① 23.11.23

SEMINAR 8 – 133

• Este $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=3x+2$ morfism de grupuri?

R: Nu, căci $f((0,0)) \neq 0$ elem. neutru din $\mathbb{R}$.

$(0,0)$ elem. neutru din $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

• Dar $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2$

R: Nu! Presupunând că e,

argument: $f((1,0)+(1,0)) = f((2,0)) = 4$

$2 = 1+1 = f((1,0))+f((1,0)) \neq 4$

Rămâne, deci, că f nu e morfism de grupuri!

• Dar $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=2x-y$?

Obs:

- Ca să arătăm pentru o funcție dată, că nu e morfism de grupuri, e suficient să arătăm că "greșește cu ceva" – v. exemplele de mai sus.
- Ca să arătăm că o funcție e morfism de grupuri, nu avem altă cale decât să arătăm că se încadrează în definiția noțiunii de morfism de grupuri.

Sol: Fie $(x,y);(x',y')\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Atunci $f((x,y)+(x',y'))=f(x+x',y+y')=2(x+x')-(y+y')$

$f(x,y)+f(x',y')=2x-y+2x'-y'=2(x+x')-(y+y')$

Ca urmare, f e morfism de grupuri.

CURS: Def Fie $f:G\to G'$ un morfism de grupuri.

1) Numim NUCLEUL lui f (și notăm $\ker f$) mulțimea $\ker f \overset{not}{=} \{x\in G: f(x)=e'\}$

e.n. din G'

2) Numim IMAGINEA lui f (și notăm $\operatorname{Im} f$) mulțimea $\{y\in G': \exists x\in G\ f(x)=y\}$.

Obs: doar definiția noțiunii de nucleu e nouă; imaginea este exact cea din contextul funcțiilor generale.

$\boxed{\text{Prop}}$ Dacă $f:G\to G'$ e morfism de grupuri, atunci $\ker f \trianglelefteq G$, iar $\operatorname{Im} f\le G'$

dem: Fie $x_{1,2}\in\ker f$.

Atunci $f(x_1)=e'=f(x_2)$.

De aici $f(x_1x_2)=f(x_1)f(x_2)=e'\cdot e'=e'$,

deci $x_1x_2\in\ker f$.

Fie $x \in \ker f$. Atunci $f(x) = e'$,

deci $f(x^{-1}) = f(x)^{-1} = (e')^{-1} = e'$.

Ca urmare, $x^{-1} \in \ker f$.

Din cele de mai sus, $\ker f \leq G$.

Fie $x \in \ker f$ și $g \in G$.

Atunci $f(gxg^{-1}) =$

$= f(g)\underbrace{f(x)}_{x \in \ker f} f(g)^{-1}$

$= f(g) e' f(g)^{-1} = f(g) f(g)^{-1} = e'$

Ca urmare, $gxg^{-1} \in \ker f$.

În concluzie, $\ker f \trianglelefteq G$.

$$\left\{ \begin{array}{l} H \trianglelefteq G \Leftrightarrow \\ (G/H)_s = (G/H)_d \Leftrightarrow \\ \forall g \in G \;\; gH = Hg \Leftrightarrow \\ \forall g \in G \;\; gHg^{-1} = H \Leftrightarrow \\ \forall g \in G \;\; gHg^{-1} \subseteq H \Leftrightarrow \\ \forall g \in G\, \forall h \in H \;\; ghg^{-1} \in H \end{array} \right.$$

$\boxed{\text{Temă Dem: 1) } \operatorname{Im} f \leq G}$

Pt $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x - y$.

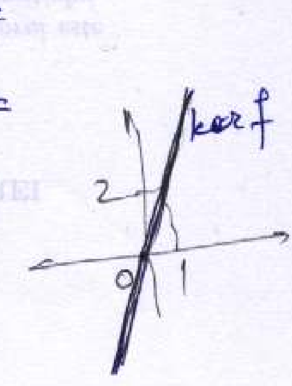
Arătați mai sus că-i morfism, să determinăm $\ker f$ și $\operatorname{Im} f$.

Sol: $\ker f = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : f((x,y)) = 0\} =$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : 2x - y = 0\} =$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : y = 2x\}$

$= \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}$.



Fie $z \in \mathbb{R}$. Atunci $f(z, z) = z$.

Deci, $z \in \operatorname{Im} f$.

Ca urmare, $\mathbb{R} \subset \operatorname{Im} f$ (1)

Evident, $\left.\begin{array}{l}\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R} \\ (1)\end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}$

CURS: TEOREMA FUNDAMENTALĂ DE IZOMORFISM (pt grupuri):

Fie $f: G \to G'$ un morfism de grupuri.

Atunci

$$\frac{G}{\ker f} \overset{\bar{f}}{\xrightarrow{\ \simeq\ }} \operatorname{Im} f$$

(unde $\bar{f}(\hat{x}) = f(x)$)

există un izomorfism $\bar{f}: \frac{G}{\ker f} \to \operatorname{Im} f$ care face comutativă diagrama

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & G' \\ G/\ker f \arrow[r, "\bar{f}"] & \operatorname{Im} f \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

incluziunea

Arătați că $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\simeq} S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

Descrieți (eventual până la un izomorfism) grupul factor $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$

Variante posibile de formulare a unei probleme care se rezolvă după cum urmează

Sol: Considerăm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$,

$f(x) = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$

Arătăm că f e morfism

Fie $x, y \in \mathbb{R}$.

$f(x+y) = \cos 2\pi(x+y) + i \sin 2\pi(x+y) = (1)$

$f(x)\cdot f(y) = (\cos 2\pi x + i\sin 2\pi x)(\cos 2\pi y + i \sin 2\pi y) =$

$= \cos 2\pi(x+y) + i\sin 2\pi(x+y) = (2)$

Deoarece $(1)=(2)$, obținem $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$.

Deci f e morfism de grupuri.

Determinăm $\mathrm{Im} f$

Fie $z \in \mathrm{Im} f$.

Atunci există $x \in \mathbb{R}$ așa încât $z = f(x) =$

$= \underbrace{\cos 2\pi x + i \sin 2\pi x}$, ală sade $2\pi x$

Atunci $|z| = \sqrt{\cos^2 2\pi x + \sin^2 2\pi x} = 1$

Deci, $z \in S^1$.

Ca urmare, $\mathrm{Im} f \subseteq S^1$ (1)

Reciproc, fie $z \in S^1$. Atunci $|z|=1$.

Ca urmare, potrivit teoremei privind forma trigonometrică a numerelor complexe, există $\alpha \in \mathbb{R}$ așa încât $z = |z|\left(\cos 2\pi \frac{\alpha}{2\pi} + i \sin 2\pi \frac{\alpha}{2\pi}\right) =$

$= \left(\cos 2\pi \frac{\alpha}{2\pi} + i \sin 2\pi \frac{\alpha}{2\pi}\right) = f\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)$

Deci, $z \in \mathrm{Im} f$.

Ca urmare, $S^1 \subseteq \mathrm{Im} f$ $\left.\begin{matrix} \\ (1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathrm{Im} f = S^1$.

Determinăm $\mathrm{Ker} f$.

Fie $x \in \mathbb{R}$.

$x \in \mathrm{Ker} f \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x = 1 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \cos 2\pi x = 1 \\ \sin 2\pi x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2\pi x \in 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.

Deci, $\mathrm{Ker} f = \mathbb{Z}$

Aplicăm TFIzom pt a obține rezultatul dorit:

Conform Teoremei fundamentale de izomorfism pentru grupuri,

$$\frac{\mathbb{R}}{\ker f} \simeq \operatorname{Im} f, \text{ adică } \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \simeq S^1. \quad \square$$

$\boxed{\text{TD}}$ 2) Arătați că $\frac{\mathbb{C}^*}{S^1} \simeq \mathbb{R}^*_+$