(1) 19.10.23

SEMINAR 3 - 133

Pe $\mathbb{C}^*$ considerăm relația

$$z \sim w \overset{def}{\iff} \frac{z}{|z|} = \frac{w}{|w|}.$$

Arătați că există o bijecție

$$\varphi : \frac{\mathbb{C}^*}{\sim} \longrightarrow S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$$

Sol 1: Fie $z \in \mathbb{C}^*$.

Atunci, pt $w \in \mathbb{C}^*$

$w \sim z \iff$

$$\frac{w}{|w|} = \frac{z}{|z|} \iff |z|w = |w|z \quad (1)$$

Punând $z = a+ib$ și $w = x+iy$,

$$(1) \iff \sqrt{a^2+b^2}\,(x+iy) = \sqrt{x^2+y^2}\,(a+ib)$$

$$\iff \begin{cases} x\sqrt{a^2+b^2} = a\sqrt{x^2+y^2} \\ y\sqrt{a^2+b^2} = b\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \quad (2)$$

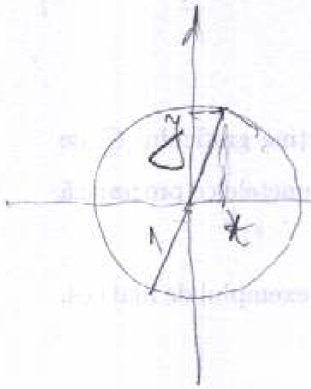
Dacă $b=0$, obținem $y=0$ (deci $z, w \in \mathbb{R}$)

și $x|a| = a|x| \iff \left|\frac{x}{a}\right| = \frac{x}{a} \iff x \in a\mathbb{R}_+^* = \begin{cases} \mathbb{R}_+^*, & a>0 \\ \mathbb{R}_-^*, & a<0 \end{cases}$

$w \in z\mathbb{R}_+^*$

CUBNĂ

S^1

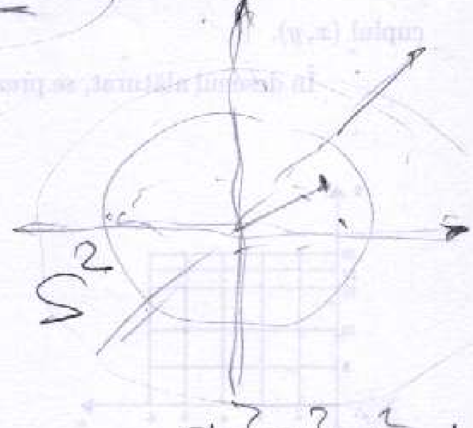


$x^2+y^2=1$

Diagrama carteziană

Pentru a marca faptul că perechea (x,y) din A × B aparține graficului ... se notează în diagrama produsului cartezian A × B, un cerc "plin" în punctele ... cuplul (x,y).

În desenul alăturat, se prezintă diagrama carteziană pentru exemplul ...



S^2

$x^2+y^2+z^2=1$

Diagrama cu săgeți

În diagrama cu "săgeți", mulțimea de plecare A și mulțimea de sosire B ... desenate una lângă alta. Dacă cuplul (x,y) al produsului A × B aparține graficului ... relației, se unește printr-o săgeată elementul x din A cu elementul y din B. ... astfel o reprezentare grafică a relației, numită diagrama cu săgeți.

$$S^{n-1}=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i^2=1\}$$

$z\ N\ i \iff$

$$\frac{z}{|z|}=\frac{i}{|i|} \iff \frac{z}{|z|}=i \iff$$

O categorie importantă în mulțimea relațiilor de la o mulțime nevidă A la o mulțime nevidă B, o reprezintă acele relații care asociază oricărui element din A un ... element din B. Astfel de relații numim relații funcționale sau funcții.

$z=i|z|$. (1) Luând $z=a+bi$,

Definiția 3.2.5. Fie A și B două mulțimi nevide. Spunem că am definit o funcție pe mulțimea A cu valori în B dacă printr-un procedeu oarecare facem ca fiecărui element $x \in A$ să îi corespundă un singur element $y \in B$.

$$(1) \iff a+bi=i\sqrt{a^2+b^2} \iff$$

Notație: O funcție definită pe A cu valori în B se notează $f : A \to B$ (citim: f definită pe A cu valori în B). Uneori o funcție se notează simbolic $A \to B$, $x \to y = f(x)$ (citim ... de x), unde y este imaginea elementului x din A prin funcția f sau încă valoarea funcției ... Elementul x se numește argumentul funcției sau variabila ...

$$\begin{cases}a=0\\ b=\sqrt{a^2+b^2}\end{cases} \iff \begin{cases}a=0\\ b=\sqrt{b^2}\end{cases} \iff \begin{cases}a=0\\ b=|b|\end{cases} \iff$$

$$\begin{cases}a=0\\ b\in\mathbb{R}_+^*\end{cases} \iff z\in\mathbb{R}_+^* i$$

Deci $b \neq 0$, (2) $\Rightarrow$ ($y \neq 0$!!)

$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$

$a = 0 \Rightarrow x = 0$!! obținem $w \in z\mathbb{R}_+^*$

$a \neq 0$

$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \overset{not}{=} \lambda \in \mathbb{R}^*$ (3)

Revenind în (2), obținem

$a\lambda\sqrt{a^2+b^2} = a\sqrt{(a\lambda)^2+(b\lambda)^2} \Leftrightarrow$

$a\lambda\sqrt{a^2+b^2} = a|\lambda|\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow |\lambda| = \lambda \Leftrightarrow$

$\left.\begin{array}{l}\lambda \in \mathbb{R}_+^* \\ (3)\end{array}\right\} \Rightarrow w = \lambda z$

Reciproc, dacă $w = \lambda z$, atunci

$\frac{w}{|w|} = \frac{\lambda z}{|\lambda z|} \overset{\lambda \in \mathbb{R}_+^*}{=} \frac{\lambda z}{\lambda |z|} = \frac{z}{|z|}$, deci

$w \sim z$.

Ca urmare, $\hat{z} = \{\lambda z : \lambda \in \mathbb{R}_+^*\} = z\mathbb{R}_+^*$,

deci

$\mathbb{C}^*/_{\sim} = \{z\mathbb{R}_+^* : z \in \mathbb{C}^*\}$.

Considerăm $\varphi : \mathbb{C}^*/_{\sim} \to S^1$

$\varphi(z\mathbb{R}_+^*) = \left(\frac{\mathrm{Re}\, z}{|z|}, \frac{\mathrm{Im}\, z}{|z|}\right)$.

Obs: Dacă $z_{1,2} \in \mathbb{C}^*$ sunt așa încât $z_1\mathbb{R}_+^* = z_2\mathbb{R}_+^*$, atunci, de mai sus, $\frac{z_1}{|z_1|} = \frac{z_2}{|z_2|} \Leftrightarrow$

$$\frac{\operatorname{Re} z_1}{|z_1|} + i\frac{\operatorname{Im} z_1}{|z_1|} = \frac{\operatorname{Re} z_2}{|z_2|} + i\frac{\operatorname{Im} z_2}{|z_2|} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\operatorname{Re} z_1}{|z_1|}, \frac{\operatorname{Im} z_1}{|z_1|}\right) = \left(\frac{\operatorname{Re} z_2}{|z_2|}, \frac{\operatorname{Im} z_2}{|z_2|}\right)$$

Ca urmare, φ e corect definită.

Definesc $f : S^1 \to \mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+^*$,

$$f((a,b)) = (a+ib)\mathbb{R}_+^*$$

Atunci: $f\circ\varphi : \mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+^*$,

$$(f\circ\varphi)(z\mathbb{R}_+^*) = f(\varphi(z\mathbb{R}_+^*)) =$$

$$= f\left(\left(\frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}\right)\right) = \left(\frac{\operatorname{Re} z}{|z|} + i\frac{\operatorname{Im} z}{|z|}\right)\mathbb{R}_+^* \quad (10)$$

Dar $\dfrac{\frac{\operatorname{Re} z}{|z|} + i\frac{\operatorname{Im} z}{|z|}}{\left|\frac{\operatorname{Re} z}{|z|} + i\frac{\operatorname{Im} z}{|z|}\right|} = \dfrac{\frac{z}{|z|}}{\left|\frac{z}{|z|}\right|} = \dfrac{\frac{z}{|z|}}{\frac{|z|}{|z|}} = \frac{z}{|z|}$,

deci $\frac{\operatorname{Re} z}{|z|} + i\frac{\operatorname{Im} z}{|z|} \sim z$, deci $(10) = z\mathbb{R}_+^*$ (11)

Ca urmare, $\varphi \circ \psi = 1_{\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+^*}$.

$\psi \circ \varphi : S^1 \to S^1$,

$\psi\circ\varphi((a,b)) = \psi(\varphi((a,b))) =$

$= \psi((a+bi)\mathbb{R}_+^*) = \left(\frac{Re(a+bi)}{|a+bi|}, \frac{Im(a+bi)}{|a+bi|}\right)$

$= (a,b)$

Deci $\psi\varphi = 1_{S^1}$ (12)

(11)(12) $\Rightarrow$ $\varphi = \psi^{-1}$, deci ψ e inversabilă

deci ψ e bijectivă.

PUMF: Dacă ρ e r.e. pe M, $\pi : M \to \frac{M}{\rho}$ e proiecția canonică

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & \frac{M}{\rho} \arrow[d, "u"] \\ & S \end{tikzcd}$$

iar $f : M \to S$ e o funcție cu propr $\rho \subseteq \rho_f$, atunci există o funcție $u : \frac{M}{\rho} \to S$ cu propr $u \circ \pi = f$

Soluția 2

Considerăm funcția

$f : \mathbb{C}^* \to S^1$, $f(z) = \left(\frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}\right)$.

Cum $\left(\frac{\operatorname{Re} z}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Im} z}{|z|}\right)^2 = 1$, f e corect def.

În plus, date fiind $z, w \in \mathbb{C}^*$,

$z \rho w \iff \frac{z}{|z|} = \frac{w}{|w|} \Rightarrow$

$\frac{\operatorname{Re} z}{|z|} + i \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} = \frac{\operatorname{Re} w}{|w|} + i \frac{\operatorname{Im} w}{|w|} \iff$

$\left(\frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}\right) = \left(\frac{\operatorname{Re} w}{|w|}, \frac{\operatorname{Im} w}{|w|}\right) \iff$

$\Rightarrow f(z) = f(w)$, deci $z \rho_f w$.

Ca urmare, $\rho \subset \rho_f$. (30)

Conform Prop. de Univ. a Mulțimii Factor, există $u : \frac{\mathbb{C}^*}{\sim} \to S^1$ așa încât

$u(\hat{z}) = u(\pi(z)) = f(z) = \left(\frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}\right)$ (40)

Fie $(a,b)\in S^1$.

Atunci $f(a+ib) = \left(\frac{a}{|a+ib|}, \frac{b}{|a+ib|}\right) = (a,b)$.

Deci f e surjectivă.

Cf. PUMF, și u e surjectivă. (41)

Fie $z, w \in \mathbb{C}^*$ astfel ca $z \rho_f w$.

Atunci $f(z) = f(w)$, adică

$$\left(\frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}\right) = \left(\frac{\operatorname{Re} w}{|w|}, \frac{\operatorname{Im} w}{|w|}\right),$$

de unde $\frac{\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z}{|z|} = \frac{\operatorname{Re} w + i \operatorname{Im} w}{|w|}$,

adică $\frac{z}{|z|} = \frac{w}{|w|}$, adică $z \rho w$.

Ca urmare, $\rho_f \subset \rho$. (31)

(30), (31) $\Rightarrow \rho_f = \rho$

Conform PUMF, u e și injectivă (42)

Din (40), (41), (42) $\Rightarrow$ obținem existența bijecției.

Deci u de la $\mathbb{C}^*/\sim$ la S^1.