① 14.11.23

SEMINAR 7 _ 132

Fie $n \geq 3$ și $f \in D_n$

Dacă notăm cu $\phi(f)$

funcția

$: \{1,2,3,4,5,\dots,n\} \to \{1,2,3,\dots,n\}$

dată prin

$\phi(f)(k)$ = indicele lui $f(A_k) \Rightarrow f(A_k) = A_{\phi(f)(k)}$

A_k „A ca"
$A(k)$ „A de ca"
A^k „A la ca"

$\phi(f)$ e injecție (că f e injectivă)

: O mulțime finită → ca înainte, deci e bijectivă

Ca urmare, $\phi : D_n \to S_n$

Dar, pt $f, g \in D_n$ și $k \in \{1,2,\dots,n\}$

$\phi(fg)(k)$ = indicele lui $(fg)(A_k)$ =

$= $ indicele lui $f(g(A_k)) = f(A_{\phi(g)(k)}) =$

$= A_{\phi(f)(\phi(g)(k))} = A_{(\phi(f)\circ\phi(g))(k)} = (\phi(f)\circ\phi(g))(k)$,

deci $\phi(fg) = \phi(f)\circ\phi(g)$.

Ca urmare, ϕ e morfism de grupuri.

Dacă pt $f, g \in D_n$ avem $\phi(f) = \phi(g)$,

atunci
$$\left.\begin{array}{l} \phi(f)(1) = \phi(g)(1) \Rightarrow f(A_1) = g(A_1) \\ \phi(f)(2) = \phi(g)(2) \Rightarrow f(A_2) = g(A_2) \\ \phi(f)(3) = \phi(g)(3) \Rightarrow f(A_3) = g(A_3) \end{array}\right\} \Rightarrow$$
(A_1, A_2, A_3 sunt necoliniare)

$\Rightarrow f = g$.

Morala: ϕ e injectivă.

Obs (intuitiv): Morfismele injective ne permit să „identificăm structura - domeniu cu o substructură a structurii - codomeniu". Se folosește uneori în context termenul „scufundăm structura domeniu în structura codomeniu".

Deci, în cazul nostru,

„D_n SE SCUFUNDĂ IN S_n"

Deci D_3 se scufundă în S_3 (1)

dar $|D_3| = 6$ (2)

$|S_3| = 6$ (3)

$6 \in \mathbb{N}$ (4)

Din (1), (2), (3), (4), obținem că D_3 e izomorf cu S_3.

Când nu avem alte plăceri care să ne ceară să le gândim ca fiind diferiți, le vom identifica!

Dacă facem asta,

$S_3 = D_3 = \{1, \rho, \rho^2, \sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma\}$, cu $\rho^3 = 1$, $\sigma^2 = 1$, $\sigma\rho = \rho^2\sigma$

	1	ρ	ρ^2	σ	$\rho\sigma$	$\rho^2\sigma$
1	1	ρ	ρ^2	σ	$\rho\sigma$	$\rho^2\sigma$
ρ	ρ	ρ^2	1	$\rho\sigma$	$\rho^2\sigma$	σ
ρ^2	ρ^2	1	ρ	$\rho^2\sigma$	σ	$\rho\sigma$
σ	σ	$\rho^2\sigma$	$\rho\sigma$	1	ρ^2	ρ
$\rho\sigma$	$\rho\sigma$	σ	$\rho^2\sigma$	ρ	1	ρ^2
$\rho^2\sigma$	$\rho^2\sigma$	$\rho\sigma$	σ	ρ^2	ρ	1

$\sigma(\rho\sigma) = (\sigma\rho)\sigma = (\rho^2\sigma)\sigma = \rho^2(\sigma\sigma) = \rho^2$

$\sigma(\rho^2\sigma) = (\sigma\rho^2)\sigma = (\rho\sigma)\sigma = \rho(\sigma\sigma) = \rho$

$(\rho\sigma)\rho = \rho(\sigma\rho) = \rho(\rho^2\sigma) = (\rho\rho^2)\sigma = \sigma$

$\langle 1 \rangle = \{1\}$.

$\langle \rho \rangle = \{1, \rho, \rho^2\}$.

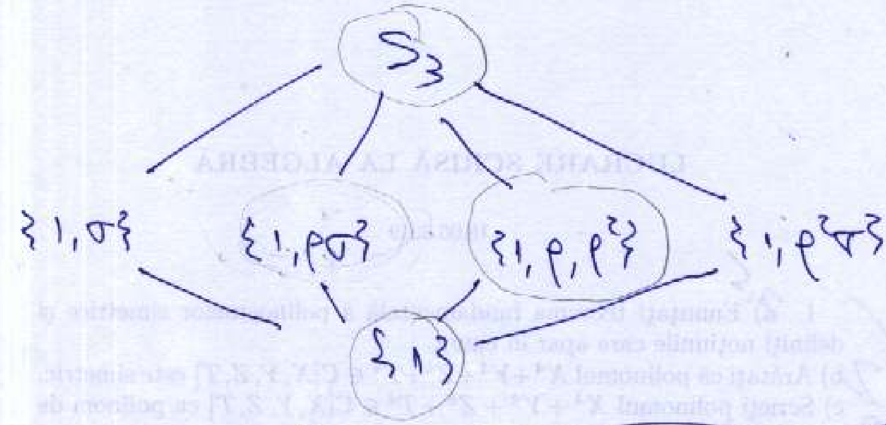
$\langle \rho^2 \rangle = \{1, \rho, \rho^2\}$.

$\langle \sigma \rangle = \{1, \sigma\}$

$\langle \rho\sigma \rangle = \{1, \rho\sigma\}$

$\langle \rho^2\sigma \rangle = \{1, \rho^2\sigma\}$.

Aşadar, laticea subgrupurilor lui S_3 este



CURS: Dacă $H \le G$, definim

$x \equiv_s y \pmod{H} \iff x^{-1}y \in H$

şi

$x \equiv_d y \pmod{H} \iff xy^{-1} \in H$

$\equiv_s$ şi $\equiv_d$ sunt rel. de echiv.;

$$(G/H)_s = \frac{G}{\equiv_s (\bmod H)}; \quad (G/H)_d = \frac{G}{\equiv_d (\bmod H)}$$

Considerăm $H_\sigma = \langle \sigma \rangle = \{1,\sigma\}$. $\rho\cdot\{1,\sigma\}$ $\rho^2\cdot\{1,\sigma\}$.

$$(G/H_\sigma)_s = \{\{1,\sigma\},\{\rho,\rho\sigma\},\{\rho^2,\rho^2\sigma\}\}$$

$$(G/H_\sigma)_d = \{\{1,\sigma\},\{\rho,\rho^2\sigma\},\{\rho^2,\rho\sigma\}\}$$

$\{1,\sigma\}\cdot\rho$ $\quad = \{1,\sigma\}\cdot\rho^2$.

Noi am calculat $(G/H_\sigma)_s$ şi $(G/H_\sigma)_d$ plecând doar de la definiţie. Pe de altă parte:

CURS: Dacă $H \le G$, iar $x \in G$, atunci

$$\frac{*}{\equiv_s (\mathrm{mod}\, H)} = *H \text{ și } \frac{*}{\equiv_d (\mathrm{mod}\, H)} = H* .$$

Hai să le vedem la treabă:

$H_\rho \overset{not}{=} \langle \rho \rangle = \{1, \rho, \rho^2\}$.

Atunci:

$$\left(\frac{G}{H_\rho}\right)_s = \{1 \cdot \{1, \rho, \rho^2\}, \sigma \{1, \rho, \rho^2\}\}$$

$$= \{\{1, \rho, \rho^2\}, \{\sigma, \rho^2\sigma, \rho\sigma\}\}$$

$$\left(\frac{G}{H_\rho}\right)_d = \{\{1, \rho, \rho^2\} \cdot 1, \{1, \rho, \rho^2\} \cdot \sigma\}$$

$$= \{\{1, \rho, \rho^2\}, \{\sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma\}\}.$$

Curs: Pentru orice grup G și orice $H \leq G$, $|(G/H)_s| = |(G/H)_d| \overset{not}{=} |G:H|$

Acest nr. (cardinal) s.n. INDICELE LUI H ÎN G.

$\boxed{T}$ (Lagrange) $|G| = |H| \cdot |G:H|$

	$\{1, \rho, \rho^2\}$	$\{\sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma\}$
$\{1, \rho, \rho^2\}$	$\{1, \rho, \rho^2\}$	$\{\sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma\}$
$\{\sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma\}$	$\{\sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma\}$	$\{1, \rho, \rho^2\}$.

Dacă - am, lua $(G/H_\sigma)_s$:

$\{\rho, \rho\sigma\} \cdot \{\rho^2, \rho^2\sigma\} = \{1, \sigma, \rho^2\sigma, \rho^2\}$

Dacă $\forall x \in G \quad xH = Hx$

atunci în $(G/H)_s$ avem

$\boxed{(xH) \cdot (yH)} = x(Hy)H = x(yH)H = (xy)(HH) = \boxed{(xy)H}$

Curs: Fie G un grup și $H \leq G$. Spunem că H e SUBGRUP NORMAL $\boxed{\text{al lui } G}$ dacă e îndeplinită una din următoarele condiții echivalente:

(i) $(G/H)_s = (G/H)_d$

(ii) $\forall x \in G \quad xH = Hx$

(iii) $\forall x \in G \quad xHx^{-1} = H$

(iv) $\forall x \in G \quad xHx^{-1} \subset H$

NOTĂM $H \trianglelefteq G$

Cu această definiție, analizând cele discutate mai devreme constatăm că:

$\{1, \rho, \rho^2\} \trianglelefteq S_3$,

dar

$\{1, \sigma\} \not\trianglelefteq S_3$.

1: Cum recunoaștem subgrupuri normale? 7

R: (parțial):

1) Cu definiția.

2) Dacă G e comutativ, orice subgrup al său e normal

0) $\{e\} \trianglelefteq G$ și $G \trianglelefteq G$

3) Orice subgrup de indice 2 e normal.

$$\sigma \cdot \{1, \rho\sigma\} = \{\sigma, \rho^2\}$$
$$\neq$$
$$\{1, \rho\sigma\} \cdot \sigma = \{\sigma, \rho\}$$

Deci, $\{1, \rho\sigma\} \ntrianglelefteq S_3$.

$$\sigma \cdot \{1, \rho^2\sigma\} = \{\sigma, \rho\}$$
$$\neq$$
$$\{1, \rho^2\sigma\} \cdot \sigma = \{\sigma, \rho^2\}$$

Deci, $\{1, \rho^2\sigma\} \ntrianglelefteq S_3$.

Ca urmare, laticea subgrupurilor normale ale lui S_3 este

$$\begin{array}{c} S_3 \\ | \\ \{1, \rho, \rho^2\} \\ | \\ \{1\} \end{array}$$

utilitatea (excepțională!) a subgrupurilor normale este aceea că, dacă $H \trianglelefteq G$,

pe $(G/H)_s$, operația $(xH)\cdot(yH) = (xy)H$

mai scurt notată $\left(\hat{x}\cdot\hat{y} = \widehat{xy}\right)$

(e corect definită și)

$((G/H)_s, \cdot)$ este grup.

El se notează $\frac{G}{H}$ și s.n. GRUPUL FACTOR al lui G în raport cu H

Deci:

$G/H = \{xH : x \in G\}$ $= \{\hat{x} : x \in G\}$

cu operația

$(xH)\cdot(yH) = \underline{(xy)}H$ $\hat{x}\cdot\hat{y} = \widehat{xy}$