

Labor 6: Mathematische Modelle erzeugt von autonomen DGL

Übung 1 Wir betrachten das folgende Cauchyproblem (Radioaktiver Zerfall)

$$\begin{cases} x'(t) &= -k \cdot x(t) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

$x(t)$

- (a) Bestimme die Lösung des Cauchyproblems.
- (b) Stelle den Graph des Cauchyproblems dar (wähle verschiedene Werte für k und x_0 aus).
- (c) Wir wissen dass die Halbwertszeit für das Isotop C^{14} $t_{1/2} = 5730$ (Jahre) ist. Bestimme die Zerfallskonstante k .

Übung 2 Sei das Newtonsche Abkühlungsgesetz:

$$\begin{cases} T'(t) &= -k \cdot (T(t) - T_u) \\ T(0) &= T_0 \end{cases}$$

- (a) Bestimme die Lösung des Cauchyproblems;
- (b) Stelle den Graph des Cauchyproblems dar (wähle verschiedene Werte für k , T_u und T_0 aus).
- (c) Eine Leiche wird zum Zeitpunkt t_1 gefunden und wird seine Temperatur gemessen. Man erhält 32.22°C . Nach einer Stunde wird die Temperatur wieder gemessen und erhält man 32.11°C . Die Umgebungstemperatur T_u ist 20°C und die Körpertemperatur zum Todeszeitpunkt ist $T_d = 37^\circ\text{C}$. Bestimme der Todeszeitpunkt.

Übung 3 Wir betrachten das Model des unbegrenzten Wachstums

$$\begin{cases} x'(t) &= r \cdot x(t) \\ x(0) &= x_0 \end{cases} \quad \text{das Model von Malthus}$$

Sei die Anzahl der Einwohner in den Vereinigten Staaten von Amerika in Jahren gemessen:

1820 :	$9.6 \cdot 10^6$
1830 :	$12.9 \cdot 10^6$
1840 :	$17.1 \cdot 10^6$
1850 :	$23.2 \cdot 10^6$
1860 :	$31.4 \cdot 10^6$
1870 :	$38.6 \cdot 10^6$
1880 :	$50.2 \cdot 10^6$
1890 :	$62.9 \cdot 10^6$
1900 :	$76 \cdot 10^6$
1910 :	$92 \cdot 10^6$
1920 :	$106.5 \cdot 10^6$
1930 :	$123.2 \cdot 10^6$

- (a) *Bestimme die Lösungen des Cauchyproblems;*
- (b) *Stelle den Graph des Cauchyproblems dar (wähle verschiedene Werte für r und x_0 aus).*
- (c) *Bestimme die Parameter mithilfe der ersten zwei gegebene Zahlen.*