1 16.01.24

SEMINAR 14 _ 132

133 : $\frac{\mathbb{R}[X]}{(X^2+1)}$ → L-am „desenat"
↘ Am arătat că e izomorf cu $\mathbb{C}$

Ne putem pune întrebări de genul:

1) Dacă factorizăm $K[X]$ (K fiind un corp comutativ) printr-un ideal principal obținem întotdeauna un corp?

R. Nici pomeneală!

D. ex: $\frac{\mathbb{Q}[X]}{(X^2+5X+6)} = \frac{\mathbb{Q}[X]}{((X+2)(X+3))}$ =(1)

Evident, $((X+2)(X+3)) \subset (X+2)$ și $((X+2)(X+3)) \subset (X+3)$ } ⇒

$((X+2)(X+3)) \subset (X+2) \cap (X+3)$. (2)

Reciproc, fie $f \in (X+2)\cap(X+3)$.

Atunci $f \in (X+2)$ și $f \in (X+3)$,

deci $\exists g, h \in \mathbb{Q}[X]$ $f=(X+2)g \wedge f=(X+3)h$.

Pt acești g, h $(X+2)g = f = (X+3)\cdot h$.

Ca urmare, $-g(-3) = (-3+3)h(-3) = 0$

Deci -3 e rădăcină pt g.

Cf T. lui Bézout, $X+3 \mid g$, deci există $l \in \mathbb{Q}[X]$ așa încât $g = (X+3)l$.

Ca urmare, există $l \in \mathbb{Q}[X]$ astfel ca

$f = (X+2)g = (X+2)(X+3)l$,

Deci, $f \in ((X+2)(X+3))$

Ca urmare, $(x+2)\cap(x+3)\subset((x+2)(x+3))$ $\left.\begin{matrix} \\ (2)\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ (2)

$((x+2)(x+3)) = (x+2)\cap(x+3)$.

Ca urmare,

$$(1) = \frac{\mathbb{Q}[X]}{(x+2)\cap(x+3)} = (3)$$

CURS: Dacă R e inel comutativ și unitar, iar $I, J \trianglelefteq R$, atunci

$$\frac{R}{I\cap J} \xrightarrow{\varphi} \frac{R}{I}\times\frac{R}{J}, \quad \varphi(\hat{a}) = (\bar{a}, \check{a})$$

e izomorfism dacă $\boxed{I+J=R}$

Două ideale I, J aflate în această situație s.n. COMAXIMALE

La noi, $1 = -(x+2)+(x+3)$.

Deci pt $f\in R$ arbitrar, $f = \underbrace{-(x+2)f}_{\in I} + \underbrace{(x+3)f}_{\in J}$.

Ca urmare, $\left.\begin{matrix} R\subset I+J \\ \text{Evident, } I+J\subset R\end{matrix}\right\} \Rightarrow R = I+J$.

Obs: Un raționament similar va funcționa pentru orice ideale I și J din $K[X]$ (K corp comutativ) de forma $I=(g)$ și $J=(h)$ cu $(g,h)=1$. Obținem:

Consecință:

Fie K un corp comutativ și fie $f, g \in K[X]$ cu $(f, g) = 1$. Atunci (f) și (g) sunt comaximale. (3)

Din toate acestea,

$$(3) \simeq \frac{\mathbb{Q}[X]}{(X+2)} \times \frac{\mathbb{Q}[X]}{(X+3)} = (4)$$

Fie R un inel comutativ și unitar și fie $a \in R$. Atunci $\frac{R[X]}{(X-a)} \xrightarrow{\varphi} R$ $\left(\bar{f} \mapsto \varphi\right)$

dem: Definim $\phi : R[X] \longrightarrow R$,

$\phi(f) = f(a)$

Atunci:

Fie $f, g \in R[X]$

$\phi(f+g) = (f+g)(a) = f(a) + g(a) = \phi(f) + \phi(g)$.

$\phi(fg) = (fg)(a) = f(a)g(a) = \phi(f)\phi(g)$.

$\phi(1) = 1$.

Deci, ϕ e morfism unitar de inele.

Fie $s \in R$. Atunci $s = \phi(s)$.

Ca urmare, $\operatorname{Im} \phi = R$.

Fie $f \in \ker \phi$.

Atunci $\phi(f) = 0$, adică $f(a) = 0$.

Ca urmare, a e rădăcină pt f.

Cf T. Bézout, $X-a \underset{R[X]}{\mid} f$. Ca urmare, $f \in (X-a)$.

Reciproc, dacă $g = (X-a)h \in (X-a)$,
atunci $\phi(g) = g(a) = (a-a)h(a) = 0$, deci
$g \in \ker\phi$.

Ca urmare, $\ker\phi = (X-a)$.

Conform teoremei fundamentale de izomorfism pt inele,

$$\frac{R[X]}{(X-a)} \xrightarrow{\sim} R \quad \left(\varphi(\hat{f}) = f(a)\right)_{\square}$$

Din cele de mai sus,

$(4) \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

Ne reamintim:

ORICE CORP E INEL INTEGRU!

Dar în $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ avem $\underset{\neq (0,0)}{(1,0)} \cdot \underset{\neq}{(0,1)} = (0,0)$

Ca urmare, $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ nu e inel integru,
deci nu e corp.

În consecință, nici $\frac{\mathbb{Q}[X]}{(X^2+5X+6)}$ nu e corp.

2) În ce condiții $\frac{K[X]}{(f)}$ e corp?

R: Fie K un corp comutativ și fie $f \in K[X]$.
Atunci $\frac{K[X]}{(f)}$ e corp dacă f e ireductibil.

dem: „$\Rightarrow$" Dacă presupunem că f e reductibil,
el se poate scrie ca gh cu $(g,h) = 1$. și $\text{grad}\, g \leq 1 \geq \text{grad}\, h$

Atunci $\frac{K[X]}{(f)} = \frac{K[X]}{(gh)} \simeq \frac{K[X]}{(g)} \times \frac{K[X]}{(h)}$, care nu e corp, contradicție.

„$\Leftarrow$" Fie $\hat{F} \in \frac{K[X]}{(f)} \setminus \{\hat{0}\}$.

Atunci $f \nmid F$.

f fiind ireductibil $(f, F) = 1$.

Ca urmare, există $g, G \in K[X]$ așa încât

$fg + FG = 1$.

De aici, $\underbrace{\hat{f}}_{\hat{0}}\hat{g} + \hat{F}\hat{G} = \hat{1}$ deci $\hat{F}\hat{G} = \hat{1}$. Ca urmare, $\hat{F}$ e inversabil în $\frac{K[X]}{(f)}$ □

Aceste considerații ne „sugerează" lista de corpuri comutative „din dotare":

- $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
- $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $\mathbb{Q}(i\sqrt{d})$ cu $d \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ liber de □
- $\mathbb{Z}_p$, p prim

New entry!

- $\frac{K[X]}{(f)}$, K corp comutativ, $f \in K[X]$ ireductibil

$$\frac{\mathbb{Q}[X]}{((X-2)(X+1))} \xrightarrow{\varphi} \frac{\mathbb{Q}[X]}{(X-2)} \times \frac{\mathbb{Q}[X]}{(X+1)} \qquad \varphi(\hat{a}) = (\bar{a}, \check{a})$$

$$\widehat{\tfrac{1}{3}X + \tfrac{1}{3}} \longmapsto (\bar{1}, \check{0})$$

$$\widehat{-\tfrac{1}{3}X + \tfrac{2}{3}} \longmapsto (\bar{0}, \check{1})$$

Ne reamintim:

$$\frac{\mathbb{Q}[X]}{((X-2)(X+1))} = \{\widehat{aX+b} : a,b\in\mathbb{Q},\ x=\hat{X}\}.$$

$$\varphi(aX+b) = (\bar{1}, \tilde{0}) \iff$$

$$\varphi(\widehat{aX+b}) = (\bar{1}, \tilde{0}) \iff$$

$$(\overline{aX+b}, \widetilde{aX+b}) = (\bar{1}, \tilde{0}) \iff$$

$$(aX+b-1 \ \vdots\ X-2 \ \wedge\ aX+b \ \vdots\ X+1) \iff$$

$$2a+b-1=0 \ \wedge\ -a+b=0 \iff \boxed{a=b=\tfrac{1}{3}}$$

verificare (nu trebuie pusă pe curat!):

$$\frac{1}{3}X+\frac{1}{3} = \frac{1}{3}(X-2)+\frac{2}{3}+\frac{1}{3} = \frac{1}{3}(X-2)+1$$

$$\frac{1}{3}X+\frac{1}{3} = \frac{1}{3}(X+1)$$

Deci $\mathrm{Idemp}\,\dfrac{\mathbb{Q}[X]}{(X^2-X-2)} = \{\hat{0}, \hat{1}, \widehat{\tfrac{1}{3}X+\tfrac{1}{3}}, \widehat{-\tfrac{1}{3}X+\tfrac{2}{3}}\}$.

$$R \overset{\text{not}}{=} \frac{\mathbb{Q}[X]}{(X^2+6X+9)}$$

1. E corp? Nu, căci $\widehat{X+3}^{\,2} = \hat{0}$, deci are elemente nilpotente $\neq 0$
2. E izomorf cu $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$? , căci $N(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}) = N(\mathbb{Q})\times N(\mathbb{Q}) = \{0\}\times\{0\} = \{0\}$
3. Care-s ~~idem.~~ nilpotente?
4. — — idempotente?

Fie $n\in\mathbb{N}^*$, $a,b\in\mathbb{Q}$. $\widehat{(aX+b)}^{\,n} = \hat{0} \iff \widehat{aX+b}^{\,n} = \hat{0} \iff (aX+b)^n \ \vdots\ (X+3)^2$

$\iff b=3a \wedge a\neq 0 \wedge n\geq 2$, deci $aX+b = a(X+3)$

Reciproc, pt orice $a \in \mathbb{Q}$

$$\left(a\widehat{(x+3)}\right)^2 = \widehat{a(x+3)}^2 = \widehat{a^2(x+3)^2} = \hat{0}$$

Ca urmare, $\mathcal{N}(R) = \{ a\widehat{(x+3)} : a \in \mathbb{Q} \}$.

Fie $A = ax+b \in Idemp(R)$.

Atunci $A^2 = A$, deci $(ax+b)^2 = ax+b$,

adică $a^2x^2 + 2abx + b^2 = ax+b$,

adică $-6a^2x - 9a^2 + 2abx + b^2 = ax+b$,

sau, echivalent $(-6a^2+2ab-a)x + (-9a^2+b^2-b) = 0$. (1)

Cum reprezentarea $\{ax+b : a,b \in \mathbb{Q}, x^2+6x+9=0\}$ a lui R e ireduntantă,

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} -6a^2+2ab-a=0 \\ -9a^2+b^2-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(-6a+2b-1)=0 \\ -9a^2+b^2-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases} \vee \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} b=3a+\frac{1}{2} \\ -9a^2+b^2-b=0 \end{cases} \right) \Leftrightarrow \left(A \in \{-1,1\} \vee \begin{cases} b=3a+\frac{1}{2} \\ -\cancel{9a^2}+\cancel{9a^2}+\cancel{3a}+\frac{1}{4} - \cancel{3a}-\frac{1}{2}=0 \end{cases} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(A \in \{-1,1\} \vee \begin{cases} b=3a+\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}=0 \end{cases} \right) \Leftrightarrow A \in \{-1,1\}.$$

Deci $Idemp(R) = \{-1,1\}$