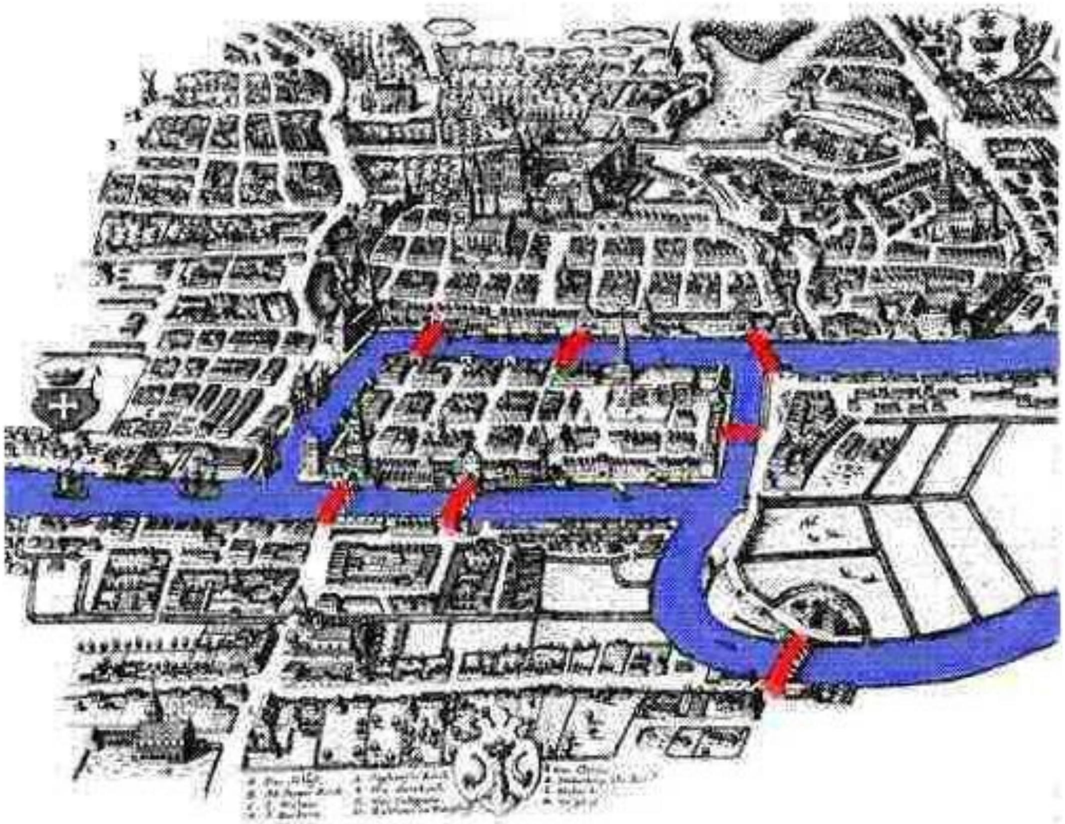
Grafuri euleriene

Istoric. Aplicații

– din cursul 1

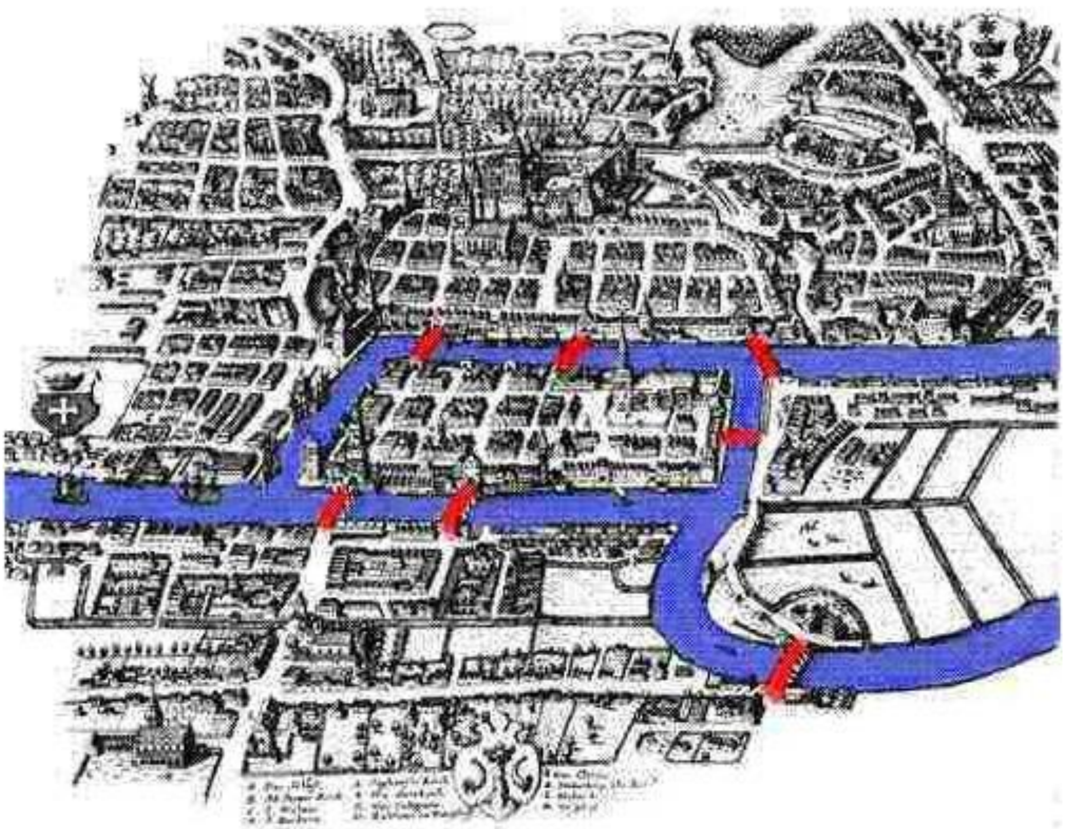
Problema celor 7 poduri din Königsberg

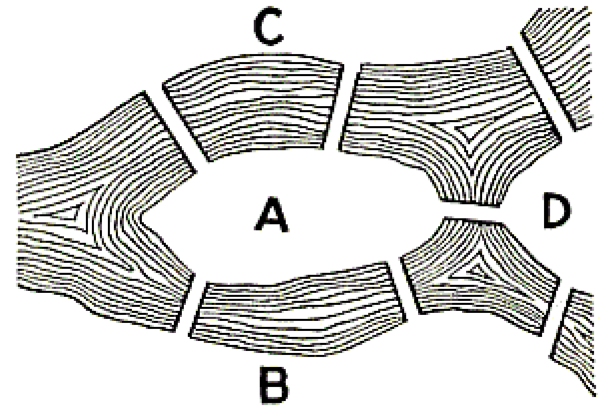


Este posibil ca un om să facă o plimbare în care să treacă pe toate cele 7 poduri o singură dată?

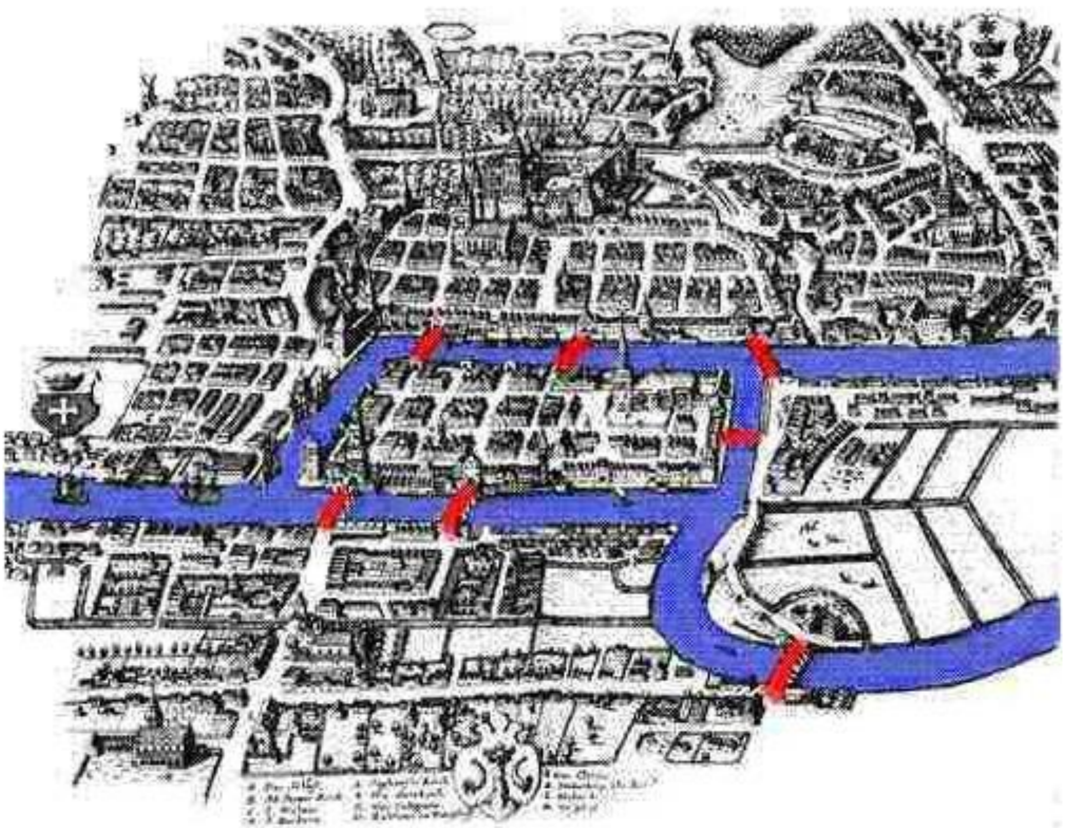
http://think-like-a-git.net/sections/graph-theory/seven-bridges-of-konigsberg.html

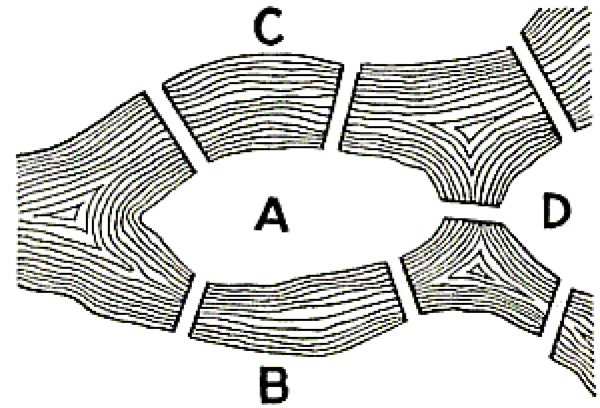
Problema celor 7 poduri din Königsberg



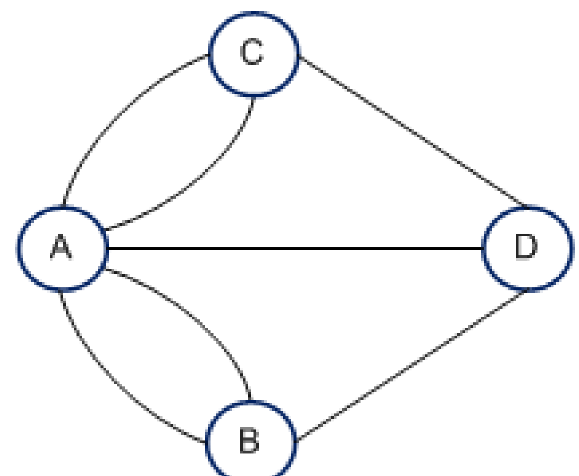


Problema celor 7 poduri din Königsberg

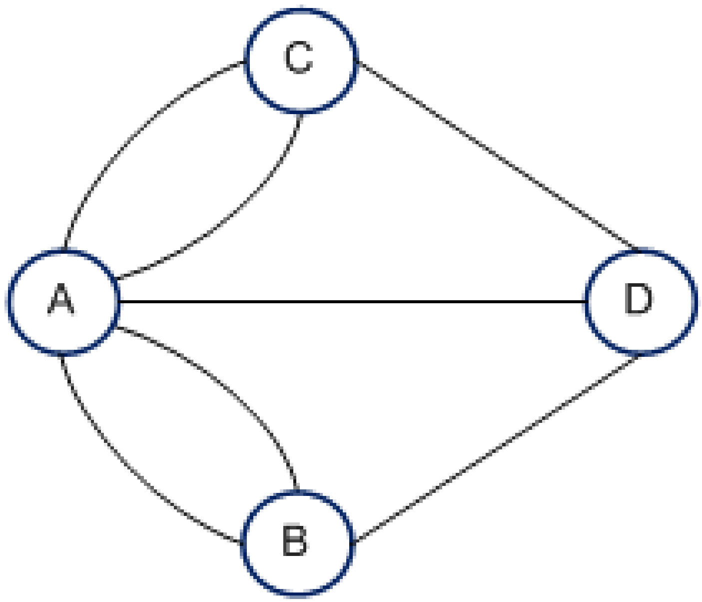




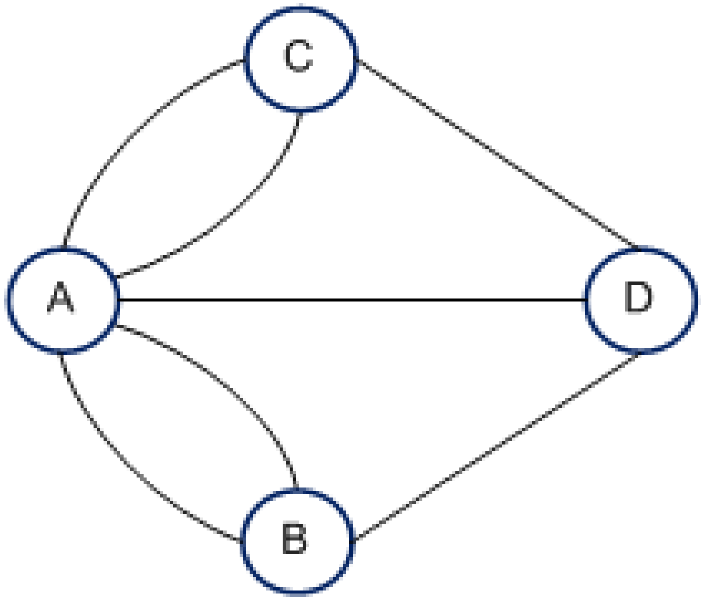
Modelare:

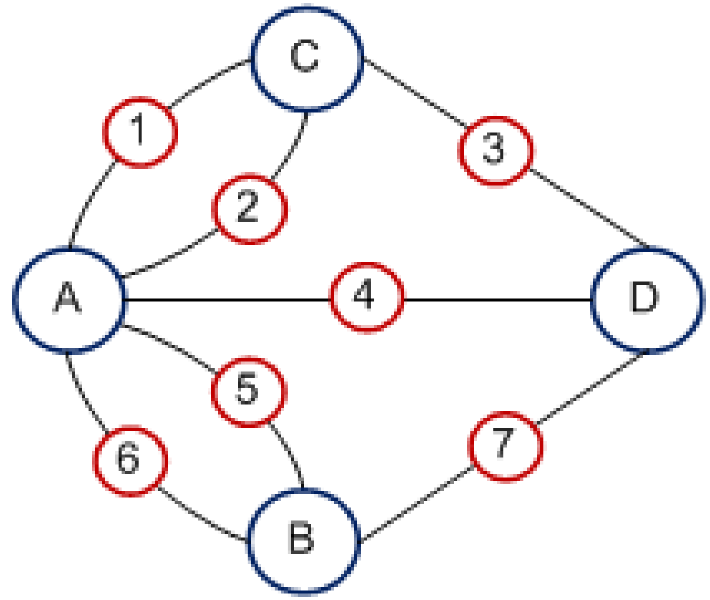


Problema celor 7 poduri din Königsberg



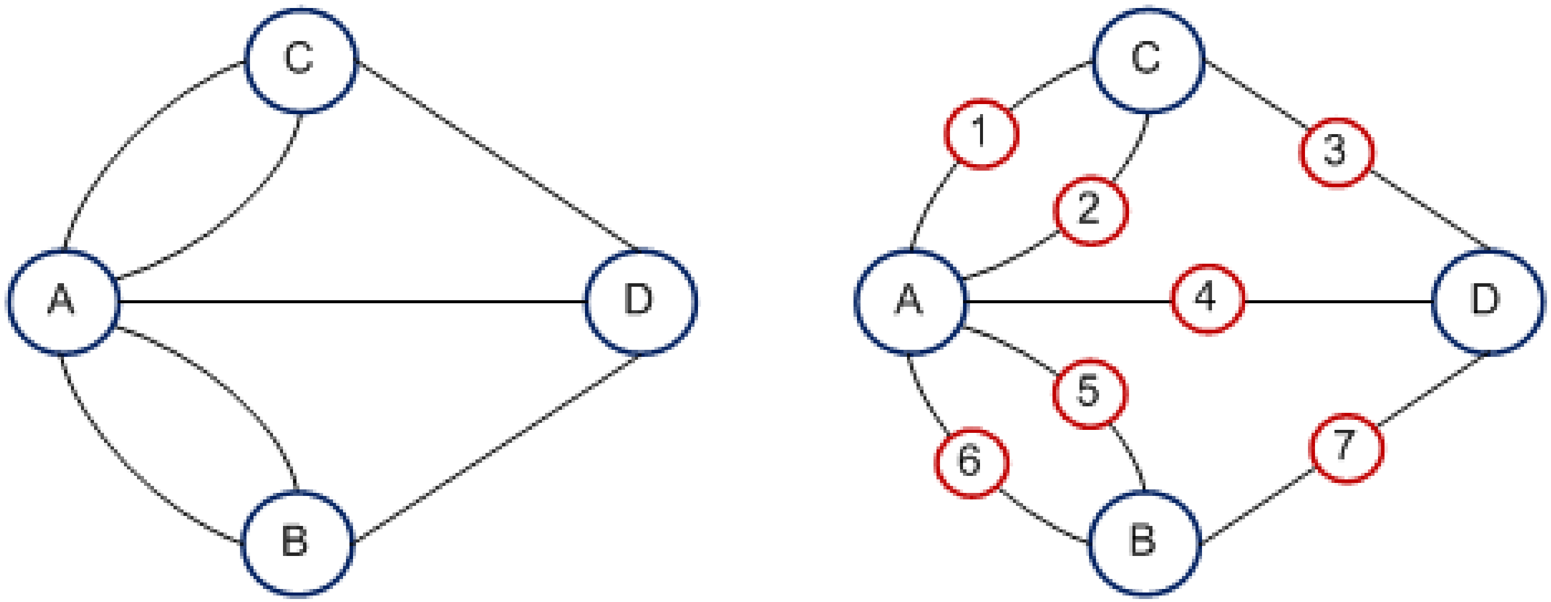
Problema celor 7 poduri din Königsberg





graf simplu

Problema celor 7 poduri din Königsberg



1736 – Leonhard Euler

Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis

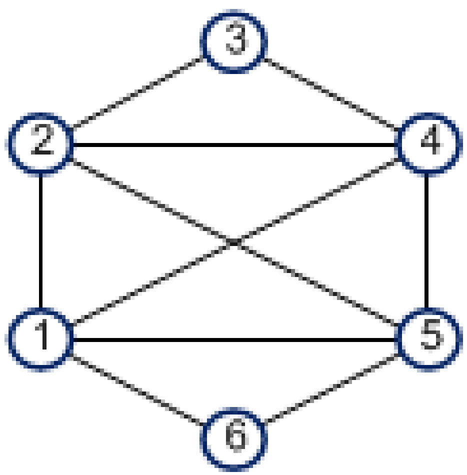
- **Ciclu eulerian** – traseu închis care trece o singură dată prin toate muchiile
- **Graf eulerian**

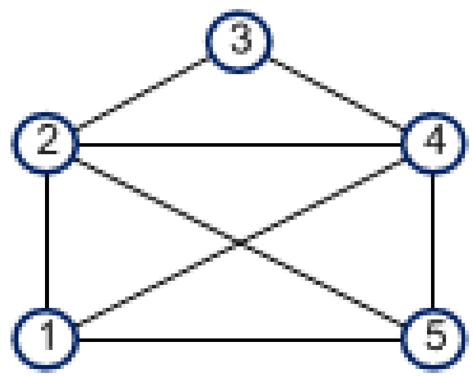
Problema celor 7 poduri din Königsberg

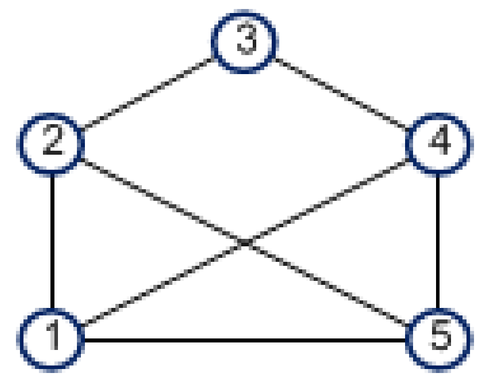
- **Interpretare**

Se poate desena diagrama printr-o curbă continuă închisă fără a ridica creionul de pe hârtie şi fără a desena o linie de două ori (în plus: să terminăm desenul în punctul în care l-am început)?

  - Tăierea unui material



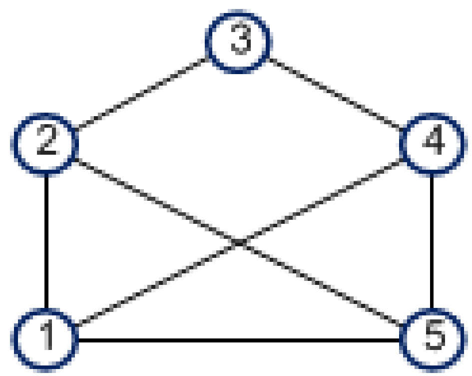




Problema celor 7 poduri din Königsberg

- **Interpretare**

  De câte ori (minim) trebuie să ridicăm creionul de pe hârtie pentru a desena diagrama?



Grafuri euleriene

Fie G graf neorientat

- **Ciclu eulerian** al lui G = ciclu C în G cu

$$E(C) = E(G)$$

- G e**ulerian** = conține un **ciclu** eulerian

- **Lanț eulerian** al lui G = lanț simplu P în G cu

$$E(P) = E(G)$$

Grafuri euleriene

Observație

– **Fie** $P=[v_1, \ldots, v_k]$ un lanț (nu neapărat elementar)

- Dacă $v_1 \neq v_k$, atunci vârfurile interne din P au gradul în P par, iar extremitățile au gradul în P impar
- Dacă $v_1 = v_k$, atunci toate vârfurile din P au gradul în P par

Grafuri euleriene

Lemă

Fie G=(V,E) un graf neorientat, **conex**, cu **toate vârfurile de grad par** și $E \neq \emptyset$.

Atunci pentru orice $x \in V$ există **un ciclu** C în G cu **$x \in V(C)$**

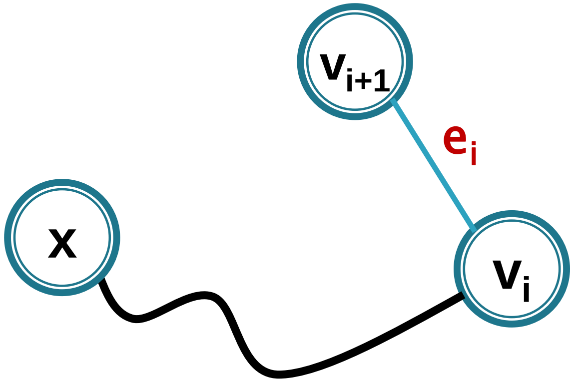
(**ciclu care conține x, nu neapărat eulerian, nici neapărat elementar**)

Grafuri euleriene

Demonstrație – Algoritm de determinare a unui ciclu care conține x:

- $i = 1$, $v_1 = x$
- $E(C) = \varnothing$
- Repetă

  până când $v_i = x$

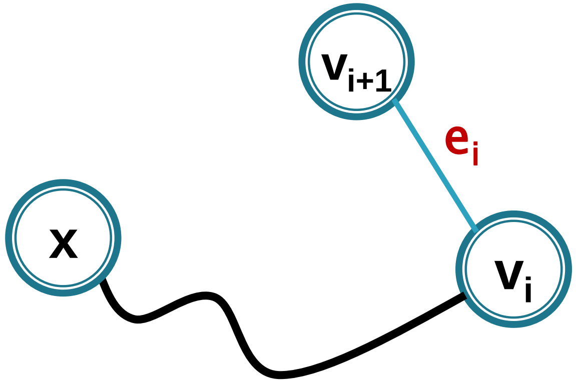


Grafuri euleriene

Demonstrație – Algoritm de determinare a unui ciclu care conține x:

- $i = 1$, $v_1 = x$
- $E(C) = \emptyset$
- Repetă
  - **selectează $e_i = v_i v_{i+1} \in E(G) - E(C)$**
  - **$E(C) = E(C) \cup \{e_i\}$**
  - **$i = i + 1$**

  până când $v_i = x$

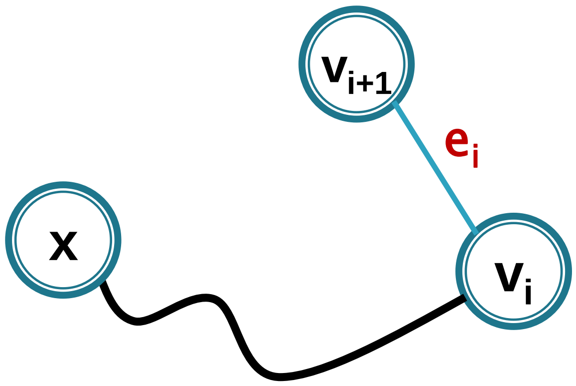


Grafuri euleriene

Demonstrație – Algoritm de determinare a unui ciclu care conține x:

- $i = 1$, $v_1 = x$
- $E(C) = \varnothing$
- Repetă
  - **selectează $e_i = v_i v_{i+1} \in E(G) - E(C)$**
  - **$E(C) = E(C) \cup \{e_i\}$**
  - **$i = i + 1$**

  până când $v_i = x$



Algoritmul este corect deoarece:

Grafuri euleriene

Demonstrație – Algoritm de determinare a unui ciclu care conține x:

- $i = 1$, $v_1 = x$
- $E(C) = \varnothing$
- Repetă
  - **selectează $e_i = v_i v_{i+1} \in E(G) - E(C)$**
  - **$E(C) = E(C) \cup \{e_i\}$**
  - **$i = i + 1$**

  până când $v_i = x$

Dacă $v_i \neq x$, atunci $d_C(v_i)$ este impar (cf. obs. Anterioare).

Din ipoteză, $d_G(v_i)$ este par, deci $d_{G-E(C)}(v_i) > 0$

$\Rightarrow$ muchia e_i există

Grafuri euleriene

Demonstrație – Algoritm de determinare a unui ciclu care conține x:

- $i = 1$, $v_1 = x$
- $E(C) = \varnothing$
- Repetă
  - selectează $e_i = v_i v_{i+1} \in E(G) - E(C)$
  - $E(C) = E(C) \cup \{e_i\}$
  - $i = i + 1$

  până când $v_i = x$

Dacă $v_i \neq x$, atunci $d_C(v_i)$ este impar (cf. obs. Anterioare).

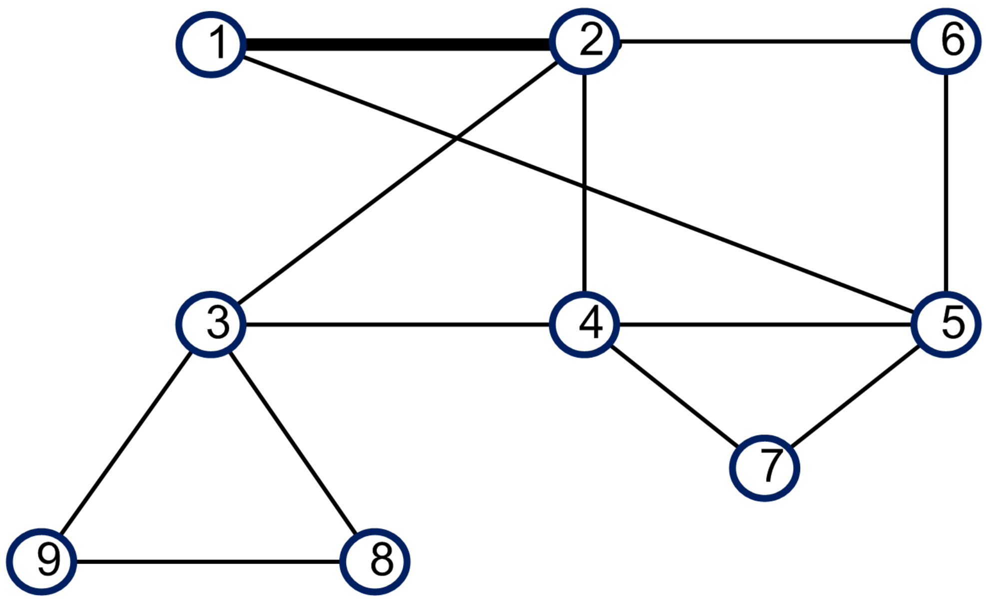
Din ipoteză, $d_G(v_i)$ este par, deci $d_{G-E(C)}(v_i) > 0$

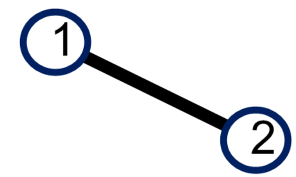
$\Rightarrow$ muchia e_i există

$|E(G)| < \infty$, deci algoritmul se termină (v_i ajunge egal cu x)

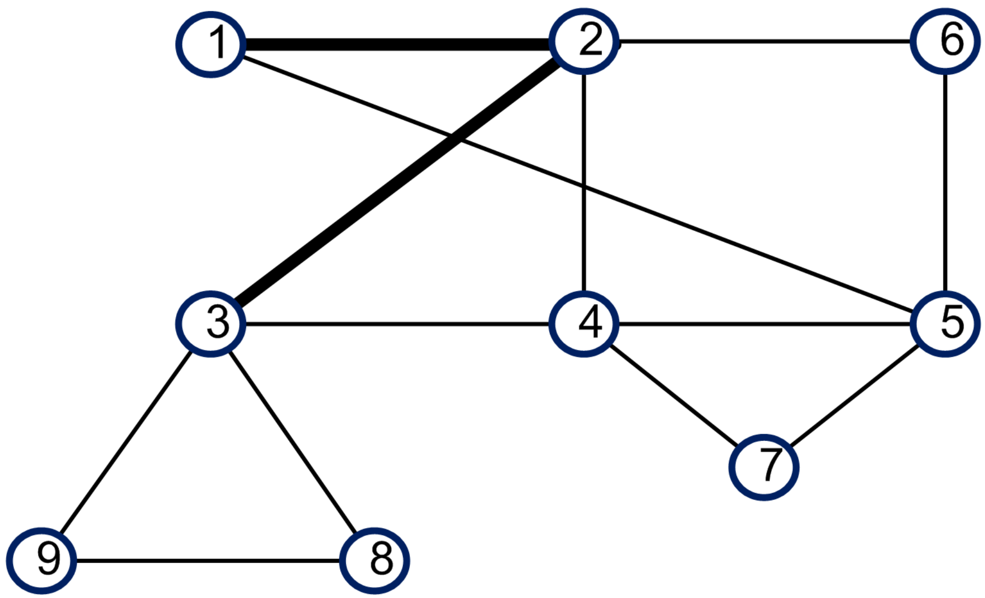
Grafuri euleriene

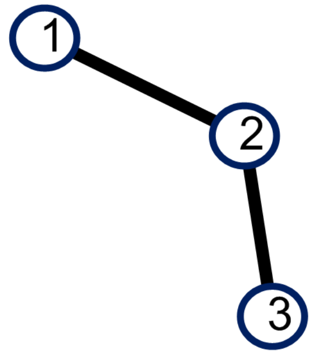
x=1



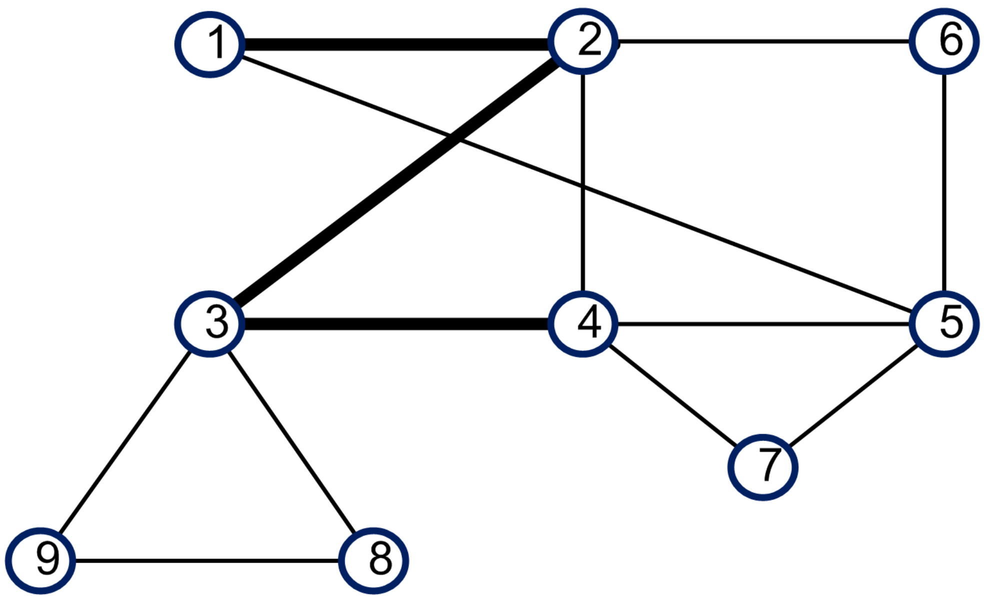


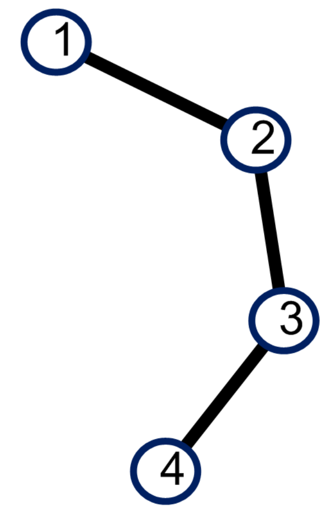
Grafuri euleriene



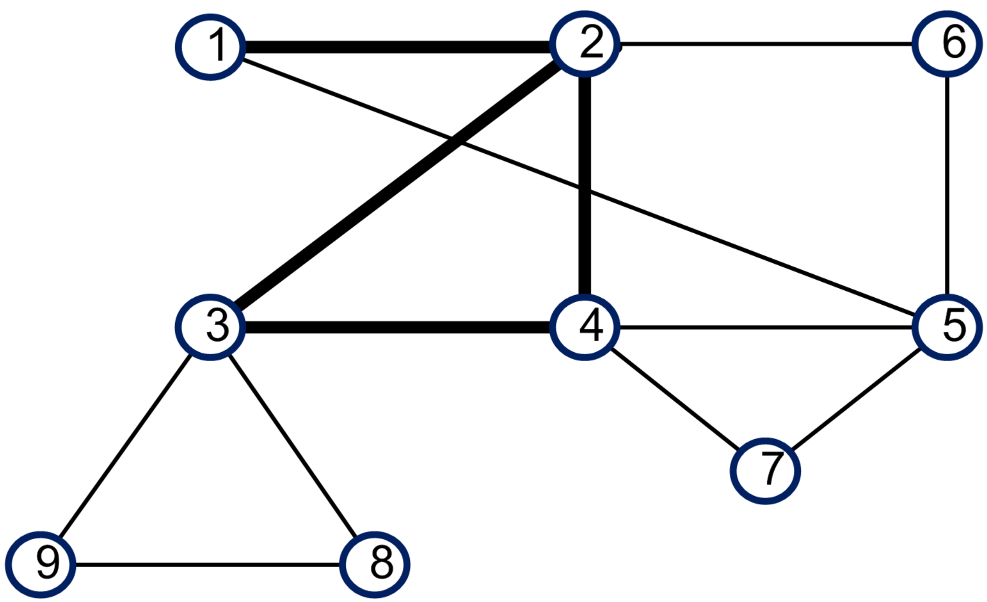


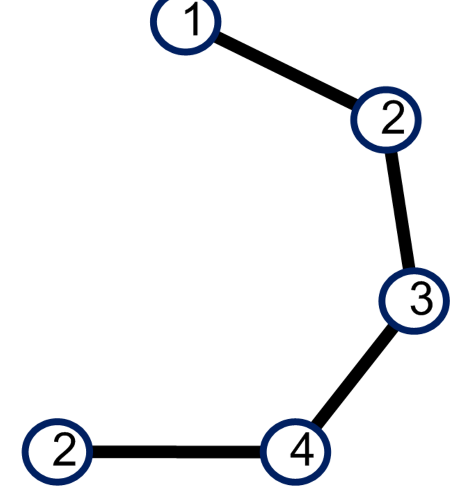
Grafuri euleriene



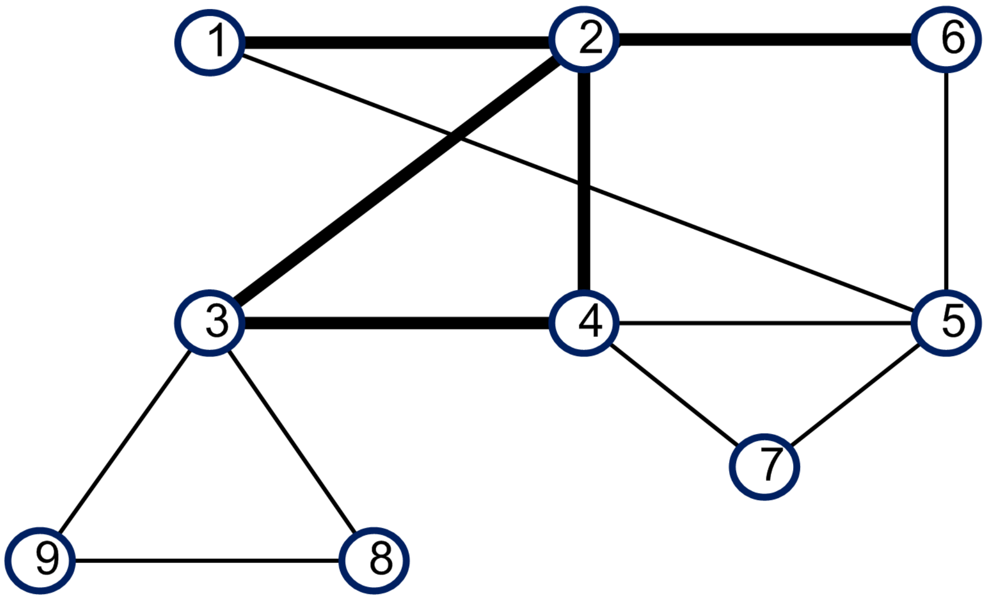


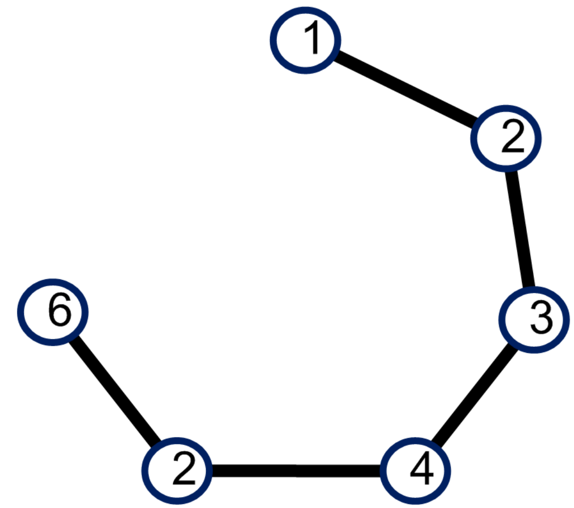
Grafuri euleriene



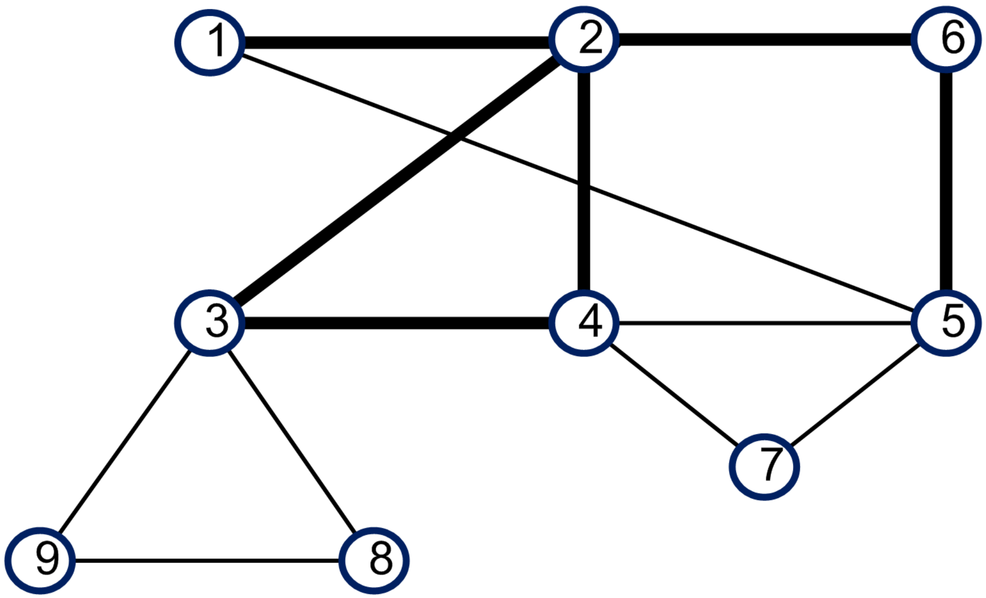


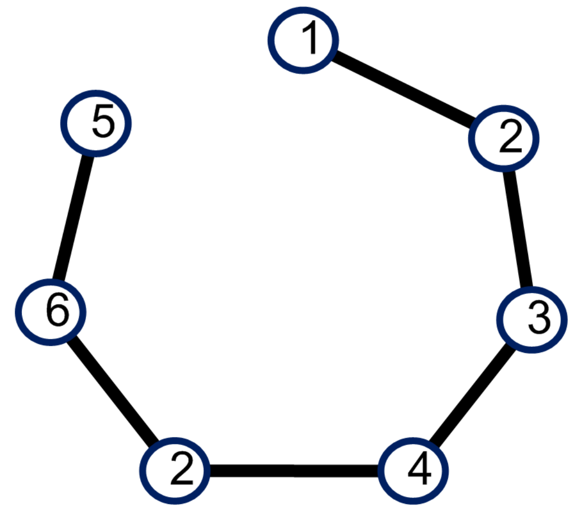
Grafuri euleriene



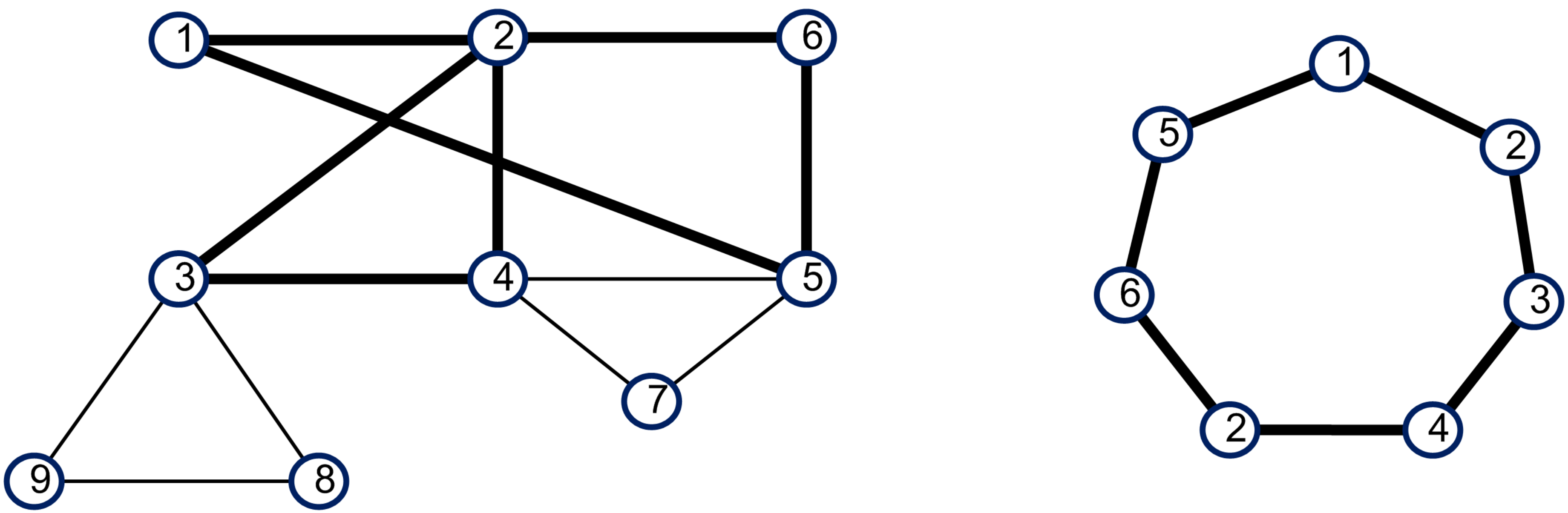


Grafuri euleriene





Grafuri euleriene



Grafuri euleriene

Teorema lui Euler

Fie $G=(V, E)$ un (multi)**graf** neorientat, conex, cu $E \neq \emptyset$.

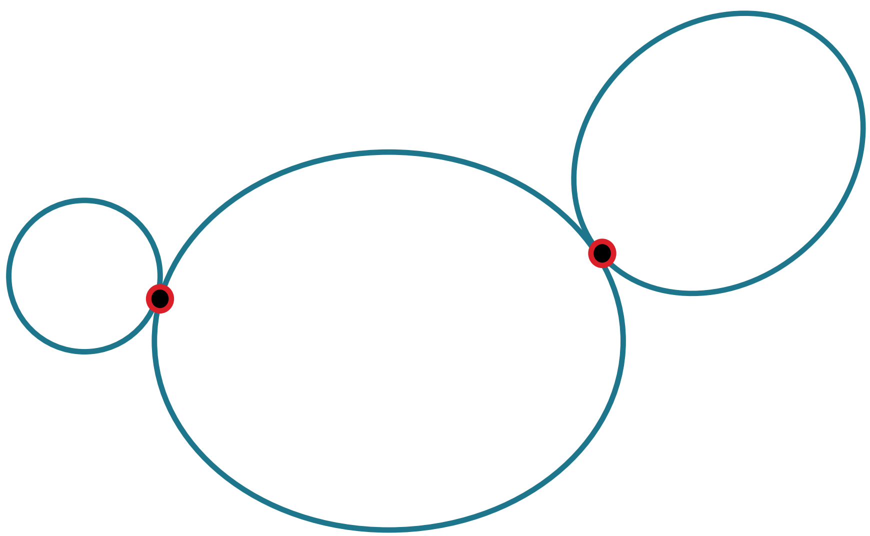
Atunci

G este eulerian $\Leftrightarrow$ **orice vârf din G are grad par**

Algoritmul lui Hierholzer

Determinarea unui ciclu eulerian într-un graf conex (sau un graf conex+ vârfuri izolate) **cu toate vârfurile de grad par**

- bazat pe ideea demonstrației Teoremei lui Euler – **fuziune de cicluri (succesiv)**



Algoritmul lui Hierholzer

- **Pasul 0** – verificare condiții (conex+vf. izolate, grade pare)

Algoritmul lui Hierholzer

- **Pasul 0** – verificare condiții (conex+vf. izolate, grade pare)
- **Pasul 1:**
  - **alege v ∈ V arbitrar**
  - **construiește C un ciclu în G care începe cu v (cu algoritmul din Lema)**

Algoritmul lui Hierholzer

- **Pasul 0** – verificare condiții (conex+vf. izolate, grade pare)
- **Pasul 1**:
  - **alege v ∈ V arbitrar**
  - **construiește C un ciclu în G care începe cu v (cu algoritmul din Lema)**
- **cât timp |E(C)| < |E(G)| execută**
  - **selectează v ∈ V(C) cu $d_{G-E(C)}(v) > 0$ (în care sunt incidente muchii care nu aparțin lui C)**

Algoritmul lui Hierholzer

- **Pasul 0** – verificare condiții (conex+vf. izolate, grade pare)
- **Pasul 1:**
  - **alege v ∈ V arbitrar**
  - **construiește C un ciclu în G care începe cu v (cu algoritmul din Lema)**
- **cât timp |E(C)| < |E(G)| execută**
  - **selectează v ∈ V(C) cu $d_{G-E(C)}(v) > 0$ (în care sunt incidente muchii care nu aparțin lui C)**
  - **construiește C′ un ciclu în G - E(C) care începe cu v**

Algoritmul lui Hierholzer

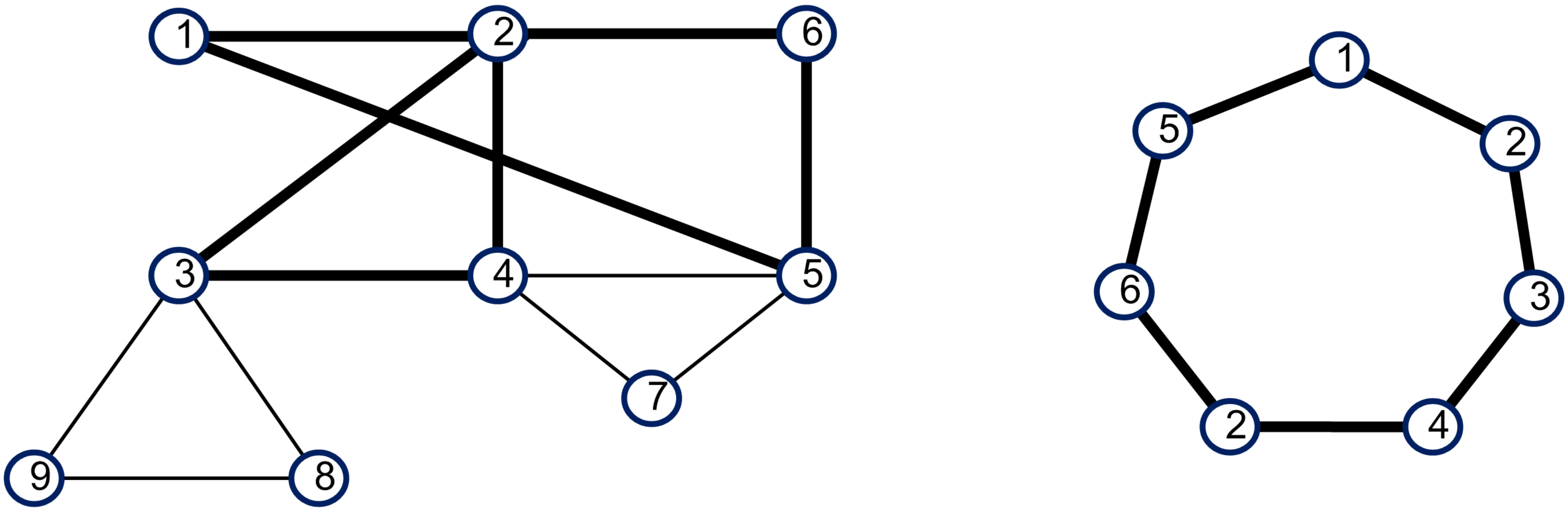
- **Pasul 0** – verificare condiții (conex+vf. izolate, grade pare)
- **Pasul 1:**
  - **alege v ∈ V arbitrar**
  - **construiește C un ciclu în G care începe cu v (cu algoritmul din Lema)**
- **cât timp |E(C)| < |E(G)| execută**
  - **selectează v ∈ V(C) cu $d_{G-E(C)}(v) > 0$ (în care sunt incidente muchii care nu aparțin lui C)**
  - **construiește C′ un ciclu în G - E(C) care începe cu v**
  - **C = ciclul obținut prin fuziunea ciclurilor C și C′ în v**

Algoritmul lui Hierholzer

- **Pasul 0** – verificare condiții (conex+vf. izolate, grade pare)
- **Pasul 1:**
  - **alege v ∈ V arbitrar**
  - **construiește C un ciclu în G care începe cu v (cu algoritmul din Lema)**
- **cât timp |E(C)| < |E(G)| execută**
  - **selectează v ∈ V(C) cu $d_{G-E(C)}(v) > 0$ (în care sunt incidente muchii care nu aparțin lui C)**
  - **construiește C′ un ciclu în G - E(C) care începe cu v**
  - **C = ciclul obținut prin fuziunea ciclurilor C și C′ în v**
- **scrie C**

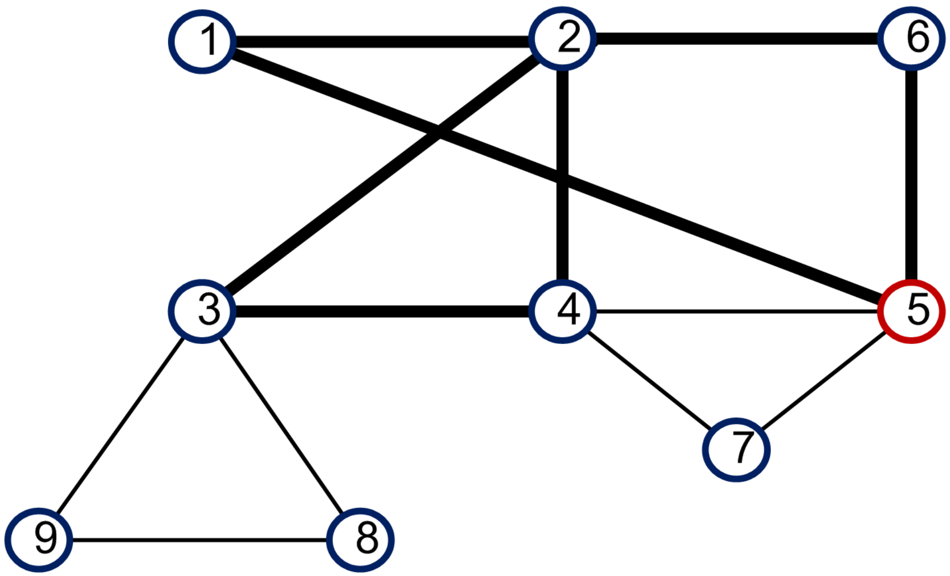
Algoritmul lui Hierholzer

Pornim cu ciclul construit cu algoritmul din Lema 1

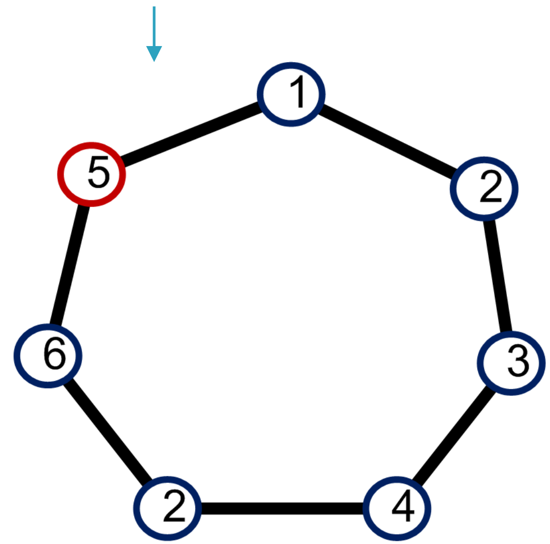


C= [1, 2, 3, 4, 2, 6, 5, 1]

Algoritmul lui Hierholzer

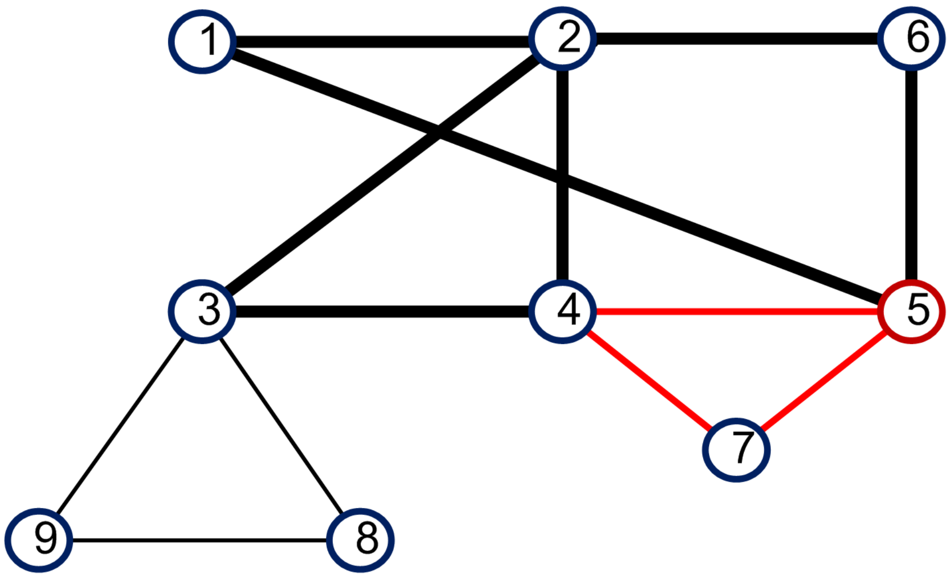


Alegem un vârf din C în care mai sunt incidente muchii,
de exemplu v = 5

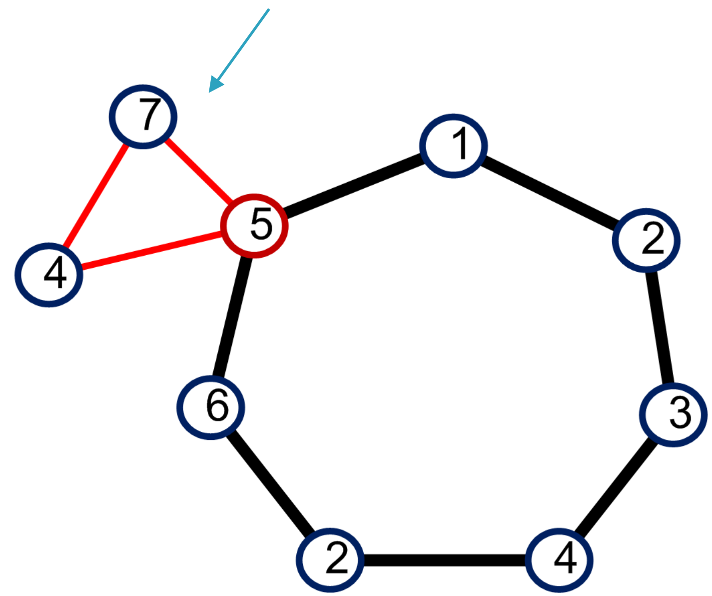


C= [1, 2, 3, 4, 2, 6, 5, 1]

Algoritmul lui Hierholzer



Construim un ciclu C' cu muchiile rămase care conține v = 5

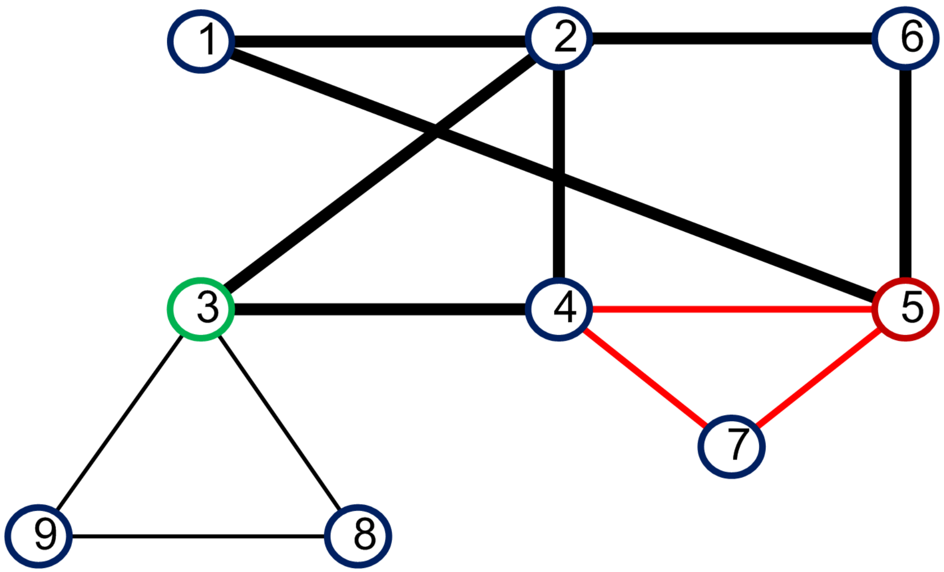


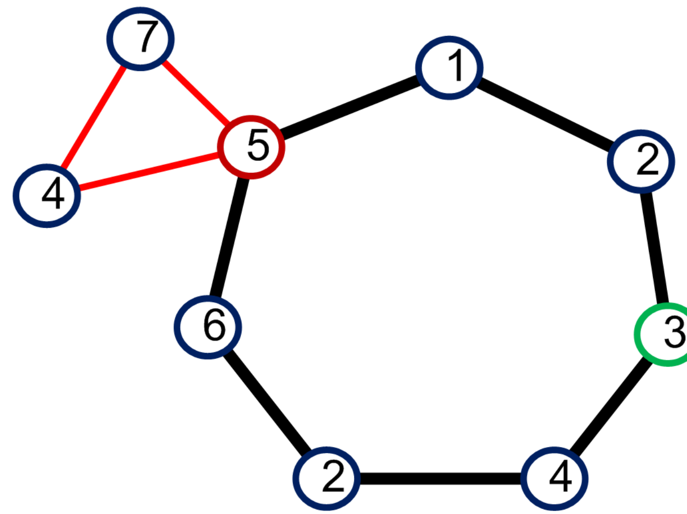
⇒ Un nou ciclu obținut prin fuziunea celor două cicluri

C= [1, 2, 3, 4, 2, 6, **5, 4, 7, 5**, 1]

Algoritmul lui Hierholzer

Alegem un vârf din C în care mai sunt incidente muchii,
de exemplu v = 3

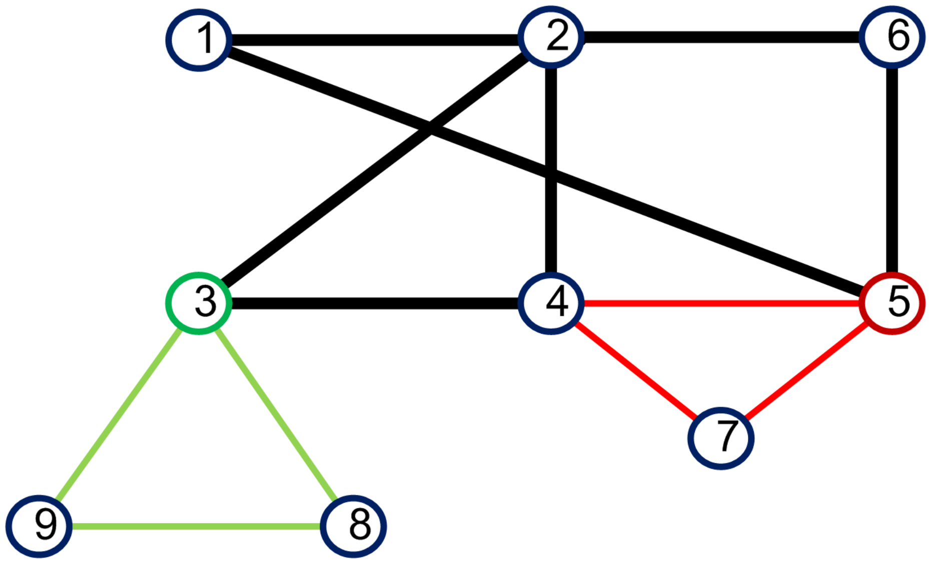


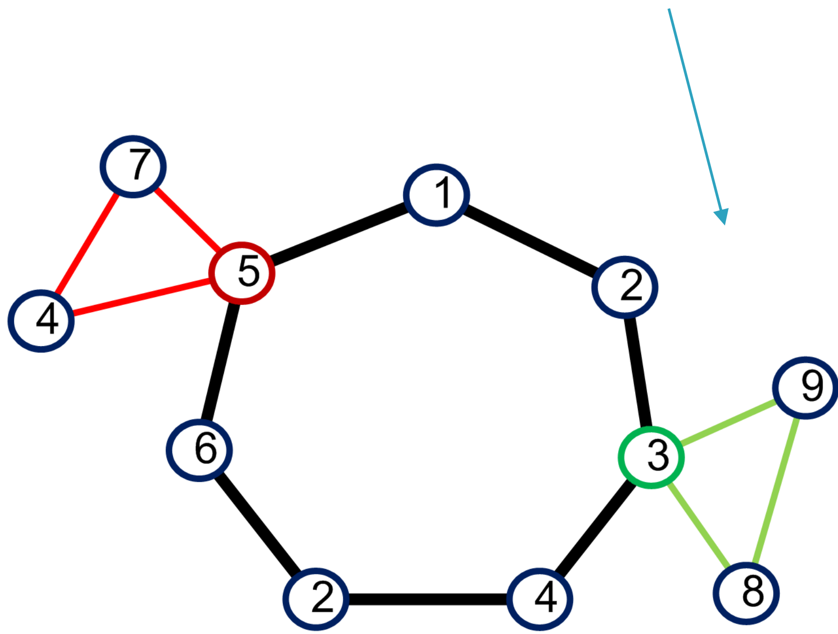


C= [1, 2, 3, 4, 2, 6, 5, 4, 7, 5, 1]

Algoritmul lui Hierholzer

Construim un ciclu C' cu muchiile rămase care conține v = 3

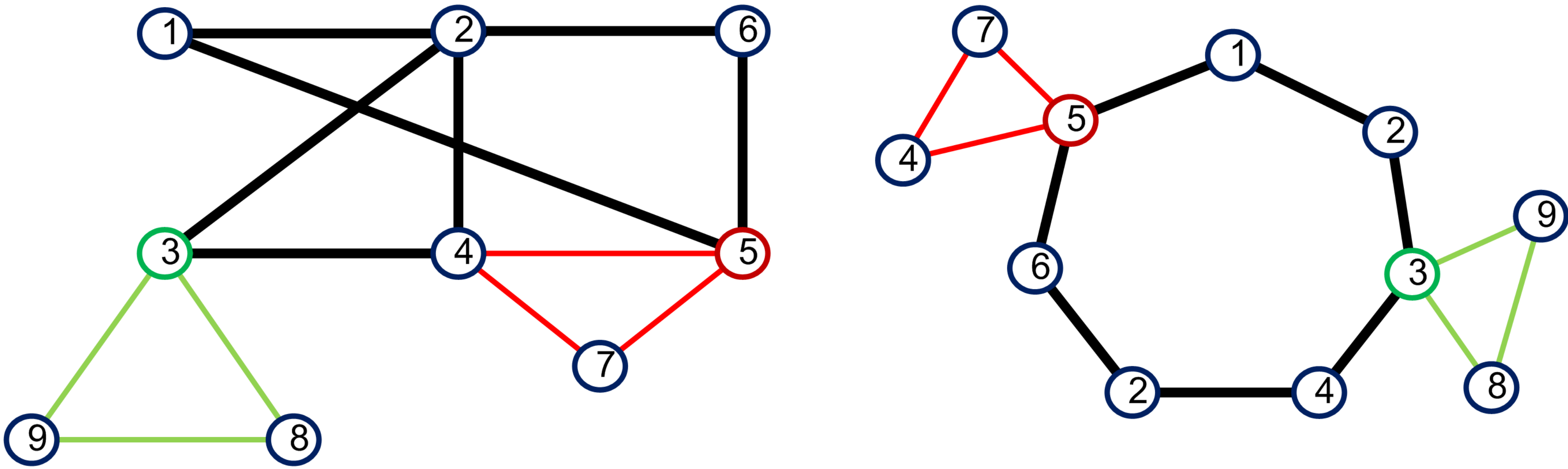




$\Rightarrow$ Un nou ciclu obținut prin fuziunea celor două cicluri

C= [1, 2, 3, 8, 9, 3, 4, 2, 6, 5, 4, 7, 5, 1]

Algoritmul lui Hierholzer



C= [1, 2, 3, 8, 9, 3, 4, 2, 6, 5, 4, 7, 5, 1]

Ciclul conține toate muchiile

$\Rightarrow$ este eulerian

Algoritmul lui Hierholzer

- **Complexitate – O(m)**

Algoritmul lui Hierholzer

- Posibile implementări
- Varianta recursivă

```
euler (nod v)
    cat timp d(v)> 0
          alege vw o muchie incidenta in v
          sterge muchia vw din G
          euler (w)
    C = C + v  //adaugam v la ciclul C
```

Inițial

```
C = Ø
euler(1)  //pornim construcția din varful 1
```

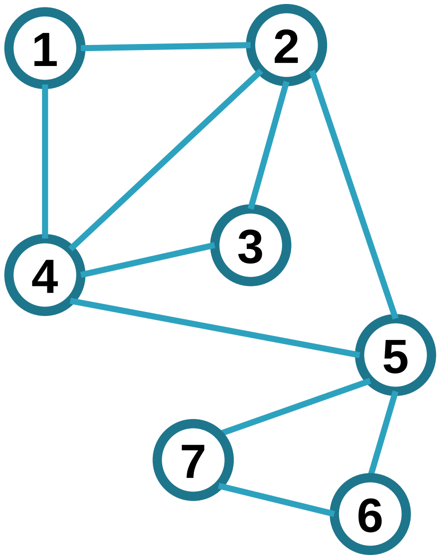
Algoritmul lui Hierholzer

- **Posibile implementări**
  - **Varianta** – Nerecursiv – Liste dublu înlănțuite/stive
  - Muchiile folosite – marcate (nu neapărat șterse) sau ștearsă cea de la finalul listei de adiacență

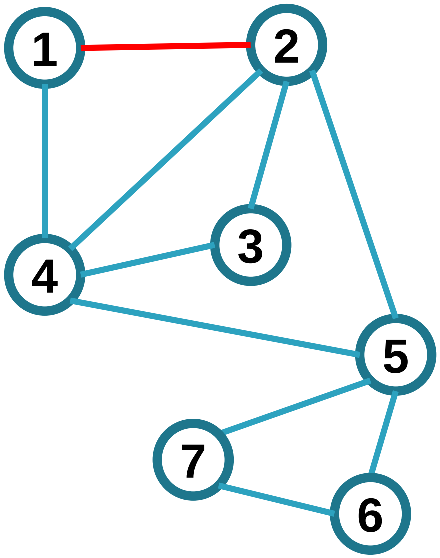
```
stiva St
push(1,St)
cat timp St este nevida executa
 v = top(St)
 daca grad(v) != 0 atunci
     alege vw o muchie incidenta in v
     sterge muchia vw din G
     push(w,St)
 altfel
     C = C + v
     pop(St)
```

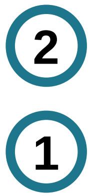
de exp cea de la finalul listei de adiac a lui v

Algoritmul lui Hierholzer

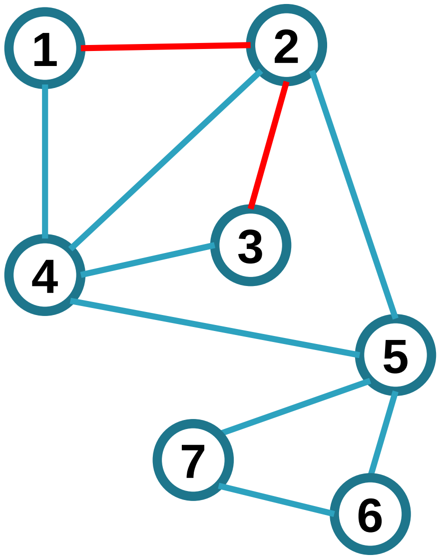


Algoritmul lui Hierholzer

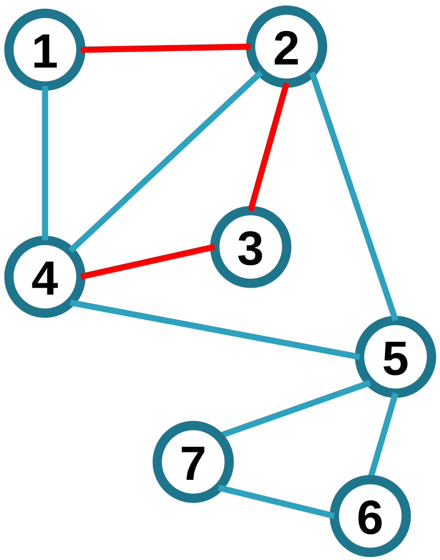




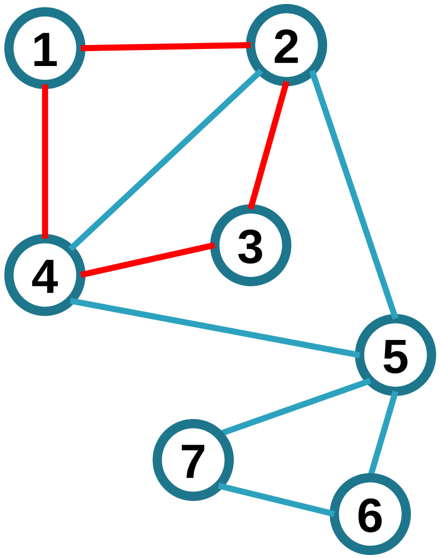
Algoritmul lui Hierholzer



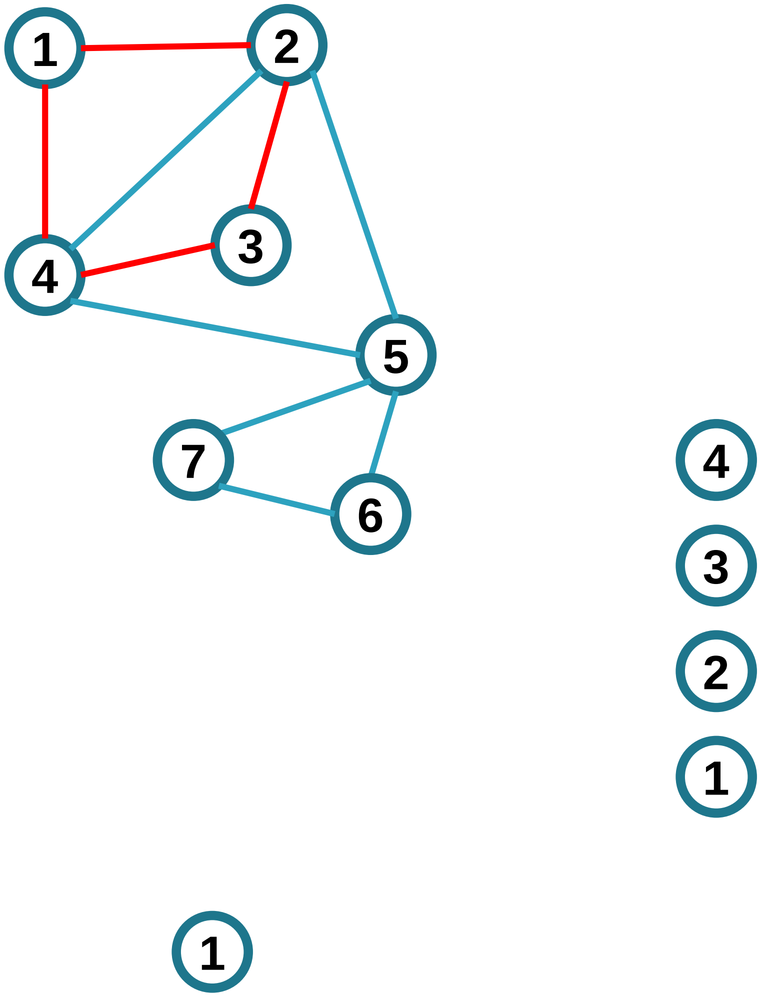
Algoritmul lui Hierholzer



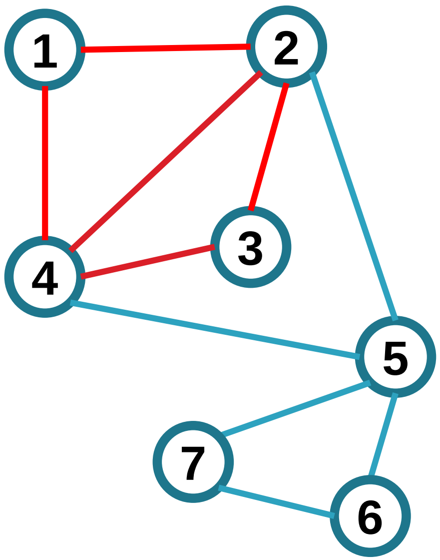
Algoritmul lui Hierholzer



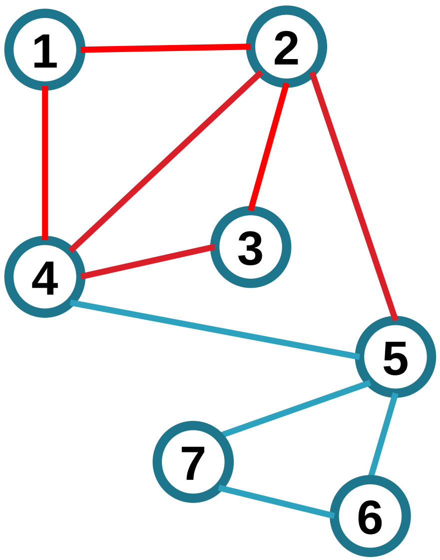
Algoritmul lui Hierholzer



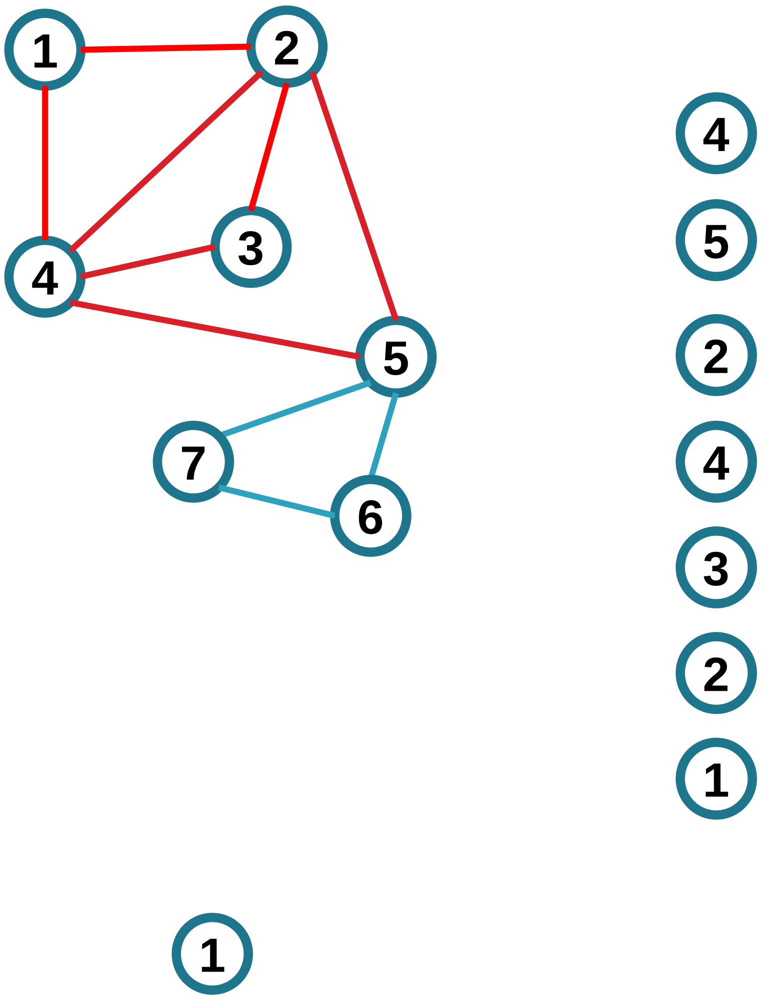
Algoritmul lui Hierholzer



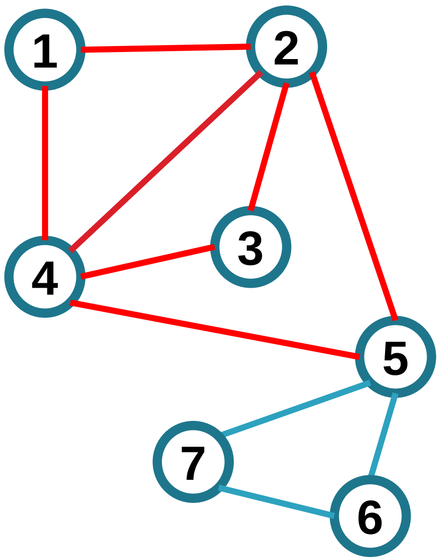
Algoritmul lui Hierholzer



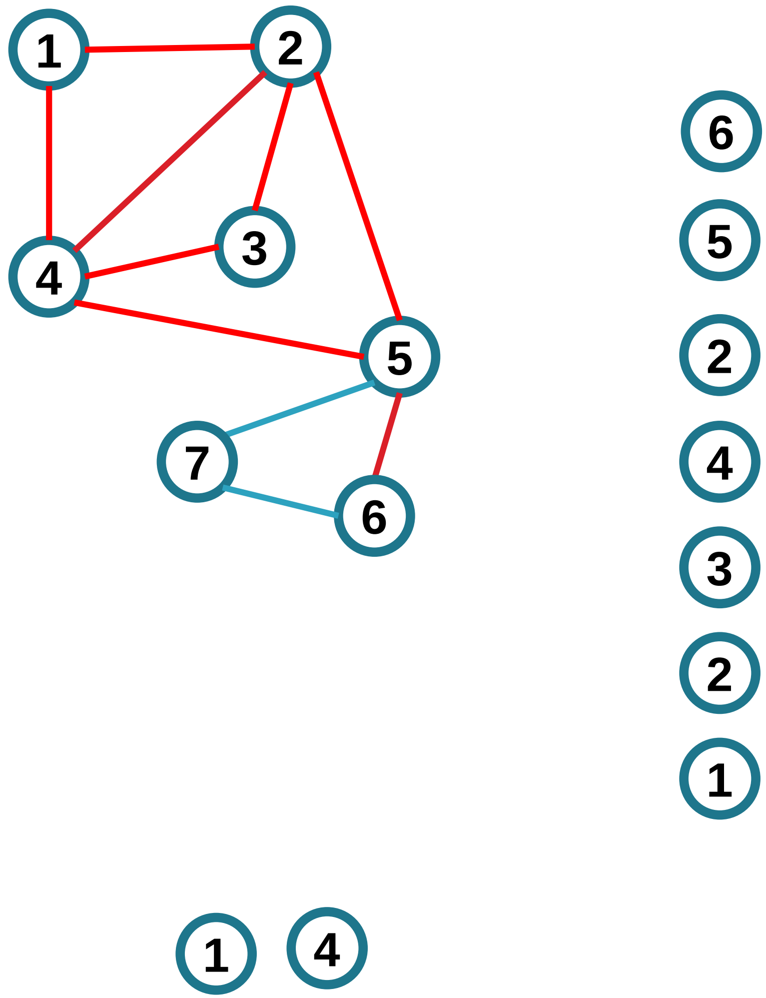
Algoritmul lui Hierholzer



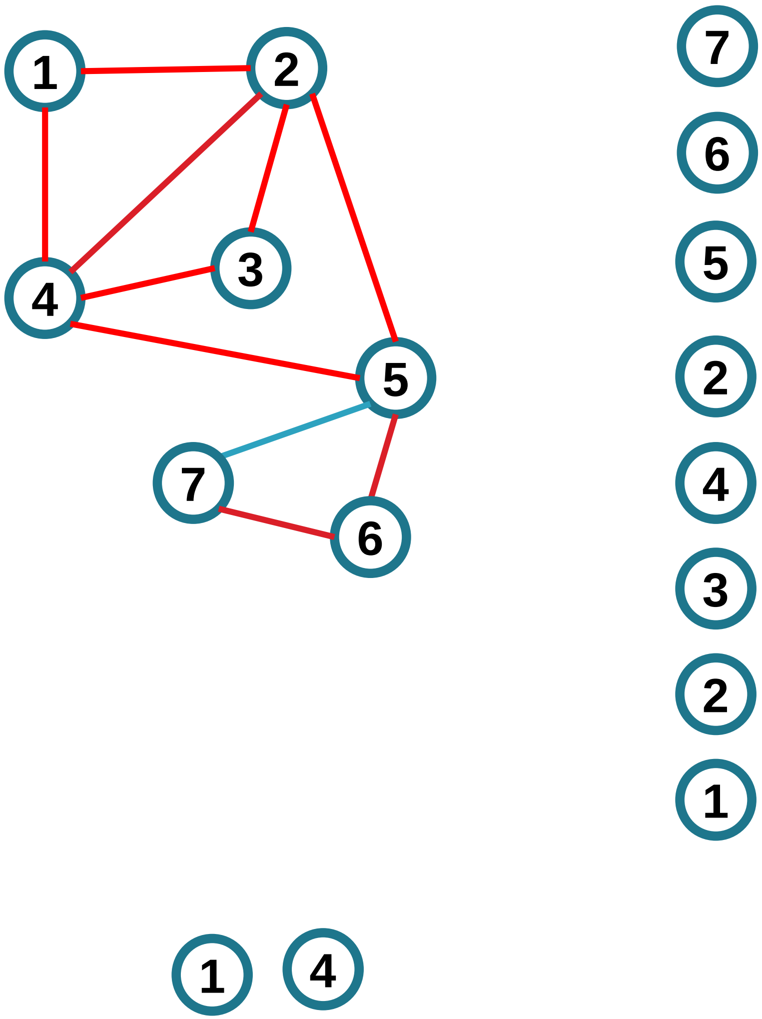
Algoritmul lui Hierholzer



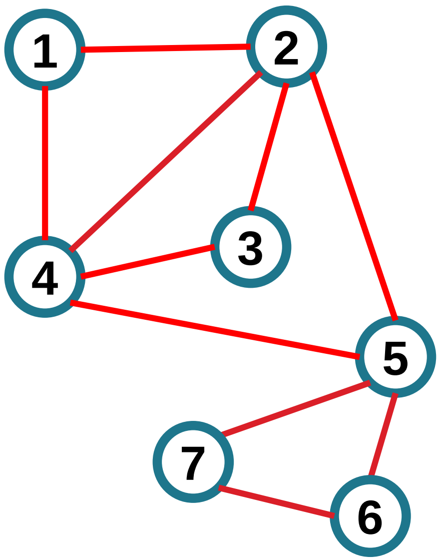
Algoritmul lui Hierholzer



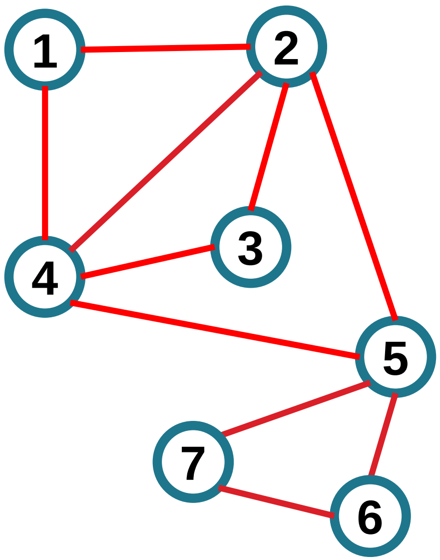
Algoritmul lui Hierholzer



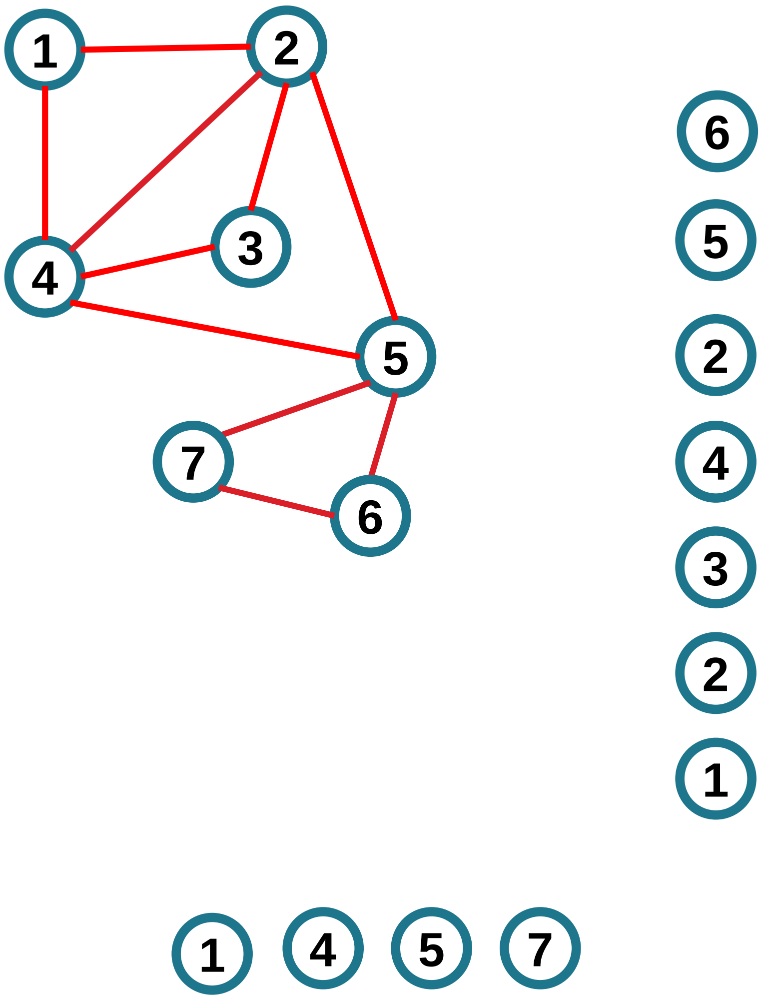
Algoritmul lui Hierholzer



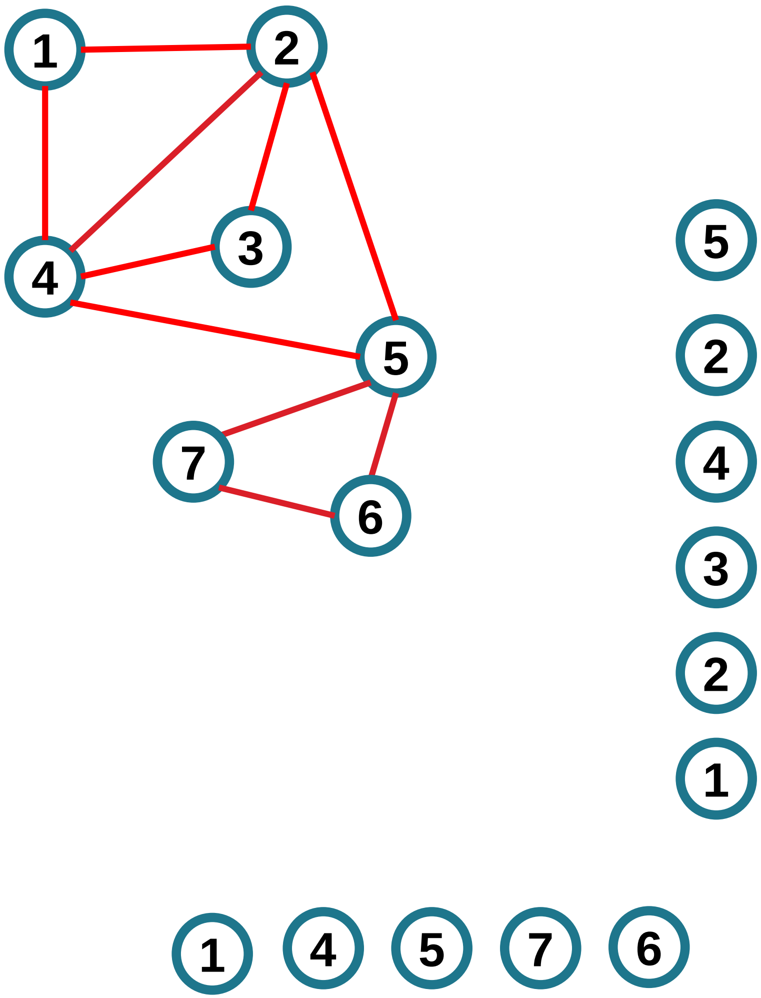
Algoritmul lui Hierholzer



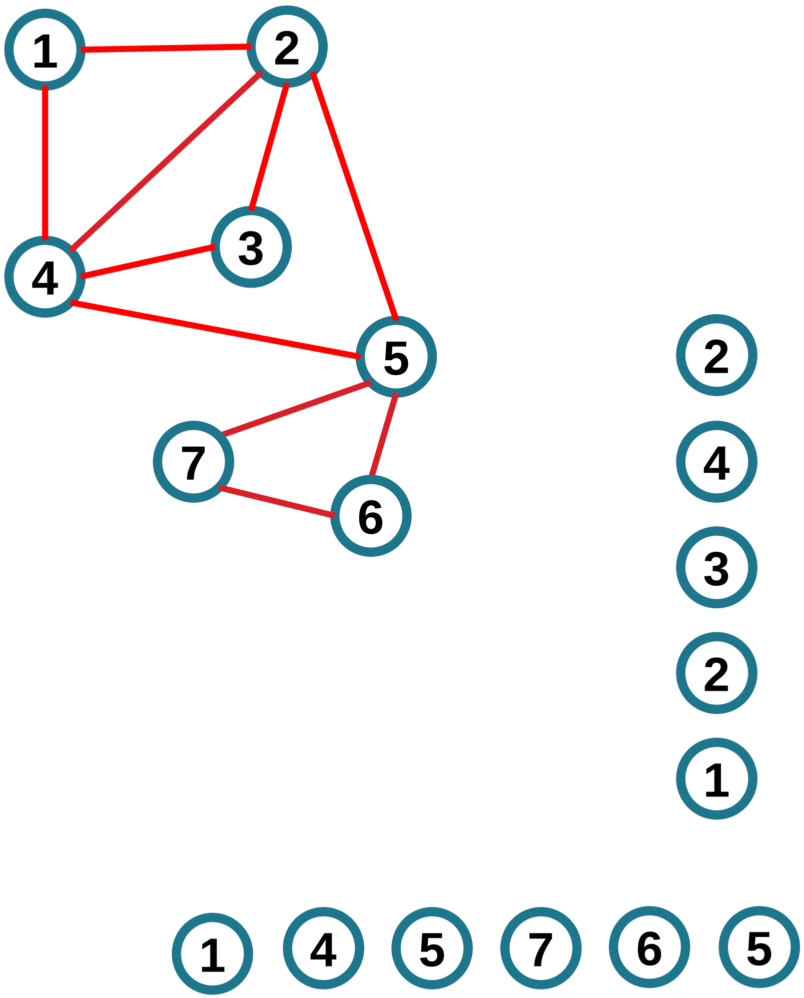
Algoritmul lui Hierholzer



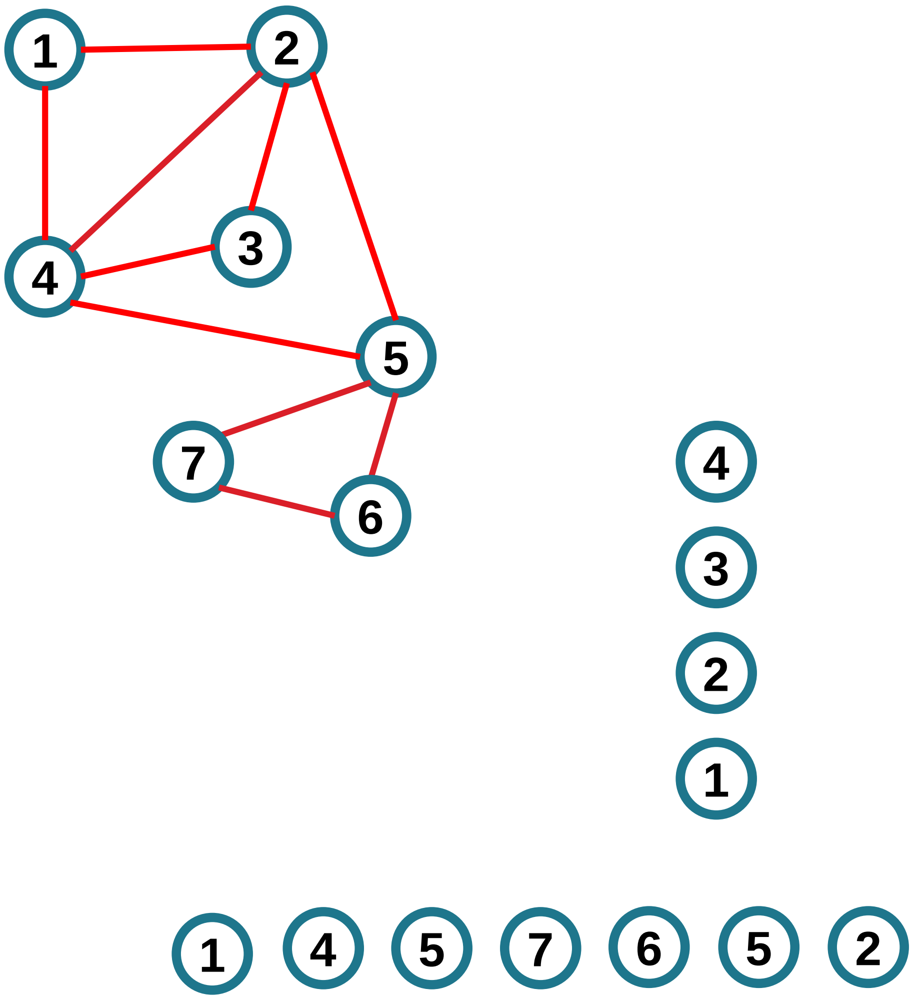
Algoritmul lui Hierholzer



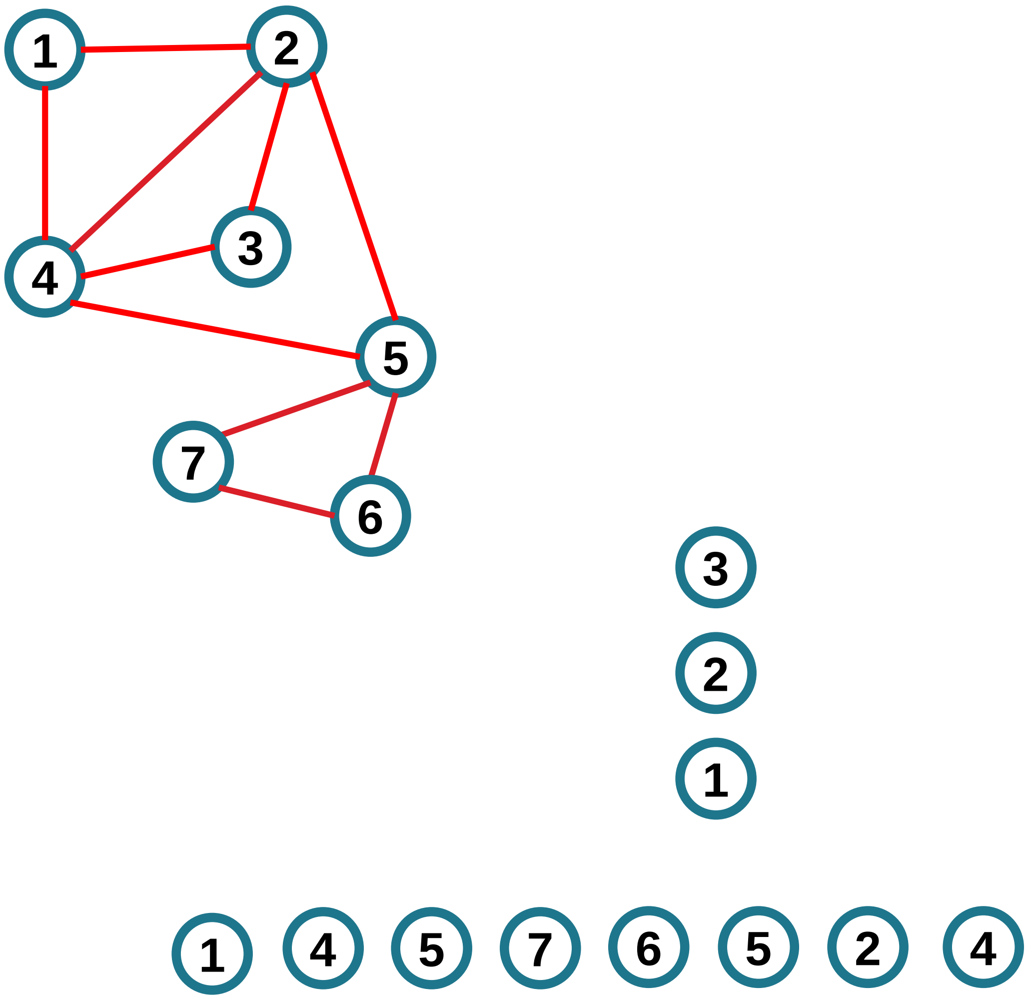
Algoritmul lui Hierholzer



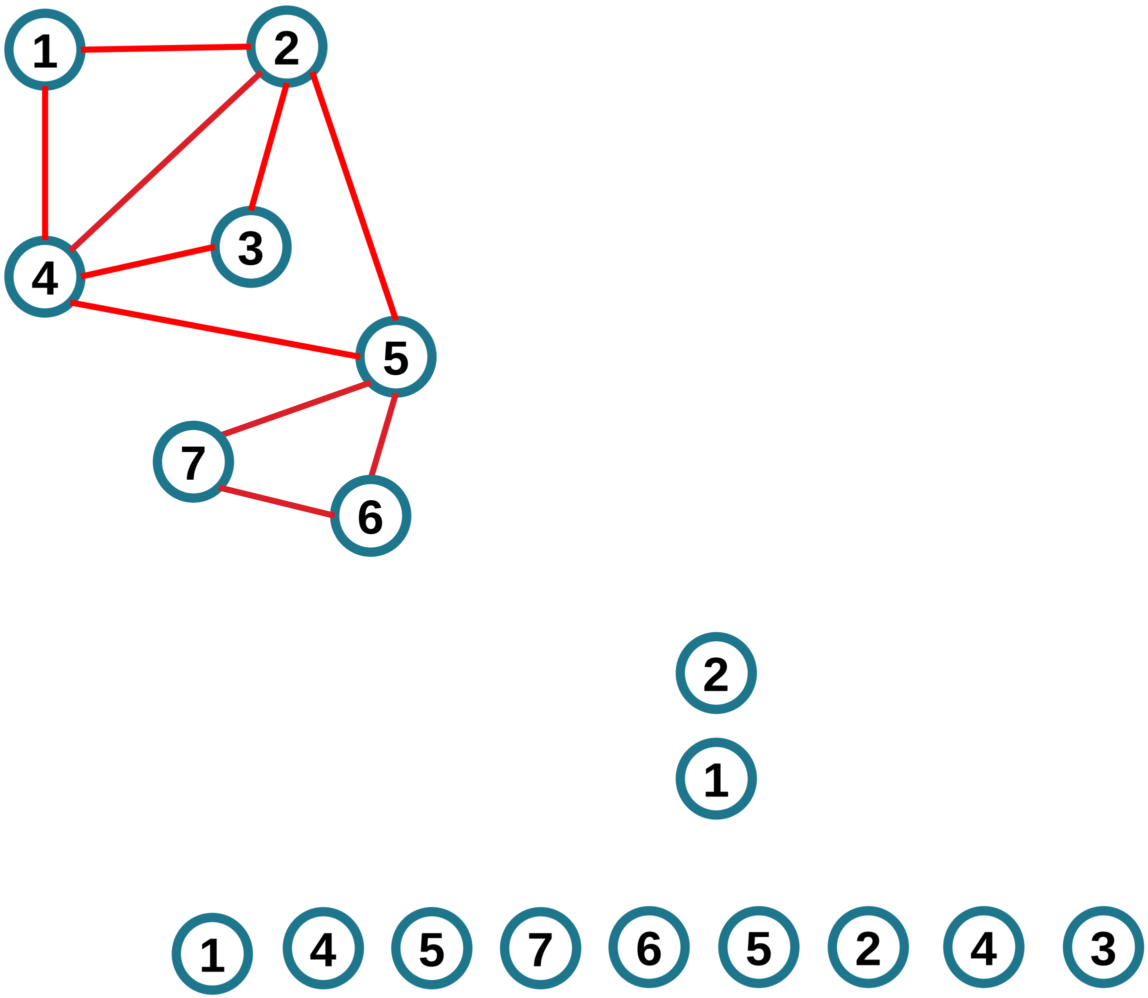
Algoritmul lui Hierholzer



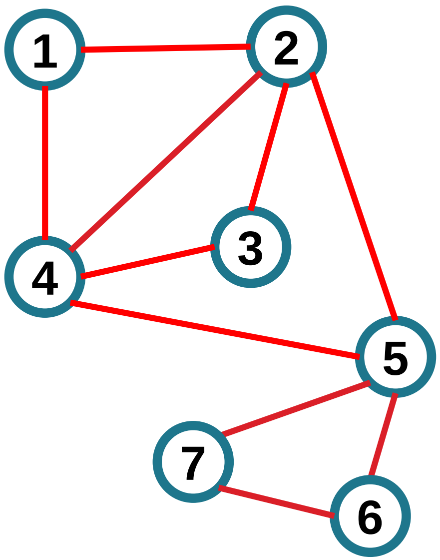
Algoritmul lui Hierholzer



Algoritmul lui Hierholzer



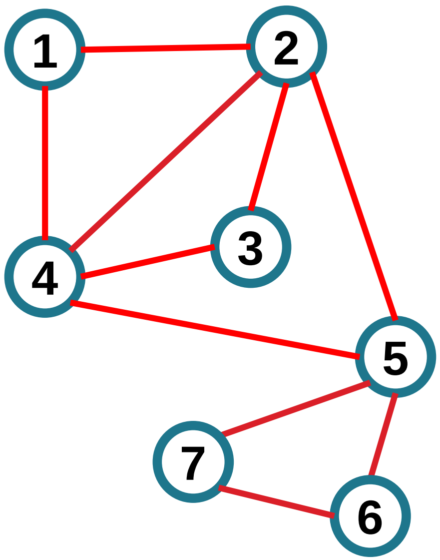
Algoritmul lui Hierholzer

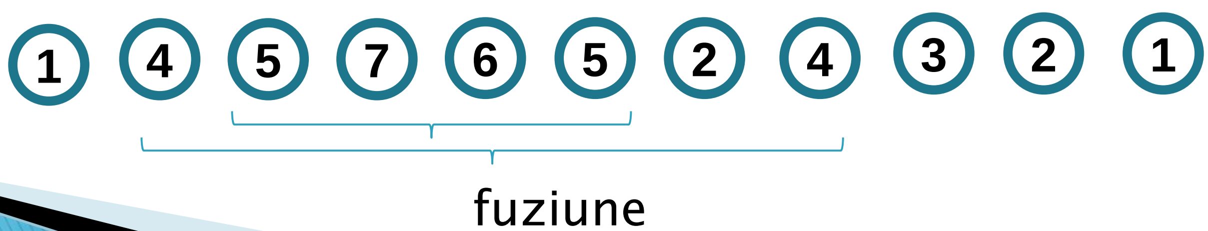


1

1 4 5 7 6 5 2 4 3 2

Algoritmul lui Hierholzer





Lanțuri euleriene

Teorema lui Euler

Fie $G=(V, E)$ un graf neorientat, conex, cu $E \neq \emptyset$.

Atunci

G are un lanț eulerian $\Leftrightarrow$ **G are cel mult două vârfuri de grad impar**

Grafuri orientate euleriene

Grafuri orientate euleriene

Observație

– **Fie** $P=[v_1, \ldots, v_k]$ dum

- Dacă $v_1 \neq v_k$, atunci vârfurile interne v din P au

$d_P^-(v) = d_P^+(v)$, iar pentru extremități:

$$d_P^-(v_1) = d_P^+(v_1) - 1, d_P^-(v_k) = d_P^+(v_k) + 1$$

- Dacă $v_1 = v_k$, atunci toate vârfurile v din P au gradul intern în P egal cu cel extern:

$$d_P^-(v) = d_P^+(v)$$

Grafuri orientate euleriene

Teorema lui Euler

Fie G=(V, E) un graf orientat, conex (= graful neorientat asociat este conex), cu $E \neq \emptyset$.

Atunci

G este eulerian $\Leftrightarrow \forall\, v \in V \quad d_G^-(v) = d_G^+(v)$

Drumuri euleriene

Teorema lui Euler

Fie G=(V, E) un (multi)graf orientat, conex, cu $E \neq \emptyset$.

Atunci

G are un drum eulerian $\Leftrightarrow$

Drumuri euleriene

Teorema lui Euler

Fie G=(V, E) un (multi)graf orientat, conex, cu $E \neq \emptyset$.

Atunci

G are un drum eulerian $\Leftrightarrow$

(∀ v∈V $d_G^-(v) = d_G^+(v)$) sau

(∃ x∈V cu $d_G^-(x) = d_G^+(x) - 1$,

∃ y∈V , y ≠ x cu $d_G^-(y) = d_G^+(y) + 1$,

∀ v∈V−{x, y} $d_G^-(v) = d_G^+(v)$)

Descompuneri euleriene în lanțuri

- **k-descompunere euleriană în lanțuri** a unui graf G =

  o mulțime de k lanțuri simple, muchie-disjuncte

  $\Delta = \{P_1, P_2, \ \dots, P_k\}$

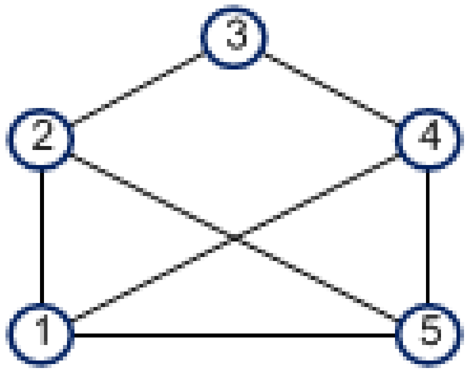
  ale căror muchii induc o k-partiție a lui E(G):

  $E(G) = E(P_1) \cup E(P_2) \cup \dots \cup E(P_k)$

Descompuneri euleriene în lanțuri

- **Interpretare**

  De câte ori (minim) trebuie să ridicăm creionul de pe hârtie pentru a desena diagrama?



Descompuneri euleriene în lanțuri

Teoremă – Descompunere euleriană

Fie G=(V, E) un graf orientat, conex (= graful neorientat asociat este conex), cu **exact 2k vârfuri de grad impar** ($k>0$). Atunci există o k-descompunere euleriană a lui G și k este cel mai mic cu această proprietate.