 2.398 | 3.148 | 4.016 | 1.619 | 2.314 | 2.756 | 3.618 | 4.615 |
| 15 | 1.395 | 1.994 | 2.375 | 3.118 | 3.979 | 1.594 | 2.278 | 2.713 | 3.562 | 4.545 |
| 16 | 1.383 | 1.977 | 2.355 | 3.092 | 3.946 | 1.572 | 2.246 | 2.676 | 3.514 | 4.484 |
| 17 | 1.372 | 1.962 | 2.337 | 3.069 | 3.917 | 1.552 | 2.219 | 2.643 | 3.471 | 4.430 |
| 18 | 1.363 | 1.948 | 2.321 | 3.048 | 3.891 | 1.535 | 2.194 | 2.614 | 3.443 | 4.382 |
| 19 | 1.355 | 1.936 | 2.307 | 3.030 | 3.867 | 1.520 | 2.172 | 2.588 | 3.399 | 4.339 |
| 20 | 1.347 | 1.925 | 2.294 | 3.013 | 3.846 | 1.506 | 2.152 | 2.564 | 3.368 | 4.300 |
| 21 | 1.340 | 1.915 | 2.282 | 2.998 | 3.827 | 1.493 | 2.135 | 2.543 | 3.340 | 4.264 |
| 22 | 1.334 | 1.906 | 2.271 | 2.984 | 3.809 | 1.482 | 2.118 | 2.524 | 3.315 | 4.232 |
| 23 | 1.328 | 1.898 | 2.261 | 2.971 | 3.793 | 1.471 | 2.103 | 2.506 | 3.292 | 4.203 |
| 24 | 1.322 | 1.891 | 2.252 | 2.959 | 3.778 | 1.462 | 2.089 | 2.489 | 3.270 | 4.176 |
| 25 | 1.317 | 1.883 | 2.244 | 2.948 | 3.764 | 1.453 | 2.077 | 2.474 | 3.251 | 4.151 |
| 26 | 1.313 | 1.877 | 2.236 | 2.938 | 3.751 | 1.444 | 2.065 | 2.460 | 3.232 | 4.127 |
| 27 | 1.309 | 1.871 | 2.229 | 2.929 | 3.740 | 1.437 | 2.054 | 2.447 | 3.215 | 4.106 |
| 30 | 1.297 | 1.855 | 2.210 | 2.904 | 3.708 | 1.417 | 2.025 | 2.413 | 3.170 | 4.049 |
| 35 | 1.283 | 1.834 | 2.185 | 2.871 | 3.667 | 1.390 | 1.988 | 2.368 | 3.112 | 3.974 |
| 40 | 1.271 | 1.818 | 2.166 | 2.846 | 3.635 | 1.370 | 1.959 | 2.334 | 3.066 | 3.917 |
| 45 | 1.262 | 1.805 | 2.150 | 2.826 | 3.609 | 1.354 | 1.935 | 2.306 | 3.030 | 3.871 |
| 50 | 1.255 | 1.794 | 2.138 | 2.809 | 3.588 | 1.340 | 1.916 | 2.284 | 3.001 | 3.833 |
| 55 | 1.249 | 1.785 | 2.127 | 2.795 | 3.571 | 1.329 | 1.901 | 2.265 | 2.976 | 3.801 |
| 60 | 1.243 | 1.778 | 2.118 | 2.784 | 3.556 | 1.320 | 1.887 | 2.248 | 2.955 | 3.774 |
| 65 | 1.239 | 1.771 | 2.110 | 2.773 | 3.543 | 1.312 | 1.875 | 2.235 | 2.937 | 3.751 |
| 70 | 1.235 | 1.765 | 2.104 | 2.764 | 3.531 | 1.304 | 1.865 | 2.222 | 2.920 | 3.730 |
| 75 | 1.231 | 1.760 | 2.098 | 2.757 | 3.521 | 1.298 | 1.856 | 2.211 | 2.906 | 3.712 |
| 80 | 1.228 | 1.756 | 2.092 | 2.749 | 3.512 | 1.292 | 1.848 | 2.202 | 2.894 | 3.696 |
| 85 | 1.225 | 1.752 | 2.087 | 2.743 | 3.504 | 1.287 | 1.841 | 2.193 | 2.882 | 3.682 |
| 90 | 1.223 | 1.748 | 2.083 | 2.737 | 3.497 | 1.283 | 1.834 | 2.185 | 2.872 | 3.669 |
| 95 | 1.220 | 1.745 | 2.079 | 2.732 | 3.490 | 1.278 | 1.828 | 2.178 | 2.863 | 3.657 |
| 100 | 1.218 | 1.742 | 2.075 | 2.727 | 3.484 | 1.275 | 1.822 | 2.172 | 2.854 | 3.646 |
| 110 | 1.214 | 1.736 | 2.069 | 2.719 | 3.473 | 1.268 | 1.813 | 2.160 | 2.839 | 3.626 |
| 120 | 1.211 | 1.732 | 2.063 | 2.712 | 3.464 | 1.262 | 1.804 | 2.150 | 2.826 | 3.610 |
| 130 | 1.208 | 1.728 | 2.059 | 2.705 | 3.456 | 1.257 | 1.797 | 2.141 | 2.814 | 3.595 |
| 140 | 1.206 | 1.724 | 2.054 | 2.700 | 3.449 | 1.252 | 1.791 | 2.134 | 2.804 | 3.582 |
| 150 | 1.204 | 1.721 | 2.051 | 2.695 | 3.443 | 1.248 | 1.785 | 2.127 | 2.795 | 3.571 |
| 160 | 1.202 | 1.718 | 2.047 | 2.691 | 3.437 | 1.245 | 1.780 | 2.121 | 2.787 | 3.561 |
| 170 | 1.200 | 1.716 | 2.044 | 2.687 | 3.432 | 1.242 | 1.775 | 2.116 | 2.780 | 3.552 |
| 180 | 1.198 | 1.713 | 2.042 | 2.683 | 3.427 | 1.239 | 1.771 | 2.111 | 2.774 | 3.543 |
| 190 | 1.197 | 1.711 | 2.039 | 2.680 | 3.423 | 1.236 | 1.767 | 2.106 | 2.768 | 3.536 |
| 200 | 1.195 | 1.709 | 2.037 | 2.677 | 3.419 | 1.234 | 1.764 | 2.102 | 2.762 | 3.529 |
| 250 | 1.190 | 1.702 | 2.028 | 2.665 | 3.404 | 1.224 | 1.750 | 2.085 | 2.740 | 3.501 |
| 300 | 1.186 | 1.696 | 2.021 | 2.656 | 3.393 | 1.217 | 1.740 | 2.073 | 2.725 | 3.481 |
| 400 | 1.181 | 1.688 | 2.012 | 2.644 | 3.378 | 1.207 | 1.726 | 2.057 | 2.703 | 3.453 |
| 500 | 1.177 | 1.683 | 2.006 | 2.636 | 3.368 | 1.201 | 1.717 | 2.046 | 2.689 | 3.434 |
| 600 | 1.175 | 1.680 | 2.002 | 2.631 | 3.360 | 1.196 | 1.710 | 2.038 | 2.678 | 3.421 |
| 700 | 1.173 | 1.677 | 1.998 | 2.626 | 3.355 | 1.192 | 1.705 | 2.032 | 2.670 | 3.411 |
| 800 | 1.171 | 1.675 | 1.996 | 2.623 | 3.350 | 1.189 | 1.701 | 2.027 | 2.663 | 3.402 |
| 900 | 1.170 | 1.673 | 1.993 | 2.620 | 3.347 | 1.187 | 1.697 | 2.023 | 2.658 | 3.396 |
| 1000 | 1.169 | 1.671 | 1.992 | 2.617 | 3.344 | 1.185 | 1.695 | 2.019 | 2.654 | 3.390 |
| ∞ | 1.150 | 1.645 | 1.960 | 2.576 | 3.291 | 1.150 | 1.645 | 1.960 | 2.576 | 3.291 |

* Los valores de esta tabla se han tomado de Eisenhart, C., Hastay, M. W., y Wallis, W. A., Techniques of Statistical Analysis, Table 2.1, pp. 102-107. 1947, New York: McGraw-Hill Book Company.

Tabla A-18 (continuación)

FACTORES k PARA LIMITES DE TOLERANCIA BILATERALES PARA DISTRIBUCIONES NORMALES

| $n \backslash k$ | $1 - \alpha = 0.95$ | | | | | $1 - \alpha = 0.99$ | | | | |
|------------------|---------------------|--------|--------|--------|--------|---------------------|---------|---------|---------|---------|
| | 0.75 | 0.90 | 0.95 | 0.99 | 0.999 | 0.75 | 0.90 | 0.95 | 0.99 | 0.999 |
| 2 | 22.858 | 32.019 | 37.674 | 48.430 | 60.573 | 114.363 | 160.193 | 188.491 | 242.300 | 303.054 |
| 3 | 5.922 | 8.380 | 9.916 | 12.861 | 16.208 | 13.378 | 18.930 | 22.401 | 29.055 | 36.616 |
| 4 | 3.779 | 5.369 | 6.370 | 8.299 | 10.502 | 6.614 | 9.398 | 11.150 | 14.527 | 18.383 |
| 5 | 3.002 | 4.275 | 5.079 | 6.634 | 8.415 | 4.643 | 6.612 | 7.855 | 10.260 | 13.015 |
| 6 | 2.604 | 3.712 | 4.414 | 5.775 | 7.337 | 3.743 | 5.337 | 6.345 | 8.301 | 10.548 |
| 7 | 2.361 | 3.369 | 4.007 | 5.248 | 6.676 | 3.233 | 4.613 | 5.488 | 7.187 | 9.142 |
| 8 | 2.197 | 3.136 | 3.732 | 4.891 | 6.226 | 2.905 | 4.147 | 4.936 | 6.468 | 8.234 |
| 9 | 2.078 | 2.967 | 3.532 | 4.631 | 5.899 | 2.677 | 3.822 | 4.550 | 5.966 | 7.600 |
| 10 | 1.987 | 2.839 | 3.379 | 4.433 | 5.649 | 2.508 | 3.582 | 4.265 | 5.594 | 7.129 |
| 11 | 1.916 | 2.737 | 3.259 | 4.277 | 5.452 | 2.378 | 3.397 | 4.045 | 5.308 | 6.766 |
| 12 | 1.858 | 2.655 | 3.162 | 4.150 | 5.291 | 2.274 | 3.250 | 3.870 | 5.079 | 6.477 |
| 13 | 1.810 | 2.587 | 3.081 | 4.044 | 5.158 | 2.190 | 3.130 | 3.727 | 4.893 | 6.240 |
| 14 | 1.770 | 2.529 | 3.012 | 3.955 | 5.045 | 2.120 | 3.029 | 3.608 | 4.737 | 6.043 |
| 15 | 1.735 | 2.480 | 2.954 | 3.878 | 4.949 | 2.060 | 2.954 | 3.507 | 4.605 | 5.876 |
| 16 | 1.705 | 2.437 | 2.903 | 3.812 | 4.865 | 2.009 | 2.872 | 3.421 | 4.492 | 5.732 |
| 17 | 1.679 | 2.400 | 2.858 | 3.754 | 4.791 | 1.965 | 2.808 | 3.345 | 4.393 | 5.607 |
| 18 | 1.655 | 2.366 | 2.819 | 3.702 | 4.725 | 1.926 | 2.753 | 3.279 | 4.307 | 5.497 |
| 19 | 1.635 | 2.337 | 2.784 | 3.656 | 4.667 | 1.891 | 2.703 | 3.221 | 4.230 | 5.399 |
| 20 | 1.616 | 2.310 | 2.752 | 3.615 | 4.614 | 1.860 | 2.659 | 3.168 | 4.161 | 5.312 |
| 21 | 1.599 | 2.286 | 2.723 | 3.577 | 4.567 | 1.833 | 2.620 | 3.121 | 4.100 | 5.234 |
| 22 | 1.584 | 2.264 | 2.697 | 3.543 | 4.523 | 1.808 | 2.584 | 3.078 | 4.044 | 5.163 |
| 23 | 1.570 | 2.244 | 2.673 | 3.512 | 4.484 | 1.785 | 2.551 | 3.040 | 3.993 | 5.098 |
| 24 | 1.557 | 2.225 | 2.651 | 3.483 | 4.447 | 1.764 | 2.522 | 3.004 | 3.947 | 5.039 |
| 25 | 1.545 | 2.208 | 2.631 | 3.457 | 4.413 | 1.745 | 2.494 | 2.972 | 3.904 | 4.985 |
| 26 | 1.534 | 2.193 | 2.612 | 3.432 | 4.382 | 1.727 | 2.469 | 2.941 | 3.865 | 4.935 |
| 27 | 1.523 | 2.178 | 2.595 | 3.409 | 4.353 | 1.711 | 2.446 | 2.914 | 3.828 | 4.888 |
| 30 | 1.497 | 2.149 | 2.549 | 3.350 | 4.278 | 1.668 | 2.385 | 2.841 | 3.733 | 4.768 |
| 35 | 1.462 | 2.090 | 2.490 | 3.272 | 4.179 | 1.613 | 2.306 | 2.748 | 3.611 | 4.611 |
| 40 | 1.435 | 2.052 | 2.445 | 3.213 | 4.104 | 1.571 | 2.247 | 2.677 | 3.518 | 4.493 |
| 45 | 1.414 | 2.021 | 2.408 | 3.165 | 4.042 | 1.539 | 2.200 | 2.621 | 3.444 | 4.399 |
| 50 | 1.396 | 1.996 | 2.379 | 3.126 | 3.993 | 1.512 | 2.162 | 2.576 | 3.385 | 4.323 |
| 55 | 1.382 | 1.976 | 2.354 | 3.094 | 3.951 | 1.490 | 2.130 | 2.538 | 3.335 | 4.260 |
| 60 | 1.369 | 1.958 | 2.333 | 3.066 | 3.916 | 1.471 | 2.103 | 2.506 | 3.293 | 4.206 |
| 65 | 1.359 | 1.943 | 2.315 | 3.042 | 3.886 | 1.455 | 2.080 | 2.478 | 3.257 | 4.160 |
| 70 | 1.349 | 1.929 | 2.299 | 3.021 | 3.859 | 1.440 | 2.060 | 2.454 | 3.225 | 4.120 |
| 75 | 1.341 | 1.917 | 2.285 | 3.002 | 3.835 | 1.428 | 2.042 | 2.433 | 3.197 | 4.084 |
| 80 | 1.334 | 1.907 | 2.272 | 2.986 | 3.814 | 1.417 | 2.026 | 2.414 | 3.173 | 4.053 |
| 85 | 1.327 | 1.892 | 2.261 | 2.971 | 3.795 | 1.407 | 2.012 | 2.397 | 3.150 | 4.024 |
| 90 | 1.321 | 1.889 | 2.251 | 2.958 | 3.778 | 1.398 | 1.999 | 2.382 | 3.130 | 3.999 |
| 95 | 1.315 | 1.881 | 2.241 | 2.945 | 3.763 | 1.390 | 1.987 | 2.368 | 3.112 | 3.976 |
| 100 | 1.311 | 1.874 | 2.233 | 2.934 | 3.748 | 1.383 | 1.977 | 2.355 | 3.096 | 3.954 |
| 110 | 1.302 | 1.861 | 2.218 | 2.915 | 3.723 | 1.369 | 1.958 | 2.333 | 3.066 | 3.917 |
| 120 | 1.294 | 1.850 | 2.205 | 2.898 | 3.702 | 1.358 | 1.942 | 2.314 | 3.041 | 3.885 |
| 130 | 1.288 | 1.841 | 2.194 | 2.883 | 3.683 | 1.349 | 1.928 | 2.298 | 3.019 | 3.857 |
| 140 | 1.282 | 1.833 | 2.184 | 2.870 | 3.666 | 1.340 | 1.916 | 2.283 | 3.000 | 3.833 |
| 150 | 1.277 | 1.825 | 2.175 | 2.859 | 3.652 | 1.332 | 1.905 | 2.270 | 2.983 | 3.811 |
| 160 | 1.272 | 1.819 | 2.167 | 2.848 | 3.638 | 1.326 | 1.895 | 2.259 | 2.968 | 3.792 |
| 170 | 1.268 | 1.813 | 2.160 | 2.839 | 3.527 | 1.320 | 1.887 | 2.248 | 2.955 | 3.774 |
| 180 | 1.264 | 1.808 | 2.154 | 2.831 | 3.616 | 1.314 | 1.879 | 2.239 | 2.942 | 3.759 |
| 190 | 1.261 | 1.803 | 2.148 | 2.823 | 3.606 | 1.309 | 1.872 | 2.230 | 2.931 | 3.744 |
| 200 | 1.258 | 1.798 | 2.143 | 2.816 | 3.597 | 1.304 | 1.865 | 2.222 | 2.921 | 3.731 |
| 250 | 1.245 | 1.780 | 2.121 | 2.788 | 3.561 | 1.286 | 1.839 | 2.191 | 2.880 | 3.678 |
| 300 | 1.236 | 1.767 | 2.106 | 2.767 | 3.535 | 1.273 | 1.820 | 2.169 | 2.850 | 3.641 |
| 400 | 1.223 | 1.749 | 2.084 | 2.739 | 3.499 | 1.255 | 1.794 | 2.138 | 2.809 | 3.589 |
| 500 | 1.215 | 1.737 | 2.070 | 2.721 | 3.475 | 1.243 | 1.777 | 2.117 | 2.783 | 3.555 |
| 600 | 1.209 | 1.729 | 2.060 | 2.707 | 3.458 | 1.234 | 1.764 | 2.102 | 2.763 | 3.530 |
| 700 | 1.204 | 1.722 | 2.052 | 2.697 | 3.445 | 1.227 | 1.755 | 2.091 | 2.748 | 3.511 |
| 800 | 1.201 | 1.717 | 2.046 | 2.688 | 3.434 | 1.222 | 1.747 | 2.082 | 2.736 | 3.495 |
| 900 | 1.198 | 1.712 | 2.040 | 2.682 | 3.426 | 1.218 | 1.741 | 2.075 | 2.726 | 3.483 |
| 1000 | 1.195 | 1.709 | 2.036 | 2.676 | 3.418 | 1.214 | 1.736 | 2.068 | 2.718 | 3.472 |
| % | 1.150 | 1.645 | 1.960 | 2.576 | 3.291 | 1.150 | 1.645 | 1.960 | 2.576 | 3.291 |

Tabla A-9
Porcentajes de Rango "Studentizado"
Cola superior de 5%

| <i>g.l.
error</i> | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
|-----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 17.97 | 26.98 | 32.82 | 37.08 | 40.41 | 43.12 | 45.40 | 47.36 | 49.07 | |
| 2 | 6.08 | 8.33 | 9.80 | 10.88 | 11.74 | 12.44 | 13.03 | 13.54 | 13.99 | |
| 3 | 4.50 | 5.91 | 6.82 | 7.50 | 8.04 | 8.48 | 8.85 | 9.18 | 9.46 | |
| 4 | 3.93 | 5.04 | 5.76 | 6.29 | 6.71 | 7.05 | 7.35 | 7.60 | 7.83 | |
| 5 | 3.64 | 4.60 | 5.22 | 5.67 | 6.03 | 6.33 | 6.58 | 6.80 | 6.99 | |
| 6 | 3.46 | 4.34 | 4.90 | 5.30 | 5.63 | 5.90 | 6.12 | 6.32 | 6.49 | |
| 7 | 3.34 | 4.16 | 4.68 | 5.06 | 5.36 | 5.61 | 5.82 | 6.00 | 6.16 | |
| 8 | 3.26 | 4.04 | 4.53 | 4.89 | 5.17 | 5.40 | 5.60 | 5.77 | 5.92 | |
| 9 | 3.20 | 3.95 | 4.41 | 4.76 | 5.02 | 5.24 | 5.43 | 5.59 | 5.74 | |
| 10 | 3.15 | 3.88 | 4.33 | 4.65 | 4.91 | 5.12 | 5.30 | 5.46 | 5.60 | |
| 11 | 3.11 | 3.82 | 4.26 | 4.57 | 4.82 | 5.03 | 5.20 | 5.35 | 5.49 | |
| 12 | 3.08 | 3.77 | 4.20 | 4.51 | 4.75 | 4.95 | 5.12 | 5.27 | 5.39 | |
| 13 | 3.06 | 3.73 | 4.15 | 4.45 | 4.69 | 4.88 | 5.05 | 5.19 | 5.32 | |
| 14 | 3.03 | 3.70 | 4.11 | 4.41 | 4.64 | 4.83 | 4.99 | 5.13 | 5.25 | |
| 15 | 3.01 | 3.67 | 4.08 | 4.37 | 4.59 | 4.78 | 4.94 | 5.08 | 5.20 | |
| 16 | 3.00 | 3.65 | 4.05 | 4.33 | 4.56 | 4.74 | 4.90 | 5.03 | 5.15 | |
| 17 | 2.98 | 3.63 | 4.02 | 4.30 | 4.52 | 4.70 | 4.86 | 4.99 | 5.11 | |
| 18 | 2.97 | 3.61 | 4.00 | 4.28 | 4.49 | 4.67 | 4.82 | 4.96 | 5.07 | |
| 19 | 2.96 | 3.59 | 3.98 | 4.25 | 4.47 | 4.65 | 4.79 | 4.92 | 5.04 | |
| 20 | 2.95 | 3.58 | 3.96 | 4.23 | 4.45 | 4.62 | 4.77 | 4.90 | 5.01 | |
| 24 | 2.92 | 3.53 | 3.90 | 4.17 | 4.37 | 4.54 | 4.68 | 4.81 | 4.92 | |
| 30 | 2.89 | 3.49 | 3.85 | 4.10 | 4.30 | 4.46 | 4.60 | 4.72 | 4.82 | |
| 40 | 2.86 | 3.44 | 3.79 | 4.04 | 4.23 | 4.39 | 4.52 | 4.63 | 4.73 | |
| 60 | 2.83 | 3.40 | 3.74 | 3.98 | 4.16 | 4.31 | 4.44 | 4.55 | 4.65 | |
| 120 | 2.80 | 3.36 | 3.68 | 3.92 | 4.10 | 4.24 | 4.36 | 4.47 | 4.56 | |
| γ | 2.77 | 3.31 | 3.63 | 3.86 | 4.03 | 4.17 | 4.29 | 4.39 | 4.47 | |
| <i>g.l.
error</i> | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 1 | 50.59 | 51.96 | 53.20 | 54.33 | 55.36 | 56.32 | 57.22 | 58.04 | 58.83 | 59.56 |
| 2 | 14.39 | 14.78 | 15.08 | 15.38 | 15.65 | 15.91 | 16.14 | 16.37 | 16.57 | 16.77 |
| 3 | 9.72 | 9.95 | 10.15 | 10.35 | 10.52 | 10.69 | 10.84 | 10.98 | 11.11 | 11.24 |
| 4 | 8.03 | 8.21 | 8.37 | 8.52 | 8.66 | 8.79 | 8.91 | 9.03 | 9.13 | 9.23 |
| 5 | 7.17 | 7.32 | 7.47 | 7.60 | 7.72 | 7.83 | 7.93 | 8.03 | 8.12 | 8.21 |
| 6 | 6.65 | 6.79 | 6.92 | 7.03 | 7.14 | 7.24 | 7.34 | 7.43 | 7.51 | 7.59 |
| 7 | 6.30 | 6.43 | 6.55 | 6.66 | 6.76 | 6.85 | 6.94 | 7.02 | 7.10 | 7.17 |
| 8 | 6.05 | 6.18 | 6.29 | 6.39 | 6.48 | 6.57 | 6.65 | 6.73 | 6.80 | 6.87 |
| 9 | 5.87 | 5.98 | 6.09 | 6.19 | 6.28 | 6.36 | 6.44 | 6.51 | 6.58 | 6.64 |
| 10 | 5.72 | 5.83 | 5.93 | 6.03 | 6.11 | 6.19 | 6.27 | 6.34 | 6.40 | 6.47 |
| 11 | 5.61 | 5.71 | 5.81 | 5.90 | 5.98 | 6.06 | 6.13 | 6.20 | 6.27 | 6.33 |
| 12 | 5.51 | 5.61 | 5.71 | 5.80 | 5.88 | 5.95 | 6.02 | 6.09 | 6.15 | 6.21 |
| 13 | 5.43 | 5.53 | 5.63 | 5.71 | 5.79 | 5.86 | 5.93 | 5.99 | 6.05 | 6.11 |
| 14 | 5.36 | 5.46 | 5.55 | 5.64 | 5.71 | 5.79 | 5.85 | 5.91 | 5.97 | 6.03 |
| 15 | 5.31 | 5.40 | 5.49 | 5.57 | 5.65 | 5.72 | 5.78 | 5.85 | 5.90 | 5.96 |

Tabla A-9

(continuación)

| g.l.
error | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 16 | 5.26 | 5.35 | 5.44 | 5.52 | 5.59 | 5.66 | 5.73 | 5.79 | 5.84 | 5.90 |
| 17 | 5.21 | 5.31 | 5.39 | 5.47 | 5.54 | 5.61 | 5.67 | 5.73 | 5.79 | 5.84 |
| 18 | 5.17 | 5.27 | 5.35 | 5.43 | 5.50 | 5.57 | 5.63 | 5.69 | 5.74 | 5.79 |
| 19 | 5.14 | 5.23 | 5.31 | 5.39 | 5.46 | 5.53 | 5.59 | 5.65 | 5.70 | 5.75 |
| 20 | 5.11 | 5.20 | 5.28 | 5.36 | 5.43 | 5.49 | 5.55 | 5.61 | 5.66 | 5.71 |
| 24 | 5.01 | 5.10 | 5.18 | 5.25 | 5.32 | 5.38 | 5.44 | 5.49 | 5.55 | 5.59 |
| 30 | 4.92 | 5.00 | 5.08 | 5.15 | 5.21 | 5.27 | 5.33 | 5.38 | 5.43 | 5.47 |
| 40 | 4.82 | 4.90 | 4.98 | 5.04 | 5.11 | 5.16 | 5.22 | 5.27 | 5.31 | 5.36 |
| 60 | 4.73 | 4.81 | 4.88 | 4.94 | 5.00 | 5.06 | 5.11 | 5.15 | 5.20 | 5.24 |
| 120 | 4.64 | 4.71 | 4.78 | 4.84 | 4.90 | 4.95 | 5.00 | 5.04 | 5.09 | 5.13 |
| x) | 4.55 | 4.62 | 4.68 | 4.74 | 4.80 | 4.85 | 4.89 | 4.93 | 4.97 | 5.01 |

cola superior de 1%

| g.l.
error | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 | |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 90.03 | 135.0 | 164.3 | 185.6 | 202.2 | 215.8 | 227.2 | 237.0 | 245.6 |
| 2 | 14.04 | 19.02 | 22.29 | 24.72 | 26.63 | 28.20 | 29.53 | 30.68 | 31.69 |
| 3 | 8.26 | 10.62 | 12.17 | 13.33 | 14.24 | 15.00 | 15.64 | 16.20 | 16.69 |
| 4 | 6.51 | 8.12 | 9.17 | 9.96 | 10.58 | 11.10 | 11.55 | 11.93 | 12.27 |
| 5 | 5.70 | 6.98 | 7.80 | 8.42 | 8.91 | 9.32 | 9.67 | 9.97 | 10.24 |
| 6 | 5.24 | 6.33 | 7.03 | 7.56 | 7.97 | 8.32 | 8.61 | 8.87 | 9.10 |
| 7 | 4.95 | 5.92 | 6.54 | 7.01 | 7.37 | 7.68 | 7.94 | 8.17 | 8.37 |
| 8 | 4.75 | 5.64 | 6.20 | 6.62 | 6.96 | 7.24 | 7.47 | 7.68 | 7.86 |
| 9 | 4.60 | 5.43 | 5.96 | 6.35 | 6.66 | 6.91 | 7.13 | 7.33 | 7.49 |
| 10 | 4.48 | 5.27 | 5.77 | 6.14 | 6.43 | 6.67 | 6.87 | 7.05 | 7.21 |
| 11 | 4.39 | 5.15 | 5.62 | 5.97 | 6.25 | 6.48 | 6.67 | 6.84 | 6.99 |
| 12 | 4.32 | 5.05 | 5.50 | 5.84 | 6.10 | 6.32 | 6.51 | 6.67 | 6.81 |
| 13 | 4.26 | 4.96 | 5.40 | 5.73 | 5.98 | 6.19 | 6.37 | 6.53 | 6.67 |
| 14 | 4.21 | 4.89 | 5.32 | 5.63 | 5.88 | 6.08 | 6.26 | 6.41 | 6.54 |
| 15 | 4.17 | 4.84 | 5.25 | 5.56 | 5.80 | 5.99 | 6.16 | 6.31 | 6.44 |
| 16 | 4.13 | 4.79 | 5.19 | 5.49 | 5.72 | 5.92 | 6.08 | 6.22 | 6.35 |
| 17 | 4.10 | 4.74 | 5.14 | 5.43 | 5.66 | 5.85 | 6.01 | 6.15 | 6.27 |
| 18 | 4.07 | 4.70 | 5.09 | 5.38 | 5.60 | 5.79 | 5.94 | 6.08 | 6.20 |
| 19 | 4.05 | 4.67 | 5.05 | 5.33 | 5.55 | 5.73 | 5.89 | 6.02 | 6.14 |
| 20 | 4.02 | 4.64 | 5.02 | 5.29 | 5.51 | 5.69 | 5.84 | 5.97 | 6.09 |
| 24 | 3.96 | 4.55 | 4.91 | 5.17 | 5.37 | 5.54 | 5.69 | 5.81 | 5.92 |
| 30 | 3.89 | 4.45 | 4.80 | 5.05 | 5.24 | 5.40 | 5.54 | 5.65 | 5.76 |
| 40 | 3.82 | 4.37 | 4.70 | 4.93 | 5.11 | 5.26 | 5.39 | 5.50 | 5.60 |
| 60 | 3.76 | 4.28 | 4.59 | 4.82 | 4.99 | 5.13 | 5.25 | 5.36 | 5.45 |
| 120 | 3.70 | 4.20 | 4.50 | 4.71 | 4.87 | 5.01 | 5.12 | 5.21 | 5.30 |
| x) | 3.64 | 4.12 | 4.40 | 4.60 | 4.76 | 4.88 | 4.99 | 5.08 | 5.16 |

Tabla A-9
(continuación)

| <i>g.l.
error</i> | <i>k</i> | | | | | | | | | |
|-----------------------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 1 | 253.2 | 260.0 | 266.2 | 271.8 | 277.0 | 281.8 | 286.3 | 290.4 | 294.3 | 298.0 |
| 2 | 32.59 | 33.40 | 34.13 | 34.81 | 35.43 | 36.00 | 36.53 | 37.03 | 37.50 | 37.95 |
| 3 | 17.13 | 17.53 | 17.89 | 18.22 | 18.52 | 18.81 | 19.07 | 19.32 | 19.55 | 19.77 |
| 4 | 12.57 | 12.84 | 13.09 | 13.32 | 13.53 | 13.73 | 13.91 | 14.08 | 14.24 | 14.40 |
| 5 | 10.48 | 10.70 | 10.89 | 11.08 | 11.24 | 11.40 | 11.55 | 11.68 | 11.81 | 11.93 |
| 6 | 9.30 | 9.48 | 9.65 | 9.81 | 9.95 | 10.08 | 10.21 | 10.32 | 10.43 | 10.54 |
| 7 | 8.55 | 8.71 | 8.86 | 9.00 | 9.12 | 9.24 | 9.35 | 9.46 | 9.55 | 9.65 |
| 8 | 8.03 | 8.18 | 8.31 | 8.44 | 8.55 | 8.66 | 8.76 | 8.85 | 8.94 | 9.03 |
| 9 | 7.65 | 7.78 | 7.91 | 8.03 | 8.13 | 8.23 | 8.33 | 8.41 | 8.49 | 8.57 |
| 10 | 7.36 | 7.49 | 7.60 | 7.71 | 7.81 | 7.91 | 7.99 | 8.08 | 8.15 | 8.23 |
| 11 | 7.13 | 7.25 | 7.36 | 7.46 | 7.56 | 7.65 | 7.73 | 7.81 | 7.88 | 7.95 |
| 12 | 6.94 | 7.06 | 7.17 | 7.26 | 7.36 | 7.44 | 7.52 | 7.59 | 7.66 | 7.73 |
| 13 | 6.79 | 6.90 | 7.01 | 7.10 | 7.19 | 7.27 | 7.35 | 7.42 | 7.48 | 7.55 |
| 14 | 6.66 | 6.77 | 6.87 | 6.96 | 7.05 | 7.13 | 7.20 | 7.27 | 7.33 | 7.39 |
| 15 | 6.55 | 6.66 | 6.76 | 6.84 | 6.93 | 7.00 | 7.07 | 7.14 | 7.20 | 7.26 |
| 16 | 6.46 | 6.56 | 6.66 | 6.74 | 6.82 | 6.90 | 6.97 | 7.03 | 7.09 | 7.15 |
| 17 | 6.38 | 6.48 | 6.57 | 6.66 | 6.73 | 6.81 | 6.87 | 6.94 | 7.00 | 7.05 |
| 18 | 6.31 | 6.41 | 6.50 | 6.58 | 6.65 | 6.73 | 6.79 | 6.85 | 6.91 | 6.97 |
| 19 | 6.25 | 6.34 | 6.43 | 6.51 | 6.58 | 6.65 | 6.72 | 6.78 | 6.84 | 6.89 |
| 20 | 6.19 | 6.28 | 6.37 | 6.45 | 6.52 | 6.59 | 6.65 | 6.71 | 6.77 | 6.82 |
| 24 | 6.02 | 6.11 | 6.19 | 6.26 | 6.33 | 6.39 | 6.45 | 6.51 | 6.56 | 6.61 |
| 30 | 5.85 | 5.93 | 6.01 | 6.08 | 6.14 | 6.20 | 6.26 | 6.31 | 6.36 | 6.41 |
| 40 | 5.69 | 5.76 | 5.83 | 5.90 | 5.96 | 6.02 | 6.07 | 6.12 | 6.16 | 6.21 |
| 60 | 5.53 | 5.60 | 5.67 | 5.73 | 5.78 | 5.84 | 5.89 | 5.93 | 5.97 | 6.01 |
| 120 | 5.37 | 5.44 | 5.50 | 5.56 | 5.61 | 5.66 | 5.71 | 5.75 | 5.79 | 5.83 |
| oo | 5.23 | 5.29 | 5.35 | 5.40 | 5.45 | 5.49 | 5.54 | 5.57 | 5.61 | 5.65 |

Tabla A-10

Prueba de Kolmogorov-Smirnov

| n | $\alpha = 20\%$ | $\alpha = 10\%$ | $\alpha = 5\%$ | $\alpha = 2\%$ | $\alpha = 1\%$ |
|------------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1 | 0. | 0. | 0. | 0. | 0. |
| 2 | 900 | 950 | 975 | 990 | 995 |
| 3 | 684 | 776 | 842 | 900 | 929 |
| 4 | 565 | 636 | 708 | 785 | 829 |
| 5 | 493 | 565 | 624 | 689 | 734 |
| 6 | 447 | 509 | 563 | 627 | 669 |
| 7 | 410 | 468 | 519 | 577 | 617 |
| 8 | 381 | 436 | 483 | 538 | 576 |
| 9 | 359 | 410 | 454 | 507 | 542 |
| 10 | 339 | 387 | 430 | 480 | 513 |
| 11 | 323 | 369 | 409 | 457 | 486 |
| 12 | 308 | 352 | 391 | 437 | 468 |
| 13 | 296 | 338 | 375 | 419 | 449 |
| 14 | 285 | 325 | 361 | 404 | 432 |
| 15 | 275 | 314 | 349 | 390 | 418 |
| 16 | 266 | 304 | 338 | 377 | 404 |
| 17 | 258 | 295 | 327 | 366 | 392 |
| 18 | 250 | 286 | 318 | 355 | 381 |
| 19 | 244 | 279 | 309 | 346 | 371 |
| 20 | 237 | 271 | 301 | 337 | 361 |
| 21 | 232 | 265 | 294 | 329 | 352 |
| 22 | 226 | 259 | 287 | 321 | 344 |
| 23 | 221 | 253 | 281 | 314 | 337 |
| 24 | 216 | 247 | 275 | 307 | 330 |
| 25 | 212 | 242 | 269 | 301 | 323 |
| 26 | 208 | 238 | 264 | 295 | 317 |
| 27 | 204 | 233 | 259 | 290 | 311 |
| 28 | 200 | 229 | 254 | 284 | 305 |
| 29 | 197 | 225 | 250 | 279 | 300 |
| 30 | 193 | 221 | 246 | 275 | 295 |
| 35 | 190 | 218 | 242 | 270 | 290 |
| 40 | 177 | 202 | 224 | 251 | 269 |
| 45 | 165 | 189 | 210 | 235 | 252 |
| 50 | 156 | 179 | 198 | 222 | 238 |
| 55 | 148 | 170 | 188 | 211 | 226 |
| 60 | 142 | 162 | 180 | 201 | 216 |
| 65 | 136 | 155 | 172 | 193 | 207 |
| 70 | 131 | 149 | 166 | 185 | 199 |
| 75 | 126 | 144 | 160 | 179 | 192 |
| 80 | 122 | 139 | 154 | 173 | 185 |
| 85 | 118 | 135 | 150 | 167 | 179 |
| 90 | 114 | 131 | 145 | 162 | 174 |
| 95 | 111 | 127 | 141 | 158 | 169 |
| 100 | 108 | 124 | 137 | 154 | 165 |
| 100 | 106 | 121 | 134 | 150 | 161 |
| Aproximación para n grande | $1.07/\sqrt{n}$ | $1.22/\sqrt{n}$ | $1.36/\sqrt{n}$ | $1.52/\sqrt{n}$ | $1.63/\sqrt{n}$ |

Tabla A-11

Valores para la prueba del Rango Múltiple de Duncan ($\alpha = 10\%$)

| <i>k</i> | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| <i>a.e.</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 8.929 | 8.929 | 8.929 | 8.929 | 8.929 | 8.929 | 8.929 | 8.929 | 8.929 | 8.929 | 8.929 | 8.929 | 8.929 | 8.929 | 8.929 | 8.929 | 8.929 | 8.929 |
| 2 | 4.130 | 4.130 | 4.130 | 4.130 | 4.130 | 4.130 | 4.130 | 4.130 | 4.130 | 4.130 | 4.130 | 4.130 | 4.130 | 4.130 | 4.130 | 4.130 | 4.130 | 4.130 |
| 3 | 3.328 | 3.330 | 3.330 | 3.330 | 3.330 | 3.330 | 3.330 | 3.330 | 3.330 | 3.330 | 3.330 | 3.330 | 3.330 | 3.330 | 3.330 | 3.330 | 3.330 | 3.330 |
| 4 | 3.015 | 3.074 | 3.081 | 3.081 | 3.081 | 3.081 | 3.081 | 3.081 | 3.081 | 3.081 | 3.081 | 3.081 | 3.081 | 3.081 | 3.081 | 3.081 | 3.081 | 3.081 |
| 5 | 2.850 | 2.934 | 2.964 | 2.970 | 2.970 | 2.970 | 2.970 | 2.970 | 2.970 | 2.970 | 2.970 | 2.970 | 2.970 | 2.970 | 2.970 | 2.970 | 2.970 | 2.970 |
| 6 | 2.748 | 2.846 | 2.890 | 2.890 | 2.908 | 2.911 | 2.911 | 2.911 | 2.911 | 2.911 | 2.911 | 2.911 | 2.911 | 2.911 | 2.911 | 2.911 | 2.911 | 2.911 |
| 7 | 2.680 | 2.785 | 2.838 | 2.864 | 2.876 | 2.878 | 2.878 | 2.878 | 2.878 | 2.878 | 2.878 | 2.878 | 2.878 | 2.878 | 2.878 | 2.878 | 2.878 | 2.878 |
| 8 | 2.630 | 2.742 | 2.800 | 2.832 | 2.849 | 2.857 | 2.858 | 2.858 | 2.858 | 2.858 | 2.858 | 2.858 | 2.858 | 2.858 | 2.858 | 2.858 | 2.858 | 2.858 |
| 9 | 2.592 | 2.708 | 2.771 | 2.808 | 2.829 | 2.840 | 2.845 | 2.845 | 2.847 | 2.847 | 2.847 | 2.847 | 2.847 | 2.847 | 2.847 | 2.847 | 2.847 | 2.847 |
| 10 | 2.563 | 2.682 | 2.748 | 2.788 | 2.813 | 2.827 | 2.835 | 2.839 | 2.839 | 2.839 | 2.839 | 2.839 | 2.839 | 2.839 | 2.839 | 2.839 | 2.839 | 2.839 |
| 11 | 2.540 | 2.660 | 2.730 | 2.772 | 2.799 | 2.817 | 2.827 | 2.833 | 2.835 | 2.835 | 2.835 | 2.835 | 2.835 | 2.835 | 2.835 | 2.835 | 2.835 | 2.835 |
| 12 | 2.521 | 2.643 | 2.714 | 2.759 | 2.789 | 2.808 | 2.821 | 2.828 | 2.832 | 2.833 | 2.833 | 2.833 | 2.833 | 2.833 | 2.833 | 2.833 | 2.833 | 2.833 |
| 13 | 2.505 | 2.628 | 2.701 | 2.748 | 2.779 | 2.800 | 2.815 | 2.824 | 2.829 | 2.832 | 2.832 | 2.832 | 2.832 | 2.832 | 2.832 | 2.832 | 2.832 | 2.832 |
| 14 | 2.491 | 2.616 | 2.690 | 2.739 | 2.771 | 2.794 | 2.810 | 2.820 | 2.827 | 2.831 | 2.832 | 2.833 | 2.833 | 2.833 | 2.833 | 2.833 | 2.833 | 2.833 |
| 15 | 2.479 | 2.605 | 2.681 | 2.731 | 2.765 | 2.789 | 2.805 | 2.817 | 2.825 | 2.830 | 2.833 | 2.834 | 2.834 | 2.834 | 2.834 | 2.834 | 2.834 | 2.834 |
| 16 | 2.469 | 2.596 | 2.673 | 2.723 | 2.759 | 2.784 | 2.802 | 2.815 | 2.824 | 2.829 | 2.833 | 2.835 | 2.836 | 2.836 | 2.836 | 2.836 | 2.836 | 2.836 |
| 17 | 2.460 | 2.588 | 2.665 | 2.717 | 2.753 | 2.780 | 2.798 | 2.812 | 2.822 | 2.832 | 2.834 | 2.836 | 2.838 | 2.838 | 2.838 | 2.838 | 2.838 | 2.838 |
| 18 | 2.452 | 2.580 | 2.659 | 2.712 | 2.749 | 2.776 | 2.796 | 2.810 | 2.821 | 2.828 | 2.834 | 2.838 | 2.840 | 2.840 | 2.840 | 2.840 | 2.840 | 2.840 |
| 19 | 2.445 | 2.574 | 2.653 | 2.707 | 2.745 | 2.773 | 2.793 | 2.808 | 2.820 | 2.828 | 2.834 | 2.841 | 2.842 | 2.843 | 2.843 | 2.843 | 2.843 | 2.843 |
| 20 | 2.439 | 2.568 | 2.648 | 2.702 | 2.741 | 2.770 | 2.791 | 2.807 | 2.819 | 2.828 | 2.834 | 2.839 | 2.843 | 2.845 | 2.845 | 2.845 | 2.845 | 2.845 |
| 24 | 2.420 | 2.550 | 2.632 | 2.688 | 2.729 | 2.760 | 2.783 | 2.801 | 2.816 | 2.827 | 2.835 | 2.842 | 2.848 | 2.851 | 2.854 | 2.856 | 2.857 | 2.857 |
| 30 | 2.400 | 2.532 | 2.615 | 2.674 | 2.717 | 2.750 | 2.776 | 2.796 | 2.813 | 2.826 | 2.837 | 2.846 | 2.853 | 2.859 | 2.863 | 2.867 | 2.869 | 2.871 |
| 40 | 2.381 | 2.514 | 2.600 | 2.660 | 2.705 | 2.741 | 2.769 | 2.791 | 2.810 | 2.825 | 2.838 | 2.849 | 2.858 | 2.866 | 2.873 | 2.878 | 2.883 | 2.887 |
| 60 | 2.363 | 2.497 | 2.584 | 2.646 | 2.694 | 2.731 | 2.761 | 2.786 | 2.807 | 2.825 | 2.839 | 2.853 | 2.864 | 2.874 | 2.883 | 2.890 | 2.897 | 2.903 |
| 120 | 2.344 | 2.479 | 2.568 | 2.632 | 2.682 | 2.722 | 2.754 | 2.781 | 2.804 | 2.824 | 2.842 | 2.857 | 2.871 | 2.883 | 2.893 | 2.903 | 2.912 | 2.920 |
| ∞ | 2.326 | 2.462 | 2.552 | 2.619 | 2.670 | 2.712 | 2.746 | 2.776 | 2.801 | 2.824 | 2.844 | 2.861 | 2.877 | 2.892 | 2.905 | 2.918 | 2.929 | 2.939 |

Tabla A-11 (continuación)

{ $\alpha = 10\%$ }

| k | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 | 34 | 36 | 38 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 8.929 | 8.929 | 8.929 | 8.929 | 8.929 | 8.929 | 8.929 | 8.929 | 8.929 | 8.929 | 8.929 | 8.929 | 8.929 | 8.929 | 8.929 | 8.929 | 8.929 |
| 2 | 4.130 | 4.130 | 4.130 | 4.130 | 4.130 | 4.130 | 4.130 | 4.130 | 4.130 | 4.130 | 4.130 | 4.130 | 4.130 | 4.130 | 4.130 | 4.130 | 4.130 |
| 3 | 3.330 | 3.330 | 3.330 | 3.330 | 3.330 | 3.330 | 3.330 | 3.330 | 3.330 | 3.330 | 3.330 | 3.330 | 3.330 | 3.330 | 3.330 | 3.330 | 3.330 |
| 4 | 3.081 | 3.081 | 3.081 | 3.081 | 3.081 | 3.081 | 3.081 | 3.081 | 3.081 | 3.081 | 3.081 | 3.081 | 3.081 | 3.081 | 3.081 | 3.081 | 3.081 |
| 5 | 2.970 | 2.970 | 2.970 | 2.970 | 2.970 | 2.970 | 2.970 | 2.970 | 2.970 | 2.970 | 2.970 | 2.970 | 2.970 | 2.970 | 2.970 | 2.970 | 2.970 |
| 6 | 2.911 | 2.911 | 2.911 | 2.911 | 2.911 | 2.911 | 2.911 | 2.911 | 2.911 | 2.911 | 2.911 | 2.911 | 2.911 | 2.911 | 2.911 | 2.911 | 2.911 |
| 7 | 2.878 | 2.878 | 2.878 | 2.878 | 2.878 | 2.878 | 2.878 | 2.878 | 2.878 | 2.878 | 2.878 | 2.878 | 2.878 | 2.878 | 2.878 | 2.878 | 2.878 |
| 8 | 2.858 | 2.858 | 2.858 | 2.858 | 2.858 | 2.858 | 2.858 | 2.858 | 2.858 | 2.858 | 2.858 | 2.858 | 2.858 | 2.858 | 2.858 | 2.858 | 2.858 |
| 9 | 2.847 | 2.847 | 2.847 | 2.847 | 2.847 | 2.847 | 2.847 | 2.847 | 2.847 | 2.847 | 2.847 | 2.847 | 2.847 | 2.847 | 2.847 | 2.847 | 2.847 |
| 10 | 2.839 | 2.839 | 2.839 | 2.839 | 2.839 | 2.839 | 2.839 | 2.839 | 2.839 | 2.839 | 2.839 | 2.839 | 2.839 | 2.839 | 2.839 | 2.839 | 2.839 |
| 11 | 2.835 | 2.835 | 2.835 | 2.835 | 2.835 | 2.835 | 2.835 | 2.835 | 2.835 | 2.835 | 2.835 | 2.835 | 2.835 | 2.835 | 2.835 | 2.835 | 2.835 |
| 12 | 2.833 | 2.833 | 2.833 | 2.833 | 2.833 | 2.833 | 2.833 | 2.833 | 2.833 | 2.833 | 2.833 | 2.833 | 2.833 | 2.833 | 2.833 | 2.833 | 2.833 |
| 13 | 2.832 | 2.832 | 2.832 | 2.832 | 2.832 | 2.832 | 2.832 | 2.832 | 2.832 | 2.832 | 2.832 | 2.832 | 2.832 | 2.832 | 2.832 | 2.832 | 2.832 |
| 14 | 2.833 | 2.833 | 2.833 | 2.833 | 2.833 | 2.833 | 2.833 | 2.833 | 2.833 | 2.833 | 2.833 | 2.833 | 2.833 | 2.833 | 2.833 | 2.833 | 2.833 |
| 15 | 2.834 | 2.834 | 2.834 | 2.834 | 2.834 | 2.834 | 2.834 | 2.834 | 2.834 | 2.834 | 2.834 | 2.834 | 2.834 | 2.834 | 2.834 | 2.834 | 2.834 |
| 16 | 2.836 | 2.836 | 2.836 | 2.836 | 2.836 | 2.836 | 2.836 | 2.836 | 2.836 | 2.836 | 2.836 | 2.836 | 2.836 | 2.836 | 2.836 | 2.836 | 2.836 |
| 17 | 2.838 | 2.838 | 2.838 | 2.838 | 2.838 | 2.838 | 2.838 | 2.838 | 2.838 | 2.838 | 2.838 | 2.838 | 2.838 | 2.838 | 2.838 | 2.838 | 2.838 |
| 18 | 2.840 | 2.840 | 2.840 | 2.840 | 2.840 | 2.840 | 2.840 | 2.840 | 2.840 | 2.840 | 2.840 | 2.840 | 2.840 | 2.840 | 2.840 | 2.840 | 2.840 |
| 19 | 2.843 | 2.843 | 2.843 | 2.843 | 2.843 | 2.843 | 2.843 | 2.843 | 2.843 | 2.843 | 2.843 | 2.843 | 2.843 | 2.843 | 2.843 | 2.843 | 2.843 |
| 20 | 2.845 | 2.845 | 2.845 | 2.845 | 2.845 | 2.845 | 2.845 | 2.845 | 2.845 | 2.845 | 2.845 | 2.845 | 2.845 | 2.845 | 2.845 | 2.845 | 2.845 |
| 24 | 2.857 | 2.857 | 2.857 | 2.857 | 2.857 | 2.857 | 2.857 | 2.857 | 2.857 | 2.857 | 2.857 | 2.857 | 2.857 | 2.857 | 2.857 | 2.857 | 2.857 |
| 30 | 2.873 | 2.873 | 2.873 | 2.873 | 2.873 | 2.873 | 2.873 | 2.873 | 2.873 | 2.873 | 2.873 | 2.873 | 2.873 | 2.873 | 2.873 | 2.873 | 2.873 |
| 40 | 2.890 | 2.894 | 2.897 | 2.898 | 2.898 | 2.898 | 2.898 | 2.898 | 2.898 | 2.898 | 2.898 | 2.898 | 2.898 | 2.898 | 2.898 | 2.898 | 2.898 |
| 60 | 2.908 | 2.916 | 2.923 | 2.927 | 2.931 | 2.933 | 2.935 | 2.935 | 2.936 | 2.936 | 2.936 | 2.936 | 2.936 | 2.936 | 2.936 | 2.936 | 2.936 |
| 120 | 2.928 | 2.940 | 2.951 | 2.960 | 2.967 | 2.974 | 2.979 | 2.984 | 2.988 | 2.991 | 2.994 | 3.001 | 3.001 | 3.001 | 3.001 | 3.001 | 3.001 |
| x | 2.949 | 2.966 | 2.982 | 2.995 | 3.008 | 3.019 | 3.029 | 3.038 | 3.047 | 3.054 | 3.062 | 3.091 | 3.113 | 3.129 | 3.143 | 3.154 | 3.163 |

Tabla A-II (continuación)

{ $\alpha = 5\%$ }

| $g \cdot \ell^k$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 17.97 | 17.97 | 17.97 | 17.97 | 17.97 | 17.97 | 17.97 | 17.97 | 17.97 | 17.97 | 17.97 | 17.97 | 17.97 | 17.97 | 17.97 | 17.97 | 17.97 | 17.97 |
| 2 | 6.085 | 6.085 | 6.085 | 6.085 | 6.085 | 6.085 | 6.085 | 6.085 | 6.085 | 6.085 | 6.085 | 6.085 | 6.085 | 6.085 | 6.085 | 6.085 | 6.085 | 6.085 |
| 3 | 4.501 | 4.516 | 4.516 | 4.516 | 4.516 | 4.516 | 4.516 | 4.516 | 4.516 | 4.516 | 4.516 | 4.516 | 4.516 | 4.516 | 4.516 | 4.516 | 4.516 | 4.516 |
| 4 | 3.927 | 4.013 | 4.033 | 4.033 | 4.033 | 4.033 | 4.033 | 4.033 | 4.033 | 4.033 | 4.033 | 4.033 | 4.033 | 4.033 | 4.033 | 4.033 | 4.033 | 4.033 |
| 5 | 3.635 | 3.749 | 3.797 | 3.814 | 3.814 | 3.814 | 3.814 | 3.814 | 3.814 | 3.814 | 3.814 | 3.814 | 3.814 | 3.814 | 3.814 | 3.814 | 3.814 | 3.814 |
| 6 | 3.461 | 3.587 | 3.649 | 3.680 | 3.694 | 3.697 | 3.697 | 3.697 | 3.697 | 3.697 | 3.697 | 3.697 | 3.697 | 3.697 | 3.697 | 3.697 | 3.697 | 3.697 |
| 7 | 3.344 | 3.477 | 3.548 | 3.588 | 3.611 | 3.622 | 3.622 | 3.622 | 3.622 | 3.622 | 3.622 | 3.622 | 3.622 | 3.622 | 3.622 | 3.622 | 3.622 | 3.622 |
| 8 | 3.261 | 3.399 | 3.475 | 3.521 | 3.549 | 3.566 | 3.575 | 3.579 | 3.579 | 3.579 | 3.579 | 3.579 | 3.579 | 3.579 | 3.579 | 3.579 | 3.579 | 3.579 |
| 9 | 3.199 | 3.339 | 3.420 | 3.470 | 3.502 | 3.523 | 3.536 | 3.544 | 3.544 | 3.547 | 3.547 | 3.547 | 3.547 | 3.547 | 3.547 | 3.547 | 3.547 | 3.547 |
| 10 | 3.151 | 3.293 | 3.376 | 3.430 | 3.465 | 3.489 | 3.505 | 3.516 | 3.516 | 3.522 | 3.522 | 3.522 | 3.522 | 3.522 | 3.522 | 3.522 | 3.522 | 3.522 |
| 11 | 3.113 | 3.256 | 3.342 | 3.397 | 3.435 | 3.462 | 3.480 | 3.493 | 3.501 | 3.506 | 3.509 | 3.510 | 3.510 | 3.510 | 3.510 | 3.510 | 3.510 | 3.510 |
| 12 | 3.082 | 3.225 | 3.313 | 3.370 | 3.410 | 3.439 | 3.459 | 3.474 | 3.484 | 3.491 | 3.496 | 3.498 | 3.499 | 3.499 | 3.499 | 3.499 | 3.499 | 3.499 |
| 13 | 3.055 | 3.200 | 3.289 | 3.348 | 3.389 | 3.419 | 3.442 | 3.458 | 3.470 | 3.478 | 3.484 | 3.488 | 3.490 | 3.490 | 3.490 | 3.490 | 3.490 | 3.490 |
| 14 | 3.033 | 3.178 | 3.268 | 3.329 | 3.372 | 3.403 | 3.426 | 3.444 | 3.457 | 3.467 | 3.474 | 3.479 | 3.482 | 3.484 | 3.484 | 3.485 | 3.485 | 3.485 |
| 15 | 3.014 | 3.160 | 3.250 | 3.312 | 3.356 | 3.389 | 3.413 | 3.432 | 3.446 | 3.457 | 3.465 | 3.471 | 3.476 | 3.478 | 3.480 | 3.481 | 3.481 | 3.481 |
| 16 | 2.998 | 3.144 | 3.235 | 3.298 | 3.343 | 3.376 | 3.402 | 3.422 | 3.437 | 3.449 | 3.458 | 3.465 | 3.470 | 3.473 | 3.477 | 3.478 | 3.478 | 3.478 |
| 17 | 2.984 | 3.130 | 3.222 | 3.285 | 3.331 | 3.366 | 3.392 | 3.412 | 3.429 | 3.441 | 3.451 | 3.459 | 3.465 | 3.469 | 3.473 | 3.475 | 3.476 | 3.476 |
| 18 | 2.971 | 3.118 | 3.210 | 3.274 | 3.321 | 3.356 | 3.383 | 3.405 | 3.421 | 3.435 | 3.445 | 3.454 | 3.460 | 3.465 | 3.470 | 3.472 | 3.474 | 3.474 |
| 19 | 2.960 | 3.10" | 3.199 | 3.264 | 3.311 | 3.347 | 3.375 | 3.397 | 3.415 | 3.429 | 3.440 | 3.449 | 3.456 | 3.462 | 3.467 | 3.470 | 3.472 | 3.473 |
| 20 | 2.950 | 3.097 | 3.190 | 3.255 | 3.303 | 3.339 | 3.368 | 3.391 | 3.409 | 3.424 | 3.436 | 3.445 | 3.453 | 3.459 | 3.464 | 3.467 | 3.470 | 3.472 |
| 24 | 2.919 | 3.066 | 3.160 | 3.226 | 3.276 | 3.315 | 3.345 | 3.370 | 3.390 | 3.406 | 3.420 | 3.432 | 3.441 | 3.449 | 3.456 | 3.461 | 3.465 | 3.469 |
| 30 | 2.888 | 3.035 | 3.131 | 3.199 | 3.250 | 3.290 | 3.322 | 3.349 | 3.371 | 3.389 | 3.405 | 3.418 | 3.430 | 3.439 | 3.447 | 3.454 | 3.460 | 3.466 |
| 40 | 2.858 | 3.006 | 3.102 | 3.171 | 3.224 | 3.266 | 3.300 | 3.328 | 3.352 | 3.373 | 3.390 | 3.405 | 3.418 | 3.429 | 3.439 | 3.448 | 3.456 | 3.463 |
| 60 | 2.829 | 2.976 | 3.073 | 3.143 | 3.198 | 3.241 | 3.277 | 3.307 | 3.333 | 3.355 | 3.374 | 3.391 | 3.406 | 3.419 | 3.431 | 3.442 | 3.451 | 3.460 |
| 120 | 2.800 | 2.947 | 3.045 | 3.116 | 3.172 | 3.217 | 3.254 | 3.287 | 3.314 | 3.337 | 3.359 | 3.377 | 3.394 | 3.409 | 3.423 | 3.435 | 3.446 | 3.457 |
| ∞ | 2.772 | 2.918 | 3.017 | 3.089 | 3.146 | 3.193 | 3.232 | 3.265 | 3.294 | 3.320 | 3.343 | 3.363 | 3.382 | 3.399 | 3.414 | 3.428 | 3.442 | 3.454 |

Tabla A-11 (continuación)
{ $\alpha = 5\%$ }

| q_{ℓ} | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 | 34 | 36 | 38 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 17.97 | 17.97 | 17.97 | 17.97 | 17.97 | 17.97 | 17.97 | 17.97 | 17.97 | 17.97 | 17.97 | 17.97 | 17.97 | 17.97 | 17.97 | 17.97 | 17.97 |
| 2 | 6.085 | 6.085 | 6.085 | 6.085 | 6.085 | 6.085 | 6.085 | 6.085 | 6.085 | 6.085 | 6.085 | 6.085 | 6.085 | 6.085 | 6.085 | 6.085 | 6.085 |
| 3 | 4.516 | 4.516 | 4.516 | 4.516 | 4.516 | 4.516 | 4.516 | 4.516 | 4.516 | 4.516 | 4.516 | 4.516 | 4.516 | 4.516 | 4.516 | 4.516 | 4.516 |
| 4 | 4.033 | 4.033 | 4.033 | 4.033 | 4.033 | 4.033 | 4.033 | 4.033 | 4.033 | 4.033 | 4.033 | 4.033 | 4.033 | 4.033 | 4.033 | 4.033 | 4.033 |
| 5 | 3.814 | 3.814 | 3.814 | 3.814 | 3.814 | 3.814 | 3.814 | 3.814 | 3.814 | 3.814 | 3.814 | 3.814 | 3.814 | 3.814 | 3.814 | 3.814 | 3.814 |
| 6 | 3.697 | 3.697 | 3.697 | 3.697 | 3.697 | 3.697 | 3.697 | 3.697 | 3.697 | 3.697 | 3.697 | 3.697 | 3.697 | 3.697 | 3.697 | 3.697 | 3.697 |
| 7 | 3.626 | 3.626 | 3.626 | 3.626 | 3.626 | 3.626 | 3.626 | 3.626 | 3.626 | 3.626 | 3.626 | 3.626 | 3.626 | 3.626 | 3.626 | 3.626 | 3.626 |
| 8 | 3.579 | 3.579 | 3.579 | 3.579 | 3.579 | 3.579 | 3.579 | 3.579 | 3.579 | 3.579 | 3.579 | 3.579 | 3.579 | 3.579 | 3.579 | 3.579 | 3.579 |
| 9 | 3.547 | 3.547 | 3.547 | 3.547 | 3.547 | 3.547 | 3.547 | 3.547 | 3.547 | 3.547 | 3.547 | 3.547 | 3.547 | 3.547 | 3.547 | 3.547 | 3.547 |
| 10 | 3.526 | 3.526 | 3.526 | 3.526 | 3.526 | 3.526 | 3.526 | 3.526 | 3.526 | 3.526 | 3.526 | 3.526 | 3.526 | 3.526 | 3.526 | 3.526 | 3.526 |
| 11 | 3.510 | 3.510 | 3.510 | 3.510 | 3.510 | 3.510 | 3.510 | 3.510 | 3.510 | 3.510 | 3.510 | 3.510 | 3.510 | 3.510 | 3.510 | 3.510 | 3.510 |
| 12 | 3.499 | 3.499 | 3.499 | 3.499 | 3.499 | 3.499 | 3.499 | 3.499 | 3.499 | 3.499 | 3.499 | 3.499 | 3.499 | 3.499 | 3.499 | 3.499 | 3.499 |
| 13 | 3.490 | 3.490 | 3.490 | 3.490 | 3.490 | 3.490 | 3.490 | 3.490 | 3.490 | 3.490 | 3.490 | 3.490 | 3.490 | 3.490 | 3.490 | 3.490 | 3.490 |
| 14 | 3.485 | 3.485 | 3.485 | 3.485 | 3.485 | 3.485 | 3.485 | 3.485 | 3.485 | 3.485 | 3.485 | 3.485 | 3.485 | 3.485 | 3.485 | 3.485 | 3.485 |
| 15 | 3.481 | 3.481 | 3.481 | 3.481 | 3.481 | 3.481 | 3.481 | 3.481 | 3.481 | 3.481 | 3.481 | 3.481 | 3.481 | 3.481 | 3.481 | 3.481 | 3.481 |
| 16 | 3.478 | 3.478 | 3.478 | 3.478 | 3.478 | 3.478 | 3.478 | 3.478 | 3.478 | 3.478 | 3.478 | 3.478 | 3.478 | 3.478 | 3.478 | 3.478 | 3.478 |
| 17 | 3.476 | 3.476 | 3.476 | 3.476 | 3.476 | 3.476 | 3.476 | 3.476 | 3.476 | 3.476 | 3.476 | 3.476 | 3.476 | 3.476 | 3.476 | 3.476 | 3.476 |
| 18 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 |
| 19 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 |
| 20 | 3.473 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 | 3.474 |
| 24 | 3.471 | 3.475 | 3.477 | 3.477 | 3.477 | 3.477 | 3.477 | 3.477 | 3.477 | 3.477 | 3.477 | 3.477 | 3.477 | 3.477 | 3.477 | 3.477 | 3.477 |
| 30 | 3.470 | 3.477 | 3.481 | 3.484 | 3.486 | 3.486 | 3.486 | 3.486 | 3.486 | 3.486 | 3.486 | 3.486 | 3.486 | 3.486 | 3.486 | 3.486 | 3.486 |
| 40 | 3.469 | 3.479 | 3.486 | 3.492 | 3.497 | 3.500 | 3.503 | 3.504 | 3.504 | 3.504 | 3.504 | 3.504 | 3.504 | 3.504 | 3.504 | 3.504 | 3.504 |
| 60 | 3.467 | 3.471 | 3.481 | 3.492 | 3.501 | 3.509 | 3.515 | 3.521 | 3.525 | 3.529 | 3.531 | 3.534 | 3.537 | 3.537 | 3.537 | 3.537 | 3.537 |
| 120 | 3.466 | 3.483 | 3.498 | 3.511 | 3.522 | 3.532 | 3.541 | 3.548 | 3.555 | 3.561 | 3.566 | 3.585 | 3.596 | 3.600 | 3.601 | 3.601 | 3.601 |
| ∞ | 3.466 | 3.486 | 3.505 | 3.522 | 3.536 | 3.550 | 3.562 | 3.574 | 3.584 | 3.594 | 3.603 | 3.640 | 3.668 | 3.690 | 3.708 | 3.722 | 3.735 |

Tabla A-II (continuación)

{ $\alpha = 1\%$ }

| Σ_{N} | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 90.03 | 90.03 | 90.03 | 90.03 | 90.03 | 90.03 | 90.03 | 90.03 | 90.03 | 90.03 | 90.03 | 90.03 | 90.03 | 90.03 | 90.03 | 90.03 | 90.03 | 90.03 |
| 2 | 14.04 | 14.04 | 14.04 | 14.04 | 14.04 | 14.04 | 14.04 | 14.04 | 14.04 | 14.04 | 14.04 | 14.04 | 14.04 | 14.04 | 14.04 | 14.04 | 14.04 | 14.04 |
| 3 | 8.261 | 8.321 | 8.321 | 8.321 | 8.321 | 8.321 | 8.321 | 8.321 | 8.321 | 8.321 | 8.321 | 8.321 | 8.321 | 8.321 | 8.321 | 8.321 | 8.321 | 8.321 |
| 4 | 6.512 | 6.677 | 6.740 | 6.756 | 6.756 | 6.756 | 6.756 | 6.756 | 6.756 | 6.756 | 6.756 | 6.756 | 6.756 | 6.756 | 6.756 | 6.756 | 6.756 | 6.756 |
| 5 | 5.702 | 5.893 | 5.989 | 6.040 | 6.065 | 6.074 | 6.074 | 6.074 | 6.074 | 6.074 | 6.074 | 6.074 | 6.074 | 6.074 | 6.074 | 6.074 | 6.074 | 6.074 |
| 6 | 5.243 | 5.439 | 5.549 | 5.614 | 5.655 | 5.680 | 5.694 | 5.701 | 5.703 | 5.703 | 5.703 | 5.703 | 5.703 | 5.703 | 5.703 | 5.703 | 5.703 | 5.703 |
| 7 | 4.949 | 5.145 | 5.260 | 5.334 | 5.383 | 5.416 | 5.439 | 5.454 | 5.464 | 5.470 | 5.472 | 5.472 | 5.472 | 5.472 | 5.472 | 5.472 | 5.472 | 5.472 |
| 8 | 4.746 | 4.939 | 5.057 | 5.135 | 5.189 | 5.227 | 5.256 | 5.276 | 5.291 | 5.302 | 5.309 | 5.314 | 5.316 | 5.317 | 5.317 | 5.317 | 5.317 | 5.317 |
| 9 | 4.596 | 4.787 | 4.906 | 4.986 | 5.043 | 5.086 | 5.118 | 5.142 | 5.160 | 5.174 | 5.185 | 5.193 | 5.199 | 5.203 | 5.205 | 5.206 | 5.206 | 5.206 |
| 10 | 4.482 | 4.671 | 4.790 | 4.871 | 4.931 | 4.975 | 5.010 | 5.037 | 5.058 | 5.074 | 5.088 | 5.106 | 5.112 | 5.117 | 5.120 | 5.122 | 5.124 | |
| 11 | 4.392 | 4.579 | 4.697 | 4.780 | 4.841 | 4.887 | 4.924 | 4.952 | 4.975 | 4.994 | 5.009 | 5.021 | 5.031 | 5.045 | 5.050 | 5.054 | 5.057 | |
| 12 | 4.320 | 4.504 | 4.622 | 4.706 | 4.767 | 4.815 | 4.852 | 4.883 | 4.907 | 4.927 | 4.944 | 4.958 | 4.969 | 4.978 | 4.986 | 4.993 | 4.998 | 5.002 |
| 13 | 4.260 | 4.442 | 4.560 | 4.644 | 4.706 | 4.755 | 4.793 | 4.824 | 4.850 | 4.872 | 4.889 | 4.904 | 4.917 | 4.928 | 4.937 | 4.944 | 4.950 | 4.956 |
| 14 | 4.210 | 4.391 | 4.508 | 4.591 | 4.654 | 4.704 | 4.743 | 4.775 | 4.802 | 4.824 | 4.843 | 4.859 | 4.872 | 4.884 | 4.894 | 4.902 | 4.910 | 4.916 |
| 15 | 4.168 | 4.347 | 4.463 | 4.547 | 4.610 | 4.660 | 4.700 | 4.733 | 4.760 | 4.783 | 4.803 | 4.820 | 4.834 | 4.857 | 4.866 | 4.874 | 4.881 | |
| 16 | 4.131 | 4.309 | 4.425 | 4.509 | 4.572 | 4.622 | 4.663 | 4.696 | 4.724 | 4.748 | 4.768 | 4.786 | 4.800 | 4.813 | 4.825 | 4.835 | 4.844 | 4.851 |
| 17 | 4.099 | 4.275 | 4.391 | 4.475 | 4.539 | 4.589 | 4.630 | 4.664 | 4.693 | 4.717 | 4.738 | 4.756 | 4.771 | 4.785 | 4.797 | 4.807 | 4.816 | 4.824 |
| 18 | 4.071 | 4.246 | 4.362 | 4.445 | 4.509 | 4.560 | 4.601 | 4.635 | 4.664 | 4.689 | 4.711 | 4.729 | 4.745 | 4.759 | 4.772 | 4.783 | 4.792 | 4.801 |
| 19 | 4.046 | 4.220 | 4.335 | 4.419 | 4.483 | 4.534 | 4.575 | 4.610 | 4.639 | 4.665 | 4.686 | 4.705 | 4.722 | 4.736 | 4.749 | 4.761 | 4.771 | 4.780 |
| 20 | 4.024 | 4.197 | 4.312 | 4.395 | 4.459 | 4.510 | 4.552 | 4.587 | 4.617 | 4.642 | 4.664 | 4.684 | 4.701 | 4.716 | 4.729 | 4.741 | 4.751 | 4.761 |
| 24 | 3.956 | 4.126 | 4.239 | 4.322 | 4.386 | 4.437 | 4.480 | 4.516 | 4.546 | 4.573 | 4.596 | 4.616 | 4.634 | 4.651 | 4.665 | 4.678 | 4.690 | 4.700 |
| 30 | 3.889 | 4.056 | 4.168 | 4.250 | 4.314 | 4.366 | 4.409 | 4.445 | 4.477 | 4.504 | 4.528 | 4.550 | 4.569 | 4.586 | 4.601 | 4.615 | 4.628 | 4.640 |
| 40 | 3.825 | 3.988 | 4.098 | 4.180 | 4.244 | 4.296 | 4.339 | 4.376 | 4.408 | 4.436 | 4.461 | 4.483 | 4.503 | 4.521 | 4.537 | 4.553 | 4.566 | 4.579 |
| 60 | 3.762 | 3.922 | 4.031 | 4.111 | 4.174 | 4.226 | 4.270 | 4.307 | 4.340 | 4.368 | 4.394 | 4.417 | 4.438 | 4.456 | 4.474 | 4.490 | 4.504 | 4.518 |
| 120 | 3.702 | 3.858 | 3.155 | 4.044 | 4.107 | 4.158 | 4.202 | 4.239 | 4.272 | 4.301 | 4.327 | 4.351 | 4.372 | 4.392 | 4.410 | 4.426 | 4.442 | 4.456 |
| 3643 | 3.796 | 3.,00 | 3.978 | 4.040 | 4.091 | 4.135 | 4.172 | 4.205 | 4.235 | 4.261 | 4.285 | 4.307 | 4.327 | 4.345 | 4.363 | 4.379 | 4.394 | |

Tabla A-11 (continuación)

{ $\alpha = 1\%$ }

| $g \cdot \ell^k$ | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 | 34 | 36 | 38 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 90.03 | 90.03 | 90.03 | 90.03 | 90.03 | 90.03 | 90.03 | 90.03 | 90.03 | 90.03 | 90.03 | 90.03 | 90.03 | 90.03 | 90.03 | 90.03 | 90.03 |
| 2 | 14.04 | 14.04 | 14.04 | 14.04 | 14.04 | 14.04 | 14.04 | 14.04 | 14.04 | 14.04 | 14.04 | 14.04 | 14.04 | 14.04 | 14.04 | 14.04 | 14.04 |
| 3 | 8.321 | 8.321 | 8.321 | 8.321 | 8.321 | 8.321 | 8.321 | 8.321 | 8.321 | 8.321 | 8.321 | 8.321 | 8.321 | 8.321 | 8.321 | 8.321 | 8.321 |
| 4 | 6.756 | 6.756 | 6.756 | 6.756 | 6.756 | 6.756 | 6.756 | 6.756 | 6.756 | 6.756 | 6.756 | 6.756 | 6.756 | 6.756 | 6.756 | 6.756 | 6.756 |
| 5 | 6.074 | 6.074 | 6.074 | 6.074 | 6.074 | 6.074 | 6.074 | 6.074 | 6.074 | 6.074 | 6.074 | 6.074 | 6.074 | 6.074 | 6.074 | 6.074 | 6.074 |
| 6 | 5.703 | 5.703 | 5.703 | 5.703 | 5.703 | 5.703 | 5.703 | 5.703 | 5.703 | 5.703 | 5.703 | 5.703 | 5.703 | 5.703 | 5.703 | 5.703 | 5.703 |
| 7 | 5.472 | 5.472 | 5.472 | 5.472 | 5.472 | 5.472 | 5.472 | 5.472 | 5.472 | 5.472 | 5.472 | 5.472 | 5.472 | 5.472 | 5.472 | 5.472 | 5.472 |
| 8 | 5.317 | 5.317 | 5.317 | 5.317 | 5.317 | 5.317 | 5.317 | 5.317 | 5.317 | 5.317 | 5.317 | 5.317 | 5.317 | 5.317 | 5.317 | 5.317 | 5.317 |
| 9 | 5.206 | 5.206 | 5.206 | 5.206 | 5.206 | 5.206 | 5.206 | 5.206 | 5.206 | 5.206 | 5.206 | 5.206 | 5.206 | 5.206 | 5.206 | 5.206 | 5.206 |
| 10 | 5.124 | 5.124 | 5.124 | 5.124 | 5.124 | 5.124 | 5.124 | 5.124 | 5.124 | 5.124 | 5.124 | 5.124 | 5.124 | 5.124 | 5.124 | 5.124 | 5.124 |
| 11 | 5.059 | 5.061 | 5.061 | 5.061 | 5.061 | 5.061 | 5.061 | 5.061 | 5.061 | 5.061 | 5.061 | 5.061 | 5.061 | 5.061 | 5.061 | 5.061 | 5.061 |
| 12 | 5.006 | 5.010 | 5.011 | 5.011 | 5.011 | 5.011 | 5.011 | 5.011 | 5.011 | 5.011 | 5.011 | 5.011 | 5.011 | 5.011 | 5.011 | 5.011 | 5.011 |
| 13 | 4.960 | 4.966 | 4.970 | 4.972 | 4.972 | 4.972 | 4.972 | 4.972 | 4.972 | 4.972 | 4.972 | 4.972 | 4.972 | 4.972 | 4.972 | 4.972 | 4.972 |
| 14 | 4.921 | 4.929 | 4.935 | 4.938 | 4.940 | 4.940 | 4.940 | 4.940 | 4.940 | 4.940 | 4.940 | 4.940 | 4.940 | 4.940 | 4.940 | 4.940 | 4.940 |
| 15 | 4.887 | 4.897 | 4.904 | 4.909 | 4.912 | 4.914 | 4.914 | 4.914 | 4.914 | 4.914 | 4.914 | 4.914 | 4.914 | 4.914 | 4.914 | 4.914 | 4.914 |
| 16 | 4.858 | 4.869 | 4.877 | 4.883 | 4.887 | 4.890 | 4.892 | 4.892 | 4.892 | 4.892 | 4.892 | 4.892 | 4.892 | 4.892 | 4.892 | 4.892 | 4.892 |
| 17 | 4.832 | 4.844 | 4.853 | 4.860 | 4.865 | 4.869 | 4.872 | 4.873 | 4.874 | 4.874 | 4.874 | 4.874 | 4.874 | 4.874 | 4.874 | 4.874 | 4.874 |
| 18 | 4.808 | 4.821 | 4.832 | 4.839 | 4.846 | 4.850 | 4.854 | 4.856 | 4.857 | 4.858 | 4.858 | 4.858 | 4.858 | 4.858 | 4.858 | 4.858 | 4.858 |
| 19 | 4.788 | 4.802 | 4.812 | 4.821 | 4.828 | 4.833 | 4.838 | 4.841 | 4.843 | 4.844 | 4.845 | 4.845 | 4.845 | 4.845 | 4.845 | 4.845 | 4.845 |
| 20 | 4.769 | 4.784 | 4.795 | 4.805 | 4.813 | 4.818 | 4.823 | 4.827 | 4.830 | 4.832 | 4.833 | 4.833 | 4.833 | 4.833 | 4.833 | 4.833 | 4.833 |
| 24 | 4.710 | 4.727 | 4.741 | 4.752 | 4.762 | 4.770 | 4.777 | 4.783 | 4.788 | 4.791 | 4.794 | 4.802 | 4.802 | 4.802 | 4.802 | 4.802 | 4.802 |
| 30 | 4.650 | 4.669 | 4.685 | 4.699 | 4.711 | 4.721 | 4.730 | 4.738 | 4.744 | 4.750 | 4.755 | 4.772 | 4.777 | 4.777 | 4.777 | 4.777 | 4.777 |
| 40 | 4.591 | 4.611 | 4.630 | 4.645 | 4.659 | 4.671 | 4.682 | 4.692 | 4.700 | 4.708 | 4.715 | 4.740 | 4.754 | 4.761 | 4.764 | 4.764 | 4.764 |
| 60 | 4.530 | 4.553 | 4.573 | 4.591 | 4.607 | 4.620 | 4.633 | 4.645 | 4.655 | 4.673 | 4.707 | 4.730 | 4.745 | 4.755 | 4.761 | 4.765 | 4.765 |
| 120 | 4.469 | 4.494 | 4.516 | 4.535 | 4.552 | 4.568 | 4.583 | 4.596 | 4.609 | 4.619 | 4.630 | 4.673 | 4.703 | 4.727 | 4.745 | 4.759 | 4.770 |
| x | 4.408 | 4.434 | 4.457 | 4.478 | 4.497 | 4.514 | 4.530 | 4.545 | 4.559 | 4.572 | 4.584 | 4.635 | 4.675 | 4.707 | 4.734 | 4.756 | 4.776 |

Tabla A-11 (continuación)

{ $\alpha = 0.5\%$ }

| $q \cdot \ell \cdot k$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 180.1 | 180.1 | 180.1 | 180.1 | 180.1 | 180.1 | 180.1 | 180.1 | 180.1 | 180.1 | 180.1 | 180.1 | 180.1 | 180.1 | 180.1 | 180.1 | 180.1 | 180.1 |
| 2 | 19.93 | 19.93 | 19.93 | 19.93 | 19.93 | 19.93 | 19.93 | 19.93 | 19.93 | 19.93 | 19.93 | 19.93 | 19.93 | 19.93 | 19.93 | 19.93 | 19.93 | 19.93 |
| 3 | 10.55 | 10.63 | 10.63 | 10.63 | 10.63 | 10.63 | 10.63 | 10.63 | 10.63 | 10.63 | 10.63 | 10.63 | 10.63 | 10.63 | 10.63 | 10.63 | 10.63 | 10.63 |
| 4 | 7.916 | 8.126 | 8.210 | 8.238 | 8.238 | 8.238 | 8.238 | 8.238 | 8.238 | 8.238 | 8.238 | 8.238 | 8.238 | 8.238 | 8.238 | 8.238 | 8.238 | 8.238 |
| 5 | 6.751 | 6.980 | 7.100 | 7.167 | 7.204 | 7.222 | 7.228 | 7.228 | 7.228 | 7.228 | 7.228 | 7.228 | 7.228 | 7.228 | 7.228 | 7.228 | 7.228 | 7.228 |
| 6 | 6.105 | 6.334 | 6.466 | 6.547 | 6.600 | 6.635 | 6.658 | 6.672 | 6.679 | 6.682 | 6.682 | 6.682 | 6.682 | 6.682 | 6.682 | 6.682 | 6.682 | 6.682 |
| 7 | 5.699 | 5.922 | 6.057 | 6.145 | 6.207 | 6.250 | 6.281 | 6.304 | 6.320 | 6.331 | 6.339 | 6.343 | 6.345 | 6.345 | 6.345 | 6.345 | 6.345 | 6.345 |
| 8 | 5.420 | 5.638 | 5.773 | 5.864 | 5.930 | 5.978 | 6.014 | 6.042 | 6.064 | 6.080 | 6.092 | 6.101 | 6.108 | 6.113 | 6.116 | 6.116 | 6.116 | 6.116 |
| 9 | 5.218 | 5.430 | 5.565 | 5.657 | 5.725 | 5.776 | 5.815 | 5.846 | 5.871 | 5.891 | 5.907 | 5.920 | 5.938 | 5.944 | 5.949 | 5.952 | 5.952 | 5.952 |
| 10 | 5.065 | 5.273 | 5.405 | 5.498 | 5.567 | 5.620 | 5.662 | 5.695 | 5.722 | 5.744 | 5.762 | 5.777 | 5.790 | 5.800 | 5.816 | 5.821 | 5.826 | 5.826 |
| 11 | 4.945 | 5.149 | 5.280 | 5.372 | 5.442 | 5.496 | 5.539 | 5.574 | 5.603 | 5.626 | 5.646 | 5.663 | 5.678 | 5.690 | 5.700 | 5.709 | 5.716 | 5.722 |
| 12 | 4.849 | 5.048 | 5.178 | 5.270 | 5.341 | 5.396 | 5.439 | 5.475 | 5.505 | 5.531 | 5.552 | 5.570 | 5.585 | 5.599 | 5.610 | 5.620 | 5.629 | 5.636 |
| 13 | 4.770 | 4.966 | 5.094 | 5.186 | 5.256 | 5.312 | 5.356 | 5.393 | 5.424 | 5.450 | 5.472 | 5.492 | 5.508 | 5.523 | 5.535 | 5.546 | 5.556 | 5.564 |
| 14 | 4.704 | 4.897 | 5.023 | 5.116 | 5.185 | 5.241 | 5.286 | 5.324 | 5.355 | 5.382 | 5.405 | 5.425 | 5.442 | 5.458 | 5.471 | 5.483 | 5.494 | 5.503 |
| 15 | 4.647 | 4.838 | 4.964 | 5.055 | 5.125 | 5.181 | 5.226 | 5.264 | 5.297 | 5.324 | 5.348 | 5.368 | 5.386 | 5.402 | 5.416 | 5.429 | 5.440 | 5.450 |
| 16 | 4.599 | 4.787 | 4.912 | 5.003 | 5.073 | 5.129 | 5.175 | 5.213 | 5.245 | 5.273 | 5.298 | 5.319 | 5.338 | 5.354 | 5.368 | 5.381 | 5.393 | 5.404 |
| 17 | 4.557 | 4.744 | 4.867 | 4.958 | 5.027 | 5.084 | 5.130 | 5.168 | 5.201 | 5.229 | 5.254 | 5.275 | 5.295 | 5.311 | 5.327 | 5.340 | 5.352 | 5.363 |
| 18 | 4.521 | 4.705 | 4.828 | 4.918 | 4.987 | 5.043 | 5.090 | 5.129 | 5.162 | 5.190 | 5.215 | 5.237 | 5.256 | 5.274 | 5.289 | 5.303 | 5.316 | 5.327 |
| 19 | 4.488 | 4.671 | 4.793 | 4.883 | 4.952 | 5.008 | 5.054 | 5.093 | 5.127 | 5.156 | 5.181 | 5.203 | 5.222 | 5.240 | 5.256 | 5.270 | 5.283 | 5.295 |
| 20 | 4.460 | 4.641 | 4.762 | 4.851 | 4.920 | 4.976 | 5.022 | 5.061 | 5.095 | 5.124 | 5.150 | 5.172 | 5.193 | 5.210 | 5.226 | 5.241 | 5.254 | 5.266 |
| 24 | 4.371 | 4.547 | 4.666 | 4.753 | 4.822 | 4.877 | 4.924 | 4.963 | 4.997 | 5.027 | 5.053 | 5.076 | 5.097 | 5.116 | 5.133 | 5.148 | 5.162 | 5.175 |
| 30 | 4.285 | 4.456 | 4.572 | 4.658 | 4.726 | 4.781 | 4.827 | 4.867 | 4.901 | 4.931 | 4.958 | 4.981 | 5.003 | 5.022 | 5.040 | 5.056 | 5.071 | 5.085 |
| 40 | 4.202 | 4.369 | 4.482 | 4.566 | 4.632 | 4.687 | 4.733 | 4.772 | 4.806 | 4.837 | 4.864 | 4.888 | 4.910 | 4.930 | 4.948 | 4.965 | 4.980 | 4.995 |
| 60 | 4.122 | 4.284 | 4.394 | 4.476 | 4.541 | 4.595 | 4.640 | 4.679 | 4.713 | 4.744 | 4.771 | 4.796 | 4.818 | 4.838 | 4.857 | 4.874 | 4.890 | 4.905 |
| 120 | 4.045 | 4.201 | 4.308 | 4.388 | 4.452 | 4.505 | 4.550 | 4.588 | 4.622 | 4.652 | 4.679 | 4.704 | 4.726 | 4.747 | 4.766 | 4.784 | 4.800 | 4.815 |
| ∞ | 3.970 | 4.121 | 4.225 | 4.303 | 4.365 | 4.417 | 4.461 | 4.499 | 4.532 | 4.562 | 4.589 | 4.614 | 4.636 | 4.657 | 4.676 | 4.694 | 4.710 | 4.726 |

Tabla A-11 (continuación)

{ $\alpha = 0.5\%$ }

| $\frac{t}{n}$ | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 | 34 | 36 | 38 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 180.1 | 180.1 | 180.1 | 180.1 | 180.1 | 180.1 | 180.1 | 180.1 | 180.1 | 180.1 | 180.1 | 180.1 | 180.1 | 180.1 | 180.1 | 180.1 | 180.1 |
| 2 | 19.93 | 19.93 | 19.93 | 19.93 | 19.93 | 19.93 | 19.93 | 19.93 | 19.93 | 19.93 | 19.93 | 19.93 | 19.93 | 19.93 | 19.93 | 19.93 | 19.93 |
| 3 | 10.63 | 10.63 | 10.63 | 10.63 | 10.63 | 10.63 | 10.63 | 10.63 | 10.63 | 10.63 | 10.63 | 10.63 | 10.63 | 10.63 | 10.63 | 10.63 | 10.63 |
| 4 | 8.238 | 8.238 | 8.238 | 8.238 | 8.238 | 8.238 | 8.238 | 8.238 | 8.238 | 8.238 | 8.238 | 8.238 | 8.238 | 8.238 | 8.238 | 8.238 | 8.238 |
| 5 | 7.228 | 7.228 | 7.228 | 7.228 | 7.228 | 7.228 | 7.228 | 7.228 | 7.228 | 7.228 | 7.228 | 7.228 | 7.228 | 7.228 | 7.228 | 7.228 | 7.228 |
| 6 | 6.682 | 6.682 | 6.682 | 6.682 | 6.682 | 6.682 | 6.682 | 6.682 | 6.682 | 6.682 | 6.682 | 6.682 | 6.682 | 6.682 | 6.682 | 6.682 | 6.682 |
| 7 | 6.345 | 6.345 | 6.345 | 6.345 | 6.345 | 6.345 | 6.345 | 6.345 | 6.345 | 6.345 | 6.345 | 6.345 | 6.345 | 6.345 | 6.345 | 6.345 | 6.345 |
| 8 | 6.119 | 6.119 | 6.119 | 6.119 | 6.119 | 6.119 | 6.119 | 6.119 | 6.119 | 6.119 | 6.119 | 6.119 | 6.119 | 6.119 | 6.119 | 6.119 | 6.119 |
| 9 | 5.956 | 5.957 | 5.957 | 5.957 | 5.957 | 5.957 | 5.957 | 5.957 | 5.957 | 5.957 | 5.957 | 5.957 | 5.957 | 5.957 | 5.957 | 5.957 | 5.957 |
| 10 | 5.829 | 5.834 | 5.836 | 5.836 | 5.836 | 5.836 | 5.836 | 5.836 | 5.836 | 5.836 | 5.836 | 5.836 | 5.836 | 5.836 | 5.836 | 5.836 | 5.836 |
| 11 | 5.727 | 5.735 | 5.740 | 5.743 | 5.744 | 5.744 | 5.744 | 5.744 | 5.744 | 5.744 | 5.744 | 5.744 | 5.744 | 5.744 | 5.744 | 5.744 | 5.744 |
| 12 | 5.642 | 5.653 | 5.660 | 5.665 | 5.668 | 5.670 | 5.670 | 5.670 | 5.670 | 5.670 | 5.670 | 5.670 | 5.670 | 5.670 | 5.670 | 5.670 | 5.670 |
| 13 | 5.571 | 5.583 | 5.593 | 5.600 | 5.605 | 5.608 | 5.610 | 5.611 | 5.611 | 5.611 | 5.611 | 5.611 | 5.611 | 5.611 | 5.611 | 5.611 | 5.611 |
| 14 | 5.511 | 5.525 | 5.535 | 5.544 | 5.550 | 5.555 | 5.559 | 5.561 | 5.563 | 5.563 | 5.563 | 5.563 | 5.563 | 5.563 | 5.563 | 5.563 | 5.563 |
| 15 | 5.459 | 5.474 | 5.486 | 5.495 | 5.503 | 5.509 | 5.514 | 5.518 | 5.520 | 5.522 | 5.523 | 5.523 | 5.523 | 5.523 | 5.523 | 5.523 | 5.523 |
| 16 | 5.413 | 5.429 | 5.442 | 5.453 | 5.462 | 5.469 | 5.475 | 5.479 | 5.483 | 5.485 | 5.488 | 5.489 | 5.489 | 5.489 | 5.489 | 5.489 | 5.489 |
| 17 | 5.373 | 5.390 | 5.404 | 5.416 | 5.425 | 5.433 | 5.440 | 5.445 | 5.450 | 5.453 | 5.456 | 5.461 | 5.461 | 5.461 | 5.461 | 5.461 | 5.461 |
| 18 | 5.338 | 5.355 | 5.370 | 5.383 | 5.393 | 5.402 | 5.409 | 5.415 | 5.420 | 5.425 | 5.428 | 5.436 | 5.436 | 5.436 | 5.436 | 5.436 | 5.436 |
| 19 | 5.306 | 5.325 | 5.340 | 5.353 | 5.364 | 5.374 | 5.382 | 5.388 | 5.395 | 5.399 | 5.403 | 5.414 | 5.415 | 5.415 | 5.415 | 5.415 | 5.415 |
| 20 | 5.277 | 5.286 | 5.313 | 5.326 | 5.338 | 5.348 | 5.357 | 5.364 | 5.370 | 5.376 | 5.380 | 5.394 | 5.397 | 5.397 | 5.397 | 5.397 | 5.397 |
| 24 | 5.187 | 5.209 | 5.226 | 5.242 | 5.255 | 5.267 | 5.278 | 5.287 | 5.295 | 5.302 | 5.308 | 5.329 | 5.340 | 5.343 | 5.343 | 5.343 | 5.343 |
| 30 | 5.098 | 5.120 | 5.140 | 5.157 | 5.172 | 5.186 | 5.198 | 5.209 | 5.218 | 5.227 | 5.235 | 5.264 | 5.281 | 5.297 | 5.298 | 5.298 | 5.298 |
| 40 | 5.008 | 5.032 | 5.054 | 5.072 | 5.089 | 5.104 | 5.118 | 5.130 | 5.141 | 5.151 | 5.160 | 5.197 | 5.221 | 5.238 | 5.249 | 5.257 | 5.261 |
| 60 | 4.919 | 4.944 | 4.967 | 4.987 | 5.005 | 5.021 | 5.036 | 5.050 | 5.062 | 5.074 | 5.084 | 5.128 | 5.159 | 5.182 | 5.199 | 5.213 | 5.223 |
| 120 | 4.830 | 4.856 | 4.880 | 4.901 | 4.920 | 4.937 | 4.953 | 4.968 | 4.982 | 4.995 | 5.007 | 5.056 | 5.094 | 5.123 | 5.146 | 5.166 | 5.182 |
| x | 4.740 | 4.767 | 4.792 | 4.813 | 4.833 | 4.852 | 4.869 | 4.885 | 4.899 | 4.913 | 4.926 | 4.981 | 5.024 | 5.059 | 5.088 | 5.114 | 5.136 |

Tabla A-II (continuación)

($\alpha = 0.1\%$)

| k_{g, ℓ_*} | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 900.3 | 900.3 | 900.3 | 900.3 | 900.3 | 900.3 | 900.3 | 900.3 | 900.3 | 900.3 | 900.3 | 900.3 | 900.3 | 900.3 | 900.3 | 900.3 | 900.3 | 900.3 |
| 2 | 44.69 | 44.69 | 44.69 | 44.69 | 44.69 | 44.69 | 44.69 | 44.69 | 44.69 | 44.69 | 44.69 | 44.69 | 44.69 | 44.69 | 44.69 | 44.69 | 44.69 | 44.69 |
| 3 | 18.28 | 18.45 | 18.45 | 18.45 | 18.45 | 18.45 | 18.45 | 18.45 | 18.45 | 18.45 | 18.45 | 18.45 | 18.45 | 18.45 | 18.45 | 18.45 | 18.45 | 18.45 |
| 4 | 12.18 | 12.52 | 12.67 | 12.73 | 12.75 | 12.75 | 12.75 | 12.75 | 12.75 | 12.75 | 12.75 | 12.75 | 12.75 | 12.75 | 12.75 | 12.75 | 12.75 | 12.75 |
| 5 | 9.714 | 10.05 | 10.24 | 10.35 | 10.42 | 10.46 | 10.48 | 10.48 | 10.49 | 10.49 | 10.49 | 10.49 | 10.49 | 10.49 | 10.49 | 10.49 | 10.49 | 10.49 |
| 6 | 8.427 | 8.743 | 8.932 | 9.055 | 9.139 | 9.198 | 9.241 | 9.272 | 9.294 | 9.319 | 9.339 | 9.359 | 9.379 | 9.399 | 9.399 | 9.399 | 9.399 | 9.399 |
| 7 | 7.648 | 7.943 | 8.127 | 8.252 | 8.342 | 8.409 | 8.460 | 8.500 | 8.530 | 8.555 | 8.574 | 8.589 | 8.609 | 8.616 | 8.621 | 8.624 | 8.624 | 8.626 |
| 8 | 7.130 | 7.407 | 7.584 | 7.708 | 7.799 | 7.869 | 7.924 | 7.968 | 8.004 | 8.033 | 8.057 | 8.078 | 8.094 | 8.108 | 8.119 | 8.129 | 8.137 | 8.143 |
| 9 | 6.762 | 7.024 | 7.195 | 7.316 | 7.407 | 7.478 | 7.535 | 7.582 | 7.619 | 7.652 | 7.679 | 7.702 | 7.722 | 7.739 | 7.753 | 7.766 | 7.777 | 7.786 |
| 10 | 6.487 | 6.738 | 6.902 | 7.021 | 7.111 | 7.182 | 7.240 | 7.287 | 7.327 | 7.361 | 7.390 | 7.415 | 7.437 | 7.456 | 7.472 | 7.487 | 7.500 | 7.511 |
| 11 | 6.275 | 6.516 | 6.676 | 6.791 | 6.880 | 6.950 | 7.008 | 7.056 | 7.097 | 7.132 | 7.162 | 7.188 | 7.211 | 7.231 | 7.250 | 7.266 | 7.280 | 7.293 |
| 12 | 6.106 | 6.340 | 6.494 | 6.607 | 6.695 | 6.765 | 6.822 | 6.870 | 6.911 | 6.947 | 6.978 | 7.005 | 7.029 | 7.050 | 7.069 | 7.086 | 7.102 | 7.116 |
| 13 | 5.970 | 6.195 | 6.346 | 6.457 | 6.543 | 6.612 | 6.670 | 6.718 | 6.759 | 6.795 | 6.826 | 6.854 | 6.878 | 6.900 | 6.920 | 6.937 | 6.954 | 6.968 |
| 14 | 5.856 | 6.075 | 6.223 | 6.332 | 6.416 | 6.485 | 6.542 | 6.590 | 6.631 | 6.667 | 6.699 | 6.727 | 6.752 | 6.774 | 6.794 | 6.812 | 6.829 | 6.844 |
| 15 | 5.760 | 5.974 | 6.119 | 6.225 | 6.309 | 6.377 | 6.433 | 6.481 | 6.522 | 6.558 | 6.590 | 6.619 | 6.644 | 6.666 | 6.687 | 6.706 | 6.723 | 6.739 |
| 16 | 5.678 | 5.888 | 6.030 | 6.135 | 6.217 | 6.284 | 6.340 | 6.388 | 6.429 | 6.465 | 6.497 | 6.525 | 6.551 | 6.574 | 6.595 | 6.614 | 6.631 | 6.647 |
| 17 | 5.608 | 5.813 | 5.953 | 6.056 | 6.138 | 6.204 | 6.260 | 6.307 | 6.348 | 6.384 | 6.416 | 6.444 | 6.470 | 6.493 | 6.514 | 6.533 | 6.551 | 6.567 |
| 18 | 5.546 | 5.748 | 5.886 | 5.988 | 6.068 | 6.134 | 6.189 | 6.236 | 6.277 | 6.313 | 6.345 | 6.373 | 6.399 | 6.422 | 6.443 | 6.462 | 6.480 | 6.497 |
| 19 | 5.492 | 5.691 | 5.826 | 5.927 | 6.007 | 6.072 | 6.127 | 6.174 | 6.214 | 6.250 | 6.281 | 6.310 | 6.336 | 6.359 | 6.380 | 6.400 | 6.418 | 6.434 |
| 20 | 5.444 | 5.640 | 5.774 | 5.873 | 5.952 | 6.017 | 6.071 | 6.117 | 6.158 | 6.193 | 6.225 | 6.254 | 6.279 | 6.303 | 6.324 | 6.344 | 6.362 | 6.379 |
| 24 | 5.297 | 5.484 | 5.612 | 5.708 | 5.784 | 5.846 | 5.899 | 5.945 | 5.984 | 6.020 | 6.051 | 6.079 | 6.105 | 6.129 | 6.150 | 6.170 | 6.188 | 6.205 |
| 30 | 5.156 | 5.335 | 5.457 | 5.549 | 5.622 | 5.682 | 5.734 | 5.778 | 5.817 | 5.851 | 5.882 | 5.910 | 5.935 | 5.958 | 5.980 | 6.000 | 6.018 | 6.036 |
| 40 | 5.022 | 5.191 | 5.308 | 5.396 | 5.466 | 5.524 | 5.574 | 5.617 | 5.654 | 5.688 | 5.718 | 5.745 | 5.770 | 5.793 | 5.814 | 5.834 | 5.852 | 5.869 |
| 60 | 4.894 | 5.055 | 5.166 | 5.249 | 5.317 | 5.372 | 5.420 | 5.461 | 5.498 | 5.530 | 5.559 | 5.586 | 5.610 | 5.632 | 5.653 | 5.672 | 5.690 | 5.707 |
| 120 | 4.771 | 4.924 | 5.029 | 5.109 | 5.173 | 5.226 | 5.271 | 5.311 | 5.346 | 5.377 | 5.405 | 5.431 | 5.454 | 5.476 | 5.496 | 5.515 | 5.532 | 5.549 |
| ∞ | 4.654 | 4.798 | 4.898 | 4.974 | 5.034 | 5.085 | 5.128 | 5.166 | 5.199 | 5.229 | 5.256 | 5.280 | 5.303 | 5.324 | 5.343 | 5.361 | 5.378 | 5.394 |

Tabla A-11 (continuación)

{ $\alpha = 0.1\%$ }

| $q \cdot k$ | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 | 34 | 36 | 38 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 900.3 | 900.3 | 900.3 | 900.3 | 900.3 | 900.3 | 900.3 | 900.3 | 900.3 | 900.3 | 900.3 | 900.3 | 900.3 | 900.3 | 900.3 | 900.3 | 900.3 |
| 2 | 44.69 | 44.69 | 44.69 | 44.69 | 44.69 | 44.69 | 44.69 | 44.69 | 44.69 | 44.69 | 44.69 | 44.69 | 44.69 | 44.69 | 44.69 | 44.69 | 44.69 |
| 3 | 18.45 | 18.45 | 18.45 | 18.45 | 18.45 | 18.45 | 18.45 | 18.45 | 18.45 | 18.45 | 18.45 | 18.45 | 18.45 | 18.45 | 18.45 | 18.45 | 18.45 |
| 4 | 12.75 | 12.75 | 12.75 | 12.75 | 12.75 | 12.75 | 12.75 | 12.75 | 12.75 | 12.75 | 12.75 | 12.75 | 12.75 | 12.75 | 12.75 | 12.75 | 12.75 |
| 5 | 10.49 | 10.49 | 10.49 | 10.49 | 10.49 | 10.49 | 10.49 | 10.49 | 10.49 | 10.49 | 10.49 | 10.49 | 10.49 | 10.49 | 10.49 | 10.49 | 10.49 |
| 6 | 9.329 | 9.329 | 9.329 | 9.329 | 9.329 | 9.329 | 9.329 | 9.329 | 9.329 | 9.329 | 9.329 | 9.329 | 9.329 | 9.329 | 9.329 | 9.329 | 9.329 |
| 7 | 8.627 | 8.627 | 8.627 | 8.627 | 8.627 | 8.627 | 8.627 | 8.627 | 8.627 | 8.627 | 8.627 | 8.627 | 8.627 | 8.627 | 8.627 | 8.627 | 8.627 |
| 8 | 8.149 | 8.156 | 8.160 | 8.161 | 8.161 | 8.161 | 8.161 | 8.161 | 8.161 | 8.161 | 8.161 | 8.161 | 8.161 | 8.161 | 8.161 | 8.161 | 8.161 |
| 9 | 7.794 | 7.808 | 7.817 | 7.824 | 7.828 | 7.831 | 7.832 | 7.832 | 7.832 | 7.832 | 7.832 | 7.832 | 7.832 | 7.832 | 7.832 | 7.832 | 7.832 |
| 10 | 7.522 | 7.538 | 7.552 | 7.562 | 7.570 | 7.577 | 7.582 | 7.585 | 7.587 | 7.588 | 7.588 | 7.588 | 7.588 | 7.588 | 7.588 | 7.588 | 7.588 |
| 11 | 7.304 | 7.324 | 7.340 | 7.354 | 7.364 | 7.373 | 7.380 | 7.386 | 7.391 | 7.394 | 7.397 | 7.400 | 7.400 | 7.400 | 7.400 | 7.400 | 7.400 |
| 12 | 7.128 | 7.150 | 7.168 | 7.184 | 7.196 | 7.207 | 7.216 | 7.223 | 7.230 | 7.235 | 7.239 | 7.251 | 7.251 | 7.251 | 7.251 | 7.251 | 7.251 |
| 13 | 6.982 | 7.005 | 7.025 | 7.042 | 7.056 | 7.068 | 7.079 | 7.088 | 7.102 | 7.108 | 7.112 | 7.126 | 7.132 | 7.132 | 7.132 | 7.132 | 7.132 |
| 14 | 6.858 | 6.883 | 6.904 | 6.922 | 6.937 | 6.951 | 6.962 | 6.973 | 6.982 | 6.989 | 6.996 | 7.019 | 7.030 | 7.034 | 7.034 | 7.034 | 7.034 |
| 15 | 6.753 | 6.778 | 6.800 | 6.819 | 6.836 | 6.850 | 6.863 | 6.874 | 6.883 | 6.892 | 6.900 | 6.927 | 6.942 | 6.949 | 6.951 | 6.951 | 6.951 |
| 16 | 6.661 | 6.688 | 6.711 | 6.730 | 6.748 | 6.763 | 6.776 | 6.788 | 6.799 | 6.808 | 6.816 | 6.848 | 6.865 | 6.875 | 6.880 | 6.881 | 6.881 |
| 17 | 6.582 | 6.609 | 6.632 | 6.653 | 6.670 | 6.686 | 6.701 | 6.713 | 6.724 | 6.734 | 6.743 | 6.777 | 6.798 | 6.811 | 6.818 | 6.821 | 6.821 |
| 18 | 6.512 | 6.539 | 6.563 | 6.584 | 6.602 | 6.619 | 6.633 | 6.647 | 6.658 | 6.669 | 6.679 | 6.715 | 6.738 | 6.753 | 6.767 | 6.770 | 6.770 |
| 19 | 6.450 | 6.477 | 6.501 | 6.523 | 6.542 | 6.559 | 6.574 | 6.587 | 6.600 | 6.611 | 6.621 | 6.660 | 6.685 | 6.702 | 6.713 | 6.719 | 6.723 |
| 20 | 6.394 | 6.422 | 6.447 | 6.468 | 6.487 | 6.505 | 6.520 | 6.534 | 6.547 | 6.558 | 6.569 | 6.610 | 6.637 | 6.655 | 6.668 | 6.676 | 6.681 |
| 24 | 6.221 | 6.250 | 6.275 | 6.298 | 6.318 | 6.336 | 6.353 | 6.368 | 6.381 | 6.394 | 6.405 | 6.451 | 6.484 | 6.507 | 6.525 | 6.538 | 6.547 |
| 30 | 6.051 | 6.081 | 6.106 | 6.130 | 6.151 | 6.169 | 6.187 | 6.203 | 6.217 | 6.231 | 6.243 | 6.294 | 6.331 | 6.360 | 6.381 | 6.399 | 6.412 |
| 40 | 5.885 | 5.915 | 5.941 | 5.964 | 5.986 | 6.005 | 6.023 | 6.040 | 6.055 | 6.069 | 6.082 | 6.137 | 6.178 | 6.210 | 6.236 | 6.257 | 6.274 |
| 60 | 5.723 | 5.752 | 5.778 | 5.802 | 5.823 | 5.843 | 5.862 | 5.878 | 5.894 | 5.909 | 5.922 | 5.980 | 6.024 | 6.059 | 6.088 | 6.113 | 6.134 |
| 120 | 5.565 | 5.593 | 5.619 | 5.642 | 5.664 | 5.683 | 5.702 | 5.718 | 5.734 | 5.749 | 5.763 | 5.822 | 5.868 | 5.906 | 5.938 | 5.965 | 5.988 |
| ∞ | 5.437 | 5.462 | 5.485 | 5.506 | 5.525 | 5.543 | 5.560 | 5.576 | 5.590 | 5.604 | 5.663 | 5.711 | 5.750 | 5.783 | 5.811 | 5.837 | |

Tabla A-12

$$\text{Valores de } z = \left(\frac{1}{2} \right) \ln \left(\frac{1+r}{1-r} \right)$$

| r | r(tercer decimal) | | | | | r | r(tercer decimal) | | | | |
|-----|-------------------|-------|-------|-------|-------|-----|-------------------|-------|-------|-------|-------|
| | .000 | .002 | .004 | .006 | .008 | | .000 | .002 | .004 | .006 | .008 |
| .00 | .0000 | .0020 | .0040 | .0060 | .0080 | .35 | .3654 | .3677 | .3700 | .3723 | .3746 |
| 1 | .0100 | .0120 | .0140 | .0160 | .0180 | 6 | .3769 | .3792 | .3815 | .3838 | .3861 |
| 2 | .0200 | .0220 | .0240 | .0260 | .0280 | 7 | .3884 | .3907 | .3931 | .3954 | .3977 |
| 3 | .0300 | .0320 | .0340 | .0360 | .0380 | 8 | .4001 | .4024 | .4047 | .4071 | .4094 |
| 4 | .0400 | .0420 | .0440 | .0460 | .0480 | 9 | .4118 | .4142 | .4165 | .4189 | .4213 |
| .05 | .0500 | .0520 | .0541 | .0561 | .0581 | .40 | .4236 | .4260 | .4284 | .4308 | .4332 |
| 6 | .0601 | .0621 | .0641 | .0661 | .0681 | 1 | .4356 | .4380 | .4404 | .4428 | .4453 |
| 7 | .0701 | .0721 | .0741 | .0761 | .0782 | 2 | .4477 | .4501 | .4526 | .4550 | .4574 |
| 8 | .0802 | .0822 | .0842 | .0862 | .0882 | 3 | .4599 | .4624 | .4648 | .4673 | .4698 |
| 9 | .0902 | .0923 | .0943 | .0963 | .0983 | 4 | .4722 | .4747 | .4772 | .4797 | .4822 |
| .10 | .1003 | .1024 | .1044 | .1064 | .1084 | .45 | .4847 | .4872 | .4897 | .4922 | .4948 |
| 1 | .1104 | .1125 | .1145 | .1165 | .1186 | 6 | .4973 | .4999 | .5024 | .5049 | .5075 |
| 2 | .1206 | .1226 | .1246 | .1267 | .1287 | 7 | .5101 | .5126 | .5152 | .5178 | .5204 |
| 3 | .1307 | .1328 | .1348 | .1368 | .1389 | 8 | .5230 | .5256 | .5282 | .5308 | .5334 |
| 4 | .1409 | .1430 | .1450 | .1471 | .1491 | 9 | .5361 | .5387 | .5413 | .5440 | .5466 |
| .15 | .1511 | .1532 | .1552 | .1573 | .1593 | .50 | .5493 | .5520 | .5547 | .5573 | .5600 |
| 6 | .1614 | .1634 | .1655 | .1676 | .1696 | 1 | .5627 | .5654 | .5682 | .5709 | .5736 |
| 7 | .1717 | .1737 | .1758 | .1779 | .1799 | 2 | .5763 | .5791 | .5818 | .5846 | .5874 |
| 8 | .1820 | .1841 | .1861 | .1882 | .1903 | 3 | .5901 | .5929 | .5957 | .5985 | .6013 |
| 9 | .1923 | .1944 | .1965 | .1986 | .2007 | 4 | .6042 | .6070 | .6098 | .6127 | .6155 |
| .20 | .2027 | .2048 | .2069 | .2090 | .2111 | .55 | .6194 | .6213 | .6241 | .6270 | .6299 |
| 1 | .2132 | .2153 | .2174 | .2195 | .2216 | 6 | .6328 | .6358 | .6387 | .6416 | .6446 |
| 2 | .2237 | .2258 | .2279 | .2300 | .2321 | 7 | .6475 | .6505 | .6535 | .6565 | .6595 |
| 3 | .2342 | .2363 | .2384 | .2405 | .2427 | 8 | .6625 | .6655 | .6685 | .6716 | .6746 |
| 4 | .2448 | .2469 | .2490 | .2512 | .2533 | 9 | .6777 | .6807 | .6838 | .6869 | .6900 |
| .25 | .2554 | .2575 | .2597 | .2618 | .2640 | .60 | .6931 | .6963 | .6994 | .7026 | .7057 |
| 6 | .2661 | .2683 | .2704 | .2726 | .2747 | 1 | .7089 | .7121 | .7153 | .7185 | .7218 |
| 7 | .2769 | .2790 | .2812 | .2833 | .2855 | 2 | .7250 | .7283 | .7315 | .7348 | .7381 |
| 8 | .2877 | .2899 | .2920 | .2942 | .2964 | 3 | .7414 | .7447 | .7481 | .7514 | .7548 |
| 9 | .2986 | .3008 | .3029 | .3051 | .3073 | 4 | .7582 | .7616 | .7650 | .7684 | .7718 |
| .30 | .3095 | .3117 | .3139 | .3161 | .3183 | .65 | .7753 | .7788 | .7823 | .7858 | .7893 |
| 1 | .3205 | .3228 | .3250 | .3272 | .3294 | 6 | .7928 | .7964 | .7999 | .8035 | .8071 |
| 2 | .3316 | .3339 | .3361 | .3383 | .3406 | 7 | .8107 | .8144 | .8180 | .8217 | .8254 |
| 3 | .3428 | .3451 | .3473 | .3496 | .3518 | 8 | .8291 | .8328 | .8366 | .8404 | .8441 |
| 4 | .3541 | .3564 | .3586 | .3609 | .3632 | 9 | .8480 | .8518 | .8556 | .8595 | .8634 |

Tabla A-12

$$\text{Valores de } z = \left(\frac{1}{2} \right) \ln \left(\frac{1+r}{1-r} \right) \text{ (conclusión)}$$

| r | <i>r</i> (tercer decimal) | | | | | r | <i>r</i> (tercer decimal) | | | | |
|-----|---------------------------|-------|-------|--------------|-------|-----|---------------------------|-------|-------|-------|-------|
| | .000 | .002 | .004 | .006 | .008 | | .000 | .002 | .004 | .006 | .008 |
| .70 | .8673 | .8712 | .8752 | .8792 | .8832 | .85 | 1.256 | 1.263 | 1.271 | 1.278 | 1.286 |
| 1 | .8872 | .8912 | .8953 | .8994 | .9035 | 6 | 1.293 | 1.301 | 1.309 | 1.317 | 1.325 |
| 2 | .9076 | .9118 | .9160 | .9202 | .9245 | 7 | 1.333 | 1.341 | 1.350 | 1.358 | 1.367 |
| 3 | .9287 | .9330 | .9373 | .9417 | .9461 | 8 | 1.376 | 1.385 | 1.394 | 1.403 | 1.412 |
| 4 | .9505 | .9549 | .9549 | .9639 | .9684 | 9 | 1.422 | 1.432 | 1.442 | 1.452 | 1.462 |
| .75 | 0.973 | 0.978 | 0.982 | 0.987 | 0.991 | .90 | 1.472 | 1.483 | 1.494 | 1.505 | 1.516 |
| 6 | 0.996 | 1.001 | 1.006 | 1.011 | 1.015 | 1 | 1.528 | 1.539 | 1.551 | 1.564 | 1.576 |
| 7 | 1.020 | 1.025 | 1.030 | 1.035 | 1.040 | 2 | 1.589 | 1.602 | 1.616 | 1.630 | 1.644 |
| 8 | 1.045 | 1.050 | 1.056 | 1.061 | 1.066 | 3 | 1.658 | 1.673 | 1.689 | 1.705 | 1.721 |
| 9 | 1.071 | 1.077 | 1.082 | 1.088 | 1.093 | 4 | 1.738 | 1.756 | 1.774 | 1.792 | 1.812 |
| .80 | 1.099 | 1.104 | 1.110 | 1.116 | 1.121 | .95 | 1.832 | 1.853 | 1.874 | 1.897 | 1.921 |
| 1 | 1.127 | 1.133 | 1.139 | 1.145 | 1.151 | 6 | 1.946 | 1.972 | 2.000 | 2.029 | 2.080 |
| 2 | 1.157 | 1.163 | 1.169 | 1.175 | 1.182 | 7 | 2.092 | 2.127 | 2.165 | 2.205 | 2.249 |
| 3 | 1.188 | 1.195 | 1.201 | 1.208 | 1.214 | 8 | 2.298 | 2.351 | 2.410 | 2.477 | 2.555 |
| 4 | 1.221 | 1.228 | 1.235 | 1.242 | 1.249 | 9 | 2.647 | 2.759 | 2.903 | 3.106 | 3.453 |

Este cuadro ha sido compendiado de Table 14 de *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. 1 (1st ed.), dirigida por E. S. Pearson y H. O. Hartley. Usado con la amable autorización de E. S. Pearson y de los fideicomisarios de *Biometrika*.

Tabla A-13
Valores Críticos para la Prueba T de Wilcoxon

| <i>N</i> | <i>α para pruebas de una cola</i> | | | | <i>N</i> | <i>α para pruebas de una cola</i> | | | |
|----------|------------------------------------|------|-----|------|----------|------------------------------------|------|-----|------|
| | .05 | .025 | .01 | .005 | | .05 | .025 | .01 | .005 |
| <i>N</i> | <i>α para pruebas de dos colas</i> | | | | <i>N</i> | <i>α para pruebas de dos colas</i> | | | |
| | .10 | .05 | .02 | .01 | | .10 | .05 | .02 | .01 |
| 5 | 0 | -- | -- | -- | 28 | 130 | 116 | 101 | 91 |
| 6 | 2 | 0 | -- | -- | 29 | 140 | 126 | 110 | 100 |
| 7 | 3 | 2 | 0 | -- | 30 | 151 | 137 | 120 | 109 |
| 8 | 5 | 3 | 1 | 0 | 31 | 163 | 147 | 130 | 118 |
| 9 | 8 | 5 | 3 | 1 | 32 | 175 | 159 | 140 | 128 |
| 10 | 10 | 8 | 5 | 3 | 33 | 187 | 170 | 151 | 138 |
| 11 | 13 | 10 | 7 | 5 | 34 | 200 | 182 | 162 | 148 |
| 12 | 17 | 13 | 9 | 7 | 35 | 213 | 195 | 173 | 159 |
| 13 | 21 | 17 | 12 | 9 | 36 | 227 | 208 | 185 | 171 |
| 14 | 25 | 21 | 15 | 12 | 37 | 241 | 221 | 198 | 182 |
| 15 | 30 | 25 | 19 | 15 | 38 | 256 | 236 | 211 | 194 |
| 16 | 35 | 29 | 23 | 19 | 39 | 271 | 249 | 224 | 207 |
| 17 | 41 | 34 | 27 | 23 | 40 | 286 | 264 | 238 | 220 |
| 18 | 47 | 40 | 32 | 27 | 41 | 302 | 279 | 252 | 233 |
| 19 | 53 | 46 | 37 | 32 | 42 | 319 | 294 | 266 | 247 |
| 20 | 60 | 52 | 43 | 37 | 43 | 336 | 310 | 281 | 261 |
| 21 | 67 | 58 | 49 | 42 | 44 | 353 | 327 | 296 | 276 |
| 22 | 75 | 65 | 55 | 48 | 45 | 371 | 343 | 312 | 291 |
| 23 | 83 | 73 | 62 | 54 | 46 | 389 | 361 | 328 | 307 |
| 24 | 91 | 81 | 69 | 61 | 47 | 407 | 378 | 345 | 322 |
| 25 | 100 | 89 | 76 | 68 | 48 | 426 | 396 | 362 | 339 |
| 26 | 110 | 98 | 84 | 75 | 49 | 446 | 415 | 379 | 355 |
| 27 | 119 | 107 | 92 | 83 | 50 | 466 | 434 | 397 | 373 |

Source: From F. Wilcoxon, S. Katte, and R. A. Wilcox, *Critical Values and Probability Levels for the Wilcoxon Rank Sum Test and the Wilcoxon Signed Rank Test*, New York, American Cyanamid Co., 1963, and F. Wilcoxon and R. A. Wilcox, *Some Rapid Approximate Statistical Procedures*, New York, Lederle Laboratories, 1964 as used in Runyon and Haber, *Fundamentals of Behavioral Statistics*, 1967, Addison-Wesley, Reading, Mass.

For a given *N* (the number of pairs of scores), if the observed value is less than or equal to the value in the table for the appropriate level of significance, then reject H_0 .

Tabla A-14

*Valores críticos para la prueba U de Mann-Whitney
(cola superior de 0.005)*

| n_1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|-------|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| n_2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 1 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 2 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 0 |
| 3 | — | — | — | — | — | — | — | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| 4 | — | — | — | — | — | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 8 |
| 5 | — | — | — | — | — | 24 | 28 | 31 | 35 | 38 | 42 | 45 | 49 | 52 | 55 | 59 | 62 | 66 | 69 | 72 |
| 6 | — | — | — | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | |
| 7 | — | — | — | 25 | 29 | 34 | 38 | 42 | 46 | 50 | 54 | 58 | 63 | 67 | 71 | 75 | 79 | 83 | 87 | |
| 8 | — | — | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 15 | 16 | 17 | 18 | |
| 9 | — | — | 29 | 34 | 39 | 45 | 50 | 56 | 61 | 67 | 72 | 78 | 83 | 89 | 94 | 100 | 105 | 111 | 116 | |
| 10 | — | — | 1 | 2 | 4 | 6 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | |
| 11 | — | — | 31 | 36 | 44 | 50 | 57 | 63 | 69 | 75 | 81 | 87 | 94 | 100 | 106 | 112 | 118 | 124 | 130 | |
| 12 | — | — | 0 | 2 | 5 | 7 | 10 | 13 | 16 | 18 | 21 | 24 | 26 | 29 | 31 | 34 | 37 | 39 | 42 | |
| 13 | — | — | 33 | 42 | 50 | 59 | 67 | 75 | 83 | 92 | 100 | 108 | 116 | 124 | 132 | 140 | 148 | 156 | 164 | 172 |
| 14 | — | — | 1 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 31 | 34 | 37 | 41 | 44 | 47 | 51 | 54 |
| 15 | — | — | 35 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 | 90 | 99 | 108 | 117 | 125 | 134 | 143 | 151 | 160 | 169 | 177 | 186 |
| 16 | — | — | 1 | 3 | 7 | 10 | 13 | 17 | 20 | 24 | 27 | 31 | 34 | 38 | 42 | 45 | 49 | 53 | 56 | 60 |
| 17 | — | — | 36 | 49 | 58 | 68 | 78 | 87 | 97 | 106 | 116 | 125 | 125 | 144 | 153 | 163 | 172 | 181 | 191 | 200 |
| 18 | — | — | 41 | 52 | 63 | 73 | 83 | 94 | 104 | 114 | 124 | 134 | 144 | 164 | 174 | 184 | 194 | 203 | 213 | |
| 19 | — | — | 2 | 5 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 29 | 33 | 37 | 42 | 46 | 51 | 55 | 60 | 64 | 69 | 73 |
| 20 | — | — | 43 | 55 | 67 | 78 | 89 | 100 | 111 | 121 | 132 | 143 | 153 | 164 | 174 | 185 | 195 | 206 | 216 | 227 |
| 1 | 2 | 5 | 9 | 13 | 18 | 22 | 27 | 31 | 36 | 41 | 45 | 50 | 55 | 60 | 65 | 70 | 74 | 79 | | |
| 2 | 46 | 59 | 71 | 83 | 94 | 106 | 117 | 129 | 140 | 151 | 163 | 174 | 185 | 196 | 207 | 218 | 230 | 241 | | |
| 3 | 2 | 6 | 10 | 15 | 19 | 24 | 29 | 34 | 39 | 44 | 49 | 54 | 60 | 65 | 70 | 75 | 81 | 86 | | |
| 4 | 49 | 62 | 75 | 87 | 100 | 112 | 124 | 136 | 148 | 160 | 172 | 184 | 195 | 207 | 219 | 231 | 242 | 254 | | |
| 5 | 2 | 6 | 11 | 16 | 21 | 26 | 31 | 37 | 42 | 47 | 53 | 58 | 64 | 70 | 75 | 81 | 87 | 92 | | |
| 6 | 52 | 66 | 79 | 92 | 105 | 118 | 131 | 143 | 156 | 169 | 181 | 194 | 206 | 218 | 231 | 243 | 255 | 268 | | |
| 7 | 2 | 3 | 7 | 12 | 17 | 22 | 28 | 33 | 39 | 45 | 51 | 56 | 63 | 69 | 74 | 81 | 87 | 93 | 99 | |
| 8 | 38 | 54 | 69 | 83 | 97 | 111 | 124 | 138 | 151 | 164 | 177 | 191 | 203 | 216 | 230 | 242 | 255 | 268 | 281 | |
| 9 | 0 | 3 | 8 | 13 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 | 60 | 67 | 73 | 79 | 86 | 92 | 99 | 105 | |
| 10 | 40 | 57 | 72 | 87 | 102 | 116 | 130 | 144 | 158 | 172 | 186 | 200 | 213 | 227 | 241 | 254 | 268 | 281 | 295 | |

(Dashes in the body of the table indicate that no decision is possible at the stated level of significance.)

Source: From Mann, H. B., and D. R. Whitney, "On a test of whether one of two random variables is a stochastically larger than the other," *Annals of Mathematical Statistics*, 18, 50-60 (1947), and Auble, D., "Extended tables for the Mann-Whitney statistic," *Bulletin of the Institute of Educational Research at Indiana University*, 1, 2, (1953), as used in Runyon and Haber, *Fundamentals of Behavioral Statistics*, 1967, Addison-Wesley, Reading, Mass.

If the observed value of U falls between the two values presented in the table for n_1 and n_2 , accept H_0 . Otherwise, reject H_0 .

Tabla A-14 (continuación)

(cola superior de 0.01)

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|----|
| 1 | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | |
| 2 | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | -- | -- | -- | -- | -- | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | |
| 4 | -- | -- | -- | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 9 | 9 | 10 | |
| 5 | -- | -- | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | |
| 6 | -- | -- | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 9 | 11 | 12 | 13 | 15 | 16 | 18 | 19 | 20 | 22 | |
| 7 | -- | 0 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 11 | 12 | 14 | 16 | 17 | 19 | 21 | 23 | 24 | 26 | 28 | |
| 8 | -- | 2 | 4 | 6 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 | 34 | | |
| 9 | -- | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 14 | 16 | 18 | 21 | 23 | 26 | 28 | 31 | 33 | 36 | 38 | 40 | |
| 10 | -- | 3 | 6 | 8 | 11 | 13 | 16 | 19 | 22 | 24 | 27 | 30 | 33 | 36 | 38 | 41 | 44 | 47 | | |
| 11 | -- | 1 | 4 | 7 | 9 | 12 | 15 | 18 | 22 | 25 | 28 | 31 | 34 | 37 | 41 | 44 | 47 | 50 | 53 | |
| 12 | -- | 2 | 5 | 8 | 11 | 14 | 17 | 21 | 24 | 28 | 31 | 35 | 38 | 42 | 46 | 49 | 53 | 56 | 60 | |
| 13 | -- | 0 | 2 | 5 | 9 | 12 | 16 | 20 | 23 | 27 | 31 | 35 | 39 | 43 | 47 | 51 | 55 | 59 | 63 | |
| 14 | -- | 3 | 6 | 10 | 13 | 17 | 22 | 26 | 30 | 34 | 38 | 43 | 47 | 51 | 56 | 60 | 65 | 69 | 73 | |
| 15 | -- | 0 | 3 | 7 | 11 | 15 | 19 | 24 | 28 | 33 | 37 | 42 | 47 | 51 | 56 | 61 | 66 | 70 | 75 | |
| 16 | -- | 0 | 3 | 7 | 12 | 16 | 21 | 26 | 31 | 36 | 41 | 46 | 51 | 56 | 61 | 66 | 71 | 76 | 82 | |
| 17 | -- | 0 | 4 | 8 | 13 | 18 | 23 | 28 | 33 | 38 | 44 | 49 | 55 | 60 | 66 | 71 | 77 | 82 | 88 | |
| 18 | -- | 0 | 4 | 9 | 14 | 19 | 24 | 30 | 36 | 41 | 47 | 53 | 59 | 65 | 70 | 76 | 82 | 88 | 94 | |
| 19 | -- | 1 | 4 | 9 | 15 | 20 | 26 | 32 | 38 | 44 | 50 | 56 | 63 | 69 | 75 | 82 | 88 | 94 | 101 | |
| 20 | -- | 1 | 5 | 10 | 16 | 22 | 28 | 34 | 40 | 47 | 53 | 60 | 67 | 73 | 80 | 87 | 93 | 100 | 107 | |

(Dashes in the body of the table indicate that no decision is possible at the stated level of significance.)

Tabla A-14 (continuación)

(cola superior de 0.025)

| n_1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|-------|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|
| n_2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 1 | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | |
| 2 | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | |
| 3 | -- | -- | -- | -- | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 8 | |
| | | | | | 15 | 17 | 20 | 22 | 25 | 27 | 30 | 32 | 35 | 37 | 40 | 42 | 45 | 47 | 50 | |
| 4 | -- | -- | -- | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 13 | |
| | | | | 16 | 19 | 22 | 25 | 28 | 32 | 35 | 38 | 41 | 44 | 47 | 50 | 53 | 57 | 60 | 63 | |
| 5 | -- | -- | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 17 | 18 | 20 | |
| | | | 15 | 19 | 23 | 27 | 30 | 34 | 38 | 42 | 46 | 49 | 53 | 57 | 61 | 65 | 68 | 72 | 80 | |
| 6 | -- | -- | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 10 | 11 | 13 | 14 | 16 | 17 | 19 | 21 | 22 | 24 | 27 | |
| | | | 17 | 22 | 27 | 31 | 38 | 40 | 44 | 49 | 53 | 58 | 62 | 67 | 71 | 75 | 80 | 89 | 93 | |
| 7 | -- | -- | 1 | 3 | 5 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 34 | |
| | | | 20 | 25 | 30 | 36 | 41 | 46 | 51 | 56 | 61 | 66 | 71 | 76 | 81 | 86 | 91 | 96 | 106 | |
| 8 | -- | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 13 | 15 | 17 | 19 | 22 | 24 | 26 | 29 | 31 | 34 | 36 | 41 | |
| | | 16 | 22 | 28 | 34 | 40 | 46 | 51 | 57 | 63 | 69 | 74 | 80 | 86 | 91 | 97 | 102 | 108 | 119 | |
| 9 | -- | 0 | 2 | 4 | 7 | 10 | 12 | 15 | 17 | 20 | 23 | 26 | 28 | 31 | 34 | 37 | 39 | 42 | 48 | |
| | | 18 | 25 | 32 | 38 | 44 | 51 | 57 | 64 | 70 | 76 | 82 | 89 | 95 | 101 | 107 | 114 | 120 | 132 | |
| 10 | -- | 0 | 3 | 5 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 | 29 | 33 | 36 | 39 | 42 | 45 | 52 | 55 | |
| | | 20 | 27 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 | 70 | 77 | 84 | 91 | 97 | 104 | 111 | 118 | 125 | 132 | 145 | |
| 11 | -- | 0 | 3 | 6 | 9 | 13 | 16 | 19 | 23 | 26 | 30 | 33 | 37 | 40 | 44 | 47 | 51 | 56 | 62 | |
| | | 22 | 30 | 38 | 46 | 53 | 61 | 69 | 76 | 84 | 91 | 99 | 106 | 114 | 121 | 129 | 136 | 143 | 151 | |
| 12 | -- | 1 | 4 | 7 | 11 | 14 | 18 | 22 | 26 | 29 | 33 | 37 | 41 | 45 | 49 | 53 | 57 | 61 | 69 | |
| | | 23 | 32 | 41 | 49 | 58 | 66 | 74 | 82 | 91 | 99 | 107 | 115 | 123 | 131 | 139 | 147 | 155 | 163 | |
| 13 | -- | 1 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 33 | 37 | 41 | 45 | 50 | 54 | 59 | 63 | 67 | 76 | |
| | | 25 | 35 | 44 | 53 | 62 | 71 | 80 | 89 | 97 | 106 | 115 | 124 | 132 | 141 | 149 | 158 | 167 | 184 | |
| 14 | -- | 1 | 5 | 9 | 13 | 17 | 22 | 28 | 31 | 36 | 40 | 45 | 50 | 55 | 59 | 64 | 67 | 74 | 83 | |
| | | 27 | 37 | 47 | 51 | 67 | 76 | 86 | 98 | 104 | 114 | 123 | 132 | 141 | 151 | 160 | 171 | 178 | 189 | |
| 15 | -- | 1 | 5 | 10 | 14 | 19 | 24 | 29 | 34 | 39 | 44 | 49 | 54 | 59 | 64 | 70 | 75 | 80 | 90 | |
| | | 29 | 40 | 50 | 61 | 71 | 81 | 91 | 101 | 111 | 121 | 131 | 141 | 151 | 161 | 170 | 180 | 190 | 200 | |
| 16 | -- | 1 | 6 | 11 | 15 | 21 | 26 | 31 | 37 | 42 | 47 | 53 | 59 | 64 | 70 | 75 | 81 | 86 | 98 | |
| | | 31 | 42 | 53 | 65 | 75 | 86 | 97 | 107 | 118 | 129 | 139 | 149 | 160 | 170 | 181 | 191 | 202 | 222 | |
| 17 | -- | 2 | 6 | 11 | 17 | 22 | 28 | 34 | 39 | 45 | 51 | 57 | 63 | 67 | 75 | 81 | 87 | 93 | 105 | |
| | | 32 | 45 | 57 | 68 | 80 | 91 | 102 | 114 | 125 | 136 | 147 | 158 | 171 | 180 | 191 | 202 | 213 | 235 | |
| 18 | -- | 2 | 7 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 55 | 61 | 67 | 74 | 80 | 86 | 93 | 99 | 112 | |
| | | 34 | 47 | 60 | 72 | 84 | 98 | 108 | 120 | 132 | 143 | 155 | 167 | 178 | 190 | 202 | 213 | 225 | 248 | |
| 19 | -- | 2 | 7 | 13 | 19 | 25 | 32 | 38 | 45 | 52 | 58 | 65 | 72 | 78 | 85 | 92 | 99 | 106 | 119 | |
| | | 36 | 50 | 63 | 76 | 89 | 101 | 114 | 126 | 138 | 151 | 163 | 175 | 188 | 200 | 212 | 224 | 236 | 261 | |
| 20 | -- | 2 | 8 | 13 | 20 | 27 | 34 | 41 | 48 | 55 | 62 | 69 | 76 | 83 | 90 | 98 | 105 | 112 | 127 | |
| | | 38 | 52 | 67 | 80 | 93 | 108 | 119 | 132 | 145 | 158 | 171 | 184 | 197 | 210 | 222 | 235 | 248 | 261 | |

Dashes in the body of the table indicate that no decision is possible at the stated level of significance)

Tabla A-14 (continuación)
(cola superior de 0.05)

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|-------|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|
| n_1 | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | 0 | 0 | |
| 1 | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | -- | 19 | 20 | |
| 2 | -- | -- | -- | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | |
| | | | | 10 | 12 | 14 | 15 | 17 | 19 | 21 | 22 | 24 | 26 | 27 | 29 | 31 | 32 | 34 | 36 | |
| 3 | -- | -- | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 9 | 9 | 10 | |
| | | | 9 | 12 | 14 | 16 | 19 | 21 | 24 | 26 | 28 | 31 | 33 | 35 | 38 | 40 | 42 | 45 | 49 | |
| 4 | -- | -- | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 14 | 15 | 16 | 17 | |
| | | | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 | 33 | 36 | 39 | 42 | 45 | 48 | 50 | 53 | 56 | 62 | |
| 6 | -- | 0 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 12 | 13 | 15 | 16 | 18 | 19 | 20 | 22 | 25 | |
| | | 10 | 14 | 18 | 21 | 25 | 29 | 32 | 36 | 39 | 43 | 47 | 50 | 54 | 57 | 61 | 65 | 68 | 72 | |
| 6 | -- | 0 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 26 | 28 | 30 | |
| | | 12 | 16 | 21 | 25 | 29 | 34 | 38 | 42 | 46 | 50 | 55 | 59 | 63 | 67 | 71 | 76 | 80 | 88 | |
| 7 | -- | 0 | 2 | 4 | 8 | 8 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | 24 | 26 | 28 | 30 | 33 | 35 | 39 | |
| | | 14 | 19 | 24 | 29 | 34 | 38 | 43 | 48 | 53 | 58 | 63 | 67 | 72 | 77 | 82 | 86 | 91 | 101 | |
| 8 | -- | 1 | 3 | 5 | 8 | 10 | 13 | 15 | 18 | 20 | 23 | 26 | 28 | 31 | 33 | 36 | 39 | 41 | 47 | |
| | | 15 | 21 | 27 | 32 | 38 | 43 | 49 | 54 | 60 | 65 | 70 | 76 | 81 | 87 | 92 | 97 | 103 | 113 | |
| 9 | -- | 1 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 | 33 | 36 | 39 | 42 | 45 | 48 | 51 | |
| | | 17 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 | 60 | 66 | 72 | 78 | 84 | 90 | 96 | 102 | 108 | 114 | 126 | |
| 10 | -- | 1 | 4 | 7 | 11 | 14 | 17 | 20 | 24 | 27 | 31 | 34 | 37 | 41 | 44 | 48 | 51 | 55 | 58 | |
| | | 19 | 26 | 33 | 39 | 46 | 53 | 60 | 66 | 73 | 79 | 86 | 93 | 99 | 106 | 112 | 119 | 125 | 138 | |
| 11 | -- | 1 | 5 | 8 | 12 | 16 | 19 | 23 | 27 | 31 | 34 | 38 | 42 | 46 | 50 | 54 | 57 | 61 | 65 | |
| | | 21 | 28 | 36 | 43 | 50 | 58 | 66 | 72 | 79 | 87 | 94 | 101 | 108 | 115 | 122 | 130 | 137 | 151 | |
| 12 | -- | 2 | 5 | 9 | 13 | 17 | 21 | 26 | 30 | 34 | 38 | 42 | 47 | 51 | 55 | 60 | 64 | 68 | 77 | |
| | | 22 | 31 | 39 | 47 | 55 | 63 | 70 | 78 | 86 | 94 | 102 | 109 | 117 | 125 | 132 | 140 | 148 | 163 | |
| 13 | -- | 2 | 6 | 10 | 15 | 19 | 24 | 28 | 33 | 37 | 42 | 47 | 51 | 56 | 61 | 65 | 70 | 75 | 80 | |
| | | 24 | 33 | 42 | 50 | 59 | 67 | 76 | 84 | 93 | 101 | 109 | 118 | 126 | 134 | 143 | 151 | 159 | 176 | |
| 14 | -- | 2 | 7 | 11 | 16 | 21 | 26 | 31 | 36 | 41 | 46 | 51 | 56 | 61 | 66 | 71 | 77 | 82 | 87 | |
| | | 26 | 35 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 | 90 | 99 | 108 | 117 | 126 | 135 | 144 | 153 | 161 | 170 | 188 | |
| 15 | -- | 3 | 7 | 12 | 18 | 23 | 28 | 33 | 39 | 44 | 50 | 55 | 61 | 66 | 72 | 77 | 83 | 88 | 94 | |
| | | 27 | 38 | 48 | 57 | 67 | 77 | 87 | 96 | 106 | 115 | 125 | 134 | 144 | 153 | 163 | 172 | 182 | 200 | |
| 16 | -- | 3 | 8 | 14 | 19 | 25 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 | 60 | 65 | 71 | 77 | 83 | 89 | 95 | 101 | |
| | | 29 | 40 | 50 | 61 | 71 | 82 | 92 | 102 | 112 | 122 | 132 | 143 | 153 | 163 | 173 | 183 | 193 | 213 | |
| 17 | -- | 3 | 9 | 15 | 20 | 26 | 33 | 39 | 45 | 51 | 57 | 64 | 70 | 77 | 83 | 89 | 96 | 102 | 109 | |
| | | 31 | 42 | 53 | 65 | 76 | 86 | 97 | 108 | 119 | 130 | 140 | 151 | 161 | 172 | 183 | 193 | 204 | 225 | |
| 18 | -- | 4 | 9 | 16 | 22 | 28 | 35 | 41 | 48 | 55 | 61 | 68 | 75 | 82 | 88 | 95 | 102 | 109 | 116 | |
| | | 32 | 45 | 58 | 68 | 80 | 93 | 103 | 114 | 123 | 137 | 148 | 159 | 170 | 182 | 193 | 204 | 215 | 237 | |
| 19 | 0 | 4 | 10 | 17 | 23 | 30 | 37 | 44 | 51 | 58 | 65 | 72 | 80 | 87 | 94 | 101 | 109 | 116 | 129 | |
| | 19 | 34 | 47 | 57 | 72 | 84 | 96 | 104 | 113 | 126 | 138 | 144 | 156 | 167 | 179 | 191 | 203 | 214 | 236 | |
| 20 | 0 | 4 | 11 | 18 | 25 | 32 | 39 | 47 | 54 | 62 | 69 | 77 | 84 | 92 | 100 | 107 | 115 | 123 | 130 | |
| | 20 | 36 | 49 | 61 | 75 | 88 | 101 | 113 | 126 | 138 | 151 | 163 | 176 | 188 | 200 | 213 | 225 | 237 | 250 | |

(Dashes in the body of the table indicate that no decision is possible at the stated level of significance.)

Tabla A-15
 Valores Críticos para la prueba
 de Kruskal-Wallis

| <u>Tamaño de muestra</u> | | | <u>Valores Críticos</u> | α |
|--------------------------|-------|-------|-------------------------|----------|
| n_1 | n_2 | n_3 | | |
| 2 | 1 | 1 | 2.7000 | .500 |
| 2 | 2 | 1 | 3.6000 | .200 |
| 2 | 2 | 2 | 4.5714 | .067 |
| | | | 3.7143 | .200 |
| 3 | 1 | 1 | 3.2000 | .300 |
| 3 | 2 | 1 | 4.2857 | .100 |
| | | | 3.8571 | .133 |
| 3 | 2 | 2 | 5.3572 | .029 |
| | | | 4.7143 | .048 |
| | | | 4.5000 | .067 |
| | | | 4.4643 | .105 |
| 3 | 3 | 1 | 5.1429 | .043 |
| | | | 4.5714 | .100 |
| | | | 4.0000 | .129 |
| 3 | 3 | 2 | 6.2500 | .011 |
| | | | 5.3611 | .032 |
| | | | 5.1389 | .061 |
| | | | 4.5556 | .100 |
| | | | 4.2500 | .121 |
| 3 | 3 | 3 | 7.2000 | .004 |
| | | | 6.4889 | .011 |
| | | | 5.6889 | .029 |
| | | | 5.6000 | .050 |
| | | | 5.0667 | .086 |
| | | | 4.6222 | .100 |
| 4 | 1 | 1 | 3.5714 | .200 |
| 4 | 2 | 1 | 4.8214 | .057 |
| | | | 4.5000 | .076 |
| | | | 4.0179 | .114 |
| 4 | 2 | 2 | 6.0000 | .014 |
| | | | 5.3333 | .033 |
| | | | 5.1250 | .052 |
| | | | 4.4583 | .100 |
| | | | 4.1667 | .105 |
| 4 | 3 | 1 | 5.8333 | .021 |
| | | | 5.2083 | .050 |
| | | | 5.0000 | .057 |
| | | | 4.0556 | .093 |
| | | | 3.8889 | .129 |

Tabla A-15

(continuación)

| <u>Tamaño de muestra</u> | | | <u>Valores Críticos α</u> | |
|--------------------------|-------|-------|---|------|
| n_1 | n_2 | n_3 | | |
| 4 | 3 | 2 | 6.4444 | .008 |
| | | | 6.3000 | .011 |
| | | | 5.4444 | .046 |
| | | | 5.4000 | .051 |
| | | | 4.5111 | .098 |
| | | | 4.4444 | .102 |
| | | | 6.7455 | .010 |
| | | | 6.7091 | .013 |
| | | | 5.7909 | .046 |
| | | | 5.7273 | .050 |
| 4 | 3 | 3 | 4.7091 | .092 |
| | | | 4.7000 | .101 |
| | | | 6.6667 | .010 |
| | | | 6.1667 | .022 |
| | | | 4.9667 | .048 |
| | | | 4.8667 | .054 |
| 4 | 4 | 1 | 4.1667 | .082 |
| | | | 4.0667 | .102 |
| | | | 7.0364 | .006 |
| | | | 6.8727 | .011 |
| | | | 5.4545 | .046 |
| | | | 5.2364 | .052 |
| 4 | 4 | 2 | 4.5545 | .098 |
| | | | 4.4455 | .103 |
| | | | 7.1439 | .010 |
| | | | 7.1364 | .011 |
| | | | 5.5985 | .049 |
| | | | 5.5758 | .051 |
| 4 | 4 | 3 | 4.5455 | .099 |
| | | | 4.4773 | .102 |
| | | | 7.6538 | .008 |
| | | | 7.5385 | .011 |
| | | | 5.6923 | .049 |
| | | | 5.6538 | .054 |
| 4 | 4 | 4 | 4.6539 | .097 |
| | | | 4.5001 | .104 |
| | | | 3.8571 | .143 |
| | | | 5.2500 | .036 |
| | | | 5.0000 | .048 |
| | | | 4.4500 | .071 |
| 5 | 1 | 1 | 4.2000 | .095 |
| | | | 4.0500 | .119 |
| 5 | 2 | 1 | | |

Tabla A-15
(continuación)

| <u>Tamaño de muestra</u> | | | <u>Valores Críticos</u> | α |
|--------------------------|-------|-------|-------------------------|----------|
| n_1 | n_2 | n_3 | | |
| 5 | 2 | •2 | 6.5333 | .008 |
| | | | 6.1333 | .013 |
| | | | 5.1600 | .034 |
| | | | 5.0400 | .056 |
| | | | 4.3733 | .090 |
| | | | 4.2933 | .122 |
| 5 | 3 | 1 | 6.4000 | .012 |
| | | | 4.9600 | .048 |
| | | | 4.8711 | .052 |
| | | | 4.0178 | .095 |
| | | | 3.8400 | .123 |
| | | | 6.9091 | .009 |
| 5 | 3 | 2 | 6.8218 | .010 |
| | | | 5.2509 | .049 |
| | | | 5.1055 | .052 |
| | | | 4.6509 | .091 |
| | | | 4.4945 | .101 |
| | | | 7.0788 | .009 |
| 5 | 3 | 3 | 6.9818 | .011 |
| | | | 5.6485 | .049 |
| | | | 5.5152 | .051 |
| | | | 4.5333 | .097 |
| | | | 4.4121 | .109 |
| | | | 6.9545 | .008 |
| 5 | 4 | 1 | 6.8400 | .011 |
| | | | 4.9855 | .044 |
| | | | 4.8600 | .056 |
| | | | 3.9873 | .098 |
| | | | 3.9600 | .102 |
| | | | 7.2045 | .009 |
| 5 | 4 | 2 | 7.1182 | .010 |
| | | | 5.2727 | .049 |
| | | | 5.2682 | .050 |
| | | | 4.5409 | .098 |
| | | | 4.5182 | .101 |
| | | | 7.4449 | .010 |
| 5 | 4 | 3 | 7.3949 | .011 |
| | | | 5.6564 | .049 |
| | | | 5.6308 | .050 |

Tabla A-15
(continuación)

| <u>Tamaño de muestra</u> | | | <u>Valores Críticos α</u> | |
|--------------------------|-------|-------|---|------|
| n_1 | n_2 | n_3 | | |
| 5 | 4 | 4 | 4.5487 | .099 |
| | | | 4.5231 | .103 |
| | | | 7.7604 | .009 |
| | | | 7.7440 | .011 |
| | | | 5.6571 | .049 |
| | | | 5.6176 | .050 |
| | | | 4.6187 | .100 |
| 5 | 5 | 1 | 4.5527 | .102 |
| | | | 7.3091 | .009 |
| | | | 6.8364 | .011 |
| | | | 5.1273 | .046 |
| | | | 4.9091 | .053 |
| | | | 4.1091 | .086 |
| | | | 4.0364 | .105 |
| 5 | 5 | 2 | 7.3385 | .010 |
| | | | 7.2692 | .010 |
| | | | 5.3385 | .047 |
| | | | 5.2462 | .051 |
| | | | 4.6231 | .097 |
| | | | 4.5077 | .100 |
| | | | 7.5780 | .010 |
| 5 | 5 | 3 | 7.5429 | .010 |
| | | | 5.7055 | .046 |
| | | | 5.6264 | .051 |
| | | | 4.5451 | .100 |
| | | | 4.5363 | .102 |
| | | | 7.8229 | .010 |
| | | | 7.7914 | .010 |
| 5 | 5 | 4 | 5.6657 | .049 |
| | | | 5.6429 | .050 |
| | | | 4.5229 | .099 |
| | | | 4.5200 | .101 |
| | | | 8.0000 | .009 |
| | | | 7.9800 | .010 |
| | | | 5.7800 | .049 |
| 5 | 5 | 5 | 5.6600 | .051 |
| | | | 4.5600 | .100 |
| | | | 4.5000 | .102 |

Tabla A-16

Valores Críticos para la prueba de Friedman

($k = 3$; $r = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$) P es el mínimo valor de α para el cual la H_0 V puede ser rechazada

| $r = 2$ | | $r = 3$ | | $r = 4$ | | $r = 5$ | |
|------------|--------|------------|---------|------------|----------|------------|----------|
| χ_r^2 | P | χ_r^2 | P | χ_r^2 | P | χ_r^2 | P |
| 0 | 1.000 | .000 | 1.000 | .0 | 1.000 | .0 | 1.000 |
| 1 | .833 | 0.667 | .944 | .5 | .931 | .4 | .954 |
| 3 | .500 | 2.000 | .528 | 1.5 | .653 | 1.2 | .691 |
| 4 | .167 | 2.667 | .361 | 2.0 | .431 | 1.6 | .522 |
| | | 4.667 | 1.94 | 3.5 | .273 | 2.8 | .367 |
| | | 6.000 | .028 | 4.5 | .125 | 3.6 | .182 |
| | | | | 6.0 | .069 | 4.8 | .124 |
| | | | | 6.5 | .042 | 5.2 | .093 |
| | | | | 8.0 | .0046 | 6.4 | .039 |
| | | | | | | 7.6 | .024 |
| | | | | | | 8.4 | .0085 |
| | | | | | | 10.0 | .00077 |
| $r = 6$ | | $r = 7$ | | $r = 8$ | | $r = 9$ | |
| .00 | 1.000 | .000 | 1.000 | .00 | 1.000 | .000 | 1.000 |
| 0.33 | .956 | .286 | .964 | .25 | .967 | .222 | .971 |
| 1.00 | .740 | .857 | .768 | .75 | .794 | .667 | .814 |
| 1.33 | .570 | 1.143 | .620 | 1.00 | .654 | .889 | .865 |
| 2.33 | .430 | 2.000 | .486 | 1.75 | .531 | 1.556 | .569 |
| 3.00 | .252 | 2.571 | .305 | 2.25 | .355 | 2.000 | .398 |
| 4.00 | .184 | 3.429 | .237 | 3.00 | .285 | 2.667 | .328 |
| 4.33 | .142 | 3.714 | .192 | 3.25 | .236 | 2.889 | .278 |
| 5.33 | .072 | 4.571 | .112 | 4.00 | .149 | 3.556 | .187 |
| 6.33 | .052 | 5.429 | .085 | 4.75 | .120 | 4.222 | .154 |
| 7.00 | .029 | 6.000 | .052 | 5.25 | .079 | 4.667 | .107 |
| 8.33 | .012 | 7.143 | .027 | 6.25 | .047 | 5.556 | .069 |
| 9.00 | .0081 | 7.714 | .021 | 6.75 | .038 | 6.000 | .057 |
| 9.33 | .0055 | 8.000 | .016 | 7.00 | .030 | 6.222 | .048 |
| 10.33 | .0017 | 8.857 | .0084 | 7.75 | .018 | 6.889 | .031 |
| 12.00 | .00013 | 10.286 | .0036 | 9.00 | .0099 | 8.000 | .019 |
| | | 10.571 | .0027 | 9.25 | .0080 | 8.222 | .016 |
| | | 11.143 | .0012 | 9.75 | .0048 | 8.667 | .010 |
| | | 12.286 | .00032 | 10.75 | .0024 | 9.556 | .0060 |
| | | 14.000 | .000021 | 12.00 | .0011 | 10.667 | .0035 |
| | | | | 12.25 | .00086 | 10.889 | .0029 |
| | | | | 13.00 | .00026 | 11.556 | .0013 |
| | | | | 14.25 | .000061 | 12.667 | .00066 |
| | | | | 16.00 | .0000036 | 13.556 | .00035 |
| | | | | | | 14.000 | .00020 |
| | | | | | | 14.222 | .000097 |
| | | | | | | 14.889 | .000054 |
| | | | | | | 16.222 | .000011 |
| | | | | | | 18.000 | .0000006 |

Tabla A-16
 (continuación)

{ $k = 4$; $r = 2, 3, 4$ }

| $r = 2$ | | $r = 3$ | | $r = 4$ | | | |
|------------|-------|------------|-------|------------|-------|------------|---------|
| χ_r^2 | P | χ_r^2 | P | χ_r^2 | P | χ_r^2 | P |
| .0 | 1.000 | .2 | 1.000 | .0 | 1.000 | 5.7 | .141 |
| .6 | .958 | .6 | .958 | .3 | .992 | 6.0 | .105 |
| 1.2 | .834 | 1.0 | .910 | .6 | .928 | 6.3 | .094 |
| 1.8 | .792 | 1.8 | .727 | .9 | .900 | 6.6 | .077 |
| 2.4 | .625 | 2.2 | .608 | 1.2 | .800 | 6.9 | .068 |
| 3.0 | .542 | 2.6 | .524 | 1.5 | .754 | 7.2 | .054 |
| 3.6 | .458 | 3.4 | .446 | 1.8 | .677 | 7.5 | .052 |
| 4.2 | .375 | 3.8 | .342 | 2.1 | .649 | 7.8 | .036 |
| 4.8 | .208 | 4.2 | .300 | 2.4 | .524 | 8.1 | .033 |
| 5.4 | .167 | 5.0 | .207 | 2.7 | .508 | 8.4 | .019 |
| 6.0 | .042 | 5.4 | .175 | 3.0 | .432 | 8.7 | .014 |
| | | 5.8 | .148 | 3.3 | .389 | 9.3 | .012 |
| | | 6.6 | .075 | 3.6 | .355 | 9.6 | .0069 |
| | | 7.0 | .054 | 3.9 | .324 | 9.9 | .0062 |
| | | 7.4 | .033 | 4.5 | .242 | 10.2 | .0027 |
| | | 8.2 | .017 | 4.8 | .200 | 10.8 | .0016 |
| | | 9.0 | .0017 | 5.1 | .190 | 11.1 | .00094 |
| | | | | 5.4 | .158 | 12.0 | .000072 |

Tabla A-17
**Valores críticos r_S^* para la prueba de
 Spearman correspondientes a diferentes percentiles.**

| n | 0.999 | 0.995 | 0.99 | 0.975 | 0.95 | 0.90 |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 4 | | | | | .8000 | .8000 |
| 5 | — | — | .9000 | .9000 | .8000 | .7000 |
| 6 | | .9429 | .8857 | .8286 | .7714 | .6000 |
| 7 | .9643 | .8929 | .8571 | .7450 | .6786 | .5357 |
| 8 | .9286 | .8571 | .8095 | .7143 | .6190 | .5000 |
| 9 | .9000 | .8167 | .7667 | .6833 | .5833 | .4667 |
| 10 | .8667 | .7818 | .7333 | .6364 | .5515 | .4424 |
| 11 | .8364 | .7545 | .7000 | .6091 | .5273 | .4182 |
| 12 | .8182 | .7273 | .6713 | .5804 | .4965 | .3986 |
| 13 | .7912 | .6978 | .6429 | .5549 | .4780 | .3791 |
| 14 | .7670 | .6747 | .6220 | .5341 | .4593 | .3626 |
| 15 | .7464 | .6536 | .6000 | .5179 | .4429 | .3500 |
| 16 | .7265 | .6324 | .5824 | .5000 | .4265 | .3382 |
| 17 | .7083 | .6152 | .5637 | .4853 | .4118 | .3260 |
| 18 | .6904 | .5975 | .5480 | .4716 | .3994 | .3148 |
| 19 | .6737 | .5825 | .5333 | .4579 | .3895 | .3070 |
| 20 | .6586 | .5684 | .5203 | .4451 | .3789 | .2977 |
| 21 | .6455 | .5545 | .5078 | .4351 | .3688 | .2909 |
| 22 | .6318 | .5426 | .4963 | .4241 | .3597 | .2829 |
| 23 | .6186 | .5306 | .4852 | .4150 | .3518 | .2767 |
| 24 | .6070 | .5200 | .4748 | .4061 | .3435 | .2704 |
| 25 | .5962 | .5100 | .4654 | .3977 | .3362 | .2646 |
| 26 | .5856 | .5002 | .4564 | .3894 | .3299 | .2588 |
| 27 | .5757 | .4915 | .4481 | .3822 | .3236 | .2540 |
| 28 | .5660 | .4828 | .4401 | .3749 | .3175 | .2490 |
| 29 | .5567 | .4744 | .4320 | .3685 | .3113 | .2443 |
| 30 | .5479 | .4665 | .4251 | .3620 | .3059 | .2400 |

Nota: Los valores correspondientes a la cola izquierda son $-r_S^$.*

Tabla A-18

Valores críticos para la prueba de Aleatoriedad

c_1 es el mayor entero tal que $P(R \leq c_1) \leq \alpha^*$.

c_2 es el menor entero tal que $P(R \geq c_2) \leq \alpha^*$.

| <i>m</i> | $\alpha^* = 5\%$ | | $\alpha^* = 2.5\%$ | | $\alpha^* = 1\%$ | | $\alpha^* = 0.5\%$ | |
|----------|------------------|-------|--------------------|-------|------------------|-------|--------------------|-------|
| | c_1 | c_2 | c_1 | c_2 | c_1 | c_2 | c_1 | c_2 |
| 5 | 3 | 8 | 2 | 9 | 2 | 9 | | |
| 6 | 3 | 10 | 3 | 10 | 2 | 11 | | 11 |
| 7 | 4 | 11 | 3 | 12 | 3 | 12 | | 12 |
| 8 | 5 | 12 | 4 | 13 | 4 | 13 | | 14 |
| 9 | 6 | 13 | 5 | 14 | 4 | 15 | | 15 |
| 10 | 6 | 15 | 6 | 15 | 5 | 16 | | 16 |
| 11 | 7 | 16 | 7 | 16 | 6 | 17 | | 18 |
| 12 | 8 | 17 | 7 | 18 | 7 | 18 | | 19 |
| 13 | 9 | 18 | 8 | 19 | 7 | 20 | | 20 |
| 14 | 10 | 19 | 9 | 20 | 8 | 21 | | 22 |
| 15 | 11 | 20 | 10 | 21 | 9 | 22 | 8 | 23 |
| 16 | 11 | 22 | 11 | 22 | 10 | 23 | 9 | 24 |
| 17 | 12 | 23 | 11 | 24 | 10 | 25 | 10 | 25 |
| 18 | 13 | 24 | 12 | 25 | 11 | 26 | 11 | 26 |
| 19 | 14 | 25 | 13 | 26 | 12 | 27 | 11 | 28 |
| 20 | 15 | 26 | 14 | 27 | 13 | 28 | 12 | 29 |

$$\alpha^* = \frac{\alpha}{2}$$

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

CAPITULO I

1.1) a) $X_1 + X_2 + X_3$

b) $X_1Y_1 + X_2Y_2 + X_3Y_3 + X_4Y_4 + X_5Y_5$

c) $(X_1+Y_1) + (X_2+Y_2) + (X_3+Y_3) + (X_4+Y_4)$

d) $cX_1 + cX_2 + cX_3 + cX_4 + cX_5$

e) $(X_2+3) + (X_3+3) + (X_4+3) + (X_5+3) + (X_6+3)$

f) $(X_3+Y_3+Z_3) + (X_4+Y_4+Z_4) + (X_5+Y_5+Z_5) + (X_7+Y_7+Z_7)$

1.2) a) $\sum_{i=1}^5 X_i$

b) $\sum_{i=1}^4 X_i^2$

c) $\sum_{i=1}^5 (X_i+2)$

d) $(\sum_{i=1}^4 Y_i)^2$

e) $\sum_{i=2}^6 X_i Y_i$

f) $\sum_{i=1}^3 X_i - \sum_{i=1}^3 Y_i$

1.3) a) 12

b) 50

c) 20

d) - 5

e) 42

f) 19

g) 100

h) 14

i) 35

1.4) a) 26

b) 26

c) 32

1.5) a) 26 b) 26

1.6) a) 60 b) 176 c) $\frac{14}{3}$ d) $\frac{4}{3}$

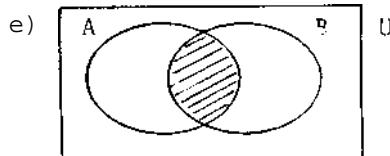
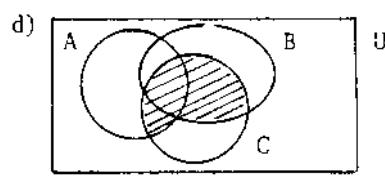
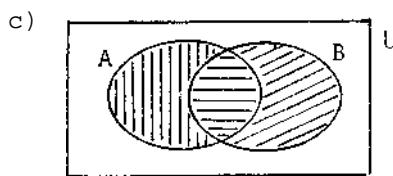
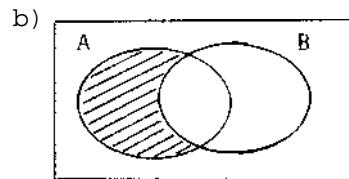
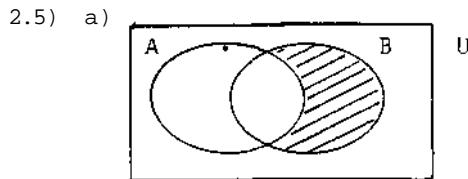
CAPITULO II

- 2.1) a) V b) F c) V d) F e) V f) V g) F
 h) V i) F j) F k) V l) F m) V n) F

- 2.2) a) finito b) finito c) infinito d) infinito
 e) infinito f) finito g) finito h) infinito

- 2.3) a) { 1, 2, 3, 4, 5 } b) { 2, 4 } c) { 2 }
 d) { 2, 3, 4, 5, 6, 7 } e) { 5, 6 } f) { 2, 3, 4, 5, 6, 7 }
 g) { 2, 3, 4, 6, 7 } h) { 1, 5, 6 }

- 2.4) a) U b) { 2, 8 } c) \emptyset d) { 1, 2, 4, 6, 7, 8 }
 e) { 2, 6, 8 } f) \emptyset g) { 1, 7 } h) { 1, 3, 4, 5, 7 }
 i) \emptyset j) U



$$2.6) \quad a) \ 23 \quad b) \ 86 \quad c) \ 41 \quad d) \ 14$$

$$2.7) \quad a) \ 30 \quad b) \ 40 \quad c) \ 45 \quad d) \ 25 \quad e) \ 15 \quad f) \ 55$$

CAPITULO III

$$3.1) \quad (10)^3(26)^3$$

$$3.2) \quad 3840$$

$$3.3) \quad a) \ 5! \quad b) \ 4! \quad c) \ 43 \quad d) \ 48 \quad e) \ 48$$

$$3.4) \quad a) \ 6! \quad b) \ {}^6P_4 = 360$$

$$3.5) \quad a) \ (12)(11)(10)(9)(8)(7)(6) \quad b) \ n(n-1) \quad c) \ S04 \quad d) \ 5!$$

$$3.6) \quad a) \ n = 8 \quad b) \ n = 6 \quad c) \ n = 11$$

$$3.8) \quad a) \ 5040 \quad b) \ 60 \quad c) \ 120 \quad d) \ \frac{11!}{2! \ 2! \ 2!}$$

$$e) \ \frac{13!}{4! \ 2! \ 2!} \quad f) \ \frac{11!}{4! \ 4! \ 2!}$$

$$3.9) \quad 9 \ (10)^6$$

$$5.10) \quad 2 \ (5!)$$

$$3.11) \quad a) \ 24 \quad b) \ 64$$

$$5.12) \quad 5!$$

$$3.13) \quad 4! \ 5!$$

$$3.14) \quad 25$$

3.15) 2^6

3.16) a) $\binom{12}{5}$ b) $\binom{5}{3} \binom{7}{2}$ c) $\binom{5}{5} + \binom{7}{5}$

3.17) 120

3.18) 24

3.19) 560

3.21) a) $\binom{12}{4} x^8 y^4$ b) $\binom{24}{12} (2x)^{12} (\frac{5}{x})^{12}$

c) $(13)(11)(3)(2^8)(x^6) - y = (13)(11)(3)(2^9)(x^7)$

3.22) a) $(5)(2^2)(3^5)$ b) $(17)(8)(5)$

3.23) Séptimo término

3.24) a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{3}$

3.25) 48.35%

3.26) { VI, VD, VA, IV, ID, IA, DV, DI, DA, AV, AI, AD }

3.27) $\frac{1}{24}$

3.28) a) si b) si c) no d) $\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$

3.29) a) $\frac{2}{21}$ b) $\frac{10}{21}$

3.30) 0.3672

3.31 a) 96% b) 23% c) 48% d) 77%

$$3.32) \quad \frac{14}{99}$$

$$3.33) \quad \frac{1}{3}$$

$$3.34) \quad \frac{1}{3}$$

$$3.35) \quad 0.1191$$

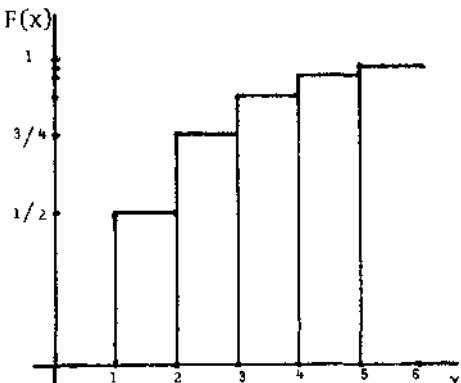
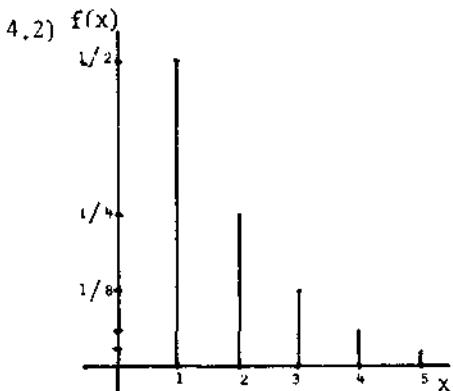
$$3.36) \quad \text{a)} \quad 12.5\% \quad \text{b)} \quad \mathbf{24\%}$$

$$3.37) \quad \frac{5}{11}$$

$$3.38) \quad \frac{2}{3}$$

CAPITULO IV

| 4.1) | X | f(x) | X | f(X) |
|------|----|--------|----|--------|
| | 3 | 1/216 | 11 | 27/216 |
| | 4 | 3/216 | 12 | 25/216 |
| | 5 | 6/216 | 13 | 21/216 |
| | 6 | 10/216 | 14 | 15/216 |
| | 7 | 15/216 | 15 | 10/216 |
| | 8 | 21/216 | 16 | 6/216 |
| | 9 | 25/216 | 17 | 3/216 |
| | 10 | 27/216 | 18 | 1/216 |



4.3) $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}, \quad x = 1, 2,$

4.4) $k = \frac{1}{8}, \quad F(x) = \frac{x^2}{16}, \quad c = 3,6$

4.5) $f(x) = \frac{3}{32} x (4-x), \quad F(x) \approx \frac{3}{16} x^2 - \frac{1}{32} x^3$

4.6) $f(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad F(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)^2}$

4.7) $f(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}, \quad F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}}$

4.8) $f(x) = 3 x^2 e^{-x^3}, \quad F(x) = 1 - e^{-x^3}$

4.9) $f(x) = \frac{1}{2} \cos x, \quad F(x) = \frac{1}{2} (\sin x + 1)$

4.10) a) $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{100}}$ b) $\mu = 100$ c) 0.3935

4.11) a) $f(t) = \frac{1}{20} e^{-\frac{t}{20}}$ b) 20 semanas

4.12) $F(x) = 1 - 3 x e^{-3x} - e^{-3x} \quad F(2) = 0.9826 \quad 1 - F(3) = 0.0012$

4.13) a) 500 litros b) 50 litros

4.14) -2.95

4.15) \$ 800.00

4.16) 67

4.17) 2050

4.18) a) 19 b) 53 c) 65

4.19) 50

4.20) 8

4.21) $E(X) = -0.30$, $V(X) = 15.21$ Pesv. = 3.9

4.22) 6, se espera que en promedio 6 alumnos lleguen tarde a clases.

CAPITULO V

5.1) a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{15}{16}$

5.2) a) 0.1369 b) 0.01152

5.3) 0.1877

5.4) 0.0046

5.5) 14.88%

5.6) a) 0.0613 b) 0.9197 c) 0.019 d) 0.632

5.7) 0.0375

5.8) ≈ 3

5.9) a) 0.1044 b) 0.0067 c) 0.6160

5.10) a) 0.1484 b) 0.0302 c) 0.9698

5.11) a) 0.0956 b) 0.9044 c) 0.1 y 0.3146

5.12) a) 0.2936 b) 0.0104

5.13) 0.017352

5.14) a) 0.8312 b) 0.8625

5.15) a) $\mu = 1.4417$ b) 1.2007

5.16) a) 0.1512 b) 0.4015

5.17) 0.0820

5.18) a) $\frac{1}{17}$ b) $\frac{19}{34}$ c) $\frac{15}{34}$

5.19) 0.3571

5.20) a) 0.0433 b) 0.0452

5.21) b) 0.0471 b) 0.2365

5.22) a) 0.4196 b) 0.7133 c) 0.7133 d) 0.998

5.23) a) 0.3973 b) 0.0547

5.24) 0.001

5.25) 0.0840

5.26) 0.0030

5.27) 0.0515

5.28) 0.0651

5.29) a) 0.0630 b) 0.9730

5.30) 0.4493

5.31) 0.004452

5.32) a) 0.165299 b) 0.160671 c) 0.537163

5.33) a) 4, 3, 3 b) 0.00010486 c) 0.07838208

5.34) a) 0.031250 b) 0.12

5.35) a) 0.032659 b) 0.0163296

CAPITULO VI

6.1) a) 0.8413 b) 0.2743 c) 0.5670 d) 0.2106

6.2) a) 0.9332 b) 0.7486

6.3) a) 100 b) 115 c) 107.05

6.4) a) 63.5 b) 71.7

6.5) a) 0.5328 b) 0.1587 c) 0.1587

6.6) a) 0.6826 b) 0.6915 c) 0.0668

- 6.7) 0.1587
- 6.8) a) 0.1974 b) 0.3829
- 6.9) 3.04
- 6.10) 16
- 6.11) 0.5636 (aproximación) 0.583 (exacto)
- 6.12) 0.0294
- 6.13) 0.0004

CAPITULO VIII

- 8.1) a) continuos f) nominales
b) continuos g) continuos
c) continuos h) continuos
d) discretos i) nominales
e) discretos j) ordinales
- 8.2) Nominales
- 8.3) a) Nominales
- 8.4) Ordinales
- 8.5) $\bar{x} = 45,753.33$ $s = 14,203.99$ $Md = 45,250$ M no existe
- 8.6) $\bar{x} = 90.9375$ $M = 9.4$ $Md = 94$ $s^2 = 166.1958$
 $s = 12.8917$

$$8.7) \quad a) \quad \bar{X} = 2 \quad s^2 = 2.8571 \quad s = 1.6903 \quad Md = 2 \quad M = 0$$

$$8.8) \quad \bar{X}_w = 216.33$$

$$8.9) \quad \text{Mediana, } 45$$

$$8.10) \quad P_{50} = 59.6 \quad , \quad 50\%$$

$$8.11) \quad \bar{X} = 23.07 \quad , \quad Md = 22 \quad , \quad s^2 = 54.92 \quad , \quad s = 7.41$$

$$8.12) \quad 7,213.22$$

$$8.13) \quad \bar{X} = 6.1094 \quad , \quad Md = 5.965 \quad , \quad M \text{ no existe} \quad , \quad s = 1.8583$$

$$8.14) \quad H = 61.5 \quad \text{Km/h}$$

$$8.15) \quad H = 0.60 \quad \text{Ha/h}$$

$$8.16) \quad G = 77.781$$

$$8.17) \quad \bar{X}_w = \$ 389.00$$

$$8.18) \quad \bar{X}_w = 62.50\%$$

$$8.19) \quad c) \quad X = 4.7028 \quad , \quad Md = 4.7105 \quad , \quad M = 4.7333$$

$$d) \quad s^2 = 0.0387 \quad , \quad s = 0.1966 \quad , \quad DM = 0.1605$$

$$8.20) \quad c) \quad \bar{X} = 94.04 \quad , \quad Md = 93.80 \quad , \quad M = 93.70$$

$$d) \quad P_{25} = 92.718 \quad , \quad P_{75} = 95.45 \quad , \quad O=1,355 \quad RP(93.7)=46.32$$

$$e) \quad s^2 = 3.5067 \quad , \quad s = 1.8726 \quad , \quad DM = 1.45$$

$$8.23) \quad \bar{X} = 0.11385 \quad g \quad s^2 = 0.000141187 \quad g^2$$

$$8.24) \quad \bar{X} = 460 \quad , \quad s_x = 27.9096 \quad , \quad s_x^2 = 778.9474$$

8.25) $\bar{Y} = 12$, $s_y = 5.5819$, $s_y^2 = 31.1579$
 $\bar{x} = 5 (\bar{Y} + 80)$, $s_x = 5 s_y$, $s_x^2 = 25 s_y^2$

8.26) $\bar{X}_w = 3.56$ francos

8.27) $\bar{X} = 5.40$, $G = 5.04$, $H = 4.62$, $H \leq G \leq \bar{X}$

CAPITULO IX

9.2) 0.1379

9.3) aproximadamente normal

$$\mu_{\bar{X}} = 1500 \quad s_{\bar{X}} = 35.355$$

9.4) a) normal

b) 0.0571

c) $\mu = 21.9543$

9.5) f) $\sigma_{\bar{X}} = 0.3$ g) 0.4935 h) 32.4935 i) 31.5065

9.6) a) Se rechaza H_0 , El sitio no satisface los requerimientos de la N.A.S.A.

b) Se cometeria un error de Tipo I,.si no se construye el generador en un lugar donde la velocidad del viento es mayor que 15 m.p.h.

c) Se cometeria un error de Tipo II.si se construye el generador en un sitio donde la velocidad del viento es menor que 15 m.p.h.

d) Usarla a grande (0.10) para que B sea más chico porque es más grave el error de Tipo II que el de Tipo I.

9.7) a) $H_0: \mu \geq 4.4^\circ C$ $H_a: \mu < 4.4^\circ C$

b) $H_0: \mu = 24$ $H_a: \mu \neq 24$

c) $H_0: \mu = 36$ $H_a: \mu \neq 36$

$$d) H_0: \pi \leq 0.51$$

$$H_a: \pi > 0.51$$

$$e) H_0: \mu \leq 8$$

$$H_a: \mu > 8$$

$$9.8) a) H_0: \mu \geq 30$$

$$H_a: \mu < 30$$

$$b) H_0: \mu \leq 30$$

$$H_a: \mu > 30$$

$$9.9) a) H_0: \pi \geq 0.10$$

$$H_a: \pi < 0.10$$

$$b) H_0: \pi \leq 0.10$$

$$H_a: \pi > 0.10$$

9.10) Se rechaza H_0

$$9.11) 2.625 < \mu < 2.775$$

9.12) a) Se acepta H_0

$$b) 0.0910 < \pi < 0.1440$$

9.13) a) Se acepta $H_0: \pi \leq 0.5$

$$b) 0.4430 < \pi < 0.4950$$

$$9.14) 0.0172 < \pi < 0.0628$$

$$9.15) 0.7244 < \pi < 0.8356 \quad 0.7137 < \pi < 0.8463 \quad 0.6929 < \pi < 0.8671$$

9.16) Se rechaza H_0 , menos de 50% han sido vacunados.

$$9.17) n \approx 1068$$

$$9.18) n \approx 374$$

$$9.19) n \approx 35$$

$$9.20) 87.65 < \mu < 92.35$$

$$9.21) 3.726 < \mu < 8.234$$

9.22) $n \approx 139$

9.23) No

9.24) $n \approx 4$

9.25) a) $\bar{X} = 0.027$ $s = 0.0095$
 $\bar{X} = 3.08$ $s = 0.4467$
 $\bar{X} = 0.45$ $s = 0.1650$

- b) i) Se acepta H_0 , el nivel de dióxido de azufre no puede considerarse bajo.
ii) $0.0215 < \mu < 0.0325$
- c) i) Se rechaza H_0 , los datos indican que el nivel medio de monóxido de carbono es menor que 4.9.
ii) $2.7609 < \mu < 3.3991$
- d) i) Se acepta H_0 , la muestra indica que el nivel medio de polvo no es alto,
ii) $0.332 < \mu < 0.568$

9.26) No

9.27) Si

9.28) a) $1,182,778.743 < \sigma^2 < 8,333,333.333$
b) $1087.5563 < \sigma < 2886.7513$

9.29) a) $1.1894 < \sigma^2 < 5.2211$
b) $1.0906 < \sigma < 2.2850$

9.30) No

9.31) a) 2.54 b) 2.29 c) 2.28
d) 3.29 e) 3.23 f) 3.48
g) 2.30 h) 2.53 i) 2.83

- 9.32) a) 0.4386 b) 0.1592 c) 0.3096
d) 0.2747 e) 0.3125 f) 0.3356

9.33) Las varianzas son significativamente diferentes (σ_1^2 es significativamente mayor que σ_2^2).

9.34) a) $0.3291 < \frac{\sigma_L^2}{\sigma_p^2} < 1.5902$

b) $0.5335 < \frac{\sigma_L^2}{\sigma_p^2} < 1.3693$

9.35) Las temperaturas se han vuelto menos variable que en el pasado

9.36) Se rechaza H_0 , Hay mayor variabilidad en la cara interior que en la cara exterior.

9.37) $P(1.8041 < \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < 6.0615) = 0.90$

9.38) Si

9.39) No

- 9.40) a) $-0.0687 < \pi_1 - \pi_2 < 0.1887$
b) $-0.0933 < \pi_1 - \pi_2 < 0.2133$
c) $-0.1415 < \pi_1 - \pi_2 < 0.2615$

9.41) Se acepta H_0 . No existe diferencia significativa entre las verdaderas proporciones,

9.42) NO, el nuevo suero no es significativamente mejor.

9.43) $-0.7734 < \mu_1 - \mu_2 < -0.4266$

- 9.44) $44.85 < \mu_v - \mu_M < 59.75$
- 9.45) Se rechaza H_0 , La diferencia de pesos medios de los varones y las mujeres universitarias excede 42 libras al 10% de significación.
- 9.46) $-14.512 < \mu_1 - \mu_2 < 19.712$
- 9.47) a) $-0.5756 < \mu_1 - \mu_2 < 3.1756$
b) $-0.9347 < \mu_1 - \mu_2 < 3.5347$
c) $-1.6371 < \mu_1 - \mu_2 < 4.2371$
- 9.48) a) $1.4221 < \mu_1 - \mu_2 < 2.9979$
b) $1.2563 < \mu_1 - \mu_2 < 3.1638$
c) $0.9064 < \mu_1 - \mu_2 < 3.5136$
- 9.49) a) $1.1417 < \mu_1 - \mu_2 < 8.8583$
b) $0.3430 < \mu_1 - \mu_2 < 9.6570$
c) $-1.5448 < \mu_1 - \mu_2 < 11.5448$
- 9.50) Si
- 9.51) Se acepta II, No hay diferencia significativa entre los dos métodos de cultivo.
- 9.52) No abandonar el método I, porque el II no es significativamente mejor.
- 9.53) Si, el analista I tiene tendencia a obtener datos más altos que el II.
- 9.54) $2.92 < \mu_1 - \mu_2 < 7.08$
- 9.55) Varianzas diferentes y medias no significativamente diferentes.

9.56) Varianzas iguales y $\mu_A > \mu_B$

9.57) a) Se rechaza H_0

b) Si

c) $2.1692 < \mu_A - \mu_B < 3.8308$

9.58) No se rechaza H_0 no hay diferencia entre las dos mezclas.

9.59) No se rechaza H_0 no hay diferencias significativas entre las dos básculas.

9.60) Se rechaza H_0 , la vespertina es significativamente mayor.

9.63) $< 4131.3087 , 4569.3573 >$

9.64) $< 5.5413 , 5.7187 >$

9.65) $< 15.1041 , 21.3509 >$

9.66) a) $\beta = 0.7734$ b) $\beta = 0.0006$ c) $\beta = 0$

9.67) a) $\beta = 0.9082$ $1 - \beta = 0.09$
b) $\beta = 0.6278$ $1 - \beta = 0.3722$

9.68) a) $\beta = 0.9172$ b) $\beta = 0.6667$

9.69) $\alpha = 0.4840$, $1 - \beta = 0.5160$

9.70) $\alpha = 0.0221$ $\beta = 0.09$ $1 - \beta = 0.91$

CAPITULO X

10.1) El número de juegos en que termina una serie mundial no es igualmente probable, $\chi^2_{0.95,3} = 7.815$, $\chi^2_{\text{calc.}} = 8.9365$

10.2) si, $\chi^2_{0.95,1} = 3.841$, $\chi^2_{\text{calc.}} = 0.3937$

10.3) si, $\chi^2_{0.95,5} = 11.070$, $\chi^2_{\text{calc.}} = 0.6571$

10.4) si, $\chi^2_{0.95,9} = 16.919$, $\chi^2_{\text{calc.}} = 8.80$

10.5) Se rechaza H_0 , $\hat{p} = 0.05$, $g_1 = 4 - 2 = 2$, $\chi^2_{\text{calc.}} = 6.0362$

10.6) $\hat{\lambda} = 0.95$, $\chi^2_{\text{calc.}} = 0.7710$, $g_1 = 5 - 2 = 3$, Se acepta H_0 .

10.7) $\chi^2_{\text{calc.}} = 0.006$, $g_1 = 3 - 1 = 2$. Se acepta H_0 ,

10.8) $\chi^2_{\text{calc.}} = 2.5936$, $\hat{\lambda} = 2.21$, $g_1 = 6 - 2 = 4$, Se acepta H_0 .

10.9) $\chi^2_{\text{calc.}} = 3.4221$, $g_1 = 6 - 2 = 4$.

10.10) $\chi^2_{\text{calc.}} = 2.29$, $g_1 = 7 - 2 = 5$.

10.11) $D = 0.218$, Se rechaza H_0 , los datos no corresponden a una distribución normal.

10.12) $\chi^2_{\text{calc.}} = 7.8760$, $g_1 = 8 - 3 = 5$, Se acepta H_0

10.13) $\chi^2_{\text{calc.}} = 12.68$, $g_1 = 13 - 3 = 10$

10.14) Son dependientes, $\chi^2_{\text{calc.}} = 703.75$, $g_1 = 1$

10.15) Son independientes, $\chi^2_{\text{calc.}} = 2.592$, $g_1 = 2$.

10.16) Son dependientes, $\chi^2_{\text{calc.}} = 25.3968$

10.17) Son independientes, $\chi^2_{\text{calc.}} = 2.7233$.

10.18) Son independientes, $\chi^2_{\text{calc.}} = 5.4039$.

10.19) Son independientes, $\chi^2_{\text{calc.}} = 0.0958$.

10.20) Son dependientes, $\chi^2_{\text{calc.}} = 25.56$.

10.21) Son dependientes, $\chi^2_{\text{calc.}} = 277.9861$.

CAPITULO XI

| 11.1) | fuente | g.l. | Sumas de cuadrados | Varianzas | Estadígrafo |
|-------|----------|------|------------------------------|-----------|--------------|
| | "entre" | 3 | $5.5665 - 0.9296 = 4.6369$ | 1.5456 | $F = 0.7171$ |
| | "dentro" | 8 | $22.8090 - 5.5665 = 17.2425$ | 2.1553 | |
| | Total | 11 | $22.8090 - 0.9296 = 21.8794$ | — | |

b) Si.

| 11.2) | fuente | g.l. | Sumas de cuadrados | Varianzas | Estadígrafo |
|-------|----------|------|----------------------------------|-----------|----------------|
| | "entre" | 3 | $2537.6160 - 2537.6053 = 0.0107$ | 0.003567 | $F = 5.519841$ |
| | "dentro" | 13 | $2537.6244 - 2537.6160 = 0.0084$ | 0.000646 | |
| | Total | 16 | $2537.6244 - 2537.6053 = 0.0191$ | — | |

b) Si

| 11.3) | fuente | g.l. | Sumas de cuadrados | Varianzas | Estadígrafo |
|-------|----------|------|---------------------------------|-----------|---------------|
| | "entre" | 5 | $405.1332 - 350.8129 = 54.3203$ | 10.8641 | $F = 24.9191$ |
| | "dentro" | 30 | $418.2124 - 405.1332 = 13.0792$ | 0.4360 | |

Si

Parejas diferentes: 1,2 ; 1,3 ; 1,6 ; 2,4 ; 2,5 ; 3,4 ; 3,5 ;

4,6 y 5,6.

| 11.4) | fuente | g.l. | Sumas de cuadrados | Varianzas | Estadígrafo |
|-------|--------------|------|-------------------------------------|-----------|---------------|
| | Trat. | 7 | $23505.75 - 14092.1905 = 9413.5595$ | 1344.7942 | $F = 57.8406$ |
| | error | 13 | $23808.00 - 23505.75 = 302.25$ | 23.25 | |
| | Total | 20 | $23808.00 - 14092.1905 = 9715.8095$ | | |

Existe diferencia significativa entre los recuentos mitósicos medios

- 11.5) a) Son diferentes
 b) 1 y 3 son diferentes.

- 11.6) No son significativamente diferentes los medicamentos.

| 11.7) fuente | g.1. | Sumas de cuadrados | varianzas | Estadígrafo |
|-----------------|------|-------------------------------------|-----------|--------------------------------------|
| Método | 3 | $19.4190 - 19.3294 = 0.0896$ | 0.0299 | $F = \frac{0.0299}{0.0060} = 5.0009$ |
| bloques condic. | 2 | $19.5051 - 19.3294 = 0.1757$ | 0.0879 | |
| error | 6 | $0.3011 - 0.0896 - 0.1757 = 0.0358$ | 0.0060 | |
| total | 11 | $19.6305 - 19.3294 = 0.3011$ | — | |

Los métodos no son significativamente diferentes.

| 11.8) fuente | g-1. | Sumas de cuadrados | varianzas | Estadígrafo |
|--------------|------|--------------------------------------|-----------|--------------------------------------|
| tipo | 2 | $140283.4760 - 140282.6907 = 0.7853$ | 0.3927 | $F = \frac{0.3927}{0.7352} = 0.5341$ |
| bloques | 4 | $140283.3333 - 140282.6907 = 0.6426$ | 0.1607 | |
| error | 8 | $7.3093 - 0.7853 - 0.6426 = 5.8814$ | 0.7352 | |
| total | 14 | $140290.0000 - 140282.6907 = 7.3093$ | — | |

No existe diferencia significativa .

| 11.9) fuente | g.1. | Sumas de cuadrados | varianzas | Estadígrafo |
|-----------------|------|---|------------|--------------|
| bloques macrom. | 3 | $759113.00 - 568980.75 = 190132.25$ | 63377.4167 | $F = 2.1195$ |
| conser. | 2 | $667069.25 - 568980.75 = 98088.50$ | 49044.25 | |
| error | 6 | $427056.25 - 190132.25 - 98088.50 = 138835.5$ | 23139.25 | |
| total | 11 | $996037.0 - 568980.75 = 427056.25$ | — | |

- 11.10) Haría un ANDEVA de un factor con bloques y le diría que los tiempos son fuentes de variabilidad.

| fuente | g.l. | Sumas de cuadrados | varianzas | Estadígrafo |
|---------|------|------------------------------|-----------|-------------|
| tiempo | 3 | 512.0326-511.3420=0.6906 | 0.2302 | F=42.5935 |
| bloques | 5 | 511.3496-511.3420=0.0075 | 0.0015 | |
| error | 15 | 0.7792 -0.6906-0,0075=0.0811 | 0.0054 | |
| total | 23 | 512.1212-511.3420=0.7792 | — | |

| 1.11) | fuente | g.l. | Sumas de cuadrados | varianzas | Estadígrafo |
|-------|----------|------|--------------------------------|-----------|---------------------------|
| | vitamina | 2 | 1928.9057-1927.6876=1.2181 | 0.6090 | $F=\frac{0.6090}{0.9063}$ |
| | bloques | 6 | 1948.9067-1927.6876=21.2190 | 3.5365 | |
| | error | 12 | 33.3124-1.2181-21.2190=10.8752 | 0.9063 | |
| | total | 20 | 1961.00-1927.6876=33.3124 | — | =0.6720 |

No existe diferencia significativa entre las tres vitaminas con $\alpha=5\%$

| 11.12) | fuente | g.l. | Sumas de cuadrados | varianzas | Estadígrafo |
|--------|----------------|------|------------------------------|-----------|-------------|
| | métodos | 2 | 3480.8333-3444.50=36.3353 | 18.1667 | $F=9.5614$ |
| | Bloques indiv. | 5 | 3515.6667-3444.50=71.1667 | 14.2333 | |
| | error | 10 | 120.50-36.3333-71,1667=19.00 | 1.90 | |
| | total | 17 | 3571.00-3444.50 = 126.50 | — | |

Hay diferencia significativa entre los métodos.

| 11.13) | fuente | g.l. | Sumas de cuadrados | varianzas | Estadígrafo |
|--------|---------|------|-------------------------|-----------|-------------|
| | dietas | 1 | 229060.0-228980.0=80.00 | 80.00 | $F=48$ |
| | bloques | 9 | 229059.0-228980.0=79.00 | 8.7778 | |
| | error | 9 | 174-80-79=15 | 1.6667 | |
| | total | 19 | 229154.0-228980.0=174 | — | |

Hay diferencia significativa entre las dietas.

PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

| fuente | g.l. | Sumas de cuadrados | varianzas | Estadígrafo |
|--------------|------|-------------------------------|-----------|----------------------------|
| insect. | 2 | 134058.33-132845.0=1213.33 | 606.6667 | $F_{\text{ins.}} = 1.6076$ |
| especie | 2 | 133341.93-132845.0=496.93 | 248.4667 | $F_{\text{esp.}} = 1.8871$ |
| inter-acción | 4 | 1722-1213 . 33-496.93=11.7334 | 2.9334 | $F_{\text{int.}} = 0.0223$ |
| subtotal | 8 | 134567.0-132845.0=1722 | — | |
| error | 36 | 6462-1722=4740 | 131.6667 | |
| total | 44 | 139307.0-132845=6462 | — | |

$$F_{0.95,2,36} \approx 3.23$$

$$F_{0.95,4,36} \approx 2.61$$

Hay diferencia entre los insecticidas.

No hay diferencia entre las especies.

No hay efecto de interacción.

| 11.15) fuente | g.1. | Sumas de cuadrados | varianzas | Estadígrafo |
|---------------|------|----------------------------------|-----------|------------------------------|
| Observ. | 2 | 1001840.6 -1001744.133=96.467 | 48.2335 | $F_{\text{obs.}} = 20.0973$ |
| sujetos | 4 | 1006350.33-1001744.13=4606.2 | 1151.55 | $F_{\text{suj.}} = 664.3558$ |
| ínter-acción | 8 | 4721.867-96.467-4606.2=19.2 | 2.40 | $F_{\text{int.}} = 1.5846$ |
| subtotal | 14 | 1006466.0 -1001744.133=4721 .867 | | |
| error | 15 | 4747.867-4721.867=26 | 1.7333 | |
| total | 29 | 1006492 -1001744.153=4747.867 | | |

Hay diferencia significativa entre los observadores (factor fijo)

Hay diferencia significativa entre los sujetos (factor aleatorio)

No hay efecto de interacción.

| 11 16) fuente | g-1. | Sumas de cuadrados | varianzas | Estadigrafo |
|---------------|------|--|-----------|-------------------------------|
| prueba | 2 | 6111.94-5813.8681=298.0719 | 149.0359 | $F_{\text{prueb.}} = 15.2793$ |
| hábitos | 2 | 5898.7667 - 5813.8081=84.8985 | 42.4493 | $F_{\text{hab.}} = 12.8967$ |
| inter-acción | 4 | 385.7852 -298.0719-84.8985 =
= 2.8148 | 0.7037 | $F_{\text{int.}} = 0.2158$ |
| subtotal | 8 | 6199.6533 - 5813.8681=385.7832 | — | |
| error | 18 | 445.0319-385.7852=39.2407 | 5.2915 | |
| total | 26 | 6258.90 - 5813 .8681=145.0319 | -- | |

| 11.17) fuente | g.l. | Sumas de cuadrados | varianzas | Estadígrafo |
|---------------|------|--------------------------------|-----------|-----------------------|
| Temp. | 2 | 15679.625-15657.0417= 22.5833 | 11 .2917 | $F_{temp.} = 12.9048$ |
| Hume. | 1 | 15658.0833-15657.0417= 1.0417 | 1 .0417 | $F_{hum.} = 1.1905$ |
| Inter. | 2 | 26.2083-22.5833-1.0417= 2.5833 | 1.2917 | $F_{int.} = 1.4762$ |
| Subtotal | 5 | 15683.25-15657.0417= 26.2083 | | |
| error | 18 | 41.9583-26.2085=15.75 | 0.8750 | |
| total | 23 | 15699-15657.0417=41.9583 | | |

Existe diferencia significativa entre las temperaturas, pero no entre las humedades, ni existe efecto de interacción.

| 11.18) fuente | g.l. | Sumas de cuadrados | varianzas | $F_{calc.}$ |
|---------------|------|--------------------------------------|------------|------------------------|
| Fértili. | 3 | 340223.8667-306163.2667= 34060.60 | 11353.5333 | $F_{fert.} = 188.5969$ |
| Variedad | 4 | 306477.5-306163.2667= 314.2333 | 78.5583 | $F_{var.} = 1.3050$ |
| ínter. | 12 | 35282.7333-34060.60- 314.2333=907.90 | 75.5583 | $F_{int.} = 1.2568$ |
| Subtotal | 19 | 341440.0-306163.2667= 35282.7333 | | |
| error | 40 | 37690.7333-35282.7533= 2408.0 | 60.20 | |
| total | 59 | 343854.0-306163.2667= 37690.7333 | | |

Existe diferencia significativa entre los fertilizantes pero no entre las variedades ni existe interacción.

| PROBABILIDAD Y ESTADISTICA | | | | | |
|----------------------------|------|----------------------------------|-----------|------------------------------|--|
| 11.19) fuente | g.l. | Sumas de cuadrados | varianzas | F _{calc.} | |
| Veloc. | 2 | 1150.8317-1140.8272= 10.0044 | 5.0022 | F _{vel.} = 64.7770 | |
| tiempo | 2 | 1142.9817-1140.8272=2.1544 | 1.0772 | F _{tiem.} = 13.9496 | |
| inter. | 4 | 14.1078-10.0044-2.1544 = 1 .9489 | 0.4872 | F _{int.} = 6.3093 | |
| subtotal | 8 | 1154.9350-1140.8272= 14.1078 | | | |
| error | 9 | 14.8028-14.1078=0.6950 | 0.0772 | | |
| total | 17 | 1155.63-1140.8272=14.8028 | | | |

Las velocidades difieren significativamente.

Los tiempos difieren significativamente.

El efecto de interacción es significativo.

| 11.20) fuente | g.l. | Sumas de cuadrados | varianzas | F _{calc.} | |
|---------------|------|--------------------------|-----------|--------------------|--|
| sujetos | 7 | 824 , 699-817 , 216=7483 | 1069 | F = 0.3972 | |
| observ. | 7 | 818 , 834-817 , 216=1218 | 174 | | |
| trat. | 7 | 817 , 545-817 , 216=329 | 47 | | |
| error | 42 | 14000-7483-329-1218=4970 | 118.3333 | | |
| total | 63 | 831216-817216 =14000 | | | |

No existe diferencia significativa en el orden de asignación de los sujetos a los observadores.

| 11.21) fuente | g.l. | Sumas de cuadrados | varianzas | F _{calc} | |
|---------------|------|--|-----------|-------------------|--|
| operad. | 5 | 19261.1667-19182.25= 78.9167 | 15.7833 | F = 22.7811 | |
| tipo | 5 | 19283.50-19182.25= 101.25 | 20.25 | | |
| temp. | 5 | 20448.50-19182.25= 1266.25 | 253.25 | | |
| error | 20 | 1668.75-78.9167-101.25- 1266.25=222.3333 | 11.1167 | | |
| total | 35 | 20851.0-19182.25=1668.75 | | | |

Existe diferencia significativa en el volumen del combustible que atraviesa el inyector a diferentes temperaturas con $\alpha=0.01$.

CAPITULO XII

- 12.1) b) $\hat{Y} = -2.7163 + 1.8999 X$
 c) $\hat{Y} = 10.7733$
 d) $P(8.0612 < \hat{Y} < 13.4853) = 0.95$
 e) Se acepta H_0 .
 f) $P(9.9318 < \mu_{Y/X} < 11.6148) = 0.95$
- 12.2) b) $\hat{Y} = -2.6005 + 0.8836 X$
 c) Se rechaza H_0 .
 d) $\hat{Y}_0 = 1.8177$
 $P(1.4797 < \hat{Y} < 2.1558) = 0.95$
 e) $r^2 = 0.9975 \quad r = 0.9987$
- 12.3) b) $\hat{Y} = -0.0116 + 1.0190 X$
 c) Se rechaza H_0
 d) $r = 0.9995, \quad r^2 = 0.9989$
 e) $\hat{Y} = 1.2112$
 $P(1.1546 < \hat{Y} < 1.2678) = 0.95$
- 12.4) a) $\hat{Y} = 53.2381 + 0.5771 X$
 b) Se acepta H_0
 c) $r^2 = 0.9824 \quad r = 0.9912$
 d) $z_{\text{calc.}} = 2.79$, se rechaza H_0 , por lo tanto $\rho > 0.8$
- 12.5) b) $\hat{Y} = 7.8267 - 0.1220 X$
 c) $\hat{Y}_0 = 5.3361$
 $P(3.5456 < \hat{Y} < 7.1266) = 0.95$
 d) $r = -0.9644$
 Se rechaza H_0
- 12.6) a) $\hat{Y} = 19.8900 + 0.8220 X$
 b) B no es significativamente diferente de 1 al 5%,
 c) $\hat{Y}(S) = 24$

d) $P(23.6724 < \mu_{Y/X} < 24.3276) = 0.95$

12.7) b) $(\bar{X}, \bar{Y}) = (56.55, 18.275)$

c) $\hat{Y} = 9.9186 + 0.1478 X$

| d) fuente | g.l. | Sumas de cuadrados | Cuadrados Medios | $F_{calc.}$ |
|-----------|------|--------------------|------------------|-----------------------|
| Regres | 1 | 31.9884 | 31.9884 | $F_{calc.} = 96.7865$ |
| error | 18 | 5.9491 | 0.3305 | |
| total | 19 | 37.9375 | | |

e) $P(0.1162 < B < 0.1793) = 0.95$

f) Se rechaza $H_0: B = 0$. $t_{calc.} = 9.838$

g) $\hat{Y}(50) = 17.3071$

h) $P(18.3859 < \mu_{Y/X} < 19.1839) = 0.99$

12.8) a) $r = 0.7026$

$r^2 = 0.4936$

b) Se rechaza H_0 , por lo tanto $\rho \neq 0$

12.9) b) $r^2 = 0.9946$

c) Se acepta $H_0: \rho = 0.99$

12.10) a) $r = 0.8621 \quad r^2 = 0.7432$

b) Se rechaza H_0 ; ρ es significativamente diferente de cero

c) $P(0.6370 < \rho < 0.9517) = 0.90$

12.11) b) $P = 1.30 \times 10^{-11} T^{5.7059}$

c) $P(93.7^\circ C) = 2.3182 \text{ mm Hg}$

12.12) b) $T = 57.2150 P^{0.2093}$

c) $T(15 \text{ mm Hg}) = 100.8568^\circ C$

12.13) a) $\hat{Y} = 1.565 + 0.175 X_2 + 0.552 X_3$

b) $\hat{Y}(3.5, 3) = 3.8335$

12.14) Crec. = 2.0709 + 0.807 (FHS) + 0.3568 (LTH)

12.15) $\hat{Y} = 5.4705 - 4.953 \times 10^{-3} X_2 + 2.4914 \times 10^{-2} X_3$

12.16) b) $\hat{Y} = (10.5768)(2.8703)^X$

c) $\hat{Y}(1.9) = 78.4175$

CAPITULO XIII

13.1) Probabilidad ($Md = 100$) = 0.3036

13.2) $n = 8$, $P(X \geq 7) = 0.0352 = 3.5\%$

Se rechaza la hipótesis nula de que la diferencia no es significativa al 5%.

13.3) $n = 8$, $P(X \geq 5) = 0.3633 > 0.05$.

Se acepta H_0 : $Md_D - Md_A \leq 0$. Por consiguiente no se ha reducido significativamente la contaminación.

13.4) Todas las diferencias excepto una tienen el mismo signo, por lo tanto existe diferencia significativa entre las dos drogas.

13.5) $n = 12$, $P(X \geq 9) = 0.0730 = 7.3\%$. No hay diferencia significativa entre los dos calibradores al 5%.

13.6) $Md = 3.3$, $\chi^2_{\text{calc.}} = 4.91$, $\chi^2_{0.95,1} = 3.841$. Se rechaza H_0 , por lo tanto, las medianas son significativamente diferentes al 5%.

13.7) $P_{25} = 108$, $P_{50} = 127$, $P_{75} = 142.5$

$$\chi^2_{\text{calc.}} = 73.9045 - 65 = 8.9045 \quad \chi^2_{0.95,6} = 12.592$$

a) Se acepta H_0 ; por consiguiente no hay diferencia significativa entre los tres grupos.

- b) Usarla un ANALISIS DE VARIANZA.
- c) Que las poblaciones están normalmente distribuidas, las muestras sean aleatorias e independientes y las varianzas sean iguales.

13.8) $T_{\text{calc.}} = 15 \quad T_{\text{teor.}} = 8$

Se acepta H_0 , el tratamiento con corriente eléctrica no afecta el alargamiento.

13.9) $T_{\text{calc.}} = 6 \quad T_{\text{teor.}} = 3$

Se acepta H_0 , la mediana no es significativamente diferente de 12.

13.10) $T_{\text{calc.}} = 2 \quad T_{\text{teor.}} = 3$

Se rechaza H_0 , Existe un incremento significativo en la presión sanguínea.

13.11) $Md_0 = 0.85 \quad , \quad T_{\text{calc.}} = 208.5 \quad , \quad T_{\text{teor.}} = 100$

Se acepta H_0 , la Md no es significativamente diferente de 0.85 al 1%

13.12) $T_{\text{calc.}} = 52 \quad T_{\text{teor.}} = 25$

Se acepta H_0 ; No existe diferencia significativa entre las variedades.

13.13) $T_{\text{calc.}} = 13 \quad T_{0.05} = 13$

La eficiencia de los tratamientos es significativamente diferente al 5% y al 10%.

13.14) $T_{\text{calc.}} = 4 \quad T_{0.05} = 3$

Se acepta H_0 , no existe diferencia significativa entre los dos fertilizantes al 5%

13.15) $T_{\text{calc.}} = 15.5 < T(1\%, 2\%, 5\%, 10\%)$. Se rechaza H_0 .

$$13.16) \quad n_1 = 8, \quad R_1 = 112.5, \quad n_2 = 11, \quad R_2 = 77.5$$

$$U_1 = 11.50, \quad U_2 = 76.5, \quad U_{0.025, 8, 11} = 19, \quad U_{0.975, 8, 11} = 69$$

Se rechaza H_0 , $Md_A \neq Md_B$ (El número de errores es significativamente diferente para los dos grupos.)

$$13.17) \quad n_1 = 5, \quad R_1 = 43, \quad n_2 = 6, \quad R_2 = 23$$

$$U_1 = 2, \quad U_2 = 28, \quad U_{0.025, 5, 6} = 3, \quad U_{0.975, 5, 6} = 27$$

Se rechaza H_0 , $Md_A \neq Md_B$ (Las dos pinturas son significativamente diferentes).

$$13.18) \quad n_1 = 11, \quad R_1 = 117, \quad n_2 = 13, \quad R_2 = 183$$

$$U_1 = 92, \quad U_2 = 51, \quad U_{0.025, 11, 13} = 37, \quad U_{0.975, 11, 13} = 106$$

Se acepta H_0 , No existe diferencia entre las dos zonas.

$$13.19) \quad H_{\text{calc.}} = 10.58, \quad H_{\text{calc.}}^* = 10.5846, \quad \chi^2_{0.95, 2} = 5.991$$

Se rechaza H_0 , Las tres gasolinas son significativamente diferentes.

$$13.20) \quad H_{\text{calc.}} = 154.5523 - 135 = 19.5523, \quad \chi^2_{0.95, 3} = 7.815.$$

Se rechaza H_0 , los cuatro grupos son significativamente diferentes.

$$13.21) \quad H_{\text{calc.}} = 10.5783, \quad \chi^2_{0.95, 3} = 7.815$$

Se rechaza H_0 , los cuatro tratamientos son significativamente diferentes.

$$13.22) \quad H_{\text{calc.}} = 13.8553, \quad \chi^2_{0.99, 2} = 9.21$$

Se rechaza H_0 , los métodos de empacado son significativamente diferentes.

$$13.23) \quad H_{\text{calc.}} = 14.7482, \quad \chi^2_{0.95, 4} = 9.488$$

Se rechaza H_0 , Los niveles medios de sangre para los 5 grupos son significativamente diferentes.

13.24) $\chi^2_r = 11.10$, $p = 0.00094$

Las cuatro dietas son significativamente diferentes para $\alpha > 0.00094$

13.25) $r_s = 0.8554$, $r_s^*(0.975, 10) = 0.6364$

Se rechaza H_0 , $\rho \neq 0$.

13.26) $r_s = 0.9945$, $r_s^*(0.975, 14) = 0.5341$

Se rechaza H_0 , X y Y no son independientes.

13.27) a) $Md = 84$, $R = 4$, $m = 9$

Valores críticos con $\alpha = 0.05$: 5 y 14

$R < 5$, se rechaza H_0 , la muestra no es aleatoria.

b) $Md = 44$, $R = 11$, $m = 13$

Valores críticos con $\alpha = 0.05$: 8 y 19

$8 < R < 19$, Se acepta H_0 , la muestra es aleatoria,

c) $Md = 1.4$, $R = 9$, $m = 9$

Valores críticos con $\alpha = 0.05$: 5 y 14

$5 < R < 14$, la muestra es aleatoria.

d) $Md = 60$, $R = 5$, $m = 9$

Valores críticos con $\alpha = 0.05$: 5 y 14

$R = 5$, la muestra es aleatoria.

13.29) $Md = 4$, $R = 23$, $m = 23$, $\mu_R = 24$, $\sigma_R = 3.5553$

$z_{\text{calc.}} = -0.2982$, la muestra es aleatoria,

13.30) $R = 7$, $m = 18$, Valores críticos: 12 y 25. No están colocadas en forma aleatoria.

13.31) $R = 6$, $m = 14$, valores críticos: 9 y 20 , no es aleatoria, $n = 20$, $P(X > 14) = P(X < 6) = 0.0577$, la muestra es aleatoria usando la prueba de la mediana.

BIBLIOGRAFÍA

Aleksandrov, A. D., Kolmogorov, A. N. G, Lavrent'ev, M. A.: MATHEMATICS, ITS CONTENT, METHODS, AND MEANING, (*editors*), Vol. 2, The M. I. T. Press, Mass. U. S. A., 1969.

ANDERSON, R. L., E BANCROFT, T. A.; STATISTICAL THEORY IN RESEARCH, Mc.Graw-Hill, New York, U. S. A., 1952.

Arya, J. C., E Lardner, R. W.; MATHEMATICS FOR THE BIOLOGICAL SCIENCES, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, U. S. A., 1979.

Bartlett, M. S.; THE USE OF TRANSFORMATIONS, *Biometrics*, 3, 39-52, 1947.

Bowker, A. 11., E Lierberman, G. J.; ENGINEERING STATISTICS, second edition, Prentice-Hall, New Jersey, U. S. A., 1972.

Box, G. E. P., Hunter, W. G., E Hunter, J. S.; STATISTICS FOR EXPERIMENTERS, AN INTRODUCTION TO DESIGN, DATA ANALYSIS, AND MODEL BUILDING John Wiley & Sons, Inc., U. S. A., 1978.

Bradley, J. V.; DISTRIBUTION-FREE STATISTICS, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, U. S. A., 1968.

Campbell, R. C.; STATISTICS FOR BIOLOGISTS, second edition, Cambridge University Press., London, 1974.

Castañeda, P. R.; BIOESTADISTICA APPLICADA. AGRONOMIA, BIOLOGIA, QUIMICA, Trillas, México, 1980.

Chou, Y. L.; ANALISIS ESTADISTICO, segunda edición, Interamericana, México, 1977.

Cochran, W. C., APPROXIMATE SIGNIFICANCE LEVELS OF THE BEHRENS-FISHER TEST, *Biometrics*, 20, 191-195, 1964.

Cochran, W. G.; THE χ^2 TEST OF GOODNESS OF FIT, *Annals of Mathematical Statistics*, 25, 315-345, 1952.

Cochran, W. G.; SOME METHODS FOR STRENGTHNING THE COMMON χ^2 Tests, *Biometrika* 10, 417-451, 1954.

Cochran, W. G., E Cox, G. M.; EXPERIMENTAL DESIGNS, second edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, U.S.A., 1957.

Daniel, W. W.; BIOSTATISTICS: A FOUNDATION FOR ANALYSIS IN THE HEALTH SCIENCES, second edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, U.S.A., 1978.

Davies, O. L., et al, (editors); STATISTICAL METHODS IN RESEARCH AND PRACTITIONER, third edition revised; Oliver and Boyd, London, 1961.

Davies, O. L., et al, (editors); THE DESIGN AND ANALYSIS OF INDUSTRIAL EXPERIMENTS, second edition revised; Oliver and Boyd, London, 1960.

Dayton, C. M. E Stunkard, C. L.; STATISTICS FOR PROBLEM SOLVING, McGraw-Hill, New York, U.S.A., 1971.

Dixon, W. J. E Massey, F. J., Jr.; INTRODUCCION AL ANALISIS ESTADISTICO, segunda edición, McGraw-Hill de México, 1979.

Duncan, D. B.; MULTIPLE RANGE AND MULTIPLE F-TESTS, *Biometrics*, 1-42, 1955.

Duncan, D. B.; MULTIPLE RANGE TESTS FOR CORRELATED AND HETEROGENEOUS MEANS, *Biometrics*, 13, 164-176, 1957.

Duncan, R. C, Khapp, R. G., E Miller, M. C, III; BIOESTADISTICA, Interamericana, México, 1978.

Federer, W. T.; EXPERIMENTAL DESIGN, THEORY AND APPLICATIONS, McMillan Co., New York, 1955.

Feller, W.; INTRODUCTION TO PROBABILITY THEORY AND ITS APPLICATIONS, Vol. I, second edition (1961), Vol. II (1966), John Wiley & Sons, Inc., New York,

Fraser, D. A. S.; NONPARAMETRIC METHODS IN STATISTICS, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1966.

Friedman, M.; THE USE OF RANKS TO AVOID THE ASSUMPTION OF NORMALITY IMPLICITY IN THE ANALYSIS OF VARIANCE, *Journal of The American Statistical Association*, 32, 675-701, 1937.

Glass, G. V. & Stanley, J. C.; METODOS ESTADISTICOS APLICADOS A LAS CIENCIAS SOCIALES, Prentice-Hall International, Madrid, 1974.

Gmurman, V. E.; PROBLEMAS VE LA TEORIA VE LAS PROBABILIDADES Y VE LA ESTADISTICA MATEMATICA, Editorial MIR, Moscú, 1975.

Gulati, B. R.; FINITE MATHEMATICS, AN INTRODUCTION, Harper & Row, Publishers, New York, 1975.

Hays, W. L.; STATISTICS FOR THE SOCIAL SCIENCES, second edition, Holt, Heinhardt and Winston, Inc., New York, 1973.

Hoel, P. G.; INTRODUCTION TO MATHEMATICAL STATISTICS, fourth edition, John Wiley & Sons, International, New York, 1971,

Huntsberger, D. V. & Billingsley, P.; ELEMENTOS VE ESTADISTICA INFERENCIAL, C.E.C.S.A., México, 1983.

Johnson, R.; ESTADISTICA ELEMENTAL, Trillas, México, 1979.

Kennedy, J. B. & Neville, A. M.; ESTADISTICA PARA CIENCIAS E INGENIERIA, segunda edición, Haría, México, 1982.

Kreyszig, E.; INTRODUCCION A LA ESTADISTICA MATEMATICA, PRINCIPIOS Y METODOS, Limusa, México, 1979.

Kruskal, W. H. & Wallis, W. A.; USE OF RANKS IN ONE-CRITERION ANALYSIS OF VARIANCE, *Journal of The American Statistical Association*, 47, 583-621, 1952; errata, ibid., 48, 907-911, 1953.

Lancaster, H. O.; THE CHI-SQUARED DISTRIBUTION, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1969.

Levin, J.; FUNDAMENTOS DE ESTADISTICA EN LA INVESTIGACION SOCIAL, segunda edición, Haría, México, 1979.

Lynch, M.D. & Huntsberger, D.V.; ELEMENTS OF STATISTICAL INFERENCE FOR EDUCATION AND PSYCHOLOGY, Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass., U.S.A. 1976.

Massey F. J.; THE KOLMOGOROV-SMIRNOV TEST FOR GOODNESS OF FIT, *Journal of The Mathematical Statistics Association*, 46, 68-78, 1951.

Mendenhall, W.; INTRODUCCION A LA PROBABILIDAD Y LA ESTADISTICA, quinta edición, Wadsworth Internacional/Iberoamérica, U.S.A. 1982.

Mendenhall, W. & Reinmuth, J. E.; ESTADISTICA PARA ADMINISTRACION Y ECONOMIA, Wadsworth Internacional/Iberoamérica, U.S.A., 1981.

Mendenhall, W., Scheaffer, R. L., & Wackerly, D. D.; ESTADISTICA MATEMATICA CON APPLICACIONES, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1986.

Méndez, I.; CONSIDERACIONES RELATIVAS A LA POSTULACION Y CONTRASTACION DE HIPOTESIS CIENTIFICAS, *Monografía # 29, Serie Azul*, Vol. 4, Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas (IIMAS) U.N.A.M., México, 1977.

Miller, I. & Freund, J. E.; PROBABILIDAD Y ESTADISTICA PARA INGENIEROS, Reverte Mexicana, S.A., México, 1973.

Miller, I. & Freund, J.E.; PROBABILIDAD Y ESTADISTICA PARA INGENIEROS, tercera edición, Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A., México, 1986.

Mood, A. M. & Graybill, F. A.; INTRODUCTION TO THE THEORY OF STATISTICS, second edition, McGraw-Hill Book Co., New York, U.S.A., 1963.

Mosteller, F., Rourke, R.E.K., & Thomas, G. B., Jr.; PROBABILITY WITH STATISTICAL APPLICATIONS, second edition, Addison-Wesley, Reading, Mass., U.S.A. 1970.

Noether, G. E.; INTRODUCTION TO STATISTICS A NONPARAMETRIC APPROACH, second edition, Houghton Mifflin Co., Boston, Mass., U.S.A., 1976.

Ostle, B.; ESTADISTICA APLICADA, Limusa, México, 1981,

Raj, Des; TEORIA DEL MUESTREO, Fondo de Cultura Económica, México, 1980.

Remington, R. D. & Schork, M. A.; ESTADISTICA BIOMETRICA Y SANITARIA, Prentice-Hall Internacional, Madrid, 1977.

Scheaffer, R. L., Mendenhall, W., & Ott, L.; ELEMENTOS DE MUESTREO, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1987.

Schefler, W. C.; BIOESTADISTICA, Fondo Educativo Interamericano, S. A., segunda edición, México, 1981.

- Slakter, M. J.; A COMPARISON OF THE PEARSON CHI-SQUARE AND KOLMOGOROV GOODNESS-OF-FIT TESTS WITH RESPECT TO VALIDITY, *Journal of The American Statistical Association*, 60, 854-858, 1965.
- Snedecor, G. W. & Cochran, W. G.; STATISTICAL METHODS, seventh edition, The Iowa State University Press, Ames, Iowa, U.S.A., 1980.
- Sokal, R. R. & Rohlf, F. J.; BIOMETRIA, PRINCIPIOS Y METODOS EN LA INVESTIGACION BIOLOGICA, H. Blume Ediciones, Madrid, 1979.
- Spearman, C.; THE PROOF AND MEASUREMENT OF ASSOCIATION BETWEEN TWO THINGS, *American Journal of Psychology*, 15, 72-101, 1904.
- Steel, R. G. D. & Torrie, J. H.; PRINCIPLES AND PROCEDURES OF STATISTICS, A BIOMETRICAL APPROACH, second edition, McGraw-Hill International Book, Co., Tokyo, Japan, 1981.
- Stevenson, W. J.; ESTADISTICA PARA ADMINISTRACION Y ECONOMIA, Haría, México, 1981.
- Todhunter, I.; A HISTORY OF THE MATHEMATICAL THEORY OF PROBABILITY, G. E. Stechert, New York, 1931.
- Wald, A.; SEQUENTIAL ANALYSIS, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1947.
- Wald, A.; STATISTICAL DECISION FUNCTIONS, *Annals of The Mathematical Statistics*, 20, 165-205, 1949.
- Walpole, R. E. & Myers, R. H.; PROBABILIDAD Y ESTADISTICA PARA INGENIEROS, segunda edición, Interamericana, México, 1982,
- Welch, B. L.; THE SIGNIFICANCE OF THE DIFFERENCE BETWEEN TWO MEANS WHEN THE POPULATION VARIANCES ARE UNEQUAL, *Biometrika*, 29, 350-361, 1937.
- Welch, B. L.; THE GENERALIZATION OF STUDENT'S PROBLEM WHEN SEVERAL DIFFERENT POPULATION VARIANCES ARE INVOLVED, *Biometrika*, 4, 28-35, 1947.
- Willoughby, S. S.; PROBABILIDAD Y ESTADISTICA, Publicaciones Cultural, S.A., México, 1977.
- Yamane, T.; STATISTICS: AN INTRODUCTORY ANALYSIS, second edition, Harper & Row, New York, 1967.

I N D I C E

A

- Aceptación, región de, 244
Acumulada
 frecuencia, 57, 199, 203
 frecuencia relativa, 57, 203
 función de distribución, 85
Agrupados, datos, 201
Aleatorio(a)
 experimento, 53
 factor, 397
 muestra, 165
 números, 165
 variable, 79
Aleatorizados, diseño de bloques, 387, 511
Alfa (α) 238, 242
Alternativa, hipótesis, 241
Amplitud de clase, 203
Análisis
 Combinatorio, 31
 de correlación, 425, 445, 471, 515
 de regresión, 425, 428
 de varianza, 361, 507, 511
Aproximación normal a la binomial, 146
Area bajo la curva, 138

B

- Bandas de confianza, 442, 444
Bayes, regla de, 68
Bemoulli, J., 3, 105
Bernoulli
 distribución, 106
 experimento, 106

Beta (β) , 243,298
Bilateral
 hipótesis, 242
 prueba, 242
Binomial
 coeficiente, 51
 distribución, 105
Binomio, Teorema del, 49
Bloques
 completos, 387,511
 diseño de, 387, 511
Bondad de ajuste, 326,340

C

Calidad, control de, 290
Cardinal de un conjunto, 26
Celda, 345
Central
 momento, 96
 Teorema del Límite, 233
Centro de Amplitud, 188
Clase
 amplitud de, 201
 centro de, 201
 frecuencia de, 201
 intervalo de, 201
 marca de, 201
 punto medio de, 201
Coeficiente
 de correlación, 425,445,471,515
 de correlación por rangos, 515
 de determinación, 451,454
 de regresión, 464
 de variación, 198

- Coeficientes binomiales, 51
- Combinaciones, 45
- Combinatorio, análisis, 31
- Comparación
 - de medias, 275, 277, 280, 284
 - de proporciones, 271
 - de varianzas, 266
 - por parejas, 284
- Complemento de un conjunto, 22
- Condicional, probabilidad, 62
- Confianza
 - bandas de, 442, 444
 - intervalos de, 238, 246
 - límites de, 238
 - nivel de, 238
- Conjunto
 - complemento, 22
 - definición, 16
 - universal, 18
 - vacío, 18
- Conjuntos
 - diferencia de, 22
 - disjuntos, 22
 - intersección de, 22
 - unión de, 21
- Consistente, estimador, 237
- Continua
 - distribución de probabilidad, 135
 - variable aleatoria, 79
- Contraste
 - de hipótesis, 241
 - estadígrafo de, 243
- Control
 - de calidad, 290
 - gráficas de, 290
 - límites de, 291

Correlación

análisis de, 425, 445, 471, 515

coeficiente de, 445, 471, 515

Covarianza, 432

Crítico(a)

región, 244

valor, 244

Cuadrados latinos, 362, 406

Cuartiles, 207

Curtosis, 98

Curva de regresión, 456

CH

Chevyshev, P. L., 3

Chevyshev, Teorema de, 197

D

Datos

agrupados, 201

cualitativos, 180, 181

cuantitativos, 180, 183

estadísticos, 180

Darwin, C. R., 3

De Moivre, A., 2

De Moivre y Laplace, Teorema de, 151

De Morgan, 26

Decisión, regla de, 246

Densidad

de probabilidad, 82

función, 82

normal, 138

Descriptiva, estadística, 7, 174

Desviación

- estándar o típica, 92,196
- media, 195

Diagramas

- de árbol, 32
- de barras, 182
- de dispersión, 426
- de pastel, 182
- de rayitas, 32
- de Venn, 23

Diferencias

- entre medias, 275, 277, 280, 284
- entre proporciones, 271

Discreta

- distribución, 104
- variable aleatoria, 79

Diseño de bloques aleatorios completos, 387,511**Diseño de experimentos**, 6, 362**Disjuntos, conjuntos**, 22**Dispersión, diagrmas de**, 426**Distribución**

- acumulada 85
- binomial, 105
- continua, 135
- de Bernoulli, 106
- de Fisher, F, 267
- de frecuencia, 201
- de Pascal, 124
- de Poisson, 112
- de probabilidad, 82
 - continua, 136
 - discreta, 104
- función de, 85
- gamma, 152
- geométrica, 126
- hipergeométrica, 120

Distribución

- Ji-Cuadrada, 152
- Multinomial, 118
- Normal, 137
- Normal estándar, 141
- t de Student, 154,257
- Uniforme , 104,136

Duncan, prueba del rango múltiple de, 381

E

Ecuación de la recta, 428

Eficiente, estimador,237

Ensayo, 53

Error,

- estándar 233
- estándar de la diferencia de medias,275, 277
- estándar de la diferencia de proporciones, 272
- estándar de la media, 233
- estándar de la proporción, 252
- de Tipo I, 242
- de Tipo II, 243,298
- estadístico, 169
- máximo de estimación, 250
- sistemático, 169
- suma de cuadrados del error, 368

Espacio muestral, 53

Esperanza Matemática, 94

Estadígrafo de prueba o de contraste, 243

Estadística

- Descriptiva, 7, 174
- e Investigación, 5
- Inferencial, 7,229,235

Estimación

- puntual, 235
- por intervalo, 235

Estimador

 consistente, 237
 eficiente, 237
 inesegado, 236
 suficiente, 237

Estratificado(a)

 muestra, 166
 muestreo, 165

Etapas de una investigación estadística, 6

Evento, definición, 53

Eventos

 complementarios, 54
 independientes, 64
 mutuamente exclusivos, 53

Experimentos

 aleatorios, 53
 diseño de, 6, 362

F

Factor

 aleatorio, 397
 análisis de varianza de un, 364
 fijo, 397

Factorial, 36

Feller, W., 4

Fermat, P., 2

Fisher, R. A., 4

Fisher

 distribución F de, 267
 prueba de 267

Frecuencia

 acumulada, 57, 203
 de clase, 203
 distribución de, 199
 polígono de, 200
 relativa, 57, 203

Friedman, análisis de varianza por rangos de, 511

Frontera de clase, 203

Función

de distribución, 85

de probabilidad, 82

factorial, 153

gamma, 152,153

generatriz de momentos, 98

G

Galton, F., 425

Gamma, distribución, 152

Gauss, K. F. , 2

Gosset, W. S., 3.

Grados de libertad, 259

Gráficas

de barras, 182

de líneas, 82, 199

engañosas, 175

escalonada, 200

Gráficas de control

para el rango, 293

para la media, 290

para la varianza, 296

Gran media, 364

H

Hipergeométrica, distribución, 120

Hipótesis

alternativa, 241

bilateral, 242

contraste de dos colas, 242

contraste de una cola, 242

Hipótesis

estadsitica, 241

nula, 241

unilateral, 242

Histograma, 83,200

Independencia, prueba de, 344

Independientes, eventos, 64

Inferencia estadística, 7,229,235

Inferior

límite de clase, 203

límite de confianza, 238

límite de control, 291

límite real, 203

Insesgado, estimador, 236

Intersección de conjuntos, 22

Intervalos

de clase, 201

de confianza, 238,246

para el coeficiente de correlación, 448

para el cociente de varianzas, 266

para el coeficiente de regresión, 437

para la diferencia de medias, 275,277,280,284

para la diferenica de proporciones, 271

para la media, 247,249,256

para la ordenada al origen, 439

para la pendiente, 437

para la proporción, 252

para la varianza, 262

de tolerancia, 297

Investigación estadística, 5

J

Ji-cuadrada

distribución, 152

prueba de bondad de ajuste, 326,340

prueba de independencia, 344

K

- Kolmogorov
definición de probabilidad, 58
prueba de bondad de ajuste, 344
Kruskal-Wallis, prueba H, 507

L

- LaPlace, P. S., 2
LaPlace, definición de probabilidad de, 55
Latinos, cuadrados, 406
Límites
de clase, 203
de confianza, 238
de control, 291
de tolerancia, 297
Leyes de DeMorgan, 26
Linea de regresión, 428
Lineal, regresión, 428
Longitud de clase, 203
Lyell, C, 2

M

- Mann-Whitney, prueba U, 503
Matemática, esperanza, 94
Marca de clase, 201
Media
aritmética, 184,210
armónica, 192,213
distribución muestral de la,231
desviación, 195,215
desviación de la, 195
de una variable aleatoria, 90
geométrica, 189,213
ponderada, 194

Mediana

- de una muestra, 185,211
- prueba de la, 490
- prueba del signo de la, 490,493,495

Medidas

- de dispersión, 194,214
- de tendencia central, 184,210

Mendel, G. J., 3

Método(s)

- de mínimos cuadrados, 431
- no-paramétricos, 489

Moda de una muestra, 186,211

Momento, central, 96

Momentos

- definición, 95
- función generatriz de, 98

Muestra

- aleatoria, 165
- definición, 8
- estratificada, 166

Maestral, espacio, 53

Muestreo

- agrupado, 167
- aleatorio, 165
- con reemplazo, 165
- estratificado, 165
- por conglomerados, 167
- sin reemplazo, 165
- sistemático, 168

Multinomial, distribución, 118

Mutuamente exclusivos, eventos, 53

N

Negativa, distribución binomial, 124

Neumann, J., 4

Neyman, J., 4

Newton, Teorema del binomio de, 49

Nivel

de confianza, 238

de significación, 238

No-paramétricos, métodos, 489

Normal

aproximación a la binomial, 146

densidad, 138

distribución, 137

variable aleatoria, 137

Nula, hipótesis, 241

Números

aleatorios, 165

combinatorios, 51

O

Observación, 8

Ojiva, 206

Ordenada al origen, 430

P

Parámetro, definición, 169

Pascal, B., 2

Pascal, distribución de, 124

Pearson, E. S., 4

- Pearson, K., 3
Pendiente de la recta, 430
Percentil, 206
Permutaciones, 37
Población, 8
Poder o potencia, 243, 298
Poisson, distribución de, 112
Polígono de frecuencia, 200
Ponderada, inedia, 194
Primer momento, 96
Principio
 de la adición, 37
 de la multiplicación, 34
Probabilidad
 a posteriori, 56
 a priori, 55
 axiomas de, 59
 binomial, 107
 condicional, 62
 densidad de, 82
 distribución de, 82
 función de, 82
 geométrica, 126
 hipergeométrica, 120
 marginal, 66
 de Poisson, 112
Prueba
 bilateral, 242
 de aleatoriedad, 520
 de Duncan, 381
 de Fisher, 266
 de Kolmogorov-Smirnov, 340
 de la mediana, 490
 de Mann-Whitney, 503
 de Scheffé, 385
 de Tukey, 381
 de Wilcoxon, 499

Prueba

 del rango con signo, 499

 Ji-cuadrada, 262, 326

 unilateral, 242

Prueba de hipótesis

 acerca de la diferencia entre medias, 275, 277, 280, 284

 acerca de la diferencia entre proporciones, 271

 acerca de la media, 247, 249, 256

 acerca de la ordenada al origen, 439

 acerca de la pendiente, 437

 acerca de la proporción, 252

 acerca del cociente de varianzas, 266

 acerca de una varianza, 262

R

Rango o recorrido, 194

Rango

 intercuartílico, 209

 percentil, 207

 semi-intercuartílico, 209

Rango con signo, 499

Rechazo, región de, 244

Región

 crítica, 244

 de aceptación, 244

 de rechazo, 244

Regla

 de adición, 36

 de Bayes, 68

 de la multiplicación, 34

Regresión

 análisis de, 425, 428

 coeficiente de, 464

 curva de, 456

 ecuación de la recta, 428

 línea de, 428

Regresión

lineal simple, 428

lineal múltiple, 463

no-lineal, 456

Relaciones entre conjuntos, 18

Relativa, frecuencia, 57,203

S

Scheffé, prueba de, 385

Segundo momento, 96

Sesgo, 98

Significacióh, nivel de, 238,243

Subconjunto, 19

Suficiente, estimador, 237

Suma de cuadrados, 367

Sumatorias, 9

Superior

cuartil, 207

límite de clase, 203

límite de confianza, 238

límite de control, 291

límite real de clase, 203

Student, 154,257

T

t de student, distribución, 154,257

Tabla

de análisis de varianza, 370

de contingencia, 344

de frecuencia, 201

Tamaño de muestra, 249,255

Tendencia central, medidas de, 184,210

Teorema

de Bayes, 68

Teorema

- de Chevyshev, 197
- de DeMoivre y LaPlace, 151
- del Binomio de Newton, 49
- del Límite central, 233

Tipos

- de errores, 242
- de muestreo, 163
- de pruebas, 242

Tipo I, error, 242

Tipo II, error, 243, 298

Transformación

- logarítmica, 456, 460
- z de Fisher, 448

Tratamientos, sumas de cuadrados de, 368

Tratamiento de datos, 180

Tukey, prueba de, 381

U

unilateral, prueba, 242

Unión de conjuntos, 21

Universal, conjunto, 18

V

Variabilidad, medidas de, 194, 214

Variable

- aleatoria, 79
- aleatoria continua, 79
- aleatoria discreta, 79
- dependiente, 426
- independiente, 426

Varianza

- análisis de, 361, 507, 511
- de la distribución binomial, 109, 111

Varianza

- de la distribución de Poisson, 116
- de la muestra, 196
- de la población, 262
- de una variable aleatoria, 96
- para datos agrupados, 214
- para datos no agrupados, 196

W

Wald, A., 5

Y

Yates, corrección de, 346

Z

Z de Fisher, 448

ACERCA DEL LIBRO

Este libro, a diferencia de la mayoría de los existentes en la materia, abarca tanto el estudio de la Probabilidad como de la Estadística y la relación existente entre ambas disciplinas.

Uno de los aciertos de la obra es el manejo del tema de la Probabilidad, el cual parte de la intuición y el sentido común. Sin duda, en este respecto, un recurso de considerable valor es el empleo de diagramas, pues ello facilita en gran medida la comprensión de la exposición teórica.

Por otra parte, en la Estadística inferencial se estudian conjuntamente la estimación por intervalo y las pruebas de hipótesis, con lo que se facilita la comprensión de las inferencias, al mismo tiempo que se aprovecha el uso de un estadígrafo de prueba para el estudio de ambos temas.

Ya que este libro está destinado a las carreras de Biología, Ingeniería Química y Químico Farmacéutico Biólogo, la aplicación de los ejemplos explicados conciernen a estas disciplinas, con la finalidad de motivar al alumno a dominar los conocimientos explicados.

El libro está formado por 13 capítulos subdivididos en seis partes. En la parte I se explican los conceptos preliminares y una síntesis histórica de la Probabilidad y la Estadística. En la parte II se ofrece el estudio de Distribuciones de Probabilidad discretas y continuas. La parte III trata de los diferentes tipos de muestreo, así como la Estadística descriptiva. En la parte IV se estudian las distribuciones muestrales, la estimación y las pruebas de hipótesis. En la parte V se continúa con las pruebas de hipótesis sobre más de dos parámetros como es el Análisis de varianza. Finalmente en la parte VI se estudian los métodos paramétricos más utilizados en investigación. Esta última parte es particularmente importante ya que muy pocos libros de la materia abordan este tema.



ISBN - 968-422-245-9