Analyse Élémentaire - Fonction d'une variable réel

Matéis RAGON

Sept. 2023

Définition :
- Une fonction d'une variable réelle est la donnée d'un domaine $X \subset R$ d'un ensemble donné $Y \subset R$ et pour tout $x \in R$, d'un unique $y \in R$ appelé l'image de x par la fonction f.
- L'image de f on dit $f(x)$ est l'ensemble de toutes les images de $f(x) = \{f(x), x \in \ X\}$.
- Un antécédent de $y \in Y$ par la fonction f est un élément de $x \in X$ tel que $y = f(x)$.
- L'ensemble des antécédents de y par la fonction f est noté $f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X, f(x) = y\}$

Exemple :
$f[1;3] \mapsto R\ f : x \mapsto 2x + 1$
- L'image de f : $f([1;3[) \subset [3;7[$ Soit $y \in [3;7[$, il existe un antécédent dans $[1;3[$

$$3y < 7 \iff 2y - 1 < 6 \iff 1\frac{y-1}{2} < 3$$

Donc ici $\frac{y-1}{2} = x$. Donc x est un antécédent de y dans $[1;3[$ donc $[3;7[\subset f([1;3[)$. L'image de f est $[3;7[$ - Les antécédents de 4 ($\in [3;7[$) On cherche les $x \in [1;3[$ tels que :

$$f(x) = 4 \iff 2x + 1 = 4 \iff 2x = 3 \iff x = \frac{3}{2}$$

De plus $\frac{3}{2} \in [1;3[$, donc 4 a un antécédent par la fonction f qui est $\frac{3}{2}$.

Définition : - Fonctions usuels : - Polynômes : Soit $n \in N$ et soient $a_0, ..., a_n \in R$ La fonction $f : R \mapsto R$, $f : x \mapsto a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ est une fonction polynôme de degré n.

- Valeur absolue : $\mid \cdot \mid R \mapsto R\ x \mapsto \begin{cases} -x & si \\ x < 0 & \\ x & sinon \end{cases}$ - Propriété (inégalité triangulaire) Soient $x, y \in R$, on a : $\mid x + y \mid\mid x \mid + \mid y \mid \mid \overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y} \mid\mid \overrightarrow{X} \mid + \mid \overrightarrow{Y} \mid$

- Preuve : Soient $x, y \in R$, $- \mid x \mid x \mid x \mid$ et $- \mid y \mid y \mid y \mid$ En somme, les inégalitées donnent : $-(\mid x \mid + \mid y \mid) x + y \mid x \mid + \mid y \mid$ - A SAVOIR! $-KtK \iff \mid t \mid K$

Donc : $\iff \mid x + y \mid \mid x \mid + \mid y \mid$

- Racine Carré: $\sqrt{\cdot} : [0; +\infty[\to R$ $x \mapsto \sqrt{x}$ avec $\sqrt{x^2} = \mid x \mid$ et $\sqrt{x}^2 = x$ - Exponentielle - Logarithme néperien - sin, cos, ...

Definition: Graph d'une fonction On appelle le graph d'une fonction $X \subset R \to Y \subset R$ le sous-ensemble de $R \times R$ forme des couples $\{x, f(x)\} \in X, Y$

Définition: Injéctivité - Surjéctivité Une fonction $f : X \to Y$ est dite : - Injective si: $\forall x_1, x_2 \in X,\ f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2$

- Surjective si : $\forall y \in Y, \exists x \in X$ tel que $f(x) = y$

- Bijective si elle est injective **et** surjective.