1

14.12.23

SEMINAR 10 _ 133

CURS: Def SUBINEL al unui inel $(R,+,\cdot)$ = submulțime nevidă S a lui R cu proprietățile:

1) $\forall x,y \in S \quad x-y \in S$ → totodată asta e fix ce înseamnă că $S \leq (R,+)$

2) $\forall x,y \in S \quad xy \in S$.

exemple: • Subinelele lui $\mathbb{Z}$ sunt cele din mulțimea $\{n\mathbb{Z} : n \in \mathbb{N}\}$.

• Tot ele sunt și subinele ale lui $\mathbb{Q}$.
Dar $\mathbb{Q}$ are și alte subinele!

d. ex: • $\mathbb{Q}$

• $\left\{ \frac{a}{2^k} : a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \right\}$.

• Cele de mai sus sunt (toate) subinele ale lui $\mathbb{R}$.
Dar $\mathbb{R}$ are și (multe!) alte subinele!

d. ex: $\mathbb{R}$; $\{a+b\sqrt{3} : a,b \in \mathbb{Z}\}$

$\{a+b\sqrt{3} : a,b \in \mathbb{Q}\}$

• Cele de mai sus sunt (și) subinele ale lui $\mathbb{C}$,
Dar $\mathbb{C}$ are și (multe!) alte subinele!

d. ex: $\mathbb{C}$; $\{a+bi\sqrt{3} : a,b \in \mathbb{Z}\}$; $\{a+bi\sqrt{3} : a,b \in \mathbb{Q}\}$

[CURS] Orice subinel e inel la rândul lui ÎN RAPORT cu OPERAȚIILE INDUSE!

În contextul inelelor, există un tip de substructură care „ne place mai mult" decât subinelul: (2)

$\boxed{\text{CURS}}$: Fie $(R,+,\cdot)$ un inel și $I \subset R$, $I \neq \emptyset$

Spunem că I este:

- IDEAL STÂNG al lui R dacă: • $\forall x,y \in I$ $x-y \in I$
  NOT: $\leq^{s}$ • $\forall a \in R$ $\forall x \in I$ $ax \in I$

- IDEAL DREPT al lui R dacă: • $\forall x,y \in I$ $x-y \in I$
  NOT: $\leq^{d}$ • $\forall a \in R$ $\forall x \in I$ $xa \in I$

- IDEAL BILATERAL al lui R dacă I e și ideal stâng, și ideal drept al lui R.
  NOT: $\trianglelefteq$

Exemple: • Idealele lui $\mathbb{Z}$ sunt cele din mulțimea $\{n\mathbb{Z} : n \in \mathbb{N}\}$.

- Singurele ideale ale lui $\mathbb{Q}$ sunt $\{0\}$ și $\mathbb{Q}$
- ——"—— $\mathbb{R}$ ——"—— $\mathbb{R}$
- ——"—— $\mathbb{C}$ ——"—— $\mathbb{C}$.

↳ Sunt cazuri particulare ale următoarelor tipuri de considerații:

CURS: $\boxed{\text{Prop}}$ Dacă idealul stâng/drept I al lui R conține un element inversabil la stânga/la dreapta, atunci $I=R$

Dem: Dacă $a \in I$ și a e inversabil la stg, fie b un invers la stânga al lui a.
Fie $c \in R$. Atunci $c = c \cdot 1 = c(ba) = (cb)a \in I$

Corolar Dacă $(K,+,\cdot)$ e corp, atunci singurele ideale ale lui K sunt $\{0\}$ și K.

- idealele lui $\mathbb{Z}_n$ sunt cele din mulțimea $\{\hat{d}\cdot\mathbb{Z}_n : d \mid n\}$.

Dem: Obs: Orice ideal al unui inel R este subinel al lui R.

Deci: Orice ideal al unui inel e inel în raport cu operațiile induse.

Consecință: • Subinelele lui $\mathbb{Z}_n$ sunt (toate) cele din mulțimea $\{\hat{d}\cdot\mathbb{Z}_n : d \mid n\}$.

Fie R un inel comutativ și unitar.

Punem $I = \left\{\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} : x, y \in R\right\} \subset \mathcal{M}_2(R)$

(evident, $I \neq \emptyset$)

Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & z \\ 0 & w \end{pmatrix} \in I$. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ax+by \\ 0 & cx+dy \end{pmatrix}$

Atunci $A - B = \begin{pmatrix} 0 & x-z \\ 0 & y-w \end{pmatrix} \in I$.

Fie $U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(R)$, $A = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \in I$.

Atunci $UA = \begin{pmatrix} 0 & \alpha x + \beta y \\ 0 & \gamma x + \delta y \end{pmatrix} \in I$.

Ca urmare, $I \le^{s} \mathcal{M}_2(R)$

Observăm că $\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}_{\substack{\cap \\ I}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}}_{\substack{\cap \\ M_2(\mathbb{R})}} = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \notin I$.

Ca urmare, $I \not\trianglelefteq M_2(\mathbb{R})$.

$\boxed{TD}$ Considerăm $I = \left\{ \begin{pmatrix}2a & 2b\\ 2c & 2d\end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}$.

Arătați că $I \trianglelefteq M_2(\mathbb{Z})$.

OPERAȚII CU IDEALE

- Dacă intersectăm două ideale de același tip ale unui inel, obținem un ideal de acel tip.

În contextul lui $\mathbb{Z}$ rezultatul e mai precis:

$m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$ = (mult. multiplilor de m) $\cap$ (mult. multiplilor de n) = mult. multiplilor comuni ai lui m și n = $[m,n]\mathbb{Z}$.

- Dacă reunim două ideale, rezultatul rareori e ideal

$I, J \trianglelefteq R$. $K \overset{not}{=}$ „cel mai mic" ideal ce conține $I \cup J$

$\underset{I}{a}+\underset{J}{b}-(\underset{I}{a'}+\underset{J}{b'}) = \underbrace{(a-a')}_{I}+\underbrace{(b-b')}_{J}$; pt $a \in R$, $x \in I$, $y \in J$

$a(x+y) = \overset{\in I}{ax}+ay \in J$

Deci, $K \supseteq \{x+y : x \in I \wedge y \in J\}$.

Ca urmare, idealul „cel mai apropiat" de $I \cup J$ este $I+J$

- **Suma** idealelor I și J (de același tip!) ale lui $(R,+,\cdot)$ = idealul (de același tip!)

$$I+J = \{x+y : x \in I \wedge y \in J\}$$

Din nou, în cazul lui $\mathbb{Z}$ lucrurile pot fi prezentate mult mai precis:

$$m\mathbb{Z}+n\mathbb{Z} = \{\mu m+\nu n : \mu,\nu \in \mathbb{Z}\}$$
$$= (m,n)\cdot\mathbb{Z}.$$