1

11.01.24

SEMINAR 12 - 133

Fie R un inel (comutativ și) unitar.

Fie $I \trianglelefteq R$.

„Ne uităm" la $\mathcal{M}_n(I) \subset \mathcal{M}_n(R)$

Dacă $A=(a_{ij})_{i,j}, B=(b_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(I) \overset{not}{=} \tilde{I}$

atunci $A-B=(a_{ij}-b_{ij})_{i,j} \in \tilde{I}$.

Dacă $X=(x_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(R)$ și $A=(a_{ij})_{i,j} \in \tilde{I}$,

atunci $XA = \left(\sum_{k=1}^{n} x_{ik}a_{kj}\right)_{i,j} \in \tilde{I}$.

Deci, $\tilde{I} \leq \mathcal{M}_n(R)$

Analog, pt $A \in \tilde{I}$ și $Y \in \mathcal{M}_n(R)$ avem $AY \in \tilde{I}$.

Ca urmare, $\tilde{I} \trianglelefteq \mathcal{M}_n(R)$.

Luăm acum $J \trianglelefteq \mathcal{M}_n(R)$.

Notăm $I = \{ \cancel{x \in R} : \exists A \in J,\ \exists i,j\ \ x = a_{ij} \}$.

Fie $x, y \in I$. INDICE!

Atunci există $A^{x} \in J$, $i,j \in \{1,\dots,n\}$ $x = a^{x}_{ij}$

și există $A^{y} \in J$, $k,l \in \{1,\dots,n\}$ $y = a^{y}_{kl}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{7E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 13 & 17 \\ 4 & 5 & 6 & 14 & 18 \\ 7 & 8 & 9 & 15 & 19 \\ 10 & 11 & 12 & 16 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7.7 & 7.8 & 7.9 & 7.15 & 7.19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Deci } E_{kl} \cdot M \text{ e matricea care are pe linia } k \text{ linia } l \text{ a lui } M \text{ și-n rest } 0.}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Deci } M \cdot E_{kl} \text{ e matricea care are pe coloana } l \text{ coloana } k \text{ a lui } M \text{ și-n rest } 0.}$

Atunci $E_{ik} A^{y} E_{lj}$ are y în poziția (i,j) și 0 în rest.

Ca urmare, $x - y =$ ~~elementul~~ de pe poziția (i,j) a matricei $A^{x} - E_{ik} A^{y} E_{lj}$.

Deci $x - y \in I$.

Fie $a \in R$ și $x \in I$. Atunci există $M = (m_{ij})_{i,j} \in J$ și $i,j \in \{1,\dots,n\}$ așa ca $x = m_{ij}$.

Atunci ax e elementul (i,j) al matricei $(aI_n)\cdot M \in J$, deci $ax \in I$.

Analog (folosind matricea $M\cdot(aI_n) \in J$) avem $xa \in I$.

Ca urmare, $I \trianglelefteq R$.

Obs: $J \subset M_n(I)$

Reciproc, fie $M = (m_{ij}) \in M_n(I)$.

Atunci pt fiecare $i,j \in \{1,\dots,n\}$ există o matrice $A(i,j) \in J$ și $k_{ij}, l_{ij} \in \{1,2,\dots,n\}$ așa încât $m_{ij} = A(i,j)_{k_{ij} l_{ij}}$

Atunci matricea $E_{i k_{ij}} A(i,j)_{k_{ij} l_{ij}} E_{l_{ij} j} \in J$ are m_{ij} în poziția i,j și 0 în rest.

Prin urmare $M = \sum_{1 \le i,j \le n} E_{i k_{ij}} A(i,j)_{k_{ij}, l_{ij}} E_{l_{ij}, j} \in J$.

Deci are loc $M_n(I) \subset J$.

Prin urmare, $J = M_n(I)$ $\quad \subsetneq \quad \subsetneq$

Am demonstrat deci:

$\boxed{\text{Prop}}$ $J \trianglelefteq M_n(R)$ ddacă există $I \trianglelefteq R$ așa încât $J = M_n(I)$.

Cum $M_n(I) \trianglelefteq M_n(R)$ (pt $I \trianglelefteq R$), ne putem întreba cum arată inelul factor $\dfrac{M_n(R)}{M_n(I)}$

În acest caz:

Considerăm $f: \mathcal{M}_n(R) \longrightarrow \mathcal{M}_n\left(\frac{R}{I}\right)$,

$$f\left(A=(a_{ij})_{i,j}\right) = (\hat{a}_{ij})_{i,j}$$

Avem:

• Fie $A=(a_{ij})_{i,j}$, $B=(b_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(R)$.

$$f(A+B) = f\left((a_{ij}+b_{ij})_{i,j}\right) = \left(\widehat{a_{ij}+b_{ij}}\right)_{i,j} = (\hat{a}_{ij}+\hat{b}_{ij})_{i,j} =$$

$$= (\hat{a}_{ij})_{i,j} + (\hat{b}_{ij})_{i,j} = f(A)+f(B)$$

$$f(AB) = f\left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)_{i,j}\right) = \left(\widehat{\sum_{k} a_{ik}b_{kj}}\right)_{i,j} =$$

$$= \left(\sum_{k} \hat{a}_{ik}\hat{b}_{kj}\right)_{i,j} = (\hat{a}_{ij})_{i,j}\cdot(\hat{b}_{ij})_{i,j} = f(A)\cdot f(B)$$

Evident, $f(I_n) = \begin{pmatrix} \hat{1} & & \hat{0} \\ & \ddots & \\ \hat{0} & & \hat{1} \end{pmatrix}$

Deci f e morfism unitar de inele.

Fie $Y=(\hat{y}_{ij})_{i,j}$, cu $y_{ij} \in R$.

Atunci $Y = f\left((y_{ij})_{i,j}\right)$

Deci, f e surjectivă. Deci $\operatorname{Im} f = \mathcal{M}_n\left(\frac{R}{I}\right)$.

Fie $A \in \mathcal{M}_n(R)$.

$A \in \ker f \iff f(A) = O \iff (\hat{a}_{ij})_{i,j} = (\hat{0})_{i,j} \iff$

$\| $

$(a_{ij})_{i,j}$

$\Leftrightarrow \hat{a}_{ij} = \hat{0} \; \forall i,j \Leftrightarrow \forall i,j \; a_{ij} \in I \Leftrightarrow$ ⑤

$A \in \mathcal{M}_n(I)$.

Ca urmare, $\ker f = \mathcal{M}_n(I)$.

Conform teoremei fundamentale de izomorfism pentru inele,

$$\frac{\mathcal{M}_n(R)}{\mathcal{M}_n(I)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_n\left(\frac{R}{I}\right) \quad \left(\overline{(a_{ij})_{i,j}} \longmapsto (\hat{a}_{ij})_{i,j}\right)$$

Exemplu de exercițiu în context:

Determinați, până la izomorfism, inelele factor ale inelului $\mathcal{M}_5(\mathbb{Z}_8)$

Sol. ~~Inelele~~ factor cerute sunt pe coloana din dreapta a tabelului de mai jos:

Ideale bilaterale	Inele factor
$\mathcal{M}_5(\mathbb{Z}_8)$	$\frac{\mathcal{M}_5(\mathbb{Z}_8)}{\mathcal{M}_5(\mathbb{Z}_8)} \simeq (0)$
$\mathcal{M}_5(\hat{2}\mathbb{Z}_8)$	$\frac{\mathcal{M}_5(\mathbb{Z}_8)}{\mathcal{M}_5(\hat{2}\mathbb{Z}_8)} \simeq \mathcal{M}_5\left(\frac{\mathbb{Z}_8}{\hat{2}\mathbb{Z}_8}\right) \simeq \mathcal{M}_5(\mathbb{Z}_2)$
$\mathcal{M}_5(\hat{4}\mathbb{Z}_8)$	$\frac{\mathcal{M}_5(\mathbb{Z}_8)}{\mathcal{M}_5(\hat{4}\mathbb{Z}_8)} \simeq \mathcal{M}_5\left(\frac{\mathbb{Z}_8}{\hat{4}\mathbb{Z}_8}\right) \simeq \mathcal{M}_5(\mathbb{Z}_4)$
$\mathcal{M}_5(\{\hat{0}\})$	$\frac{\mathcal{M}_5(\mathbb{Z}_8)}{\mathcal{M}_5(\{\hat{0}\})} = \mathcal{M}_5\left(\frac{\mathbb{Z}_8}{(0)}\right) \simeq \mathcal{M}_5(\mathbb{Z}_8)$.

Pentru a le determina, am folosit:

1) Idealele bilaterale ale inelului $\mathcal{M}_n(R)$ sunt exact submulțimile lui $\mathcal{M}_n(R)$ de forma $\mathcal{M}_n(I)$ cu $I \trianglelefteq R$ (R fiind un inel unitar)

2) Idealele (bilaterale, căci e comutativ!) ale inelului $\mathbb{Z}_n$ sunt cele din mulțimea $\{d\mathbb{Z}_n : d|n\}$.

3) Dacă R e inel, $\frac{R}{R} \simeq (0)$ (6)

4) Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ și $d|n$, $\frac{\mathbb{Z}_n}{d\mathbb{Z}_n} \simeq \mathbb{Z}_d$

Dacă $I \trianglelefteq J \trianglelefteq R$, cu $I \trianglelefteq R$, atunci ($J/I \trianglelefteq R/I$ și)

$$\frac{R/I}{J/I} \simeq \frac{R}{J}$$

CURS!

Explicații PT

$$\frac{\mathbb{Z}_n}{d\mathbb{Z}_n} = \frac{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}{d\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}} = \frac{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}{d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} = \frac{\mathbb{Z}}{d\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_d.$$

5) Dacă R e inel, $\frac{R}{(0)} \simeq R$.