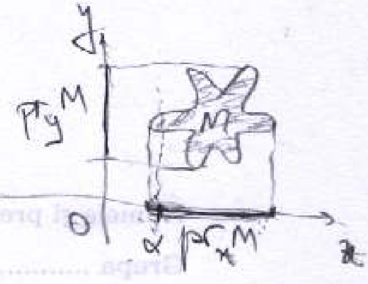
(1) 08.01.24

SEMINAR 13 _ 132

IDEALE ÎN INELUL PRODUS.



Fie $R_{1,2}$ inele unitare

Fie $J \le^{\circ} R \overset{not}{=} R_1 \times R_2$.

Notăm: $I_1 = \{x \in R_1 : \exists y \in R_2 \ (x,y) \in J\}$,

$I_2 = \{y \in R_2 : \exists x \in R_1 \ (x,y) \in J\}$.

proiecția lui J pe R_1.

Fie $x, x' \in I_1$.

Atunci $\exists y, y' \in R_2$ $(x,y) \in J \ni (x',y')$

Cum $J \le^{\circ} R$, $(x-x', \underbrace{y-y'}_{\in R_2}) = (x,y) - (x',y') \in J$.

Ca urmare, $x - x' \in I_1$.

Fie $a \in R_1$, $x \in I_1$.

Atunci $\exists y \in R_2$ $(x,y) \in J$

Cum $J \le^{\circ} R$, $(ax, 0) = (a,0)(x,y) \in J$.

Deci $ax \in I_1$.

Prin urmare, $I_1 \le^{\circ} R_1$.

Analog, $I_2 \le^{\circ} R_2$.

Obs: $J \subset I_1 \times I_2$. (1)

Fie $(x,y) \in I_1 \times I_2$.

Atunci: $\exists y' \in R_2$ $(x,y') \in J$

$\Rightarrow$ $\exists x' \in R_1$ $(x',y) \in J$.

Atunci

$(x,y) = (1,0)\cdot(x,y') + (0,1)\cdot(x',y) \in J$

Deci, $\left.\begin{array}{l} I_1 \times I_2 \subset J \\ (1) \end{array}\right\} \Rightarrow J = I_1 \times I_2$, demonstrație făcută pt 2 factori dar se adaptează imediat!

Morala:

$\boxed{\text{Prop}}$ Orice ideal al unui produs $\boxed{\text{finit}}$ de inele unitare este produsul unor ideale (de același tip cu el) ale factorilor produsului.

$\boxed{\text{PS}}$ Rămâne acest rezultat adevărat și un produs infinit de inele unitare?

Î: de ce „ne place" acest rezultat?

R: Considerăm grupurile $G_1 = \mathbb{Z}_2$ și $G_2 = \mathbb{Z}_2$.

Sgr. lui G_1 sunt $\{0\}$ și $\mathbb{Z}_2$ } deci de aici obținem cel mult 4 sgr. de forma $H_1 \times H_2$ în G.
— G_2 —

$G \overset{not}{=} G_1 \times G_2 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

	00	01	10	11
00	00	01	10	11
01	01	00	11	10
10	10	11	00	01
11	11	10	01	00

Sgr. în G:
$\{00\}$
$\langle 01\rangle = \{00, 01\}$
$\langle 10\rangle = \{00, 10\}$
$\langle 11\rangle = \{00, 11\}$
G

Deci: Nu orice subgrup al unui produs direct de grupuri e produsul direct al unor subgrupuri ale factorilor acelui produs!

Asta arată că situația de la ideale e una remarcabilă!

INELE FACTOR ALE INELULUI PRODUS

$\boxed{\text{Prop}}$ Dacă $R_1, \dots, R_n$ sunt inele unitare, iar $J \trianglelefteq R \overset{not}{=} R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$, atunci există $I_1 \trianglelefteq R_1, \dots, I_n \trianglelefteq R_n$ astfel încât $J = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ și

$$\frac{R}{J = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n} \simeq \frac{R_1}{I_1} \times \frac{R_2}{I_2} \times \dots + \frac{R_n}{I_n}$$

dem (O facem pt $n=2$, dar merge la fel pt $n \geq 2$ arbitrar!)

Considerăm $f : R \to \frac{R_1}{I_1} \times \frac{R_2}{I_2}$,

$f((x_1, x_2)) = (\hat{x}_1, \overline{x}_2)$

Fie $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in R$.

$f(x+y) = f((x_1+y_1, x_2+y_2)) = (\widehat{x_1+y_1}, \overline{x_2+y_2}) =$
$= (\hat{x}_1, \overline{x}_2) + (\hat{y}_1, \overline{y}_2) = f(x) + f(y)$

$f(xy) = f((x_1y_1, x_2y_2)) = (\widehat{x_1y_1}, \overline{x_2y_2}) =$
$= (\hat{x}_1, \overline{x}_1) \cdot (\hat{y}_1, \overline{y}_2) = f(x) \cdot f(y)$

$f((1,1)) = (\hat{1}, \overline{1})$

Deci f este morfism unitar de inele

Fie $(\hat{x}_1, \overline{x}_2) \in \frac{R_1}{I_1} \times \frac{R_2}{I_2}$.

Atunci $f((x_1, x_2)) = (\hat{x}_1, \overline{x}_2)$

Deci f e surjectivă, de unde $\operatorname{Im} f = \frac{R_1}{I_1} \times \frac{R_2}{I_2}$

Fie $x \overset{not}{=} (x_1, x_2) \in R$. $f(x) = 0 \iff$

$f((x_1, x_2)) = 0 = (\hat{0}, \overline{0}) \iff (\hat{x}_1, \overline{x}_2) = (\hat{0}, \overline{0}) \iff$

$(\hat{x}_1 = \hat{0} \wedge \overline{x}_2 = \overline{0}) \iff (x_1 \in I_1 \wedge x_2 \in I_2) \iff x \in I_1 \times I_2$

Obs: În $\frac{R}{I}$

$\hat{a} = \hat{b} \iff a - b \in I$

$\hat{a} = \hat{0} \iff a \in I$

Inelul factor $\frac{R}{I}$ are:

- Mulțimea subiacentă $\{\underbrace{x+I}_{\hat{x}} : x \in R\} = \{\hat{x} : x \in R\}$
- Operațiile
  $(x+I) + (y+I) = (x+y) + I$ $\quad \hat{x} + \hat{y} = \widehat{x+y}$
  $(x+I) \cdot (y+I) = xy + I$ $\quad \hat{x} \cdot \hat{y} = \widehat{xy}$

Deci, $\operatorname{Ker} f = I_1 \times I_2$.

Conform T.F.Izom (pt inele)

$$\frac{R_1\times R_2}{I_1\times I_2} \xrightarrow{\sim} \frac{R_1}{I_1}\times\frac{R_2}{I_2} \quad \left(\widehat{(x_1,x_2)} \mapsto (\hat{x}_1, \bar{x}_2)\right)$$

$\boxed{\text{Corolar}}$ Dacă $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ și dacă $R_1,\dots,R_n$ sunt inele unitare și dacă $I_1 \trianglelefteq R_1, I_2 \trianglelefteq R_2, \dots, I_n \trianglelefteq R_n$, atunci

$$\frac{R_1\times R_2\times\dots\times R_n}{I_1\times I_2\times\dots\times I_n} \xrightarrow{\sim} \frac{R_1}{I_1}\times\frac{R_2}{I_2}\times\dots\times\frac{R_n}{I_n}$$

Exemplu Determinați idealele și, până la izomorfism, inelele factor ale inelului $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}_{12}$.

Sol: Folosim următoarele:

1) Dacă $R_{1,2}$ sunt inele unitare și $I_1 \trianglelefteq R_1$, $I_2 \trianglelefteq R_2$, atunci
$$\frac{R_1\times R_2}{I_1\times I_2} \xrightarrow{\sim} \frac{R_1}{I_1}\times\frac{R_2}{I_2}$$

2) Dacă $R_{1,2}$ sunt inele unitare, orice ideal bilateral al lui $R_1\times R_2$ e de forma $I_1\times I_2$ cu $I_1 \trianglelefteq R_1$ și $I_2 \trianglelefteq R_2$

3) Orice ideal al unui inel comutativ e bilateral, iar $\mathbb{R}$ și $\mathbb{Z}_{12}$ sunt inele comutative

4) Idealele lui $\mathbb{Z}_{12}$ sunt cele din $\{d\mathbb{Z}_{12} : d \mid 12\}$

5) Deoarece $\mathbb{R}$ e corp, idealele lui $\mathbb{R}$ sunt (0) și $\mathbb{R}$

6) Pentru orice inel R, $\frac{R}{R} = (0)$

7) Dacă $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ și $d \mid n$, $\frac{\mathbb{Z}_n}{d\mathbb{Z}_n} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_d$

8) $(0)\times\mathbb{R} \simeq \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}\times(0)$

9) $\dfrac{\mathbb{R}}{(0)} \simeq \mathbb{R}$

Ca urmare, idealele și inelele factor ale inelului $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}_{12}$ sunt cele din coloanele corespunzătoare ale tabelului de mai jos:

Idealele	Inelele factor.
$\mathbb{R}\times\mathbb{Z}_{12}$	$\dfrac{\mathbb{R}\times\mathbb{Z}_{12}}{\mathbb{R}\times\mathbb{Z}_{12}} \simeq (0)$
$\mathbb{R}\times\hat{2}\mathbb{Z}_{12}$	$\dfrac{\mathbb{R}\times\mathbb{Z}_{12}}{\mathbb{R}\times\hat{2}\mathbb{Z}_{12}} \simeq \dfrac{\mathbb{R}}{\mathbb{R}}\times\dfrac{\mathbb{Z}_{12}}{\hat{2}\mathbb{Z}_{12}} \simeq (0)\times\mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}_2.$
$\mathbb{R}\times\hat{3}\mathbb{Z}_{12}$	$\dfrac{\mathbb{R}\times\mathbb{Z}_{12}}{\mathbb{R}\times\hat{3}\mathbb{Z}_{12}} \simeq \dfrac{\mathbb{R}}{\mathbb{R}}\times\dfrac{\mathbb{Z}_{12}}{\hat{3}\mathbb{Z}_{12}} \simeq (0)\times\mathbb{Z}_3 \simeq \mathbb{Z}_3.$
$\mathbb{R}\times\hat{4}\mathbb{Z}_{12}$	$\dfrac{\mathbb{R}\times\mathbb{Z}_{12}}{\mathbb{R}\times\hat{4}\mathbb{Z}_{12}} \simeq \dfrac{\mathbb{R}}{\mathbb{R}}\times\dfrac{\mathbb{Z}_{12}}{\hat{4}\mathbb{Z}_{12}} \simeq (0)\times\mathbb{Z}_4 \simeq \mathbb{Z}_4.$
$\mathbb{R}\times\hat{6}\mathbb{Z}_{12}$	$\dfrac{\mathbb{R}\times\mathbb{Z}_{12}}{\mathbb{R}\times\hat{6}\mathbb{Z}_{12}} \simeq \dfrac{\mathbb{R}}{\mathbb{R}}\times\dfrac{\mathbb{Z}_{12}}{\hat{6}\mathbb{Z}_{12}} \simeq (0)\times\mathbb{Z}_6 \simeq \mathbb{Z}_6.$
$\mathbb{R}\times(\hat{0})$	$\dfrac{\mathbb{R}\times\mathbb{Z}_{12}}{\mathbb{R}\times(0)} \simeq \dfrac{\mathbb{R}}{\mathbb{R}}\times\dfrac{\mathbb{Z}_{12}}{(0)} \simeq (0)\times\mathbb{Z}_{12} \simeq \mathbb{Z}_{12}.$
$(0)\times\mathbb{Z}_{12}$	$\dfrac{\mathbb{R}\times\mathbb{Z}_{12}}{(0)\times\mathbb{Z}_{12}} \simeq \dfrac{\mathbb{R}}{(0)}\times\dfrac{\mathbb{Z}_{12}}{\mathbb{Z}_{12}} \simeq \mathbb{R}\times(0) \simeq \mathbb{R}.$
$(0)\times\hat{2}\mathbb{Z}_{12}$	$\dfrac{\mathbb{R}\times\mathbb{Z}_{12}}{(0)\times\hat{2}\mathbb{Z}_{12}} \simeq \dfrac{\mathbb{R}}{(0)}\times\dfrac{\mathbb{Z}_{12}}{\hat{2}\mathbb{Z}_{12}} \simeq \mathbb{R}\times\mathbb{Z}_2$
$(0)\times\hat{3}\mathbb{Z}_{12}$	$\dfrac{\mathbb{R}\times\mathbb{Z}_{12}}{(0)\times\hat{3}\mathbb{Z}_{12}} \simeq \dfrac{\mathbb{R}}{(0)}\times\dfrac{\mathbb{Z}_{12}}{\hat{3}\mathbb{Z}_{12}} \simeq \mathbb{R}\times\mathbb{Z}_3$
$(0)\times\hat{4}\mathbb{Z}_{12}$	$\dfrac{\mathbb{R}\times\mathbb{Z}_{12}}{(0)\times\hat{4}\mathbb{Z}_{12}} \simeq \dfrac{\mathbb{R}}{(0)}\times\dfrac{\mathbb{Z}_{12}}{\hat{4}\mathbb{Z}_{12}} \simeq \mathbb{R}\times\mathbb{Z}_4$
$(0)\times\hat{6}\mathbb{Z}_{12}$	$\dfrac{\mathbb{R}\times\mathbb{Z}_{12}}{(0)\times\hat{6}\mathbb{Z}_{12}} \simeq \dfrac{\mathbb{R}}{(0)}\times\dfrac{\mathbb{Z}_{12}}{\hat{6}\mathbb{Z}_{12}} \simeq \mathbb{R}\times\mathbb{Z}_6$
$(0)\times(\hat{0})$	$\dfrac{\mathbb{R}\times\mathbb{Z}_{12}}{(0)\times(\hat{0})} \simeq \mathbb{R}\times\mathbb{Z}_{12}.$