①

SEMINAR 1 132

03.10.23

1. Determinați mulțimea

$$A = \left\{ a \in \mathbb{Z} : \frac{a^2+15}{3a-3} \in \mathbb{Z} \right\}$$

ÎNTOTDEAUNA demonstrația egalității a două mulțimi se face prin DUBLĂ INCLUZIUNE !!

Sol: Fie $a \in A$. Atunci $a \in \mathbb{Z}$ și

$$\frac{a^2+15}{3a-3} \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow \frac{3a^2+45}{3a-3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{3a^2-3}{3a-3} + \frac{48}{3a-3} \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow a+1 + \frac{48}{3a-3} \in \mathbb{Z} \overset{a \in \mathbb{Z}}{\Longleftrightarrow} \frac{48}{3a-3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\frac{16}{a-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a-1 \mid 16 \Leftrightarrow$$

$$a \in \{-15, -7, -3, -1, 0, 2, 3, 5, 9, 17\} \overset{not}{=} B \quad (2)$$

Până aici am arătat (corect) că $A \subset B$.

$$\text{Dar } \frac{a^2+15}{3a-3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3 \mid a^2+15 \xrightarrow{3 \mid 15} 3 \mid a^2 \xrightarrow{3 \text{ e prim}} 3 \mid a \quad (2) \Big\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \in \{-15, -3, 0, 3, 9\}$$

~~corect~~ Până aici am arătat $A \subset \{-15, -3, 0, 3, 9\}$

$$\frac{(-15)^2+15}{3\cdot(-15)-3}=\frac{15\cdot 16}{3\cdot(-16)}=-5\in\mathbb{Z}, \text{ deci } -15\in A$$

$$\frac{(-3)^2+15}{3\cdot(-3)-3}=\frac{24}{-3\cdot 4}=-2\in\mathbb{Z}, \text{ deci } -3\in A$$

$$\frac{0^2+15}{3\cdot 0-3}=-5\in\mathbb{Z}, \text{ deci } 0\in A.$$

$$\frac{3^2+15}{3\cdot 3-3}=\frac{24}{6}=4\in\mathbb{Z}, \text{ deci } 3\in A$$

$$\frac{9^2+15}{3\cdot 9-3}=\frac{96}{3\cdot 8}=4\in\mathbb{Z}, \text{ deci } 9\in A.$$

Observați: Aici Am verificat a 2-a incluziune!

Ca urmare, $A=\{-15,-3,0,3,9\}$.

2. Determinați mulțimea

$$A=\left\{a\in\mathbb{R} : \exists x\in\mathbb{R}\ \ a=\frac{2x+3}{x^2+x+2}\right\}$$

Sol: Fie $a\in\mathbb{R}$. Atunci

$$a\in A \Leftrightarrow \left(\exists x\in\mathbb{R}\ \ a=\frac{2x+3}{x^2+x+2}\right) \xLeftrightarrow[x^2+x+2\neq 0]{\forall x\in\mathbb{R}}$$

$$\left(\exists x\in\mathbb{R}\ \ ax^2+ax+2a=2x+3\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\exists x\in\mathbb{R}\ \ ax^2+(a-2)x+2a-3=0\right) \Leftrightarrow$$

$$(a-2)^2-4a(2a-3)\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$-7a^2+8a+4\geq 0 \Leftrightarrow 7a^2-8a-4\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$a\in\left[\frac{4-2\sqrt{11}}{7}, \frac{4+2\sqrt{11}}{7}\right]$$

Ca urmare,

$$A = \left[\frac{4-2\sqrt{11}}{7}, \frac{4+2\sqrt{11}}{7}\right]$$

---

(2) Arătați că pentru orice două mulțimi A și B are loc relația

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$$

Dem: Fie o mulțime E care conține A și B.

Fie $x \in E$.

Atunci $x \in A \setminus (A \setminus B) \iff$

$x \in A \wedge x \notin A \setminus B \iff$

$x \in A \wedge \neg(x \in A \setminus B) \iff$

$x \in A \wedge \neg(x \in A \wedge x \notin B)$ (1)

$$(p \wedge \neg(p \wedge \neg q)) \iff (p \wedge q)$$

0	0	1	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1	0
1	0	0	1	1	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0	1	1	1

conform tabelei,

(1) $\iff (x \in A \wedge x \in B) \iff x \in A \cap B$

Ca urmare, $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$ ∎

4. Determinați funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad 3f(x)-5f(2-x)=4x+1.$$

4'. Determinați funcțiile $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ cu propr.

$$\forall x,y\in\mathbb{R}_+, \quad f(x)^2-f(x)f(y)+f(y)^2=\frac{x+y}{2}$$

Sol 4' Presupunem că există funcții f ca în enunț, fie f una din ele.

Fie $x\in\mathbb{R}_+$

Cf relației date

$$f(x)^2=f(x)^2-f(x)f(x)+f(x)^2=\frac{x+x}{2}=x,$$

deci $f(x)=\sqrt{x}$.

Dar $\sqrt{1}^2-\sqrt{1}\cdot\sqrt{0}+\sqrt{0}^2=1\neq\frac{1}{2}=\frac{1+0}{2}=\cancel{\frac{1+0}{2}}$,

$f(1)^2-f(1)f(0)+f(0)^2$

Ca urmare, nu există funcții cu propr. din enunț. $\square$

Sol 4: Presupunem că există funcții ca în enunț, fie f una. (5)

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$

Atunci: $\begin{cases} 3f(\alpha) - 5f(2-\alpha) = 4\alpha + 1 \\ -5f(\alpha) + 3f(2-\alpha) = 9 - 4\alpha \end{cases}$,

din $f(\alpha) = -\frac{1}{16}\begin{vmatrix} 4\alpha+1 & -5 \\ 9-4\alpha & 3 \end{vmatrix} = \frac{8\alpha - 48}{16} = \frac{\alpha}{2} - 3$

Reciproc, considerăm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{2} - 3$

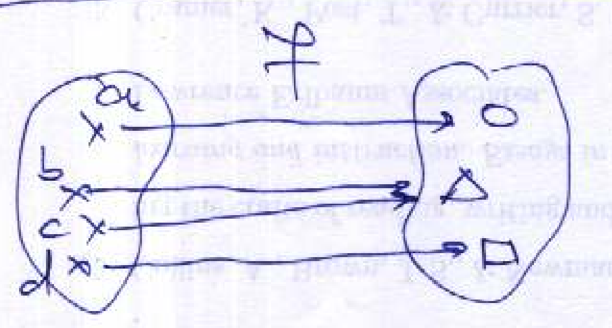
Fie $x \in \mathbb{R}$,

$3f(x) - 5f(2-x) = \frac{3x}{2} - 9 - 5\cdot\frac{2-x}{2} + 15 =$

$= \frac{3x}{2} + \frac{5x}{2} - 9 - 5 + 15 = 4x + 1$

deci f verifică condiția din enunț.

Ca urmare, singura funcție cu proprietatea din enunț este $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{2} - 3$.



$\boxed{\begin{array}{l} f(a) = o \quad f(b) = \Delta \\ f(\{a,b,c\}) = \{o, \Delta\} \\ f(\{c,d\}) = \{\Delta, \square\} \end{array}}$

$\{a,b,c\} = f^{-1}(\{o,\Delta\})$

$\{a,d\} = f^{-1}(\{o,\square\})$

$\{b,c,d\} = f^{-1}(\{\Delta,\square\})$