Analyse Élémentaire - Fonction d'une variable réel

Matéis RAGON

Sept. 2023

Définition :

1. Une fonction d'une variable réelle est la donnée d'un domaine $X \subset \mathbb{R}$ d'un ensemble donné $Y \subset \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'un unique $y \in \mathbb{R}$ appelé l'image de x par la fonction f.
2. L'image de f on dit $f(x)$ est l'ensemble de toutes les images de $f(x) = \{f(x), x \in \ X\}$.
3. Un antécédent de $y \in Y$ par la fonction f est un élément de $x \in X$ tel que $y = f(x)$.
4. L'ensemble des antécédents de y par la fonction f est noté $f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X, f(x) = y\}$

Exemple :

$f[1;3] \mapsto \mathbb{R}$
$f : x \mapsto 2x + 1$
L'image de f : $f([1;3[) \subset [3;7[$
Soit $y \in [3;7[$, il existe un antécédent dans $[1;3[$ $3y < 7$
$\iff 2y - 1 < 6$
$\iff 1\frac{y-1}{2} < 3$ Donc ici $\frac{y-1}{2} = x$. Donc x est un antécédent de y dans $[1;3[$ donc $[3;7[\subset f([1;3[)$. L'image de f est $[3;7[$ - Les antécédents de 4 ($\in [3;7[$) On cherche les $x \in [1;3[$ tels que :

$$f(x) = 4 \iff 2x + 1 = 4 \iff 2x = 3 \iff x = \frac{3}{2}$$

De plus $\frac{3}{2} \in [1;3[$, donc 4 a un antécédent par la fonction f qui est $\frac{3}{2}$.

Définition des fonctions usuels :

1. Polynômes : Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$ La fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f : x \mapsto a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ est une fonction polynôme de degré n.

2. Valeur absolue :
   $| \cdot | \, \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$
   $$x \mapsto \begin{cases} -x & si \\ x < 0 & \\ x & sinon \end{cases}$$

   (a) Propriété (inégalité triangulaire) Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a : $| \, x + y \, || \, x \, | + | \, y \, | \, | \, \overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y} \, || \, \overrightarrow{X} \, | + | \, \overrightarrow{Y} \, |$

   (b) Preuve : Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $- \, | \, x \, | \, x \, | \, x \, |$ et $- \, | \, y \, | \, y \, | \, y \, |$ En somme, les inégalitées donnent : $-(| \, x \, | + | \, y \, |) x + y \, | \, x \, | + | \, y \, |$

   (c) A SAVOIR! $-KtK \iff | \, t \, | \, K$

   Donc : $\iff | \, x + y \, || \, x \, | + | \, y \, |$

3. Racine Carré: $\sqrt{\cdot} : [0; +\infty[\to \mathbb{R} \; x \mapsto \sqrt{x}$ avec $\sqrt{x^2} = | \, x \, |$ et $\sqrt{x}^2 = x$

4. Exponentielle

5. Logarithme néperien

6. *sin*, *cos*, ...

Definition: Graph d'une fonction On appelle le graph d'une fonction $X \subset \mathbb{R} \to Y \subset \mathbb{R}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ forme des couples $\{x, f(x)\} \in X, Y$

Définition: Injéctivité - Surjéctivité Une fonction $f : X \to Y$ est dite : - Injective si: $\forall x_1, x_2 \in X$, $f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2$

- Surjective si : $\forall y \in Y, \exists x \in X$ tel que $f(x) = y$

- Bijective si elle est injective **et** surjective.