Seminar 3 - Exerciții rezolvate

Echipa AA

29 octombrie 2022

Cuprins

Exercițiul 0

Formulă generală pentru:
$T(n) = a \cdot T(n-b) + f(n)$
$T(i) \in \Theta(1), \forall i \in \mathbb{N} \land 0 \leq i < b$[a]
$f(n) \in O(n^p)$

[a] Pentru simplitatea formulelor folosit și cazul de bază pentru $n = 0$.

Notăm $h = \lfloor \frac{n}{b} \rfloor$.
Știm că $f(n) = c \cdot n^p$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= a \cdot T(n-b) & &+f(n) \\
a \cdot T(n-b) &= a^2 \cdot T(n-2 \cdot b) & &+a \cdot f(n-b) \\
a^2 \cdot T(n-2 \cdot b) &= a^3 \cdot T(n-3 \cdot b) & &+a^2 \cdot f(n-2b) \\
&\dots \\
a^k \cdot T(n-k \cdot b) &= a^{k+1} \cdot T(n-(k+1) \cdot b) & &+a^k \cdot f(n-k \cdot b) \\
&\dots \\
a^{h-1} \cdot T(n-(h-1) \cdot b) &= a^h \cdot \underbrace{T\left(n-h \cdot b\right)}_{O(1)} & &+a^{h-1} \cdot f(n-(h-1) \cdot b)
\end{aligned}
$$

Ca să calculăm complexitatea pentru expresia $\sum_{k=0}^{h-1} a^k \cdot f(n-k \cdot b)$, vom folosi limite.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=0}^{h-1} a^k \cdot (n-k \cdot b)^p}{c \cdot n^p} =$$

$$\Rightarrow T(n) = a^h \cdot \Theta(1) + \frac{a^h - 1}{a-1} f(n)$$

$$\boxed{\Rightarrow T(n) = a^{\lfloor \frac{n}{b} \rfloor} \cdot \Theta(1) + \frac{a^{\lfloor \frac{n}{b} \rfloor} - 1}{a-1} f(n)}$$

Exercițiul 1

$T(n) = 2 \cdot T(n-1) + 1$

Identificăm:

- $a = 2$
- $b = 1$
- $h = \lfloor \frac{n}{1} \rfloor = n$.
- $f(n) = 1 \in \Theta(1)$.

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2 \cdot T(n-1) && +1 \\
2 \cdot T(n-1) &= 2^2 \cdot T(n-2) && +2 \\
2^2 \cdot T(n-2) &= 2^3 \cdot T(n-3) && +2^2 \\
&\dots \\
2^k \cdot T(n-k) &= 2^{k+1} \cdot T(n-(k+1)) && +2^k \\
&\dots \\
2^{n-1} \cdot T(n-(n-1)) &= 2^n \cdot \underbrace{T(0)}_{\Theta(1)} && +2^{n-1}
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$

$$\Rightarrow T(n) \in \Theta(2^n + 2^n - 1) = \Theta(2^n)$$

Exercițiul 2

$T(n) = T(n-2) + \Theta(n)$

Identificăm:

- $a = 1$
- $b = 2$
- $h = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- $f(n) = c \cdot n \in \Theta(n)$, unde c este o constantă, **fixată**.

$$\begin{aligned}
T(n) &= T(n-2) && +c \cdot n \\
T(n-2) &= T(n-4) && +c(n-2) \\
T(n-4) &= T(n-6) && +c(n-4) \\
&\dots \\
T(n-2k) &= T(n-2(k+1)) && +c(n-2k) \\
&\dots \\
T(n-2(h-1)) &= \underbrace{T(n-2h)}_{\Theta(1)} && +c(n-2(h-1))
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{h-1} c(n-2k) = h \cdot c \cdot n - 2 \sum_{k=0}^{h-1} k$$