(1) 09.11.23

SEMINAR 6 _ 133

În urma discuției de Marți s-au cristalizat grupurile

$D_n = \{1, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{n-1}, \sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma, \dots, \rho^{n-1}\sigma\}$,
cu relațiile $\rho^n = 1$, $\sigma^2 = 1$, $\sigma\rho = \rho^{n-1}\sigma$

→ "grupul diedral D_n"

Să-i alcătuim tabla lui D_4:

$\begin{cases} \rho^4 = 1 \\ \sigma^2 = 1 \\ \sigma\rho = \rho^3\sigma \end{cases}$

	1	ρ	ρ^2	ρ^3	σ	$\rho\sigma$	$\rho^2\sigma$	$\rho^3\sigma$
1	1	ρ	ρ^2	ρ^3	σ	$\rho\sigma$	$\rho^2\sigma$	$\rho^3\sigma$
ρ	ρ	ρ^2	ρ^3	1	$\rho\sigma$	$\rho^2\sigma$	$\rho^3\sigma$	σ
ρ^2	ρ^2	ρ^3	1	ρ	$\rho^2\sigma$	$\rho^3\sigma$	σ	$\rho\sigma$
ρ^3	ρ^3	1	ρ	ρ^2	$\rho^3\sigma$	σ	$\rho\sigma$	$\rho^2\sigma$
σ	σ	$\rho^3\sigma$	$\rho^2\sigma$	$\rho\sigma$	1	ρ^3	ρ^2	ρ
$\rho\sigma$	$\rho\sigma$	σ	$\rho^3\sigma$	$\rho^2\sigma$	ρ	1	ρ^3	ρ^2
$\rho^2\sigma$	$\rho^2\sigma$	$\rho\sigma$	σ	$\rho^3\sigma$	ρ^2	ρ	1	ρ^3
$\rho^3\sigma$	$\rho^3\sigma$	$\rho^2\sigma$	$\rho\sigma$	σ	ρ^3	ρ^2	ρ	1

$\sigma\rho^2 = \sigma(\rho\rho) = (\sigma\rho)\rho = (\rho^3\sigma)\rho = \rho^3(\sigma\rho) = \rho^3\rho^3\sigma = \rho^2\sigma$

$\rho(\sigma\rho) = \rho\rho^3\sigma = \sigma$

$\rho(\sigma\rho^3) = \rho\rho\sigma =$

Care sunt subgrupurile acestui grup?

- Orice subgrup H al lui D_4 îl conține pe 1

se reduce la 1 → $H = \{1\}$

Nu → GO TO (5+)

(*) Atunci el mai conține ceva. Ce? ②

- Pe ρ: $H = \{1, \rho, \rho^2, \rho^3\}$
- Pe ρ^2: $H = \{1, \rho^2\}$
- Pe ρ^3: $H = \{1, \rho^3, \rho^2, \rho\}$
- Pe σ: $H = \{1, \sigma\}$

Prop. Orice parte stabilă finită a unui grup e subgrup al acelui grup.

$\hookrightarrow$ Problemă suplimentară

- Pe $\rho\sigma$: $H = \{1, \rho\sigma\}$
- Pe $\rho^2\sigma$: $H = \{1, \rho^2\sigma\}$
- Pe $\rho^3\sigma$: $H = \{1, \rho^3\sigma\}$.

PS 2 Fie G un grup și $H_{1,2} \le G$.
Atunci: $H_1 \cup H_2 \le G \iff (H_1 \subseteq H_2 \vee H_2 \subseteq H_1)$

Obs: Am scris toate subgrupurile ciclice ale lui D_4, dar D_4 nu a apărut pe listă. MORALA: D_4 NU e ciclic.

Mai sunt subgrupuri?

- DA! D_4 se vede „cu ochiul liber".

Dar altele?

Dacă ar mai fi, fie H unul

atunci H tb să conțină elemente:

• fixe pe 1.
și încă altele
• să țină ρ.

Atunci $H \supset \{1, \rho, \rho^2, \rho^3\}$ ce deja a notat.

Ca să fie „non", H tb să mai conțină ceva. Ce?

• σ?
$H = \{1, \rho, \rho^2, \rho^3, \sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma, \rho^3\sigma\} = D_4$

• $\rho\sigma$?
Atunci $H \ni \rho^3(\rho\sigma) = \sigma$

• $\rho^2\sigma$?
Atunci $H \ni \rho^2 \cdot \rho^2\sigma = \sigma$

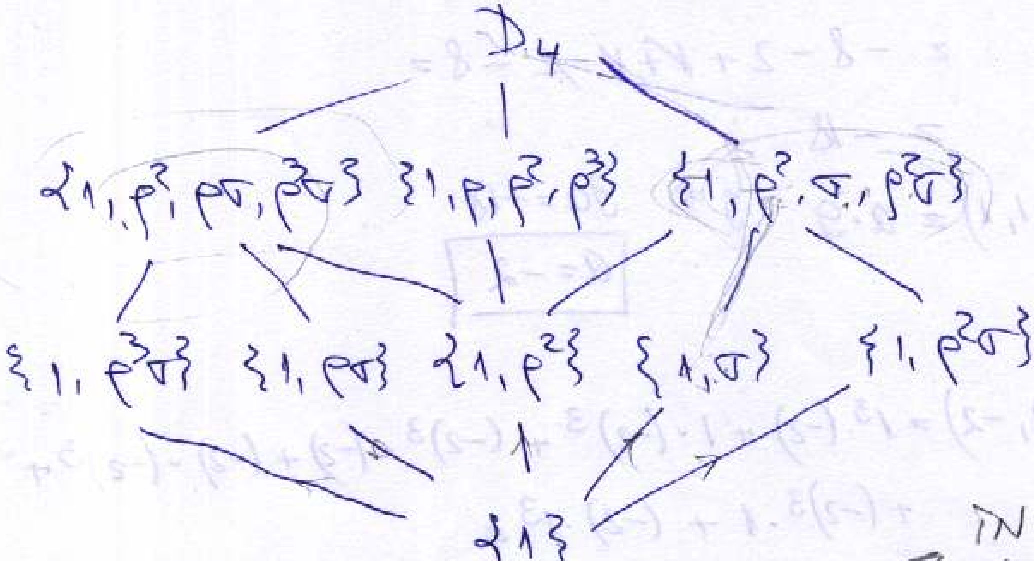
• $\rho^3\sigma$?
Atunci $H \ni \rho(\rho^3\sigma) = \sigma$

Abordând de o manieră similară fiecare din celelalte posibilități, mai obținem subgrupurile:

$H = \{1, \rho^2, \sigma, \rho^2\sigma\}$,
$H = \{1, \rho^2, \rho\sigma, \rho^3\sigma\}$.

Din considerațiile anterioare,

LATICEA SUBGRUPURILOR LUI D_4 este:



ÎN SENSUL INCLUZIUNII!

(Curs): Fie G un grup și $M \subset G$.
Prin SUBGRUPUL LUI G GENERAT DE M înțelegem „CEL MAI MIC" SUBGRUP AL LUI G CARE CONȚINE M. → NOT: $\langle M\rangle$.

Prop: G, $a \in G$.

$\langle a\rangle \overset{not}{=} \langle\{a\}\rangle = \{a^k : k \in \mathbb{Z}\}$.

$a, b \in G$

$\langle a,b\rangle \overset{not}{=} \langle\{a,b\}\rangle = \{a^{k_1}b^{\ell_1}a^{k_2}b^{\ell_2}\dots a^{k_r}b^{\ell_r} : k_1,\dots,k_r,\ell_1,\dots,\ell_r \in \mathbb{Z}\}$

Curs!

Prop: Dacă G e grup, iar $M \subset G$,

$$\langle M\rangle = \{x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_r^{\alpha_r} : r \in \mathbb{N}^*, x_1,\dots,x_r \in M, \alpha_1,\dots,\alpha_r \in \mathbb{Z}\}.$$

Obs: Dacă G e comutativ,

$\langle a,b\rangle = \{a^k b^\ell : k,\ell \in \mathbb{Z}\}$

$\langle a,b,c\rangle = \{a^k b^\ell c^m : k,\ell,m \in \mathbb{Z}\}$