(1) 07.11.23

SEMINAR 6 – 132

Arătați că $\mathcal{M} \stackrel{not}{=} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} : a \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{Z} \right\}$

e grup în raport cu înmulțirea matricelor

Sol Fie $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$ (deci, $a \in \mathbb{Q}$ și $n \in \mathbb{Z}$)

Atunci $\det M = 2^n \neq 0$, deci $M \in GL_2(\mathbb{R})$.

Ca urmare, $\mathcal{M} \subseteq GL_2(\mathbb{R})$

Fie $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 2^p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$.

Atunci

$$MN = \begin{pmatrix} 1 & b + 2^p \cdot a \\ 0 & 2^{n+p} \end{pmatrix}$$

întrucât $a, b \in \mathbb{Q}, n, p \in \mathbb{Z}$, $b + 2^p a \in \mathbb{Q}$ și $n+p \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$

$MN \in \mathcal{M}$.

Fie $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$ (deci $a \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{Z}$).

Luăm $P = \begin{pmatrix} 1 & -a \cdot 2^{-n} \\ 0 & 2^{-n} \end{pmatrix}$.

Din $a \in \mathbb{Q}$ și $n \in \mathbb{Z}$ obținem $-a \cdot 2^{-n} \in \mathbb{Q}$ și $-n \in \mathbb{Z}$

deci $P \in \mathcal{M}$.

În plus, $MP = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -a \cdot 2^{-n} \\ 0 & 2^{-n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ②

și $PM = \begin{pmatrix} 1 & -a \cdot 2^{-n} \\ 0 & 2^{-n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ca urmare, P e inversa (din $GL_2(\mathbb{R})$) matricei M.

În concluzie, M e subgrup al lui $(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$.

Ca urmare, $(M, \cdot)$ e grup.

Fie $H \leq (\mathbb{Z}, +)$

Atunci $0 \in H$.

Dacă $H = \{0\}$, atunci $H = 0 \cdot \mathbb{Z}$

Dacă $H \neq \{0\}$, atunci există $x \in H \setminus \{0\}$.

Înlocuind eventual x cu $-x$, constatăm că $H \cap \mathbb{N}^* \neq \emptyset$.

Notăm $n = \min\{H \cap \mathbb{N}^*$

Atunci: • $n \in H$

• $2n = n + n \in H$

• $3n = 2n + n \in H$

inductiv, $kn \in H$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

Fie $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Atunci $-kn \in H$ de mai sus, deci $kn \in H$ întrucât $H \leq \mathbb{Z}$.

În concluzie, $n\mathbb{Z} \subseteq H$ (1)

Fie $h \in H$.

Cf TÎR, există $q, r \in \mathbb{Z}$ așa încât

$h = nq + r$ și $0 \le r < n$.

Dacă $r = 0$, $h = nq \in n\mathbb{Z}$.

$\boxed{\text{Dacă } r \neq 0}$ cum $h \in H$ și $nq \in H$, obținem

$$\left.\begin{array}{l} r = h - nq \in H \\ \text{Dar } 0 < r < n \end{array}\right\} ↯$$

Rămâne, deci, că $h \in n\mathbb{Z}$

Încât, avem și $\left.\begin{array}{l} H \subseteq n\mathbb{Z} \\ (1) \end{array}\right\} \Rightarrow H = n\mathbb{Z}$.

Ca urmare,

Subgrupurile lui $\mathbb{Z}$ sunt elementele mulțimii

$$\{n\mathbb{Z} : n \in \mathbb{N}\}$$

și numai ele!

În aceeași ordine de idei:

Dat fiind $n \in \mathbb{N}$, subgrupurile lui $\mathbb{Z}_n$ sunt elementele mulțimii

$$\{\hat{d}\mathbb{Z}_n : d \mid n\}$$

și numai ele!

---

lungimi de segmente

Notăm planul cu $\mathcal{P}$ și notăm

$Izom(\mathcal{P}) = \{f : \mathcal{P} \to \mathcal{P} : \forall A, B \in \mathcal{P}\ f(A)f(B) = AB\}$

(deși nu e greu de demonstrat, vom considera cunoscut faptul că orice astfel de funcție e bijectivă)

Deci, $Izom(\mathcal{P}) \subset Bij(\mathcal{P})$ = mulțimea bijecțiilor $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$

Fie $f, g \in Izom(\mathcal{P})$.

Atunci, pt $A, B \in \mathcal{P}$

$$(f \circ g)(A)(f \circ g)(B) = f(g(A))f(g(B)) \xlongequal{f \in Izom(\mathcal{P})} g(A)g(B) \xlongequal{g \in Izom\,\mathcal{P}} AB.$$

Deci $f \circ g \in Izom(\mathcal{P})$.

Fie $f \in Izom(\mathcal{P})$.

Atunci $AB = f(f^{-1}(A))f(f^{-1}(B)) \xlongequal{f \in Izom(\mathcal{P})} f^{-1}(A)f^{-1}(B)$.

Deci $f^{-1} \in Izom(\mathcal{P})$

Ca urmare, $Izom(\mathcal{P}) \leq (Bij(\mathcal{P}), \circ)$

Deci $(Izom(\mathcal{P}), \circ)$ e grup.

Dacă considerăm o figură $\mathcal{F}$ în plan, notăm cu $J_{\mathcal{F}} \overset{not}{=} \{f \in Izom(\mathcal{P}) : f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}\}$.

- Evident, $J_{\mathcal{F}} \subset Izom(\mathcal{P})$.
- Dacă $f, g \in J_{\mathcal{F}}$, atunci

$$(f \circ g)(\mathcal{F}) = f(g(\mathcal{F})) \xlongequal{g \in J_{\mathcal{F}}} f(\mathcal{F}) \xlongequal{f \in J_{\mathcal{F}}} \mathcal{F},$$

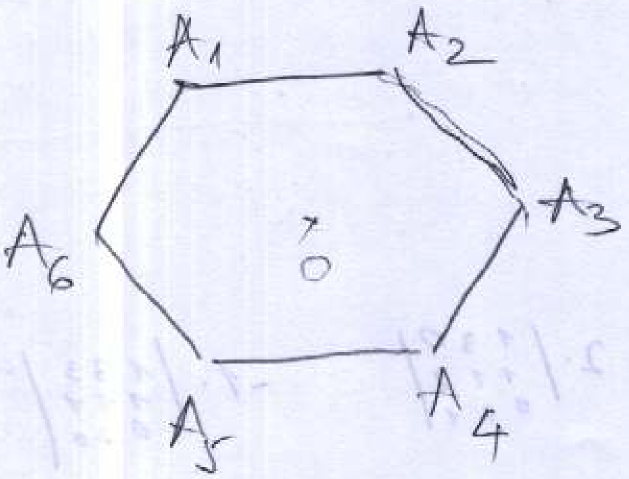
deci $f \circ g \in J_{\mathcal{F}}$

- Dacă $f \in J_{\mathcal{F}}$, atunci

$$\mathcal{F} = f^{-1}(f(\mathcal{F})) = f^{-1}(\mathcal{F})$$

Ca urmare, $\mathcal{I}_{\mathcal{F}} \le (\mathrm{Izom}(\mathcal{P}), \circ)$

Deci $(\mathcal{I}_{\mathcal{F}}, \circ)$ e grup.



$\mathcal{H} \overset{not}{=} A_1A_2A_3A_4A_5A_6$

Dacă $f \in \mathcal{I}_{\mathcal{H}}$

$f(A_1)$ e vârf, deci poate fi ales în 6 moduri.

Dacă-l fixăm, $f(A_2)$ e vârf vecin cu el, deci are două variante.

Ca urmare, $|\mathcal{I}_{\mathcal{H}}| \le 12$.

Notăm cu ρ rotația de $\frac{\pi}{3}$ în jurul lui O (în sens trigonometric),

$$\boxed{\begin{cases}\rho^6 = 1_{\mathcal{P}} \\ \sigma^2 = 1_{\mathcal{P}}\end{cases}}$$

$$\boxed{\{1_{\mathcal{P}}, \rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \rho^5, \sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma, \rho^3\sigma, \rho^4\sigma, \rho^5\sigma\}} = \mathcal{I}_{\mathcal{H}}$$

sunt diferite două câte două!

Dacă în locul unui hexagon considerăm

$$\left.\begin{aligned}\sigma\rho(A_1) &= A_3 \\ \sigma\rho(A_2) &= A_2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\sigma\rho = \rho^5\sigma}$$

un poligon regulat cu n laturi obținem grupul

$$\{1, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{n-1}, \sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma, \dots, \rho^{n-1}\sigma\} \overset{not}{=} D_n$$

pentru care au loc relațiile

$$\rho^n = 1, \quad \sigma^2 = 1 \text{ și } \sigma\rho = \rho^{n-1}\sigma.$$

Acest grup s.n. GRUPUL DIEDRAL PE n ELEMENTE