(1) 17.10.23

SEMINAR 3 - 132

Considerăm pe $\mathbb{R}$ relația

$$x \sim y \overset{def}{\iff} x^2+5x = y^2+5y$$

a) Arătați că $\sim$ e o relație de echivalență.

dem: Fie $a \in \mathbb{R}$.

Evident, $a^2+5a = a^2+5a$, deci $a \sim a$.

Deci $\sim$ e reflexivă. (R)

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel ca $a \sim b$.

Atunci $a^2+5a = b^2+5b$, de unde $b^2+5b = a^2+5a$, deci $b \sim a$.

Ca urmare, $\sim$ e simetrică (S)

Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel ca $a \sim b$ și $b \sim c$.

Atunci $a^2+5a = b^2+5b$ și $b^2+5b = c^2+5c$, de unde $a^2+5a = c^2+5c$, deci $a \sim c$.

Ca urmare, $\sim$ e tranzitivă. (T)

(R), (S), (T) $\Rightarrow$ $\sim$ e relație de echivalență.

b) Determinați $\mathbb{R}/\sim$.

Sol: $\frac{7}{\sim} = \{x \in \mathbb{R} : 7 \sim x\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : 7^2 + 5 \cdot 7 = x^2 + 5x\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 5x - 84 = 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : x \in \{7, -12\}\} = \{7, -12\}$.

c) Pentru $a \in \mathbb{R}$ fixat, determinați $\frac{a}{\sim}$.

Sol: $\frac{a}{\sim} = \{x \in \mathbb{R} : x \sim a\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 5x = a^2 + 5a\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 5x - a^2 - 5a = 0\}$

$= \{a, -a - 5\}$.

(obs: dacă $a = -\frac{5}{2}$, $\left|\frac{a}{\sim}\right| = 1$

altfel, $\left|\frac{a}{\sim}\right| = 2$)

În contextul unei relații de echivalență, MULȚIMEA FACTOR = MULȚIMEA CLASELOR DE ECHIVALENȚĂ

d) Determinați $\frac{\mathbb{R}}{\sim}$

Sol: $\frac{\mathbb{R}}{\sim} = \left\{\frac{a}{\sim} : a \in \mathbb{R}\right\}$

3

$= \{\{a, -a-5\} : a \in \mathbb{R}\}_{\square}$

Obs: Această scriere de mai sus e o mică problemă de redundanță:

$\{7, -12\}$ apare de două ori: o dată de la $a=7$ și o a doua oară de la $a=-12$.

De fapt, avem: ~~Recomandat~~ asta pretind eu!

$\frac{\mathbb{R}}{\sim} = \boxed{\left\{ \{a, -a-5\} : a \geq -\frac{5}{2} \right\}}$ iar această scriere e ireduntantă.

not C

Dem: Fie $A \in \frac{\mathbb{R}}{\sim}$.

Atunci există $a \in \mathbb{R}$ astfel ca $A = \{a, -a-5\}$.

Dacă $a \geq -\frac{5}{2}$, $A \in C$ (cf def lui C)

Dacă $a < -\frac{5}{2}$, atunci $-a > \frac{5}{2}$,

deci $-a-5 > \frac{5}{2} - 5 = -\frac{5}{2}$

Ca urmare, $A = \{-a-5, a\} =$

$= \{-a-5, -(-a-5)-5\}$.

Deci, $A \in C$.

Ca urmare, $\frac{\mathbb{R}}{\sim} \subset C$ (1)

Incluziunea $C \subset \frac{\mathbb{R}}{\sim}$ e evidentă din definiție. (2)

(1), (2) $\Rightarrow \frac{\mathbb{R}}{\sim} = C$

Dacă $a, b \geq -\frac{5}{2}$

$\{a, -5-a\} = \{b, -5-b\}$,

atunci $\Rightarrow$ fie $\begin{cases} a=b \\ -5-a=-5-b \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{a=b}$

fie $\begin{cases} a=-5-b \\ -5-a=b \end{cases} \Leftrightarrow b=-5-a$

Dar $b \geq -\frac{5}{2}$

$a \geq -\frac{5}{2} \Rightarrow -a \leq +\frac{5}{2} \Rightarrow -5-a \leq -\frac{5}{2}$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\boxed{a=-\frac{5}{2}=b}$

Deci soluția din C este nedundantă

În contextul unei relații de echivalență pe o mulțime M,

SISTEM COMPLET ȘI INDEPENDENT DE REPREZENTANȚI = SUBMULȚIME A LUI M FORMATĂ CU CÂTE EXACT UN

ELEMENT DIN FIECARE CLASĂ DE ECHIVALENȚĂ

e) Determinați trei sisteme complete și independente de reprezentanți (ai elementelor lui $\mathbb{R}$ în raport cu relația $\sim$)

Sol: Alegând elementul maxim din fiecare element $\{a, -5-a\}$ al mulțimii C de la d), în speță a, obținem ca prim s.c.i.R.

$$\left[-\frac{5}{2}, +\infty\right) = \left\{a : a \in \left[-\frac{5}{2}, +\infty\right)\right\}$$

Un alt s.c.i.R se obține alegând elementul minim $-5-a$, din fiecare $\{a, -5-a\} \in C$; iar acest s.c.i.R este $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right]$

Un alt exemplu de s.c.i.R.:

$(-\infty, -5] \cup \left[-\frac{5}{2}, 0\right)$; pentru a-l obține am ales din $\{a, -a-5\} \in C$ elementul minim pt $a > 0$ (deci, pe $-a-5$), respectiv pe cel maxim, pe a, pt $a \in \left[-\frac{5}{2}, 0\right)$

(7)

$f:\mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z},\ f(\hat{x}) = 5x+1$

$g:\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2,\ g(\hat{x}) = \bar{x}$

$f(\hat{0})=1 \quad f(\hat{3})=16 \quad f(\hat{6})=31 \ldots$

$f(\hat{1})=6$

$f(\hat{2})=11$

$\pi(x)=\frac{x}{\rho}$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & M/\rho \arrow[dl, "u"] \\ P & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "\pi(a)=\hat{a}"] \arrow[d, "f(x)=\bar{x}"'] & \mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}/\rho \arrow[dl, "g"] \\ \mathbb{Z}_2 & \end{tikzcd}$$

Dacă $\rho \subset \rho_f$, atunci există u a.î. în diagrama

$x\rho y \Leftrightarrow 6 | x-y$

Rel. echiv care asoc lui f FACE DIAGRAMA COMUTATIVĂ

$(x,y)\in\rho \Leftrightarrow$

$6 | x-y \Rightarrow 2 | x-y \Rightarrow$

$\bar{x}=\bar{y} \Rightarrow f(x)=f(y) \Rightarrow$

$x\rho_f y \Rightarrow (x,y)\in\rho_f$

adică $\boxed{f = u\circ\pi}$

(8)

Ca urmare, $\rho \subseteq \rho_f$.

Conform propr. univ. a mulțimii factor, există $g : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2$

cu propr. $f = g \circ \pi$,

de unde, pt. oricare

$f(a) = g(\pi(a)) \Rightarrow$

$g(\hat{a}) = \bar{a}$