Algèbre élémentaire - Équations trigonométriques

Matéis R.

Septembre 2023

On souhaite résoudre des équations du type :

$$I - \begin{cases} \sin(x) & = a \\ \text{pour} & x \in \mathbb{R} \\ \cos(x) & = a \\ \text{pour} & a \in [-1, 1[\end{cases}$$

Ou :

$$II - \begin{cases} \sin(x) & = \sin(y) \\ \text{pour} & x, y \in \mathbb{R} \\ \cos(x) & = \cos(y) \end{cases}$$

1 Proposition (Résolution des équations I)

Soit $a \in [-1, 1]$

L'équation $\sin(x) = a$ d'inconnue x a toujours une et une seule solution dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (notée $\arcsin(a)$ en analyse). L'ensemble des solutions de $\sin(x) = a$ est l'ensemble $\{\arcsin(a) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\arcsin(a) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

L'équation $\cos(x) = a$ d'inconnue x a toujours une et une seule solution dans l'intervalle $[0, \pi]$ (notée $\arccos(a)$ en analyse). L'ensemble des solutions de $\cos(x) = a$ est l'ensemble $\{\arccos(a) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\arccos(a) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Exemple : $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff x \in \{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \iff x = \frac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $x = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$ avec la notation modulo

$\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff x \in \{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \iff x = \frac{\pi}{6}[2\pi]$ ou $x = -\frac{\pi}{6}[2\pi]$ avec la notation modulo

2 Proposition (Résolution des équations II)

Soit $y \in \mathbb{R}$

L'ensemble des solutions de l'équation $\sin(x) = \sin(y)$ est $\{y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

L'ensemble des solutions de l'équation $\cos(x) = \cos(y)$ est $\{y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Exemple : $\sin(2x) = \sin(x) \iff 2x = x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $2x = \pi - x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \iff x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $3x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \iff x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Avec la notation modulo $\iff x = 0[2\pi]$ ou $3x = \pi[2\pi] \iff x = 0[2\pi]$ ou $x = \frac{\pi}{3}[2\pi]$

3 Proposition (Résolution des équations avec $\tan()$)

Soit $a \in \mathbb{R}$

L'équation $\tan(x) = a$ possède une et une seule solution notée $\arctan(a)$ dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. L'ensemble des solutions de l'équation est $\{\arctan(a) + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ ou $\{\arctan(a)[\pi]\}$ en notation modulo.

4 Formules d'addition et de duplication :

Théorème : soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Alors : $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$

Corollaire :

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha) \\
\sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\alpha) \\
\cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\
\cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) \\
\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}
\end{aligned}$$