(1) 26.10.23

SEMINAR 4 - 133

$(\mathbb{N},+), (\mathbb{N},\cdot), (\mathbb{N}^*,+), (\mathbb{N}^*,\cdot), (\mathbb{N}^*\setminus\{1\},+),$
$(\mathbb{N}^*\setminus\{1\},\cdot), (\mathbb{Z},+), (\mathbb{Z},\cdot), (\mathbb{Z}_-,+), (\mathbb{Z}_-,\cdot), (\mathbb{Z}^*_-,+),$
$(\mathbb{Z}^*_-,\cdot), (\mathbb{Q},+), (\mathbb{Q},\cdot), (\mathbb{Q}_+,+), (\mathbb{Q}_+,\cdot), (\mathbb{Q}^*_+,+),$
$(\mathbb{Q}^*_+,\cdot), (\mathbb{Q}_-,+), (\mathbb{Q}_-,\cdot), (\mathbb{Q}^*_-,+), (\mathbb{Q}^*_-,\cdot), (\mathbb{R},+), (\mathbb{R},\cdot)$
$(\mathbb{R}_+,+), (\mathbb{R}_+,\cdot), (\mathbb{R}^*_+,+), (\mathbb{R}^*_+,\cdot), (\mathbb{R}_-,+), (\mathbb{R}_-,\cdot), (\mathbb{R}^*_-,+)$
$(\mathbb{R}^*_-,\cdot), (\mathbb{C},+), (\mathbb{C},\cdot), (\mathbb{C}^*,+), (\mathbb{C}^*,\cdot)$

Obs: 1) Doar pentru acest exercițiu folosim notațiile
$A_- = \{a\in A : a\le 0\}$ și $A^*_- = \{a\in A : a<0\}$.

2) E posibil ca în listă să apară și situații
(A,Δ) în care Δ nu e lege de comp. pe A.
Dvs. tb. să le recunoașteți.

Cerință: Ce structuri sunt cele de pe listă?

Considerăm mulțimea $\mathcal{F} \stackrel{not}{=} \{f : X\to\mathbb{Z}\}$,
unde X e o mulțime nevidă arbitrară.
Pe $\mathcal{F}$ definim operația $+$ astfel:

$$f+g : X\to\mathbb{Z},\ (f+g)(x) = f(x)+g(x)$$

Ce structură este $(\mathcal{F},+)$?

Sol: Evident, date $f,g\in\mathcal{F}$, $f+g$ e o funcție corect
def. de la X la $\mathbb{Z}$, deci $+$ e într-adevăr,

operație algebrică pe $\mathcal{F}$. (LC)

Fie $f, g, h \in \mathcal{F}$. Fie $x \in X$.

Atunci $(f \# g) \# h,\ f \# (g \# h) : X \to \mathbb{Z}$, iar

$[(f \# g) \# h](x) = (f \# g)(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) = (1)$

$[f \# (g \# h)](x) = f(x) + (g \# h)(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) = (2)$

Din asociativitatea adunării de pe $\mathbb{Z}$, $(1) = (2)$.

Deci, $[(f \# g) \# h](x) = [f \# (g \# h)](x)$

Ca urmare, $\#$ e asociativă (A)

Fie $f, g \in \mathcal{F}$. Fie $x \in X$.

Atunci $(f \# g)(x) = f(x) + g(x) \overset{\text{comut. + din } \mathbb{Z}}{=} g(x) + f(x) = (g \# f)(x)$.

Deci, $f \# g = g \# f$.

Ca urmare, $\#$ e comutativă (C)

Notăm $O : X \to \mathbb{Z}$, $O(x) = 0$ (evident, $O \in \mathcal{F}$)

Fie $f \in \mathcal{F}$; fie $x \in X$

Atunci

$(f \# O)(x) = f(x) + O(x) = f(x) + 0 = f(x)$,

deci $f \# O = f$.

$O \# f \overset{(C)}{=} f \# O = f$.

Ca urmare, O e e.n. pt $\#$.

Deci, $\#$ admite element neutru. (EN)

Fie $f \in \mathcal{F}$.

Considerăm $g : X \to \mathbb{Z}$, $g(x) = -f(x)$; evident, $g \in \mathcal{F}$.

Fie $x \in X$.

Atunci:

$$(f \# g)(x) = f(x) + g(x) = f(x) - f(x) = 0 = \mathcal{O}(x)$$

deci $f \# g = \mathcal{O}$.

$$g \# f \overset{(C)}{=\!=} f + g = \mathcal{O}.$$

Ca urmare, g e simetricul lui f.

Deci, f este simetrizabil.

Cum f a fost ales arbitrar, concluzionăm că toate elementele lui $\mathcal{F}$ sunt simetrizabile în raport cu $\#$. (TES)

(C), (A), (C), (EN), (TES) $\Rightarrow$ $(\mathcal{F}, \#)$ e grup abelian.

NIELS HENRIK ABEL

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

f

Δ	α	β	γ
α	α	β	γ
β	β	γ	α
γ	γ	α	β

$$\boxed{1 + 2} = 0$$

$$\downarrow f \quad \downarrow f \quad \downarrow f$$

$$\beta \, \Delta \, \gamma = \alpha$$

$$f(1) \, \Delta \, f(2) = f(1+2)$$

Faptul că tablele arată la fel dacă ignorăm schimbarea de notație

Se traduce în (4)

$$\forall x,y \in \{0,1,2\}\ \boxed{f(x+y) = f(x) \Delta f(y)}$$

și în faptul că f e bijectivă.

$+_2$	0	1
0	0	1
1	1	0

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$$\forall x,y \in \{0,1\}\ h(x +_2 y) = h(x) +_4 h(y)$$

Se cristalizează în urma discuției următoarele noțiuni:

<u>MORFISM</u> = Funcție care „se poartă frumos" cu structura

<u>IZOMORFISM</u> = Morfism inversabil al cărui invers e și el morfism.

(De obicei, acestea sunt morfismele bijective!)

<u>STRUCTURI IZOMORFE</u> = Structuri între care există măcar un izomorfism

Presupunem că monoizii $(\mathbb{N},\cdot)$ și $(\mathbb{N}^*,\cdot)$ sunt izomorfi.

Atunci există un izomorfism de monoizi

$f:(\mathbb{N},\cdot)\to(\mathbb{N}^*,\cdot)$

Deci $f(1)=1$ (obs!) (1)

Notăm $\alpha=f(0)$.

Atunci $\alpha\cdot\alpha=f(0)\cdot f(0)\overset{\text{morfism}}{=}f(0\cdot 0)=f(0)=\alpha \overset{\alpha\in\mathbb{N}^*}{\Longrightarrow}$

$\left.\begin{array}{l}\alpha=1\\ (1)\end{array}\right\}\Rightarrow f(1)=1=f(0),$

deci f nu e injectivă, X

Deci, $(\mathbb{N},\cdot)$ și $(\mathbb{N}^*,\cdot)$ nu sunt izomorfi. monoizi

---

Sunt grupurile $(\mathbb{R},+)$ și $(\mathbb{R}^*_+,\cdot)$ izomorfe?

Sol: Considerăm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*_+$, $f(x)=e^x$.

Fie $x,y\in\mathbb{R}$.

$f(x+y)=e^{x+y}=e^x\cdot e^y=f(x)f(y)$

Deci f e morfism de grupuri. (1)

Se știe din cls a X-a că f e bijectivă. (2)

Din (1) și (2) obținem că f e izomorfism de grupuri.

Ca urmare, $(\mathbb{R},+)\simeq(\mathbb{R}^*_+,\cdot)$.

TD) Sunt izomorfe $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ și $(\mathbb{C}^*,\cdot)$?

Dar $(\mathbb{Z},+)$ și $(\mathbb{Q},+)$?