

IX

K. Teleman

M. Florescu
D. Moraru

C. Rădulescu
E. Stătescu

Matematică

manual pentru clasa a IX-a

Geometrie și trigonometrie

Editura didactică și pedagogică,
București, 1980

M. Florescu
D. Moraru

K. Teleman

C. Rădulescu
E. Stătescu



Matematică

manual pentru clasa a IX-a

Geometrie și trigonometrie



Editura didactică și pedagogică, București

Referenți: prof. univ. CABIRIA ANDREIAN
prof. univ. ION CUCULESCU
dr. ALEXANDRU BREZULEANU
dr. HOREA BANEA

Introducere

Indicații generale

S-a căutat ca obiecte diferite să fie notate diferit, pentru a se evita confuzii. Astfel se face deosebire, în formulări și prin notări, între dreapta definită de două puncte, între segmentele închis și deschis având aceste puncte ca extremități și între distanța dintre aceleasi puncte (care este egală prin definiție cu lungimea segmentelor menționate).

Prinț-formulare de tipul: „Fie A, B două puncte...“ subînțelegem că punctele A și B sunt distincte (deoarece altfel nu am avea *două* puncte). Uneori, cind vrem să subliniem faptul că o anumită formulare are sens numai dacă punctele A, B sunt distincte, folosim și adjecțivul „distincte“.

Elevii sunt îndemnați să rețină axiomele, teoremele și formulele incadrate în chenare, după ce au înțeles bine sensul acestora. Se va acorda o atenție deosebită definițiilor, care trebuie de asemenea să fie bine însușite.

Se recomandă ca elevii să învețe corect demonstrațiile teoremelor cuprinse în manual. Menționăm că nu toate proprietățile demonstrează au fost intitulate teoreme.

Unele demonstrații bazate pe raționamente logice pot fi înlocuite, din motive metodologice, prin demonstrații practice. Acestea se vor face prin desene sau modele îngrijit executate. Se recomandă ca demonstrațiile practice să încească și unele demonstrații logice.

Recomandăm ca elevii să citească un număr cît mai mare de paragrafe din manual, pe baza indicațiilor date de tovarășii profesori. Verificarea și consolidarea cunoștințelor însușite prin lectura manualului se va face prin rezolvări de exerciții și dialog.

Redactor: prof. EUGENIA PANTELIMON

Tehnoredactor: ILINCA PROSAN

Grafcian copertă: N. SÎRBU

Desenator: C. HĂLCEȘCU

Primele cercetări de geometrie, consemnate în documente, datează de patru mii de ani și erau destinate măsurătorilor de teren, construcțiilor și calculelor astronomice.

Una din primele cărți de geometrie, rămasă din acea perioadă, este semnată de matematicianul egiptean Ahmes. Cartea tratează despre dreptunghiuri, triunghiuri isoscele, trapeze isoscele și unghiuri. Ahmes a considerat că aria unui cerc de rază R poate fi aproximată prin aria unui pătrat de latură $\frac{16}{9} R$, ceea ce conduce la o aproximare a numărului π egală cu 3,160...

Matematicienii egipteni știau că un triunghi cu laturile de 3, 4 și 5 unități este dreptunghic și foloseau acest triunghi pentru a construi drepte perpendiculare și, în particular, pentru fixarea direcției Est-Vest.

Rezultatele cu caracter experimental ale egiptenilor au fost preluate de matematicienii greci, care au elaborat primele teorii matematice bazate pe demonstrații.

Astfel Thales din Milet (640 i.e.n.–548 i.e.n.) a fost unul dintre primii matematicieni greci care au făcut cunoștuță matematica egipteană, largind și adincind cuceririle acesteia.

Pitagora (580 i.e.n.–500 i.e.n.) a întemeiat o școală celebră la Croton. În cadrul acestei școli, au fost puse bazele matematicii abstractive, care au rămas valabile pînă astăzi. Școala lui Pitagora a arătat necesitatea demonstrațiilor. Tot școala lui Pitagora a rezolvat problema împărțirii unui segment la medie și extremă rație (diviziunea de aur). Problema revine la a găsi un punct C pe segmentul $|AB|$, astfel ca $\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|CB|}{|AC|}$. Rezolvarea problemei a permis calcularea lungimii laturii unui pentagon regulat inscris într-un cerc de rază R . A se vedea exercițiul 2, p. 64.

Unul din continuatorii școlii lui Pitagora, Aristarc (310 i.e.n.–230 i.e.n.) a formulat concepția heliocentrică privind sistemul nostru solar.

După anul 500 i.e.n., centrul cercetărilor matematice grecești a fost Atena.

Eudoxus și Teetet, contemporani cu Platon, au pus bazele teoriei mărimilor și a rapoartelor, deosebind mărimile comensurabile de cele incomensurabile, plecînd de la raportul dintre o catetă și ipotenuza unui triunghi dreptunghic isoscel.

Platon (428 i.e.n.–348 i.e.n.) a avut numeroși elevi și a înființat o Academie. Unul din elevii săi, Aristotel (384 i.e.n.–322 i.e.n.) a pus bazele logicii. La Academia lui Platon s-a introdus necesitatea *diorismului*, adică a cercetării condițiilor, în care o anumită problemă admite soluții. În acest fel, au fost eliminate generalizările lipsite de sens.

Epoca de aur a geometriei antice este perioada în care au trăit Euclid, Arhimedes și Apollonius.

Euclid (300 i.e.n.) s-a format la Atena, la școala înființată de Platon. El este foarte des citat și astăzi, datorită postulatului care-i poartă numele.

Euclid a întemeiat o școală în Alexandria și este celebru prin *Elementele* sale, constând din 13 cărți, ce conțin rezultate de geometrie și aritmetică. La începutul Elementelor sunt date definițiile, axiomele și postulatele. Scopul lucrării este de a ordona și demonstra teoremele descoperite de predecesorii săi. Aici a fost inițiată tradiția de a indica sfîrșitul unei demonstrații prin cuvintele: *ceea ce era de demonstrat*.

Prima carte din *Elementele* lui Euclid tratează despre congruența triunghiurilor, linii paralele, paralelograme, egalitatea ariilor, terminându-se cu teorema lui Pitagora.

A doua carte se referă la descompunerea unui pătrat în sume de pătrate și dreptunghiuri.

În cartea a treia se dau proprietățile legate de cerc. În cartea a patra se tratează despre poligoane inscrise și circumscrise unui cerc, despre poligoane regulate și în particular, despre pentagonul regulat. Cartea a cincea se referă la proporții și dezvoltă teoria generală a mărimilor, după Eudoxus.

Cărțile VI, XI, XIII se referă la probleme de geometrie în spațiu. Arhimede (287 i.e.n.–212 i.e.n.) și Apollonius din Perg (262–200 i.e.n.) s-au format la școala lui Euclid.

Spre deosebire de predecesorii săi, Arhimede a fost preocupat de aplicațiile practice ale geometriei. Lui i se datorează obținerea unei bune aproximări a numărului π . Considerind lungimea unui cerc ca limită a perimetrelor poligoanelor regulate inscrise și circumscrise aceluia cerc, a obținut pentru raportul π dintre lungimea cercului și diametru inegalitatea:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}.$$

Apollonius a lăsat un tratat important privind teoria conicelor (elipse, hiperbole și parabole).

După campaniile lui Alexandru cel Mare, grecii au luat cunoștință de descoperirile matematicienilor chaldeeni din domeniul Astronomiei. Hypsicles (130 i.e.n.) a utilizat sistemul sexagesimal de măsurare a unghiurilor.

Menelaus, care a trăit în jurul anului 100 e.n., a elaborat o trigonometrie sferică extinzând la triunghiuri sferice teoremele de congruență ale triunghiurilor din plan. Este celebru prin rezultatele sale asupra transversalelor într-un triunghi.

Claudius Ptolomeu (140 e.n.) a introdus împărțirea gradelor sexagesimale în minute și secunde.

Ptolomeu a dat pentru π o aproximare mai bună decât Arhimede, anume

$$3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3600} \approx 3,141666\dots$$

De asemenea, el a întocmit tabele pentru calculul corzilor ce subîntind arce de la $1/2^\circ - 90^\circ$ și a dezvoltat un model pentru descrierea mișcării planetelor din sistemul nostru solar. În acest model, numit sistemul geocentric, planetele se mișcă pe cercuri mobile, ale căror centre descriu cercuri cu centru în centrul Pământului. Sistemul geocentric a fost înlocuit, 14 secole mai târziu, prin cel heliocentric, de către Copernic.

Pappus din Alexandria (300 e.n.) a introdus rapoartele anarmonice, patrulaterale complete și a formulat unele probleme de loc geometric, pe care le-a rezolvat mai târziu Descartes.

O contribuție importantă la dezvoltarea matematicii aplicative au avut-o matematicienii indieni. Astfel lor li se datorează introducerea funcției sinus, care asociază unui arc de cerc jumătate din coarda subîntinsă de dublul arcului. Indienii au descoperit metode ingenioase de calcul.

Matematica greacă și indiană a fost preluată, începând din anul 760, de arabi, odată cu întemeierea califatului din Bagdad. Astfel arabi au tradus un tratat de astronomie indiană, datând din sec. 5 e.n., *Elementele* lui Euclid și Almagestul — opera de bază a lui Ptolomeu.

Muhammed ibn Musa Alchwarizmi a scris, în jurul anului 820, prima carte de algebră.

Albattami (850–926) a completat tabelele lui Ptolomeu și a introdus funcțiile tg și ctg. A descoperit teorema sinusului într-un triunghi și a demonstrat formula $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$.

Abul Wafa (940–998) a dezvoltat cercetările lui Pappus relative la construcții geometrice. Ideile lui Wafa au fost utilizate și extinse de Leonardo da Vinci, Tartaglia (1501–1557) și în Germania de Albrecht Dürer.

Odată cu înființarea universităților din Europa la Pisa, Paris, Praga (1348), Viena (1365), Heidelberg (1386), Köln (1388), Erfurt (1398), pe continentul nostru au început să fie elaborate numeroase lucrări de matematici superioare. În paralel cu cristalizarea noțiunilor de număr și elaborarea unor tehnici de calcul, au fost reconsiderate și largite cunoștințele geometrice.

François Viète (1540–1603) a considerat probleme de construcții geometrice, care nu se pot rezolva cu ajutorul riglei și a compasului, deci care corespund la ecuații de grad mai mare decât 2. El a obținut teorema lui Pitagora generalizată și lui i se datorează principiul dualității în geometrie, care a avut consecințe fundamentale pentru dezvoltarea matematicii moderne.

Nicolaus Copernic (1473–1543) începe celebra sa carte „*De revolutionibus orbium coelestium*”, în care fundamentează modelul heliocentric, cu o expunere a trigonometriei.

Girard Desargues (1593–1662) este fondatorul geometriei descriptive și al geometriei proiective. A considerat dreptele paralele ca drepte concurente la infinit și a dezvoltat proprietățile birapoartelor armonice. Deși a urmărit atât probleme practice cât și teoretice ideile lui au rămas mult timp izolate, fiind puse în umbră de apariția geometriei analitice a lui Descartes.

René Descartes (Cartesius, 1596–1650) a creat metoda geometriei analitice în lucrarea „*Géometrie*” apărută în 1637. A mai lăsat lucrări de filozofie, fizică și matematică.

Descartes a reluat o metodă a lui Apollonius, care definea punctele unei elipse arătând că ordonata unui punct de pe curbă depinde de abscisa aceluia punct. Descartes a utilizat formalismul algebric. El folosea pentru abscisa x denumirea de *segment*, iar ordonata y o numea *aplicata prin ordine*. Descartes a arătat că o curbă este definită de o ecuație, care leagă între ele mărimile x , y . Denumirile de abscisă și ordonată au fost folosite încă de Apollonius. Termenul de *coordonată* a fost folosit prima oară de Leibniz în 1692.

Descartes a aplicat metoda coordonatelor la problemele de loc geometric puse de Pappus și a studiat diferite curbe plane, cum ar fi parabola, cicloida, foliumul lui Descartes, spirala logaritmica etc.

Blaise Pascal (1623–1662), unul din creatorii calculului integral, a aprofundat cercetările lui Descartes, cu ajutorul căror a obținut teorema care-i poartă numele (teorema hexagonului inscris într-o conică).

Giovanni Ceva a publicat în anul 1678 lucrarea „*De lineis rectis*”.

Wilhelm Leibniz (1646–1716) a introdus termenul de *funcție*.

Robert Simson (1687–1768) și Matthew Stewart (1717–1785) au continuat cercetările lui Ceva asupra transversalelor.

L. Euler (1707–1783) are lucrări privind toate domeniile matematicii. A elaborat o teorie a mișcării planetelor și cometeelor.

D. Hilbert (1862–1943) are de asemenea cercetări asupra tuturor domeniilor matematicii. A elaborat în cartea „*Grundlagen der Geometrie*” prima axiomatizare a geometriei euclidiene, conformă cu exigențele științei moderne.

Geometria euclidiană este astăzi un domeniu încheiat, atenția matematicienilor fiind acumă îndreptată spre alte geometrii, care ar putea fi utilizate pentru o mai bună înțelegere a proprietăților spațiului în care trăim, ținând seama de cele mai noi descoperiri ale științei.

La noi în țară, un rol de seamă a jucat publicarea de către Gh. Lazăr a primei cărți de trigonometrie. Începînd de la sfîrșitul secolului trecut, s-au remarcat matematicienii de prestigiu Spiru Haret, Gh. Tîțeica și D. Pompeiu, care au elaborat lucrări originale de un înalt nivel științific, în diferite domenii ale matematicii, între care și geometria. Aceștora trebuie să adăugăm numele lui Traian Lalescu, care a adus de asemenea o contribuție importantă la dezvoltarea științei mondiale și care a contribuit la întemeierea unei școli românești de geometrie.

Gh. Tîțeica (1873–1939) este renumit pentru cercetările sale în domeniul geometriei diferențiale, lăsînd lucrări privind anumite clase de suprafețe, care-i poartă numele, și de asemenea asupra unor figuri geometrice mai complicate, numite congruențe și rețele în spații cu mai multe dimensiuni. Tîțeica s-a ocupat de geometria elementară, lăsînd o culegere apreciată de exerciții de geometrie sintetică.

D. Pompeiu (1873–1954) a publicat lucrări importante de analiză matematică și numeroase note de matematici elementare. Teorema sa, potrivit căreia segmentele care unesc vîrfurile unui triunghi echilateral cu un punct din planul acelui triunghi sunt congruente cu laturile unui triunghi eventual degenerat, a dat naștere la o serie de articole remarcabile din domeniul geometriei elementare și analitice.

Dan Barbilian (1895–1961) a fost un elev al lui Gh. Tîțeica, de la care a preluat o gîndire geometrică caracterizată prin profunzime și eleganță. La aceste calități el a adăugat un spirit axiomatic, care l-a îndreptat spre fundamentele matematicii. A lăsat lucrări importante de geometrie superioară, de algebră și de teoria numerelor. Cursurile sale de geometrie axiomatică și de algebră modernă au avut un rol de seamă în formarea unei școli matematice temeinice în țara noastră.

Traian Lalescu (1831–1929) este renumit pentru o monografie asupra ecuațiilor integrale, citată și astăzi, deși a fost publicată prima dată în anul 1911. El a scris un curs magistral de geometrie analitică, o monografie asupra geometriei triunghiului și o frumoasă culegere de probleme de geometrie descriptivă.

Geometria se dezvoltă astăzi, în țara noastră, la nivelul științei mondiale.

Un merit deosebit revine regeratului profesor Gh. Vrânceanu (1900–1979), care a lăsat o operă științifică de mare valoare, dedicată geometriei diferențiale moderne. Această operă se referă la teoria spațiilor neolonom, la teoria grupurilor de transformări și la teoria relativității. Cursul său de geometrie analitică, proiectivă și diferențială și tratatul de geometrie diferențială au contribuit la formarea unui mare număr de matematicieni români. Gh. Vrânceanu a fost preocupat în mod deosebit de problemele învățămîntului nostru, insistînd asupra necesității elaborării unor manuale accesibile celor mai mulți elevi.

Generațiile viitoare au datoria să cunoască și să dezvolte realizările matematicienilor români.

Notății folosite

Dreapta ce trece prin punctele A și B ($A \neq B$) : AB sau BA .

Triunghiul cu vîrfurile A , B , C : ABC

Punctul A aparține dreptei d : $A \in d$.

Punctul A este intersecția dreptelor d , d' ($d \neq d'$) : $\{A\} = d \cap d'$.

Segmentul deschis de extremitățile A , B ($A \neq B$) : $|AB| = |BA|$.

Segmentul închis de extremități A , B ($A \neq B$) : $[AB] = [BA]$.

Semidreapta limitată de punctul A și conținînd punctul B : $|AB$.

Semiplanul limitat de dreapta d și conținînd punctul A : $|dA$.

Semispațial limitat de planul p și conținînd punctul A : $|pA$.

Unghiul avînd ca laturi semidreptele h , k : $\widehat{hk} = \widehat{kh}$.

Unghiul avînd ca laturi semidreptele $|AB|$, $|AC|$: \widehat{BAC} sau \widehat{CAB} .

Unghiul diedru avînd ca fețe semiplanele u , v : \widehat{uv} sau \widehat{vu} .

Unghiul triedru format din semidreptele a , b , c : \widehat{abc} .

Segmentul $|AB|$ este congruent cu segmentul $|CD|$: $|AB| \equiv |CD|$.

Unghiul \widehat{hk} este congruent cu unghiul \widehat{rs} : $\widehat{hk} \equiv \widehat{rs}$.

Triunghiul ABC este congruent cu triunghiul $A'B'C'$: $ABC \equiv A'B'C'$.

Figura F este congruentă cu figura F' : $F \equiv F'$.

Unghiurile triunghiului ABC : $\hat{A} = \widehat{BAC}$, $\hat{B} = \widehat{ABC}$,
 $\hat{C} = \widehat{ACB}$.
Segmentul etalon: m .

Lungimea segmentelor $|AB|$, $[AB]:\overline{AB} = \overline{BA}$ (dacă etalonul este fixat).

Distanța dintre punctele A, B : $d(A, B)$ (dacă etalonul este fixat).

Vectorul legat cu originea A și extremitatea B : \vec{AB} .

Vectorul \vec{AB} este echivalent cu vectorul $\vec{CD}:\vec{AB} \sim \vec{CD}$.

Norma vectorului $\vec{AB} = v$: $\|\vec{AB}\| = \|v\|$ ($\|\vec{AB}\| = d(A, B)$).

Produsul scalar al vectorilor $u, v : u \cdot v$.

Produsul vectorial al vectorilor $u, v : u \times v$.

Locul geometric al punctelor care au proprietățile $P, P', P'', \dots : \{M; M \text{ are proprietățile } P, P', P'', \dots\}$.

Măsura unghiului \hat{hk} : măs \hat{hk} (de fiecare dată se va specifica dacă este vorba de măsura în grade sau în radiani).

Cercul de centru O și rază R (într-un plan fixat): $C(O, R)$.
Figurile F, F' coincid: $F = F'$.

Unghiuri drepte: dr.

Dreapta reală: \mathbf{R} .

Mulțimea numerelor întregi: \mathbf{Z} .

Capitolul I

Geometrie euclidiană plană

(segmente, semidrepte,
unghiuri, poligoane)

Acest capitol cuprinde o serie de rezultate pe care elevii le-au întâlnit în clasele anterioare, dar puse într-o ordine și formulare adesea diferite de cele din manualele precedente. Dintre acestea, unele rezultate sunt intitulate teoreme și ele trebuie reținute. Celelalte propoziții, necesare pentru deducerea teoremelor, dar mai puțin importante, au fost date pentru a asigura construcția logică a materialului, dar nu se recomandă memorarea lor. Lectura lor este necesară, pentru ca elevii să le poată folosi în rationamente. Este indicat ca elevii să se familiarizeze cu aceste proprietăți, fie făcind demonstrații, fie prin construcții grafice.

1. Proprietățile figurilor plane

Prin figură înțelegem o mulțime de puncte, drepte, segmente, semiplane, semidrepte, cercuri etc. Unele figuri mai simple conțin numai o parte din aceste elemente. Cele mai simple figuri sunt cele formate din cîte un singur punct, după care urmează figurile formate din cîte două puncte, trei puncte și.a.m.d.

Elementele unei figuri se notează prin litere, eventual marcate prin unul sau două accente.

Proprietățile figurilor geometrice se exprimă prin propoziții formate fiecare din două părți: *ipoteza* și *concluzia*. Ipoteza cuprinde descrierea tipului de figuri la care se referă proprietatea respectivă și anumite particularități care trebuie impuse acestor figuri. Concluzia conține una sau mai multe particularități ale acestor figuri, care se manifestă la orice figură care îndeplinește condițiile exprimate în ipoteză.

Exemplu. Proprietatea „prin două puncte distincte trece o dreaptă unică“ se referă la figurile formate din cîte două puncte, care au particularitatea de a fi distincte. Aceasta este ipoteza. Concluzia afirmă că, pentru astfel de figuri, există cîte o singură dreaptă care să le conțină.

Proprietățile mai simple se împart în cinci grupe: proprietăți de incidentă, proprietăți de ordonare, proprietăți de congruență, proprietăți de continuitate și proprietăți de paralelism. Proprietățile mai complicate fac să intervînă două sau mai multe proprietăți din grupe diferite.

2. Axiomele sau postulatele geometriei euclidiene plane

Euclid definește *punctul* ca o entitate indivizibilă, *linia* ca o lungime fără lărgime, *suprafața* ca entitate având lungime și lărgime, iar *solidul* ca entitate având lungime, lărgime și grosime. Aceste definiții nu sunt riguroș științifice, dar au calitatea de a fixa noțiunile de bază, prin proprietăți intuitive, care permit purtarea unui dialog.

Corpurile solide au caracter mai intuitiv decât punctele sau liniile și suprafețele. Dacă am admite că datele solidele, am putea defini suprafețele ca limite ale solidelor, liniile ca limite ale suprafețelor și punctele ca limite ale liniilor. Liniile drepte sunt lini împărțite, anume ele pot fi considerate ca poziții limită ale unor fire foarte bine intinse. Noțiunea de *linie dreaptă*, care apare în *Elementele* lui Euclid, corespunde noțiunii de *segment*.

Euclid a completat definițiile precedente printr-un sistem de 5 propoziții, pe care le-a admis ca adevărate și pe care le-a numit *postulate*:

1. *Între două puncte se poate duce o linie dreaptă.*
2. *Orice linie dreaptă poate fi prelungită nelimitat.*
3. *Se poate descrie un cerc de centru dat și de rază dată.*
4. *Toate unghiurile drepte sunt congruente între ele.*
5. *Dacă o linie dreaptă, care intersectează alte două lini împărțite, formează, de o același parte a sa, două unghiuri interne având suma mai mică decât două unghiuri drepte, cele două lini împărțite se vor intersecta, dacă sunt prelungite, de partea în care suma unghiurilor este mai mică decât două unghiuri drepte.*

În aceste enunțuri apar termenii de prelungire nelimitată, parte a unei drepte, congruență a două unghiuri și cerc. Pentru aceste noțiuni, Euclid a dat explicații intuitive, dar vagi din punct de vedere științific. De exemplu, noțiunea de congruență, la Euclid, se definește prin posibilitatea de a suprapune o figură peste alta, de exemplu un unghi peste alt unghi sau un segment peste alt segment.

Noțiunile fundamentale ale geometriei sunt acelea de *punct*, *dreaptă*, *plan* și *spațiu*, la care se adaugă relațiile de *ordonare* între punctele unei drepte și de *congruență* între două segmente sau între două unghiuri. Aceste noțiuni au caracter intuitiv, ele fiind extrase din experiență ce au fost efectuate de oameni de-a lungul multor milenii. Prin Spațiu înțelegem Spațiul în care trăim, care se numește uneori Univers sau Cosmos sau Spațiu fizic. Ansamblul științelor Naturii studiază proprietățile acestui Spațiu. Geometria, ca știință a Naturii, urmărește anumite proprietăți ale acestui Spațiu, neglijind aspectele fizice, chimice, biologice și geologice și are drept obiect de studiu proprietățile corpuri rigid (nedeformabile), care au forme mai simple. Geometria experimentală studiază proprietățile corpuri de dimensiuni direct perceptibile și măsurabile cu ajutorul instrumentelor obișnuite (riglă gradată, raportor, goniometru etc.). Geometria experimentală nu studiază

părți ale materiei, care au dimensiuni subatomice sau planetare. Măsurarea mărimilor de acest fel se face în mod indirect, pe baza unor ipoteze fizice sau chimice, și a unei abstractizări a geometriei experimentale, numită *geometria euclidiană și definită prin sistemul de axiome dat de Hilbert*. Sistemul de axiome dat de Hilbert va fi predat în clasa a X-a, deoarece se referă la geometria în spațiu.

3. Proprietăți de incidență ale punctelor și dreptelor dintr-un plan

Vom admite, fără demonstrații, următoarele proprietăți:

1. *Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una.*
2. *Orice dreaptă conține cel puțin două puncte.*
3. *În orice plan, există trei puncte care nu sunt situate pe o aceeași dreaptă.*

Cu ajutorul proprietăților indicate, putem demonstra că:

Două drepte distincte dintr-un plan au cel mult un punct comun.

Intr-adevăr, dacă ultima afirmație n-ar fi adevărată, atunci ar exista două drepte d și d' astfel încât intersecția $d \cap d'$ conține cel puțin două puncte. Dar proprietatea 1 arată că prin două puncte distincte trece o singură dreaptă. Deci intersecția $d \cap d'$ conține cel mult un punct.

Observație. Metoda folosită în această demonstrație este metoda reducerii la absurd, care constă în a arăta că negarea unei proprietăți, pe care vrem să-o demonstrăm, conduce la o contradicție cu una sau mai multe proprietăți admise sau demonstate anterior.

Exercițiu

Folosind metoda reducerii la absurd, demonstrați următoarele proprietăți:

- a. *Dacă A este un punct al unei drepte d , atunci dreapta d conține cel puțin un punct diferit de A .*
- b. *Dacă d este o dreaptă dintr-un plan p , atunci planul p conține cel puțin un punct nesituat pe dreapta d .*
- c. *Dacă A și B sunt două puncte distincte dintr-un plan p , atunci planul p conține cel puțin un punct C , astfel că punctele A , B , C să fie necoliniare.*
- d. *Dacă A , B , C sunt trei puncte necoliniare, atunci dreptele AB , BC , CA sunt distincte două cîte două.*

4. Proprietăți de ordonare

Dacă A , B , C sunt trei puncte necoliniare, atunci nici unul dintre aceste puncte nu se găsește între celelalte două.

Dacă A , B , C sunt trei puncte distincte coliniare, atunci unul din aceste puncte se va găsi între celelalte două. În figura I.1, punctul B se găsește între A și C , dar C nu se găsește între A și B .

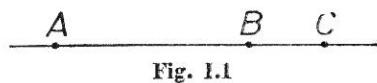


Fig. I.1

Pămînt și Soare, iar eclipsele totale de Lună se produc atunci cînd Luna se găsește între Pămîntul și Soare. Aceste fenomene se produc cu o periodicitate de 18 ani și 11 zile. Cunoașterea acestei perioade, numită de vechii chaldeeni „saros“, a avut o mare importanță pentru dezvoltarea științei despre Spațiul cosmic, deci și pentru dezvoltarea geometriei. Thales cunoștea perioada eclipselor totale de Soare și, pe baza acesteia, a putut anticipa eclipsa ce s-a produs în anul 584 i.e.n. și care a căpătat numele de eclipsa lui Thales.

Vom admite fără demonstrații următoarele proprietăți, numite proprietăți de ordonare:

1. Dacă punctul B se găsește între punctele A și C , atunci punctele A, B, C sunt coliniare și distințe, și B se găsește între C și A (fig. I.1).

2. Dacă A, B sunt două puncte distințe, atunci există cel puțin un punct C astfel ca B să se găsească între A și C (fig. I.1).

3. Dacă punctul B se găsește între A și C , atunci A nu se găsește între C și B (fig. I.1).

4. (axioma lui Pasch). Dacă A, B, C sunt trei puncte necoliniare și dacă d este o dreaptă situată în același plan ca aceste puncte, astfel încât d trece prin un punct situat între C și B , dar nu trece prin nici unul din punctele A, B, C și nu trece prin nici un punct situat între A și C , atunci dreapta d trece prin un punct situat între A și B (fig. I.2).

5. Fiind date trei puncte distincte și coliniare A, B, C , astfel încât A nu este între B și C , iar C nu este între A și B , cu siguranță punctul B se va găsi între A și C (fig. I.1).

6. Dacă A, B, C sunt trei puncte necoliniare și dacă L, M, N sunt trei puncte astfel încât L este între B și C , M este între C și A și N este între A și B , punctele L, M, N nu pot fi coliniare (fig. I.3).

7. Fiind date două puncte distincte A și B , există cel puțin un punct M situat între A și B (fig. I.4).

8. Dacă A, B, C, D sunt puncte astfel încât B este între A și C și C este între B și D , punctele B, C se vor găsi între A și D (fig. I.5).

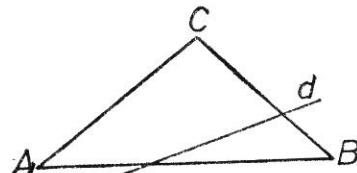


Fig. I.2

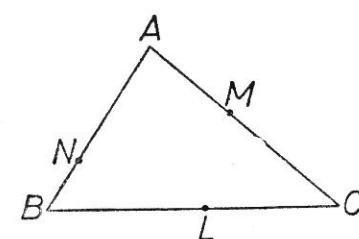


Fig. I.3

Fenomenele de eclipsă sint legate de situația exprimată prin cuvîntul „între“. De exemplu, eclipsele totale de Soare se produc atunci cînd Luna se găsește între

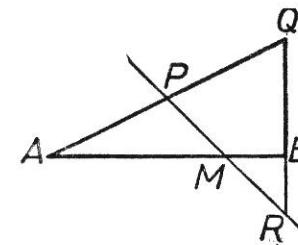


Fig. I.4

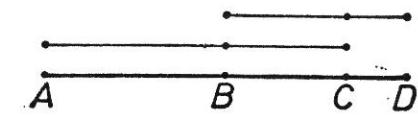


Fig. I.5

9. Dacă C este între D și A și dacă B este între A și C , atunci B este între A și D , iar C este între B și D (fig. I.6).

Dacă A și B sunt două puncte distințe, notăm prin $|AB|$ mulțimea punctelor situate între A și B și vom spune că $|AB|$ este segmentul deschis limitat de punctele A, B . Avem (fig. I.7):

$$|AB| = |BA|, \quad |AB| \subset AB, \quad A \notin |AB|, \quad B \notin |AB|.$$

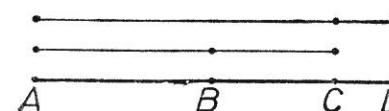


Fig. I.6



Fig. I.7

Punctelor A, B li se poate asocia și mulțimea $|AB| \cup \{A, B\}$, care va fi notată $[AB]$ și va fi numită segmentul închis limitat de punctele A, B . Avem $[AB] \subset AB$, $A \in [AB]$, $B \in [AB]$, $|AB| \subset [AB]$.

Trei puncte necoliniare, luate într-o anumită ordine, definesc un triunghi.

Fiind date punctele A, B, C , în ordinea scrisă, necoliniare, triunghiul definit de aceste puncte va fi notat ABC . Punctele A, B, C se numesc vîrfurile triunghiului ABC , iar segmentele $|AB|, |BC|, |CA|$ se numesc laturile triunghiului ABC (fig. I.8):

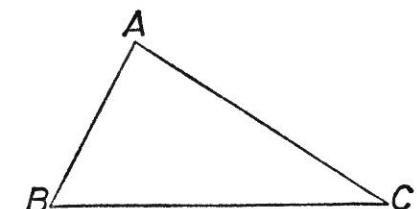


Fig. I.8

Exerciții

1. Fiind dat un punct A , să se arate că există puncte B, C astfel ca $B \in |AC|$.
2. Fie ABC un triunghi și fie punctele $M \in |AB|$, $N \in |AC|$. Să se arate că segmentele $|BN|$, $|CM|$ au un punct comun.
3. Ce putem spune despre trei puncte distincte A, B, C , dacă știm că $A \notin |BC|$, $B \notin |CA|$ și $C \notin |AB|$? Dar dacă știm că cele trei puncte sunt coliniare și că $A \notin |BC|$ și $C \notin |AB|$?

4. Reformulați axioma lui Pasch, utilizând noțiunea de triunghi și aceea de latură a unui triunghi.

(R. Dacă o dreaptă d din planul unui triunghi ABC trece printr-un punct al laturii $|BC|$, dar nu trece prin nici unul din vîrfurile A, B, C și dacă d nu trece prin nici un punct al laturii $|AB|$, atunci dreapta d trece printr-un punct al laturii $|AC|$.)

5. Semidrepte și semiplane

Proprietatea fundamentală 1. Fie O un punct pe o dreaptă d . Există atunci două și numai două mulțimi d' și d'' astfel încât să avem (fig. I.9):

- $d' \cup d'' = d - \{O\}$.
- Dacă $A \in d', B \in d', C \in d''$ și $D \in d''$, atunci $O \notin |AB|$, $O \notin |CD|$, $O \in |AC|$.



Fig. I.9

Această proprietate se demonstrează plecind de la observația că dreapta d conține cel puțin un punct P diferit de O și că d mai conține cel puțin un punct Q , astfel încât să avem $O \in |PQ|$.

Să definim atunci mulțimiile:

$$(1) \quad d' = \{M \in d; O \in |QM|\}, \quad d'' = \{N \in d; O \in |PN|\}.$$

În clasa a X-a, se va arăta că mulțimile d' și d'' îndeplinesc condițiile a și b și că d', d'' sunt singurele mulțimi care îndeplinesc aceste condiții.

Definiție. Mulțimile d', d'' , care îndeplinesc condițiile a și b din proprietatea fundamentală 1, și care pot fi definite prin formule de forma (1), se numesc semidreptele limitate de punctul O pe dreapta d .

Dacă notăm prin s una din semidreptele d', d'' , spunem că O este originea semidreptei s , iar d este suportul semidreptei s . Două semidrepte, care au același suport și aceeași origine, se numesc opuse.

O semidreaptă este complet definită prin originea sa și printr-un punct oarecare aparținând semidreptei. Dacă semidreapta s are originea O și dacă s conține un punct A , scriem $s = |OA|$.

Originea unei semidrepte s nu aparține acelei semidrepte, datorită condiției a . Deci dacă $s = |OA|$, atunci $A \neq O$ și $|OA| \subset OA$.

Exerciții

- Fie $s = |OA| = |OB|$. Să se arate că $|OA| \subset OA$ și că dacă $A \neq B$, atunci $|AB| \subset s$.
- Dacă A, B sunt puncte distințte, atunci $|AB| = (|AB| \cap |BA|)$ și $AB = (|AB| \cup |BA|)$.

Proprietatea fundamentală 2.

Fie d o dreaptă într-un plan p . Există atunci două și numai două mulțimi p' și p'' astfel încât să avem (fig. I.10)

$$a'. p' \cup p'' = p - d.$$

b'. Dacă $A \in p', B \in p', C \in p''$ și $D \in p''$, atunci

$$|AB| \cap d = \emptyset, |CD| \cap d = \emptyset, |AC| \cap d \neq \emptyset.$$

Demonstrația se face observând că există în planul p cel puțin un punct $P \notin d$. Alegind apoi în mod arbitrar un punct $O \in d$ și apoi un punct Q astfel ca $O \in |PQ|$, vom putea defini mulțimile

$$(2) \quad p' = \{M \in p; |QM| \cap d \neq \emptyset\}, \quad p'' = \{N \in p; |PN| \cap d \neq \emptyset\}.$$

În manualul de clasa a X-a, se va arăta că aceste mulțimi sint singurele mulțimi, care verifică condițiile a' și b' .

Definiție. Mulțimile p', p'' care verifică condițiile a' și b' se numesc semiplanele limitate de dreapta d în planul p . Dreapta d se va numi frontieră a fiecărei din mulțimile p', p'' . Vom mai spune că două semiplane, având aceeași frontieră și incluse în același plan, sunt opuse.

Pentru a defini un semiplan, este suficient să indicăm frontieră să și unul din punctele sale. Semiplanul având ca frontieră dreapta d și care conține punctul A , va fi notat $|dA|$.

Nici un semiplan nu-și conține frontieră.

Exerciții

1. Fie d, d' două drepte conținute într-un plan p și concurente într-un punct O . Fie p', p'' semiplanele limitate de dreapta d în planul p . Să se arate că mulțimile $d' \cap p', d'' \cap p''$ reprezintă semidreptele limitate de punctul O pe dreapta d' .

2. Fie d și a două drepte disjuncte situate într-un plan p și fie $A \in a$. Să se arate că $a \subset |dA|$.

3. Fie semiplanul $S = |dA|$ și semidreapta $s = |OA|$, unde $O \in d$. Să se arate că $s \subset S$.

4. Fie A, B două puncte situate pe o semidreaptă s și într-un semiplan S . Să se arate că $|AB| \subset s$ și $|AB| \subset S$.

6. Unghiuri

Un unghi este o pereche de semidrepte având aceeași origine (fig. I.11).

Unghiul format din semidreptele h, k va fi notat \widehat{hk} . Originea comună a semidreptelor h, k se numește vîrful unghiului \widehat{hk} , iar semidreptele h, k se numesc laturile acestui unghi.

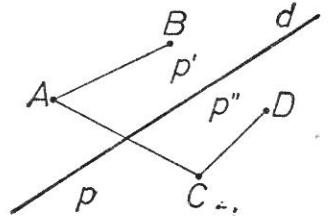


Fig. I.10

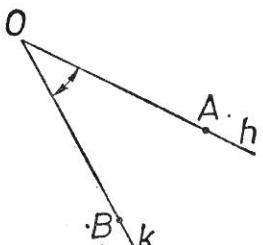


Fig. I.11

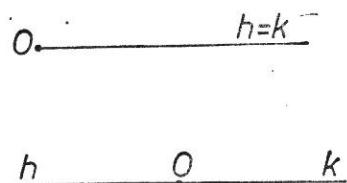


Fig. I.12

Dacă avem punctele $A \in h$ și $B \in k$, vom mai nota unghiul \widehat{hk} prin \widehat{AOB} , unde O este vîrful unghiului \widehat{hk} (fig. I.11).

Dacă $h = k$, spunem că \widehat{hk} este un *unghi nul*, iar dacă h și k sunt semidrepte opuse, spunem că \widehat{hk} este un *unghi alungit*. Un unghi care nu este nici nul, nici alungit, se numește *unghi propriu*. Să considerăm un unghi propriu \widehat{hk} . Fie a, b suporții laturilor h și k ale unghiului \widehat{hk} , astfel ca $h \subset a$ și $k \subset b$. Semidreapta h se găsește într-un același semiplan H limitat de dreapta b , iar k se găsește într-un semiplan K , limitat de dreapta a . Intersecția $H \cap K$ a celor două semiplane este o mulțime de puncte numită *interiorul unghiului propriu* \widehat{hk} . Această mulțime va fi notată $\text{Int } \widehat{hk}$ (fig. I.13).

Avem pentru orice unghi, $\widehat{hk} = \widehat{kh}$ și pentru orice unghi propriu,

$$\text{Int } \widehat{hk} = \text{Int } \widehat{kh}.$$

Două unghiuri proprii care au același vîrf, o latură comună și interioarele disjuncte, se numesc unghiuri *adiacente* (fig. I.14).

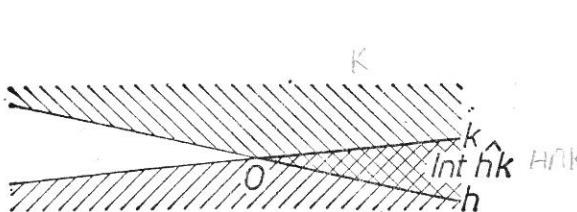


Fig. I.13

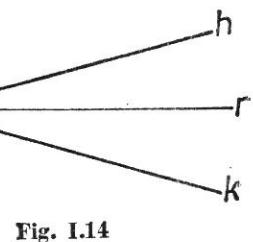


Fig. I.14

Două unghiuri adiacente, care au laturile necomune opuse, se numesc *unghiuri suplementare* (fig. I.15).

Două unghiuri care au același vîrf și care au laturile opuse două cîte două, se numesc unghiuri *opuse la vîrf* (fig. I.16).

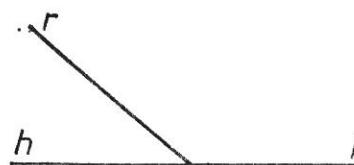


Fig. I.15

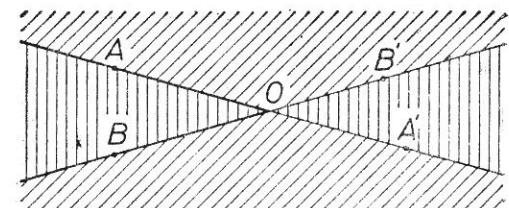


Fig. I.16

Exemplu

1. Fie punctele A, B, A', B' , O astfel ca $O \in |AA'| \cap |BB'|$. În acest caz, unghiurile $\widehat{AOB}, \widehat{BOA}'$ sunt suplementare, iar unghiurile $\widehat{AOB}, \widehat{A'OB'}$ sunt opuse la vîrf (fig. I.16).

2. Fie ABC un triunghi. Unghiurile $\widehat{A} = \widehat{BAC} = \widehat{CAB}, \widehat{B} = \widehat{ABC} = \widehat{CBA}$ și $\widehat{C} = \widehat{ACB} = \widehat{BCA}$ se numesc *unghiurile triunghiului ABC*, iar suplementele acestor unghiuri se numesc *unghiurile exterioare* ale triunghiului ABC .

3. Intersecția interioarelor unghiurilor triunghiului ABC este egală cu intersecția a trei semiplane, limitate de dreptele AB , BC , CA și conținând vîfurile C, B , respectiv A, C, A . Această intersecție se numește *interiorul triunghiului ABC* și se notează $\text{Int } ABC$ (fig. I.17).

Definiție. Se numește mulțime convexă orice mulțime M de puncte, care are următoarea proprietate: dacă A, B sunt două puncte distincte ale mulțimii M , atunci M conține toate punctele segmentului $|AB|$.

O mulțime formată dintr-un singur punct este convexă, deoarece pentru o astfel de mulțime nu se pune nici o condiție.

O mulțime formată din două puncte distincte nu este niciodată convexă, deoarece o astfel de mulțime nu conține nici un punct al segmentului deschis limitat de punctele care o formează. În general, o mulțime finită conținind $n > 1$ puncte, nu poate fi convexă.

Planele, dreptele, semidreptele, segmentele deschise sau închise, semiplanele, interiorul unui unghi propriu, interiorul unui triunghi sunt mulțimi convexe. Orice intersecție de mulțimi convexe este o mulțime convexă.

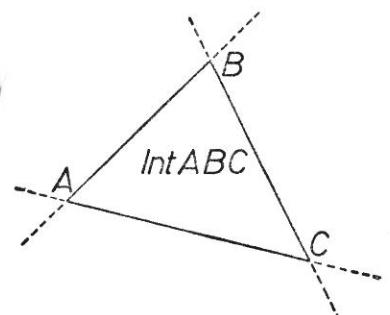


Fig. I.17

Exerciții

1. Să se arate că două unghiuri opuse la virf au un suplement comun.
2. Să se arate că interioarele celor patru unghiuri formate de două drepte distincte și concurențe sunt disjuncte două cîte două.
3. Fie \widehat{hk} un unghi propriu și fie punctele $A \in h$, $B \in k$. Să se arate că $|AB| \subset \text{Int } \widehat{hk}$.
4. Fie O un punct pe latura $|BC|$ a triunghiului ABC și fie s o semidreaptă cu originea O și conținută în interiorul unghiului \widehat{AOC} . Să se arate că $s \cap |AC| \neq \emptyset$ și $că s \cap |AB| = \emptyset$.
5. Să considerăm un plan p , o dreaptă $d \subset p$ și un punct $O \in d$. Să se arate că mulțimile $p - d$, $p - \{O\}$, $d - \{O\}$ nu sunt convexe.
6. Fie ABC un triunghi în planul p . Să se arate că mulțimile $p - |AB|$, $p - \text{Int } ABC$ nu sunt convexe.
7. Fie O un punct interior triunghiului ABC și fie d o dreaptă în planul triunghiului ABC , astfel ca $O \in d$. Să se arate că intersecția $d \cap \text{Int } ABC$ este un segment.

7. Proprietăți de congruență

Am arătat că figurile sunt mulțimi de puncte, de segmente, de drepte, de semidrepte, de semiplane, sau de alte mulțimi ce pot fi definite cu ajutorul acestora. De exemplu, un segment este o mulțime de puncte, un unghi este o mulțime formată din două semidrepte; putem considera o mulțime de segmente, care va fi de asemenea o figură, sau o mulțime de unghiuri etc.

Două mulțimi se consideră egale, dacă și numai dacă ele sunt formate din aceleași elemente. Dacă mulțimile A , B sunt egale, se scrie $A = B$. Dacă mulțimile M , N diferă cel puțin printr-un element, deci dacă există $x \in M$ astfel ca $x \notin N$, sau dacă există $y \in N$ astfel ca $y \notin M$, atunci spunem că mulțimile M , N nu sunt egale sau că ele sunt distincte și scriem $M \neq N$.

În matematica modernă, aproape toate obiectele studiate sunt mulțimi. Prin urmare, dacă vrem să ne încadrăm în matematica modernă, trebuie să folosim cuvîntul egal atunci și numai atunci cind ne referim la mulțimi egale, și să folosim semnul „=” numai în aceste situații.

Cărțile mai vechi de geometrie foloseau termenul de egalitate pentru a desemna figuri ce au aceeași mărime sau care se pot suprapune una peste celalătă, fără a forma vreuna din ele. Astăzi, ne referim la această situație, relativ la anumite perechi de figuri, spunind că figurile sunt *congruente*. Dacă figurile F , F' sunt congruente, scriem

$$F \equiv F'.$$

Două segmente desenate pe o foaie de hîrtie cu ajutorul unei rigle gradate și avînd fiecare lungimea de 1 cm sunt congruente. Un segment de 1 cm nu este congruent cu nici un segment avînd mai puțin de 1 cm sau mai mult de 1 cm. Două unghiuri de 30° sunt congruente

Pentru a explica termenul de congruență am dat exemple din geometria experimentală. În geometria abstractă, care nu folosește nici rigle, nici raportoare, congruența se introduce prin cinci proprietăți, care o caracterizează și anume:

1. Fie s o semidreaptă cu originea O și fie $|AB|$ un segment. Există pe semidreapta s un singur punct M , astfel ca segmentul $|OM|$ să fie congruent cu segmentul $|AB|$ (fig. I.18).

Notatie. Dacă un segment $|A'B'|$ este congruent cu un segment $|AB|$, se va scrie $|A'B'| \equiv |AB|$.

Definiție. Se numește relație de echivalență într-o mulțime M orice mulțime \mathcal{R} de perechi de elemente din M astfel încât să fie verificate următoarele proprietăți:

- 1) Dacă x este un element oarecare din mulțimea M , atunci $(x, x) \in \mathcal{R}$. Această proprietate se exprimă spunind că orice element al mulțimii M este echivalent cu el însuși.

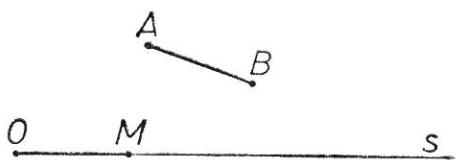


Fig. I.18

Proprietatea 1) este proprietatea de reflexivitate.

- 2) Dacă x, y sunt elemente ale mulțimii M astfel ca $(x, y) \in \mathcal{R}$, atunci avem și $(y, x) \in \mathcal{R}$.

Deci, dacă x este echivalent cu y , atunci și y este echivalent cu x . Proprietatea 2) este proprietatea de simetrie.

- 3) Dacă x, y, z sunt elemente ale mulțimii M , astfel ca $(x, y) \in \mathcal{R}$, și $(y, z) \in \mathcal{R}$, atunci avem și $(x, z) \in \mathcal{R}$.

Deci, dacă x este echivalent cu y și dacă y este echivalent cu z , atunci x este echivalent cu z .

Proprietatea 3) este proprietatea de tranzitivitate.

Una din cele mai importante proprietăți ale figurilor în general, și ale segmentelor în particular, constă în faptul că *relația de congruență a segmentelor este o relație de echivalență*.

2. Dacă $|AB|$, $|A'B'|$, $|A''B''|$ sunt trei segmente astfel ca $|AB| \equiv \equiv |A'B'|$ și $|A'B'| \equiv |A''B''|$, atunci avem $|AB| \equiv |A''B''|$, $|A'B'| \equiv \equiv |AB|$ și $|AB| \equiv |A''B''|$, (fig. I.19).

3. Dacă avem șase puncte A, B, C, A', B', C' astfel ca B' se găsește între A' și C' , B se găsește între A și C și $|AB| \equiv |A'B'|$, $|BC| \equiv |B'C'|$, atunci $|AC| \equiv |A'C'|$ (fig. I.20).

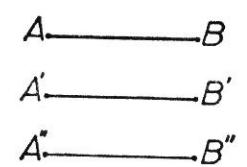


Fig. I.19

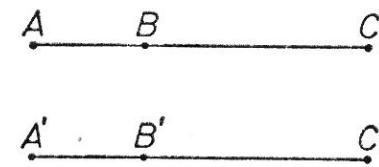


Fig. I.20

4. Fiind date un unghi propriu \hat{hk} și o semidreaptă s într-un plan p și notând prin p' unul din semiplanele limitate de suportul lui s în planul p , există o singură semidreaptă t în semiplanul p' astfel că s și t să formeze un unghi congruent cu unghiul \hat{hk} . Orice unghi este congruent cu el însuși.

Dacă $\hat{hk} \equiv \hat{h'k'}$, atunci $\hat{h'k'} \equiv \hat{hk}$.

Notăție. Pentru a exprima că unghiul \hat{st} este congruent cu unghiul \hat{hk} , vom scrie $\hat{st} \equiv \hat{hk}$.

5. Fiind date două triunghiuri ABC , $A'B'C'$ astfel că $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, $|AB| \equiv |A'B'|$ și $|AC| \equiv |A'C'|$, avem și $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, (fig. I. 21).

Proprietatea de congruență 1 se numește uneori *axiomă de purtare congruentă a segmentelor*. Proprietatea de congruență 3 se numește *axiomă de adunare a segmentelor*. Proprietatea 4 se numește uneori *axiomă de purtare congruentă a unghiurilor*.

Definiție. Fie $|AB|$, $|CD|$ două segmente și fie P , Q , R trei puncte astfel că punctul Q să se găsească între punctele P , R și să avem $|AB| \equiv |PQ|$, $|CD| \equiv |QR|$ (fig. I.22).

Se spune atunci că segmentul $|PR|$ reprezintă suma segmentelor $|AB|$ și $|CD|$ și se scrie $|PR| \equiv |AB| + |CD|$.

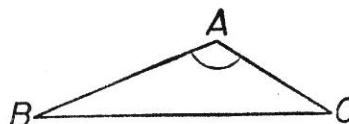


Fig. I.21

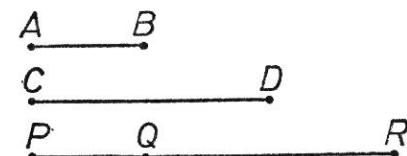


Fig. I.22

Dacă segmentele $|PR|$, $|P'R'|$ reprezintă fiecare suma segmentelor $|AB|$, $|CD|$, atunci $|PR| \equiv |P'R'|$.

Definiție. Fie \hat{hk} , \hat{mn} două unghiuri și fie r , s , t trei semidrepte cu aceeași origine, astfel că \hat{rt} să fie unghi propriu și s să fie conținută în interiorul unghiului \hat{rt} și astfel că $\hat{rs} \equiv \hat{hk}$ și $\hat{st} \equiv \hat{mn}$. Se spune atunci că unghiul \hat{rt} reprezintă suma unghiurilor \hat{hk} , \hat{mn} (fig. I.23) și se scrie $\hat{rt} \equiv \hat{hk} + \hat{mn}$.

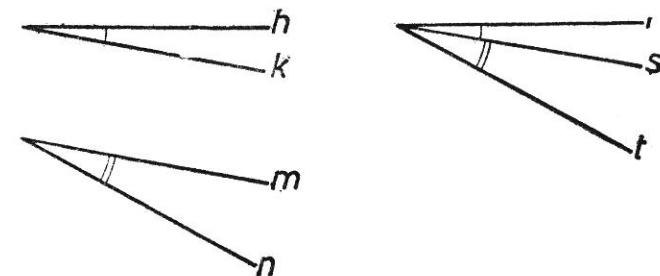


Fig. I.23

Observație importantă. Pentru oricare două segmente $|AB|$, $|CD|$ există segmente care reprezintă suma segmentelor $|AB|$, $|CD|$, dar nu orice perche de unghiuri \hat{hk} , \hat{mn} admit o sumă. De exemplu, un unghi alungit nu poate fi adunat cu un unghi nenul.

Convenim să spunem că un unghi oarecare \hat{hk} reprezintă suma unghiului \hat{hk} cu un unghi nul. Vom mai conveni să spunem că suma a două unghiuri suplementare este un unghi alungit. Dacă unghiul \hat{hk} reprezintă suma unghiurilor \hat{hm} , \hat{mk} și dacă m , m' sunt semidrepte opuse, atunci unghiurile $\hat{hm'}$, $\hat{m'k}$ admit o sumă numai dacă \hat{hk} este alungit.

Următoarele relații sint incompatibile:

$$B \in |AC|, C' \in |A'B'|, |AB| \equiv |A'B'|, |AC| \equiv |A'C'|.$$

Definiție. Fie $|AB|$, $|CD|$ două segmente și fie s o semidreaptă cu originea O . Considerăm punctele P , Q pe semidreapta s , astfel că $|OP| \equiv |AB|$, $|OQ| = |CD|$ (fig. I.24).

Dacă $P \in |OQ|$, vom spune că segmentul $|AB|$ este mai mic decât segmentul $|CD|$, relativ la semidreapta s , sau că segmentul $|CD|$ este mai mare decât segmentul $|AB|$ relativ la s .

Dacă avem două segmente $|AB|$ și $|CD|$ și două semidrepte s , s' și dacă $|AB|$ este mai mic decât $|CD|$ relativ la s , atunci $|AB|$ este mai mic decât $|CD|$ și relativ la s' .

Definiție. Fiind date două segmente $|AB|$, $|CD|$, vom spune că $|AB|$ este mai mic decât $|CD|$ sau că $|CD|$ este mai mare decât $|AB|$, $|AB| < |CD|$ sau $|CD| > |AB|$, dacă $|AB|$ este mai mic decât $|CD|$ relativ la o semidreaptă arbitrară s .

Fiind date două segmente $|AB|$, $|CD|$, este adevarată una și numai una din relațiile

$$|AB| \equiv |CD|, |AB| < |CD|, \\ |AB| > |CD|.$$

Fiind date trei segmente $|AB|$, $|CD|$, $|EF|$ astfel ca $|AB| < |CD|$ și $|CD| < |EF|$, avem $|AB| < |EF|$.

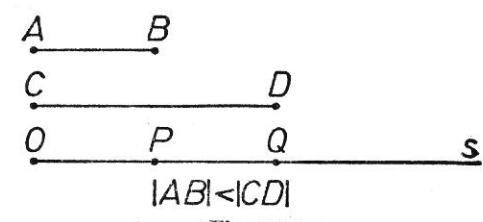


Fig. I.24

Relația de comparare a segmentelor este o relație tranzitivă. Relația $|AB| \ll |CD|$ nu este nici reflexivă, nici simetrică.

Să reținem că:

Fie date două segmente $|AB|, |CD|$; dacă fixăm o semidreaptă s , cu originea într-un punct O , suma celor două segmente se reprezintă printr-un segment $|OM|$, unde $M \in s$. Două segmente care reprezintă suma a două segmente date sunt congruente între ele.

Fiind date două segmente $|AB|, |CD|$, ele pot fi comparate astfel: alegem o semidreaptă s , cu originea O și luăm punctele $M \in s, N \in s$ astfel ca $|OM| \equiv |AB|, |ON| \equiv |CD|$. În acest caz, dacă $M \in |ON|$ spunem că $|AB|$ este mai mic decit $|CD|$. Această regulă de comparare nu depinde de alegerea semidreptei s .

Exerciții

1. Să se arate că dacă segmentul $|OP|$ reprezintă suma segmentelor $|AB|, |CD|$, atunci $|OP|$ reprezintă și suma segmentelor $|CD|, |AB|$ (adunarea segmentelor este comutativă).

(Indicație. Se construiește suma $|CD| + |AB|$ alegind ca semidreaptă ajutătoare semidreapta $|PO|$)

2. Să se arate că dacă segmentul $|OS|$ reprezintă suma

$$(|AB| + |CD|) + |EF|,$$

atunci $|OS|$ reprezintă și suma

$$|AB| + (|CD| + |EF|)$$

(adunarea segmentelor este asociativă).

3. Să se arate că dacă segmentul $|AB|$ este mai mic decit segmentul $|CD|$, atunci există un segment $|EF|$ astfel încit $|CD|$ reprezintă suma segmentelor $|AB|$ și $|EF|$.

4. Fie $ABC, A'B'C'$ două triunghiuri astfel că

$$\hat{A} = \hat{A}', |AB| \equiv |A'B'|, |AC| \equiv |A'C'|.$$

Să se arate că $\hat{C} \equiv \hat{C}'$.

8. Teoremele de congruență a două triunghiuri

Definiție. Se spune că două triunghiuri $ABC, A'B'C'$ sunt congruente, dacă avem

$$\hat{A} \equiv \hat{A}', \hat{B} \equiv \hat{B}', \hat{C} \equiv \hat{C}', |AB| \equiv |A'B'|, |BC| \equiv |B'C'|, \\ |AC| \equiv |A'C'|.$$

În acest caz, notăm: $ABC \equiv A'B'C'$.

Teorema I de congruență. Relațiile

$$\hat{A} \equiv \hat{A}', |AB| \equiv |A'B'|, \\ |AC| \equiv |A'C'|$$

implică congruența triunghiurilor $ABC, A'B'C'$ (fig. I.25).

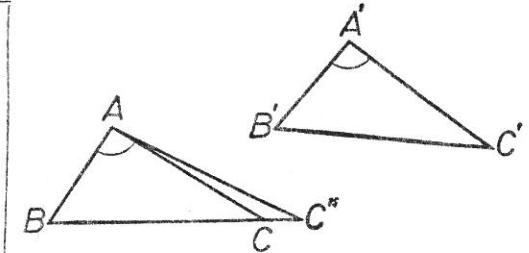


Fig. I.25

Demonstrație. Pe semidreapta $|BC$ se consideră un punct C'' astfel ca $|BC'| \equiv |B'C''|$. Proprietatea 5 de congruență dă $\hat{B} \equiv \hat{B}'$. Aplicând aceeași proprietate triunghiurilor $BAC'', B'A'C'$ deducem $\widehat{BAC''} = \widehat{B'A'C'}$. Dar $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$. Din unicitatea purtării congruente a unghiurilor (proprietatea 4) rezultă $|AC''| = |AC|$, deci $C'' = C$ și atunci $|BC| \equiv |B'C''|$.

Din proprietatea 5 de congruență deducem apoi $\hat{C} \equiv \hat{C}'$. Deci triunghiurile $ABC, A'B'C'$ sunt congruente.

X Teorema unghiurilor suplementare. Fie unghiurile $\widehat{hk}, \widehat{km}, \widehat{h'k'}, \widehat{k'm'}$ astfel că \widehat{hk} este un suplement al unghiului \widehat{km} , $\widehat{h'k'}$ este un suplement al unghiului $\widehat{k'm'}$ și $\widehat{hk} \equiv \widehat{h'k'}$. În aceste condiții, avem $\widehat{km} \equiv \widehat{k'm'}$.

Demonstrație. Alegem pe semidreptele h, k, m, h', k', m' punctele A respectiv B, C, A', B', C' astfel încit avem $|OA| \equiv |O'A'|, |OB| \equiv |O'B'|, |OC| \equiv |O'C'|$, unde O și O' sunt originile semidreptelor h respectiv h' (fig. I.26). Din ipoteze rezultă $O \in |AC|, O' \in |A'C'|$. Din teorema I de congruență rezultă

$|AB| \equiv |A'B'|, \hat{A} \equiv \hat{A}'$, iar din proprietatea 3 de congruență deducem că $|AC| \equiv |A'C'|$. Aplicând teorema I de congruență triunghiurilor $ABC, A'B'C'$, deducem $|BC| \equiv |B'C'|$ și $\widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'}$. Apoi din triunghiurile $BOC, B'O'C'$ deducem $\widehat{BOC} \equiv \widehat{B'O'C'}$, deci $\widehat{km} \equiv \widehat{k'm'}$. Deci am arătat că două unghiuri congruente au suplemente congruente.

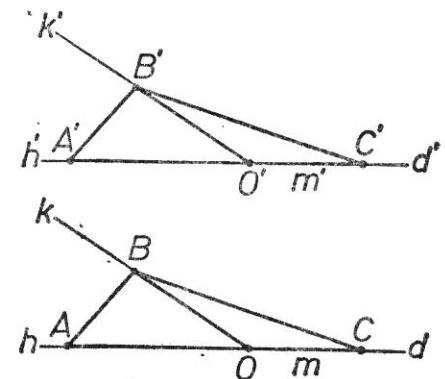


Fig. I.26

Reciproca teoremei unghiurilor suplementare. Fie $\hat{h}k$, \hat{km} două unghiuri suplementare și fie h' , k' , m' trei semidrepte cu aceeași origine și astfel că $\hat{h}'k' \equiv \hat{h}k$, $\text{Int } \hat{h}'k' \cap \text{Int } \hat{k}'m' = \emptyset$ și $\hat{km} \equiv \hat{k}'m'$; atunci semidreptele k' , m' sunt în prelungire, deci unghiurile $\hat{h}'k'$, $\hat{k}'m'$ sunt suplementare.

Demonstrație. Prin reducere la absurd, folosind teorema unghiurilor suplementare și proprietatea 4 de congruență, care asigură unicitatea purtării congruente a unghiurilor.

Teorema unghiurilor opuse. Dacă avem cinci puncte O , A , A' , B , B' astfel ca $O \in |AA'|$ și $O \in |BB'|$, atunci $\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'OB'}$ (fig. 1.27).

Intr-adevăr, cele două unghiuri au un suplement comun, anume unghiul $\widehat{AOB'}$. Din ultima teoremă rezultă $\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'OB'}$.

Teorema 1 a triunghiului isoscel. Dacă un triunghi ABC are $|AB| \equiv |AC|$, atunci $\hat{B} \equiv \hat{C}$.

Demonstrație. Se aplică teorema 1 de congruență triunghiurilor ABC și ACB și se ține seama că $\widehat{BAC} = \widehat{CAB}$, deci $\widehat{BAC} \equiv \widehat{CAB}$ (fig. 1.28).

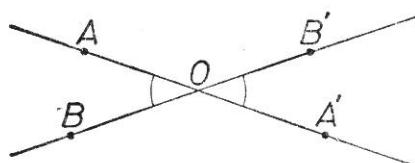


Fig. 1.27

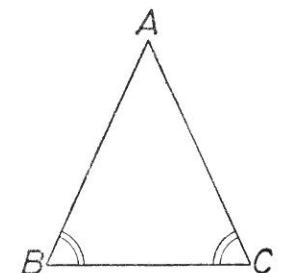


Fig. 1.28

Teorema II de congruență. Dacă două triunghiuri ABC , $A'B'C'$ au

$$|BC| \equiv |B'C'|, \hat{B} \equiv \hat{B}', \hat{C} \equiv \hat{C}',$$

atunci cele două triunghiuri sunt congruente (fig. 1.29).

Demonstrație. Pe semidreapta $|BA$ luăm acel punct A'' , pentru care $|BA''| \equiv |B'A'|$. Aplicind teorema I de congruență triunghiurilor $A''BC$, $A'B'C'$ obținem $\widehat{BCA''} \equiv \widehat{B'C'A'}$. Dar avem și $\widehat{BCA} \equiv \widehat{B'C'A'}$. Din pro-

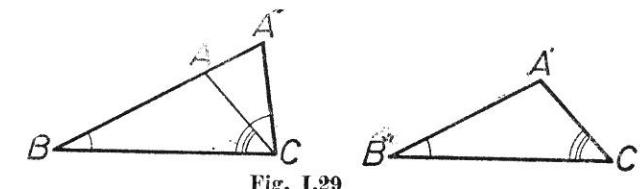


Fig. 1.29

prietatea 4 de congruență deducem $|CA''| \equiv |CA|$, deci avem $A'' = A$ și $|AB| \equiv |B'A'|$. Putem acum aplica teorema I de congruență triunghiurilor ABC , $A'B'C'$.

Teorema 2 a triunghiului isoscel. Dacă un triunghi ABC are $\hat{B} \equiv \hat{C}$, atunci $|AB| \equiv |AC|$.

Demonstrație. Se aplică teorema II de congruență triunghiurilor ABC , ACB și se folosește faptul că avem, prin definiție, $|BC| \equiv |CD|$, deci $|BC| \equiv |CB|$.

Teorema triunghiurilor simetrice. Fie A , B , C , C' patru puncte într-un plan p , astfel ca $|CA| \equiv |C'A|$ și $|CB| \equiv |C'B|$ și astfel ca punctele C și C' să se găsească în semiplane opuse față de dreapta AB . Atunci triunghiurile ABC , ABC' sunt congruente.

Demonstrație. Punctele C , C' fiind în semiplane opuse față de AB , segmentul $|CC'|$ are un punct comun cu dreapta AB ; fie O acest punct. Sunt posibile mai multe cazuri:

a) $O = A$. Triunghiul BCC' este isoscel, având $|BC| \equiv |BC'|$; deci $\widehat{BCC'} \equiv \widehat{BC'C}$. Triunghiurile ABC , ABC' sunt congruente în virtutea teoremei I de congruență a triunghiurilor (fig. I.30).

b) $O = B$. Demonstrație analoagă.

c) $O \in |AB|$. Considerind triunghiurile isoscele ACC' , BCC' , deducem

$$(1) \quad \widehat{ACC'} \equiv \widehat{AC'C}, \quad \widehat{BCC'} \equiv \widehat{BC'C}$$

și avem prin urmare $\widehat{ACB} \equiv \widehat{AC'B}$. Din teorema I de congruență a triunghiurilor, deducem că triunghiurile ABC , ABC' sunt congruente (fig. I.31).

d) $A \in |OB|$. Deducem ca la punctul c) relațiile (1); considerind diferențele unghiurilor ce apar în aceste relații, deducem $\widehat{ACB} \equiv \widehat{AC'B}$. Deci avem, și în acest caz, $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ABC'}$ (fig. I.31).

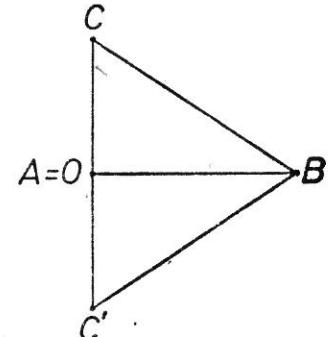


Fig. 1.30

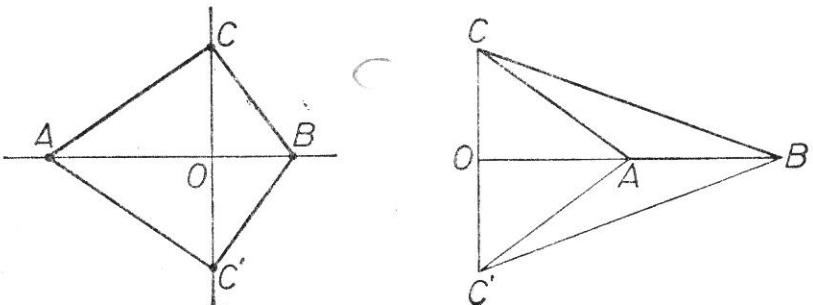


Fig. I.31

Teorema III de congruență. Dacă două triunghiuri $ABC, A'B'C'$ au $|AB| \equiv |A'B'|$, $|AC| \equiv |A'C'|$ și $|BC| \equiv |B'C'|$, atunci cele două triunghiuri sunt congruente.

Demonstrație. În semiplanul limitat de dreapta BC și conținind punctul A , se consideră punctul A'' astfel ca $\widehat{BCA} \equiv \widehat{B'C'A'}$ și $|CA''| \equiv |C'A'|$ (fig. I.32). În semiplanul opus lui A față de BC se ia apoi punctul A''' , astfel ca $\widehat{BCA''} \equiv \widehat{B'C'A'}$ și $|CA'''| \equiv |C'A'|$. Din teorema I de congruență deducem relațiile $|A''B| \equiv |A'''B| \equiv |A'B'| \equiv |AB|$. Aplicând teorema triunghiurilor simetrice triunghiurilor $ABC, A''BC$ și apoi triunghiurilor $A''BC, A'''BC$, obținem congruențele $\widehat{BCA} \equiv \widehat{BCA''}$, $\widehat{BCA''} \equiv \widehat{BCA'''}$. Din proprietatea de congruență 4 rezultă atunci $CA'' = CA$ deci avem $A'' = A$. Din felul în care a fost ales A'' deducem că $\widehat{BCA} \equiv \widehat{B'C'A'}$. Sintem în condiții de aplicabilitate a teoremei I de congruență, din care rezultă ABC congruent cu $A'B'C'$.

Exerciții

1. Să se arate că dacă un triunghi ABC are $\widehat{B} \not\equiv \widehat{C}$, atunci $|AB| \not\equiv |AC|$.
2. Fie $|AB|, |A'B'|$ două segmente congruente și fie punctele $C \in |AB|, C' \in |A'B'|$ astfel ca $|AC| \equiv |A'C'|$. Să se arate că $|BC| \equiv |B'C'|$.

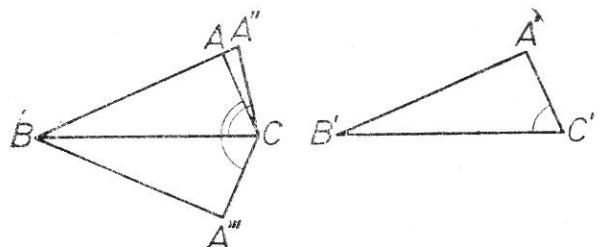


Fig. I.32

3. Fie $OAB, O'A'B'$ două triunghiuri congruente și fie punctele $C \in |AB|, C' \in |A'B'|$ astfel ca $|AC| \equiv |A'C'|$. Să se arate că $\widehat{AOC} \equiv \widehat{AO'C'}$ și $\widehat{BOC} \equiv \widehat{B'O'C'}$. Să se arate apoi că $|OC| \equiv |O'C'|$.

4. Fie $OAB, O'A'B'$ două triunghiuri congruente și fie punctele $C \in |AB|, C' \in |A'B'|$, $C \equiv \text{Int } \widehat{A'O'B'}$, astfel ca $|OC| \equiv |O'C'|$ și $\widehat{AOC} \equiv \widehat{AO'C'}$. Să se arate că $C' \in |A'B'|$.

5. Fie $\widehat{hk}, \widehat{km}$ și $\widehat{h'k'}, \widehat{k'm'}$ două perechi de unghiuri adiacente, astfel ca $\widehat{hk} \equiv \widehat{h'k'}$ și $\widehat{km} \equiv \widehat{k'm'}$, $k \subset \text{Int } \widehat{hm}$, $k' \subset \text{Int } \widehat{h'm'}$. Să se arate că $\widehat{hm} \equiv \widehat{h'm'}$.

6. Să se arate că dacă două unghiuri $\widehat{rs}, \widehat{r's'}$ reprezintă suma altor două unghiuri $\widehat{hk}, \widehat{lm}$, atunci $\widehat{rs} \equiv \widehat{r's'}$.

7. Fie $\widehat{hk}, \widehat{km}$ și $\widehat{h'k'}, \widehat{k'm'}$ două perechi de unghiuri adiacente, astfel ca $\widehat{hk} \equiv \widehat{h'k'}$, $\widehat{km} \equiv \widehat{k'm'}$ și $k \subset \text{Int } \widehat{hm}$, $k' \subset \text{Int } \widehat{h'm'}$. Să se arate că avem $\widehat{km} \equiv \widehat{k'm'}$.

8. Să se dea o interpretare proprietății conținute în exercițiul precedent, folosind noțiunea de diferență a două unghiuri.

9. Fie $OAB, O'A'B'$ două triunghiuri congruente și fie punctele $C \in |AB|, C' \in |A'B'|$ astfel ca $\widehat{AOC} \equiv \widehat{AO'C'}$. Să se arate că dacă $C \in |AB|$, atunci $C' \in |A'B'|$.

10. Fie r, s, h, k patru semidrepte cu aceeași origine O , astfel ca r și s să fie opuse și situate pe o dreaptă d , iar h și k să fie de o aceeași parte a dreptei d , într-un plan P . Să se arate că dacă h nu este interioară unghiului \widehat{rk} , atunci: h este interioară unghiului \widehat{sk} , r și h se găsesc în semiplane opuse față de suportul lui k și k este interioară unghiului \widehat{rh} .

(Indicație. Se consideră puncte $A \in r, B \in h, C \in s$ și se arată că există punctele $D \in k \cap |AB|$ și $E \in h \cap |CD|$).

9. Compararea unghiurilor

Definiție. Fie $\widehat{pq}, \widehat{rs}$ două unghiuri proprii și fie, într-un plan P , o dreaptă d , un punct $O \in d$, o semidreaptă $t \subset d$ en originea O și un semiplan P' , limitat de dreapta d . Pentru a compara unghiurile $\widehat{pq}, \widehat{rs}$, vom construi semidrepte, m, n , cu originea O , astfel ca (fig. I.33):

$$m \subset P', \quad n \subset P', \quad \widehat{tm} \equiv \widehat{pq}, \quad \widehat{tn} \equiv \widehat{rs}.$$

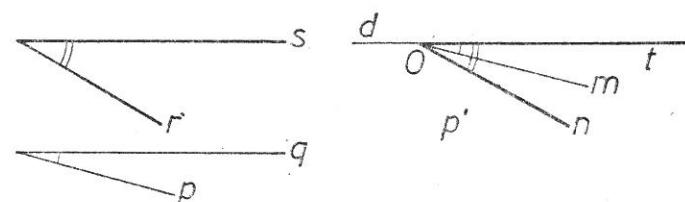


Fig. I.33

Sunt atunci posibile trei cazuri:

- a) $m = n$; b) $m \subset \text{Int } \hat{m}$; c) $n \subset \text{Int } \hat{m}$.

Dacă $m = n$, avem $\hat{pq} \equiv \hat{rs}$; dacă $m \subset \text{Int } \hat{m}$, vom spune că unghiul \hat{pq} este mai mic decit unghiul \hat{rs} , sau că unghiul \hat{rs} este mai mare decit unghiul \hat{pq} , și vom scrie $\hat{pq} < \hat{rs}$ sau $\hat{rs} > \hat{pq}$. Cazul c) se obține din cazul b), permutind între ele unghiurile \hat{pq} , \hat{rs} și semidreptele m , n . Deci, dacă suntem în cazul c), vom spune că unghiul \hat{pq} este mai mare decit unghiul \hat{rs} , sau că unghiul \hat{rs} este mai mic decit unghiul \hat{pq} .

Regula de comparare a unghiurilor dată mai sus depinde, în aparență, de alegerea semidreptei t și a semiplanului P' . Să presupunem că alegem altfel aceste elemente, luând o altă semidreaptă t' , cu originea într-un punct O' , și apoi un semiplan P'' , limitat de suportul semidreptei t' . Să presupunem apoi că, prin această alegere, obținem semidreptele m' , n' având originea O' și astfel ca $m' \subset P''$, $n' \subset P''$, $\hat{t'm'} \equiv \hat{pq}$, $\hat{t'n'} \equiv \hat{rs}$. Vom avea atunci $\hat{t'm'} \equiv \hat{tm}$, $\hat{t'n'} \equiv \hat{tn}$. Dacă $m = n$, atunci $m' = n'$. Dacă $m \subset \text{Int } \hat{m}$, atunci $m' \subset \text{Int } \hat{t'n'}$, iar dacă $n \subset \text{Int } \hat{m}$, atunci $n' \subset \text{Int } \hat{t'm'}$.

Rezultă că regula de comparare a unghiurilor nu depinde de alegerea elementelor auxiliare t și P' .

Exerciții

1. Fie \hat{hk} , \hat{rs} două unghiuri proprii. Să se arate că este adevărată una și numai una din relațiile

$$\hat{hk} \equiv \hat{rs}; \hat{hk} < \hat{rs}; \hat{hk} > \hat{rs}.$$

2. Fie \hat{hk} , \hat{pq} , \hat{rs} trei unghiuri proprii astfel ca $\hat{hk} < \hat{pq}$ și $\hat{pq} < \hat{rs}$. Să se arate că $\hat{hk} < \hat{rs}$.

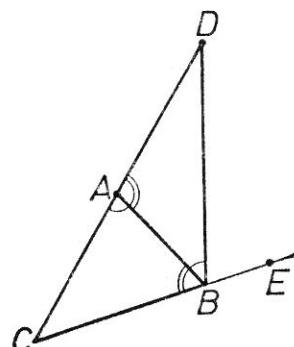


Fig. I.34

Teorema I a unghiului exterior. Dacă ABC este un triunghi, orice suplement al unghiului \hat{B} este mai mare decit unghiul \hat{A} (fig. I.34).

Altfel exprimat: în orice triunghi, fiecare unghi exterior este mai mare decit oricare din unghiurile interioare neadiacente aceluia unghi exterior.

Demonstrație. Fie E un punct astfel ca $B \in |CE|$ și fie D acel punct de pe dreapta CA , pentru care avem

$$A \in |CD|, \quad |AD| \equiv |BC|.$$

Să presupunem prin absurd că am avea $\hat{ABE} \equiv \hat{BAC}$, (fig. I.34). Din teorema unghiurilor suplimentare rezultă $\hat{CBA} \equiv \hat{BAD}$. Teorema I de congruență arată că triunghiurile ABC , BAD sunt congruente. Avem atunci $\hat{ABD} \equiv \hat{BAC} \equiv \hat{ABE}$. Dar punctele D , E sunt de aceeași parte a dreptei AB . Din proprietatea 4 de congruență, care arată unicitatea purtării congruente a unghiurilor, rezultă $BD = BE$, ceea ce nu este posibil, deoarece punctele A , B , C , nu sunt coliniare. Deci nu putem presupune că $\hat{ABE} \equiv \hat{BAC}$. Cazul $\hat{ABE} < \hat{A}$ (fig. I.35) se elimină considerind punctul $C' \in |CB|$ astfel ca $\hat{C'AB} \equiv \hat{ABE}$. Am avea atunci în ABC' , situația discutată anterior.

Fie A , B , C , D patru puncte distincte într-un plan, astfel ca punctele C , D să se găsească în semiplane opuse față de dreapta AB și astfel încât să avem $\hat{ABC} \equiv \hat{BAD}$. În acest caz, dreptele AD , BC sunt nesecante (fig. I.36).

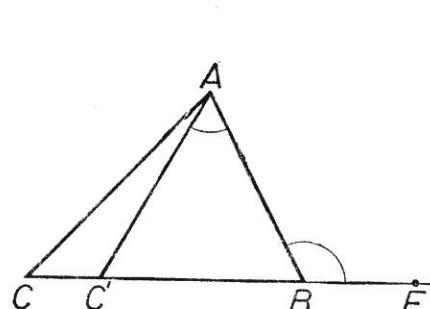


Fig. I.35

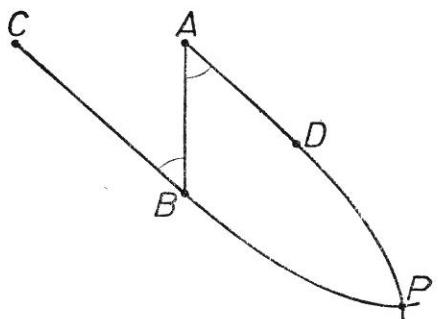


Fig. I.36

Demonstrație. Presupunem prin absurd că dreptele AD , BC ar avea un punct comun P . Dacă P este de aceeași parte cu D față de AB , atunci obținem un triunghi ABP , care are unghiul exterior \hat{ABC} congruent cu unghiul interior neadiacent \hat{BAP} . Dacă P este de aceeași parte cu C față de AB , obținem o situație similară în triunghiul ABP , care va avea unghiul exterior \hat{BAD} congruent cu \hat{ABC} . În ambele cazuri, am ajuns la o contradicție.

Reamintim următoarea

Definiție. Două drepte d , d' situate într-un același plan și care nu au nici un punct comun, se numesc drepte paralele.

Notatie. Dacă dreptele d , d' sunt paralele, se scrie $d \parallel d'$.

Observație. Două drepte paralele sunt în mod necesar distincte.

Aplicație. Proprietatea precedentă ne permite să construim o dreaptă d , care să treacă prin un punct dat A și care să fie paralelă cu o dreaptă d' , care nu trece prin A . Construcția este următoarea:

Alegem două puncte B, C pe dreapta d' și apoi considerăm acea semidreaptă s , care are originea A , care este situată în semiplanul opus semiplanului limitat de dreapta AB și care conține punctul C și mai cerem pentru s să verifice relația $\widehat{DAB} \equiv \widehat{ABC}$, pentru $D \in s$.

Deci am demonstrat proprietatea!

Fiind date o dreaptă d' și un punct A nesituat pe d' , există cel puțin o dreaptă d , paralelă cu d' și conținând punctul A .

Teorema IV de congruență. Dacă triunghiurile ABC , $A'B'C'$ au $|BC| \equiv |B'C'|$, $\widehat{B} \equiv \widehat{B}'$ și $\widehat{A} \equiv \widehat{A}'$, atunci cele două triunghiuri sunt congruente.

Demonstrație. Considerăm punctul A'' de pe semidreapta $|BA$, astfel ca $|BA''| \equiv |B'A'|$. Triunghiurile $A''BC$, $A'B'C'$ sunt atunci congruente, în baza teoremei I de congruență. Rezultă $\widehat{B''AC} \equiv \widehat{B'A'C'}$. Comparind cu relația $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$, admisă în enunț, deducem că $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B''AC}$.

Din teorema unghiului exterior deducem că $A = A''$. Deci avem $|BA| \equiv |B'A'|$ și putem acum să aplicăm teorema I de congruență triunghiurilor ABC , $A'B'C'$.

Observație. Dacă se admite postulatul lui Euclid, care va fi reamintit în paginile următoare, teorema IV de congruență se reduce la teorema II de congruență, deoarece suma unghiurilor unui triunghi este congruentă cu suma a două unghiiuri drepte.

Orice segment $|AB|$ conține un punct M astfel că $|AM| \equiv |MB|$. Punctul M este unic determinat prin această condiție.

Demonstrație. Se consideră două puncte C, D , situate în semiplane opuse față de dreapta AB și astfel ca $\widehat{BAD} \equiv \widehat{ABC}$ și $|AD| \equiv |BC|$. Punctul căutat M este dat de formula $\{M\} = AB \cap CD$ (fig. I.37). M se numește mijlocul segmentului $|AB|$.

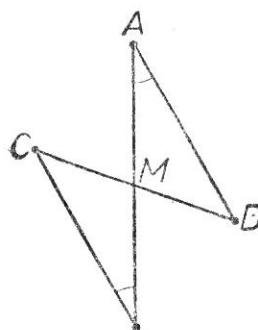


Fig. I.37

Exerciții

1. Fie A, B, C, D patru puncte într-un plan, astfel ca $\widehat{CBA} \equiv \widehat{DAB}$ și $|BC| \equiv |AD|$ și astfel ca punctele C, D să se găsească în semiplane opuse față de dreapta AB . Să se arate că segmentele $|AB|$, $|CD|$ au un punct comun.

Indicație. Din ipoteză rezultă $|CD| \cap AB = \emptyset$. Fie $O \in |CD| \cap AB$. Folosind teorema unghiului exterior, se vor exclude relațiile $A \in |OB|$, $B \in |OA|$, astfel încât va rezulta $O \in |AB|$.

2. Păstrând notațiile din exercițiul precedent, să se arate că punctul $O \in |AB| \cap |CD|$ are proprietatea $|OA| \equiv |OB|$.

(*Indicație.* Se va utiliza teorema a IV-a de congruență.)

3. Fie $|AB|$ un segment. Să se arate că există un punct $M \in |AB|$ astfel ca $|MA| \equiv |MB|$.

(*Indicație.* Se construiesc puncte C, D astfel încât să fie verificate condițiile din exercițiul 1.)

4. Fie A, B două puncte pe o dreaptă d . Să se arate că, dacă un punct $M \in d$ are proprietatea $|MA| \equiv |MB|$, atunci $M \in |AB|$.

5. Am arătat că se numește mijloc al unui segment $|AB|$ un punct $M \in |AB|$ astfel ca $|MA| \equiv |MB|$. Să se arate că orice segment are un mijloc unic.

(*Indicație.* Existența unui mijloc este arătată de exercițiul 3. Pentru unicitatea mijlocului, se procedează prin reducere la absurd.)

6. Fie M mijlocul unui segment $|AB|$ și fie P, Q mijloacele segmentelor $|AM|$, $|BM|$. Să se arate că M este mijlocul segmentului $|PQ|$.

7. Fie $|AB|$ un segment. Să se arate că există un segment $|EF|$ astfel încât $|AB|$ să reprezinte suma a 64 de segmente congruente cu $|EF|$. Să se generalizeze apoi acest exercițiu.

8. Fie $ABC, A'B'C'$ două triunghiuri congruente și fie M, N, P, M', N', P' mijloacele segmentelor $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$, $|B'C'|$, $|C'A'|$, $|A'B'|$, respectiv. Să se arate că triunghiurile $MNP, M'N'P'$ sunt congruente.

(*Indicație.* Se va arăta că dacă M, M' sunt mijloacele a două segmente congruente $|AB|$, $|A'B'|$ atunci segmentele $|AM|$, $|A'M'|$ sunt de asemenea segmente congruente.)

10. Inegalități într-un triunghi

1. În orice triunghi, la latura mai mare se opune unghiul mai mare. Deci dacă ABC este un triunghi, atunci avem $|AB| < |BC|$ dacă și numai dacă $\widehat{C} < \widehat{A}$.

Demonstrație. Presupunem că $|BC| > |AB|$ și arătăm că $\widehat{A} > \widehat{C}$.

Fie punctul $A' \in |BC|$ astfel ca $|BA'| \equiv |BA|$ (fig. I.38). Triunghiul BAA' este isoscel, având $|BA| \equiv |BA'|$. Deci $\widehat{BAA'} \equiv \widehat{BA'A}$. Semidreapta $|AA'$ este interioară unghiului \widehat{A} , deoarece $A' \in |BC|$. Rezultă $\widehat{BAA'} < \widehat{A}$.

Din teorema unghiului exterior, $\widehat{BA'A} > \widehat{BCA} = \widehat{C}$. Deci avem

$$\widehat{A} > \widehat{BAA'} \equiv \widehat{BA'A} > \widehat{C}$$

și atunci $\widehat{A} > \widehat{C}$.

Reciproc, dacă $\widehat{A} > \widehat{C}$, atunci trebuie să avem $|BC| > |AB|$, deoarece în caz contrar am avea $|BC| \equiv |AB|$ sau $|BC| < |AB|$ și am deduce $\widehat{A} \equiv \widehat{C}$ sau $\widehat{A} < \widehat{C}$.

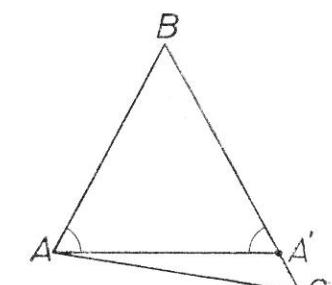


Fig. I.38

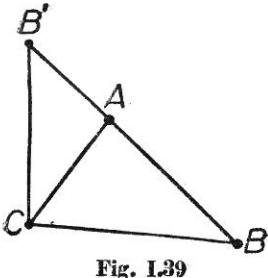


Fig. I.39

2. În orice triunghi, suma a două laturi este mai mare decât latura a treia. Deci, dacă ABC este un triunghi, atunci (fig. I.39)

$$|BA| + |AC| > |BC|.$$

Demonstrație. Să considerăm punctul B' pentru care $A \in |BB'|$ și $|AB'| \equiv |AC|$. Atunci segmentul $|BB'|$ reprezintă suma segmentelor $|BA|$, $|AC|$. Inegalitatea din enunț este echivalentă cu relația $|BB'| > |BC|$ sau cu

$$\widehat{BCB'} > \widehat{BBC}.$$

Dar $\widehat{BBC} = \widehat{AB'C} \equiv \widehat{ACB'}$, deoarece triunghiul $AB'C$ este isoscel; apoi avem $\widehat{ACB'} > \widehat{BCB'}$, deoarece semidreapta $|CA$

este interioară unghiului $\widehat{BCB'}$. Rezultă deci că avem $\widehat{BCB'} > \widehat{BBC}$.

3. Dacă în triunghiul ABC avem $|AB| \leq |AC|$ și dacă $D \in |BC|$, atunci $|AD| < |AC|$ (fig. I.40).

Demonstrație. Din propoziția 1, ținând seama că $|AB| \leq |AC|$, rezultă că avem (fig. I.40)

$$\widehat{C} \leq \widehat{ABC},$$

iar din teorema unghiului exterior, deducem $\widehat{ADC} > \widehat{ABC}$. Ultimele două inegalități implică relația $\widehat{ADC} > \widehat{C}$. Propoziția 1. dă în sfîrșit $|AD| < |AC|$.

Aplicații

Fie ABC un triunghi echilateral și fie M un punct interior triunghiului ABC . În acest caz, avem inegalitățile

$$|MA| + |MB| > |MC|, |MB| + |MC| > |MA|, \\ |MC| + |MA| > |MB| \quad (\text{fig. I.41}).$$

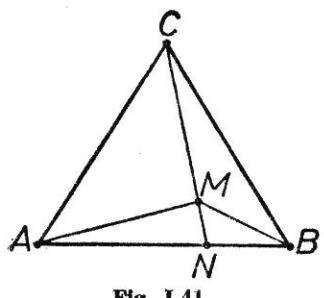


Fig. I.41

Demonstrație. Semidreapta $|CM$ intersectează latura $|AB|$ într-un punct N și avem $|CM| \leq |CN| \leq |CA| \equiv |AB|$, deci $|CM| < |AB|$. Dar $|AB| \leq |MA| + |MB|$, deci $|CM| < |AM| + |BM|$. Celelalte două inegalități din enunț se demonstrează în același fel.

11. Unghiuri drepte

Fie \widehat{hk} un unghi propriu cu vîrful O și fie punctele $A \in h$, $B \in k$ astfel ca $|OA| \equiv |OB|$. Să notăm prin M mijlocul segmentului $|AB|$ (fig. I.42). Din teorema a III-a de congruență a triunghiurilor rezultă că triunghiurile OAM , OBM sunt congruente. În particular, avem $\widehat{OMA} \equiv \widehat{OMB}$. Să observăm că unghiurile \widehat{OMA} , \widehat{OMB} sunt suplementare și congruente.

Definiție. Se numește unghi drept orice unghi, care este congruent cu un suplement al său (fig. I.43).

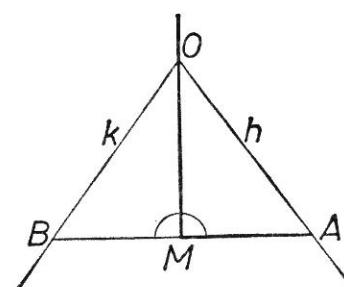


Fig. I.42

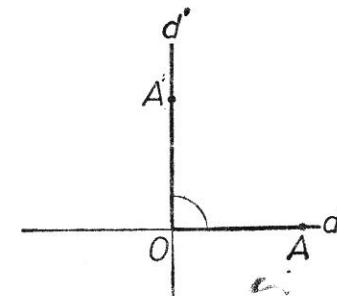


Fig. I.43

Construcția precedentă arată că:

Există unghiuri drepte.

Din teorema unghiurilor suplementare și din teorema unghiurilor opuse rezultă că:

Opusul unui unghi drept și suplementele unui unghi drept sunt unghiuri drepte.

Definiție. Fie d , d' două drepte concurente într-un punct O . Se spune că dreptele d , d' sunt perpendiculare, sau ortogonale dacă cele patru semidrepte limitate de punctul O pe dreptele d , d' formează patru unghiuri drepte.

Exemplu. Dacă $\widehat{AOA'}$ este un unghi drept, atunci dreptele OA , OA' sunt perpendiculare. Dacă dreptele d , d' sunt perpendiculare, scriem $d \perp d'$.

Fie \widehat{pq} , \widehat{qr} și $\widehat{p'q'}$, $\widehat{q'r'}$ două perechi de unghiuri suplementare astfel ca $\widehat{pq} \equiv \widehat{p'q'}$. Din teorema unghiurilor suplementare rezultă $\widehat{qr} \equiv \widehat{q'r'}$.

Dacă \widehat{pq} este un unghi drept, atunci avem

$$\widehat{pq} \equiv \widehat{qr} \equiv \widehat{q'r'}, \quad \widehat{pq} \equiv \widehat{p'q'},$$

deci $\widehat{q'r'} \equiv \widehat{p'q'}$. Rezultă că $\widehat{p'q'} \equiv \widehat{q'r'}$ sunt unghiuri drepte. Deci:

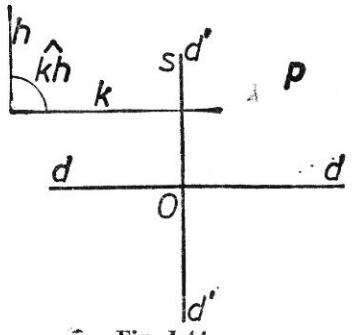


Fig. I.44

Orice unghi congruent cu un unghi drept este unghi drept.

Fie \widehat{pq} , \widehat{qr} două unghiuri drepte suplementare cu originea O și fie s o semidreaptă cu aceeași origine O , situată în același semiplan cu semidreapta q față de suportul semidreptei p . Presupunem că avem $s \neq q$. Sunt atunci posibile două cazuri: sau $s \subset \text{Int } \widehat{pq}$, sau $s \subset \text{Int } \widehat{rq}$. În primul caz, avem

$$\widehat{ps} < \widehat{pq} \equiv \widehat{qr} < \widehat{rs}.$$

deci $\widehat{ps} < \widehat{rs}$. Dar unghiurile \widehat{ps} , \widehat{rs} sunt suplementare. Deci, în cazul $s \subset \text{Int } \widehat{pq}$, unghiul \widehat{ps} nu este drept. La fel se arată că, nici, în cazul $s \subset \text{Int } \widehat{rq}$, unghiul \widehat{ps} nu este drept.

Rezultă că dacă d , d' și d'' sunt drepte coplanare și concurente într-un punct O , astfel încât d' și d'' sunt perpendiculare pe d , atunci $d' = d''$.

Apli c a t i i

1. Existența unei perpendiculare, ce trece printr-un punct O , pe o dreaptă ce conține punctul O (într-un plan dat).

Fie O un punct, d o dreaptă și p un plan, astfel ca $O \in d \subset p$. Vrem să arătăm că există o dreaptă d' , astfel ca $O \in d' \subset p$ și d' să fie perpendiculară pe d . În acest scop, construim, într-un mod oarecare, un unghi drept \widehat{hk} și construim apoi o semidreaptă s , cu originea O , astfel ca $s \subset p$ și astfel ca s să formeze, împreună cu una din semidreptele limitate de O pe d , un unghi congruent cu unghiul \widehat{hk} . În acest caz, unghiul format de s cu oricare din semidreptele limitate de O pe d va fi drept, deci suportul d' al lui s va fi o dreaptă perpendiculară pe d . Din $s \subset p$, $s \subset d'$ rezultă $O \in d' \subset p$.

2. Existența unei perpendiculare ce trece printr-un punct O , pe o dreaptă ce nu conține punctul O (într-un plan dat).

Fie date, într-un plan p , o dreaptă d și un punct $O \notin d$. Vom arăta că există o dreaptă d' în planul p , perpendiculară pe d și astfel ca $O \in d'$. Fie A, B două puncte oarecare pe d . Construim punctul Q , în semiplanul opus lui O față de d , astfel ca $\widehat{OAB} \equiv \widehat{QAB}$ și $|OA| \equiv |QA|$. Dreapta d intersectează segmentul $|OQ|$ într-un punct M , astfel încât triunghiurile OAM , QAM sunt congruente. Unghiurile \widehat{OMA} , \widehat{QMA} fiind suplementare, rezultă că aceste unghiuri sunt și suplementare și congruente, deci sunt unghiuri drepte. Deci dreapta OQ este perpendiculară pe dreapta d . Avem $OQ \subset p$, deoarece $O \in p$ și $Q \in p$.

Notătie. Dacă dreptele d , d' sunt perpendiculară, scriem $d \perp d'$.

Reamintim următoarele definiții:

Se numește *unghi obtuz* orice unghi mai mare decit un unghi drept.

Se numește *unghi ascuțit* orice unghi mai mic decit un unghi drept.

Se numește *triunghi dreptunghic* orice *triunghi*, care are un unghi drept. Latura opusă unghiului drept într-un triunghi dreptunghic se numește *ipotenuză*, iar celelalte două laturi se numesc *catete*.

Exercițiil

1. Orice triunghi are cel puțin două unghiuri ascuțite.
2. Un triunghi nu poate avea două unghiuri drepte.
3. Dacă d , d' și d'' sunt drepte situate într-un plan p , astfel că d' și d'' să fie perpendiculare pe d , atunci dreptele d' , d'' sunt fie paralele, fie confundate.
4. Dacă triunghiul ABC este dreptunghic în A , atunci unghiurile \widehat{B} , \widehat{C} sunt ascuțite.
5. În orice triunghi dreptunghic, catetele sunt mai mici decit ipoteniza.
6. Fie ABC un triunghi și fie punctul $A' \in BC$ astfel că $AA' \perp BC$. Să se arate că dacă $A' \in |BC|$, atunci unghiurile \widehat{B} , \widehat{C} sunt ascuțite; reciproc, dacă unghiurile \widehat{B} , \widehat{C} sunt ascuțite, atunci $A' \in |BC|$.
7. Fie ABC un triunghi și fie $A' \in BC$ astfel că $AA' \perp BC$. Ce relație de ordine există între punctele A' , B și C , dacă unghiul \widehat{B} este obtuz?
8. Fie A, B, C, D patru puncte într-un plan, astfel că $|BC| \equiv |AD|$ și $AD \perp AB$, $BC \perp AB$. Fie M mijlocul segmentului $|AB|$. Să se arate că:
 - a) $\widehat{AMD} \equiv \widehat{CMB}$.
 - b) Perpendiculara dusă prin M pe AB trece prin mijlocul N al segmentului $|CD|$.
 - c) $\widehat{MDN} \equiv \widehat{MCN}$, $\widehat{ADC} \equiv \widehat{BCD}$.
 - d) Dacă unghiul \widehat{ADC} este drept, atunci și unghiul \widehat{BCD} este drept.
 - e) Fie A, B, C, D patru puncte într-un plan p , astfel că $AB \perp AD$, $AB \perp BC$, $CD \perp AD$ și $CD \perp BC$. Fie M mijlocul segmentului $|AB|$ și fie d dreapta dusă prin M , perpendiculară pe AB și conținută în planul p . Să se arate că:
 - a) Dreapta d intersectează segmentul $|CD|$ într-un punct N .
 - b) Triunghiurile AMN , BMN sunt congruente.
 - c) Unghiurile \widehat{DAN} , \widehat{CBN} sunt congruente.
 - d) Triunghiurile ADN , BCN sunt congruente.
 - e) $|AD| \equiv |BC|$.
 - f) $|AB| \equiv |CD|$.

12. Locuri geometrice

În geometria elementară, o mulțime de puncte caracterizate printr-o proprietate geometrică P se numește uneori *loc geometric*. Pentru a arăta că locul geometric al punctelor dintr-un plan p , care au proprietatea P , este o anumită mulțime M , trebuie să demonstrăm că:

1. Orice punct al mulțimii M are proprietatea P .
 2. Orice punct din planul p , care are proprietatea P , aparține mulțimii M .
- Enunțul 2 este echivalent cu:

2'. Dacă un punct Q din planul p nu aparține mulțimii M , atunci Q nu are proprietatea P .

Vom da acum un exemplu de determinare a unui loc geometric.

Fie date două puncte distincte A, B într-un plan p , locul geometric al punctelor M din planul p , pentru care $|MA| \equiv |MB|$, este o dreaptă perpendiculară pe dreapta AB , trecând prin mijlocul segmentului $|AB|$.

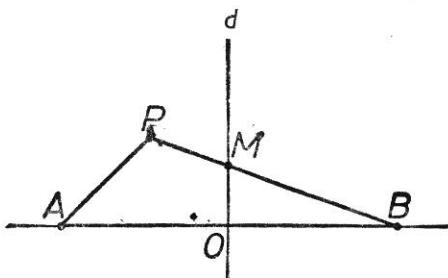


Fig. 1.45

Demonstrație. Fie O mijlocul segmentului $|AB|$ și fie d perpendiculara dusă prin O pe dreapta AB . Dacă $M \in d$, considerind triunghiurile dreptunghice OAM, OBM , arătăm că aceste triunghiuri sunt congruente și deducem $|MA| \equiv |MB|$.

Fie acum un punct $P \notin d$ (fig. 1.45). Punctul P se va găsi în unul din semiplanele limitate de dreapta d . Pentru a fixa ideile, să presupunem că P se află în același semiplan cu A față de d . Atunci există punctul de intersecție $M \in d \cap |BP|$. În triunghiul PAB avem

$$\widehat{PBA} \equiv \widehat{MBA} \equiv \widehat{MAB} < \widehat{PAB},$$

deci $|PB| > |PA|$.

În mod analog, se arată că orice punct Q , situat de aceeași parte cu B , față de dreapta d , verifică relația $|QA| > |QB|$. Rezultă că punctele dreptei d sunt singurele puncte din planul p , pentru care $|MA| \equiv |MB|$.

Definiție. Dreapta d , care trece prin mijlocul segmentului $|AB|$ și care este perpendiculară pe dreapta AB , se numește mediatoarea segmentului $|AB|$. Dacă d este mediatoarea segmentului $|AB|$, se spune că A, B sunt puncte simetrice față de dreapta d .

Definiție. Fie \widehat{hk} un unghi propriu. Se numește bisectoare a unghiului \widehat{hk} o semidreaptă având originea în vîrful unghiului \widehat{hk} , interioră acestui unghi și care face unghiuri congruente cu semidreptele h, k (fig. 1.46).

Exerciții

1. Fie \widehat{hk} un unghi propriu și fie punctele $A \in h, B \in k$ astfel ca $|OA| \equiv |OB|$, O fiind vîrful unghiului \widehat{hk} . Fie M mijlocul segmentului $|AB|$. Atunci semidreapta $|OM|$ este o bisectoare a unghiului \widehat{hk} (fig. 1.47).

(Indicație. Se observă că se formează triunghiurile dreptunghice congruente MOA, MOB , din care rezultă $\widehat{MOA} \equiv \widehat{MOB}$.)

2. Orice unghi propriu are o singură bisectoare.

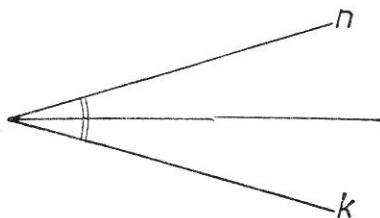


Fig. 1.46

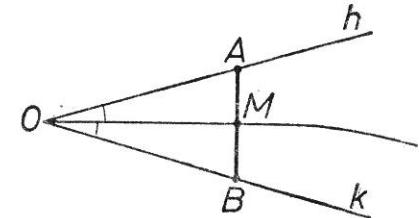


Fig. 1.47

Fie b bisectoarea unghiului propriu \widehat{hk} și fie d, d' dreptele ce conțin semidreptele h, k , respectiv k, h . Fie punctele $M \in b, A \in d, B \in d'$ astfel ca $MA \perp d$ și $MB \perp d'$. Atunci avem $|MA| \equiv |MB|$ și $A \in h, B \in k$ (fig. 1.48).

Demonstrație. Unghiul \widehat{bh} este ascuțit, fiind jumătatea unui unghi propriu. Fie A' un punct pe semidreapta opusă lui h . Atunci din teorema unghiului exterior aplicată triunghiului MOA' deducem $\widehat{MA'O} < \widehat{bh}$, deci și $\widehat{MA'O}$ este un unghi ascuțit. Deci dreapta MA' nu poate fi perpendiculară pe dreapta d . Avem deci $A \in h$.

La fel se arată că $B \in k$.

Congruența $|MA| \equiv |MB|$ se demonstrează considerind triunghiurile dreptunghice și congruente AOM, BOM . Congruența acestor triunghiuri se obține din teorema IV de congruență.

Vom reține proprietatea astfel demonstrată sub forma:

Orice punct M situat pe bisectoarea unui unghi \widehat{hk} este egal depărtat de laturile h, k ale aceluia unghi.

Bisectoarele a două unghiuri opuse sunt în prelungire, iar bisectoarele a două unghiuri suplementare sunt perpendiculare.

Demonstrație. Fie punctele $O, A, A', B, B', M, M', M''$ astfel ca

$$\{O\} = |AA'| \cap |BB'| \cap |MM'|, \quad \widehat{AOM} \equiv \widehat{BOM}, \quad \widehat{AOM'} \equiv \widehat{B'OM} \quad (\text{fig. 1.49}).$$

Din teorema unghiurilor opuse rezultă că semidreapta $|OM'|$ este bisectoarea unghiului $\widehat{AOB'}$. De asemenea rezultă că avem $\widehat{MOA} \equiv \widehat{M'OB'}$. Tinând seama că avem și $\widehat{AOM} \equiv \widehat{B'OM}$, deducem că $\widehat{MOM'} \equiv \widehat{M''OM'}$, deci dreptele OM'', OM sunt perpendiculare.

Fie A, B, C, D patru puncte astfel ca $AB \perp BC$ și $C \in |BD|$. În aceste condiții, avem $|AD| > |AC|$ (fig. I 50).

Demonstrație. În triunghiul ACD avem $\widehat{ACD} > \widehat{ADC}$, deoarece \widehat{ACD} este un unghi obtuz, iar \widehat{ADC} este un unghi ascuțit. Deducem inegalitatea cerută.

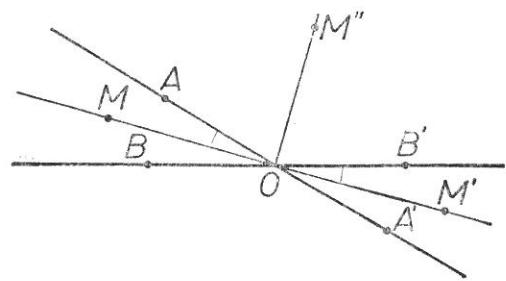


Fig. I.49

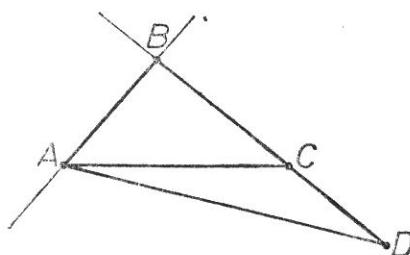


Fig. I.50

Dacă $ABC, A'B'C'$ sunt două triunghiuri dreptunghice în A și A' , astfel ca $|AB| \equiv |A'B'|$ și $|BC| \equiv |B'C'|$, deci dacă cele două triunghiuri au două catete și ipotenuzele respectiv congruente, atunci ele sunt congruente (fig. I.51).

Demonstrație. Luăm pe semidreapta $|AC$ punctul C'' astfel ca $|AC''| \equiv |A'C'|$. Avem atunci $|BC''| \equiv |B'C'| \equiv |BC|$, deci $|BC''| \equiv |BC|$, $C'' = C$.

Fie \widehat{hk} un unghi propriu cu vîrful O și fie I un punct interior unghiului \widehat{hk} . Considerăm punctele $A \in h$, $B \in k$ astfel ca $IA \perp h$, $IB \perp k$. Dacă $|IA| \equiv |IB|$, atunci $|OI$ este bisectoarea unghiului \widehat{hk} .

Demonstrație. Triunghiurile AOI, BOI sunt în condițiile proprietății precedente, deci avem $\widehat{AOI} \equiv \widehat{BOI}$. Prin urmare, $|OI$ este bisectoarea unghiului $\widehat{AOB} = \widehat{hk}$ (fig. I.52).

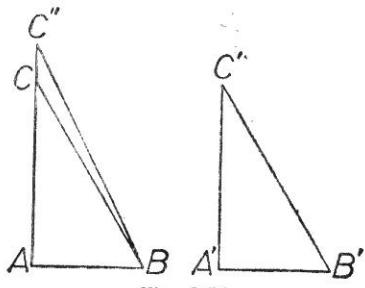


Fig. I.51

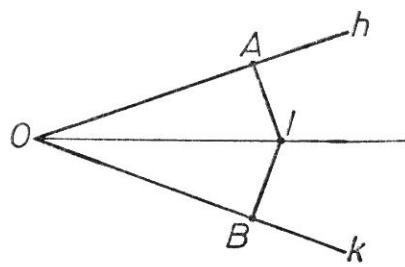


Fig. I.52

Bisectoarea unui unghi este locul geometric al punctelor I din interiorul unghiului, care sunt egal depărtate de laturile aceluia unghi.

13. Postulatul lui Euclid

Am arătat că prin orice punct exterior unei drepte d se poate duce cel puțin o dreaptă paralelă la dreapta d .

Proprietățile enumerate pînă acum nu sunt suficiente pentru a demonstra pe baza lor, că printr-un punct A trece o singură paralelă la o dreaptă d ce nu trece prin A . Demonstrațarea unicității unei astfel de paralele a consti-

tuit mult timp o problemă centrală a matematicii. Rezolvarea definitivă a acestei probleme a fost dată în secolul trecut, prin cercetările lui I. Bolyai, N. Lobacevski, C. Gauss și B. Riemann.

Problema fusese formulată de geometrii Greciei antice, care au recunoscut imposibilitatea demonstrării unicității unei paralele printr-un punct la o dreaptă. Cel care a formulat corect problema și a arătat necesitatea introducerii unei axiome a fost Euclid.

După Euclid, un mare număr de matematicieni au încercat să demonstreze unicitatea paralelei printr-un punct la o dreaptă, dar astăzi știm că o astfel de demonstrație nu poate fi dată.

Vom admite deci, fără demonstrație:

Postulatul lui Euclid. Fiind date un punct A și o dreaptă d , care nu trece prin A , există o singură paralelă la dreapta d , care să treacă prin punctul A (fig. I.53).

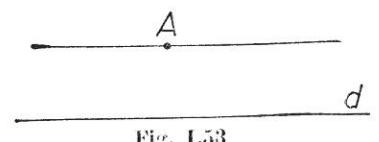


Fig. I.53

O primă consecință a postulatului lui Euclid este proprietatea următoare:

Dacă dreptele d', d'' sunt distințe și dacă fiecare din aceste drepte este paralelă cu o a treia dreaptă d , atunci d' este paralelă cu d'' (fig. I.54).

Indicație. Se demonstrează prin reducere la absurd.)

Teorema unghiurilor corespondente și a unghiurilor alterne interne. Fie A, B, C, D, E, F puncte distincte, astfel ca dreptele AC, BD să fie paralele, ca punctele C, D să fie în semiplane opuse față de dreapta AB și $A \in |CF|$, $A \in |BE|$.

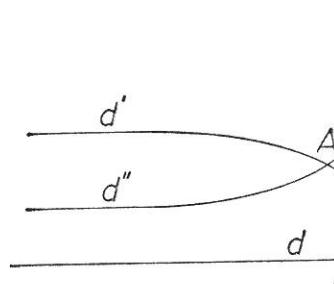


Fig. I.54

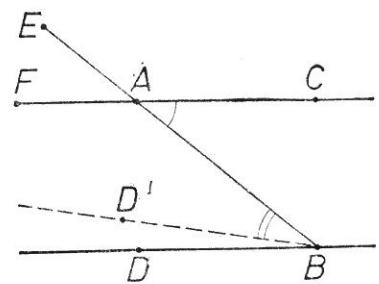


Fig. I.55

Avem atunci:

$$\widehat{EAF} \equiv \widehat{CAB} \equiv \widehat{DBA} \text{ (fig. I.55).}$$

Demonstrația se face prin reducere la absurd, folosind postulatul lui Euclid:

Anume construim unghiul $\widehat{D'BA}$ astfel ca D' să fie de aceeași parte cu D față de AB și astfel ca $\widehat{D'BA} \equiv \widehat{CAB}$. Dreapta BD' va fi paralelă cu AC , deci va coincide cu BD .

Exerciții

IMPORTANT!

1. Fie A, B, C, D patru puncte distințe astfel ca $AC \parallel BD$ și $AD \parallel BC$. Avem atunci $|AC| \equiv |BD|$, $|AD| \equiv |BC|$ (fig. I.56).

2. Dacă avem patru puncte distințe A, B, C, D astfel ca $AC \parallel BD$, $|AC| \equiv |BD|$ și astfel ca A, D să se găsească de aceeași parte a dreptei BC , atunci $AD \parallel BC$ și $|AD| \equiv |BC|$.

Indicație. Avem $D \in \text{int } \widehat{ACB}$, $|AB| \cap CD \neq \emptyset$, $\widehat{ACD} \equiv \widehat{CDB}$, $ACD \equiv BDC$.

3. Fiind date patru puncte A, B, C, D astfel încât $A \neq B$ și C, D se găsesc în același semiplan față de dreapta AB și astfel încât $\widehat{CAB} + \widehat{DBA}$ să fie un unghi mai mic decit un unghi alungit, semidreptele $|AC|$ și $|BD|$ au un punct comun (fig. I.57).

Indicație. Prin reducere la absurd.

4. Fie $ABCD$ un paralelogram, având $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$. Avem (fig. I.58).

$$\widehat{CBA} \equiv \widehat{CDA}, |AB| \equiv |CD|, |AD| \equiv |BC|.$$

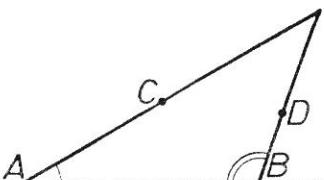


Fig. I. 57

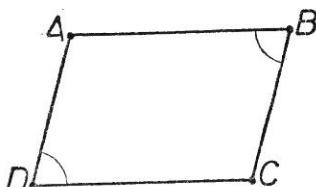


Fig. I. 58

5. (Teorema a două a unghiului exterior.) În orice triunghi ABC , suplementul unui unghi este congruent cu suma celorlalte două unghiuri ale triunghiului.

Astfel, în figura I.59, $\widehat{CAD} \equiv \widehat{ACB} + \widehat{ABC}$.

6. Într-un triunghi oarecare, orice unghi exterior este congruent cu suma unghiurilor interioare neadiacente.

7. Suma unghiurilor interioare ale oricărui triunghi este congruentă cu un unghi alungit, sau cu suma a două unghiuri drepte.

8. Dacă două triunghiuri $ABC, A'B'C'$ au $\widehat{A} \equiv \widehat{A}'$, $\widehat{B} \equiv \widehat{B}'$, atunci $\widehat{C} \equiv \widehat{C}'$ (fig. I.60).

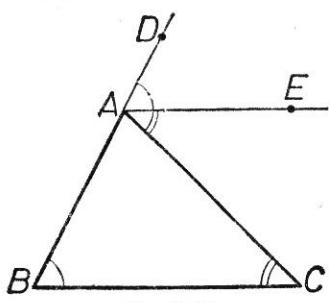


Fig. I.59

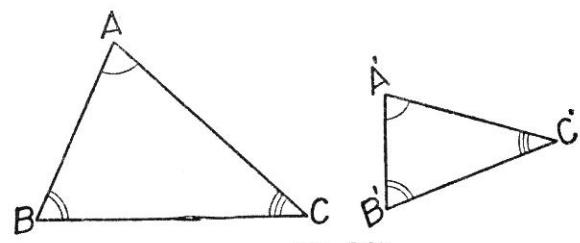


Fig. I.60

Teorema lui Thales restrinsă. Fie d, d' două drepte distincte într-un plan și fie punctele $A \in d, B \in d, C \in d, A' \in d', B' \in d', C' \in d'$ astfel ca $B \neq B'$, $C \neq C'$, $A \neq A'$, $AA' \parallel BB'$, $B \in |AC|$, $|AB| \equiv |BC|$.

În aceste condiții, avem $CC' \parallel BB'$ dacă și numai dacă B' este mijlocul segmentului $|A'C'|$.

Demonstrație. Să presupunem că $BB' \parallel CC' \parallel AA'$ (fig. I.61).

Ipotezele din enunț arată că B este mijlocul segmentului $|AC|$. Să ducem prin punctele A', B' paralelele la dreapta d și să notăm prin P , respectiv Q punctele în care aceste paralele intersectează dreapta BB' , respectiv dreapta CC' .

Din exercițiul 4, pag. 40, deducem că triunghiurile $A'PB'$, $B'QC'$ sunt congruente, deci $|A'B'| \equiv |B'C'|$. Dreapta AA' fiind paralelă cu BB' , punctele A, A' se găsesc în același semiplan față de dreapta BB' . La fel, punctele C, C' se găsesc într-un același semiplan față de BB' . Dar A, C se găsesc în semiplane opuse față de BB' , deoarece $B \in |AC|$.

Relațiile $B' \in |A'C'|$, $|A'B'| \equiv |B'C'|$ arată că B' este mijlocul segmentului $|A'C'|$.

Reciproc, să presupunem acum că B' este mijlocul segmentului $|A'C'|$ și să ducem dreapta d'' , paralelă cu BB' și trecind prin punctul C . Dreapta d'' va intersecta dreapta d' într-un punct C'' astfel încât B' este mijlocul segmentului $|A'C''|$. Aceasta înseamnă că $B' \in |A'C''|$ și $|A'B'| \equiv |B'C''|$. Dar și punctul C' are aceste proprietăți, adică $B' \in |A'C'|$ și $|A'B'| \equiv |B'C'|$. Rezultă $C' = C''$, deci $CC' \parallel BB'$. Teorema este demonstrată.

Exerciții

1. Fie $ABC, A'B'C'$ două triunghiuri astfel ca $AB \parallel A'B'$, $|AB| \equiv |A'B'|$, $AC \parallel A'C'$ și $BC \parallel B'C'$. Să se arate că cele două triunghiuri sunt congruente și că dreptele AA' , BB' , CC' sunt paralele.

2. Să se reformuleze teorema lui Thales restrinsă, considerind cazurile: $A = A'$; $B = B'$; $C = C'$.

3. Fiind dat un segment $|PQ|$, și un număr natural $n > 1$, să se arate că există un segment $|AB|$, astfel ca $|PQ|$ să fie congruent cu suma $|AB| + |AB| + \dots + |AB|$, conținând n segmente egale cu $|AB|$.

4. Să se arate că dacă a, b, a', b' sunt drepte astfel încât $a \perp a'$, $b \perp b'$, $a \cap b \neq \emptyset$, $a \neq b$, atunci $a' \cap b' \neq \emptyset$ și $a' \neq b'$.

Linii remarcabile într-un triunghi

1. Fie ABC un triunghi într-un plan p . Mediatoarele segmentelor $|AB|$, $|BC|$, $|CA|$ se numesc mediatoarele triunghiului ABC .

Teoremă. Mediatoarele unui triunghi oarecare sunt concurente.

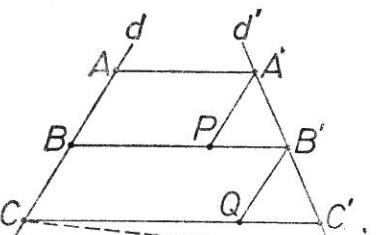


Fig. I. 61

Demonstratie. Fie p, q, r mediatoarele segmentelor $|BC|, |CA|, |AB|$ (fig. I.62). Dreptele p, q sunt secante, deoarece dacă p și q ar fi paralele, punctele A, C, B ar fi coliniare, ceea ce nu este adevărat, deoarece ABC este un triunghi. Fie atunci O punctul de intersecție al dreptelor p, q . Aceste drepte fiind mediatoarele segmentelor $|BC|, |AC|$, avem $|OA| \equiv |OC|, |OB| \equiv |OC|$, deci $|OA| \equiv |OB|$. Rezultă că O se află pe mediatoarea segmentului $|AB|$, deci $O \in r$. Deci $p \cap q \cap r = \{O\}$.

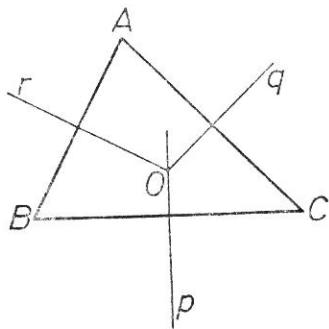
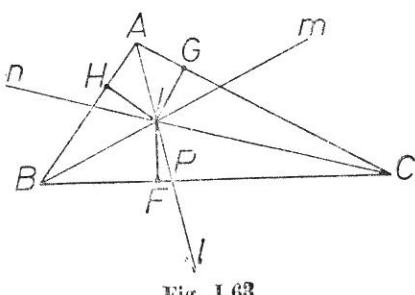


Fig. I.62

Reținem că punctul de intersecție O al mediatoarelor triunghiului ABC are proprietatea

$$|OA| \equiv |OB| \equiv |OC|.$$

2. Să considerăm acuma bisectoarele l, m, n ale unghiurilor $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ ale triunghiului ABC . Semidreptele l, m, n se numesc *bisectoarele interioare sau bisectoarele triunghiului ABC* (fig. I.63).



Teorema. Bisectoarele unui triunghi oarecare sunt concurente.

Demonstratie. Bisectoarea l a unghiului \hat{A} intersectează segmentul $|BC|$ într-un punct P , (fig. I.63) deoarece l este interioară unghiului \hat{A} și segmentul $|BC|$ are extremitățile pe laturile unghiului \hat{A} . Apoi bisectoarea m a unghiului \hat{B} intersectează segmentul $|AP|$ într-un punct I , din motive asemănătoare. Fie F, G, H picioarele perpendicularelor duse din I pe dreptele BC, CA, AB . Deci $F \in BC, G \in CA, H \in AB$ și $IF \perp BC, IG \perp CA, IH \perp AB$. Dint-o proprietate cunoscută a bisectoarei unui unghi rezultă $|IH| \equiv |IG|, |IF| \equiv |IH|$, deci avem și $|IF| \equiv |IG|$. Punctul I este interior triunghiului ABC și avem $F \in |BC|, G \in |AC|$. Relațiile $|IF| \equiv |IG|, F \in |BC|, G \in |AG|$ arată că I se găsește pe bisectoarea unghiului \hat{C} , deci $\{I\} = l \cap m \cap n$.

Exercițiu. Fie m', n' bisectoarele unghiurilor exterioare în B, C ale triunghiului ABC , și fie t bisectoarea unghiului \hat{A} . Dreptele t, m', n' sunt concurente.

Notă. În capitolul II se va arăta că punctul O de intersecție a mediatoarelor unui triunghi ABC este centrul cercului circumscris triunghiului ABC , iar punctul I de intersecție a bisectoarelor este centrul cercului inscris triunghiului ABC .

3. Fie ABC un triunghi. Notăm prin A' punctul în care perpendiculara dusă prin A pe dreapta BC intersectează dreapta BC . Dreapta AA' se numește *înălțimea* din A a triunghiului ABC , iar A' se numește *picioară* acestei înălțimi.

Analog se definesc înălțimile BB', CC' , având picioarele $B' \in AC$ respectiv $C' \in AB$. Folosind postulatul lui Euclid, se demonstrează:

Teorema. Înălțimile AA', BB', CC' ale unui triunghi oarecare ABC sunt concurente (fig. I.64).

Demonstratie. Dacă A, B, C sunt paralele u, v, w la dreptele BC, CA, AB . Notăm $\{A''\} = v \cap w, \{B''\} = u \cap w, \{C''\} = u \cap v$. Se formează paralelogramele $ABCB'', ACBC'', ABA''C$, din care rezultă $|AB''| \equiv |BC| \equiv |AC''|, |C''B| \equiv |AC| \equiv |A''B|, |A''C| \equiv |AB| \equiv |B''C|$. Rezultă deci că A, B, C sunt mijloacele laturilor $|B''C''|, |C''A''|, |A''B''|$ și atunci înălțimile AA', BB', CC' apar ca mediatoare ale triunghiului $A''B''C''$. Deci dreptele AA', BB', CC' sunt concurente.

Punctul de intersecție a înălțimilor unui triunghi se numește *ortocentră* al acestui triunghi și se notează de obicei prin H .

4. Să considerăm acuma mijloacele A'', B'', C'' ale segmentelor $|BC|, |CA|, |AB|$. Vom arăta că segmentele $|AA''|, |BB''|, |CC''|$ au un punct comun (fig. I.65).

Fie D mijlocul segmentului $|AB''|$. Din teorema lui Thales rezultă că dreapta $C'D$ este paralelă cu BB'' . Semidreapta $|BB''|$ este interioară unghiului \hat{B} , deci intersectează segmentul $|AA''|$ într-un punct G . Dreapta AA'' va intersecta, din motive asemănătoare, segmentul $|BB''|$,

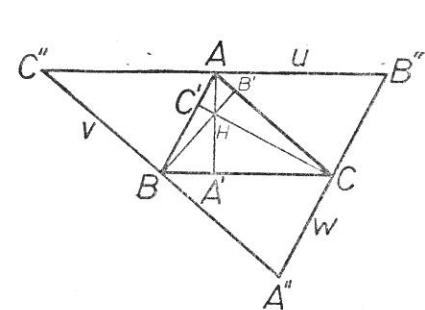


Fig. I.64

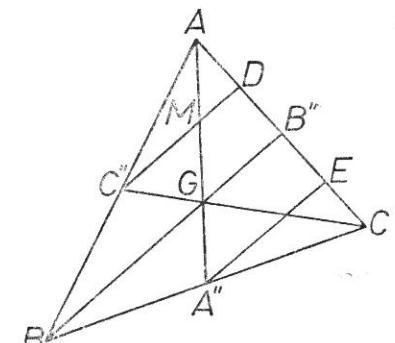


Fig. I.65

intr-un punct, care nu poate fi decit G . Dreapta $C'D$ intersectează segmentul $|AG|$ într-un punct M , care este mijlocul segmentului $|AG|$. Fie E mijlocul segmentului $|B'C|$. Avem $|AD| \equiv |DB'| \equiv |B'E| \equiv |EC|$. Din teorema lui Thales restrânsă rezultă $|AM| \equiv |MG| \equiv |GA'|$; deci G împarte segmentul $|AA'|$ în raportul $|GA| / |A'G| = 2$, adică $|GA| \equiv 2 \cdot |A'G|$.

Procedind în același fel, vom arăta că segmentul $|CC'|$ intersectează segmentul $|AA'|$ într-un punct, care împarte segmentul $|AA'|$ în același raport 2. Dar există un singur punct cu această proprietate. Deci segmentul $|CC'|$ conține punctul G . Aceasta înseamnă că

$$\{G\} = |AA'| \cap |BB'| \cap |CC'|.$$

Deci am demonstrat următoarea:

Teoremă. Segmentele care unesc virfurile unui triunghi oarecare cu mijloacele laturilor opuse au un punct comun.

Dreptele AA' , BB' , CC' se numesc *medianele* triunghiului ABC , iar punctul lor de intersecție G se numește *centrul de greutate* sau *baricentrul* acestui triunghi.

Denumirea este legată de proprietatea fizică următoare:

Dacă avem o placă triunghiulară omogenă cu virfurile A , B , C , și dacă suspendăm această placă, alegind ca punct de suspensie punctul G , atunci placă capătă poziție orizontală.

Mai general, dacă se aplică în punctele A , B , C ale plăcii trei forțe egale, paralele și de același sens cu o forță \vec{F} , și dacă se aplică, în același timp, în G , forța $-3\vec{F}$, atunci efectul celor patru forțe este nul.

Punctul G împarte triunghiul ABC în 6 triunghiuri de egală mărime.

Exercițiul

1. Să se arate că un patrulater $ABCD$, care verifică una oarecare din următoarele proprietăți, este un paralelogram:

- Orice două laturi opuse în patrulaterul $ABCD$ sunt congruente;
 - Orice două unghii opuse în patrulaterul $ABCD$ sunt congruente;
 - Orice două laturi opuse în patrulaterul $ABCD$ sunt paralele;
 - Unul din unghiiile patrulaterului $ABCD$ este congruent cu suplementele celor două unghii vecine lui;
 - Două laturi opuse ale patrulaterului $ABCD$ sunt paralele și congruente;
 - Diagonalele patrulaterului $ABCD$ au același mijloc.
2. Fie $ABCD$ un trapez, cu $AB \parallel CD$ și fie M , N mijloacele laturilor $|BC|$, $|AD|$.
Să se arate că $NM \parallel AB$ și $2 \cdot |NM| \equiv |AB| + |CD|$.

14. Măsurarea segmentelor

Fiind date două segmente $v = |AB|$ și $m = |EF|$, spunem că v este un *multiplu* al segmentului m , dacă există un număr natural p , astfel ca v să reprezinte suma a p segmente congruente cu m . Scriem în acest caz

$$v \equiv p \cdot m$$

Figura I.66 ilustrează cazul $p = 5$.

Vom spune că segmentul $w = |CD|$ este un *submultiplu* al segmentului m , dacă există un număr natural q , astfel ca $m \equiv q \cdot w$. Scriem atunci

$$w \equiv \frac{1}{q} \cdot m.$$

Figura I.67 ilustrează cazul $q = 3$.

Dacă u și w sunt segmente astfel încât există numere naturale p, q cu proprietatea

$$u \equiv p \left(\frac{1}{q} \cdot w \right).$$



Fig. I.66

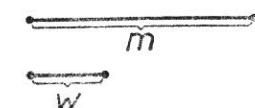


Fig. I.67

atunci spunem că segmentele u , w sunt *comensurabile* și scriem

$$(1) \quad u \equiv \frac{p}{q} \cdot w \text{ sau } \frac{u}{w} = \frac{p}{q}.$$

Multiplii și submultiplii unui segment m sunt segmente comensurabile cu m .

Dacă sunt indeplinite relațiile echivalente (1), spunem că u este congruent cu produsul dintre numărul rațional $\frac{p}{q}$ și segmentul w , sau că raportul dintre segmentul u și segmentul w este egal cu $\frac{p}{q}$. Vom mai spune că numărul $\frac{p}{q}$ reprezintă măsura segmentului u prin segmentul w sau că $\frac{p}{q}$ este *lungimea* segmentului u , măsurată cu ajutorul lui w .

Fiind dat un segment m , există segmente care nu sunt comensurabile cu m . De exemplu, *diagonala unui pătrat nu este comensurabilă cu laturile acestui pătrat*.

Ne propunem să definim raportul a două segmente arbitrale w și m . Acest raport va fi un număr rațional sau un număr real irațional.

Pentru a defini raportul unui segment w prin segmentul m , vom construi o riglă gradată zecimal (fig. I.68).

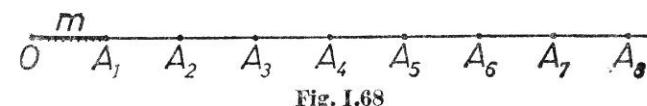


Fig. I.68

Fie s o semidreaptă având originea O . Pe semidreapta s construim punctele $A_1, A_2, A_3, \dots, A_p, A_{p+1}, \dots$ astfel încât să aibă:

$$A_1 \in |OA_2|, A_2 \in |OA_3|, \dots, A_p \in |OA_{p+1}|, \dots \\ |OA_1| \equiv |A_1A_2| \equiv |A_2A_3| \equiv \dots \equiv |A_pA_{p+1}| \equiv \dots \equiv m.$$

Pentru orice punct $M \in |A_pA_{p+1}|$, spunem că p reprezintă *partea întreagă* a raportului dintre segmentul $|OM|$ și segmentul m .

Punctele $A_1, A_2, \dots, A_p, A_{p+1}, \dots$ formează o *gradăție de ordinul 0* pe semidreapta s . Repetind construcția făcută pentru a obține aceste puncte, dar considerind, în locul segmentului m , un submultiplu $m_1 \equiv \frac{1}{10}m$, vom obține pe s o *gradăție de ordinul 1*. În continuare, vom considera submultiplii zecimali succesivi $m_2 \equiv \frac{1}{10^2}m, \dots, m_k \equiv \frac{1}{10^k}m, \dots$ și vom defini pe s gradății de ordine 2, ..., k, \dots . Vom putea considera, pentru fiecare indice k , partea întreagă a raportului dintre $|OM|$ și segmentul m_k .

Dacă notăm prin p_k partea întreagă a raportului dintre segmentul $|OM|$ și segmentul m_k , avem

$$\frac{p}{1} \leq \frac{p_1}{10} \leq \frac{p_2}{10^2} \leq \frac{p_3}{10^3} \leq \dots \leq \frac{p_k}{10^k} \leq \dots$$

deoarece $m \equiv 10 \cdot m_1 \equiv 10^2 \cdot m_2 \equiv 10^3 \cdot m_3 \equiv \dots \equiv 10^k \cdot m \dots$ și deoarece trecerea de la o gradăție la gradăția următoare permite luarea în considerare a restului rămas, ceea ce implică $p_k m_k \geq p_{k-1} m_{k-1} \equiv$.

De exemplu, dacă m este un segment de un metru și dacă segmentul $|OM|$ are 3,213547 metri, atunci

$$p = 3, \quad p_1 = 32, \quad p_2 = 321, \quad p_3 = 3\,213, \quad p_4 = 32\,135, \quad p_5 = 321\,354, \\ p_6 = 3\,213\,547.$$

Dacă segmentul $|OM|$ nu este comensurabil cu segmentul m , sau dacă $|OM|$ este congruent cu un segment de forma $\frac{p}{q} \cdot m$, unde p, q sunt numere naturale prime între ele, cu q divizibil prin 3 sau 7, atunci operația de măsurare a segmentului $|OM|$ prin m trebuie continuată la infinit, dacă vrem să obținem valoarea exactă a raportului lui $|OM|$ prin m .

Se spune că raportul $p_k/10^k$ reprezintă *aproximația de ordin k* , prin lipsă, a raportului $|OM|/m$.

Exercițiu. Măsurând un segment $|OM|$, s-au obținut valoile $p = 9, p_1 = 92, p_2 = 928, p_3 = 9284, p_4 = 92845$. Să se determine aproximația de ordinul 3, prin lipsă, a raportului $|OM|/m$.

Din definiția raportului a două segmente rezultă următoarele proprietăți:

1. Dacă u, v, w sunt segmente astfel încât w reprezintă suma segmentelor u și v , deci dacă $w \equiv u + v$, atunci avem, oricare ar fi segmentul m ,

$$\frac{u}{m} + \frac{v}{m} = \frac{w}{m}.$$

2. Dacă u, u', m, m' sunt segmente astfel încât $u \equiv u'$ și $m \equiv m'$, atunci

$$\frac{u}{m} = \frac{u'}{m'}.$$

3. Oricare ar fi segmentul u , avem

$$\frac{u}{u} = 1.$$

4. Oricare ar fi segmentul u și oricare ar fi numărul real pozitiv x , există un segment w , astfel încât

$$\frac{w}{u} = x.$$

Se spune atunci că w reprezintă produsul numărului x prin segmentul u și se scrie $w \equiv x \cdot u$.

5. Dacă w, w' și u sunt segmente astfel încât $\frac{w}{u} = \frac{w'}{u}$, atunci $w \equiv w'$.

6. Oricare ar fi segmentele u, v, w , avem

$$\frac{u}{v} \cdot \frac{v}{w} = \frac{u}{w}, \quad \frac{u}{v} \cdot \frac{v}{u} = 1, \quad \frac{u/w}{v/u} = \frac{u}{v}.$$

7. Oricare ar fi segmentul u și oricare ar fi numerele reale pozitive x și y , avem

$$x \cdot (y \cdot u) \equiv (xy) \cdot u, \quad (x + y) \cdot u \equiv x \cdot u + y \cdot u.$$

Exerciții

1. Dați exemple de perechi de segmente comensurabile.

2. Arătați că două segmente comensurabile cu al treilea sint comensurabile între ele.

3. Fiind date segmentele $u = 3,5 w, v \equiv 1,5 w$, arătați că există un segment s , astfel încât u și v să fie congruente cu anumiți multipli întregi ai segmentului s . Indicați un segment s , care să fie congruent sau mai mare decât orice alt segment având proprietatea indicată.

4. Fiind date două segmente comensurabile u și v , arătați că există un segment s , astfel încât u și v să fie congruente cu anumiți multipli întregi ai segmentului s și s să fie multiplu întreg al oricărui segment s' , care este un submultiplu comun al segmentelor u și v .

5. Fie A, B, C, D patru puncte astfel ca $B \in |AC|$ și $C \in |AD|$. Arătați că sunt adevărate următoarele inegalități:

a) $\frac{|AB|}{|AD|} < 1, \quad \frac{|AB|}{|BD|} < \frac{|AC|}{|CD|}, \quad \frac{|AC|}{|AD|} > \frac{|BC|}{|BD|}.$

6. Fiind dat un segment $|AB|$, să se construiască punctele M, N și P , aparținând acestui segment, astfel încât să avem

$$\frac{|AN|}{|BN|} = \frac{1}{3}, \quad \frac{|AN|}{|BM|} = \frac{3}{5}, \quad \frac{|AP|}{|BP|} = 7.$$

7. Fie A, B, C, D puncte astfel ca $B \in |AD|$ și $C \in |AD|$. Să se arate că dacă $\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|CD|}$, atunci $B = C$.

Apli că t i e. Fie u, v, w trei segmente și fie x, y, a, b patru numere reale astfel ca

$$v \equiv au \equiv yw, u \equiv xv \equiv bv, y = \frac{v}{w}, a = \frac{v}{u}, x = \frac{u}{w}, b = \frac{u}{v}.$$

Avem atunci

$$v \equiv (ax)w \equiv (ab) \cdot v, u \equiv (by) \cdot w$$

și rezultă că avem $y = ax$, $ab = 1$, $by = x$. Aceste relații arată că, oricare ar fi segmentele u, v, w , avem:

$$\frac{v}{u} \frac{u}{w} = \frac{v}{w}, \quad \frac{v}{u} \frac{u}{v} = 1, \quad \frac{v}{u} : \frac{w}{u} = \frac{v}{w}.$$

Apli că t i e. Fiind date un segment $|AB|$ și un număr pozitiv k , există un singur punct $M \in |AB|$ astfel ca $|MA| \equiv k \cdot |MB|$ sau

$$\frac{|MA|}{|MB|} = k.$$

Demonstrație. Să punem, pentru un punct $P \in |AB|$,

$$x = \frac{|PA|}{|AB|}, \quad y = \frac{|PB|}{|AB|}.$$

Avem atunci

$$x + y = 1, \quad \frac{x}{y} = \frac{|PA|}{|PB|}.$$

Rezultă că dacă alegem numerele x și y astfel ca să avem

$$x + y = 1, \quad x = ky,$$

și dacă luăm pentru M acel punct de pe segment $|AB|$, pentru care

$$|MA| \equiv x \cdot |AB|,$$

atunci vom avea $|MA| \equiv k \cdot |MB|$.

Exercițiu. Fiind date două puncte distincte A, B și un număr real pozitiv $k \neq 1$ să se arate că există un singur punct N pe dreapta AB , dar exterior segmentului $|AB|$, astfel ca $|NA| \equiv k \cdot |NB|$.

Elevii vor reține următoarea:

Teorema fundamentală. Fie $s = |OA|$ o semidreaptă. Dacă asociem fiecărui număr real pozitiv x acel punct M al semidreptei s , pentru care avem $|OM| \equiv x \cdot |OA|$, obținem o corespondență bijectivă de la mulțimea numerelor reale pozitive la mulțimea punctelor semidreptei s , astfel încât relațiile

$$|OM| \equiv x \cdot |OA|, \quad |ON| \equiv y \cdot |OA|$$

implică

$$\frac{|OM|}{|ON|} = \frac{x}{y}.$$

15. Axiomele de continuitate (texte facultative).

Am văzut că segmentele pot fi adunate și pot fi comparate. Suma a două segmente este o clasă de segmente congruente. Dacă fixăm o semidreaptă s cu originea O , atunci putem asocia fiecărui segment $|AB|$ un singur segment $|OM|$ astfel ca $|OM| \equiv |AB|$ și $M \in s$. Suma a două segmente $|AB|, |CD|$ poate fi reprezentată în mod unic printr-un segment $|PO|$, unde $P \in s$. Rezultă că în mulțimea segmentelor $|OM|$, cu $M \in s$, se poate introduce o lege de compunere internă, considerind adunarea segmentelor. De asemenea, în aceeași mulțime avem o relație de ordine. Aceste observații arată că există o analogie între segmente și numere. Dar știm că există mai multe feluri de numere. Astfel am întâlnit pînă acum numere pozitive, numere negative, numere întregi, numere raționale, numere reale, numere complexe. În matematica superioară se construiesc și alte tipuri de numere. Se pune atunci întrebarea:

Care tip de numere prezintă o analogie mai strînsă cu segmentele și că de departe merge această analogie?

În cadrul geometriei experimentale, răspunsul la această întrebare nu a fost încă dat, datorită aspectelor încă necunoscute privind structura materiei. Într-adevăr, concepția atomistă asupra materiei arată că un segment material nu poate fi divizat oricără de mult. Dar concepția atomistă este astăzi depășită, datorită descoperirii particulelor ce intră în componența atomilor.

Geometria joacă un rol de seamă, atât în cercetările privind structura materiei, cât și în aplicațiile tehnice, care folosesc segmente de mărimi perceptibile. În ambele cazuri, este necesară o abstractizare a noțiunii de segment, aşa cum am mai subliniat. Cînd se compară însă segmentele cu numerele, gradul de abstractizare cere un efort mai mare, deoarece numerele sunt mai abstrakte decît figurile. De aceea vă cerem și vouă o atenție mai mare.

Măsurarea distanțelor sau a lungimii segmentelor este o operație necesară în toate domeniile activității practice. Fizicianul și chimistul evaluatează distanțe între atomi sau molecule sau între moleculele unui gaz sau ale unui corp solid. Inginerii măsoară distanțe între planete sau între stele sau galaxii. Fiecare din acești lucrători folosește o anumită unitate de măsură și fiecare dintre ei urmărește un anumit grad de precizie. Odată o unitate de măsură aleasă, apare necesitatea utilizării unităților fractionare, sau a submultiplilor acelei unități de măsură.

Să presupunem că un fizician vrea să exprime în ani lumină distanța între doi atomi ai unei molecule. El va folosi fracții zecimale cu foarte multe cifre. În general numărul acestor cifre crește, dacă vom efectua operații cu numerele obținute. Vedem că numărul cifrelor ce compun o fracție zecimală nu poate fi limitat. Sîntem deci conuși a considera fracții zecimale cu un număr nelimitat de cifre. Astfel s-a ajuns la noțiunea de *număr real*, ca fracție zecimală cu o infinitate de zecimale, pentru a exprima *măsura* unui segment, raportat la un segment fix, ales ca unitate de măsură.

Reamintim că un *număr real pozitiv sau nul* este dat de o *sumă infinită* de forma

$$(1) \quad x = n + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + \dots + a_k \cdot 10^{-k} + \dots$$

unde n este un număr întreg pozitiv sau nul, iar $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ sunt *cifre*, adică au fiecare una din valorile 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Dacă pentru o expresie (1) există un indice r astfel că $a_r < 9$ și $a_9 = 9$ pentru orice $s > r$, atunci se convine a se identifica expresia (1) cu numărul real

$$(2) \quad x = n + a_1 \cdot 10^{-1} + \dots + (a_r + 1) \cdot 10^{-r} + 0 \cdot 10^{-r-1} + 0 \cdot 10^{-r-2} + \dots$$

Suma (1) se reprezintă prin simbolul $n, a_1a_2\dots a_k\dots$ și se spune că n este partea întreagă a lui x , iar $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ sunt zecimalele numărului real x .

De asemenea, se convine să se identifice expresiile de forma

$$(3) \quad x = n + a_1 \cdot 10^{-1} + \dots + a_k \cdot 10^{-k} + 0 \cdot 10^{-k-1} + 0 \cdot 10^{-k-2} + \dots$$

cu numerele rationale

$$(4) \quad x = n + a_1 \cdot 10^{-1} + \dots + a_k \cdot 10^{-k}.$$

Reamintim de asemenea că orice număr rațional poate fi reprezentat printr-o sumă de forma (4). Numerele a_k din această exprimare vor avea atunci o particularitate remarcabilă; există pentru fiecare număr rațional două numere naturale r, s astfel ca cifrele a_k din scrierea zecimală a aceluia număr rațional au proprietatea de *periodicitate*:

$$(5) \quad \text{pentru } k > r, a_{k+s} = a_k.$$

De exemplu, $\frac{4}{7} = 0,571428571428\dots$ are $r = 0$ și $s = 6$.

Reciproc, orice număr real (1) cu proprietatea (5) reprezintă scrierea zecimală a unui număr rațional. Exemplu: $0,12533\dots = \frac{376}{3000}$.

Numerele reale se adună și se înmulțesc, făcind adunări și înmulțiri ale sumelor (1) corespunzătoare și grupind termenii rezultați, în aşa fel încât să obținem sume de forma (1). Exemple: $0,41\dots + 0,33\dots = 0,44\dots; 3 \times 0,33\dots = 1$.

Orice număr real poate fi aproximat prin numere raționale, cu o precizie oricât de mare vrem. De exemplu, dacă aproximăm numărul real (1) prin suma primilor săi $k+1$ termeni, atunci eroarea făcută este mai mică decât 10^{-k} și eroarea se face *prin lipsă*. Dacă se ia însă suma primilor $k+1$ termeni, la care se adaugă 10^{-k} , atunci se obține o aproximare cu o eroare de cel mult 10^{-k} *prin adăus*.

Ne propunem acum să folosim numerele reale pentru a defini *raportul a două segmente și produsul unui număr real cu un segment*. Aceste operații ne vor permite să stabilim o corespondență bijectivă între mulțimea numerelor reale pozitive și mulțimea punctelor semidreptei s , astfel ca ordonarea numerelor reale să corespundă ordonării segmentelor de pe s , având o extremitate în originea semidreptei s .

Proprietățile date până acum nu sunt suficiente pentru a obține aceste construcții. Numerele reale au două proprietăți importante:

1. *Fiind date două numere reale pozitive x și a , există un număr natural n , astfel ca să avem $x < na$.*

2. *Fiind date două siruri de numere reale (x_1, x_2, x_3, \dots) și (y_1, y_2, y_3, \dots) astfel ca*
 $x_1 < x_2 < \dots < x_h < x_{h+1} < \dots < y_{h+1} < y_h < \dots < y_2 < y_1$
există cel puțin un număr n astfel ca să avem

$$x_i < a < y_j$$

pentru orice indici i și j . Numărul n , ce verifică această condiție, este unic, dacă diferențele $y_h - x_h$ tind către zero, deci dacă aceste diferențe devin mai mici decât orice număr pozitiv dat, cind k este ales suficient de mare.

Aceste proprietăți sunt consecințe ale definiției numerelor reale.

Proprietățile geometrice analoage acestor proprietăți ale numerelor reale se exprimă prin următoarele axiome, numite *axioamele de continuitate*:

Axioma lui Arhimede. Dacă A, P sunt două puncte ale unei semidrepte s , cu originea O , există pe s o mulțime finită de puncte $\{A_2, A_3, \dots, A_k\}$ astfel încât să fie verificate proprietățile (fig. I.69):

$$\begin{aligned} A &\in |OA_2|, A_2 \in |OA_3|, \dots, A_i \in |OA_{i+1}|, \dots, A_{h-1} \in |OA_h|, \\ |OA| &\equiv |AA_2| \equiv |A_2A_3| \equiv \dots \equiv |A_iA_{i+1}| \equiv \dots \equiv |A_{h-1}A_h|, P \in |OA_h|. \end{aligned}$$



Fig. I.69

Axioma lui Arhimede mai poate fi formulată în modul următor:

Fiind date pe semidreapta s două puncte A, P , există cel puțin un număr natural k , astfel ca să avem $|OP| < k |OA|$.

Axioma lui Cantor-Dedekind. Fiind date pe o dreaptă d două siruri de puncte $A_1, A_2, \dots, A_i, A_{i+1}, \dots$ și $B_1, B_2, \dots, B_i, B_{i+1}, \dots$ astfel ca, pentru orice indice i , segmentul $[A_{i+1}B_{i+1}]$ să fie conținut în segmentul $[A_iB_i]$, există cel puțin un punct P , situat pe fiecare din segmentele $[A_1B_1], [A_2B_2], \dots, [A_iB_i], [A_{i+1}B_{i+1}], \dots$ (fig. I.70).



Fig. I.70

Fiind dat un punct A_1 pe semidreapta s , având originea O , să asociem lui A_1 sirul de puncte $A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ aparținând lui s și definite prin relațiile (6), (fig. I.71).



Fig. I.71

$$(6) \quad A = A_1 \in |OA_2|, A_n \in |A_{n-1}A_{n+1}|, n = 2, 3, \dots$$

$$|OA_1| \equiv |A_1A_2| \equiv |A_2A_3| \equiv \dots \equiv |A_{n-1}A_n| \equiv \dots$$

În acest caz, segmentul $|OA_n|$ reprezintă suma a n segmente congruente cu segmentul $|OA|$. Vom scrie

$$(7) \quad |OA_n| \equiv n \cdot |OA|$$

și vom spune că $|OA_n|$ este *produsul* dintre numărul natural n și segmentul $|OA|$.

Fie k un număr natural. Folosind teorema lui Thales restrânsă, se poate defini punctul B_k de pe semidreapta s , pentru care (fig. I.72)

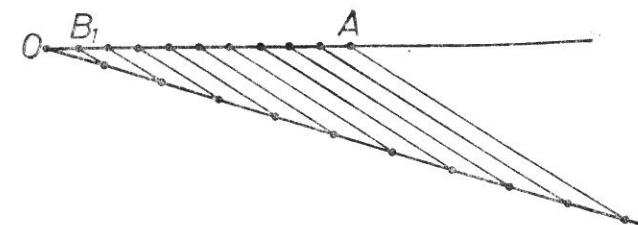


Fig. I.72

$$(8) \quad |OA| = 10^k \cdot |OB_k|.$$

Vom spune că $|OB_k|$ reprezintă *cîtul* împărțirii segmentului $|OA|$ prin 10^k sau *produsul* dintre numărul rațional 10^{-k} și segmentul $|OA|$. Vom scrie

$$|OB_k| = 10^{-k} \cdot |OA|.$$

Să considerăm *segmentele semiinchise*

$$[A_n, A_{n+1}] = [A_n, A_{n+1}] \cup \{A_n\}, n = 1, 2, \dots,$$

unde $A_1 = A$. Din formulele (6) rezultă că mulțimile $[A_n, A_{n+1}]$ sunt disjuncte două cîte două și că avem egalitatea

$$(9) \quad |OA_n| = |OA| \cup [AA_2] \cup [A_2A_3] \cup \dots \cup [A_{n-1}A_n]$$

pentru orice număr natural n .

Dacă P este un punct oarecare al semidreptei s , axioma lui Arhimede ne asigură că există cel puțin un număr natural n , astfel ca $P \in [OA_{n+1}]$. Dacă n este cel mai mic număr natural cu această proprietate, vom avea

$$P \in [A_n A_{n+1}],$$

unde convenim să notăm

$$A_0 = O, A_1 = A.$$

Punctul P fiind un punct arbitrar pe semidreapta s , rezultă că avem egalitatea de mulțimi

$$(14) \quad s = |A_0 A_1| \cup |A_1 A_2| \cup |A_2 A_3| \cup \dots \cup |A_i A_{i+1}| \cup \dots$$

și această egalitate este adevărată pentru orice punct $A \in s$, cu condiția să definim punctele A_i prin formulele arătate anterior.

Dacă $P \in [A_n A_{n+1}]$, vom spune că segmentul $|A_0 A_1|$ se cuprinde de n ori în segmentul $|A_0 P|$; n este un număr întreg pozitiv sau nul. Dacă $P = A_n$ putem scrie

$$|A_0 P| \equiv |A_0 A_n| \equiv n \cdot |A_0 A_1|.$$

Dacă $P \in [A_n A_{n+1}]$, avem

$$(12) \quad |A_0 P| \equiv |A_0 A_n| + |A_n P| \equiv n \cdot |A_0 A_1| + |A_n P|,$$

unde

$$(13) \quad |A_n P| < |A_0 A_1|.$$

Fie $P_1 \in |A_0 A_1|$ acel punct al segmentului $|A_0 A_1|$, pentru care avem

$$(14) \quad |A_0 P_1| \equiv |A_n P| \text{ (fig. 1.73).}$$

Demostreazăți că există și o altă serie de numere pozitive fi reprezentată pe o dreaptă.



Fig. 1.73

Să presupunem că segmentul $|A_0 B_1|$ se cuprinde de a_1 ori în segmentul $|A_0 P_1|$, deci că avem

$$(15) \quad |A_0 P_1| \geq a_1 \cdot |A_0 B_1|, \quad |A_0 P_1| < (a_1 + 1) \cdot |A_0 B_1|.$$

Folosind formula

$$(16) \quad |A_0 B_1| \equiv 10^{-1} \cdot |A_0 A_1|$$

și formula (12), vom putea scrie

$$(17) \quad |A_0 P| \equiv n \cdot |A_0 A_1| + a_1 \cdot 10^{-1} \cdot |A_0 A_1| + |A_0 P_2|,$$

unde $|A_0 P_2|$ este un segment mai mic decit segmentul $|A_0 B_1|$, sau este *segmentul nul*, reprezentat prin $|A_0 A_0|$, dacă

$$(18) \quad |A_0 P| \equiv n \cdot |A_0 A_1| + a_1 \cdot 10^{-1} \cdot |A_0 A_1|.$$

Din relațiile (13), (14), (15) rezultă că a_1 este o cifră, deci că are una din valorile 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Să presupunem acum că segmentul $|A_0 B_2|$ se cuprinde de a_2 ori în segmentul $|A_0 P_2|$. Vom avea atunci relațiile

$$|A_0 P_2| \equiv a_2 \cdot |A_0 B_2| + |A_0 P_3|$$

$$0 \leq a_2 \leq 9, \quad |A_0 P_3| < |A_0 B_2|, \quad |A_0 B_2| \equiv 10^{-2} \cdot |A_0 A_1|.$$

Deducem din (17) relația

$$|A_0 P| \equiv n \cdot |A_0 A_1| + a_1 \cdot 10^{-1} \cdot |A_0 A_1| + a_2 \cdot 10^{-2} \cdot |A_0 A_1| + |A_0 P_3|.$$

Putem scrie ultima relație sub forma

$$|A_0 P| \equiv (n + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2}) \cdot |A_0 A_1| + |A_0 P_3|, \quad |A_0 P_3| < |A_0 B_2|.$$

Procedeu poate fi continuat, exprimând segmentul $|A_0 P_3|$ cu ajutorul segmentului $|A_0 B_3|$ și al unui rest $|A_0 P_4|$, care va fi mai mic decit segmentul $|A_0 B_3|$. După k operații de acest fel, ajungem la o relație de forma

$$(19) \quad |A_0 P| \equiv (n + a_1 \cdot 10^{-1} + \dots + a_k \cdot 10^{-k}) \cdot |A_0 A_1| + |A_0 P_{k+1}|,$$

unde a_1, a_2, \dots, a_k sunt cifre, iar $|A_0 P_{k+1}|$ este un segment mai mic decit segmentul $|A_0 B_k| \equiv 10^{-k} \cdot |A_0 A_1|$, putând fi segmentul nul, dacă nu apare rest după cele k operații.

Rezultă că, dacă punctul A este fixat pe semidreapta s , fiecărui punct $P \in s$ î se asociază un număr real,

$$(20) \quad x = n + a_1 \cdot 10^{-1} + \dots + a_k \cdot 10^{-k} + \dots$$

astfel încât să avem, pentru orice număr natural k , o relație (19).

Definiție. Se spune că numărul real x , definit prin (19 și 20) reprezintă, abscisa punctului P , făcă de punctul A , pe semidreapta s ; x se mai numește raportul segmentului $|OP|$ prin segmentul $|OA|$ și se scrie $x = |OP| / |OA|$ sau $|OP| \equiv x \cdot |OA|$.

Fie k cel mai mare număr întreg, pentru care avem

$$(21) \quad 10^k \cdot |A_0 P| \leq |A_0 A_1|.$$

Vom avea

$$|A_0 P| \leq 10^{-k} \cdot |A_0 A_1|, \quad |A_0 P| > 10^{-k-1} \cdot |A_0 A_1|.$$

Există un număr natural k , pentru care relația (21) nu este adevărată. Într-adevăr, din axioma lui Arhimede rezultă că, pentru N suficient de mare, avem $N \cdot |A_0 P| > |A_0 A_1|$.

Rezultă că abscisa (20) a punctului $P \in s$ are cel puțin un coeficient n sau a_k diferit de zero. Deci:

Abscisa oricărui punct P de pe semidreapta s este un număr real diferit de zero.

Fie P, Q două puncte pe semidreapta s , astfel ca $P \in [A_0 Q]$ (fig. 1.74). Din axioma lui Arhimede deducem că există un indice k , astfel ca

$$10^k \cdot |PQ| > |A_0 A_1| \text{ sau } |PQ| > 10^{-k} \cdot |A_0 A_1|.$$

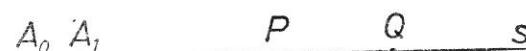


Fig. 1.74

Rezultă că dacă notăm prin x și y abscisele punctelor P, Q , atunci avem $x < y$. Deci am arătat că relația $P \in [A_0 Q]$ implică $x < y$. Aceasta arată că:

Abscisele a două puncte distincte de pe o semidreaptă s sint două numere reale pozitive distincte.

Refinem că punctul A_n are abscisa n , iar punctul B_k are abscisa 10^{-k} ; în particular, $A_1 = A$ are abscisa 1, iar B_1 are abscisa 10^{-1} .

În acest fel, am construit o aplicație injectivă de la mulțimea s la mulțimea numerelor reale pozitive.

Se poate problema de a vedea dacă această aplicație este și surjectivă. Vom arăta că răspunsul este afirmativ.

Pentru a arăta că aplicația construită este surjectivă, trebuie să arătăm că fiecărui număr real pozitiv x i se poate asocia un punct M pe semidreapta s , astfel că x să fie abscisa lui M , deci astfel ca $|OM| \equiv x \cdot |OA|$.

Să presupunem că x are expresia (1). Pentru fiecare indice natural k , să notăm prin M_k punctul semidreptei s , care are proprietatea

$$(23) \quad |OM_k| \equiv n \cdot |OA| + a_1 \cdot |OB_1| + a_2 \cdot |OB_2| + \dots + a_k \cdot |OB_k|.$$

Să considerăm apoi punctele $N_k \in s$, pentru care avem

$$(24) \quad |ON_k| \equiv |OM_k| + |OB_k|.$$

Avem relațiile

$$|OM_k| \equiv |OM_{k-1}| + a_k \cdot |OB_k|,$$

$$|ON_k| \equiv |OM_k| + |OB_k| \equiv |OM_{k-1}| + (a_k + 1) \cdot |OB_k|$$

$$|ON_{k-1}| \equiv |OM_{k-1}| + |OB_{k-1}| \equiv |OM_{k-1}| + 10 \cdot |OB_k|.$$

Din aceste relații rezultă că avem, pentru orice număr natural k ,

$$(25) \quad |OM_{k-1}| \leq |OM_k| < |ON_k| \leq |ON_{k-1}|.$$

Avem de asemenea

$$(26) \quad |M_k N_k| \equiv |OB_k| \equiv 10^{-k} \cdot |OA|.$$

Relațiile (25), (26) arată că punctele M_k, N_k sunt în condițiile aplicării axiomei lui Cantor-Dedekind. Aceasta înseamnă că există un unic punct M , comun tuturor segmentelor $[M_k N_k]$.

Fie u abscisa punctului M . Din relațiile

$$|OM_k| < |OM| < |ON_k|$$

deducem că avem, pentru orice indice k ,

$$(27) \quad x_k < u < x_k + 10^{-k},$$

unde am notat prin x_k abscisa punctului M_k , deci x_k este suma primilor $k+1$ termeni din suma infinită (1). Formula (27) arată că $u = x$, deci abscisa punctului M este numărul dat x .

Figura 1.75 ilustrează cazul $n = 1$, $a_1 = 3$ și $a_2 = 8$.

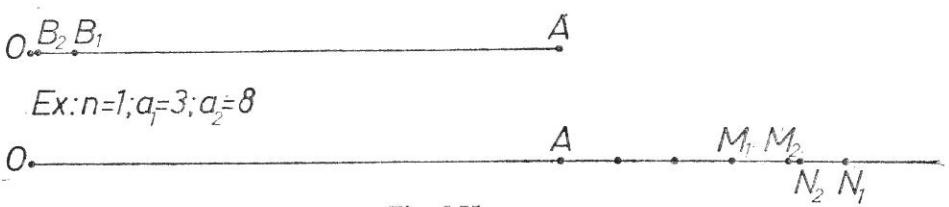


Fig. 1.75

În concluzie:

Dacă fixăm un punct A pe o semidreaptă s , având originea O , și dacă asociem fiecărui număr real pozitiv x acel punct $M \in s$, pentru care $|OM| \equiv x \cdot |OA|$, obținem o aplicație bijectivă de la mulțimea \mathbb{R}_+ a numerelor reale pozitive pe mulțimea s .

Proprietățile produsului unui număr real pozitiv cu un segment.

Dacă $u = |OA|$ este un segment și dacă m, n sint numere naturale, avem

$$(m+n) \cdot u \equiv m \cdot u + n \cdot u, (mn) \cdot u \equiv m \cdot (n \cdot u) \text{ (fig. 1.76)}$$

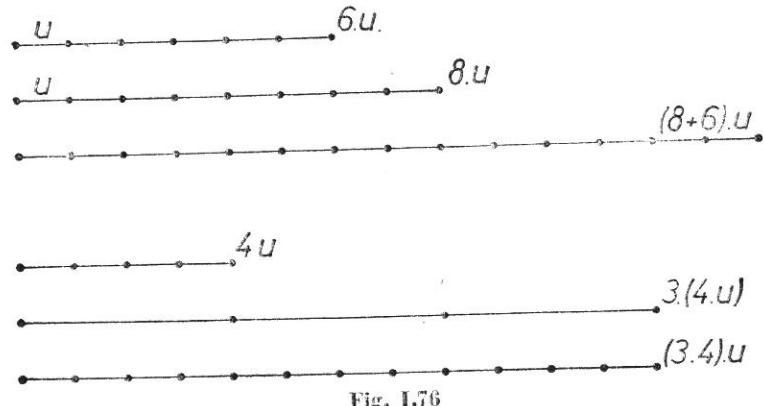


Fig. 1.76

Fie $u_k = 10^{-k} \cdot u$ și fie k, r, s numere naturale. Putem scrie
 $(m \cdot 10^{-r} + n \cdot 10^{-s}) \cdot u \equiv (m \cdot 10^{-r} + n \cdot 10^{-s}) \cdot (10^{r+s} \cdot u_{r+s}) \equiv (m \cdot 10^s + n \cdot 10^r) \cdot u_{r+s} \equiv$
 $\equiv m \cdot 10^s \cdot u_{r+s} + n \cdot 10^r \cdot u_{r+s} \equiv m \cdot u_r + n \cdot u_s \equiv m \cdot 10^{-r} \cdot u + n \cdot 10^{-s} \cdot u$.

În mod analog se demonstrează că

$$(m \cdot 10^{-s} \cdot n \cdot 10^{-r}) \cdot u \equiv m \cdot 10^{-r} \cdot ((n \cdot 10^{-s}) \cdot u).$$

Combinând aceste egalități, deducem că dacă x_h este un număr real având cel mult k zecimale nenule și dacă y_h este un număr real având cel mult h zecimale nenule, atunci

$$(x_h + y_h) \cdot u \equiv x_h \cdot u + y_h \cdot u, (x_h \cdot y_h) \cdot u \equiv x_h \cdot (y_h \cdot u).$$

În general, se demonstrează următoarea

Teoremă. Pentru orice segment u și orice numere reale pozitive x, y avem

$$\boxed{(x+y) \cdot u \equiv x \cdot u + y \cdot u, (xy) \cdot u \equiv x \cdot (y \cdot u).}$$

Demonstrația se face aproximând numerele x, y prin numere x_h, y_h având k , respectiv h zecimale, diferențe de zero.

Fie $u = |OA|, v = |OB|$ și fie m un număr natural. Avem evident

$$m \cdot (u+v) \equiv m \cdot u + m \cdot v \text{ (fig. 1.77).}$$

Procedând cum s-a arătat mai sus, putem demonstra formula

$$(28) \quad \boxed{x \cdot (u+v) \equiv x \cdot u + x \cdot v}$$



Fig. 1.77

pentru orice număr x de forma $m \cdot 10^{-r}$. Formula se extinde apoi la cazul unui număr real pozitiv x arbitrar. Deci:

Teoremă. Pentru orice număr real pozitiv x și pentru orice segmente u, v are loc egalitatea (28).

16. Măsurarea unghiurilor

Pentru a defini măsura unui unghi, vom folosi unghiul drept ca etalon, împărțirea unui unghi oarecare în două unghiuri congruente cu ajutorul bisectoarei și scrierea numerelor reale sub forma

$$(1) \quad x = x_0 + x_1 \cdot 2^{-1} + x_2 \cdot 2^{-2} + \dots + x_k \cdot 2^{-k} + \dots, = (x_0, x_1 x_2 \dots)_2,$$

unde x_0 este un număr întreg, iar $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ sint egale fiecare cu 0 sau cu 1. Dacă x aparține intervalului inchis $[0, 1]$, atunci x_0 este de asemenea egal cu 0 sau cu 1. Scrierea (1) se numește *scriere binară* și se deosebește de scrierea zecimală prin faptul că puterile negative ale lui 10 sunt înlocuite prin puterile negative ale lui 2. Exemplu: $\frac{1}{5} = (0,001100\dots)_2$.

Fie $D = \widehat{hk}$ un unghi drept și fie m bisectoarea unghiului D . Se formează unghiurile $D_0 = \widehat{hm}$, $D_1 = \widehat{mk}$ (fig.I.78).

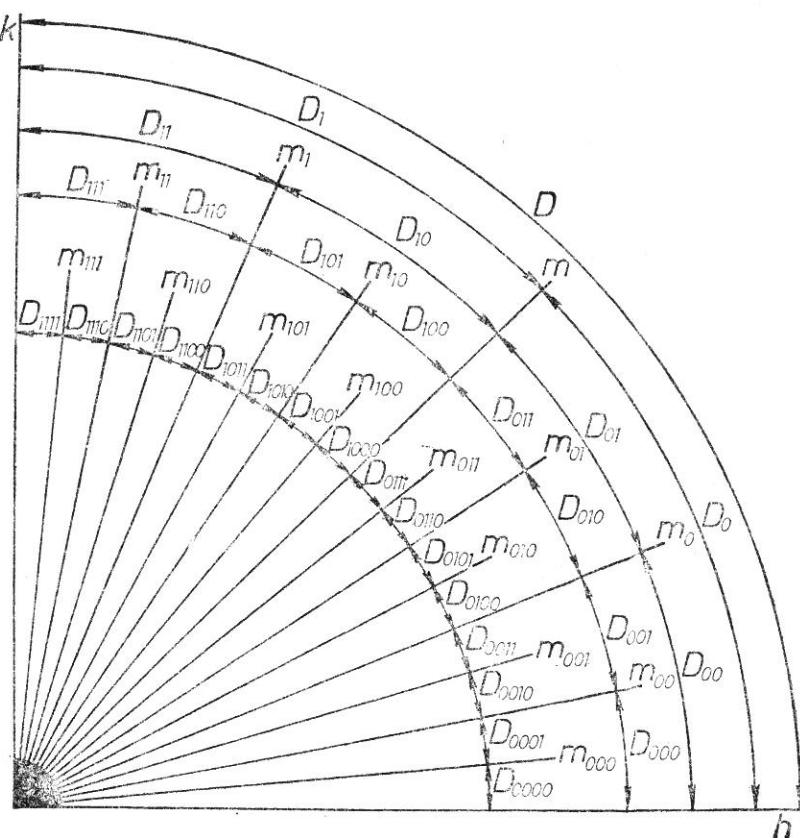


Fig. I.78

Fie m_0, m_1 bisectoarele unghiurilor D_0 respectiv D_1 . Se formează unghiurile

$$D_{00} = \widehat{hm_0}, D_{01} = \widehat{m_0m}, D_{10} = \widehat{mm_1}, D_{11} = \widehat{m_1k}.$$

Notăm prin m_{ij} bisectoarea unghiului D_{ij} , pentru $i, j = 0$ sau 1. Semidreapta m_{ij} este latură la două unghiuri: unul, conținut în unghiul $\widehat{hm_{ij}}$, al doilea conținut în unghiul $\widehat{m_{ij}k}$. Primul din aceste unghiuri va fi notat D_{ijo} iar al doilea va fi notat D_{ij1} . Continuând acest procedeu, obținem un sistem de unghiuri

$$D_{i_1 i_2 \dots i_r}; \quad i_1, \dots, i_r \in \{0, 1\},$$

și de semidrepte $m_{i_1 \dots i_{r-1}}$, astfel încât:

1. Unghiul D este congruent cu $2^r \cdot D_{i_1 \dots i_{r-1}}$, oricare ar fi indicii i_1, \dots, i_r .

2. $m_{i_1 \dots i_{r-1}}$ este bisectoarea unghiului $D_{i_1 \dots i_{r-1}}$ și este latură la fiecare din unghiurile $D_{i_1 \dots i_{r-1}0}$, $D_{i_1 \dots i_{r-1}1}$.

3. Semidreapta $m_{j_1 \dots j_r}$ este interioară unghiului format de h și de $m_{i_1 \dots i_r}$ dacă și numai dacă există un număr natural $s \leq r$ astfel ca

$$(2) \quad j_1 = i_1, j_2 = i_2, \dots, j_{s-1} = i_{s-1}, j_s < i_s.$$

Această condiție este echivalentă cu relația

$$i_1 \cdot 2^{-1} + i_2 \cdot 2^{-2} + \dots + i_r \cdot 2^{-r} > j_1 \cdot 2^{-1} + \dots + j_r \cdot 2^{-r}.$$

Numărul sistemelor de indicii (j_1, \dots, j_r) , care verifică relațiile (2) este egal cu $i_s \cdot 2^{r-s}$, deoarece există i_s valori posibile pentru j_s și cite două valori posibile pentru fiecare din indicii j_{s+1}, \dots, j_r .

4. Unghiurile $D_{i_1 \dots i_r}$ sunt congruente între ele, pentru fiecare indice r fixat.

Exerciții

1. Să se completeze figura 1.78 cu semidreptele $m_{i_1 \dots i_r}$, unde $r \leq 6$. Să se noteze unghiurile formate din cîte două semidrepte succexe din semidreptele desenate.

2. Să se reprezinte pe figură unghiurile

$$D_0, D_{00}, D_{000}, D_1, D_{10}, D_{11}, D_{111}, D_{1111}.$$

Să ne propunem acum să măsurăm un unghi ascuțit dat $U = \widehat{hs}$, unde s este o semidreaptă interioară unghiului D .

Dacă $s = m$, punem măs $U = 2^{-1}$.

Dacă $s = m_0$, punem măs $U = 2^{-2}$.

Dacă $s = m_1$, punem măs $U = 2^{-1} + 2^{-2}$.

În general dacă

$$s = m_{i_1 \dots i_r}$$

punem

$$(3) \quad \text{măs } \widehat{hm_{i_1 \dots i_r}} = i_1 \cdot 2^{-1} + i_2 \cdot 2^{-2} + \dots + i_r \cdot 2^{-r} + 2^{-r-1}.$$

Definiția măsurii unghiului

$$(4) \quad U_{i_1 \dots i_r} = \widehat{hm_{i_1 \dots i_r}}$$

ține seama de faptul că acest unghi reprezentă suma acelor unghiuri $D_{j_1 j_2 \dots j_r}$, pentru care indicei j_1, \dots, j_r se găsesc în una din situațiile:

1. $j_1 < i_1, j_2 = 0$ sau $1, j_3 = 0$ sau $1, \dots, j_r = 0$ sau 1 (fig. 1.79),
2. $j_1 = i_1, j_2 < i_2, j_3 = 0$ sau $1, \dots, j_r = 0$ sau 1 (fig. 1.80).

K

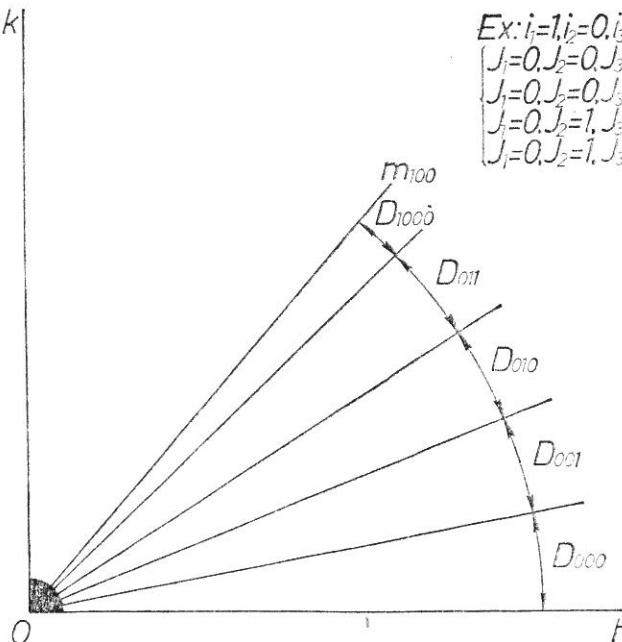


Fig. 1.79

K

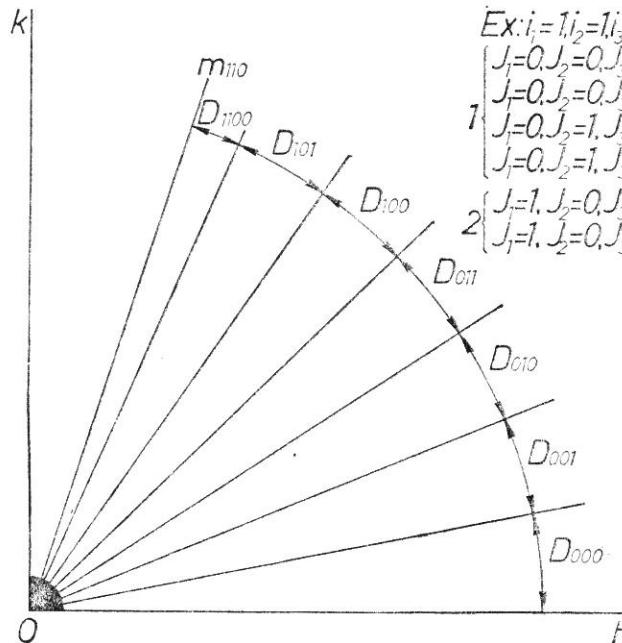


Fig. 1.80

3.

$$j_1 = i_1, j_2 = i_2, j_3 < i_3, j_4 = 0 \text{ sau } 1, \dots, j_r = 0 \text{ sau } 1,$$

$$r-1 \cdot j_1 = i_1, j_2 = i_2, \dots, j_{r-2} = i_{r-2}, j_{r-1} < i_{r-1}, j_r = 0 \text{ sau } 1,$$

$$r \cdot j_1 = i_1, j_2 = i_2, \dots, j_{r-1} = i_{r-1}, j_r < i_r,$$

și a unghiului $D_{i_1 \dots i_r 0}$. Avem $2^{r-k} h$ unghiuri de tipul k , pentru $k = 1, 2, \dots, r$, fiecare având măsura 2^r ; măsura unghiului $D_{i_1 \dots i_r 0}$ este 2^{r-1} . Suma măsurilor acestor unghiuri va fi

$$2^r(i_1 \cdot 2^{r-1} + i_2 \cdot 2^{r-2} + \dots + i_{r-1} \cdot 2 + i_r) + 2^{r-1}$$

deci coincide cu suma din (3).

Dacă $U = \widehat{hs}$ este un unghi arbitrar conținut în unghiul D , alegem, pentru fiecare indice r , acea bisectoare m_i, \dots, i_r , pentru care semidreapta s este interioară unghiului $U_{i_1 \dots i_r}$ sau este o latură a acestui unghi și pentru care suma (3) are valoarea minimă. Punem atunci

$$\text{măs}_r(U) = i_1 \cdot 2^{r-1} + i_2 \cdot 2^{r-2} + \dots + i_r \cdot 2^{r-1}$$

Numărul rațional $\text{măs}_r(U)$ va fi numit *aproximația de ordin r* a măsurii unghiului U . Cind se trece de la aproximarea de ordin r la aproximarea de ordin $r+1$, coeficienții i_1, \dots, i_r rămân neschimbați și se adaugă un termen

$$i_{r+1} \cdot 2^{r-1},$$

unde i_{r+1} este 0 sau 1. Rezultă că prin considerarea aproximărilor succesive ale măsurii unghiului U se obține un număr real bine determinat

$$i_1 \cdot 2^{r-1} + i_2 \cdot 2^{r-2} + \dots + i_r \cdot 2^{r-1} + \dots$$

care va fi prin definiție *măsura unghiului ascuns U* .

Dacă unghial U este obtuz, considerăm unghiul $U_1 = 2^{r-1} \cdot U$, obținut cu ajutorul bisectoarei lui U , și definim

$$\text{măs}U = 2 \cdot \text{măs}U_1.$$

Exerciții

1. Să se arate că sunt măsurile următoarelor unghiuri:

$$U_0, U_1, U_{00}, U_{01}, U_{10}, U_{11}, U_{000}, U_{001}, U_{111}.$$

2. Să se arate că din următoarele două unghiuri este mai mare decit celălalt

$$D_{111} \text{ sau } D_0?$$

3. Să se arate că dacă unghiul U reprezintă suma unghiurilor U' , U'' , atunci $\text{măs}U = \text{măs}U' + \text{măs}U''$.

4. Să se arate că dacă $U' < U$, atunci $\text{măs}U' < \text{măs}U$.

În definiția măsurii unui unghi dată mai sus, am presupus că unghiul drept D are măsura 1.

În practică se folosesc însă alte moduri de măsurare a unghiurilor, care se deduc din definiția noastră prin înmulțire cu câte un factor.

Astfel, pentru a obține măsura unui unghi în *radiani*, înmulțim numărul $\text{măs}U$ prin $\pi/2$, ceea ce corespunde faptului că un unghi drept are $\pi/2$ radiani.

Pentru a obține măsura unui unghi U în *grade sexagesimale*, înmulțim numărul $\text{măs}U$ prin 90, ceea ce corespunde faptului că măsura unghiului drept, în grade sexagesimale, este 90° .

Exerciții

1. Să se exprime în radiani și apoi în grade sexagesimale măsurile următoarelor unghiuri:

$$D_0, D_1, D_{010}, U_{01}, U_{101}, U_{000}, U_{11101}.$$

2. Folosind identitatea

$$1 - x^{n+1} = (1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n)$$

să se calculeze sumele

$$2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \dots + 2^{-n},$$

$$4^{-1} + 4^{-2} + 4^{-3} + \dots + 4^{-n},$$

și să se deducă scrierea binară a numerelor $1/3, 2/3, 4/3$.

3. Să se exprime măsura unui unghi al unui triunghi echilateral, în scriere binară, în radiani și în grade sexagesimale.

4. Care este măsura în grade sexagesimale și apoi în radiani, a unghiuilui D_0 ? Dar și unghiuilui U_{010} ?

Să se dea o formulă generală pentru măsurile unghiurilor $U_0, U_{00}, U_{000}, U_{0000}, \dots$

și apoi pentru măsurile unghiurilor $U_1, U_{11}, U_{111}, U_{1111}, \dots$.

17. Teorema lui Thales

Să începem prin a demonstra următoarea:

Teoremă. Fie OAA' un triunghi și fie $s = |OA|, s' = |OA'|$ laturile unghiului $\widehat{AOA'}$. Să presupunem că punctele $M \in s, M' \in s'$ sunt astfel încât

$$\frac{|OM|}{|OA|} = \frac{|OM'|}{|OA'|}.$$

În acest caz, dreptele AA' , MM' sunt paralele (fig. I.81).

Demonstrație. Fie x numărul real, pentru care avem $|OM| \equiv x \cdot |OA|$. Iată ipoteza din enunț arată că avem și $|OM'| \equiv x \cdot |OA'|$. Să presupunem că

$$x = n, a_1 a_2 a_3 \dots a_k \dots$$

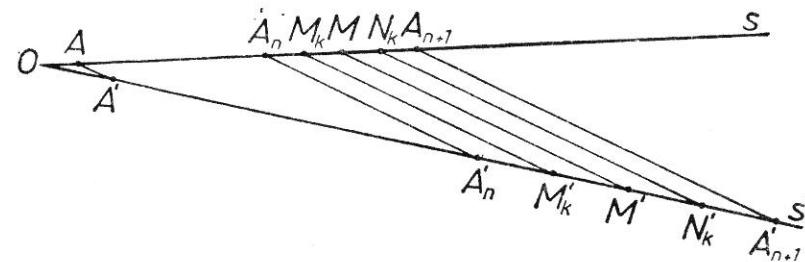


Fig. I.81

și să notăm prin $x_k = n, a_1 \dots a_k$ aproximarea zecimală prin lipsă, de ordinul k , a numărului x . Considerăm punctele $M_k \in s, M'_k \in s'$ date de

$$|OM_k| \equiv x_k \cdot |OA|, |OM'_k| \equiv x_k \cdot |OA'|.$$

Fie apoi $y_k = x_k + 10^{-k}$ și fie punctele $N_k \in s, N'_k \in s'$ date de

$$|ON_k| \equiv y_k \cdot |OA|, |ON'_k| \equiv y_k \cdot |OA'|.$$

Din teorema lui Thales restrinsă rezultă că avem

$$M_k M'_k \parallel N_k N'_k \parallel AA',$$

oricare ar fi indicele $k = 1, 2, 3, \dots$. Pentru orice k avem

$$x_k \leq x < y_k,$$

deci

$$M \in [M_k N_k], M' \in [M'_k N'_k].$$

Fie L_k banda închisă limitată de dreptele paralele $M_k M'_k, N_k N'_k$ și fie M'' punctul de intersecție al semidreptei s' cu paralela dusă prin M la AA' . Avem $M \in L_k$, deci $MM'' \subset L_k$, oricare ar fi k . Deci $M'' \in L_k \cap s' = [M'_k N'_k]$. Dar M' este singurul punct comun segmentelor $[M'_1 N'_1], [M'_2 N'_2], \dots, [M'_k N'_k], \dots$. Rezultă $M'' = M'$, deci $MM' \parallel AA'$.

Proprietatea demonstrată admite următoarea reciprocă:

Teoremă. Dacă M, M' sunt două puncte situate pe laturile unui unghi propriu $\widehat{AOA'}$, astfel ca $M \in |OA|, M' \in |OA'|$ și astfel ca $MM' \parallel AA'$, atunci avem

$$\frac{|OM|}{|OA|} = \frac{|OM'|}{|OA'|}.$$

Demonstrație. Fie $x = \frac{|OM|}{|OA|}$ și fie punctul $M'' \in |OA'$ dat de relația $|OM''| \equiv x \cdot |OA'|$. Avem atunci, potrivit proprietății precedente, $MM'' \parallel AA'$. Dar prin punctul M se poate duce o singură paralelă la dreapta AA' . Avem deci $MM'' = MM'$. Rezultă $\{M'\} = MM' \cap (|OA'|) = MM'' \cap (|OA'|) = \{M''\}$, deci $|OM'| \equiv x \cdot |OA'|$, sau $\frac{|OM'|}{|OA'|} = x = \frac{|OM|}{|OA|}$.

Cele două proprietăți pot fi strînsă într-un singur enunț, sub forma următoare.

Teorema lui Thales. Fie $\widehat{ss'}$ un unghi propriu cu vîrful O și fie punctele distințe $A \in s, M \in s, A' \in s', M' \in s'$. În aceste condiții, dreptele AA' și MM' sunt paralele dacă și numai dacă rapoartele $\frac{|OM|}{|OA|}$, $\frac{|OM'|}{|OA'|}$ sunt egale.

Aceasta este una din teoremele cele mai importante ale matematicii, avind numeroase aplicații. Să dăm o primă aplicație:

Theoremă. Fie $ABC, A'B'C'$ două triunghiuri astfel ca $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, $\hat{C} \equiv \hat{C}'$. Atunci, (fig. I.82):

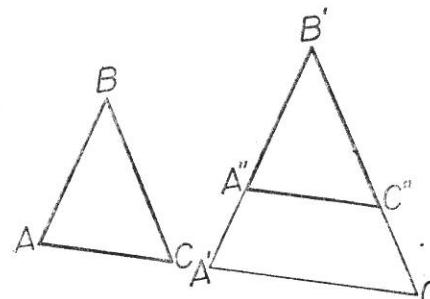


Fig. I.82

deci avem $A''C'' \parallel A'C'$. Din teorema lui Thales deducem

$$\frac{|A''B'|}{|A'B'|} = \frac{|B'C''|}{|B'C'|} \text{ sau } \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}.$$

Egalitatea ultimelor două rapoarte din (1) se demonstrează în mod analog.

Corolar. În condițiile teoremei lui Thales, avem

$$\frac{|OM|}{|OA|} = \frac{|OM'|}{|OA'|} = \frac{|MM'|}{|AA'|}.$$

Demonstrație. Triunghiurile OMM' , OAA' au unghiul \hat{O} comun și $\hat{M} \equiv \hat{A}$, $\hat{M}' \equiv \hat{A}'$.

Theoremă. Fie $ABC, A'B'C'$ două triunghiuri astfel ca

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}.$$

Avem atunci $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, $\hat{C} \equiv \hat{C}'$ (fig. I.82).

Demonstrație. Considerăm punctele $A'' \in |B'A'|$, $C'' \in |B'C'|$ astfel ca

$$\frac{|A''B'|}{|A'B'|} = \frac{|C''B'|}{|C'B'|} = x,$$

unde x este valoarea comună a rapoartelor din enunț. Atunci vom avea

$$A''C'' \parallel A'C', |A''B'| \equiv |AB|, |B'C''| \equiv |BC|.$$

Din Corolar deducem

$$\frac{|A''C''|}{|A'C'|} = x,$$

deci $|A''C''| \equiv x \cdot |A'C'| \equiv |AC|$. Rezultă că triunghiurile ABC , $A''B'C'$ sunt congruente. Avem deci $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, $\hat{A} \equiv \hat{A}'' \equiv \hat{A}'$, $\hat{C} \equiv \hat{C}'' \equiv \hat{C}'$.

Reamintim următoarea

Definiție. Două triunghiuri $ABC, A'B'C'$ se numesc asemenea, dacă $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, $\hat{C} \equiv \hat{C}'$ și dacă $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$.

Din proprietățile demonstrează mai sus, desprindem următoarele criterii de asemănare:

I. Pentru ca triunghiurile $ABC, A'B'C'$ să fie asemenea, este suficient să avem $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, $\hat{C} \equiv \hat{C}'$.

(Tinind seama că suma unghiurilor unui triunghi este congruentă cu suma a două unghiuri drepte, va fi suficient ca două din cele trei relații de congruență de unghiuri să fie verificate.)

II. Pentru ca triunghiurile $ABC, A'B'C'$ să fie asemenea, este suficient să avem $\hat{A} \equiv \hat{A}'$ și $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|}$.

III. Pentru ca triunghiurile $ABC, A'B'C'$ să fie asemenea, este suficient să avem $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$.

Aplicație. Teorema bisectoarei. Fie AA' , $A' \in |BC|$, bisectoarea unghiului \hat{A} în triunghiul ABC . Avem (fig. I.83)

$$(2) \quad \frac{|A'B|}{|A'C|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Demonstrație. Paralela dusă prin punctul B la bisectoarea $|AA'$ intersectează dreapta AC într-un punct D astfel ca $A \in |CD|$. Din $AA' \parallel BD$ rezultă $\widehat{BDA} \equiv \widehat{A'AC}$.

Avem prin urmare $\widehat{ADB} \equiv \widehat{ABD} \equiv \frac{1}{2} \hat{A}$.

Din teorema a doua a triunghiului isoscel deducem $|AB| \equiv |AD|$. Aplicând acuma teorema lui Thales paralelelor AA' , DB și semidreptelor $|CA|$, $|CA'|$ obținem

$$\frac{|A'B|}{|A'C|} = \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AB|}{|AC|},$$

deci formula (2) este demonstrată.

Deci:

Bisectoarea $|AA'$ *a triunghiului* ABC *împarte latura* $|BC|$ *într-un raport egal cu raportul laturilor* $|AB|$, $|AC|$.

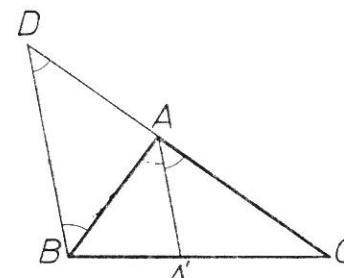


Fig. I.83

Exerciții

1. Să presupunem că în triunghiul ABC avem $|AC| > |AB|$. Să se arate că bisectoarea celor două unghiuri suplementare unghiului \hat{A} intersectează dreapta BC într-un punct A'' astfel ca $B \in [A''C]$ și

$$(3) \quad \frac{|A''B|}{|A''C|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

(Indicație. Se va arăta că bisectoarea celor două unghiuri suplementare unghiului \hat{A} nu este paralelă cu BC . Notind cu A'' punctul de intersecție al dreptei BC cu această bisectoare, se va observa că $\widehat{AA'C} \equiv \hat{B} + \frac{\hat{A}}{2} > \hat{C} + \frac{\hat{A}}{2} \equiv \widehat{AA'B}$, deci unghiul $\widehat{AA'C}$

este obtuz. Triunghiul $AA'A''$ este dreptunghic în A , deci nu poate avea nici un unghi obtuz. Aceasta înseamnă că avem $B \in [A''C]$. Relația (3) se va demonstra ducând paralela BD' la AA'' , cu $D' \in [AC]$ și observând că $|AD'| \equiv |AB|$.)

2. Paralelele duse prin punctele B , C la bisectoarele AA' , AA'' intersectează dreptele AC respectiv AB în punctele D , D' respectiv E , E' , astfel ca $D' \in [AC]$, $E' \in [AB]$. Să se arate că triunghiurile ABC , ADE , $AD'E'$ sunt congruente cîte două și că $DED'E'$ este un paralelogram.

Aplicație. Teorema lui Menelaus. Fie ABC un triunghi și fie A' , B' , C' trei puncte coliniare distințe astfel ca $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$. Avem atunci:

$$\frac{|A'B|}{|A'C|} \cdot \frac{|B'C|}{|B'A|} \cdot \frac{|C'A|}{|C'B|} = 1.$$

Demonstrație. Considerăm perpendicularele AA'' , BB'' , CC'' duse din punctele A , B , C pe dreapta $A'B'C'$, și presupunem că A'' , B'' , C'' sunt pe această dreaptă. Din perechile de triunghiuri asemenea

$$(BB''C', AA''C'), (CC''B', AA''B'), (BB''A', CC''A')$$

deducem egalitățile

$$\frac{|A'B|}{|A'C|} = \frac{|BB''|}{|CC''|}, \quad \frac{|B'C|}{|B'A|} = \frac{|CC''|}{|AA''|}, \quad \frac{|C'A|}{|C'B|} = \frac{|AA''|}{|BB''|},$$

Înmulțind aceste relații membru cu membru, obținem relația indicată.

Exerciții

1. Fie ABC , $A'B'C'$ două triunghiuri asemenea. În aceste triunghiuri, considerăm medianele $|AM|$, $|A'M'|$ și înălțimile AP , $A'P'$, unde $M \in [BC]$, $M' \in [B'C']$, $P \in BC$, $P' \in B'C'$. Să se arate că următoarele paranteze conțin perechi de triunghiuri asemenea:

$$(ABM, A'B'M'), \quad (ABP, A'B'P').$$

2. Fie $ABCDE$ un pentagon regulat, deci un pentagon avind laturile congruente două cîte două și unghiurile \widehat{ABC} , \widehat{BCD} , \widehat{CDE} , \widehat{DEA} , \widehat{EAB} de asemenea congruente două cîte două. Arătați că:

- a. $AD \parallel BC$, $AC \parallel DE$ și $AE \parallel BD$;
 b. Segmentele $|AC|$, $|BD|$ au un punct comun F , astfel încât $AFDE$ este un romb, deci un paralelogram cu laturile congruente cîte două.

$$c. \frac{|DF|}{|BF|} = \frac{|AD|}{|BC|} = \frac{|BD|}{|AE|} \equiv \frac{|BD|}{|FD|} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

d. Unghiul \widehat{AED} are 108° , iar \widehat{FCD} are 72° .

3. Fie ABC , $A'B'C'$ două triunghiuri astfel ca $AB \perp A'B'$, $BC \perp B'C'$ și $CA \perp C'A'$. Să se arate că cele două triunghiuri sint asemenea.

18. Linii poligonale și poligoane

Reamintim că numim segment inchis orice mulțime care se obține adăugind unui segment $|AB|$ extremitățile A , B . Notăm $[AB] = |AB| \cup \{A, B\}$.

O linie poligonală cu n laturi este o mulțime de forma (fig. I.84):

$$L = [P_1 P_2] \cup [P_2 P_3] \cup \dots \cup [P_n P_{n+1}].$$

Punctele P_1, \dots, P_{n+1} se numesc vîrfurile liniei L , iar segmentele $|P_1 P_2|$, $|P_2 P_3|, \dots, |P_n P_{n+1}|$ se numesc laturile liniei poligonale L .

O linie poligonală este definită prin vîrfurile sale și prin ordinea în care se succed aceste vîrfuri.

Perimetru unei linii poligonale este prin definiție suma laturilor sale.

O linie poligonală L se numește inchisă, dacă primul vîrf și ultimul vîrf coincid, (fig. I. 85, 86, 87).

O linie poligonală inchisă se numește simplu inchisă, dacă numărul laturilor este egal cu numărul vîrfurilor distincte din acea linie și dacă laturile liniei poligonale sunt disjuncte două cîte două. O linie poligonală simplu inchisă se va numi poligon, (fig. I.85).

Un poligon va fi notat indicindu-se vîrfurile sale, în ordinea dată, excepțind ultimul vîrf P_{n+1} , care coincide cu primul. Exemplu: poligonul cu trei laturi $L = [AB] \cup [BC] \cup [CA]$ va fi notat ABC .

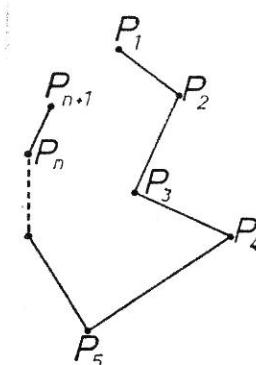


Fig. I.84

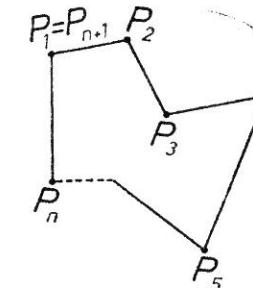


Fig. I.85



Fig. I.86

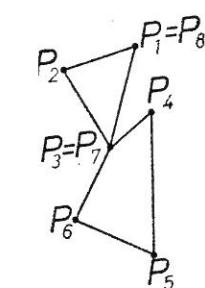


Fig. I.87

Exercițiu. Să se arate că punctele A, B, C formează un triunghi dacă și numai dacă ele formează un poligon cu trei laturi (trilater).

Poligoanele cu patru laturi vor fi numite *patrulater*.

Un patrulater care are două laturi paralele se numește *trapez*. Oricare trei laturi ale unui trapez se găsesc de o același parte a dreptei care conține și patra latură.

Definiție. Două poligoane având același număr de laturi, $P = P_1P_2\dots P_n$, $Q = Q_1Q_2\dots Q_n$ se numesc asemenea, dacă, oricare ar fi indicei distincți $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ avem

$$(1) |P_iP_j| \equiv r \cdot |Q_iQ_j| \text{ și } \overbrace{P_iP_jP_k}^{\wedge} \equiv \overbrace{Q_iQ_jQ_k}^{\wedge}.$$

r fiind un număr pozitiv.

Din teorema triunghiurilor asemenea rezultă că primele relații, care exprimă proporționalitatea lungimilor laturilor și diagonalelor celor două poligoane, constituie condiții suficiente de asemănare pentru cele două poligoane.

Dacă poligoanele P, Q verifică relațiile (1) cu $r = 1$, se spune că cele două poligoane sunt congruente.

Exercițiu. Să se indice condițiile pe care trebuie să le îndeplinească patru puncte A, B, C, D dintr-un plan, pentru ca aceste puncte, considerate în ordinea indicată, să formeze un patrulater.

Poligoanele cu cinci laturi se numesc *pentoagoane*. Poligoanele cu șase laturi se numesc *hexagoane*.

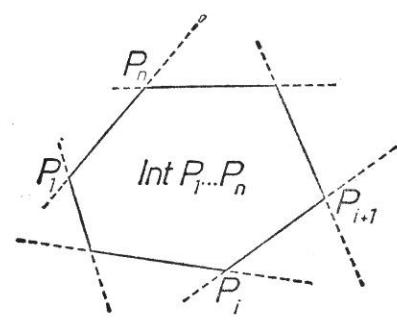


Fig. I.88

Un poligon $P_1P_2\dots P_n$ se numește *poligon convex*, dacă, pentru orice indice $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, toate vîrfurile P_j , cu $j \neq i$ și $i+1$, se găsesc de același parte a dreptei P_iP_{i+1} (pentru $i = n$, convenim să notăm $P_{n+1} = P_1$). Interiorul unui poligon convex este intersecția semiplanelor limitate de suporții laturilor poligonului și care conțin vîrfurile nesituate pe suporții indicați, (fig. I.88).

Trilaterele și trapezele sunt poligoane convexe.

Exerciții

1. Să se arate că interiorul unui poligon convex este o mulțime convexă.
2. Să se deseneze poligoane convexe și poligoane care nu sunt convexe.
3. Să se arate că suma măsurilor în grade ale unghiurilor unui patrulater este de 360° .

(Indicație. Unghiurile unui poligon convex sunt unghiurile $P_{i-1}P_iP_{i+1}$ definite de cele trei vîrfuri consecutive ale poligonului. În cazul patrulaterului, se va considera separat cazul patrulaterului convex și cel al patrulaterului neconvex (concav) și se vor efectua descompuneri în triunghiuri.)

4. Să se arate că suma măsurilor în grade ale unghiurilor unui poligon convex cu n laturi este de $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

5. Fie ABC un triunghi și fie $M \in \text{Int } ABC$. Să se arate că perimetru triunghiului ABC este mai mare decât perimetru triunghiului MBC .

(Indicație. Se consideră punctul $B' \in |BM \cap AC|$ și se arată că perimetru $ABC > \text{perimetru } BB'C > \text{perimetru } BMC$.)

6. Fie ABC un triunghi și fie punctele $A' \in |BC|$, $B' \in |CA|$, $C' \in |AB|$. Să se arate că perimetru triunghiului ABC este mai mare decât perimetru triunghiului $A'B'C'$.

7. Fie M un punct interior triunghiului ABC . Să se arate că

$$\widehat{BMC} > \widehat{BAC} = \widehat{A}.$$

(Indicație. Se aplică de două ori teorema unghiului exterior.)

8. Fie A', B', C' trei puncte necolinare situate în interiorul triunghiului ABC . Să se arate că perimetru triunghiului ABC este mai mare decât perimetru triunghiului $A'B'C'$.

(Indicație. Prelungind laturile triunghiului $A'B'C'$, se obțin triunghiuri având vîrfurile în situațiile din exercițiile precedente.)

9. Fie P, P' două poligoane convexe astfel ca $\text{Int } P' \subset \text{Int } P$. Să se arate că perimetru poligonului P este mai mare decât perimetru poligonului P' .

(Indicație. Se prelungește o latură a poligonului P' pînă cînd latura prelungită intersectează poligonul P în două puncte M, N . Aceste puncte împart poligonul P în două poligoane Q, Q' astfel ca $\text{Int } P' \subset \text{Int } Q$ și P', Q au două laturi, una conținută în cealaltă. Se observă că perimetru poligonului Q este mai mic decât perimetru poligonului P . Problema se reduce la a arăta că perimetru lui Q este mai mare decât perimetru lui P' . Se continuă procedeul, considerind celelalte laturi ale poligonului P' .)

10. Fie $|AB|$ o latură a unui poligon convex P și fie $|A'B'|$ un segment astfel ca $|AB| \subset |A'B'|$. Să presupunem că P' este un poligon având $|A'B'|$ ca latură și astfel ca $P' \cap P = [AB]$ și laturile lui P și ale lui P' , diferite de $|AB|$ și de $|A'B'|$, să se găsească de același parte a dreptei $AB = A'B'$. Să se arate că perimetru lui P' este mai mare decât perimetru lui P .

(Indicație. Se procedează ca în exercițiul precedent.)

11. Fie $ABCD$ un patrulater. Să se definească interiorul și exteriorul acestui patrulater și să se arate că dacă P este un punct interior, iar Q un punct exterior patrulaterului $ABCD$, atunci segmentul $|PQ|$ are cel puțin un punct comun cu (reuniunea laturilor) $ABCD$.

(Indicație. Se va considera separat cazul patrulaterului convex și cel al patrulaterului neconvex. În ultimul caz, se descompune $ABCD$ în două triunghiuri și se consideră interioarele celor două triunghiuri, la care se adaugă latura comună.)

12. Se poate defini interiorul unui poligon cu număr arbitrar de laturi?

Răspunsul este afirmativ, dar demonstrația este complicată. Elevii vor descrie interioarele unor poligoane particulare și vor verifica că orice dreaptă care are un punct interior unui poligon intersectează cel puțin o latură a poligonului.

13. Se dă un punct O în planul p . Să se construiască un poligon P , astfel ca O să nu fie interior lui P , dar orice semidreaptă dusă din O să intersecteze cel puțin o latură a lui P .

(Indicație. Se va construi un poligon în formă de măciucă.)

14. Care este numărul cel mai mic de laturi ce poate avea un poligon având proprietatea din exercițiul precedent?

19. Funcțiile sinus și cosinus, definite pe mulțimea unghiurilor

Un unghi \widehat{hk} se numește *ascuțit* dacă este mai mic decât un unghi drept și *obtuz*, dacă este mai mare decât un unghi drept. Un unghi este fie ascuțit, fie drept, fie obtuz.

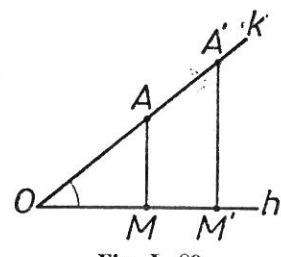


Fig. I.89

Fie \widehat{hk} un unghi ascuțit cu virful în punctul O și fie A un punct pe semidreapta k . Fie d dreapta ce conține semidreapta h și fie k' semidreapta opusă lui $h \subset d$. Să notăm prin M proiecția punctului A pe dreapta d , deci acel punct de pe d , pentru care avem $d \perp AM$ dacă $k \not\subset d$ și $M = A$ dacă $k \subset d$. Fie A' un alt punct pe k' și fie M' proiecția lui A' pe d . Din teorema lui Thales rezultă egalitățile, (fig. I.89):

$$(1) \quad \frac{|AM|}{|AO|} = \frac{|A'M'|}{|A'O|}, \quad \frac{|OM|}{|AO|} = \frac{|OM'|}{|A'O|}.$$

Acstea egalități arată că putem asocia fiecărui *unghi ascuțit* \widehat{hk} două numere reale

$$(2) \quad \sin \widehat{hk} = \frac{|AM|}{|AO|}, \quad \cos \widehat{hk} = \frac{|OM|}{|AO|}.$$

Acstea definiții au sens și în cazul în care \widehat{hk} este un unghi nul, cind $k = h$, sau în care \widehat{hk} este un unghi drept, cind $M = O$. Obținem

$$(3) \quad \sin \widehat{hk} = 0, \quad \cos \widehat{hk} = 1,$$

$$(4) \quad \sin(\text{dr}) = 1, \quad \cos(\text{dr}) = 0.$$

Dacă \widehat{hk} este un unghi obtuz, punctul M aparține semidreptei h' . Definim *pentru unghiuri obtuze*, (fig. I.90):

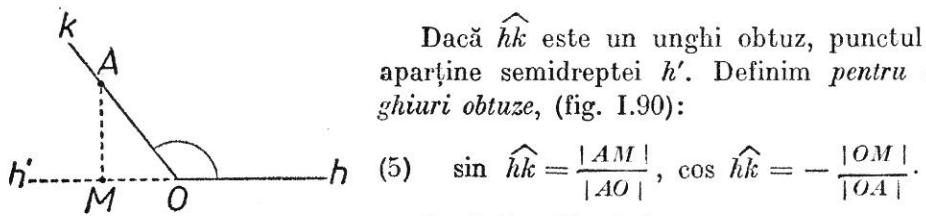


Fig. I.90

Dacă $k = h'$, obținem

$$(6) \quad \sin \widehat{hk'} = 0, \quad \cos \widehat{hk'} = -1$$

Din definițiile date rezultă următoarele proprietăți, ce trebuie reținute:

Dacă $\widehat{hk} \equiv \widehat{h'k'}$, atunci

$$\sin \widehat{hk} = \sin \widehat{h'k'}, \quad \cos \widehat{hk} = \cos \widehat{h'k'}.$$

Pentru orice unghi, avem

$$0 \leq \sin \widehat{hk} \leq 1, \quad -1 \leq \cos \widehat{hk} \leq 1.$$

Cosinusul unui unghi ascuțit este pozitiv, iar cosinusul unui unghi obtuz este negativ.

Dacă ABC este un triunghi dreptunghic în A , atunci avem (fig. I.91).

$$(7) \quad |AC| \equiv |BC| \cdot \cos \widehat{C}, \quad |AB| \equiv |BC| \cdot \sin \widehat{C}$$

și, în mod analog,

$$|AC| \equiv |BC| \cdot \sin \widehat{B}, \quad |AB| \equiv |BC| \cdot \cos \widehat{B}.$$

Comparind aceste formule, deducem relațiile

$$(8) \quad \cos \widehat{C} = \sin \widehat{B}, \quad \sin \widehat{C} = \cos \widehat{B}.$$

Din teorema 2 a unghiului exterior rezultă că, în orice triunghi dreptunghic ABC , cu unghiul drept în A , unghiurile \widehat{B} , \widehat{C} sint ascuțite și au ca sumă un unghi drept, deci sint *complementare*.

Reciproc, fiind date două unghiuri complementare, se poate construi un triunghi dreptunghic, avind unghiurile ascuțite congruente cu unghiurile complementare date. Deci:

Formulele (8) sunt verificate de orice pereche de unghiuri ascuțite complementare.

Formula (7) din stînga poate fi generalizată în modul următor:

Fie date un segment $|BC|$ și o dreaptă d coplanară cu BC . Fie B', C' proiecțiile punctelor B, C pe dreapta d . Presupunind $C' \neq C$, să notăm prin C'' intersecția dreptei CC' cu paralela dusă prin B' la BC . Figura $BCC''B'$ este un paralelogram, deci $|BC| \equiv |B'C''|$. Din prima formulă (7) deducem (fig. I.92):

$$(9) \quad |B'C'| \equiv |BC| \cdot \cos u, \quad u = \widehat{C''B'C'}.$$

Unghiul u poate fi definit ca fiind *unghiul ascuțit* format de dreptele d, BC . Am obținut:

Teorema proiecției unui segment. Proiecția unui segment $|BC|$ pe o dreaptă d este un segment congruent cu produsul dintre $|BC|$ și cosinusul unghiului ascuțit format de dreptele d, BC .

Să revenim la cazul unui triunghi ABC , dreptunghic în A (fig. I.93). Unghiurile \widehat{B} , \widehat{C} fiind ascuțite, proiecția virfului A pe dreapta BC apar-

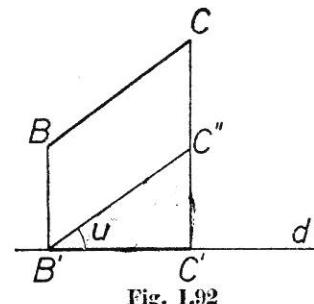


Fig. I.92

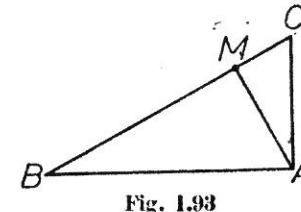


Fig. I.93

ține segmentului $|BC|$. Fie M această proiecție. Din formulele (8) deducem relațiile

$$\sin \hat{C} = \frac{|AB|}{|BC|} = \cos \hat{B} = \frac{|BM|}{|AB|}.$$

Facem convențiile următoare:

$$(\sin \hat{C})^2 = \sin^2 \hat{C}, (\cos \hat{C})^2 = \cos^2 \hat{C}.$$

Cu aceste convenții, putem scrie

$$|BM| \equiv |AB| \cdot \sin \hat{C} \equiv |BC| \cdot \sin^2 \hat{C}.$$

În mod analog, obținem

$$|CM| \equiv |AC| \cdot \sin \hat{B} \equiv |BC| \cdot \sin^2 \hat{B} \equiv |BC| \cdot \cos^2 \hat{C}.$$

Adunând ultimele relații membru cu membru, obținem

$$|BC| \equiv |BM| + |CM| \equiv |BC| \cdot (\sin^2 \hat{C} + \cos^2 \hat{C}),$$

și avem prin urmare următoarea *identitate fundamentală*

$$(10) \quad \sin^2 \hat{C} + \cos^2 \hat{C} = 1,$$

adevărată pentru orice unghi ascuțit \hat{C} .

Exercițiu. Să se arate că relația (10) este adevarată pentru orice unghi, fie el nul, ascuțit, drept, obtuz sau alungit.

Observație. Relația (10) se mai poate scrie sub forma

$$(11) \quad \left(\frac{|AB|}{|BC|} \right)^2 + \left(\frac{|AC|}{|BC|} \right)^2 = 1$$

și constituie una din formulările posibile ale *teoremei lui Pitagora*.

Exerciții

1. Fie ABC un triunghi echilateral. Să se calculeze $\sin \hat{A}$ și $\cos \hat{A}$.

(Indicație. Se duce înălțimea $|AA'|$ și se observă că $|AB| \equiv 2|A'B'|$).

2. Fie ABC un triunghi dreptunghic isoscel. Să se calculeze $\sin \hat{B}$ și $\cos \hat{B}$.

3. Să se arate că dacă p, q sunt două numere reale astfel încât

$$0 \leq p \leq 1, -1 \leq q \leq 1, p^2 + q^2 = 1,$$

atunci există un unghi \hat{hk} astfel ca

$$\sin \hat{hk} = p \text{ și } \cos \hat{hk} = q.$$

Să se arate apoi că orice unghi \hat{hk}' , pentru care

$$\sin \hat{hk}' = p \text{ și } \cos \hat{hk}' = q,$$

este congruent cu unghiul \hat{hk} .

4. Fie h, k, m trei semidrepte cu originea O , astfel ca m să aparțină interiorului unghiului \hat{hk} și \hat{mk} să fie un unghi drept. Să se exprime numerele $\sin \hat{hk}$, $\cos \hat{hk}$ în funcție de $\sin \hat{hm}$ și de $\cos \hat{mk}$.

5. Fie $ABCD$ un patrat ($AB \perp BC \perp CD \perp DA$, $|AB| \equiv |BC|$). Să considerăm punctele $P \in |AB|$, $Q \in |BC|$, $R \in |CD|$, $S \in |DA|$, astfel ca $|AP| \equiv |BQ| \equiv |CR| \equiv |DS|$. Să se arate că $PQRS$ este un patrat și că triunghiurile ASP , BPQ , CQR , DRS sunt congruente între ele.

6. Din exercițiul anterior să se deducă o relație între arile patratelor construite pe laturile unui triunghi dreptunghic.

$$7. Folosind exercițiul 2 de la p. 64, să se arate că $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.$$

Tabelul următor indică valorile aproximative, cu trei zecimale exacte, ale funcțiilor sinus, cosinus, tangentă și cotangentă, pentru toate unghiurile, ale căror măsuri în grade sexagesimale se exprimă prin numere întregi, de la 0° la 90° .

Funcțiile secantă, tangentă, cotangentă și cosecantă se definesc prin formulele

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x},$$

presupunind $\cos x \neq 0$, respectiv $\sin x \neq 0$.

În tabel se ține seama de faptul că sinusul unui unghi ascuțit este egal cu cosinusul unghiului complementar. Denumirile din prima linie corespund unghiurilor indicate în prima coloană, iar denumirile din ultima linie corespund unghiurilor indicate în ultima coloană.

x°	Sin	Tg	Ctg	Cos	90°-x°
0	0,000	0,000		1,000	90
1	0,017	0,017	57,290	1,000	89
2	0,035	0,035	28,636	0,999	88
3	0,052	0,052	19,081	0,999	87
4	0,070	0,070	14,301	0,998	86
5	0,087	0,087	11,430	0,996	85
6	0,105	0,105	9,514	0,995	84
7	0,122	0,122	8,144	0,993	83
8	0,139	0,139	7,115	0,990	82
9	0,156	0,156	6,314	0,988	81
10	0,174	0,174	5,671	0,985	80
11	0,191	0,191	5,145	0,982	79
12	0,208	0,213	4,705	0,978	78
	Cos	Ctg.	Tg.	Sin.	

x°	Sin	Tg	Ctg	Cos	$90^\circ - x^\circ$
13	0,225	0,231	4,331	0,974	77
14	0,242	0,249	4,011	0,970	76
15	0,259	0,268	3,732	0,966	75
16	0,276	0,287	3,487	0,961	74
17	0,292	0,306	3,271	0,956	73
18	0,309	0,325	3,078	0,951	72
19	0,326	0,344	2,904	0,946	71
20	0,342	0,364	2,747	0,940	70
21	0,358	0,384	2,605	0,934	69
22	0,375	0,404	2,475	0,927	68
23	0,391	0,424	2,356	0,921	67
24	0,407	0,445	2,246	0,914	66
25	0,423	0,466	2,145	0,906	65
26	0,438	0,488	2,050	0,899	64
27	0,454	0,510	1,963	0,891	63
28	0,469	0,532	1,881	0,883	62
29	0,485	0,554	1,804	0,875	61
30	0,500	0,577	1,732	0,866	60
31	0,515	0,601	1,664	0,857	59
32	0,530	0,625	1,600	0,848	58
33	0,545	0,649	1,540	0,839	57
34	0,559	0,675	1,483	0,829	56
35	0,574	0,700	1,428	0,819	55
36	0,588	0,727	1,376	0,809	54
37	0,602	0,754	1,327	0,799	53
38	0,616	0,781	1,280	0,788	52
39	0,629	0,810	1,235	0,777	51
40	0,643	0,839	1,192	0,766	50
41	0,656	0,869	1,150	0,755	49
42	0,669	0,900	1,111	0,743	48
43	0,682	0,933	1,072	0,731	47
44	0,695	0,966	1,036	0,719	46
45	0,707	1,000	1,000	0,707	45
	Cos.	Ctg.	Tg.	Sin.	

Să reținem că sinusurile a două unghiuri suplementare sunt egale, iar cosinusurile a două unghiuri suplementare sunt egale în valoare absolută, dar de semne contrare.

Am arătat că două unghiuri congruente au sinusurile egale și cosinusurile egale; două unghiuri sunt congruente dacă și numai dacă au măsurile egale, oricare ar fi sistemul de măsurare, în grade sau în radiani.

Aceste proprietăți ne permit să reprezentăm sinusul și cosinusul unui unghi sub forma $\sin n^\circ$ sau $\sin x$, respectiv $\cos n^\circ$ sau $\cos x$, dacă acel unghi are n grade sau x radiani.

Pentru a da unele exemple, să indicăm valorile exacte ale funcțiilor sinus și cosinus, pentru unele unghiuri ce apar mai des în aplicații.

măsura în grade	0°	30°	45°	60°	90°	135°	150°	180°
măsura în radiani	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
valoarea funcției sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
valoarea funcției cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Dacă notăm prin U mulțimea unghiurilor, putem scrie

$$\text{sin: } U \rightarrow [0,1] = \{a \in \mathbb{R}; 0 \leq a \leq 1\},$$

$$\text{cos: } U \rightarrow [-1,1] = \{b \in \mathbb{R}, -1 \leq b \leq 1\}.$$

Exerciții

1. Să se indice valorile aproximative, cu o zecimală exactă, ale numerelor reale $\sin u$ și $\cos u$ pentru unghiurile u având $15^\circ, 40^\circ, 55^\circ, 70^\circ, 85^\circ, 110^\circ$, și $\pi/10, 3\pi/8, 3\pi/10, 4\pi/5$ și $5\pi/8$ radiani.

(Indicație. Se vor efectua construcții grafice, folosind rigla și raportorul.)

2. Știind că u și v sunt două unghiuri complementare, să se exprime $\sin v$ și $\cos v$ cu ajutorul numerelor $\sin u$ și $\cos u$.

3. Să se indice interpretările geometrice ale funcțiilor tangentă și cotangentă.

Observație. Funcțiile sinus și cosinus se numesc *funcții trigonometrice* deoarece au apărut la rezolvarea unor probleme de calcul al unghiurilor și laturilor unui triunghi, dat prin anumite elemente ale sale. Tot funcțiile trigonometrice sunt funcțiile tangentă, cotangentă, secantă, cosecantă.

20. Relații metrice

În acest paragraf, vom presupune că a fost ales un segment *etalon*, pe care-l vom nota m . Figurile pe care le vom studia vor fi figuri plane. Proprietățile acestor figuri, ale căror formulări necesită considerarea etalonului m se numesc *proprietăți metrice*.

Ca prim exemplu de proprietate metrică, să considerăm un triunghi drept-unghic ABC , cu unghiul drept în A , și să presupunem că avem

$$|BC| \equiv a \cdot m, |AC| \equiv b \cdot m, |AB| \equiv c \cdot m,$$

unde a, b, c sunt numere reale pozitive.

Din relațiile demonstrează în paragraful precedent deducem

$$|AC| \equiv b \cdot m \equiv |BC| \cdot \cos \hat{C} \equiv a \cos \hat{C} \cdot m,$$

$$|AB| \equiv c \cdot m \equiv |BC| \cdot \sin \hat{C} \equiv a \sin \hat{C} \cdot m.$$

Aceste formule conduc la egalitățile

$$(1) \quad b = a \cos \hat{C}, \quad c = a \sin \hat{C},$$

$$(2) \quad b^2 + c^2 = a^2.$$

Ultima relație constituie *formularea uzuală a teoremei lui Pitagora*.

Exerciții

1. Să se demonstreze, folosind notările indicate, următoarele egalități:

$$b = a \sin \hat{B}, \quad c = a \cos \hat{B}.$$

2. Fie A' proiecția vîrfului unghiului drept pe ipotenuza BC . Fie h, b', c' numerele reale pozitive, pentru care avem

$$|AA'| \equiv h \cdot m, \quad |BA'| \equiv c' \cdot m, \quad |CA'| \equiv b' \cdot m.$$

Să se arate că avem

$$h^2 = b'c', \quad b^2 = ab', \quad c^2 = ac'.$$

Definiție. Fie A, B două puncte distincte și fie d numărul real pozitiv, pentru care avem $|AB| \equiv d \cdot m$. Vom spune atunci că d este lungimea segmentului $|AB|$ și de asemenea distanța dintre punctele A, B , exprimate cu ajutorul etalonului, sau mai simplu, lungimea segmentului $|AB|$, respectiv distanța dintre punctele A, B .

Potrivit definiției date, lungimile și distanțele sunt numere reale pozitive, dar vom ține seama că aceste numere urmează a fi înmulțite cu segmentul etalon m , pentru a obține mărimea segmentului $|AB|$, a cărui lungime se va considera.

Dacă $A = B$, distanța dintre A și B este prin definiție 0.

În general, distanța dintre punctele A, B , cind etalonul a fost fixat, va fi notată $d(A, B)$. Dacă $A \neq B$, atunci

$$|AB| \equiv d(A, B) \cdot m.$$

Prin mărimea unui segment înțelegem mulțimea formată din toate segmentele congruente cu acel segment.

Dacă avem două segmente u, v , notând prin x raportul lor și prin a, b lungimile lor, vom avea

$$u \equiv x \cdot v, \quad u \equiv a \cdot m, \quad v \equiv b \cdot m,$$

deci $a \cdot m \equiv x \cdot (b \cdot m) \equiv (bx) \cdot m$. Rezultă $a = bx$ sau $x = \frac{a}{b}$. Am arătat că:

Raportul a două segmente este egal cu raportul lungimilor celor două segmente.

Teoremă. Funcția distanță d , care asociază fiecărei perechi de puncte A, B distanța $d(A, B)$ dintre aceste puncte, are proprietățile:

- a) $d(A, B) = 0$ dacă și numai dacă $A = B$.
- b) $d(A, B) = d(B, A)$, oricare ar fi punctele A, B .
- c) $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$, oricare ar fi punctele A, B, C .

Primele două relații se deduc din definiția funcției d . Pentru a demonstra ultima proprietate, se consideră separat cazurile $A \in |BC|$, $B \in |AC|$, $C \in |AB|$, $A = B$, $B = C$, $C = A$ și cazul în care A, B, C sunt necoliniare. Primele din aceste cazuri sunt ușor de tratat. Să presupunem că punctele A, B, C formează un triunghi. Avem atunci $|AB| + |BC| \geq |AC|$, deci $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$.

Avem $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$ dacă și numai dacă $B \in [AC]$.

Problemă rezolvată. Fie $a = d(B, C)$, $b = d(C, A)$, $c = d(A, B)$ lungimile laturilor unui triunghi și fie $|AA'$ bisectoarea unghiului \hat{A} cu $A' \in |BC|$. Notând $x = d(B, A')$ și $y = d(C, A')$, să se calculeze x și y în funcție de a, b, c .

Rezolvare. Din teorema bisectoarei, rezultă

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{b}.$$

și din relația $A' \in |BC|$ rezultă $x + y = a$. Rezolvând sistemul celor două ecuații în x și y , obținem

$$x = \frac{ac}{b+c}, \quad y = \frac{ab}{b+c}.$$

Exerciții

1. Să se determine x și y în cazul $a = 21$ cm, $b = 16$ cm, $c = 14$ cm.

2. Dacă $|AA'', A'' \in BC$ este o bisectoare exterioară a triunghiului ABC , să se calculeze lungimile segmentelor $|A''B|$, $|A''C|$ în funcție de lungimile laturilor triunghiului ABC .

Aplicații. 1. Fie ABC un triunghi cu unghiurile \hat{B}, \hat{C} ascuțite și fie A' punctul de pe dreapta BC , pentru care $AA' \perp BC$. Să notăm

$a = d(B, C)$, $b = d(C, A)$, $c = d(A, B)$, $h = d(A, A')$, $u = d(A', B)$, $v = d(A', C)$. Avem $A' \in |BC|$, deci $a = u + v$. Din teorema lui Pitagora rezultă

$$b^2 = h^2 + v^2, \quad c^2 = h^2 + u^2,$$

deci $b^2 - c^2 = v^2 - u^2 = (v + u)(v - u) = a(v - u)$. Comparind cu relația $a^2 = a(v + u)$, deducem $2av = a^2 + b^2 - c^2$. Deci avem formula

$$d(A', C) = v = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a},$$

care dă distanța de la punctul A' la vîrful C , în funcție de lungimile laturilor triunghiului ABC .

2. Fie a, b, c trei numere reale pozitive, astfel ca

$$(3) \quad c \leq b \leq a < b + c.$$

Vom arăta că există un triunghi, având ca lungimi ale laturilor numerele a, b, c .

Demonstrație. Considerăm un segment $|BC|$ de lungime a și fie, pe acest segment, punctul A' astfel ca $d(A', C) = (a^2 + b^2 - c^2)/2a$. Un astfel de punct există, deoarece avem $b^2 - c^2 < a^2$, deci $a^2 + b^2 - c^2 < 2a^2$, $v = (a^2 + b^2 - c^2)/2a < a$. Avem apoi $a < b + c$, deci $a - b < c$, $(a - b)^2 < c^2$, deci $2ab > a^2 + b^2 - c^2$, sau $b > v$. Aceasta înseamnă că există un număr real pozitiv h astfel ca să avem $h^2 = b^2 - v^2$. Fie A un punct pe perpendiculara dusă prin A' la BC , astfel ca $d(A, A') = h$. În triunghiul ABC avem $d(B, C) = a$, $d(A, C) = \sqrt{(h^2 + v^2)} = b$, $d(A, B)^2 = h^2 + (a - v)^2 = b^2 - v^2 + (a - v)^2 = b^2 + a^2 - 2av = c^2$, deci $d(A, B) = c$. Deci triunghiul ABC îndeplinește condițiile cerute.

Observație. Fiind date trei numere reale pozitive, aceste numere pot fi notate cu literele a, b, c astfel încit să fie verificate inegalitățile $c \leq b \leq a$. Dacă cele trei numere reprezintă lungimile laturilor unui triunghi, vom avea și $a < b + c$.

Exerciții

1. Să presupunem că lungimile laturilor triunghiului ABC au valorile $a = 7$, $b = 5$, $c = 4$. Să se calculeze lungimea înălțimii $|AA'|$, $A' \in BC$, și lungimile segmentelor $|A'B|$, $|A'C|$.

2. Fie ABC un triunghi având unghiul \hat{B} obtuz și fie $A' \in BC$ astfel ca $AA' \perp BC$. Să se arate că $B \in |A'C|$ și să se calculeze lungimile segmentelor $|AA'|$, $|A'B|$, $|A'C|$ în funcție de lungimea laturilor triunghiului ABC . Caz particular: $d(A, C) = 7$, $d(A, B) = 3$, $d(B, C) = 5$.

3. Se consideră un triunghi având lungimile laturilor

$$a = d(B, C), \quad b = d(C, A), \quad c = d(A, B).$$

Să se arate că unghiul \widehat{ABC} este obtuz dacă și numai dacă $b^2 > c^2 + a^2$.

4. Fie A_1, A_2, \dots, A_n un sir de n puncte într-un plan. Să se arate că are loc inegalitatea

$$d(A_1, A_n) \leq d(A_1, A_2) + d(A_2, A_3) + \dots + d(A_{n-1}, A_n).$$

5. Fie AA', BB', CC' , înălțimile triunghiului ABC , cu $A' \in BC$, $B' \in CA$ și $C' \in AB$. Să se arate că

$$d(A, A')d(B, C) = d(B, B')d(C, A) = d(C, C')d(A, B),$$

6. Fie s, s' două semidrepte cu originea O și fie punctele A, B pe s și A', B' pe s' astfel ca $d(O, A) = d(O, A')$, $d(O, B) = d(O, B')$. Să se arate că triunghiurile OAB' și $OA'B$ sunt asemenea.

7. Pe laturile unghiului propriu \widehat{hk} , având originea O , se iau punctele $A \in h$, $A' \in h$, $B \in k$, $B' \in k$ astfel ca $A \neq A'$, $|OA| \equiv |OB|$ și $|OA'| \equiv |OB'|$. Să se arate că punctul de intersecție al dreptelor AB' , $A'B$ aparține bisectoarei unghiului \widehat{hk} .

8. Fie AD bisectoarea unghiului \hat{A} în triunghiul ABC , cu $D \in |BC|$. Perpendiculara din B și C pe AD intersectează dreptele AC și AB în punctele E și F . Să se demonstreze că triunghiurile ABC , AEF sunt congruente și că $D \in EF$.

9. Se consideră triunghiul ABC și triunghiurile echilaterale $AB'C$, $A'BC$ exterioare lui ABC . Să se arate că $|AA'| \equiv |BB'|$ și că măsurile unghiurilor formate de dreptele AA' , BB' sunt egale cu 60° și 120° . Extindeți aceste proprietăți, considerind cazul în care punctele A, B, C sunt coliniare.

10. Pe laturile pătratului $ABCD$ se iau punctele $J \in |AB|$, $E \in |BC|$, $F \in |CD|$, $G \in |DA|$ astfel ca $|AJ| \equiv |BE| \equiv |CF| \equiv |DG|$. Să se arate că $JEFG$ este un pătrat. Extindeți proprietatea, considerind puncte exterioare laturilor pătratului.

11. Arătați că dacă triunghiurile ABC , $A'B'C'$ au $|AB| \equiv |A'B'|$, $|AC| \equiv |A'C'|$ și dacă mediana din A în triunghiul ABC este congruentă cu mediana din A' în triunghiul $A'B'C'$, atunci cele două triunghiuri sunt congruente.

12. În triunghiul ABC , unghiurile \hat{B}, \hat{C} au măsurile de 70° respectiv de 60° . Fie BB' , CC' înălțimi și BD bisectoare în triunghiul ABC . Să se determine unghiurile triunghiului determinat de dreptele BB' , CC' , BD .

$$\text{R. } 5^\circ, 50^\circ, 125^\circ$$

13. Să se determine unghiurile triunghiului determinat de bisectoarele exterioare ale unui triunghi ABC , cunoscind unghiurile lui ABC . Caz particular: măs $\hat{B} = 70^\circ$, măs $\hat{C} = 60^\circ$.

$$\text{R. } \text{dr} - \frac{\hat{A}}{2}, \text{dr} - \frac{\hat{B}}{2}, \text{dr} - \frac{\hat{C}}{2}; \quad 55^\circ; 60^\circ; 65^\circ$$

14. Să se determine măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că ele sunt proporționale cu numerele $3, 4, 6, 11$.

$$\text{R. } 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 165^\circ$$

15. Suma măsurilor în grade ale unghiurilor unui poligon convex este egală cu 2880° . Cite laturi are acel poligon?

$$\text{R. } 18$$

16. Să se arate că dacă unul din unghiurile unui patrulater convex este egal cu media aritmetică a celorlalte trei unghiuri, atunci acel unghi este drept.

17. În paralelogramul $ABCD$ notăm prin M mijlocul lui $|CD|$ și cu N mijlocul lui $|AB|$. Arătați că AM și CN tăie diagonală $|BD|$ în trei segmente congruente.

18. Diagonalele unui trapez $ABCD$, $AB \parallel CD$, se întâlnesc în punctul O . Paralela la AB dusă prin O tăie laturile $|AD|$, $|BC|$ în punctele $E \in |AD|$, $F \in |BC|$. Arătați că $|OE| \equiv |OF|$ și

$$\frac{|AB|}{|OE|} = 1 + \frac{|AB|}{|CD|}.$$

Arătați de asemenea că punctul O , punctul de intersecție al dreptelor AD , BC și mijloacele laturilor $|AB|$, $|CD|$ sunt patru puncte coliniare.

18. Se consideră un romb $ABCD$ și un punct $F \in |BC|$. Fie $E \in DF \cap AB$ și fie H, G mijloacele segmentelor $|DF|$, $|EF|$. Să se arate că

$$\frac{|BF|}{|CF|} = \frac{|BE|}{|AD|}, \quad \frac{|BC|}{|CH|} = \frac{|BE|}{|BG|}.$$

20. Să se arate că dacă triunghiul ABC are unghiul \hat{A} drept și dacă $|AD|$ este înălțime în acest triunghi, atunci $2|AD| \equiv |BC| \sin 2\hat{B} \equiv |BC| \sin 2\hat{C}$. Cas particular: B este a șasea parte dintr-un unghi drept.

(Indicație. Se consideră simetricul punctului C față de A . În cazul particular indicat, se obține $4|AD| = |BC|$.)

21. În triunghiul ABC , notăm prin D mijlocul laturii $|AB|$ și considerăm punctul E astfel ca $|CE| \equiv |AD|$ și $C \in |BE|$. Fie $F \in DE \cap AC$. Arătați că

$$\frac{|DF|}{|FE|} = \frac{|BC|}{|AB|},$$

(Indicație. Se aplică teorema lui Menelaus.)

22. În triunghiul ABC , avem $d(B, C) = 3$ dm, $d(A, B) = d(A, C) = 11,5$ dm; se consideră punctele $M \in |BC|$, $E \in |AC|$ astfel ca $|BM| \equiv |MC|$ și ME este bisectoarea unghiului \widehat{AMC} . Să se calculeze $d(A, E)$.

$$R. \frac{23\sqrt{130}}{3 + 2\sqrt{130}}$$

23. Fie ABC un triunghi și $M \in |AC|$. Bisectoarele unghiurilor \widehat{AMB} , \widehat{CMB} intersectează laturile $|AB|$ respectiv $|BC|$ în punctele P, Q . Avem PQ paralelă cu AC dacă și numai dacă M este mijlocul lui $|AC|$.

24. Dacă două dreptunghiuri au bazele și înălțimile proporționale, atunci ele sunt asemenea.

25. Fie $ABCD, A'B'C'D'$ două trapeze astfel ca $AB \parallel CD$, $A'B' \parallel C'D'$ și

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|CD|}{|C'D'|} = \frac{|AD|}{|A'D'|}, \quad \widehat{CDA} \equiv \widehat{C'D'A'}.$$

Să se arate că cele două trapeze sunt asemenea, deci că au laturile proporționale și unghiurile congruente două cîte două.

26. Dacă două pentagoane convexe $ABCDE, A'B'C'D'E'$ au laturile proporționale și dacă două unghiuri consecutive \hat{A}, \hat{B} sunt congruente respectiv cu unghiurile \hat{A}', \hat{B}' , atunci cele două pentagoane sunt asemenea.

27. Pe o hartă întocmită la scara $1/10\ 000$, un teren este reprezentat printr-un patrulater cu laturile de $1,7$ dm; $2,1$ dm; $2,2$ dm și $1,9$ dm. Aflați perimetrul acelui teren.

R. $7,9$ km.

28. Dacă lungimile laturilor unui triunghi, notate prin a, b, c , verifică relația $b^2 + c^2 + ca^2 = a^2b + b^2c + c^2a$, atunci acel triunghi este fie isoscel, fie dreptunghic.

29. Dacă două triunghiuri au medianele congruente două cîte două, atunci cele două triunghiuri sunt congruente.

30. În triunghiul ABC cu laturile de lungimi $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 6$ cm, să se ducă două paralele la latura $|BC|$, astfel ca aceste paralele să împartă triunghiul în trei arii egale. Să se calculeze raportele în care aceste paralele împart latura $|AB|$.

$$R. \frac{|AE|}{|EB|} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}, \quad \frac{|AF|}{|FB|} = 2 + \sqrt{6}.$$

31. Într-un hexagon regulat se unesc mijloacele laturilor consecutive, și se formează un nou hexagon. Să se determine raportul ariilor celor două hexagoane.

$$R. \frac{3}{4}.$$

21. Coordonate pe o dreaptă și într-un plan

1. Fie O, A două puncte pe o dreaptă d , astfel ca segmentul $|OA|$ să fie congruent cu segmentul m , care a fost ales ca etalon. Notăm prin d' semidreapta $|OA|$ și prin d'' semidreapta opusă lui d' . Fie $A' \in d''$ punctul pentru care $|OA'| \equiv m$. Vom spune că tripletul (d, O, A) constituie o *axă*, d fiind *dreapta suport*, O *originea*, iar A *punctul unitate* al acestei axe.

Am arătat cum putem asocia fiecărui punct $M \in d'$ un număr real x , astfel ca $|OM| \equiv x |OA| \equiv x \cdot m$. Asociind punctelor $M \in d'$ numerele pozitive x , prin această regulă, am obținut o corespondență bijectivă între punctele semidreptei d' și multimea numerelor reale pozitive.

Urmind o metodă descoperită de Descartes, putem stabili o corespondență bijectivă între multimea tuturor punctelor dreptei d și multimea tuturor numerelor reale. Această corespondență se obține asociind punctelor de pe d' numere reale pozitive, aşa cum s-a arătat, punctului O numărul real zero și punctelor N de pe semidreapta d'' numere negative, astfel ca lui $N \in d''$ să i se asocieze un număr $x' < 0$ cu proprietatea

$$|ON| \equiv (-x') \cdot m.$$

Dacă unui punct $P \in d$ i s-a asociat numărul real x , scriem $P(x)$ și citim: Punctul P are abscisa x pe axa (d, O, A) sau mai scurt: punctul P de abscisă x (dacă axa este subînțeleasă).

Teoremă. Dacă avem pe o axă punctele $P(x)$, $P'(x')$, atunci distanța $d(P, P')$ este dată de formula

$$(1) \quad d(P, P') = |x - x'|.$$

Demonstrație. Trebuie să distingem cazurile: $P = P'$; $P = O$; $P' = O$; $P \in |OP'|$; $P' \in |OP|$; $O \in |PP'|$. În fiecare din aceste cazuri, egalitatea (1) este o consecință a felului în care am asociat fiecărui punct $P \in d$ abscisa sa.

Teoremă. Dacă avem pe o axă punctele $P(x)$, $P'(x')$, $P''(x'')$, atunci relația $P' \in |PP''|$ are loc în unul din următoarele cazuri și numai în aceste cazuri: a) $x < x' < x''$ sau b) $x'' < x' < x$.

Demonstrație. Relația $P' \in |PP''|$ este echivalentă cu formula

$$d(P, P'') = d(P, P') + d(P', P''), P \neq P' \neq P''.$$

Aplicind teorema precedentă, această formulă va fi echivalentă cu

$$|x'' - x| = |x' - x| + |x'' - x'|, x \neq x' \neq x'',$$

care are loc dacă și numai dacă diferențele $x' - x$, $x'' - x'$ au același semn. Dacă cele două diferențe sunt pozitive, suntem în cazul a), iar dacă diferențele sunt negative, suntem în cazul b).

Exerciții

Fie P, Q două puncte distinse pe o axă (d, O, A) și fie p, q abscisele lor. Să se determine abscisa punctului $M \in |PQ|$, care împarte segmentul $|PQ|$ în medie și extremă ratie, deci pentru care avem

$$\frac{|MQ|}{|MP|} = \frac{|PQ|}{|MQ|}.$$

2. Fie OAB un triunghi dreptunghic isoscel într-un plan p , astfel ca $|OA| \equiv |OB| \equiv m$. Considerăm axele

$$X = (OA, O, A), Y = (OB, O, B).$$

Vom spune că X, Y constituie un sistem de axe carteziene ortogonale în planul p . Un astfel de sistem permite să asociem fiecărui punct M din planul p două numere reale x și y , astfel încât corespondența

$$M \rightarrow (x, y)$$

să fie bijectivă. Pentru a defini numerele x și y , procedăm astfel:

Considerăm punctele $M' \in OA$ și $M'' \in OB$ astfel ca paralelele duse prin M' și M'' la OB respectiv OA să treacă prin M . Fie x abscisa lui M' pe axa X și fie y abscisa lui M'' pe axa Y . Atunci x și y vor fi numerele asociate lui M ; aceste numere se numesc *coordonatele* punctului M față de axe carteziene ortogonale X și Y . Numărul x se mai numește *abscisa* lui M , iar y se mai numește *ordonata* lui M față de axe X, Y .

Exerciții

1. Să notăm prin A' și B' simetricele punctelor A, B față de punctul O . Să presupunem că un punct $M \in p$ are coordonatele x și y față de sistemul de axe (X, Y) . Să se arate că: $M \in OA \Leftrightarrow y = 0$; $M \in OB \Leftrightarrow x = 0$; $M \in |OA \Leftrightarrow y = 0$ și $x > 0$.

$$M \in \text{Int}\widehat{AOB} \Leftrightarrow x > 0 \text{ și } y > 0; M \in \text{Int}\widehat{A'OB'} \Leftrightarrow x < 0 \text{ și } y < 0.$$

Notăție. Scrierea $M(x, y)$ exprimă faptul că M este punctul de coordonate x și y , dintr-un plan p , în care a fost ales un sistem de axe carteziene ortogonale.

2. Fiind date punctele $M(x, y)$ și $M'(x', y')$ să se arate că

$$d(M, M') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

Indicație. Se formează un triunghi dreptunghic cu ipotenuza $|MM'|$.

3. Să se calculeze distanța dintre punctele $M(3, 2)$ și $M'(-1, 7)$.

4. Să se determine condițiile pe care trebuie să le verifice coordonatele x, y ale unui punct $M \in p$, pentru ca să asemenea

$$d(M, P) = d(M, Q)$$

știind că $P(u, v)$ și $Q(u', v')$. Caz particular: $P(0, 1)$, $Q(-6, 8)$.

5. Folosind faptul că orice dreaptă poate fi considerată ca mediatore a cel puțin unui segment, să se arate că, oricare ar fi dreapta $d \subset p$, putem găsi trei numere reale a, b, c astfel că

$$d = \{M(x, y); ax + by + c = 0\}.$$

• Locul geometric definit de o ecuație de forma $ax + by + c = 0$. Vom studia locul geometric al punctelor $P(x, y)$, care verifică o ecuație de forma

$$(1) \quad ax + by + c = 0,$$

examinând toate cazurile posibile referitor la coeficienții a, b, c .

Cazul $a = b = c = 0$. În acest caz, toate punctele planului verifică ecuația (1), deci locul căutat este întreg planul.

Cazul $a = b = 0 \neq c$. În acest caz, nici un punct al planului nu verifică ecuația (1), deci locul geometric căutat este mulțimea vidă.

Cazul $a \neq 0 = b$. Ecuația (1) se scrie $by + c = 0$ sau

$$y = -\frac{c}{b}$$

și definește o dreaptă paralelă cu axa OA , deci cu axa absciselor. Dacă $c = 0$, se obține chiar ecuația axei absciselor.

Cazul $a \neq 0 = b$. Ecuația (1) se scrie $ax + c = 0$ sau

$$x = -\frac{c}{a}$$

și definește o dreaptă paralelă cu axa ordonatelor. Pentru $c = 0$ se obține chiar axa ordonatelor.

Cazul $a \neq 0, b \neq 0, c = 0$. Ecuația (1) se poate scrie

$$(2) \quad y = mx, m = -\frac{a}{b},$$

sau

$$(3) \quad \frac{x}{-b} = \frac{y}{a}.$$

Ecuăția (2) definește o dreaptă care trece prin originea O și prin punctul $M(1, m)$. Dacă notăm prin A punctul de coordonate 1 și 0, triunghiul OMA este dreptunghic în A și avem $\tg \widehat{AOM} = |m|$. Se spune că m este coeficiențul unghiular al dreptei definită de ecuația (2).

Cazul $b \neq 0$. Ecuăția (1) se poate scrie sub forma

$$(4) \quad y = mx + n, \quad m = -\frac{a}{b}, \quad n = -\frac{c}{b}$$

sau

$$(5) \quad \frac{x}{1} = \frac{y - n}{m}.$$

Dacă $n \neq 0$, ecuația (4) definește o dreaptă, care este paralelă cu dreapta definită de ecuația (2), deoarece intersectând cele două drepte, obținem multimea vidă. Se spune că ecuația (4) definește o dreaptă de coeficient unghiular m . Această dreaptă trece prin punctul $P(0, n)$ și prin punctul $Q(1, m+n)$.

În rezumat, o ecuație de forma (1) definește întreg planul dacă $a = b = c = 0$, multimea vidă dacă $a = b = 0 \neq c$ și o dreaptă în toate celelalte cazuri.

Exerciții

A. Să se reprezinte grafic dreptele definite de ecuațiile:

- | | |
|----------------------|------------------------|
| 1. $x + y + 1 = 0$; | 2. $2x - 3y - 5 = 0$; |
| 3. $3x + 4 = 0$; | 4. $4y + 3 = 0$; |
| 5. $2x - 7y = 0$; | 6. $y - 2x - 1 = 0$; |
| 7. $y = x + 1$; | 8. $y = 8x$; |
| 9. $y = 4x - 4$; | 10. $y = 2$. |

B. 1. Să se arate că ecuațiile

$$(1) \quad y = mx + n, \quad y = -\frac{1}{m}x + p$$

au o soluție comună unică:

$$(2) \quad x_0 = \frac{m(p - n)}{m^2 + 1}, \quad y_0 = \frac{m^2p + n}{m^2 + 1}.$$

2. Se consideră punctele $A(u, mu + n)$, $B(v, -\frac{1}{m}v + p)$, $M(x_0, y_0)$, unde x_0 și y_0 sunt date de (2). Să se arate că

$$(3) \quad d(A, M)^2 + d(B, M)^2 = d(A, B)^2.$$

3. Din exercițiul precedent să se deducă că ecuațiile (1) reprezintă două drepte perpendiculară, avind punctul comun $M(x_0, y_0)$.

4. Să se deducă din ex. 3 că orice ecuație de forma $y = mx + n$ reprezintă o dreaptă, oricare ar fi coeficienții m și n , reali.

5. Să se arate că ecuațiile

(4) $y = mx + n$, $y = m'x + n'$
reprezintă două drepte paralele dacă și numai dacă $m = m'$ și $n \neq n'$.

6. Să se arate că ecuațiile (4) reprezintă două drepte perpendiculare dacă și numai dacă $mm' + 1 = 0$.

7. Fie $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$ două puncte distințe și fie k un număr real diferit de 1. Considerăm punctul $P(x', y')$ de coordonate

$$(6) \quad x' = \frac{x_0 - kx_1}{1 - k}, \quad y' = \frac{y_0 - ky_1}{1 - k}.$$

Să se arate că:

$$(7) \quad d(M_0, P) = \left| \frac{k}{1 - k} \right| d(M_0, M_1), \quad d(M_1, P) = \left| \frac{1}{1 - k} \right| d(M_0, M_1).$$

și să se deducă implicațiile:

$$k < 0 \Rightarrow d(M_0, P) + d(P, M_1) = d(M_0, M_1), \quad P \in [M_0 M_1].$$

$$0 < k < 1 \Rightarrow d(M_1, P) - d(P, M_0) = d(M_0, M_1), \quad M_0 \in [M_1 P].$$

$$k > 1 \Rightarrow d(M_0, P) - d(P, M_1) = d(M_0, M_1), \quad M_1 \in [M_0 P].$$

8. Să se arate că, oricare ar fi numărul real $k \neq 1$, formulele (6) definesc coordonatele unui punct P situat pe dreapta $M_0 M_1$, astfel încât

$$(8) \quad d(M_0, P) = |k| d(M_1, P).$$

Deci punctul P împarte segmentul $[M_0 M_1]$ în raportul $|k|$.

Definiție. Dacă o dreaptă d este definită printr-o ecuație de forma $y = mx + n$, se spune că m reprezintă coeficientul unghiular al dreptei d .

22. Aplicații practice

1. Determinarea raportului distanțelor
de la Pămînt la Lună și Soare

Prima determinare a acestui raport a fost făcută de Aristarch, care a măsurat unghiul \widehat{SPL} într-un moment în care Luna se vede luminată nu-

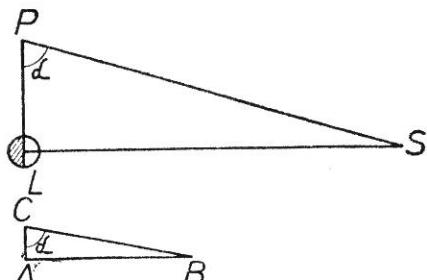


Fig. I.94

mai jumătate (în primul pătrar, 7 zile după luna nouă, sau în ultimul pătrar, 14 zile după primul pătrar).

Considerind un triunghi dreptunghic ABC , avind $\hat{C} \equiv \hat{SPL}$, vom avea (fig. I.94)

$$\frac{|SP|}{|PL|} = \frac{|CB|}{|AC|} = \frac{1}{\cos \hat{SPL}}$$

2. Măsurarea înălțimii unui edificiu cu ajutorul umbrei lăsate de razele solare

Să presupunem că vrem să măsurăm înălțimea unui edificiu $[AB]$ cu ajutorul umbrei $[AM]$ lăsate de razele solare. În acest scop, utilizăm un stilp vertical $[CD]$ de înălțime cunoscută, care lasă umbra $[CN]$. Razele solare fac cu suprafața Pământului unghiuri congruente între ele. Se formează deci două triunghiuri dreptunghice asemenea ABM și CDN , din care deducem (fig. I.95)

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|AM|}{|CN|},$$

deci avem

$$|AB| \equiv \frac{|AM|}{|CN|} \cdot |CD|.$$

Segmentele $|AM|$, $|CN|$ pot fi calculate prin măsurători și deducem mărimea înălțimii $[AB]$.

Această metodă a fost folosită de Thales pentru calcularea înălțimii piramidelor.

3. Măsurarea razei Pământului

Fie A și S două puncte pe un meridian C al suprafeței Pământului. Dacă S se găsește pe Tropicul nordic, va exista un moment al anului (21 iunie, ora 12) în care razele solare cad în S exact pe direcția razei $|OS|$, deci vertical. Dacă, la același moment, razele Soarelui fac cu verticala lui A un unghi de α° ,

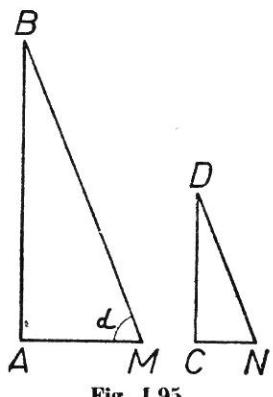


Fig. I.95

atunci unghiul \widehat{AOS} va avea aceeași măsură de α° . Cunoscind distanța D de la A la S , vom putea calcula raza R a Pământului din formula (fig. I.96)

$$\frac{\alpha}{360} = \frac{D}{2\pi R}$$

sau

$$2\pi R = \frac{360}{\alpha} D.$$

Eratostene a utilizat această metodă, considerind orașele Alexandria (A) și Syene (Assuan) (S). Având prin măsurători $\alpha^\circ = 7^\circ 12'$ și $D = 5\ 000$ stadii, a obținut $2\pi R = 250\ 000$ stadii. Un stadiu egiptean fiind de 157,5 m, aceasta dă $2\pi R = 39\ 375$ km, valoare foarte apropiată de cea adevărată: 40 009 152 m.

În același timp, Eratostene a determinat poziția tropicelor, ca fiind la latitudinea de $23^\circ 51' 20''$, făcind o eroare de numai $24'$.

Menționăm că astăzi orașul Assuan, fostul Syene, nu se mai găsește pe Tropic.

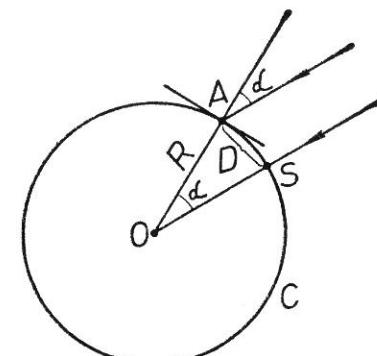


Fig. I.96

4. Determinarea distanței de la Pămînt la Soare

Fie A un punct pe suprafața Pământului. Dacă se cunoaște unghiul p făcut de linia orizontului AS cu dreapta OS , care unește centrul Pământului cu Soarele,

putem calcula distanța $d(O, S)$ din formula (fig. I.97)

$$|OS| \equiv \frac{|OA|}{\sin p}.$$

Unghiul p , numit *paralaxă orizontală*, este de aproximativ $8'', 780$ și se obține

$$d(O, S) = 149\ 500\ 000 \text{ km}.$$

5. Efectul Doppler

Un mobil M se deplasează pe o dreaptă cu viteza constantă v emițind cîte un semnal sonor la intervale de timp de T secunde. Se întrebă la ce intervale T' sunt recepționate semnalele în punctul fix O, cunoscind viteza sunetului $V = 340 \text{ m/s}$ și admitînd că O este pe dreapta pe care se deplasează M.

Răspuns. La momentul $t_n = nT$, mobilul se va găsi la distanța $d(O, M_n) = a + nTv$, unde am notat cu a distanța $d(O, M)$ la momentul $t = 0$ (fig. I. 98). Semnalul emis la momentul t_n va ajunge în punctul O la momentul $t'_n = t_n + \frac{a + nTv}{v}$. Semnalul emis la momentul t_{n+1} va ajunge în punctul O la momentul $t'_{n+1} = t_{n+1} + \frac{a + (n+1)v}{v}$.

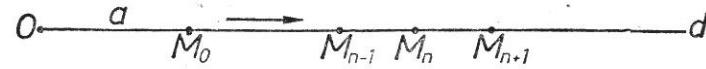


Fig. I.98

Avem

$$T' = t'_{n+1} - t'_n = T + \frac{Tv}{V} = T \frac{V+v}{V} = T \frac{v+340}{340} = T \left(1 + \frac{v}{340}\right).$$

Dacă M se depărtează de O , ($v > 0$) avem $T' > T$, iar dacă M se apropie de M , ($v < 0$), avem $T' < T$. Dacă $v = -340$ m/s, toate semnalele vor fi recepționate în același moment.

Exerciții

1. Să se arate că semiplanele limitate de dreapta $d : ax + by + c = 0$ sunt definite de formulele $p' = \{M(x, y); ax + by + c < 0\}$ și $p'' = \{M(x, y); ax + by + c > 0\}$.
2. Să se arate că punctele $M(x, y)$, care verifică un sistem de inecuații liniare $ax + by + c \geq 0$, $a'x + b'y + c' \geq 0$, $a''x + b''y + c'' > 0$, ... formează o mulțime convexă.
3. Să se arate că interiorul unui triunghi poate fi definit printr-un sistem de trei inecuații liniare. Să se scrie aceste inecuații în cazul în care vîrfurile triunghiului sint $A(1, -8)$, $B(-2, 3)$ și $C(1, 1)$.
4. Să se arate că proiecția interiorului unui triunghi pe o dreaptă este un segment.
5. Trei centrale electrice situate în orașele A , B , C furnizează curent electric la prețul de $(ad + b)$ lei/kW unde a , b sunt constante pozitive date, iar d reprezintă distanța de la centrala respectivă la consumator. Să se indice pe o figură zonele deservite de fiecare din cele trei centrale, în condițiile în care consumatorii caută să obțină curentul electric la prețul minim.
6. Se va trata aceeași problemă, presupunând că sunt disponibile patru centrale electrice, în patru orașe A , B , C , D . Cazuri particulare: $ABCD$ este un pătrat, un paralelogram sau un trapez.
7. Un călător dorește să pătrundă în interiorul unui teren, împrejmuit de un hotar avind forma unui poligon. Cum își va alege punctul de acces, astfel încit, mergind în linie dreaptă, să parcurgă drumul minim pînă la hotar?

1. Definiții

Vom presupune, ca și în capitoolele precedente, că a fost ales un segment etalon m , cu ajutorul căruia asociem fiecărui segment $|AB|$ raportul $|AB|/m$, ce va fi numit *lungimea*, în unități m , a segmentului $|AB|$, sau mai simplu, lungimea segmentului $|AB|$. Lungimea unui segment este un număr real pozitiv, care poate fi notat \overline{AB} .

Fiind date două puncte A , B , *distanța* între aceste puncte, în unități m , este numărul real 0 dacă $A = B$ și numărul pozitiv \overline{AB} , dacă $A \neq B$. Distanța între punctele A , B va fi notată $d(A, B)$.

Toate figurile considerate sunt luate într-un plan fixat.

Definiție. Fie O un punct și R un număr pozitiv. Se numește cerc de centru O și rază R locul geometric (mulțimea) al punctelor M , pentru care $d(O, M) = R$. Notînd prin $C(O, R)$ acest loc geometric, avem deci (fig. II.1)

$$C(O, R) = \{M; d(O, M) = R\}.$$

Interiorul cercului $C(O, R)$ este mulțimea (fig. II.2)

$$\text{int } C(O, R) = \{P; d(O, P) < R\},$$

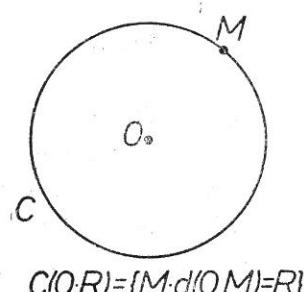


Fig. II.1

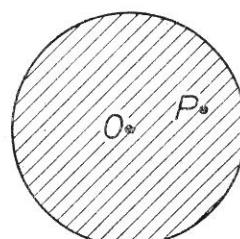


Fig. II.2

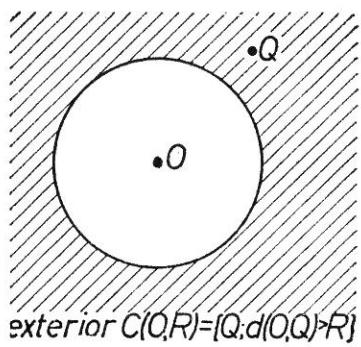


Fig. II.3

iar *exteriorul* cercului $C(O, R)$ (fig. II.3) este definit prin formula

$$\text{ext } C(O, R) = \{Q; d(O, Q) > R\}.$$

Discul de centru O și rază R este mulțimea

$$D(O, R) = \{A; d(O, A) \leq R\} = \text{int } C(O, R) \cup C(O, R).$$

Din axioma de purtare congruentă a segmentelor rezultă că:

Orice dreaptă d , care trece prin punctul O , intersectează cercul $C(O, R)$ în două puncte A, B astfel ca O să fie mijlocul segmentului $|AB|$ (fig. II.4).

Rezultă că *cercul $C(O, R)$ este o figură simetrică față de centrul O .*

Dacă o dreaptă d trece prin centrul cercului $C(O, R)$ și taie acest cerc în punctele A, B , se spune că segmentul $|AB|$ este *diametrul* determinat de dreapta d în cercul $C(O, R)$.

Orice punct al segmentului $|AB|$ este un punct interior cercului $C(O, R)$, deoarece pentru $Q \in |AB|$, avem $d(O, Q) < d(O, A) = d(O, B) = R$.

Fie Q un punct pe diametrul $|AB|$ și fie d' perpendiculara ridicată în Q pe dreapta $d = AB$ (fig. II.5). Pe dreapta d' există două puncte M, N

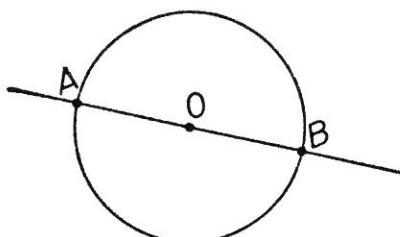


Fig. II.4

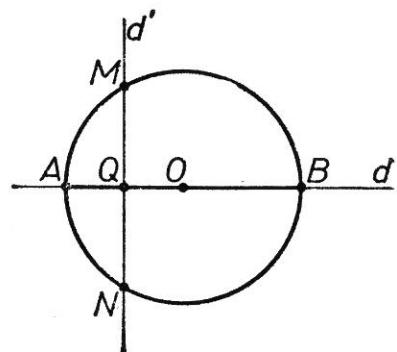


Fig. II.5

astfel că $d(Q, M) = d(Q, N) = \sqrt{R^2 - d(O, Q)^2}$ și $Q \in |MN|$. Vom avea, aplicind teorema lui Pitagora, $d(O, M) = d(O, N) = R$, deci punctele M, N aparțin cercului $C(O, R)$. Punctele M, N sunt simetrice față de dreapta d . Cind punctul Q descrie diametrul $|AB|$, punctele M, N descriu cercul $C(O, R)$, exceptând punctele A, B . Deci punctele cercului $C(O, R)$ se împart în perechi de puncte simetrice față de diametrul $|AB|$, cu excepția punctelor A, B , care sunt fiecare propriul său simetric față de AB .

Teoremă. *Interiorul unui cerc este o mulțime convexă.*

Demonstrație. Trebuie să demonstreăm că, dacă A, B sunt două puncte interioare cercului $C = C(O, R)$ (fig. II.6) atunci pentru orice punct $Q \in |AB|$ avem $Q \in \text{int } C$. Deci trebuie să demonstrăm implicația

$$d(O, A) < R, d(O, B) < R.$$

$$Q \in |AB| \Rightarrow d(O, Q) < R.$$

Dar la pag. 32 am demonstrat că segmentul care unește un vîrf al unui triunghi cu un punct situat pe latura opusă acestui vîrf este mai mic decât cea mai mare din laturile ce pornesc din vîrful considerat. Implicația precedentă este deci dovedită.

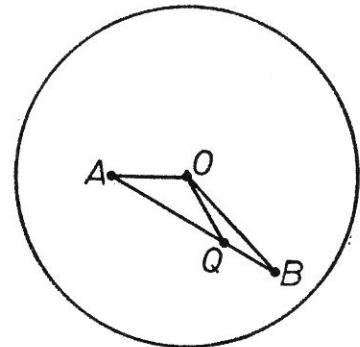


Fig. II.6

Intersecția unei drepte cu un cerc

Vom presupune cercul $C = C(O, R)$ fixat și vom studia intersecția unei drepte d cu cercul C , considerind toate cazurile posibile.

Dacă dreapta d trece prin centrul O , intersecția $d \cap C$ este formată din două puncte simetrice față de punctul O (fig. II.4).

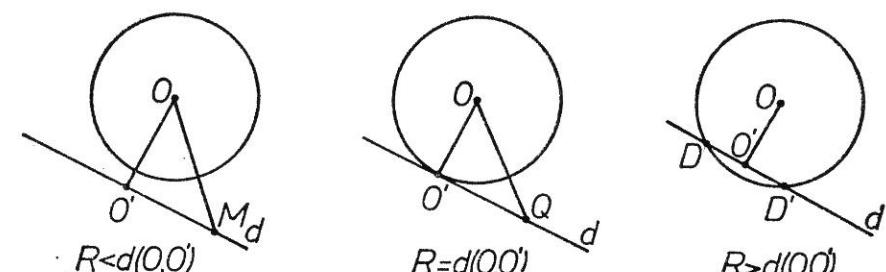


Fig. II.7

Să presupunem atunci că d nu trece prin O și să notăm prin O' proiecția ortogonală a punctului O pe dreapta d . Dreapta $d' = OO'$ este atunci perpendiculară pe d . Pentru un punct oarecare $M \in d$ avem $d(O, M) = \sqrt{d(O, O')^2 + d(O', M)^2} \geq d(O, O')$.

Rezultă că dacă $d(O, O') > R$, atunci toate punctele dreptei d sunt exterioare cercului C și intersecția $C \cap d$ este vidă (fig. II.7).

Dacă $d(O, O') = R$, O' aparține cercului C și, pentru orice punct $Q \in d$ diferit de O' , avem $d(O, Q) > R$, deci $Q \notin C$. Aceasta înseamnă că, în cazul

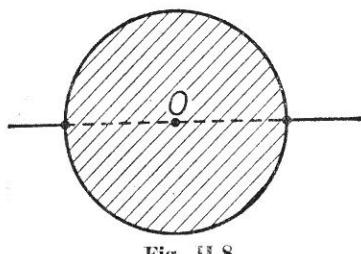


Fig. II.8

$d(O, O') = R$, O' este unicul punct comun dreptei d și cercului C . Se spune că dreapta d este tangentă în O' cercului C .

Dacă $d(O, O') < R$, există două puncte D, D' pe dreapta d astfel ca $d(O', D) = d(O', D') = \sqrt{R^2 - d(O, O')^2}$, $O' \in [DD']$. Punctele D, D' sunt punctele ce formează intersecția $d \cap C$ (fig. II.7).

În rezumat:

Un cerc și o dreaptă pot avea cel mult două puncte comune. Dacă dreapta d are un singur punct comun cu cercul C , atunci d este tangentă la C într-un punct O' și este perpendiculară pe dreapta ce unește punctul O' cu centrul cercului C .

Dacă o dreaptă d intersectează cercul C în două puncte distincte, se spune că d este o secantă la C .

Arce și corzi într-un cerc

Fie cercul $C = C(O, R)$ și dreapta d trecând prin două puncte A, B ale cercului C , deci astfel ca $d \cap C = \{A, B\}$. Vom presupune că O nu aparține dreptei d , deci că $|AB|$ nu este un diametru, și că $A \neq B$. Vom extinde în primul rînd o proprietate verificată pentru un diametru (fig. II.9):

Dacă A, B sunt două puncte distincte ale unui cerc C , atunci

$$(1) \quad |AB| = AB \cap \text{int } C.$$

Demonstratie. Trebuie să demonstrăm inclusiunile.

$$(1') \quad |AB| \subset \text{int } C \cap d, \text{ int } C \cap d \subset |AB|, d = AB.$$

Dacă $P \in |AB|$ (fig. II.10) și dacă notăm prin O' mijlocul segmentului $|AB|$, avem $d(O', P) < d(O', A) = d(O', B)$, deci $d(O, P) = \sqrt{d(O, O')^2 + d(O', P)^2} < \sqrt{d(O, O')^2 + d(O', A)^2} = d(O, A) = R$, deci $P \in \text{int } C$. Avem de asemenea $P \in AB$, deci în definitiv $P \in \text{int } C \cap d$.

Reciproc, dacă $P \in \text{int } C \cap d$, atunci $d(O', P) = \sqrt{d(O, P)^2 - d(O, O')^2} < \sqrt{R^2 - d(O, O')^2} = d(O', A)$, deci $P \in |AB|$.

În general, un segment $|AB|$, avind capetele A, B pe un cerc C , se numește coardă în cercul C . Vom considera în acest paragraf numai corzi, care nu sunt diametri.

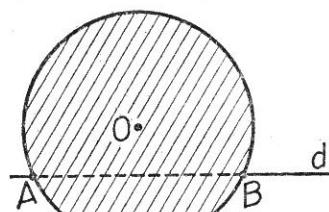


Fig. II.9

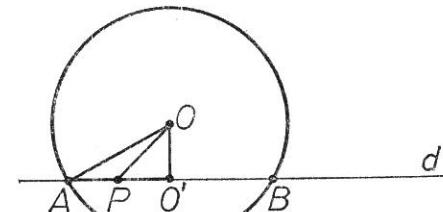


Fig. II.10

Soluție scurtă
 $\angle O < d(O, [AB]) < R$ - condiția că $\angle AOB$
 să aparțină interiorului cercului C

Din considerațiile făcute anterior rezultă că proiecția centrului cercului C pe o coardă $|AB|$ este mijlocul acestei corzi.

Din teorema I de congruență rezultă că:

Dacă $|AB|, |A'B'|$ sunt două corzi în cercul C , atunci relația $\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'OB'}$ implică $d(A, B) = d(A', B')$ (fig. II.11).

Din teorema III de congruență rezultă proprietatea reciprocă:

Dacă $d(A, B) = d(A', B')$, atunci $\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'OB'}$.

Fie d dreapta ce conține coarda $|AB|$ în cercul C , astfel ca $O \notin d$. Fie S' semiplanul limitat de d și care conține punctul O și fie S'' semiplanul opus. Multimile

$$C' = S' \cap C, C'' = S'' \cap C$$

se numesc arce limitate de punctele A, B pe cercul C și se numește arcul mare, iar C'' arcul mic, având capetele A, B (fig. II.12).

Fie M un punct situat pe arcul mic C'' (fig. II.13). Atunci punctele O, M sunt în semiplane opuse față de AB , deci segmentul $|OM|$ are un punct comun

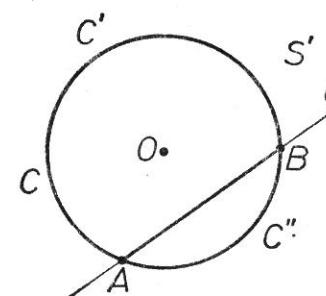


Fig. II.12

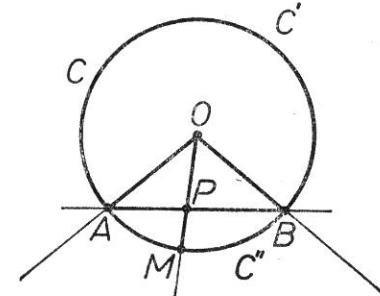


Fig. II.13

P cu dreapta d . Punctul P este interior cercului C și aparține dreptei AB , deci $P \in AB \cap \text{int } C = |AB|$. Punctele A, B fiind situate pe laturile unghiului \widehat{AOB} , rezultă că P este un punct interior unghiului \widehat{AOB} . Deci:

Punctele arcului mic C'' aparțin interiorului unghiului \widehat{AOB} .

Reciproc, dacă M este un punct pe cercul C , interior unghiului \widehat{AOB} , atunci semidreapta $|OM|$ intersectează segmentul $|AB|$ într-un punct P și $d(O, P) < d(O, M) = R$, deci $P \in |OM|$; aceasta înseamnă că M este în semiplanul opus punctului O față de dreapta AB , deci $M \in S''$. Dar $M \in C$, deci $M \in S'' \cap C = C''$. Deci:

Punctele cercului C , interioare unghiului \widehat{AOB} , aparțin arcului mic C'' .

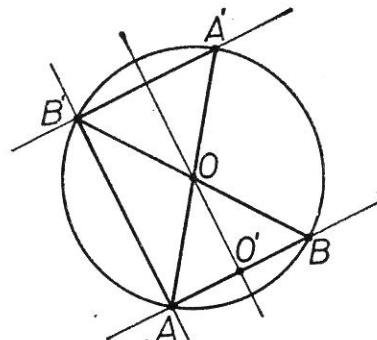


Fig. II.14

Teorema. Dacă $|AB|$ este o coardă în cercul C , astfel ca $O \notin AB$ și dacă A' , B' sunt simetricele punctelor A , B față de centrul O , atunci avem $AB' \perp AB$ și $A'B' \parallel AB$ (fig. II.14).

Demonstrație. Fie O' mijlocul segmentului $|AB|$. Din teorema lui Thales restrinsă rezultă $AB' \parallel OO'$. Dar $OO' \perp AB$, deci $AB' \perp AB$. La fel se arată că $AB' \perp A'B'$ și rezultă $A'B' \parallel AB$. Punctele A' , B' aparțin semiplanului S' , deci arcului mare C' .

2. Unghiuri înschise într-un cerc

Fie $|AB|$ o coardă în cercul C , de centru O , astfel ca $O \notin AB$. Notăm prin C' , respectiv C'' arcul mare și arcul mic definite de punctele A , B pe cercul C .

Teorema. Dacă $M \in C'$, atunci $2\widehat{AMB} \equiv \widehat{AOB}$ și \widehat{AMB} este un unghi ascuțit.

Demonstrație. Fie M' simetricul punctului M față de centrul O . Distingem mai multe cazuri:

1. $M' = A$. Aplicind teorema 2 a unghiului exterior triunghiului isoscel MOB , obținem $\widehat{AOB} = \widehat{M'OB} \equiv \widehat{2OMB} = 2\widehat{AMB}$ (fig. II.15).

Cazul $M' = B$ se tratează în același fel.

2. $M' \in C''$. În acest caz, punctele M , M' sunt în semiplane opuse față de dreapta AB , deci segmentul $|MM'|$ are un punct comun P cu dreapta AB (fig. II.16). Punctul P este interior cercului C , deci aparține segmentului

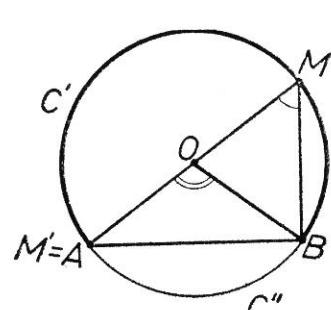


Fig. II.15

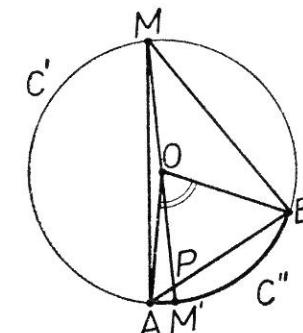


Fig. II.16

$|AB| = AB \cap \text{int } C$. Rezultă că semidreapta $|MP| = |MM'|$ este interioară unghiului \widehat{AMB} și atunci $\widehat{AMB} \equiv \widehat{AMM'} + \widehat{M'MB}$.

Rezultă $2\widehat{AMB} \equiv 2\widehat{AMM'} + 2\widehat{M'MB} \equiv \widehat{AO'M'} + \widehat{M'OB} = \widehat{AOB}$.

3. $M' \in C'$. În acest caz, punctele M , M' sunt în același semiplan față de dreapta AB , deci segmentul $|MM'|$ nu intersectează dreapta AB (fig. II.17). Atunci nici segmentul $|AB|$ nu intersectează dreapta MM' , deoarece un punct din intersecția $|AB| \cap MM'$ fiind interior cercului C , va fi pe segmentele $|AB|$, $|MM'|$, deci s-ar găsi în $|MM'| \cap AB$. Rezultă că semidreptele $|MA|$, $|MB|$ sunt de aceeași parte a dreptei MM' . Atunci fie $|MB|$ este interioară unghiului $\widehat{AMM'}$, fie $|MA|$ este interioară unghiului $\widehat{BMM'}$. În primul caz, avem $\widehat{AMM'} \equiv \widehat{AMB} + \widehat{BMM'}$, deci $\widehat{AMB} \equiv \widehat{AMM'} - \widehat{BMM'} = 2\widehat{AMB} - 2\widehat{BMM'} \equiv \widehat{AO'M'} - \widehat{BOM'} = \widehat{AOB}$. Al doilea caz, se obține din primul, schimbând A cu B .

Teorema este demonstrată.

Corolar. Dacă M , P sunt două puncte oarecare pe arcul mare limitat de punctele A , B pe cercul C , atunci $\widehat{AMB} \equiv \widehat{APB}$, și \widehat{AMB} este un unghi ascuțit.

Teorema. Dacă N este un punct pe arcul mic C'' , limitat de punctele A , B pe cercul C , atunci, pentru orice punct $M \in C'$, avem

(2)

$$\widehat{ANB} + \widehat{AMB} \equiv \text{unghi alungit} \quad (\text{fig. II.18}).$$

Demonstrație. Este suficient să demonstrăm formula (2) pentru o alegere particulară a punctului M pe arcul C' . Să luăm $M = N'$, simetricul lui N față de centrul O . Segmentele $|NN'|$, $|AB|$ au un punct comun P și avem (fig. II.19).

$$\widehat{ANB} \equiv \widehat{ANN'} + \widehat{N'NB}, \quad \widehat{AMB} = \widehat{AN'B} \equiv \widehat{AN'N} + \widehat{NN'B}.$$

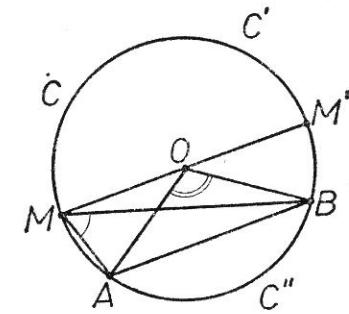


Fig. II.17

În triunghiurile dreptunghice ANN' , BNN' avem $\widehat{AN'N} + \widehat{ANN'} \equiv \text{dr}$, $\widehat{BN'N} + \widehat{BNN'} \equiv \text{dr}$, unde dr este un unghi drept. Rezultă

$$\widehat{ANB} + \widehat{AN'B} \equiv 2 \text{ dr} = \text{unghi alungit.}$$

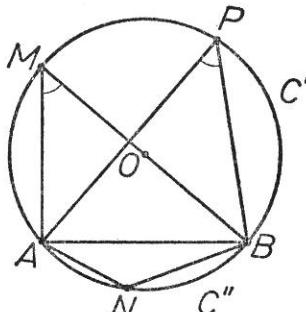


Fig. II.18

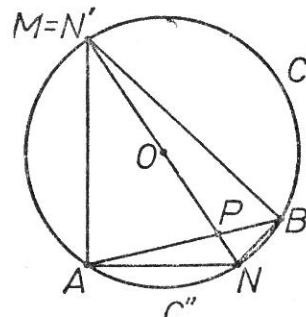


Fig. II.19

Formula (2) este acumă o consecință a corolarului precedent.

Din formula (2) rezultă următorul

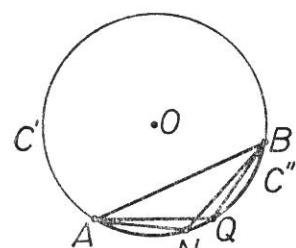


Fig. II.20

Corolar. Dacă N, Q sunt două puncte arbitrale pe arcul mic C'' , limitat de punctele A, B pe cercul C , atunci $\widehat{ANB} \equiv \widehat{AQB}$ și \widehat{ANB} este un unghi obtuz (fig. II.20).

Tangenta t la cercul C în punctul $A \in C$ poate fi considerată ca o poziție limită a unei secante la cerc, duse prin punctul A . Teorema următoare este o completare a teoremelor date anterior.

Teoremă. Fie t tangentă în punctul $A \in C$ la cercul C și fie s semidreapta $t \cap S''$, unde S'' este semiplanul limitat de secanta AB , opus punctului O . Dacă $B \in C$, avem $2sh \equiv \widehat{AOB}$, unde $h = |AB|$.

Demonstrație. Unghiul sh este complementul unghiului \widehat{OAB} , deci $2sh \equiv \widehat{AOB} - 2\widehat{OAB} \equiv \widehat{AOB}$ (fig. II.21).

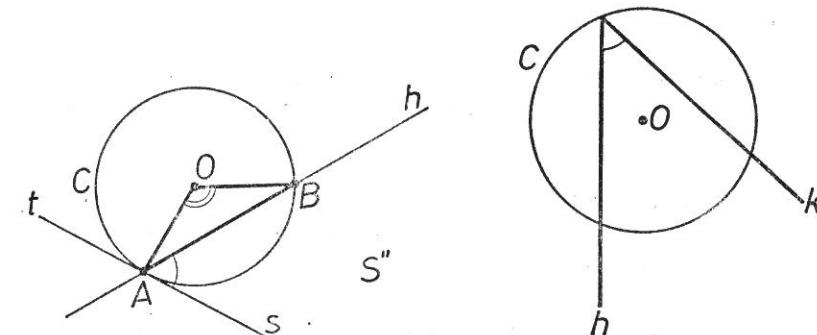


Fig. II.21

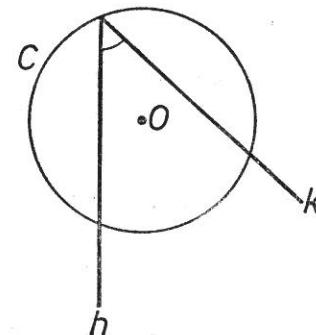


Fig. II.22

Definiție. Un unghi hk , având vîrful pe cercul C și astfel ca laturile h, k să intersecteze cercul C , se numește unghi inseris în cercul C (fig. II.22).

Primele două teoreme demonstrează în acest paragraf exprimă proprietăți ale unghiurilor inscrise într-un cerc.

Exerciții

1. Fie $ABCD$ un dreptunghi inscris în cercul K . Să se arate că $|AC|$ este un diametru în cercul K . Fie M un punct pe arcul mic \widehat{BC} . Să se arate că proiecția punctului M pe dreapta AB este un punct exterior segmentului $|AB|$.

2. Fie ABC un triunghi cu toate unghiurile ascuțite, inscris în cercul K și fie M un punct pe arcul mic \widehat{BC} . Fie A' punctul diametral opus lui A în cercul K . Să se arate că $A' \in \widehat{BC}$. Apoi să se arate că dacă $M \in \widehat{A'B}$, atunci proiecția lui M pe dreapta AB este exterioară segmentului $|AB|$, iar proiecția punctului M pe dreapta AC aparține segmentului $|AC|$.

3. Să se examineze pozițiile punctelor considerate în exercițiul 3, în cazul în care unul din unghiurile $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ este obtuz.

3. Măsura unui arc de cerc

Se știe că lungimea unui cerc de rază R , este $2\pi R$, unde π este un număr real, ale cărui prime zecimale sunt date de formula lui Ludolf:

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288\dots$$

Aproximările numărului π se obțin considerind poligoane regulate convexe, inscrise într-un cerc de rază 1, și având numărul laturilor de forma 2^k , unde k este un număr întreg mai mare decât 1.

Exerciții

IN PORTFOLIU

1. Dacă un poligon regulat înscris într-un cerc de rază 1 are latura de lungime x , atunci poligonul regulat cu număr dublu de laturi va avea lungimile laturilor egale cu

$$\sqrt{2 - \sqrt{4 - x^2}}.$$

(Indicație. Se aplică teorema lui Pitagora.)

2. Această formulă permite să calculăm lungimile laturilor poligoanelor convexe regulate, înscrise într-un cerc de rază 1 și avind 4, 8, 16, 32, 64, ... laturi. Se obțin succesiv lungimile

$$\sqrt{2}, \sqrt{2 - \sqrt{2}}, \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}},$$

$$\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}, \dots$$

Semiperimetrele acestor poligoane au valorile aproximative

$$2,8284271; 3,0614674; 3,1214451; \\ 3,1365485; 3,1403311.$$

Pentru poligonul regulat cu 2^{15} laturi, semiperimetru are valoarea aproximativă 3,1415926.

Doi diametri perpendiculari ai unui cerc de rază 1 împart circumferința cercului în patru arce congruente, care au aceeași lungime, egală cu $\pi/2$. Dacă împărțim circumferința cercului în 2^k arce egale, luând $k = 2, 3, 4, \dots$, obținem diviziuni ale circumferinței în arce de lungimi $\pi \cdot 2^{-k+1}$; aceste arce pot fi utilizate ca etalon pentru calculul aproximativ al unui arc de cerc arbitrar. Considerind aproximări din ce în ce mai bune, se obțin valori din ce în ce mai apropiate de lungimea exactă a arcului considerat. Lungimea exactă este un număr real pozitiv.

4. Măsura unghiulară a unui arc de cerc

Reamintim că unghurile se măsoară în grade sexagesimale, în radiani sau în unghiuri drepte. Uneori, se folosesc gradele centezimale, un unghi drept având 100 grade centezimale. Oricare ar fi sistemul de măsurare, două unghuri au aceeași măsură dacă și numai dacă sunt congruente.

Exerciții

1. Să se indice măsura în grade sexagesimale a unui unghi de un radian.

$$R. \frac{180^\circ}{\pi} \cong 57,30^\circ.$$

2. Să se exprime măsura în radiani a unui unghi de 1 grad sexagesimal.

$$R. \frac{\pi}{180} \cong 0,0175.$$

3. Care este eroarea care se face dacă se calculează lungimea unui cerc de rază egală cu distanța ce o parcurge lumina în 8,75 ani (distanța de la Pământ la steaua Sirius, ceea mai strălucitoare) dacă se ia pentru π valoarea aproximativă dată de formula lui Ludolf?

$$R. 10^{-15} \text{ mm.}$$

Atunci cînd sistemul de măsurare a unghiurilor nu este fixat, notăm prin \widehat{hk} măsura unghiului hk .

Fiind date două puncte distincte A, B pe un cerc C de centru O , știm că punctele A, B împart cercul C în două arce, care sunt congruente dacă $|AB|$ este un diametru; dacă $|AB|$ nu este un diametru, dintre cele două arce distingem arcul mare și arcul mic (fig. II.23). În general, fiecare din arcele limitate de punctele A, B pe cercul C se notează indicind un punct al arcului. Astfel, dacă M este un punct pe cercul C , diferit de A și de B , notăm prin \widehat{AMB} arcul limitat de A și B și conținind punctul M .

Arcul mic limitat de punctele A, B este intersecția cercului C cu interiorul unghiului \widehat{AOB} . Notind prin M un punct pe arcul mic, definim măsura unghiulară a arcului \widehat{AMB} prin formula

$$(1) \quad \text{măs } \widehat{AMB} = \text{măs } \widehat{AOB}.$$

Dacă N este un punct situat pe arcul mare limitat de A și B , definim măsura unghiulară a arcului \widehat{ANB} punind

$$(2) \quad \text{măs } \widehat{ANB} = 4 \text{ măs dr} - \text{măs } \widehat{AMB}, \\ \text{unde dr este un unghi drept (fig. II.24).}$$

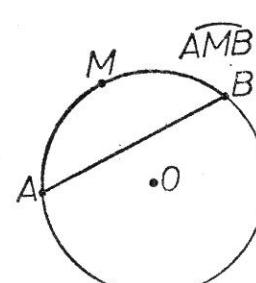


Fig. II.23

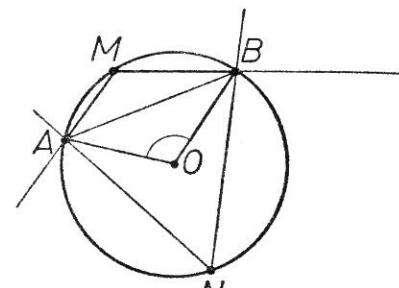


Fig. II.24

Dacă $|AB|$ este un diametru în cercul C , definim

$$(3) \quad \text{măs } \widehat{ANB} = \text{măs } \widehat{AMB} = 2 \text{ măs dr.}$$

În orice din cazuri, avem

$$(4) \quad \text{măs } \widehat{AMB} + \text{măs } \widehat{ANB} = 4 \text{ măs dr.}$$

Reamintim că, în grade sexagesimale, avem $\text{măs dr} = 90^\circ$, iar în radiani, $\text{măs dr} = \pi/2$.

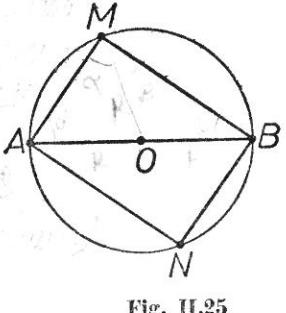


Fig. II.25

Folosind măsura unghiulară a unui arc de cerc, putem formula teorema stabilită în paragraful 2 sub forma următoare:

Teoremă. Dacă A, B, M, N sunt patru puncte distincte pe un cerc C astfel ca M și N se găsesc în semiplane opuse față de dreapta AB , atunci

$$2 \text{ mas } \widehat{AMB} = \text{mas } \widehat{ANB}$$

Dacă $|AB|$ este un diametru, avem (fig. II.25)

$$\text{mas } \widehat{AMB} = \text{mas dr.}$$

5. Unghiuri cu vîrful exterior unui cerc

Definiție. Numim unghi exterior unui cerc C , orice unghi \widehat{hk} , având vîrful în exteriorul cercului C și astfel ca laturile h, k să fie secante sau tangente cercului C .

Ne propunem să demonstrăm acum o teoremă care exprimă măsura unui unghi exterior cu ajutorul măsurilor unghiulare ale arcelor definite de laturile unghiului pe cercul C .

Teoremă. Fie A un punct exterior cercului C și fie B, D, E, F, M, N puncte pe cercul C astfel ca

$B \in |AF|, D \in |AE|, |AM| \cap |EF| \neq \emptyset, N \in |AM|$ (fig. II.26).

În aceste condiții, avem

$$2 \text{ mas } \widehat{EAF} = \text{mas } \widehat{EMF} - \text{mas } \widehat{BND}.$$

Demonstrație. Aplicând teorema a doua a unghiului exterior triunghiului ADF , obținem

$$\text{mas } \widehat{FAE} = \text{mas } \widehat{FDE} - \text{mas } \widehat{AFD}.$$

Aplicând în continuare ultima teoremă stabilită în paragraful precedent, avem

$$2 \text{ mas } \widehat{FAE} = 2 \text{ mas } \widehat{EDE} - 2 \text{ mas } \widehat{AFD} = \text{mas } \widehat{EMF} - \text{mas } \widehat{BND}$$

(fig. II.27).

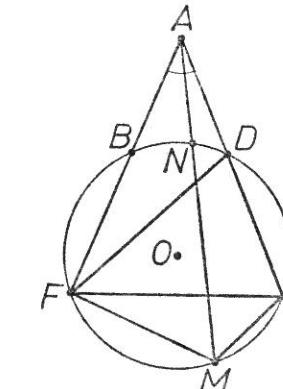


Fig. II.26

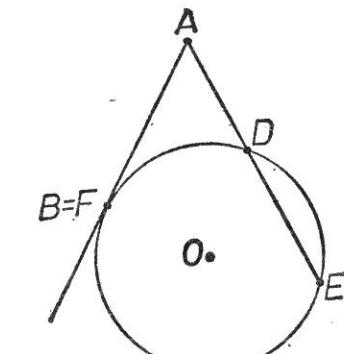


Fig. II.27

Observație. Teorema rămîne adevărată dacă $B = F$ sau $D = E$, deci atunci cînd una sau alta (sau amîndouă) din laturile unghiului \widehat{EAF} este (sunt) tangente cercului C .

6. Unghiuri cu vîrful interior unui cerc

Definiție. Un unghi cu vîrful în interiorul cercului C se numește unghi interior acestui cerc.

Teoremă. Fie \widehat{hk} un unghi interior cercului C , având vîrful în punctul A . Fie B, D, E, F, M, N puncte pe cercul C astfel ca

$$B \in h, D \in k, A \in |BF|, A \in |DE|, M \in \text{int } \widehat{hk}, A \in |MN|.$$

În aceste condiții, avem

$$2 \text{ mas } \widehat{hk} = \text{mas } \widehat{BMD} + \text{mas } \widehat{ENF} \text{ (fig. II.28).}$$

Demonstrație. Aplicăm teorema a doua a unghiului exterior triunghiului ABE . Obținem

$$2 \text{ mas } \widehat{hk} = 2 \text{ mas } \widehat{BAD} = 2 \text{ mas } \widehat{EBF} + \\ + 2 \text{ mas } \widehat{BED} = \text{mas } \widehat{ENF} + \text{mas } \widehat{BMD}.$$

Aplicație

Fie C, C_1 două cercuri avînd aceeași rază R și o coardă comună $|AB|$. Fie M, M_1 două puncte situate pe cele două cercuri și simetrice față de dreapta AB (fig. II.29). Să considerăm arcele $a = \widehat{AMB}$, $b = \widehat{AM_1B}$, $a' = C - a - \{A, B\}$, $b' = C_1 - b - \{A, B\}$.

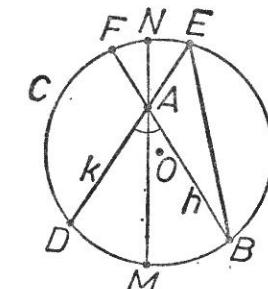


Fig. II.28

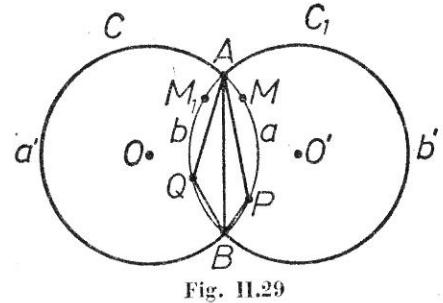


Fig. II.29

Pentru orice punct $P \in a$ și pentru orice punct $Q \in b$ avem $\widehat{APB} = \widehat{AQB}$, deoarece $2m \widehat{APB} = 2m \widehat{AQB} = m \alpha' = m \beta'$. Arcele a, b se găsesc în semiplane opuse față de dreapta AB . Fie S un punct situat în același semiplan cu arcul a . Dacă S este exterior cercului C , avem

$$2m \widehat{ASB} < m \alpha'$$

iar dacă S este interior cercului C , avem

$$2m \widehat{ASB} > m \alpha'.$$

Concluzii asemănătoare se pot deduce pentru punctele situate în același semiplan cu b . Notind prin α măsura unghiulară a arcului a' , putem enunța următoarea proprietate:

Fieind dat un arc de cerc a' , astind capetele A, B , locul geometric al punctelor P din plan, pentru care $m \widehat{APB} = \frac{1}{2} m \alpha'$, este format din două arce de cerc, simetrice față de dreapta AB și astind capetele în punctele A, B , unul din aceste arce fiind pe același cerc cu arcul a' .

Arcele a, b , care formează locul geometric indicat, se numesc *arce capabile de unghiul \widehat{AMB}* și limitate de punctele A, B .

Construcția unui arc capabil de un unghi dat

Pentru a construi un arc capabil de un unghi dat \widehat{hk} și având capetele date A, B , construim un unghi congruent cu \widehat{hk} , având vîrful în punctul A și având semidreapta $|AB|$ drept una din laturi (fig. II.30). A doua latură m a acestui unghi va fi tangentă unui cerc C , care conține un arc capabil de unghiul \widehat{hk} . Centrul cercului C va fi punctul de intersecție al mediatoarei segmentului $|AB|$ cu perpendiculara în A pe dreapta ce conține semidreapta m .

Dacă \widehat{hk} este un unghi drept, locul geometric la care ne-am referit este ormat din cercul de diametru $|AB|$, din care am scos punctele A, B .

Puterea unui punct față de un cerc

Tot ca aplicație la teoremele referitoare la unghiuri, demonstrează anterior, putem rezolva următoarea problemă:

Fie A, B, A', B' patru puncte pe un cerc C , astfel ca dreptele $AB, A'B'$ să se interseceze într-un punct P (fig. II.31). Să se demonstreze că

$$(1) \quad d(P, A) \cdot d(P, B) = d(P, A') \cdot d(P, B').$$

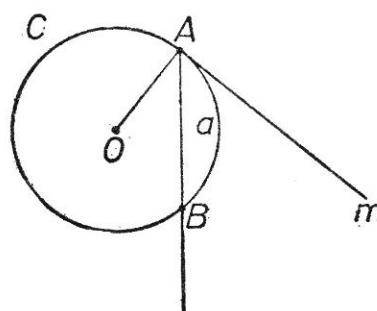


Fig. II.30

Rezolvare. Triunghiurile PAB' , $PA'B$ sunt asemenea, având unghiul din P comun și $\widehat{PBA}' = \widehat{PB'A}$. Din teorema triunghiurilor asemenea deducem

$$\frac{d(P, A)}{d(P, B')} = \frac{d(P, A')}{d(P, B)}$$

și relația (1) se obține imediat.

Formula (1) poate fi reținută în modul următor:

Dacă o secantă variabilă trece printr-un punct fix P și intersectează un cerc C în punctele A, B , produsul $d(P, A) \cdot d(P, B)$ este constant.

Valoarea constantă a produsului $d(P, A) \cdot d(P, B)$, cind secanta PAB se rotește în jurul punctului P , se numește *puterea punctului P față de cercul C* .

Puterea unui punct P față de un cerc C , de centru O și rază R , poate fi ușor calculată, dacă se mai cunoaște distanța $d = d(O, P)$.

Dacă $d > R$, punctul P este exterior cercului C . Fie A, B punctele de intersecție ale dreptei OP cu cercul C , astfel ca $A \in |OP|$. Avem $d(P, A) = d - R$, $d(P, B) = d + R$, deci puterea punctului P față de cercul C va fi numărul

$$p(P, C) = (d - R)(d + R) = d^2 - R^2.$$

Dacă $d < R$, P este un punct interior cercului C . Dacă $PO \cap C = \{A, B\}$ și $P \in |OA|$, atunci avem $d(P, A) = R - d$, $d(P, B) = R + d$, deci

$$p(P, C) = R^2 - d^2.$$

Pentru punctele situate pe cerc, puterea p este zero.

Centrul O are puterea R^2 .

Uneori puterea unui punct dată de un cerc se consideră cu semn, pentru a distinge cazul în care P este punct exterior de cazul în care P este interior. Anume se definește *puterea cu semn* a punctului P față de cercul C prin formula

$$\bar{p}(P, C) = d(P, A) \cdot d(P, B) \cos \widehat{APB},$$

unde A, B sint punctele de intersecție ale unei drepte duse prin P cu cercul C . Pentru puncte exterioare avem

$$\bar{p}(P, C) = d^2 - R^2 > 0$$

iar pentru puncte interioare, $\bar{p} = -p$, deci,

$$\bar{p}(P, C) = d^2 - R^2 < 0.$$

Deci puterea cu semn este dată de o aceeași formulă, independent de poziția punctului P , dar semnul ei este pozitiv pentru punctele exterioare cercului C și este negativă pentru punctele interioare.

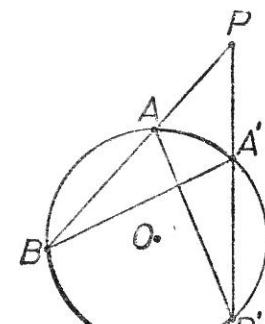


Fig. II.31

Exercițiu. Dacă P este exterior cercului C , să notăm prin r numărul $p(P, C) = \sqrt{d^2 - R^2}$. Să se arate că cercul $C' = C(P, r)$ intersectează cercul C în două puncte T, T' și că dreptele PT, PT' sunt tangente cercului C .

7. Poziția relativă a două cercuri

Fie $C = C(O, R), C' = C(O', R')$ două cercuri. Notăm $c = d(O, O')$. Dacă $O \neq O'$, dreapta OO' se numește linia centrelor cercurilor C, C' .

Teorema. Două cercuri distințe au cel mult două puncte comune.

Demonstrație (prin reducere la absurd). Presupunem că cercurile C, C' au trei puncte distințe A, B, D în comun. Aceste puncte nu pot fi coliniare, deoarece o dreaptă poate avea în comun cu un cerc cel mult două puncte. Deci punctele A, B, D formează un triunghi. Punctele O, O' trebuie să se găsească pe mediatoarele laturilor triunghiului ABD . Dar aceste mediatoare au un singur punct comun, deoarece două drepte distincte neparalele au exact un punct comun. Deci $O = O'$. Apoi $R = d(O, A) = d(O', A) = R'$. Deci $C = C'$, contrar ipotezei. Rezultă că cercurile C, C' nu pot avea trei puncte distințe în comun.

Dacă două cercuri distințe C, C' au două puncte comune A, B , se spune că C, C' sunt cercuri secante. Fiind date două puncte distințe A, B , orice cerc ce conține aceste puncte are centrul pe mediatoarea segmentului $|AB|$. Reciproc, orice punct al acestei mediatoare este centrul unui cerc ce trece prin A și B .

Dacă două cercuri distințe $C = C(O, R), C' = C(O', R')$ au două puncte comune A, B , aceste puncte nu se află pe linia centrelor OO' , deci punctele O, O', A formează un triunghi (fig. II.32). Lungimile laturilor acestui triunghi sunt $R = d(O, A), R' = d(O', A), c = d(O, O')$. Rezultă că avem, dacă $R > R'$,

$$(1) \quad 0 \leq R - R' < c < R + R'.$$

Reciproc, dacă numerele R, R', c verifică inegalitățile (1), atunci cercurile C, C' de centre O, O' situate la distanța c și de raze R, R' sunt secante (vezi Aplicația 2, p. 76).

Exercițiu. Să se arate că linia centrelor a două cercuri secante este perpendiculară pe coarda comună.

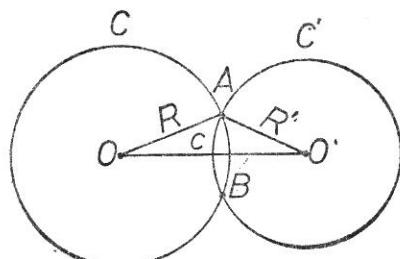


Fig. II.32

Două cercuri, care au un singur punct comun, se numesc cercuri tangente.

Dacă două cercuri distințe $C = C(O, R), C' = C(O', R')$ au un punct comun A , atunci $O \neq O'$ și simetricul punctului A față de dreapta OO' este deasemenea punct comun celor două cercuri. Dacă C, C' sunt cercuri tangente, trebuie să avem $A \in OO'$. Deci:

Dacă două cercuri distințe C, C' sunt tangente, atunci punctul lor comun aparține liniei centrelor. Perpendiculara în punctul comun pe linia centrelor este tangentă comună cercurilor C, C' .

Fie A punctul comun cercurilor tangente C, C' . Sunt posibile trei cazuri:

1. $A \in |OO'|$. Atunci O, O' se găsesc în semiplane opuse față de tangentă comună t (fig. II.33). Pentru un punct P interior lui C avem $d(O, P) < R = d(O, A)$, deci P este în același semiplan cu O față de t . Aceeași proprietate este adevărată pentru orice punct $P \in C$ diferit de A . De asemenea, punctele interioare lui C' și punctele de pe C' , diferite de A , sunt în același semiplan cu O' față de tangentă comună t . Se spune că cercurile C, C' sunt tangente exterior.

2. $O \in |AO'|$. Pentru orice punct P , interior lui C sau situat pe C și distinct de A , avem $d(O', P) < d(O, O') + d(O, P) \leq c + R = R'$, deci P este interior cercului C' . Se spune că cercurile C, C' sunt tangente interior, cu C interior (fig. II.34).

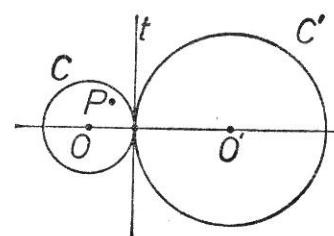


Fig. II.33

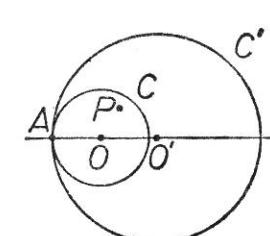


Fig. II.34

3. $O' \in |AO|$. Acest caz este analog cazului precedent, obținându-se din acela permutând cercurile C, C' între ele. Cele două cercuri sunt de asemenea tangente interior, dar cu C' interior.

Pentru două cercuri tangente exterior avem $c = R + R'$, iar pentru două cercuri tangente interior, $c = |R - R'|$.

Rezultă că dacă două cercuri $C = C(O, R), C' = C(O', R')$, cu $c = d(O, O')$, au unul sau două puncte comune, atunci avem

$$(2) \quad |R - R'| \leq c \leq R + R'.$$

Dacă cercurile $C = C(O, R), C' = C(O', R')$ n-au nici un punct comun, atunci avem fie $c > R + R'$, fie $c < |R - R'|$.

Să presupunem că cercurile C, C' sunt astfel încit $c > R + R'$ (fig. II.35). În acest caz, pentru orice punct $P \in C'$, vom avea $d(O, P) > d(O, O') - d(O', P) = c - R' > R$, deci P este exterior cercului C . Deci toate punctele cercului C' sunt exterioare cercului C . La fel se arată că toate punctele cercului C sunt exterioare cercului C' . De aceea se spune că, în cazul $c > R + R'$, cercurile C, C' sunt exterioare.

Dacă $c < |R - R'|$, sunt posibile două cazuri:

1. $R > R', c < R - R'$. În acest caz, $c < R$, deci $d(O, O') < R$, deci O' este punct interior cercului C . Pentru orice punct $P \in C'$ avem $d(O, P) <$

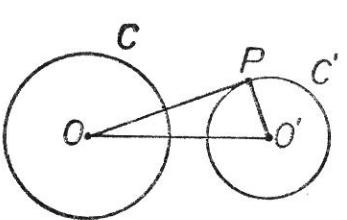


Fig. II.35

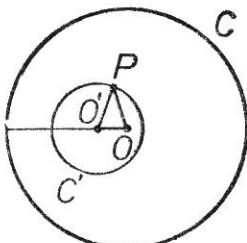


Fig. II.36

$d(O, O') + d(O', P) = c + R' < R$; deci orice punct al cercului C' este interior cercului C . Se spune că cercul C' este *interior* cercului C (fig. II.36).

2. $R' > R$, $c < R' - R$. Procedind ca în cazul precedent, arătăm că toate punctele cercului C sunt interioare cercului C' , deci că cercul C este interior cercului C' .

În rezumat, putem alcătui următorul tablou, care ilustrează pozițiile relative posibile a două cercuri, în funcție de parametrii R, R', c :

Cercuri secante: $|R - R'| < c < R + R'$.

Cercuri tangente interior: $c = R - R'$ sau $c = R' - R$.

Cercuri tangente exterior: $c = R + R'$.

Cercuri exterioare: $c > R + R'$.

Cercul C' este interior cercului C : $c < R - R'$, $R' < R$.

Pentru două cercuri concentrice avem $c = 0$, deci unul din cele două cercuri va fi interior celuilalt.

Unghiul a două cercuri

Fie C, C' două cercuri secante în punctele A, B . Triunghiurile AOO' , BOO' sunt congruente, deci au $\widehat{OAO'} \equiv \widehat{BOO'}$ (fig. II.37).

Să notăm prin D, D' punctele în care tangentele t, t' , duse în punctul A la cercul C , respectiv C' , intersectează linia centrelor OO' . Dreptele BD , BD' sunt atunci tangente în B cercurilor C, C' și avem $\widehat{DAD'} \equiv \widehat{DBD'}$. Se spune că $\widehat{DAD'}$ sau $\widehat{DBD'}$ reprezintă *unghiul* sub care se taie cercurile C, C' .

Fie E' un punct astfel ca $A \in [O'E']$. Din relațiile $t \perp OA$, $t' \perp O'A$ rezultă că avem $\widehat{DAD'} \equiv \widehat{OAE'}$, sau $\widehat{DAD'} \equiv \widehat{OAO'}$. Rezultă că:

Unghiul sub care se taie două cercuri este congruent cu unghiul format de semidreptele $[AO], [AO']$, care pleacă din punctul comun A și conțin centrele O, O' , sau cu suplementul acestui unghi.

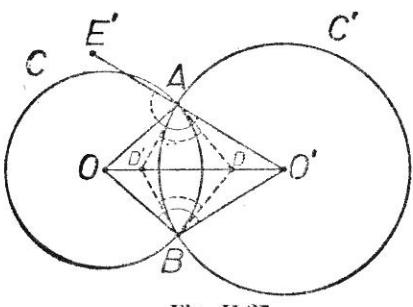


Fig. II.37

Definiție. Două cercuri ortogonale sunt două cercuri care se taie sub un unghi drept.

Rezultă că dacă C, C' sunt două cercuri ortogonale, atunci ele au două puncte comune A, B și tangentele în aceste puncte la C și la C' sunt perpendiculare (fig. II.38). Aceasta înseamnă că OA este tangentă la cercul C' , iar $O'A$ este tangentă la cercul C , și că triunghiul AOO' este dreptunghic în A . Prin urmare, pentru două cercuri ortogonale $C = C(O, R)$, $C' = C(O', R')$, avem

$$d(O, O')^2 = R^2 + R'^2.$$

Reciproc, dacă ultima relație este îndeplinită, triunghiul AOO' este dreptunghic în A și cercurile C, C' sunt ortogonale.

Să mai observăm că dacă cercurile C, C' sunt ortogonale, atunci puterea centrului O' al cercului C' față de C este egală cu pătratul razei R' a cercului C' , deci $p(O', C) = R'^2$. De asemenea, avem $p(O, C') = R^2$.

Exercițiu. Fie C, C' două cercuri ortogonale și fie M, N, M', N' punctele în care linia centrelor OO' intersectează aceste cercuri. Presupunem că $M, N \in C$ și că $M' \in [MN]$. Să se arate că $d(O, M') d(O, N') = d(O, M)^2$ și că

$$\frac{d(M', M)}{d(M', N)} = \frac{d(N', M)}{d(N', N)}.$$

(Indicație. Pentru prima relație, se consideră puterea punctului O față de C' . A doua relație se obține pe cale algebraică din prima.)

8. Axa radicală a două cercuri

Propoziție ajutătoare. Fiind date în plan două puncte fixe A și B , locul geometric al punctelor P din plan, astfel încit $d(P, A)^2 - d(P, B)^2 = k$, o constantă dată, este o dreaptă perpendiculară pe dreapta AB , ($A \neq B$).

Demonstrație. Fie P un punct al locului geometric căutat și fie T proiecția lui P pe dreapta AB (fig. II.39). Aplicând teorema lui Pitagora triunghiurilor dreptunghice TAP , TBP obținem:

$$\begin{aligned} d(P, A)^2 &= d(P, T)^2 + d(A, T)^2, \\ d(P, B)^2 &= d(P, T)^2 + d(B, T)^2, \\ \text{deci } d(P, A)^2 - d(P, B)^2 &= d(A, T)^2 - d(B, T)^2. \end{aligned}$$

P va fi un punct al locului dacă și numai dacă $d(P, A)^2 - d(P, B)^2 = k$, deci dacă și numai dacă $d(A, T)^2 - d(B, T)^2 = k$. Dacă alegem pe dreapta AB un punct Q

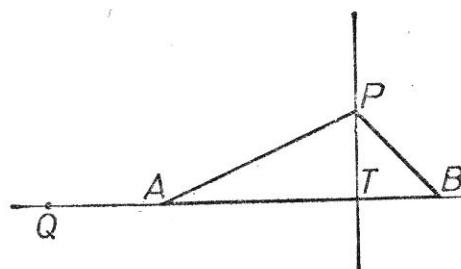


Fig. II.39

ca origine și dacă punctele A, B, T au abscisele a, b, t , ultima condiție se poate scrie sub forma

$$(t - a)^2 - (t - b)^2 = k$$

sau $2(b - a)t = k + b^2 - a^2$. Punctele A, B fiind distincte, avem $b \neq a$, deci $t = (k + b^2 - a^2)/2(b - a)$. Rezultă că punctul T este unic determinat; punctele locului geometric căutat sunt punctele P , care au acest punct T ca proiecție ortogonală pe dreapta AB . Deci locul geometric căutat este dreapta perpendiculară pe dreapta AB și trecând prin T .

Exercițiu. Să se demonstreze că diagonalele unui patrulater sint perpendiculare dacă și numai dacă suma pătratelor a două laturi opuse este egală cu suma pătratelor celorlalte două laturi.

Să demonstrăm acum următoarea teoremă:

Theoremă. Fiind date două cercuri $C = C(O, R)$, $C' = C(O', R')$, de centre diferite, locul geometric al punctelor P , care au puteri cu semn egale față de C și C' , este o dreaptă perpendiculară pe linia centrelor OO' .

Demonstrație. Fie P un punct al locului. Puterile lui P față de cercurile C, C' au expresiile (fig. II.40):

$$\bar{p}(P, C) = d(O, P)^2 - R^2, \quad \bar{p}(P, C') = d(O', P)^2 - R'^2.$$

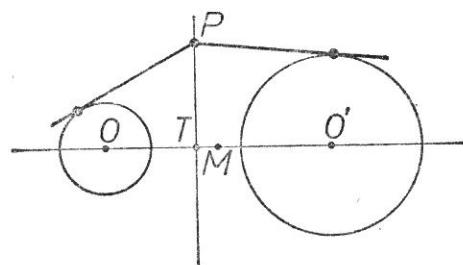


Fig. II.40

Condiția ca P să aparțină locului geometric considerat se scrie $d(O, P)^2 - R^2 = d(O', P)^2 - R'^2$ sau $d(P, O)^2 - d(O', P)^2 = R^2 - R'^2$. Deci sintem în condițiile aplicării propoziției precedente, unde trebuie să facem $A = O$, $B = O'$ și $k = R^2 - R'^2$. Rezultă că locul geometric al punctelor P , care au proprietatea indicată, este o dreaptă perpendiculară pe linia centrelor OO' .

Dacă notăm prin T intersecția locului cu dreapta OO' și dacă presupunem că, față de un sistem de coordonate ales pe dreapta OO' , punctele O, O', T au abscisele respectiv a, a', t , atunci avem

$$t = \frac{R^2 - R'^2 + a'^2 - a^2}{2(a' - a)}.$$

Dacă, alegem drept origine a absciselor mijlocul M al segmentului $|OO'|$, atunci $a' = -a$ și expresia lui t devine

$$t = \frac{R'^2 - R^2}{4a}.$$

unde $2|a| = d(O, O')$.

Definiție. Locul geometric al punctelor care au puteri egale față de două cercuri, se numește axa radicală a celor două cercuri (Gaultier — 1813).

Reținem că axa radicală este definită numai în cazul, în care centrele cercurilor considerate sunt distincte.

Observații. 1. Fiind date două cercuri concentrice distincte, nu există nici un punct care să aibă puteri egale față de cele două cercuri.

2. Două cercuri secante au ca axă radicală secanta comună, deoarece fiecare din punctele comune celor două cercuri are puterea egală cu zero față de fiecare cerc.

3. Axa radicală a două cercuri tangente este tangenta comună, deoarece punctul de tangență are puterea egală cu zero față de fiecare cerc și deoarece tangenta comună este perpendiculară pe linia centrelor.

4. Fiind date trei cercuri cu centrele necoliniare, există un unic punct, numit *centru radical*, ca reare puterile egale față de cele trei cercuri; într-adevăr, notind prin C, C', C'' cele trei cercuri, axa radicală a cerurilor C, C' intersectează axa radicală a cerurilor C, C'' într-un punct P , care are puteri egale față de cercurile C, C', C'' . Punctul P va aparține și axei radicale a cerurilor C', C'' .

5. Din formula care dă abscisa punctului T , în care axa radicală intersectează linia centrelor, anume $t = -(R^2 - R'^2)/4a$, rezultă că t are același semn cu a' dacă $R > R'$; acesta este cazul, în care axa radicală este mai apropiată de O' decât de O .

6. Dacă $R > R'$, și $a > 0$ și dacă cercurile sunt exterioare, avem $R + R' < 2a$, deci $|t| < (R - R')/2 < (R + R')/2 < a$. Aceasta înseamnă că axa radicală a două cercuri exterioare intersectează linia centrelor într-un punct situat pe segmentul $|OO'|$.

7. Dacă cercul C este interior cercului C' , avem $R < R'$. În acest caz, axa radicală a cerurilor, C, C' este exterioară celor două cercuri.

Aplicație.

Ne propunem să rezolvăm următoarea problemă:

Fiind date două puncte distincte A, B , să se determine locul geometric I , al punctelor P , pentru care raportul $d(P, A)/d(P, B)$ este egal cu un număr pozitiv dat k , $k \neq 1$.

Rezolvare. Fie M, N punctele dreptei AB , pentru care avem $M \in |AB|, N \in |AB|$ și

$$|MA| \equiv k|MB|, \quad |NA| \equiv k|NB| \quad (\text{fig. II.41}).$$

Dacă P este un punct al locului geometric căutat L , PM și PN sunt bisectoarele unghiului \widehat{APB} , respectiv al suplementului acestui unghi, deci punctul P se află pe cercul C de diametru $|MN|$, deoarece unghiul

\widehat{MPN} este drept. Deci avem $L \subset C$.

Vom arăta că avem și incluziunea inversă $C \subset L$. Va rezulta atunci că $L = C$.

Pentru a arăta că orice punct de pe cercul C este un punct al locului geometric L , este suficient să arătăm că orice dreaptă d , dusă prin punctul M , intersectează locul L cel puțin într-un punct P (fig. II.42).

Punctul $P \in d \cap L$ este ușor de aflat: considerăm simetricul B' al punctului B față de dreapta

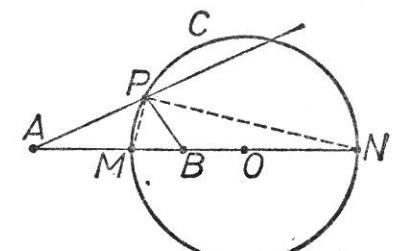


Fig. II.41

(Indicație. Se va observa că triunghiurile $P_{i-1}P_iP_{i+1}$ sunt isoscele și congruente două cîte două. Se va deduce că mediatotoarele laturilor $|P_iP_{i+1}|$ trec printr-un punct comun O , care este egal depărtat de punctele P_i și este de asemenea egal depărtat de dreptele P_iP_{i+1})

Observație. Cerculile C , C' se numesc *cercul circumscris* respectiv *cercul inscris* poligonului $P_1P_2\dots P_n$.

12. Să se arate că dacă A, B, C, D sunt patru puncte pe un cerc, atunci $|AB| \cap CD| = |AB| \cap |CD| = |AB \cap CD| = |AB| \cap |CD|$.

9. Patrulatere inscriptibile

Fiind dat un cerc K , se numește patrulater inscris în cercul K orice patrulater $ABCD$ care are virfurile A, B, C, D pe cercul K . Un patrulater $ABCD$ se numește *inscriptibil*, dacă există un cerc K astfel ca $ABCD$ să fie inscris în K , (fig. II.44).

Reamintim că un patrulater este o linie poligonală închisă, formată din patru laturi care sunt disjuncte două cîte două.

Dacă $ABCD$ este un patrulater inscris în cercul K , atunci punctele C, D sunt de aceeași parte a dreptei AB , deoarece dacă C, D ar fi în semiplane opuse față de AB , atunci am avea $|AB| \cap |CD| = |AB \cap CD| \neq \emptyset$, ceea ce nu este posibil, deoarece $|AB|, |CD|$ sunt două laturi ale unui patrulater. La fel se arată că A, D sunt de aceeași parte a dreptei BC , că A, B

sunt de aceeași parte a dreptei CD și că B, C sunt de aceeași parte a dreptei AD . Rezultă că:

Orice patrulater inscriptibil este convex.

Să demonstrăm.

Theoremă 1. Într-un patrulater inscriptibil, suma a două unghiuri opuse este un unghi alungit.

Demonstrație. Într-un patrulater convex $ABCD$, diagonalele $|AC|, |BD|$ au un punct comun I . Rezultă că punctele A, C sunt în semiplane opuse față de dreapta BD . Dacă $ABCD$ este inscris într-un cerc K , punctele A, C se vor găsi pe cîte unul din cele două arce limitate pe cercul K de coarda $|BD|$. Din proprietățile unghiurilor inscrise într-un cerc, rezultă

$$\widehat{BAD} + \widehat{BCD} \equiv 2 \text{ dr},$$

unde dr desemnează un unghi drept.

Theoremă 2. Într-un patrulater inscriptibil, unghiul format de o diagonală cu o latură este congruent cu unghiul format de cealaltă diagonală cu latura opusă.

Demonstrație. Punctele C și D fiind de aceeași parte a coardei $|AB|$, din proprietățile unghiurilor inscrise într-un cerc rezultă

$$\widehat{ACB} \equiv \widehat{ADB}.$$

Exercițiu. Să se arate că, într-un patrulater inscriptibil, fiecare unghi este congruent cu suplementul unghiului opus.

Reciproca teoremei 1. Dacă în patrulaterul convex $ABCD$ suma a două unghiuri opuse este un unghi alungit, atunci acel patrulater este inscriptibil.

Demonstrație. Fiind dat unghiul \widehat{BAD} , stim că locul geometric al punctelor C , pentru care unghiul \widehat{BCD} este congruent cu suplementul unghiului \widehat{BAD} , este format din două arce de cerc simetrice față de dreapta BD , unul din aceste arce fiind situat pe cercul K , ce conține punctele A, B, D , și în semiplanul opus lui A față de BD . Dacă $ABCD$ este patrulater, punctele A, C trebuie să fie în semiplanele opuse față de BD , deci C se găsește pe arcul limitat de punctele B, D și opus arcului \widehat{BAD} . Deci $ABCD$ este un patrulater inscris cercului K .

Exercițiu. Dacă într-un patrulater convex un unghi este congruent cu suplementul unghiului opus, atunci acel patrulater este inscriptibil.

Reciproca teoremei 2. Dacă într-un patrulater convex unghiul format de o diagonală cu o latură este congruent cu unghiul format de cealaltă diagonală cu latura opusă, atunci acel patrulater este inscriptibil.

Demonstrație. Din ipoteză, $\widehat{ABD} \equiv \widehat{ACB}$ și C, D se găsesc de aceeași parte a dreptei AB . Rezultă că D se găsește pe arcul de cerc \widehat{ACB} și deci $ABCD$ este un patrulater inscriptibil.

1. Să se construiască un patrulater $ABCD$ astfel ca $\widehat{ACB} \equiv \widehat{ADB}$ și totuși $ABCD$ să nu fie inscriptibil.

2. Să se construiască un patrulater $ABCD$ astfel că unghiul \widehat{ADC} să fie congruent cu suplementul unghiului \widehat{ABC} și totuși $ABCD$ să nu fie inscriptibil.

3. Să se arate că dreptunghiurile, trapezele isoscele și în particular pătratele sunt patrulatere inscriptibile.

10. Mișcarea circulară uniformă

Fie C un cerc de centru O și rază R . Să presupunem că un punct se mișcă pe acest cerc, astfel încât poziția lui pe cerc este o funcție de timpul t . Să notăm prin F această funcție. Atunci, pentru fiecare valoare a lui t , $F(t)$ este un punct pe cercul C .

Se spune că funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow C$ definește o mișcare circulară. Această mișcare se numește uniformă, dacă este înălțită următoarea condiție:

Fiind date patru momente t_1, t_2, t'_1, t'_2 astfel ca $t'_1 - t'_2 = t_2 - t_1$, dacă notăm $M_1 = F(t_1), M_2 = F(t_2), M'_1 = F(t'_1), M'_2 = F(t'_2)$, avem (fig. II.45)

$$\widehat{M_1 O M_2} = \widehat{M'_1 O M'_2}.$$

Se mai spune în acest caz că punctul $M = F(t)$ are o mișcare de rotație în jurul punctului O . Dacă presupunem că $|t_2 - t_1|$ este unitatea de măsură u a timpului, unghiul $\widehat{M_1 O M_2}$ se numește *viteza de rotație sau viteza unghiulară* a punctului M .

Viteza unghiulară fiind presupusă dată, sunt posibile două mișcări cu această viteză, cele două mișcări diferind prin *sensul de rotație*.

Exercițiu. Fie M, N două puncte, care se mișcă pe două cercuri concentrice cu același sens. Să se arate că distanța $d(M, N)$ este constantă.

Fie $M_0 = F(0)$ poziția pe care o are punctul $M = F(t)$ la momentul $t = 0$ (fig. II.45). Lungimea cercului C fiind finită și egală cu $2\pi R$, punctul M va reveni în poziția M_0 după o perioadă de timp $T = 2\pi/\alpha$, unde α este viteza unghiulară a mișcării. Numărul $T = 2\pi/\alpha$ se numește *perioada mișcării circulare considerate*.

Înălțarea fiind uniformă, vom avea $F(t+T) = F(t)$, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$. Dacă viteza unghiulară α este de un radian în unitatea de timp, deci dacă $\alpha = 1$ radian/u, atunci $T = 2\pi \times$ unitatea de timp.

Exerciții

1. Locul geometric al punctelor care au puterea față de un cerc dat, egală cu un număr dat, este un cerc sau un punct sau mulțimea vidă.

2. Fie C, C' două cercuri exterioare. Locul geometric al centrilor cercurilor ortogonale cu fiecare din cercurile C, C' este axa radicală a cercurilor C, C' .

(Se ține seama că dacă C, C'' sunt două cercuri ortogonale, atunci puterea centrului cercului C'' față de cercul C este egală cu pătratul razei cercului C'' .)

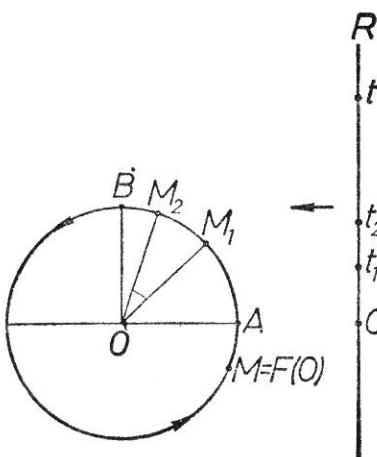


Fig. II.45

3. Fie pe un cerc C punctul fix A și un punct mobil M . Fie d perpendiculara în M pe dreapta AM și fie punctele $L \in d, L' \in d$ astfel ca unghiurile $\widehat{LAM}, \widehat{L'AM}$ să fie congruente cu un unghi fix α . Se cere locul geometric al punctelor L, L' .

(Se observă că dreapta d trece prin punctul B diametral opus lui A pe cercul C și că unghiurile $\widehat{ALB}, \widehat{AL'B}$ sunt congruente cu două unghii constante. Locurile geometrice căutate sunt formate de arce de cercuri având capetele A, B).

4. Se dă un punct fix A și o dreaptă fixă d , astfel ca $A \notin d$. Se cere locul geometric al punctelor N , astfel ca produsul $\overline{AN} \cdot \overline{AM}$ să fie egal cu un număr dat k , unde $\{M\} = |AN \cap d|, k > 0$.

(Se consideră dreapta $AP \perp d$, $P \in d$ și punctul $Q \in |AP$ astfel ca $\overline{AP} \cdot \overline{AQ} = k$. Locul geometric căutat este cercul de diametru $|AQ|$.)

5. Fie A, B, C, M patru puncte distincte pe un cerc K . Notăm prin P, Q, R proiecțiile punctului M pe dreptele BC, CA, AB . Să se arate că punctele P, Q, R sunt coliniare (teorema lui Simson). Se va presupune că $C \in |BP|, Q \in |AC|$.

(Se observă că patrulaterul $AMQR$, $CPMQ$ sunt inscripțibile. Dacă se presupune că M este pe arcul subîntins de coarda $|AC|$, avem $Q \in |AC|$. Se deduce că măs $\widehat{RQM} +$ măs $\widehat{MQP} = 180^\circ$, deci punctele R, Q, P sunt coliniare.)

6. Fie $|AB|, |CD|$ două coarde perpendiculare în cercul K , având punctul comun M și netrecind prin centrul cercului K . Presupunând $|MA| > |MB|$ și $|MC| > |MD|$ să se arate că există un patrulater cu vîrfurile pe K și cu laturile congruente cu $|AB|, |CD|, |MA| - |MB|, |MC| - |MD|$.

(M. Chirita, G. Nagy).

(Indicație. Se construiesc dreptunghiurile $CDC'D'$ și $ABA'B'$ inscrise în cercul K și se observă că

$$|MA| - |MB| \equiv |CD'|, |MC| - |MD| \equiv |A'B'|.$$

11. Aplicații practice

1. Două mobile M, M' se rotesc pe două cercuri tangente exterior, cu același viteza unghiulară și în același sens, plecind din punctul comun (fig. II.46).

a. Să se arate că dreapta MM' trece mereu prin punctul de contact al celor două cercuri.
b. Să se exprime distanța $d(M, M')$ în funcție de viteza unghiulară ω și de timpul t , scurs de la momentul inițial.

2. Două roți se rotesc fiecare în jurul axei sale, astfel încât ele se ating fără să alungească una față de alta (fig. II.47).

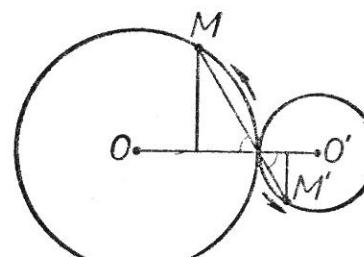


Fig. II.46

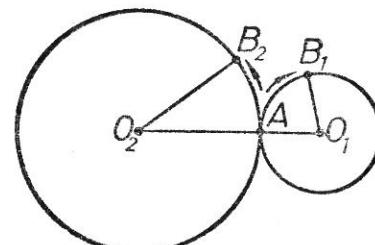


Fig. II.47

Să se arate că raportul vitezelor unghiulare ale celor două rotații este egal cu inversul raportului razelor celor două roți.

Soluție. Alunecarea fiind exclusă, dacă la un moment dat t_0 roțile au punctul comun A , iar dacă la momentul t_1 acest punct ajunge pe prima roată în poziția B_1 iar pe a doua roată în poziția B_2 , avem lungimea $AB_1 =$ lungimea \widehat{AB}_2 .

Dar avem măs $\widehat{AO_2B_2} = (t_1 - t_0)\omega_2$; măs $\widehat{AO_1B_1} = (t_1 - t_0)\omega_1$; deci din formula $\frac{l}{2\pi R} = \frac{\alpha}{2\pi}$ deducem: lungimea $AB_1 = R_1(t_1 - t_0)\omega_1$, lungimea $\widehat{AB}_2 = R_2(t_1 - t_0)\omega_2$; rezultă

$$R_1\omega_1 = R_2\omega_2.$$

Această relație este utilizată la *angrenaje*. Dacă roțile sunt tangente exterior, rotațiile lor au sensuri opuse, iar dacă roțile sunt tangente interior, rotațiile sunt de același sens.

La *angrenaje cilindrice* se folosesc roți dințate. Dacă roata de rază R_1 are n_1 dinți, iar cea de rază R_2 are n_2 dinți, distanța între axele a doi dinți consecutivi fiind aceeași la cele două roți, trebuie să avem

$$\frac{2\pi R_1}{n_1} = \frac{2\pi R_2}{n_2}, \text{ deci } \frac{R_1}{n_1} = \frac{R_2}{n_2}.$$

Exerciții

1. Să se arate că dacă două roți de raze R_1 și R_2 sunt depărtate și dacă mișcarea uneia este transmisă la celalătă cu ajutorul unei curele, atunci vitezele unghiulare ale roților sunt inverse proporționale cu razele, deci $R_1\omega_1 = R_2\omega_2$.

2. Să presupunem că o roată de rază R se rostogolește pe o tijă dreaptă fără să alunecă nici un moment (fig. II.48).

Să se arate că dacă un punct A al roții a ajuns, după un interval de timp t , în poziția B' ,

astfel ca unghiul vectorilor \vec{OA} , $\vec{O'B}'$ să fie de α° , atunci punctul de contact M ajunge, în același interval de timp, în poziția M' , astfel ca

$$d(M, M') = \frac{2\pi R\alpha}{360^\circ}.$$

Să se deducă că viteză lui M este egală cu produsul razei R cu viteza unghiulară de rotație a roții în jurul axei sale.

3. Să presupunem că două puncte A_1 , A_2 se deplasează pe două cercuri C_1 , C_2 , de centre

O_1 și O_2 și de raze egale, astfel încât $d(A_1, A_2) = d(O_1, O_2)$.

Să se arate că A_1 și A_2 au vitezele egale. Se va considera cazul în care $O_1A_1A_2O_2$ este un paralelogram și acela în care $A_1O_1A_2O_2$ este trapez isoscel (fig. II.49, a, b).

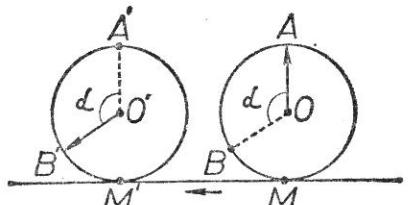


Fig. II.48

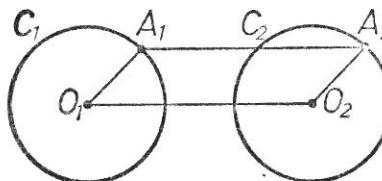


Fig. II.49, a

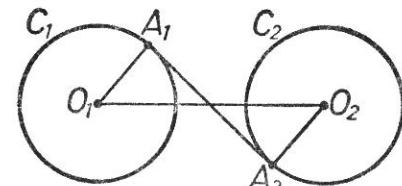


Fig. II.49, b

4. Un cerc C , se rostogolește fără alunecare pe un cerc C , de rază dublă, în interiorul acestuia (fig. II.50). Arătați că fiecare punct M al cercului C_1 descrie un diametru al cercului C . Exprimăți segmentul $|OM|$ în funcție de viteza unghiulară cu care se rotește linia centrelor OO_1 și de timpul t .

(Indicație. Fie A punctul de tangență la un moment t și fie $M \in |OP|$, $P \in C$. Arcele \widehat{AM} , \widehat{AP} au lungimi egale, deci, la un moment t punctul M va coincide cu punctul de tangență P . În intervalul $t' - t$, raza $|OO_1|$ se rotește cu unghiul $\widehat{AO_1P}$, iar M parcurge distanța $d(M, P)$. Avem

$$|OM| = |OA| \cdot \cos \widehat{AO_1P} = |OA| \cdot \cos(t' - t)\omega.$$

5. Două mobile, M_1 , M_2 se rotesc pe două cercuri cu centru O , cu vitezele unghiulare constante ω_1 , ω_2 , în același sens. Știind că la momentul $t = t_0$ unghiul $\widehat{M_1O_1M_2}$ are măsura α , să se determine momentele

$$t_1, t_2, \dots$$

în care mobilele M_1 , M_2 se vor găsi pe o aceeași semidreaptă cu originea O (fig. II.51).

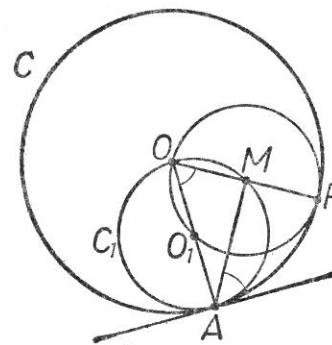


Fig. II.50

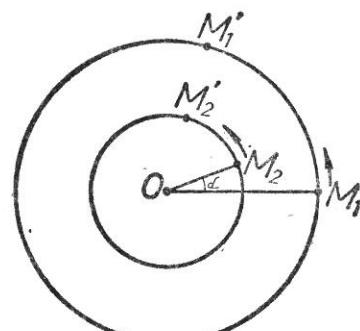


Fig. II.51

Soluție. După momentul T , punctele M_1 , M_2 se vor găsi pe aceeași semidreaptă, dacă există un număr întreg k , astfel încit să avem

$$\alpha + T\omega_2 = T\omega_1 - 2k\pi$$

sau dacă

$$T = \frac{\alpha + 2k\pi}{\omega_1 - \omega_2}.$$

Deci punctele M_1 și M_2 se vor găsi pe cîte o aceeași semidreaptă $|OM$ la momentele

$$t_k = t_0 + T_k = t_0 + \frac{\alpha}{\omega_1 - \omega_2} + \frac{2k\pi}{\omega_1 - \omega_2}.$$

Dacă M_1, M_2 sunt acele unui ceasornic, avem pentru $t_0 = 0$,

$$\alpha = 0, \omega_1 = \frac{2\pi}{60} \text{ min}^{-1}, \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{720} \text{ min}^{-1},$$

$$T_k = \frac{k}{\frac{1}{60} - \frac{1}{720}} \text{ min} = \frac{k}{\frac{660}{60 \cdot 720}} \text{ min} = \frac{720k}{11} \text{ minute},$$

deci acele se întâlnesc la intervale de $\frac{720}{11}$ minute = 1 oră + $\frac{60}{11}$ minute.

Exerciții

1. Păstrind notațiile, să se determine momentele t_1, t_2, \dots în care mobilele M_1, M_2 sunt astfel încît $O \in [M_1 M_2]$.

2. Să presupunem că aplicația $F : R \rightarrow C$ definește o mișcare circulară uniformă a unui mobil M , pe cercul C , astfel încît punctul $M = F(t)$ să parcurgă acest cerc, o dată, în 2π secunde. Fie $A = F(0)$ poziția punctului M la momentul $t = 0$. Să se demonstreze următoarele proprietăți ale aplicației F :

- 1) Oricare ar fi momentul t , avem $F(t) = F(t + 2\pi)$;
- 2) Dacă $B = F\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $A' = F(\pi)$, $B' = F\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, atunci unghiurile \widehat{AOB} , $\widehat{A'OB}$, $\widehat{A'OB'}$ și $\widehat{B'OA}$ sunt drepte, O fiind centrul cercului O .
- 3) Oricare ar fi momentul t , punctele $F(t)$ și $F(t + \pi)$ sunt simetrice față de centrul O .
- 4) Dacă $t \in [-\pi, \pi]$, atunci măsura în radiani a unghiului $\widehat{AOF}(t)$ este egală cu $|t|$.
- 5) Oricare ar fi momentul t , punctele $F(t)$ și $F(\pi - t)$ sunt simetrice față de dreapta OB , iar punctele $F(t)$ și $F(-t)$ sunt simetrice față de dreapta OA .
3. Folosind regula de trecere de la măsura unui unghi în radiani la măsura sa în grade sexagesimale și utilizând tabelul de la pagina 71, să determine poziția aproximativă a punctului $F(t)$ pentru $t = 1, t = 2, \dots, t = 10$.

1. Vectori

Se numește *vector legat* sau *vector* o pereche ordonată de puncte, deci o mulțime formată din două puncte, dintre care unul este numit *origine*, iar al doilea *extremitate*. Vectorul având originea A și extremitatea B va fi notat \overrightarrow{AB} . Termenul vector vine de la cuvîntul latinesc „vehere“, care înseamnă „a merge“. Cînd ne referim la vectorul \overrightarrow{AB} ne putem gîndi la un mobil, care se deplasează, mergînd din punctul A în punctul B



Fig. III.1

(fig. III.1). De aceea un vector \overrightarrow{AB} se reprezintă printr-o săgeată de la punctul A la punctul B .

Doi vectori \overrightarrow{AB} , $\overrightarrow{A'B'}$ sunt egali dacă și numai dacă $A = A'$, și $B = B'$.

Un vector, a cărui origine coincide cu extremitatea sa, se numește *vector nul*. Fiecare punct A definește vectorul nul \overrightarrow{AA} .

Dacă \overrightarrow{AB} este un vector nenul, punctele A și B sunt distințe și definesc o dreaptă, care se numește *suportul* vectorului \overrightarrow{AB} (fig. III.2).

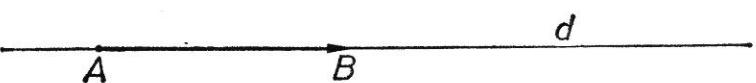


Fig. III.2

Doi vectori care sunt nenuli și au același suport, se numesc *vectori coliniari* (fig. III.3).



Fig. III.3

Doi vectori nenuli, care au suporții paraleli, se numesc *vectori paraleli*.

Uneori, un vector se notează printr-o singură literă, deasupra căreia se pune o săgeată. De exemplu, putem scrie $\vec{u} = \vec{AB}$. Pentru a exprima că \vec{u} este un vector nul, scriem $\vec{u} \in \vec{0}$, $\vec{0}$ fiind mulțimea vectorilor nuli.

Definiție. Fie $\vec{AB}, \vec{A'B'}$ doi vectori nenuli și paraleli. Spunem că vectorii considerați sunt echipolenți, dacă figura $ABB'A'$ este un paralelogram, deci dacă $AB \parallel A'B'$ și dacă $AA' \parallel BB'$ (fig. III.4).

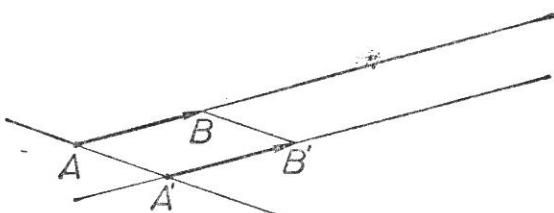


Fig. III.4

Definiție. Vom spune că doi vectori nenuli și paraleli au același sens, dacă extremitățile lor se găsesc de o aceeași parte a dreptei definite de originile lor.

Deci vectorii nenuli și paraleli \vec{AB}, \vec{CD} sunt de același sens, dacă punctele B, D se găsesc de aceeași parte a dreptei AC .

Definițiile date pierd orice semnificație, dacă vectorii $\vec{AB}, \vec{A'B'}$ respectiv \vec{AB} și \vec{CD} sunt coliniari. Totuși, putem defini echipolență, respectiv relația de a avea același sens și pentru vectori coliniari, dacă procedăm în modul următor: alegem un punct O , exterior dreptei d , care conține vectorii $\vec{AB}, \vec{A'B'}, \vec{CD}$ și considerăm paralelogramul $OABP$, care are latura $|OP|$ paralelă cu d . Vom spune că vectorii coliniari $\vec{AB}, \vec{A'B'}$ sunt echipolenți, dacă vectorii paraleli $\vec{OP}, \vec{A'B'}$ sunt echipolenți; vectorii coliniari \vec{AB}, \vec{CD} se zic de același sens, dacă vectorii paraleli \vec{OP}, \vec{CD} sunt de același sens, (fig. III.5).

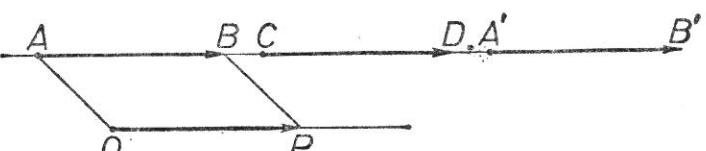


Fig. III.5

Exerciții

1. Să se arate că relația de echipolență a vectorilor este relație de echivalență, deci că este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

2. Să se arate că relația exprimată prin cuvintele „au același sens” este o relație de echivalență.

3. Să se arate că definițiile echipolenței și relației privind sensul a doi vectori nenuli și coliniari nu depind de alegerea punctului O .

Doi vectori nuli se consideră totdeauna echipolenți. Pentru a exprima că vectorii \vec{u}, \vec{v} sunt echipolenți, scriem $\vec{u} \sim \vec{v}$.

Fie \vec{AB}, \vec{CD} doi vectori necoliniari și fie O un punct oarecare. Să considerăm punctele M și N astfel ca $\vec{OM} \sim \vec{AB}$ și $\vec{ON} \sim \vec{CD}$. Se formează astfel unghiul \widehat{MON} (fig. III.6), despre care vom spune că reprezintă unghiul vectorilor \vec{AB}, \vec{CD} . Dacă se consideră alte puncte O', M', N' astfel ca $\vec{O'M'} \sim \vec{AB}$ și $\vec{O'N'} \sim \vec{CD}$, atunci $\widehat{M'O'N'} \equiv \widehat{MON}$, deci două unghiuri, care reprezintă unghiul a doi vectori nenuli, sunt congruente.

Să completăm construcția efectuată anterior, considerînd paralelogramele $MONP, M'O'N'P'$. Avem

$$(1) \quad \vec{AB} \sim \vec{OM} \sim \vec{O'M'}, \vec{CD} \sim \vec{ON} \sim \vec{O'N'}, \vec{OP} \sim \vec{O'P'}$$

Vom spune că vectorul \vec{OP} reprezintă suma în O a vectorilor \vec{AB}, \vec{CD} și vom scrie

$$\boxed{\vec{OP} = \vec{AB} + \vec{CD} \text{ (în } O\text{)} \text{ sau } \vec{OP} \sim \vec{AB} + \vec{CD}}$$

Potrivit acestei definiții, avem

$$\vec{O'P'} = \vec{AB} + \vec{CD} \text{ (în } O'\text{)}, \vec{O'P'} \sim \vec{AB} + \vec{CD}$$

Ultima formulă (1) arată că *doi vectori, care reprezintă suma altor doi vectori, în două puncte oarecare, sunt echipolenți*. Deci $\vec{OP} \sim \vec{O'P'}$.

Din proprietățile paralelogramului rezultă formulele (fig. III.6).

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \vec{OM} + \vec{ON} \text{ (în } O\text{)} = \vec{OM} + \vec{MP} \text{ (în } O\text{)} = \vec{ON} + \vec{OM} \text{ (în } O\text{)} = \\ &= \vec{ON} + \vec{NP} \text{ (în } O\text{).} \end{aligned}$$

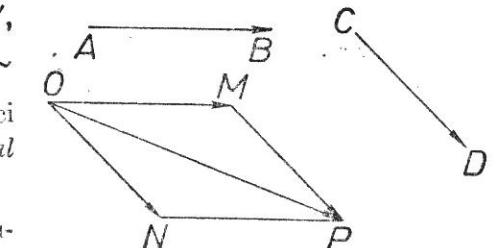


Fig. III.6

Aveam prin urmare, pentru orice doi vectori, \vec{AB} și \vec{CD} , și pentru orice punct O , proprietatea de *comutativitate*

$$\boxed{\vec{AB} + \vec{CD} \text{ (in } O\text{)} = \vec{CD} + \vec{AB} \text{ (in } O\text{).}}$$

Pentru a obține suma în A a vectorilor \vec{AB} , \vec{CD} , putem proceda în modul următor: considerăm punctul P , astfel ca $\vec{BP} \sim \vec{CD}$; atunci

$$\vec{AB} + \vec{CD} \text{ (in } A\text{)} = \vec{AP}.$$

Fie vectorii $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{CD}$ și $\vec{w} = \vec{EF}$. Să alegem un punct oarecare O și să construim punctele M , N , P astfel că $\vec{OM} \sim \vec{u}$, $\vec{MN} \sim \vec{v}$ și $\vec{NP} \sim \vec{w}$. Avem atunci (fig. III.7).

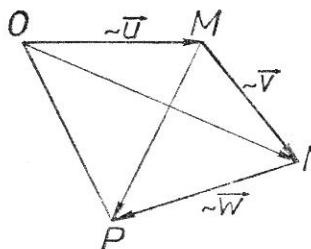


Fig. III.7

$$\begin{aligned}\vec{ON} &= \vec{u} + \vec{v} \text{ (in } O\text{)}, \quad \vec{OP} = \vec{ON} + \vec{w} \text{ (in } O\text{)} = \\ &= (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} \text{ (in } O\text{)}. \\ \vec{MP} &= \vec{v} + \vec{w} \text{ (in } M\text{)}, \quad \vec{OP} = \vec{OM} + \vec{MP} \\ &\text{(in } O\text{)} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \text{ (in } O\text{).}\end{aligned}$$

Rezultă că *adunarea vectorilor într-un punct are proprietatea de asociativitate*

$$\boxed{(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} \text{ (in } O\text{)} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \text{ (in } O\text{).}}$$

Exercițiu. Se consideră vectorii $\vec{AB} \sim \vec{A'B'}$, $\vec{CD} \sim \vec{C'D'}$ și un punct O . Arătați că $\vec{AB} + \vec{CD} \text{ (in } O\text{)} = \vec{A'B'} + \vec{C'D'} \text{ (in } O\text{).}$

Fie m segmentul etalon, ales ca unitate de măsurare a lungimii segmentelor și a distanțelor între puncte. Am notat prin $d(A, B)$ distanța dintre punctele A , B . Dacă $A \neq B$, $d(A, B)$ coincide cu lungimea segmentului $|AB|$, iar dacă $A = B$, avem prima definiție $d(A, B) = 0$.

Definiție. După fixarea segmentului etalon, definim norma unui vector \vec{AB} prin formula

$$\boxed{\|\vec{AB}\| = d(A, B).}$$

Deci norma unui vector este egală cu distanța dintre originea și extremitatea acestui vector.

În particular, vectorii nuli au normă egală cu 0. Reciproc, dacă un vector \vec{v} are normă $\|\vec{v}\|$ egală cu 0, atunci vectorul \vec{v} este nul. Un vector de normă 1 se numește *versor*.

Exercițiu. Arătați că doi vectori echivalenți au norme egale.

Fiind dat un vector $\vec{v} = \vec{AB}$, vom spune că vectorul $\vec{v}' = \vec{BA}$ este un opus al vectorului \vec{v} , deoarece avem, oricare ar fi punctul O ,

$$\vec{v} + \vec{v}' \text{ (in } O\text{)} = \vec{OO}.$$

În general, vom numi *vector opus* vectorului \vec{v} , orice vector echivalent cu vectorul \vec{v}' .

Definim *diferența* a doi vectori $\vec{v} = \vec{AB}$ și $\vec{w} = \vec{CD}$, într-un punct O , prin formula

$$\vec{AB} - \vec{CD} \text{ (in } O\text{)} = \vec{AB} + \vec{DC} \text{ (in } O\text{).}$$

Dacă notăm $\vec{u} = \vec{AB} - \vec{CD}$ (in O), atunci avem $\vec{u} + \vec{CD} \text{ (in } A\text{)} = \vec{AB}$. Oricare ar fi punctele L , M , N , avem

$$\vec{MN} = \vec{LN} - \vec{LM} \text{ (in } M\text{),}$$

deoarece $\vec{MN} + \vec{LM} \text{ (in } L\text{)} = \vec{LM} + \vec{MN} \text{ (in } L\text{)} = \vec{LN}$.

Dacă se completează figura LMN la un paralelogram $LMNP$, avem

$$\vec{LM} + \vec{LP} \text{ (in } L\text{)} = \vec{LN}, \quad \vec{LP} - \vec{LM} \text{ (in } M\text{)} = \vec{MP}$$

și rezultă că cei doi vectori diagonali \vec{LN} , \vec{MP} dau suma și diferența vectorilor \vec{LM} , \vec{LP} , pe care am construit paralelogramul $LMNP$. (fig. III.8).

Fiind dat un vector $\vec{v} = \vec{AB}$ și un număr real x , definim produsul $x \cdot \vec{v}$ în modul următor:

Dacă $B = A$ sau dacă $x = 0$, $x \cdot \vec{v}$ este vectorul nul \vec{AA} .

Dacă $B \neq A$ și dacă $x > 0$, $x \cdot \vec{v}$ va fi acel vector \vec{AB}' , pentru care

$$B' \in |AB|, \quad |AB'| \equiv x \cdot |AB|.$$

Dacă $B \neq A$ și dacă $x < 0$, atunci $x \cdot \vec{v}$ va fi acel vector \vec{AB}'' , pentru care

$$A \in |BB'|, \quad |AB''| \equiv (-x) \cdot |AB|.$$

În particular, avem $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$ și $(-1) \cdot \vec{v}$ este un opus al vectorului \vec{v} . Oricare ar fi numerele reale x și y și pentru orice vector v , avem

(2)

$$\boxed{x \cdot (y \cdot \vec{v}) = (xy) \cdot \vec{v}.}$$

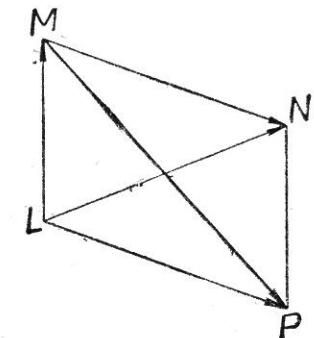


Fig. III.8

Ultima formulă se stabilește observind că cei doi membri reprezintă vectori având aceeași origine, aceeași dreaptă suport (dacă cei doi vectori sunt nenuli); în plus, cei doi vectori au același sens, oricare ar fi semnele lui x și y și ei au de asemenea aceeași normă $|xy| \cdot \|\vec{v}\|$.

Să arătăm că, oricare ar fi vectorii $\vec{u} = \vec{AB}$ și $\vec{v} = \vec{CD}$ și oricare ar fi numărul real x , avem

$$(3) \quad x \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \sim x \cdot \vec{u} + x \cdot \vec{v}.$$

Pentru demonstrație, să considerăm un punct O și să construim punctele M, N astfel ca $\vec{OM} \sim \vec{u}$ și $\vec{ON} \sim \vec{v}$. Fie apoi punctele M', N' pentru care

$$\vec{OM}' \sim x \cdot \vec{u}, \quad \vec{ON}' \sim x \cdot \vec{v}.$$

Să presupunem că vectorii \vec{u} și \vec{v} sunt nenuli și necoliniari. Atunci $M \neq O$

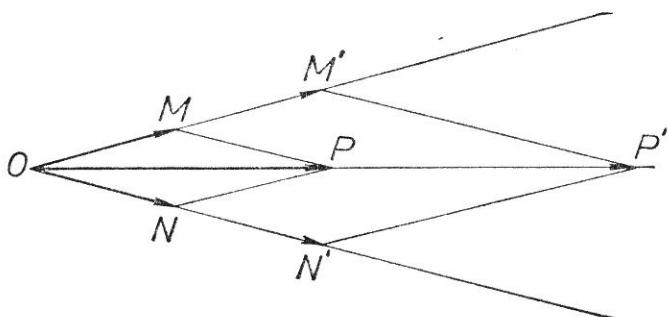


Fig. III.9

și $N \neq O$ și avem $M' \in OM$, $N' \in ON$. Dacă definim punctele P, P' prin formulele (fig. III.9).

$$\vec{OP} \sim \vec{OM} + \vec{ON}, \quad \vec{OP'} \sim x \cdot \vec{OP},$$

din teorema lui Thales deducem relațiile

$$MN \parallel M'N', \quad M'P' \parallel MP \parallel ON, \quad N'P' \parallel NP \parallel OM,$$

$$\vec{M'P'} \sim x \cdot \vec{MP} \sim x \cdot \vec{ON}, \quad \vec{N'P'} \sim x \cdot \vec{NP} \sim x \cdot \vec{OM},$$

deci avem

$$\vec{OP'} \sim x \cdot \vec{OP}, \quad \vec{OP'} \sim \vec{OM}' + \vec{ON}' \sim x \cdot \vec{OM} + x \cdot \vec{ON}$$

sau

$$\vec{OP'} \sim x \cdot (\vec{OM} + \vec{ON}) \sim x \cdot \vec{OM} + x \cdot \vec{ON}.$$

Dacă unul din vectorii \vec{u}, \vec{v} este nul, relația (3) este evidentă.

Dacă vectorii \vec{u} și \vec{v} sunt nenuli dar coliniari, există un număr real r astfel

ca $\vec{v} \sim r \cdot \vec{u}$. În acest caz, avem $\vec{u} + \vec{v} \sim (1+r)\vec{u}$, $x \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \sim x(1+r) \cdot \vec{u}$, $x \cdot \vec{u} + x \cdot \vec{v} \sim x \cdot \vec{u} + xr \cdot \vec{u} \sim (x+xr) \cdot \vec{u} = x(1+r) \cdot \vec{u}$, deci și în acest caz, relația (3) este adevărată.

Produsul scalar a doi vectori

Fie \vec{u} și \vec{v} doi vectori. Definim produsul scalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ al acestor vectori prin formula

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \widehat{\vec{u}\vec{v}}, \text{ dacă } \vec{u} \notin \vec{0} \text{ și } \vec{v} \notin \vec{0}. \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= 0, \text{ dacă } \vec{u} \in \vec{0} \text{ sau } \vec{v} \in \vec{0}. \end{aligned}}$$

Din această definiție deducem următoarele proprietăți:

Produsul scalar a doi vectori este simetric, deci $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

Produsul scalar a doi vectori nu se schimbă, dacă înlocuim cei doi vectori prin doi vectori echivalenți lor. Deci $\vec{u}' \sim \vec{u}$ și $\vec{v}' \sim \vec{v}$ implică $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}' \cdot \vec{v}'$.

Produsul scalar a doi vectori este nul fie în cazul în care unul cel puțin din cei doi vectori este nul, fie în cazul în care cei doi vectori sunt nenuli și perpendiculari.

Produsul scalar a doi vectori, care fac un unghi ascuțit, este pozitiv.

Produsul scalar a doi vectori, care fac un unghi obtuz, este negativ.

Unghiul a doi vectori nenuli \vec{u} și \vec{v} poate fi calculat din formula

$$\cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

Din inegalitatea $|\cos \widehat{\vec{u}\vec{v}}| \leq 1$, deducem *inegalitatea lui Schwartz-Cauchy-Buniakowski*:

$$\boxed{|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

Dacă vectorii \vec{u}, \vec{v} sunt nenuli și paraleli sau coliniari, avem $\cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} = \pm 1$.

Mai precis, dacă vectorii \vec{u}, \vec{v} au același sens, atunci $\cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} = 1$ și rezultă $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$. În particular, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$, deci:

Produsul scalar al unui vector cu el însuși este egal cu pătratul normei acelui vector.

Dacă vectorii \vec{u}, \vec{v} sunt de sensuri opuse, avem $\cos \hat{uv} = -1$ și

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|.$$

Dacă vectorii \vec{u}, \vec{v} sunt nenuli, necoliniari și neparalleli, atunci $-1 < \cos \hat{uv} < 1$ și rezultă $|\vec{u} \cdot \vec{v}| < \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$.

Dacă \vec{u} și \vec{v} sunt vectori nenuli și dacă x este un număr pozitiv, atunci unghiul vectorilor \vec{u}, \vec{v} este egal cu unghiul vectorilor $x \cdot \vec{u}, \vec{v}$, deoarece înmulțirea vectorului \vec{u} cu un număr pozitiv dă un vector de același sens cu \vec{u} . Rezultă că, pentru $x > 0$, avem

$$(x \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = x \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos \hat{uv} = x(\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos \hat{uv}) = x(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

Dacă $x < 0$, atunci unghiul vectorilor $x \cdot \vec{u}$ și \vec{v} se reprezintă prin suplementul unghiului vectorilor \vec{u}, \vec{v} , deoarece vectorul $x \cdot \vec{u}$ are sensul opus lui \vec{u} . Rezultă, pentru $x < 0$, $\cos(x\vec{u})\vec{v} = -\cos \hat{uv}$, deci

$$\begin{aligned} (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{v} &= \|x \cdot \vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| (-\cos \hat{uv}) = (-x) \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| (-\cos \hat{uv}) = \\ &= x \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}). \end{aligned}$$

Deci avem, pentru orice doi vectori nenuli și orice număr real nenul x ,

$$(4) \quad (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{v} = x \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

Această relație este evident verificată și în cazul în care unul din vectorii \vec{u}, \vec{v} sau numărul x este nul. Deci formula (4) este generală.

Exercițiil

1. Să se arate că, oricare ar fi punctele O, A, B, C, D într-un plan, avem

$$\begin{aligned} \vec{AB} + \vec{DC} &= \vec{AC} + \vec{DB} \text{ (in } O), \\ \vec{AC} + \vec{BD} &= \vec{AD} + \vec{BC} \text{ (in } O). \end{aligned}$$

2. Se dau punctele A, B, C, D . Să se construiască vectorii $\vec{AC} + \vec{BD} + \vec{CB}$ (în D), $\vec{AC} + \vec{BD} + \vec{CB} + \vec{DA}$ (în A), $\vec{AC} + \vec{BD}$ (în B), $\vec{AD} + \vec{BC}$ (în C).

3. Se dau punctele A, B, C, M astfel ca $\vec{BM} \sim \vec{MC}$. Să se construiască vectorii $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$ (în M), $\vec{AB} + \vec{AC} + 2\vec{MA}$ (în A), $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{MA}$ (în M), $\vec{AC} - \vec{AB} + \vec{CM}$ (în C).

4. Se dau punctele A, B, C, I, J astfel ca $\vec{CI} \sim \vec{AB}, \vec{CJ} \sim \vec{BA}$. Să se arate că punctele C, I, J sunt coliniare.

5. Fie M, N, G mijloacele segmentelor $|AB|, |CD|, |MN|$ dintr-un același plan. Să se arate că, oricare ar fi punctul O din acest plan,

$$\vec{OA} + \vec{OB} \text{ (în } O) = 2\vec{OM}, \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} \text{ (în } O) = 4\vec{OG}.$$

6. Fiind date patru puncte A, B, C, D într-un plan, să se arate că există un punct P astfel că $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD} \in \vec{0}$.

7. Fiind date două puncte A, B să se arate dacă există punctele P, Q, R, S care verifică relațiile

$$\begin{aligned} \vec{PA} + \vec{PB} \text{ (în } A) &= 2\vec{AB}, \vec{QA} - \vec{QB} \text{ (în } A) = -\vec{AB}, \vec{RA} - \vec{RB} \text{ (în } A) = \vec{AB}, \\ 2\vec{SA} - 3\vec{SB} \text{ (în } A) &= \vec{AB}. \end{aligned}$$

În enunțurile următoare, \vec{i}, \vec{j} reprezintă doi versori ortogonali, având originea într-un punct O . Dacă P este un punct în planul vectorilor \vec{i}, \vec{j} , notația $P(x, y)$ va însemna că x și y sunt componentele vectorului de poziție \vec{OP} față de axele având \vec{i} și \vec{j} ca versori, deci $\vec{OP} \sim xi + yj$.

8. Se dau punctele $A(2, 2), B(-3, -1), C(3, -2)$.

a) Notind prin I mijlocul segmentului $|AB|$, să se determine componentele vectorului \vec{OI} față de \vec{i} și \vec{j} .

b) Fie M, N punctele de pe dreapta AB pentru care $\vec{MB} = -4\vec{MA}$ și $\vec{NB} = 4\vec{NA}$. Să se arate că

$$5\vec{OM} = 4\vec{OA} + \vec{OB}, 3\vec{ON} = 4\vec{OA} - \vec{OB}.$$

c) Fie G punctul de pe dreapta CI , pentru care $\vec{GC} = -2\vec{GI}$. Să se arate că $\vec{OG} = \vec{OC} + 2\vec{OI} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$. Să se calculeze componentele vectorului \vec{OG} .

9. Se dau punctele $A(-1, 2), B(3, 1), C(-2, -2)$. Fie I, J punctele care verifică relațiile $3\vec{IA} + 5\vec{IB} \in \vec{0}, 3\vec{JA} - 5\vec{JB} \in \vec{0}$. Să se arate că $8\vec{OI} = 3\vec{OA} + 5\vec{OB}$ și $4\vec{OJ} = 3\vec{OA} - 5\vec{OB}$. Să se determine componentele vectorilor \vec{OI}, \vec{OJ} .

10. Să se calculeze normele vectorilor $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CA}$ și produsele scalare $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, $\vec{BC} \cdot \vec{BA}, \vec{CA} \cdot \vec{CB}$ luând pentru A, B, C punctele definite prin formulele:

- a) $A(0, -2), B(-2, -1), C(2, 2)$
- b) $A(2, 3), B(4, 1), C(-1, 2)$
- c) $A(2, 3), B(-4, 0), C(0, 3)$
- d) $A(8, 0), B(1, -2), C(-3, 4)$

11. Fiind date patru puncte A, B, C, D într-un plan, notăm prin I, J, K, L mijloacele segmentelor $|AB|, |CD|, |AD|, |BC|$.

a) Să se arate că $|IJ|$ și $|KL|$ au același mijloc.

b) Ce fel de patrulater este figura $ILJK$, dacă $ABCD$ este un patrulater?

c) Cum sint punctele I, J, K, L în cazul în care figura $ABCD$ este un patrulater?

d) Să se arate că, oricare ar fi punctele A, B, C, D în planul p , avem $\vec{IL} \sim \vec{KJ}$ și $\vec{IK} \sim \vec{LJ}$.

12. Fie ABC un triunghi echilateral cu laturile de lungime egală cu unitatea. Să se calculeze produsul scalar $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

13. Fie ABC un triunghi echilateral cu laturile de lungime 1 și fie AA' , înălțimea din A a acestui triunghi, $A' \in BC$. Să se calculeze produsele scalare $\vec{AA'} \cdot \vec{AB}, \vec{AA'} \cdot \vec{BA}$.

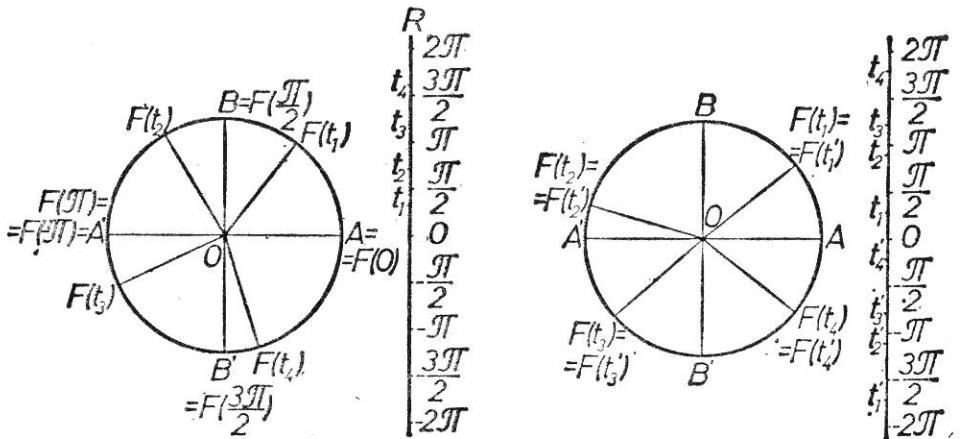


Fig. III.13

Fig. III.14

Dacă t este un număr real arbitrar, există un număr întreg k , astfel încât să avem $t + 2k\pi \in [0, 2\pi]$ și numărul k este determinat în mod unic prin această proprietate.

Dacă t este un număr pozitiv sau nul, să notăm prin k partea întreagă a raportului $t/2\pi$ și prin r diferența $t - 2k\pi$. Vom avea atunci

$$t = 2k\pi + r, \quad r \in [0, 2\pi], \quad k \in \mathbf{Z}, \quad k \geq 0.$$

Dacă t este un număr negativ, considerăm numărul pozitiv $-t$ și scriem acest număr sub forma de mai sus:

$$-t = 2k\pi + r, \quad r \in [0, 2\pi], \quad k \in \mathbf{Z}, \quad k \geq 0.$$

Vom avea atunci

$$t = -2k\pi - r = 2k'\pi + r',$$

unde,

$$k' = -k - 1, \quad r' = 2\pi - r \in (0, 2\pi].$$

Rezultă că orice număr real t poate fi scris sub forma

$$(1) \quad t = 2k\pi + r, \quad k \in \mathbf{Z}, \quad r \in [0, 2\pi].$$

Din condiția 1) rezultă $F(t) = F(r)$.

Exerciții:

1. Să se scrie sub forma (1) numerele 100, 200, ..., 1 000.

2. Fie T , t două numere reale astfel ca $T > 0$. Să se arate că există o singură pereche de numere $k \in \mathbf{Z}$, $r \in [0, T)$ astfel ca să avem

$$t = kT + r.$$

3. Să se arate că funcția $F : \mathbf{R} \rightarrow C$ construită mai sus are următoarele proprietăți:

$$4^{\circ}. \quad F(0) = A, \quad F\left(\frac{\pi}{2}\right) = B, \quad F(\pi) = F(-\pi) = A', \quad F\left(\frac{3\pi}{2}\right) = B'.$$

5. Aplicația F este periodică de perioadă 2π , adică avem $F(t + 2\pi) = F(t)$, pentru orice număr real t și $0 < |t - t'| < 2\pi$ implică $F(t) \neq F(t')$.

3°. Dacă $|t| < \pi$, atunci punctul $M = F(t)$ este astfel înțlit măsura în radiani a unghiului \widehat{MOA} este egală cu $|t|$.

4°. Dacă t, t' sunt două numere reale astfel ca $|t - t'| < \pi$, atunci punctele $M = F(t)$, $M' = F(t')$ sunt astfel înțlit măsura în radiani a unghiului $\widehat{MOM'}$ este egală cu $|t - t'|$, (fig. III.15).

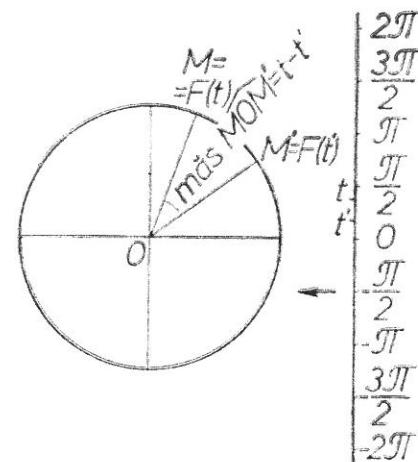


Fig. III.15

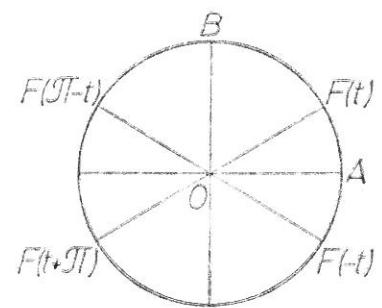


Fig. III.16

5°. Oricare ar fi $t \in \mathbf{R}$, avem:

- punctele $F(t)$, $F(\pi + t)$ sunt simetrice față de punctul O , (fig. III.16).
- punctele $F(t)$, $F(\pi - t)$ sunt simetrice față de dreapta OB .
- punctele $F(t)$, $F(-t)$ sunt simetrice față de dreapta OA .

(Indicație). Pentru a verifica aceste proprietăți, putem presupune că $t \in [0, 2\pi]$, deoarece scăzând din t un multiplu întreg convenabil de 2π , putem ajunge la această situație.

Aplicația F este surjectivă, dar nu este injectivă, deoarece F este o aplicație periodică. Se spune că F constituie *aplicația de acoperire universală* a cercului C ; prin această aplicație, cercul C este acoperit de o infinitate de ori de dreapta reală; dacă J este un interval de lungime mai mică decit 2π , inclus în \mathbf{R} , atunci imaginea lui J prin F este un arc de cerc având aceeași lungime cu J . Deci restricțiile $F|J$ ale aplicației F , la intervalele J , de lungimi mai mici decit 2π , sunt aplicații injective. Se spune că aceste intervale J sunt *intervale de injectivitate* ale aplicației F .

Cu ajutorul aplicației $F : \mathbf{R} \rightarrow C$ vom defini acum funcțiile (fig. III.17)

$$\cos : \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1] \subset \mathbf{R},$$

$$\sin : \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1] \subset \mathbf{R}$$



Fig. III.17

punct

$$(1) \quad \overrightarrow{OF}(t) = \cos t \cdot \vec{a} + \sin t \cdot \vec{b}.$$

D e f i n i t i e. Pentru fiecare număr $t \in \mathbb{R}$, numărul $\cos t$ este abscisa punctului $F(t)$, iar $\sin t$ este ordonata acestui punct.

Din relația $F(t) \in C$ rezultă că avem, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$,

$$(2) \quad \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Proprietățile aplicației F arată că avem

$$(3) \quad \cos 0 = 1, \sin 0 = 0, \cos \frac{\pi}{2} = 0, \sin \frac{\pi}{2} = 1,$$

$$\cos \pi = -1, \sin \pi = 0, \cos \frac{3\pi}{2} = 0, \sin \frac{3\pi}{2} = -1.$$

Proprietatea 1) arată că *funcțiile sinus și cosinus sunt periodice cu perioada 2π* , deci avem, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$.

$$(4) \quad \cos(t + 2\pi) = \cos t, \sin(t + 2\pi) = \sin t.$$

Proprietatea 2) arată că sinusul unui unghi cu vîrfu în punctul O este egal cu sinusul numărului real t , care este egal cu lungimea arcului dat de intersecția interiorului aceluia unghi cu cercul C . O proprietate analoagă se poate arăta pentru funcția cosinus.

Proprietățile de la punctul 5°, pag. 429, pot fi explicitate sub forma:

$$(5) \quad \cos(t + \pi) = -\cos t, \sin(t + \pi) = -\sin t, \text{ (fig. III.18).}$$

$$(6) \quad \cos(\pi - t) = -\cos t, \sin(\pi - t) = \sin t, \text{ (fig. III.19).}$$

$$(7) \quad \cos(-t) = \cos(t), \sin(-t) = -\sin t, \text{ (fig. III.20).}$$

Să mai reținem următoarele consecințe imediate ale definițiilor date:

Mulțimea numerelor $t \in \mathbb{R}$, pentru care $\cos t = -1$, este formată din numerele $\pi + 2k\pi$, unde $k \in \mathbb{Z}$.

Mulțimea numerelor $t \in \mathbb{R}$, pentru care $\cos t = 0$, este formată din numerele $\frac{\pi}{2} + k\pi$, unde $k \in \mathbb{Z}$.

Mulțimea numerelor $t \in \mathbb{R}$, pentru care $\cos t = 1$, este formată din numerele de formă $2k\pi$, unde $k \in \mathbb{Z}$.

Am definit aplicația $F : \mathbb{R} \rightarrow C$ astfel ca, pentru orice $t \in (0, \pi)$, măsura în radiani a unghiului $\widehat{AOF}(t)$ să fie egală cu t . Din felul în care am definit

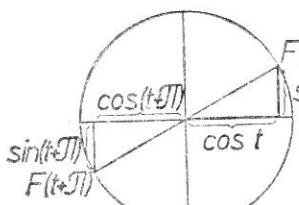


Fig. III.18

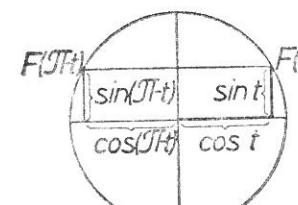


Fig. III.19

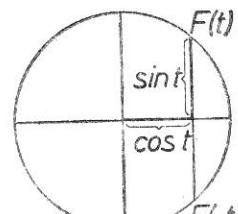


Fig. III.20

funcțiile sinus și cosinus, odată pe mulțimea unghiurilor, și apoi pe dreapta reală, deducem că, pentru $t \in [0, \pi]$, avem

$$\cos \widehat{AOF}(t) = \cos t, \sin \widehat{AOF}(t) = \sin t.$$

Acstea relații permit să calculăm, pe cale geometrică, valorile funcțiilor sinus și cosinus.

De exemplu, dacă avem un triunghi echilateral PQR și dacă notăm prin M mijlocul laturii $|QR|$, atunci triunghiul PQM este dreptunghic, considerind măsurile în radiani ale unghiurilor indicate, avem (fig. III.21)

$$\text{măs } \widehat{PQM} = \frac{\pi}{3}, \text{ măs } \widehat{QPM} = \frac{\pi}{6}.$$

Pe de altă parte, dacă notăm prin a lungimea laturii $|PQ|$, atunci

$$d(P, Q) = a, d(M, P) = \frac{\sqrt{3}}{2}a, d(Q, M) = \frac{1}{2}a,$$

$$\sin \widehat{PQM} = \cos \widehat{QPM} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin \widehat{QPM} = \cos \widehat{PQM} = \frac{1}{2}.$$

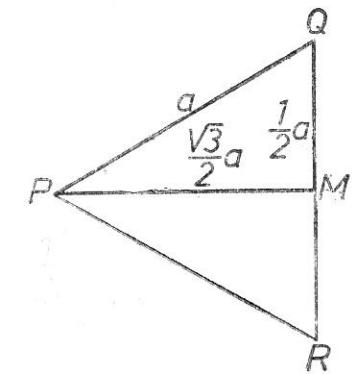


Fig. III.21

Rezultă formulele

$$\cos \frac{\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \cos \frac{\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Să considerăm acum un triunghi dreptunghic isoscel LMN , având unghiul \hat{L} drept și $|LM| \equiv |LN|$. În acest caz (fig. III.22),

$$\text{măs } \widehat{LMN} = \text{măs } \widehat{LN M} = \frac{\pi}{4},$$

$$|MN| \equiv \sqrt{2}|LM| \equiv \sqrt{2}|LN|$$

și deducem

$$\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exercițiu. Să se calculeze valorile funcțiilor sinus și cosinus corespunzătoare valorilor $t = -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}$.

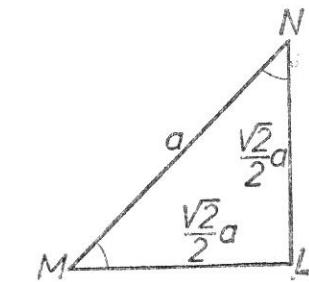


Fig. III.22

Să observăm că, dacă numărul t parcurge axa reală \mathbb{R} de la $-\infty$ la $+\infty$, atunci punctul $F(t)$ descrie cercul C în sensul indicat de săgeată (fig. III.23). Dacă t parcurge semiaxa pozitivă \mathbb{R}_+ , plecind din O , $F(t)$ va merge de la A la B , apoi la A' , la B' , venind din nou în A și repetând acest traseu de o infinitate de ori.

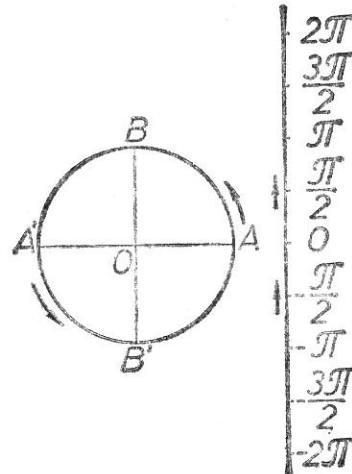


Fig. III.23

Funcția F , deci și funcțiile sinus și cosinus, sunt definite pe \mathbf{R} . Am arătat că $\sin(-t) = -\sin t$, deci *funcția sinus este o funcție impară*. Avem $\cos(-t) = \cos t$, deci *funcția cosinus este o funcție pară*.

Exemple.

$$\begin{aligned}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= -\sin\frac{\pi}{2} = -1, \quad \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \\ \sin(-\pi) &= -\sin\pi = 0, \quad \cos(-\pi) = \cos\pi = -1, \\ \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) &= -\sin\frac{3\pi}{2} = 1, \quad \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0, \\ \sin(-2\pi) &= -\sin(2\pi) = 0, \quad \cos(-2\pi) = \cos(2\pi) = 1.\end{aligned}$$

Periodicitatea funcțiilor sinus și cosinus.

Fie $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție numerică definită pe toată axa reală și fie T un număr pozitiv. Se spune că T este o *perioadă* pentru funcția f dacă avem, pentru orice număr $t \in \mathbf{R}$,

$$f(t + T) = f(t);$$

dacă funcția f admite o perioadă T , se spune că f este o *funcție periodică cu perioada T* .

Am arătat că funcțiile sinus și cosinus sunt funcții periodice de perioadă $T = 2\pi$.

Dacă o funcție f este periodică de perioadă T , atunci f admite ca perioade fiecare multiplu întreg pozitiv de T , deoarece avem

$$f(t) = f(t + T) = f(t + 2T) = \dots = f(t + pT) = \dots, (p \in \mathbf{N}).$$

Dacă știm că o funcție f este periodică de perioadă $T > 0$, se pune problema de a ști dacă nu cumva f admite o perioadă T' , pozitivă, și mai mică decât T , sau dacă f nu admite și alte perioade, în afară de multiplii întregi pozitivi ai perioadei T . Este util să reținem următoarele proprietăți:

1. *Funcțiile sinus și cosinus nu admit nici o perioadă mai mică decât 2π .*

2. *Dacă o funcție f admite o perioadă T , dar nu admite nici o perioadă mai mică decât T , atunci singurele perioade ale funcției f sunt multiplii întregi pozitivi ai perioadei T .*

Demonstrația proprietății 1. Să presupunem că funcția sinus ar admite o perioadă T' , astfel că $0 < T' < 2\pi$. Am avea atunci $\sin(t + T') = \sin t$, pentru orice $t \in \mathbf{R}$; în particular, am avea $\sin T' = \sin 0 = 0$. Dar singurul număr T' , care satisfacă condițiile $0 < T' < 2\pi$, $\sin T' = 0$ este numărul π . Dar π nu este o perioadă pentru funcția sinus, deoarece $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \neq \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -1$. Deci 2π este cea mai mică perioadă a funcției sinus.

Să presupunem că funcția cosinus ar admite o perioadă mai mică decât 2π . Fie T'' o astfel de perioadă. Am avea atunci $0 < T'' < 2\pi$ și $\cos(t + T'') = \cos t$, pentru orice $t \in \mathbf{R}$. În particular, $\cos T'' = \cos 0 = 1$. Dar nu există nici un număr real T'' astfel că $0 < T'' < 2\pi$ și $\cos T'' = 1$. Deci cea mai mică perioadă a funcției cosinus este tot 2π .

Demonstrația proprietății 2. Să presupunem că T este cea mai mică perioadă a funcției f și fie T' o perioadă arbitrară a lui f . Avem atunci

$$f(t) = f(t + pT) = f(t + qT'),$$

oricare ar fi $t \in \mathbf{R}$ și oricare ar fi întregii pozitivi p și q .

Fie m cel mai mare număr întreg pozitiv, pentru care avem $mT < T'$. În acest caz, $T'' = T' - mT$ este un număr pozitiv mai mic decât T . Pentru orice număr real t , vom avea

$$f(t + T'') = f(t + T' - mT) = f(t - mT + T') = f(t - mT)$$

și rezultă

$$f(t) = f(t - mT + mT) = f(t - mT) = f(t + T'),$$

deci T'' este o perioadă a funcției f , dacă $T'' \neq 0$. Dar $T'' < T$ și f nu admite perioade mai mici decât T . Deci avem $T'' = 0$ și $T' = mT$. Deci orice perioadă a funcției f este un multiplu întreg pozitiv al perioadei minime T .

Aplicind ultima proprietate funcțiilor sinus și cosinus, deducem că singurile perioade ale acestor funcții sunt multiplii întregi pozitivi ai numărului 2π .

Dacă o funcție $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ admite o perioadă minimă, se spune că această perioadă este *perioada principală* a funcției f .

Să observăm că dacă o funcție f admite perioada T , atunci avem, pentru orice $t \in \mathbf{R}$,

$$f(t - T) = f(t)$$

deoarece putem scrie $f(t) = f(t - T + T) = f(t - T)$. Avem prin urmare

$$f(t) = f(t \pm T) = f(t \pm 2T) = \dots = f(t \pm pT) = \dots,$$

deci pentru orice întreg n și pentru orice număr real t ,

$$f(t + nT) = f(t) \quad (t \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{Z}).$$

Aplicind această observație funcțiilor sinus și cosinus, putem scrie

$$\sin(t + 2n\pi) = \sin t, \quad \cos(t + 2n\pi) = \cos t.$$

În particular, să reținem formulele:

$$\sin(2n\pi) = 0, \quad \cos(2n\pi) = 1, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Aplicații. 1. Să se determine perioada principală a funcției

$$f : \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1], \quad f(x) = \sin(2x) = \sin 2x.$$

Soluție. Din condiția de periodicitate $f(x + T) = f(x)$ deducem $\sin(2x + 2T) = \sin(2x)$; această condiție trebuie să fie îndeplinită pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Punând $2x = t$, deducem $\sin(t + 2T) = \sin t$; din proprietățile stabilită anterior deducem $2T = 2\pi$, sau $T = \pi$. Deci perioada principală a funcției date este π .

2. *Generalizare.* Să determinăm perioada principală a funcției

$$g : \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1], \quad g(x) = \sin(mx) = \sin mx,$$

unde m este un număr real diferit de zero.

Procedind ca în cazul precedent, obținem condiția $\sin(mx + mT) = \sin(mx)$ sau $\sin(t + mT) = \sin t$, care trebuie să fie verificată pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Cel mai mic număr pozitiv T , care verifică această condiție, este $T = 2\pi/m$.

3. Ne propunem acum să determinăm perioada principală a funcției

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \sin 4x + \cos 6x.$$

Dacă T este o perioadă pentru h , avem

$$\sin(4x + 4T) + \cos(6x + 6T) = \sin 4x + \cos 6x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Lăud $x = 0$ și apoi $x = \frac{\pi}{2}$ obținem ecuațiile

$$\sin 4T + \cos 6T = 1, \quad \sin 4T - \cos 6T = -1,$$

din care rezultă $\sin 4T = 0$ și $\cos 6T = 1$. Cel mai mic număr pozitiv care verifică aceste relații este $T = \pi$. Se verifică că π este într-adevăr o perioadă a funcției h și rezultă că π este perioada principală.

Exerciții

- Să se determine perioadele principale ale următoarelor funcții numerice, definite pe \mathbb{R} :
 $f(x) = \sin 3x + \cos 5x, g(x) = \sin 5x - \sin 7x, h(x) = \cos 10x - \cos 14x.$
- Să se arate că funcția $h(x) = \sin x + \cos(\sqrt{2}x)$ nu este periodică.

Observație importantă. Dacă știm despre o funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ că admite o perioadă T , pentru a studia comportarea funcției f va fi suficient să ne limităm să studiem comportarea funcției f pe un interval oarecare de lungime T , deci pe un interval de forma $[a, a + T]$. Într-adevăr, oricare ar fi numărul t , există un întreg n astfel ca $t - nT$ să aparțină intervalului considerat și, în plus, $f(t) = f(t - nT)$. Dacă de exemplu vrem să determinăm valorile lui t pentru care avem $f(t) = 0$, va fi suficient să găsim valorile care verifică această condiție și care se găsesc în intervalul $[a, a + T]$. Orice altă valoare a lui t , pentru care $f(t) = 0$, se va obține dintr-o din valorile găsite în intervalul considerat, adăugind multiplii întregi ai perioadei T .

În același mod, pentru a obține punctele t în care funcția f are o anumită valoare y , va fi suficient să determinăm punctele cu această proprietate, care aparțin intervalului considerat. În particular, putem atla în acest fel punctele t , pentru care $f(t)$ este o valoare de maxim sau de minim.

Exercițiu. Să se determine valourile lui t pentru care funcția sinus are una din valoările $-1, -\sqrt{3}/2, -1/2, -\sqrt{2}/2, 1/2, \sqrt{2}/2, \sqrt{3}/2, 1, 0$.

3. Formule de reducere la primul cadran

Folosind periodicitatea funcțiilor sinus și cosinus, am redus problema determinării valorilor acestor funcții la aceea a determinării valorilor restricțiilor funcțiilor sinus și cosinus la intervalul $[0, 2\pi]$.

Folosind proprietățile de simetrie ale aplicației $F : \mathbb{R} \rightarrow C$ și ținând seama de faptul că punctul $F(t)$ are coordonatele $(\cos t, \sin t)$, putem reduce mai departe studiul valorilor funcțiilor sinus și cosinus (fig. III. 24) restrințind aceste funcții la intervalul $[0, \frac{\pi}{2}]$; pentru valorile lui t cuprinse în acest interval, punctul $F(t)$ se va găsi în primul cadrant, dacă exceptăm valorile extreme 0 și $\pi/2$, care dau punctele $A(1, 0), B(0, 1)$.

Formula $\overrightarrow{OF}(t + \pi) = -\overrightarrow{OF}(t)$ permite să considerăm numai puncte t din intervalul $[0, \pi]$, care dau puncte $F(t)$ apartinând primejor doar cadrane, dacă exceptăm punctele A, B . Dacă $t \in [\pi, 2\pi]$, putem calcula $\cos t$ și $\sin t$ folosind relațiile

$$\cos t = -\cos(t - \pi), \quad \sin t = -\sin(t - \pi),$$

în care $t - \pi \in [0, \pi]$. Mai departe, dacă avem un număr u din intervalul $[\pi/2, \pi]$, putem calcula numerele $\cos u$ și $\sin u$ din relațiile

$$\cos u = -\cos(\pi - u), \quad \sin u = \sin(\pi - u),$$

în care $\pi - u \in (0, \pi/2)$.

Formulele

$$\cos t = \sin(\pi/2 - t), \quad \sin t = \cos(\pi/2 - t)$$

arată în sfîrșit că, pentru a cunoaște toate valorile funcțiilor sinus și cosinus, este suficient să cunoaștem valorile pe care le iau aceste funcții în punctele intervalului $[0, \pi/4]$. Primele 3 zecimale ale acestor valori se obțin din tabelul de la pag. 71–72, trecind de la radiani la grade sexagesimale.

Aplicații. Din observațiile făcute anterior, deducem formulele

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin \frac{3\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4}, \quad \cos \frac{3\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4},$$

$$\sin \frac{5\pi}{4} = -\sin \frac{\pi}{4}, \quad \cos \frac{5\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4},$$

$$\sin \frac{7\pi}{4} = -\sin \frac{\pi}{4}, \quad \cos \frac{7\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}.$$

4. Reprezentarea grafică a funcției sinus

Să considerăm, într-un plan p , un reper ortonormal (\vec{a}, \vec{b}) , format din vectorii unitari și ortogonali $\vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB}$. Fiecare punct P din planul p

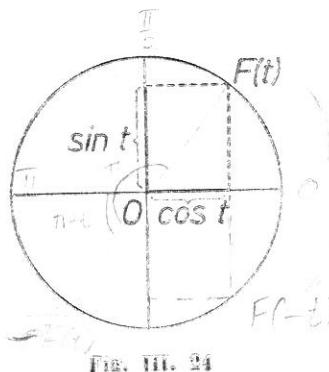
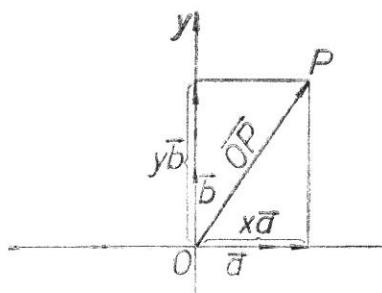


Fig. III. 24



va fi determinat de un cuplu (x, y) de numere reale, astfel ca (fig. III.25)

$$\vec{OP} = \vec{x} + \vec{y}.$$

Ne propunem să trăsăm locul geometric al punctelor P având coordonatele de formă $x = t$, $y = \sin t$; din aceste ecuații deducem $y = \sin x$. Acest loc geometric reprezintă graficul funcției sinus în planul p .

Să împărțim axa OA în intervale de lungimi egale cu 2π și având extremitățile în punctele $M_k (2k\pi, 0)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, (fig. III.26).

Punctele M_k aparțin locului geometric considerat, deci graficului funcției sinus. Funcția sinus fiind periodică de perioadă 2π , graficul acestei funcții este format dintr-o infinitate de arce S_k având extremitățile în cîte două puncte

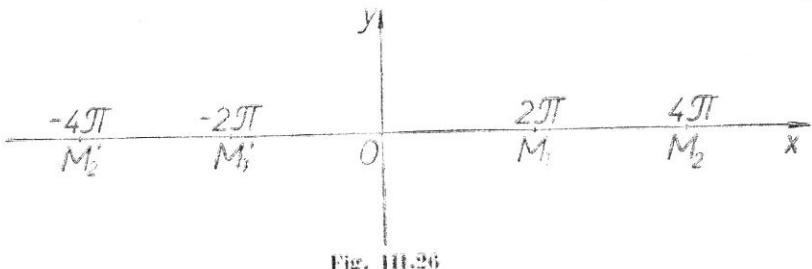


Fig. III.26

consecutivе M_{k-1} , M_k . Arcul S_k constituie reprezentarea grafică a restricției funcției sinus la intervalul $[2(k-1)\pi, 2k\pi]$ și fiecare din arcele S_k se poate obține din arcul S_1 printr-o translație de-a lungul axei OA , anume prin translația

$$y' = y, x' = x + 2(k-1)\pi.$$

Deci arcele S_k sunt congriente două cîte două, în particular, ele sunt congriente cu arcul S_1 .

Această observație arată că este suficient să trăsăm graficul funcției sinus restrinsă la intervalul $[0, 2\pi]$, deci este suficient să trăsăm arcul S_1 .

Cînd x parcurge intervalul $[0, 2\pi]$, numărul $\sin x$ parcurge intervalul $[-1, 1]$ în ambele sensuri, după cum urmează (fig. III.27):

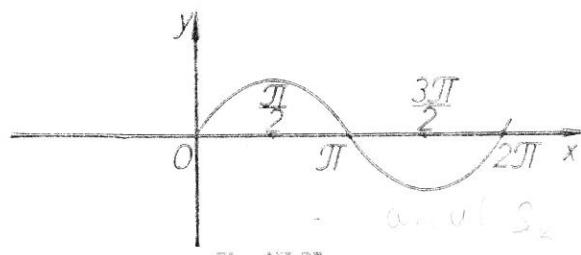


Fig. III.27

Pentru $x = 0$, $\sin x = 0$. Cînd x parcurge subintervalul $[0, \frac{\pi}{2}]$, numărul $\sin x$ parcurge intervalul $[0, 1]$ crescind de la 0 la 1. Pentru $x = \frac{\pi}{2}$, $\sin x$ are valoarea maximă 1. Cînd x trece în intervalul $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ funcția sinus devine descreșătoare, numărul $\sin x$ coborind de la valoarea maximă 1 la valoarea 0. În intervalul următor $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$, funcția sinus continuă să descrească, valorile ei coborind de la 0 la -1, care este valoarea minimă pe care poate să o ia funcția sinus. De la această valoare minimă, numărul $\sin x$ începe să crească din nou, mergind de la -1 la 0, ajungind la 0 pentru $x = 2\pi$.

Figura III.28 reprezintă graficul funcției sinus prelungită în afara intervalului $[0, 2\pi]$. Ne putem imagina acum forma întregului grafic.

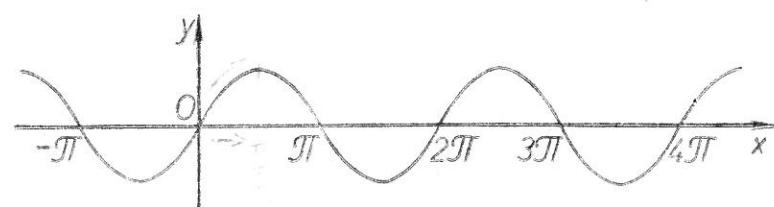


Fig. III.28

Intervale de monotonie. Din indicațiile date, rezultă că funcția sinus este strict crescătoare pe fiecare interval de formă $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$, unde $k \in \mathbb{Z}$. Din contrară, funcția sinus este strict descreșătoare pe fiecare interval de formă $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$.

Aplicație. Să se afle semnul diferenței $\sin \frac{\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{11}$.

Se observă că $\frac{\pi}{11} < \frac{\pi}{9}$ și că numerele $\frac{\pi}{11}$, $\frac{\pi}{9}$ aparțin intervalului $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, pe care funcția sinus este crescătoare. Avem deci $\sin \frac{\pi}{11} < \sin \frac{\pi}{9}$ și $\sin \frac{\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{11} > 0$.

Semnul funcției sinus

Din observațiile făcute, deducem că funcția sinus este pozitivă pe fiecare interval deschis $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$, unde $k \in \mathbb{Z}$, și că aceeași funcție este negativă pe fiecare interval deschis $(\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi)$.

Apli c a t i e. Să se afle semnul expresiei

$$E = \sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{11\pi}{9} \sin \left(-\frac{8\pi}{7} \right) \sin \frac{23\pi}{7} \sin 3 \sin 5.$$

Soluție. Avem $\frac{\pi}{9} \in (0, \pi)$, deci $\sin \frac{\pi}{9} > 0$; $\frac{11\pi}{9} \in (\pi, 2\pi)$, $\sin \frac{11\pi}{9} < 0$, $\sin \left(-\frac{8\pi}{7} \right) = -\sin \frac{8\pi}{7}$, $\frac{8\pi}{7} \in (\pi, 2\pi)$, $\sin \frac{8\pi}{7} < 0$; $\frac{23\pi}{7} \in (3\pi, 4\pi)$, $\sin \frac{23\pi}{7} < 0$; $3 \in (0, \pi)$, $\sin 3 > 0$; $5 \in (\pi, 2\pi)$, $\sin 5 < 0$.

Rezultă $E < 0$.

Apli c a t i e. Să se reprezinte grafic funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow [-2, 2]$, $f(x) = -2 \sin x$.

Soluție. Funcția f are aceeași perioadă și aceleași intervale de monotonie ca funcția sinus. Graficul lui f se obține din graficul funcției sinus printr-o dilatăre în lungul axei OB . Graficul funcției f intersectează axa OA în punctele $M_k (k\pi, 0)$ și are punctele de maxim $L_k \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2 \right)$ și punctele de minim $L'_k \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -2 \right)$, unde $k \in \mathbf{Z}$. Graficul funcției f este reprezentat în figura III.29.

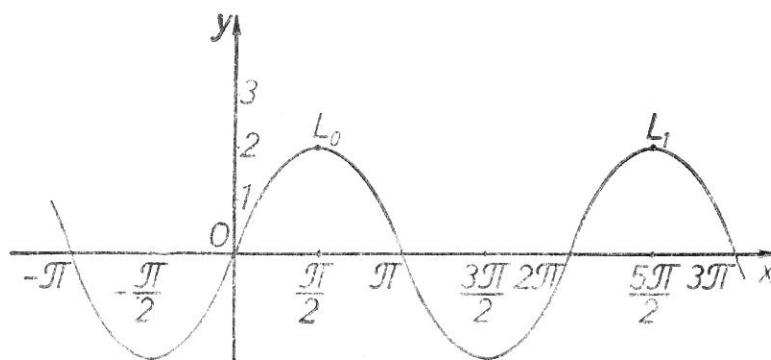


Fig. III.29

Apli c a t i e. Să se reprezinte grafic funcția $g: \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1]$, $g(x) = \sin 2x$.

Soluție. Funcția g este periodică de perioadă π . Dacă $(x, y = \sin 2x)$ este un punct al graficului funcției g , atunci punctul $(2x, \sin 2x)$ va fi un punct al graficului funcției sinus. Deci graficul funcției g se obține din graficul funcției sinus efectuind o contracție de-a lungul axei OA . Graficul funcției g intersectează axa OA în punctele $P_k \left(\frac{k\pi}{2}, 0 \right)$, unde $k \in \mathbf{Z}$. Valoarea maximă a funcției g este 1 și este atinsă în punctele de abscise $\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, iar valoarea

minimă este atinsă în punctele de abscise $-\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

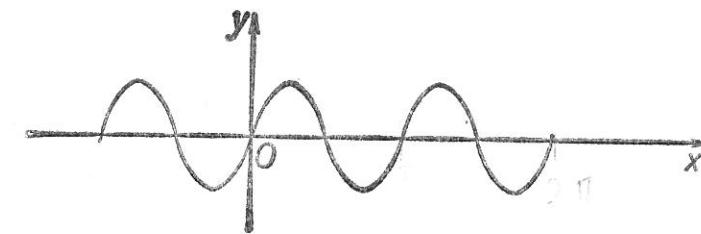


Fig. III.30

minimă este atinsă în punctele de abscise $-\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Reprezentarea grafică a funcției g este dată în figura III.30.

5. Reprezentarea grafică a funcției cosinus

Pentru orice număr real x avem $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$. Rezultă că, din orice punct $(x, y = \cos x)$ al graficului funcției cosinus, se obține un punct al graficului funcției sinus, făcind o translație de-a lungul axei OA , punind $x' = x + \frac{\pi}{2}$, $y' = y$. Într-adevăr, dacă $y' = \sin x'$, atunci $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$. Deci putem obține graficul funcției cosinus, considerînd graficul funcției sinus și mutînd axa OB , paralel cu ea însăși, din punctul $O(0, 0)$ în punctul $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Figura III.31 reprezintă graficul funcției cosinus.

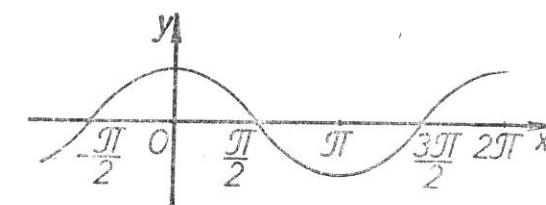


Fig. III.31

Acest grafic intersectează axa OA în punctele $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; punctele de maxim au coordonatele $(2k\pi, 1)$, $k \in \mathbf{Z}$, iar punctele de minim au coordonatele $(2k\pi + \pi, -1)$.

Funcția cosinus este strict crescătoare pe fiecare interval de forma $[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbf{Z}$, și este strict descrescătoare pe fiecare interval de forma $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbf{Z}$.

Apli c a t i e. Să se stabilească semnele expresiilor

$$E_1 = \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{5}, \quad E_3 = \cos \frac{9\pi}{7} - \cos \frac{8\pi}{7}.$$

Soluție. Avem $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5} \in (0, \pi)$ și $\frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{4}$. Funcția cosinus fiind descerșătoare pe intervalul $(0, \pi)$, avem $E_1 < 0$.

Pentru a doua expresie, observăm că $\frac{8\pi}{7} < \frac{9\pi}{7} \in (\pi, 2\pi)$; pe acest interval, funcția cosinus este crescătoare, deci $E_2 > 0$.

Semnul funcției cosinus. Din reprezentarea grafică a funcției cosinus rezultă că această funcție este pozitivă pe orice interval deschis de forma $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ și că aceeași funcție este negativă pe fiecare interval de forma $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercițiu. Să se afle semnul numărului $\cos 1234^\circ$.

6. Formule de adunare și scădere

Fie u și v două unghiuri ascuțite, astfel ca suma $u + v$ să fie reprezentată de asemenea prin unghiuri ascuțite. Să construim, într-un plan p , trei semidrepte h, k, m , cu aceeași origine, astfel ca acestea să formeze unghiurile

adiacente $\widehat{hk} = u$ și $\widehat{km} = v$. În acest caz, unghiurile $\widehat{hk}, \widehat{km}, \widehat{hm}$ vor fi unghiuri ascuțite și semidreapta k va fi interioară unghiului \widehat{hm} , (fig. III.32).

Să alegem un punct arbitrar $B \in m$ și să construim punctele $C \in k$, $B' \in h$, $C' \in h$ astfel ca

$$(1) \quad BC \perp OC, CC' \perp OC', BB' \perp OB'.$$

Dreapta BC intersectează semidreapta h într-un punct D , astfel încât:

$$(2) \quad B' \in |OD|, B' \in |OC'|, C' \in |B'D|.$$

Aplicând de mai multe ori teorema proiecției, obținem relațiile

$$(3) \quad |OB'| = |OB| \cos \widehat{hm} = |OB| \cos(u + v),$$

$$(4) \quad |OC| = |OB| \cos \widehat{km} = |OB| \cos v,$$

$$(5) \quad |OC'| = |OC| \cos \widehat{hk} = |OB| \cos u,$$

$$(6) \quad |B'C'| = |BC| \cos \widehat{BDB'}, |BC| = |OB| \cos \widehat{OB'C}|$$

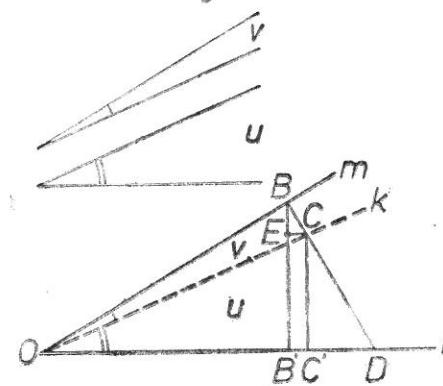


Fig. III.32

Din triunghiurile dreptunghice OCD și OBC rezultă

$$\cos \widehat{BDB'} = \cos \widehat{BDO} = \sin \widehat{COD} = \sin u,$$

$$\cos \widehat{OBC} = \sin \widehat{COB} = \sin v,$$

astfel încit formulele (6) pot fi scrise sub formă

$$(7) \quad |B'C'| = |BC| \sin u = |OB| \sin v \sin u.$$

Din relațiile de ordonare (2) rezultă formula

$$|OC'| = |OB'| + |B'C'|$$

iar egalitățile (3), (5) și (7) dau

$$(8) \quad |OB| \cos u \cos v = |OB| \cos(u + v) + |OB| \sin u \sin v.$$

Avem deci egalitatea $\cos u \cos v = \cos(u + v) + \sin u \sin v$ sau

$$(9) \quad \boxed{\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v.}$$

Demonstrația că ne-a condus la relația (9) este valabilă ori de cîte ori unghiurile u, v și $u + v$ sunt ascuțite.

Dacă unghiurile u și v sunt ascuțite,

dar unghiul $u + v$ este obtuz, deci dacă avem situația din figura III.33, atunci vom avea $O \in |B'C'|$ și, notind prin w unghiul \widehat{BOD} , care este suplementul unghiului $\widehat{hm} = \widehat{BOD}$, avem

$$(10) \quad O \in |B'C'|,$$

$$\cos w = -\cos(u + v).$$

Aplicind din nou, de mai multe ori teorema proiecției, vom avea

$$|OB'| = |OB| \cos w, |OC'| = |OC| \cos u = |OB| \cos v \cos u,$$

$$|B'C'| = |BC| \cos \widehat{BDB'} = |OB| \sin v \sin u$$

și rezultă egalitatea

$$|OB| \sin u \sin v = |OB'| + |OC'| = |OB| (\cos w + \cos u \cos v)$$

sau

$$\sin u \sin v = \cos w + \cos u \cos v.$$

Amen deci

$$\cos(u + v) = -\cos w = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

și rezultă că egalitatea (9) este adevarată și în cazul în care u și v sunt unghiuri ascuțite, iar $u + v$ este unghi obtuz.

Dacă $u + v$ este un unghi drept, atunci $\cos(u + v) = 0$, $\cos u = \sin v$ și $\cos v = \sin u$, astfel încit egalitatea (9) rămîne adevarată.

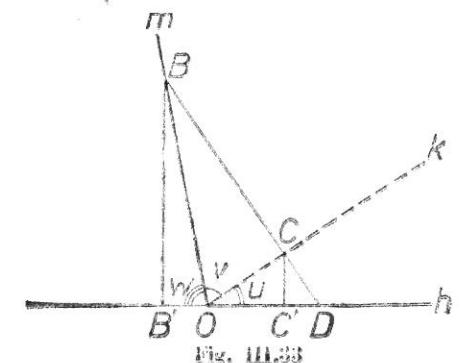
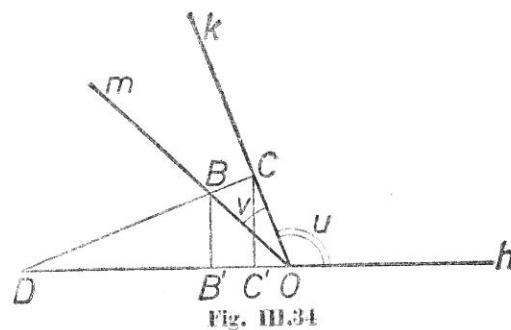


Fig. III.33



Formula (9) este adevărată ori de câte ori u și v sunt unghiuri astfel încât suma $u + v$ este definită. Dacă $u + v$ este un unghi alungit, atunci unghiurile u și v sunt suplementare și avem

$$\cos u = -\cos v, \sin u = \sin v, \cos(u + v) = -1$$

astfel încât formula (9) este de asemenea adevărată.

Formula (9) permite calculul cosinusului sumei a două unghiuri, cunoscind sinusurile și cosinusurile celor două unghiuri.

Ne propunem să stabilim o formulă analoagă pentru sinusul sumei a două unghiuri.

Vom considera separat fiecare din cazurile pe care le-am distins anterior pentru calculul cosinusului sumei $u + v$.

În cazul figurii III.32, deci în cazul în care unghiurile u , v și $u + v$ sunt ascuțite, avem

$$|BB'| \equiv |OB| \sin(u + v), |CC'| \equiv |OC| \sin u \equiv |OB| \cos v \sin u, \\ |BC| \equiv |OB| \sin v.$$

Dacă notăm prin E proiecția ortogonală a punctului C pe dreapta BB' , vom avea $E \in |BB'|$ și

$$|BE| \equiv |CC'|, |BB'| \equiv |BE| + |B'E|, |BE| \equiv |BC| \cos \widehat{CBE} \equiv \\ \equiv |BC| \cos u.$$

Rezultă formula

$$|OB| \sin(u + v) = |CC'| + |BE| = |OB| \sin u \cos v + |OB| \sin v \cos u \\ și avem deci$$

$$(12) \quad \boxed{\sin(u + v) = \sin u \cos v + \sin v \cos u}$$

Exercițiu. Să se demonstreze egalitatea (12) în cazurile în care unghiul u sau unghiul v este ascuțit și în cazul în care unghiurile u , v sunt suplementare.

Formula (12) este valabilă pentru orice unghiuri u și v , pentru care suma este definită, și permite calculul sinusului sumei $u + v$ în funcție de sinusurile și cosinusurile unghiurilor u și v .

Să reținem deci formulele

$$\begin{aligned} \cos(u + v) &= \cos u \cos v - \sin u \sin v, \\ \sin(u + v) &= \sin u \cos v + \cos u \sin v. \end{aligned}$$

adevărate pentru orice două unghiuri u și v , pentru care suma $u + v$ este definită.

Aplicații. Am arătat că

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Rezultă, folosind formulele scrise mai sus,

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ &= \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 75^\circ &= \cos(30^\circ + 45^\circ) = \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{3}\sqrt{2} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

Pentru a da o altă aplicație, să observăm că din formula (9) rezultă, dacă presupunem $v = u$ = unghi ascuțit,

$$\cos 2u = \cos u \cos u - \sin u \sin u = \cos^2 u - \sin^2 u = 2\cos^2 u - 1.$$

Din ultima egalitate deducem formula $(\sin u + \cos u)^2 = 1$

$$(14) \quad \cos u = \sqrt{\frac{1 + \cos 2u}{2}}, \quad \left(u \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Am ținut seama de faptul că, unghiul u fiind ascuțit, cosinusul său trebuie să fie pozitiv.

Să presupunem în ultima formulă că u este un unghi de 45° , deci că $2u$ este un unghi de 90° . În acest caz, vom avea $\cos 2u = \frac{\sqrt{2}}{2}$ și formula (14) dă

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Exerciții

1. Să se calculeze $\sin 45^\circ$.

$$\text{R. } \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}.$$

2. Să se calculeze $\cos(22^\circ 30')$ și $\sin(22^\circ 30')$, apoi $\cos 7^\circ 30'$, $\sin 7^\circ 30'$.

Fie a și b două numere reale. Știm că există două numere întregi m și n astfel ca numerele $a' = a - 2m\pi$, $b' = b - 2n\pi$ să aparțină intervalului $[0, 2\pi)$, deci astfel ca să avem

$$(1) \quad a = a' + 2m\pi, \quad 0 \leq a' < 2\pi, \quad b = b' + 2n\pi, \quad 0 \leq b' < 2\pi.$$

De exemplu, dacă a este un număr pozitiv, împărțim numărul a la 2π și notăm cu m partea întreagă a cîtu lui, iar prin a' restul. Dacă a este un număr negativ, $-a$ va fi pozitiv și avem o relație de forma $-a = a^* + 2h\pi$, unde $0 \leq a^* < 2\pi$ și $h \in \mathbb{Z}$, $h \geq 0$. Vom putea scrie atunci, dacă $a^* > 0$,

$$a = -a^* - 2h\pi = (2\pi - a^*) + 2m\pi, m = -h - 1.$$

Deci relațiile (4) pot fi într-adevăr realizate.

Fiecare din numerele a' , b' se va găsi într-unul din intervalele $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$. Aceasta înseamnă că există numere naturale p și q , cel mult egale cu 3, astfel ca să avem

$$(2) \quad a' = a' - p \frac{\pi}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]; \quad b' = b' - q \frac{\pi}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Din formulele (4) rezultă că avem

$$(3) \quad \cos a = \cos a', \sin a = \sin a', \cos b = \cos b', \sin b = \sin b',$$

$$(4) \quad \cos(a + b) = \cos(a' + b'), \sin(a + b) = \sin(a' + b').$$

Dacă în formulele (2) avem $p = q = 0$, atunci există unghiuri ascuțite u și v , astfel ca măsurile în radiani ale unghiurilor u , v , $u + v$ să fie egale cu numerele a' , b' , $a' + b'$. Avem atunci

$$(5) \quad \cos a' = \cos u, \sin a' = \sin u, \cos b' = \cos v, \sin b' = \sin v,$$

$$(6) \quad \cos(a' + b') = \cos(u + v), \sin(a' + b') = \sin(u + v).$$

Din formulele (3) – (6) și din formulele cunoscute pentru unghiuri deducem egalitățile

$$(7) \quad \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

$$(8) \quad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

În cazul general, vom avea formulele analoage pentru a'' și b'' , deoarece aceste numere aparțin intervalului $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; deci putem scrie

$$(9) \quad \cos(a'' + b'') = \cos a'' \cos b'' - \sin a'' \sin b'',$$

$$(10) \quad \sin(a'' + b'') = \sin a'' \cos b'' + \cos a'' \sin b''.$$

Pentru a arăta că formulele (7) și (8) sunt generale, deci că sunt adevărate pentru orice valori date variabilelor a și b , este suficient să arătăm că:

Dacă formulele (7) și (8) sunt verificate de numerele a și b , atunci ele vor fi verificate și de numerele $a' = a + \frac{\pi}{2}$ și b .

Demonstrație. Ne vom sprijini pe identitățile generale

$$\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t, \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin t$$

Avem, ținând seama de aceste identități și de formulele (7) și (8),

$$\begin{aligned} \cos(a' + b) &= \cos\left(a + b + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(a + b) = -\sin a \cos b - \cos a \sin b = \\ &= \cos a' \cos b - \sin a' \sin b, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(a' + b) &= \sin\left(a + b + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b = \\ &= \sin a' \cos b + \cos a' \sin b. \end{aligned}$$

Rezultă că formulele (7) și (8) sunt verificate și de numerele a' și b . Repetând raionamentul, vom arăta că aceste formule sunt verificate de fiecare din perechile de numere

$$\begin{aligned} &(a'', b''), \left(a'' + \frac{\pi}{2}, b''\right), \left(a'' + 2\frac{\pi}{2}, b''\right), \left(a'' + 3\frac{\pi}{2}, b''\right), \\ &\left(a'', b'' + \frac{\pi}{2}\right), \left(a'' + \frac{\pi}{2}, b'' + \frac{\pi}{2}\right), \left(a'' + \pi, b'' + \frac{\pi}{2}\right), \left(a'' + 3\frac{\pi}{2}, b'' + \frac{\pi}{2}\right), \\ &\left(a'', b'' + \pi\right), \left(a'' + \frac{\pi}{2}, b'' + \pi\right), \left(a'' + \pi, b'' + \pi\right), \left(a'' + 3\frac{\pi}{2}, b'' + \pi\right), \\ &\left(a'', b'' + \frac{3\pi}{2}\right), \left(a'' + \frac{\pi}{2}, b'' + \frac{3\pi}{2}\right), \left(a'' + \pi, b'' + \frac{3\pi}{2}\right), \left(a'' + \frac{3\pi}{2}, b'' + \frac{3\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

În rezumat, putem enunța următorul rezultat fundamental:
Oricare ar fi numerele reale a și b , avem

(11)	$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$
(12)	$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$

Dacă în aceste identități punem $b = -b'$, obținem identitățile:

$$(13) \quad \sin(a - b') = \sin a \cos b' - \cos a \sin b',$$

$$(14) \quad \cos(a - b') = \cos a \cos b' + \sin a \sin b'.$$

Acstea formule permit să se calculeze sinusurile și cosinusurile sumei și diferenței a două unghiuri, cunoșind sinusurile și cosinusurile celor două unghiuri.

Aplicări i. 1. Să se arate ce devin formulele precedente, cind luăm:

$$a = 0, \quad a = \frac{\pi}{2}, \quad a = \pi, \quad a = 2\pi$$

sau

$$b' = 0, \quad b' = \frac{\pi}{2}, \quad b' = \pi, \quad b' = 2\pi.$$

Soluție. Se obțin formulele cunoscute

$$\sin(-v) = -\sin v, \quad \cos(-v) = \cos v, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm v\right) = \cos v,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm v\right) = \mp \sin v, \quad \sin(\pi \pm v) = \mp \sin v, \quad \cos(\pi \pm v) = -\cos v,$$

$$\sin(2\pi \pm v) = \pm \sin v, \quad \cos(2\pi \pm v) = \cos v,$$

$$\sin\left(u - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos u, \quad \cos\left(u - \frac{\pi}{2}\right) = \sin u,$$

$$\sin(u + \pi) = -\sin u, \quad \cos(u + \pi) = -\cos u,$$

$$\sin(u - 2\pi) = \sin u, \quad \cos(u - 2\pi) = \cos u.$$

2. Să se calculeze $\sin \frac{\pi}{12}$, $\cos \frac{\pi}{12}$, $\sin \frac{7\pi}{12}$ și $\cos \frac{7\pi}{12}$.

Soluție. Avem $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$, deci $\sin \frac{\pi}{12} =$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

$$\sin \frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

$$\cos \frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$$

3. Să se arate că $\sin(u+v) \cos u - \cos(u+v) \sin u = \sin v$ și $\cos(u+v) \cos u + \sin(u+v) \sin u = \cos v$.

Soluție. Avem $v = (u+v) - u$, $\sin v = \sin(u+v) - \sin u$. Aplicând formula (13), se obține prima relație. A doua relație se va obține aplicând formula (14).

7. Funcțiile tangentă și cotangentă

Funcția tangentă. Să notăm prin M mulțimea numerelor reale de forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$, unde $k \in \mathbb{Z}$. Pentru fiecare număr $x \notin M$, dreapta $OF(x)$ intersectează dreapta D , trecind prin punctul $A(1, 0)$ și paralelă la OB , într-un punct T' (fig. III.35; 36) care are coordonatele de formă $(1, u)$. Punctul T depinde de x , deci u este o funcție de x . Această funcție este definită pe mulțimea $\mathbb{R} - M$ și are valori în \mathbb{R} . Se scrie $u = \operatorname{tg} x$ și se spune că aplicația $x \rightarrow u$ este *funcția tangentă*. Avem deci

$$\operatorname{tg} : \mathbb{R} - M \rightarrow \mathbb{R}, \quad M = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

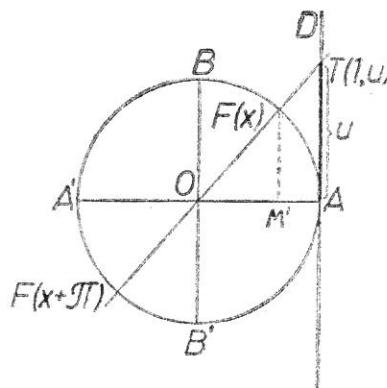


Fig. III.35

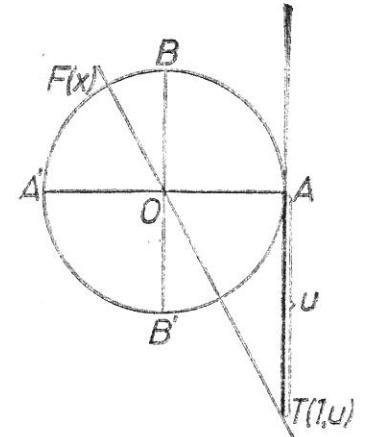


Fig. III.36

Funcția tangentă are valori pozitive cind punctul $F(x) \in C$ se găsește fie în cadranul I, fie în cadranul III, deci $\operatorname{tg} x$ este un număr pozitiv dacă $\sin x$ și $\cos x$ au același semn. Funcția tangentă are valori negative pentru acel $x \in \mathbb{R} - M$, pentru care punctul $F(x)$ se găsește în unul din cadrele II sau IV, deci cind $\sin x$ și $\cos x$ au semne contrare.

Din triunghiurile asemenea OAT și $OM'M$, unde $M = F(x)$ și $M'(\cos x, 0)$ este proiecția lui M pe axa OA , deducem, ținând seama că $d(O, A) = 1$, (fig. III.35)

(1)

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Formula (1) arată cum se exprimă funcția tangentă cu ajutorul funcțiilor sinus și cosinus. Observăm că valoarea lui x , în care se anulează numitorul fracției $\frac{\sin x}{\cos x}$, sunt toate elementele mulțimii M , care a fost exclusă din definiția funcției tangentă.

Să notăm prin N mulțimea formată din punctele x , în care se anulează funcția sinus. Putem defini *funcția cotangentă*

$$\operatorname{ctg} : \mathbb{R} - N \rightarrow \mathbb{R}, \quad N = \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$$

punind

(2)

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Această funcție ia valori pozitive cind $\sin x$ și $\cos x$ au același semn și ia valori negative, cind $\sin x$ și $\cos x$ au semne contrare. Deci numerele $\operatorname{tg} x$ și $\operatorname{ctg} x$ au același semn, pentru orice $x \in \mathbb{R} - (M \cup N)$.

Interpretarea geometrică a funcției cotangentă, analoagă celei date pentru funcția tangentă, se poate obține considerind punctul de intersecție T'

al dreptei OM , $M = F(x)$, cu paralela dusă prin punctul $B(0, 1)$ la axa Ox . În acest caz, numărul $\operatorname{ctg} x$ este egal cu abscisa punctului T' , (fig. III.37; 38).

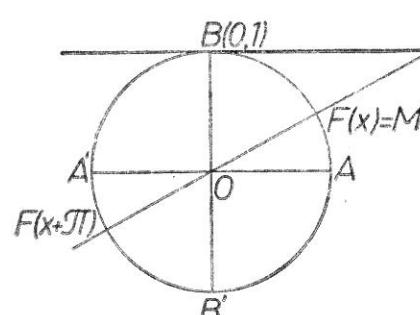


Fig. III.37

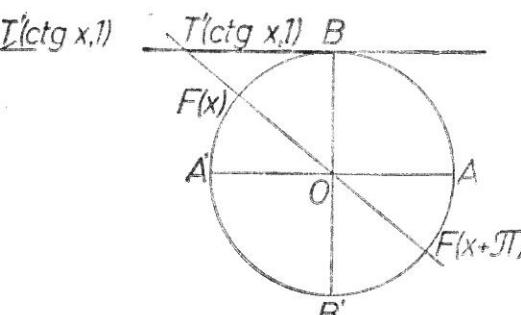


Fig. III.38

Domeniul de definiție al funcției tangentă este egal cu reuniunea intervalelor $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$. Notind prin I_k intervalul $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, observăm că funcția tg crește de la $-\infty$ la $+\infty$, pe intervalul I_k .

Funcția tangentă se anulează în punctele, în care se anulează funcția sinus, deci în punctele multimii N .

Funcția cotangentă are ca domeniu de definiție reuniunea intervalelor $J_k = (k\pi, k\pi + \pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Pe fiecare interval J_k , funcția cotangentă descrește de la $+\infty$ la $-\infty$. Funcția cotangentă se anulează în punctele în care se anulează funcția cosinus, deci în punctele multimii M .

Reținem că funcțiile tangentă și cotangentă sunt astfel încât fiecare dintre ele se anulează pe multimea, pe care cealaltă funcție nu este definită.

În punctele în care ambele funcții, tangentă și cotangentă, sunt simultan definite, aceste funcții sunt legate prin relația

$$(3) \quad \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 1, \quad x \in \mathbb{R} - (M \cup N).$$

Din formulele (1) și (2) rezultă că fiecare din funcțiile tangentă și cotangentă este o funcție periodică, ce admite perioada 2π . Dar, pentru aceste funcții, 2π nu este perioada minimă. Într-adevăr, din relațiile

$$\sin(x + \pi) = -\sin x, \quad \cos(x + \pi) = -\cos x$$

rezultă că avem $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$ pentru orice $x \in \mathbb{R} - M$ și $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$, pentru orice $x \in \mathbb{R} - N$. Deci funcțiile tg și ctg admit numărul π drept perioadă.

Se pune problema de a decide dacă există perioade mai mici decât π pentru funcțiile tg și ctg . Dacă T este o perioadă a funcției tg , trebuie să avem $\operatorname{tg}(x + T) = \operatorname{tg} x$, pentru orice $x \in \mathbb{R} - M$; în particular, $\operatorname{tg} T = \operatorname{tg} 0 = 0$. Deci T trebuie să fie un multiplu întreg de π . Rezultă că perioada minimă a funcției tangentă este π .

Fie T o perioadă a funcției cotangentă. Va trebui să avem $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x + T)$, pentru orice $x \in \mathbb{R} - N$. În particular, $\operatorname{ctg}\left(T + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = 0$. Rezultă că T trebuie căutat printre numerele de forma $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Deci perioada minimă a funcției cotangentă este tot π .

Să observăm că, din moment ce funcția tangentă este crescătoare pe fiecare interval I_k , a cărui lungime este π , nu este posibil ca această funcție să admită perioade mai mici decât π . Aceeași observație este valabilă pentru funcția cotangentă.

Din proprietățile de periodicitate ale funcțiilor tg și ctg rezultă că graficele acestor funcții se obțin din graficele restricțiilor lor la intervalele I_k , respectiv J_k , prin translații de-a lungul axei Ox , de mărimi egale cu multiplii intregi de π . Figurile III.39 și III.40 dau reprezentările grafice ale funcțiilor tangentă și cotangentă.

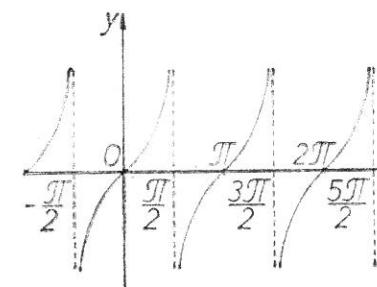


Fig. III.39

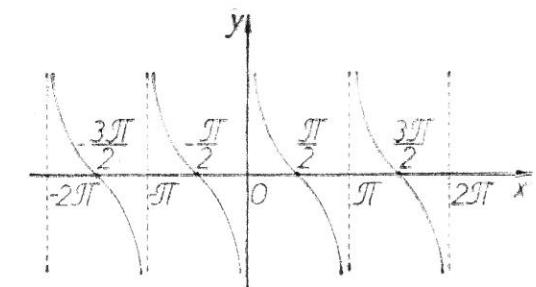


Fig. III.40

Se observă că funcția tangentă ia fiecare valoare reală y de o infinitate de ori, anume o dată în fiecare din intervalele I_k . De asemenea, funcția cotangentă ia orice valoare reală y , o dată în fiecare din intervalele J_k .

De asemenea, se poate observa că fiecare dreaptă d , definită de o ecuație de formă $y = mx + n$, intersectează graficul funcției tangentă într-o infinitate de puncte $P_{k,h}(x_h, y_h)$, unde $x_h \in I_k$. Punctele P_h reprezintă soluțiile sistemului de ecuații

$$y = mx + n, \quad y = \operatorname{tg} x$$

iar numerele x_h sunt soluțiile ecuației

(4)

Deci:

Ecuția (4) admite o infinitate de soluții x_h , $k \in \mathbb{Z}$, fiecare din aceste soluții fiind situată în intervalul $I_k = \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$.

Exercițiu. Fiind date numerele reale m și n , să se precizeze numărul soluțiilor ecuației $\operatorname{ctg} x = mx + n$.

Convenție generală. Ori de câte ori vom considera o expresie în care apar funcțiile tangentă și cotangentă, sau amândouă aceste funcții, sau în care apar fracții ce conțin funcțiile sinus, cosinus, tangentă și cotangentă, aplicate la una sau mai multe variabile, vom presupune că sunt excluse din considerații

acele valori ale variabilelor, pentru care expresia nu are sens. În fiecare caz, elevii vor examina și vor determina multimea valorilor ce trebuie excluse.

Ne propunem să exprimăm numărul $\operatorname{tg}(u+v)$ cu ajutorul numerelor $\operatorname{tg} u$ și $\operatorname{tg} v$. Avem, folosind formulele cunoscute,

$$\operatorname{tg}(u+v) = \frac{\sin(u+v)}{\cos(u+v)} = \frac{\sin u \cos v + \cos u \sin v}{\cos u \cos v - \sin u \sin v}.$$

Impărțind numărătorul și numitorul ultimei fracții prin $\cos u \cos v$ respectiv prin $\sin u \sin v$, obținem formulele

$$\operatorname{tg}(u+v) = \frac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v}{1 - \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v} = \frac{\operatorname{ctg} v + \operatorname{ctg} u}{\operatorname{ctg} u \operatorname{ctg} v - 1}$$

Procedind în mod analog, obținem formulele

$$\operatorname{tg}(u-v) = \frac{\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} v}{1 + \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v} = \frac{\operatorname{ctg} v - \operatorname{ctg} u}{\operatorname{ctg} u \operatorname{ctg} v + 1}$$

$$\operatorname{ctg}(u+v) = \frac{\operatorname{ctg} u \operatorname{ctg} v - 1}{\operatorname{ctg} u + \operatorname{ctg} v} = \frac{1 - \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v}{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v}$$

$$\operatorname{ctg}(u-v) = \frac{\operatorname{ctg} u \operatorname{ctg} v + 1}{\operatorname{ctg} v - \operatorname{ctg} u} = \frac{1 + \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v}{\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} v}$$

Aplicații. 1. Să se arate că

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x, \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x,$$

Soluție. Se aplică formula care dă $\operatorname{tg}(u-v)$ în funcție de $\operatorname{ctg} u$ și $\operatorname{ctg} v$, apoi formula care dă $\operatorname{ctg}(u-v)$ în funcție de $\operatorname{ctg} u$ și $\operatorname{ctg} v$.

2. Să se calculeze $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$.

Soluție. Observând că $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, obținem

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

Folosind valorile deduse anterior pentru anumite arce, putem întocmi următorul tabel de valori ale funcțiilor tangentă și cotangentă

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg} x$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	
$\operatorname{ctg} x$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Valerile alese pentru x dă puncte $F(x)$ în cadranele IV și I. Pentru a trece la cadranele II și III, folosim formulele

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x.$$

Folosind periodicitatea funcțiilor tg și ctg , putem completa tabelul făcind să apară valorile lui x deduse din cele scrise prin adăugarea multiplilor întregi ai perioadei π .

Exerciții

Să se stabilească relațiile

1. $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x), \quad \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x)$

2. $\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x), \quad \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x + \sin x)$

3. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$

4. Să se exprime numerele $\sin(u+v+w)$, $\operatorname{tg}(u+v+w)$ cu ajutorul valorilor funcțiilor sinus, cosinus și tangentă, corespunzătoare valorilor u, v, w date variabilei independente.

Soluție. Avem, folosind formule cunoscute,

$$\sin(u+v+w) = \sin(u+v)\cos w + \cos(u+v)\sin w = \sin u \cos v \cos w +$$

◆ $\sin v \cos u \cos w + \sin w \cos u \cos v - \sin u \sin v \sin w$.

$$\cos(u+v+w) = \cos(u+v)\cos w - \sin(u+v)\sin w = \cos u \cos v \cos w - \sin u \sin v \cos w - \sin u \sin w \cos v - \sin v \sin w \cos u.$$

$$\operatorname{tg}(u+v+w) = \frac{\sin(u+v+w)}{\cos(u+v+w)} = \frac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v + \operatorname{tg} w - \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v \operatorname{tg} w}{1 - \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v - \operatorname{tg} v \operatorname{tg} w - \operatorname{tg} w \operatorname{tg} u}.$$

5. Să se arate că dacă $u+v+w = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, atunci

$$\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v + \operatorname{tg} w = \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v \operatorname{tg} w.$$

Soluție. Se pune în primul membru al ultimei identități $\operatorname{tg}(u+v+w) = 0$.

6. Să se exprime numerele $\sin(u+v+w+\ell)$, $\cos(u+v+w+\ell)$ cu ajutorul numerelor $\sin u, \sin v, \sin w, \sin \ell, \cos u, \cos v, \cos w, \cos \ell$.

Dacă în formulele stabilite pentru calculul expresiilor $\sin(u+v)$, $\cos(u+v)$, $\operatorname{tg}(u+v)$, $\sin(u+v+w)$, $\cos(u+v+w)$, $\operatorname{tg}(u+v+w)$ punem $u = v = w = x$, obținem identitățile

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x},$$

$$\sin 3x = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 2 \sin x \cos^2 x + \cos^2 x \sin x - \sin^3 x = 3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x,$$

$$\cos 3x = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \cos^3 x - \sin^2 x \cos x = 2 \sin^2 x \cos x - \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x.$$

Dacă ținem seama de identitatea $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, putem scrie

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x, \quad \sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x,$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x,$$

Pentru $\operatorname{tg} 3x$ și $\operatorname{ctg} 3x$ se obțin formulele

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}, \quad \operatorname{ctg} 3x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 3 \operatorname{ctg} x}{3\operatorname{ctg}^2 x - 1}.$$

Formulele stabilite în acest fel permit calculul funcțiilor trigonometrice sinus, cosinus, tangentă și cotangentă, corespunzătoare multiplilor $2x$ și $3x$ ai argumentului x . Metoda folosită poate fi aplicată și pentru calculul valorilor corespunzătoare multiplilor $4x$, $5x$ etc., ca funcții de $\sin x$, $\cos x$ și $\operatorname{tg} x$.

Să observăm că avem, pentru orice număr x , pentru care $\cos x \neq 0$,

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Folosind formulele stabilite pentru $\sin 2x$, $\cos 2x$ și $\operatorname{tg} 2x$, putem acum să exprimăm numerele $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ și $\operatorname{ctg} x$, în funcție de $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Intr-adevăr, putem scrie, dacă $\cos \frac{x}{2} \neq 0$,

$$\sin x = \sin 2 \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},$$

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos 2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right) = \\ &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Deci am demonstrat că:

Dacă x este astfel încât $\cos \frac{x}{2} \neq 0$ și dacă notăm $m = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, atunci

$$\boxed{\sin x = \frac{2m}{1 + m^2}, \quad \cos x = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2m}{1 - m^2}.}$$

Aceste formule arată că sinusul, cosinusul și tangenta unui număr x , pentru care $\cos \frac{x}{2} \neq 0$, pot fi exprimate prin funcții raționale de tangenta lui $\frac{x}{2}$.

Aplicații. 1. Să se afle $\sin x$ și $\cos x$ știind că $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{3}{2}$.

Soluție. Potrivit formulelor stabilite mai sus avem

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{9}\right)^{-1} = 2 \cdot 3^{-1} \cdot 9 \cdot 10^{-1} = \frac{3}{5}, \\ \cos x &= \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 + \frac{1}{9}\right)^{-1} = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

2. Să se afle numărul $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ știind că $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{2} - 1$.

Soluție. Să calculăm $\operatorname{tg} x$. Avem

$\operatorname{tg} x = 2(\sqrt{2} - 1)(1 - (\sqrt{2} - 1)^2)^{-1} = 1$. Singurul număr $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ pentru care $\operatorname{tg} x = 1$ este $x = \pi/4$.

8. Transformarea sumelor de două sinusuri sau de două cosinusuri în produse

Din formulele

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$$

deducem, adunând membru cu membru,

$$\begin{aligned} \sin(x + y) + \sin(x - y) &= 2 \sin x \cos y \\ \text{și apoi, scăzând membru cu membru,} \quad \sin(x + y) - \sin(x - y) &= 2 \sin y \cos x. \end{aligned}$$

Dacă notăm

$$x + y = p, \quad x - y = q,$$

vom avea

$$x = \frac{p+q}{2}, \quad y = \frac{p-q}{2}$$

și formulele precedente devin

$$\boxed{\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}}$$

$$\boxed{\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}}$$

În mod analog, plecind de la formulele cunoscute

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

obținem, prin adunare și scădere membru cu membru,

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(x + y) + \cos(x - y) &= 2 \cos x \cos y \\ \cos(x + y) - \cos(x - y) &= -2 \sin x \sin y \end{aligned}}$$

Făcind notatiile indicate mai sus, obținem

$$\boxed{\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}}$$

$$\boxed{\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p-q}{2} \sin \frac{p+q}{2} = 2 \sin \frac{p-q}{2} \sin \frac{q-p}{2}}$$

Aceste formule arată că sumele și diferențele a două sinusuri sau a două cosinusuri pot fi reprezentate prin produse de sinusuri și cosinusuri. Vom da

unule exemplu de aplicare a acestor formule. Menționăm că aceste formule sunt utile, dacă vrem să calculăm efectiv expresii trigonometrice cu ajutorul tabelelor de logaritmi, care se studiază în clasa a X-a.

Apliicații. Să se transforme în produs sumă

$$E = \sin n + \sin 2n + \sin 3n.$$

Soluție. Avem

$$\begin{aligned} E &= (\sin n + \sin 2n) + \sin 3n = 2 \sin 2n \cos n + \sin 3n = \\ &= 2 \sin 2n \cdot \left(\cos n + \frac{1}{2} \right) = 2 \sin 2n \left(\cos n + \cos \frac{\pi}{3} \right) = \\ &= 4 \sin 2n \cos \frac{n + \frac{\pi}{3}}{2} \cos \frac{n - \frac{\pi}{3}}{2}. \end{aligned}$$

Apliicații. Să se transforme în produse sumele:

$$S = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$$

$$S' = \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x,$$

$$S'' = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x.$$

Soluție. Avem

$$\begin{aligned} S &= (\sin x + \sin 3x) + (\sin 2x + \sin 4x) = 2 \sin 2x \cos x + 2 \sin 3x \cos x = \\ &= 2 \cos x (\sin 2x + \sin 3x) = 4 \cos x \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S' &= (\sin x + \sin 7x) + (\sin 3x + \sin 5x) = 2 \sin 4x \cos 3x + 2 \sin 4x \cdot \\ &\cdot \cos x = 2 \sin 4x (\cos 3x + \cos x) = 4 \sin 4x \cos 2x \cos x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'' &= (\cos x + \cos 7x) + (\cos 3x + \cos 5x) = 2 \cos 4x \cos 3x + \\ &+ 2 \cos 4x \cos x = 2 \cos 4x (\cos 3x + \cos x) = 4 \cos 4x \cos 2x \cos x. \end{aligned}$$

Observație. Din relațiile stabilite, deducem formula

$$\frac{S'}{S''} = \operatorname{tg} 4x.$$

Eserciziu. Să se transforme în produse următoarele sume:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x + \sin 6x$$

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \cos 5x + \cos 6x.$$

9. Identități condiționate

O identitate este o egalitate între două funcții de una sau mai multe variabile independente, care este verificată pentru orice valori date variabilelor independente, astfel încât cele două funcții să fie definite pentru aceste valori.

O egalitate între două funcții, care este verificată în cazul în care variabilele independente verifică o anumită condiție, se numește *identitate condiționată* (de acea condiție).

Exemple

1. Dacă $x + y = 0$, atunci $\sin x = -\sin y$.

2. În Trigonometrie, se întâlnesc numeroase relații între liniile trigonometrice ale unghiurilor unui triunghi și care sunt consecințe ale relației măs $\hat{A} +$ măs $\hat{B} +$ măs $\hat{C} = \pi$. Aceste relații sunt deci identități condiționate.

3. Dacă $u + v + w = \pi$, atunci $\sin(u+v) = \sin w$, $\cos(u+v) = -\cos w$, și

$$(1) \quad \operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v + \operatorname{tg} w = \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v \operatorname{tg} w.$$

Observație. Oricare ar fi numărul întreg k , relația $u + v + w = k\pi$ implică relația (1).

4. Dacă $A + B + C = \pi$, atunci

$$(2) \quad \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Demonstrație. Putem scrie pe rînd următoarele egalități:

$$\begin{aligned} (\sin A + \sin B) + \sin C &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \sin(A+B) = \\ &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A+B}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) = 4 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}. \end{aligned}$$

Dacă ținem seama că $\frac{A+B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}$, obținem formula (2).

5. Dacă $A + B + C = \pi$, atunci

$$(3) \quad \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

Demonstrație. Avem, ținând seama că $(A+B)+C=\pi$ și $\frac{A+B}{2} +$

$$\begin{aligned} &+ \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}, (\cos A + \cos B) + \cos C = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} - \\ &- \cos(A+B) = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} - 2 \cos^2 \frac{A+B}{2} + 1 = \\ &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right) + 1 = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

6. Am demonstrat că, oricare ar fi numerele reale A, B, C , avem

$$\begin{aligned} \sin(A+B+C) &= \sin A \cos B \cos C + \sin B \cos C \cos A + \\ &+ \sin C \cos A \cos B - \sin A \sin B \sin C, \\ \cos(A+B+C) &= \cos A \cos B \cos C - \sin A \sin B \cos C - \\ &- \sin B \sin C \cos A - \sin C \sin A \cos B. \end{aligned}$$

Dacă $A + B + C = \pi$, rezultă

$$\begin{aligned} \sin A \sin B \sin C &= \sin A \cos B \cos C + \sin B \cos C \cos A + \sin C \cos A \cos B, \\ \cos A \cos B \cos C &= \cos A \sin B \sin C + \cos B \sin C \sin A + \cos C \sin A \cdot \\ &\quad \cdot \sin B = 1. \end{aligned}$$

Exercițiil

1. Să se demonstreze că dacă $A + B + C = \pi$, atunci:

$$\begin{aligned} a. \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C &\neq 2\cos A \cos B \cos C = 1, \\ b. \sin A + \sin B + \sin C &= 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

2. Să se arate că dacă $u + v = w$, atunci

$$\cos^2 u + \cos^2 v + \cos^2 w - 2 \cos u \cos v \cos w = 1.$$

3. În ipoteza $a + b + c = \pi$, să se transforme în produse sumele:

$$\cos \frac{a}{2} + \cos \frac{b}{2} + \cos \frac{c}{2}, \quad \sin \frac{a}{2} + \sin \frac{b}{2} + \sin \frac{c}{2}, \quad \operatorname{ctg} \frac{a}{2} + \operatorname{ctg} \frac{b}{2} + \operatorname{ctg} \frac{c}{2}.$$

4. În ipoteza $a + b + c + d = 2\pi$, să se transforme în produse sumele

$$\cos a + \cos b + \cos c + \cos d, \quad \sin a + \sin b + \sin c + \sin d,$$

$$\sin a - \sin b + \sin c - \sin d, \quad \cos a - \cos b + \cos c - \cos d.$$

5. Stiind că $a + c = 2b$ și că $t - z = z - y = y - x$, să se transforme în produse sumele

$$\begin{aligned} \sin a + \sin b + \sin c, \quad \sin x + \sin y + \sin z + \sin t, \\ \cos a + \cos b + \cos c, \quad \cos x + \cos y + \cos z + \cos t. \end{aligned}$$

6. Să se transforme în produs suma

$$\sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b) + \sin(a+3b) + \sin(a+4b).$$

7. Să se transforme în produs suma

$$\cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \cos(a+3b) + \cos(a+4b).$$

(Indicație pentru ex. 6 și 7. Se înmulțește fiecare termen cu $\sin \frac{b}{2}$ și se transformă fiecare produs astfel obținut într-o diferență de cosinusuri respectiv de sinusuri.)

10. Transformarea în produs a sumei a două tangente sau a două cotangente

Uneori sunt utile identitățile următoare

$$\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\sin p}{\cos p} + \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{\sin p \cos q + \cos p \sin q}{\cos p \cos q} = \frac{\sin(p+q)}{\cos(p+q)}$$

$$\operatorname{ctg} p + \operatorname{ctg} q = \frac{\cos p}{\sin p} + \frac{\cos q}{\sin q} = \frac{\cos p \sin q + \cos q \sin p}{\sin p \sin q} = \frac{\sin(p+q)}{\sin(p+q)}$$

care permit să transformăm în produse sumă a două tangente sau a două cotangente.

A aplicație. Să se transforme în produs suma

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x.$$

Soluție. Avem

$$(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x) - \operatorname{tg} 3x = \frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x} - \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \sin 3x \frac{\cos 3x - \cos x \cos 2x}{\cos x \cos 2x \cos 3x} =$$

$$= \sin 3x \frac{\cos(2x+x) - \cos x \cos 2x}{\cos x \cos 2x \cos 3x} = \frac{\sin 3x \sin 2x \sin x}{\cos 3x \cos 2x \cos x} = -\operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x.$$

A doua soluție. Observăm că expresia dată se poate scrie sub forma $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg}(-3x)$ și că $x + 2x + (-3x) = 0$. Aplicând un rezultat stabilit anterior, putem scrie

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg}(-3x) = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg}(-3x) = -\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x.$$

Eserciziul. Știind că numerele u, v, w reprezintă măsurile în radiani ale unghiurilor unui triunghi, să se transforme în produs suma

$$\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v + \operatorname{tg} w.$$

Exerciții recapitulative

1. Să se demonstreze următoarele identități:

$$1. \sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$2. \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$3. \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$4. \sin 5a \cos 3a = \frac{1}{2} (\sin 8a + \sin 2a)$$

$$5. \sin 3a \cos 5a = \frac{1}{2} (\sin 8a - \sin 2a)$$

$$6. \sin(a-b)\cos(a+b) + \sin(b-c)\cos(b+c) + \sin(c-a)\cos(c+a) = 0$$

$$7. \sin(a-b)\sin(a+b) + \sin(b-c)\sin(b+c) + \sin(c-a)\sin(c+a) = 0$$

$$8. \sin 2x \sin 5x = \frac{1}{2} (\cos 3x - \cos 7x), \quad \cos 2x \cos 5x = \frac{1}{2} (\cos 3x + \cos 7x)$$

$$9. \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x = 2\operatorname{ctg} 2x$$

$$10. \sin(a+b) \sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$$

$$11. \operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 b = \frac{\sin(a+b)\sin(a-b)}{\cos^2 a \cos^2 b}$$

$$12. \frac{\sin a + \sin 3a + \sin 5a}{\cos a + \cos 3a + \cos 5a} = \operatorname{tg} 3a$$

II. Să se calculeze valorile exprimate prin formulele următoare

$$1. \sin \frac{5\pi}{12}, \quad \cos \frac{5\pi}{12}, \quad \sin \frac{\pi}{12}, \quad \cos \frac{\pi}{12}, \quad \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12}, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}, \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{12}.$$

(Indicație. Se folosește faptul că $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$ și $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$)

$$2. \sin \frac{7\pi}{12}, \quad \cos \frac{7\pi}{12}, \quad \operatorname{tg} \frac{7\pi}{12}, \quad \operatorname{ctg} \frac{7\pi}{12}, \quad \sin \frac{11\pi}{12}, \quad \cos \frac{11\pi}{12}, \quad \operatorname{tg} \frac{11\pi}{12}, \quad \operatorname{ctg} \frac{11\pi}{12}.$$

III. 1. Să se arate că dacă \hat{A} este un unghi oarecare, atunci

$$\cos \frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{\cos \hat{A} + 1}{2}}, \quad \sin \frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \hat{A}}{2}}, \quad \operatorname{tg} \frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \hat{A}}{1 + \cos \hat{A}}},$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \hat{A}}{1 - \cos \hat{A}}}.$$

2. Să se calculeze, cu două zecimale exacte, $\sin \frac{\pi}{24}$, $\cos \frac{\pi}{24}$ și $\operatorname{tg} \frac{\pi}{24}$.

IV. Să se arate că dacă x este un număr real oarecare, atunci

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}, \quad \sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

și să se indică felul în care trebuie alese semnurile, cind x parcurge dreapta reală.

11. Funcțiile trigonometrice inverse

Stim de la algebră că dacă $f : E \rightarrow F$ este o aplicație bijectivă de la mulțimea E la mulțimea F , deci dacă f asociază fiecărui element x din E un element $y = f(x)$ din F , astfel ca orice element din F să fie asociat unui element și numai singur din E , atunci există *aplicația inversă* a lui f , notată $f^{-1} : F \rightarrow E$ și definită în modul următor:

dacă $y' \in F$, atunci $f^{-1}(y')$ este acel element x' din E , pentru care $f(x') = y'$.

Deci, pentru o aplicație bijectivă $f : E \rightarrow F$, relațiile

$$x \in E, y = f^{-1}(x) \quad \text{WRONG!} \quad y = f(x)$$

sunt echivalente cu relațiile

$$y \in F, x = f^{-1}(y). \quad \text{și} \quad f^{-1}(y) = x$$

Funcțiile trigonometrice sinus, cosinus, tangentă și cotangentă au fost definite între următoarele mulțimi¹:

$$\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]; \cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$$

$$\operatorname{tg} : \mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \rightarrow \mathbb{R}, \operatorname{ctg} : \mathbb{R} - (\pi\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Astfel definite, funcțiile trigonometrice nu sunt bijective, dar sunt surjective. Într-adevăr, orice număr din intervalul inchis $[-1, 1]$ este de formă $\sin x$ sau $\cos y$, pentru o infinitate de valori ale lui x și y ; de asemenea, orice număr real se poate pune sub formă $\operatorname{tg} u$ sau $\operatorname{ctg} v$ pentru o infinitate de valori ale lui u și v .

Deci orice număr real cuprins între -1 și 1 , inclusiv aceste valori, este egal cu sinusul a o infinitate de numere x și este egal cu cosinusul a o infinitate de numere y . Mulțimea numerelor reale x , al căror sinus are o valoare

¹ Pentru o mulțime $A \subset \mathbb{R}$ convenim să notăm prin $n \oplus m$ mulțimea $\{n + ma \mid a \in A\}$, oricare ar fi numerele reale m și a .

dată a , se notează $\operatorname{Arcsin} a$ și se citește: Arcsin $a =$ mulțimea arcelor, al căror sinus este egal cu a .

Denumirea vine de la faptul că funcțiile trigonometrice au fost definite cu ajutorul unei aplicații $F : \mathbb{R} \rightarrow C$, care aplică intervalele dreptei reale \mathbb{R} pe arce ale cercului trigonometric C .

În mod analog:

Se notează prin $\operatorname{Arccos} b$ mulțimea arcelor (numerele reale), al căror cosinus este egal cu numărul $b \in [-1, 1]$.

Se notează prin $\operatorname{Arctg} m$ mulțimea arcelor (numerele reale), ale căror tangente sunt egale cu numărul $m \in \mathbb{R}$.

Se notează prin $\operatorname{Arctg} m$, mulțimea arcelor (numerele reale), ale căror cotangente sunt egale cu numărul $m \in \mathbb{R}$.

Mulțimile astfel introduse

Arcsin a , Arccos b , Arctg m , Arctg m

sunt mulțimi infinite de numere reale, conținând fiecare o infinitate numărabilă de elemente.

Se pune problema de a distinge, în fiecare din aceste mulțimi, cîte un element, printr-o regulă generală și ușor de reținut.

Rezolvarea acestei probleme se poate face în mod natural, avînd în vedere faptul că fiecare din funcțiile trigonometrice considerate admite cîte un interval, închis sau deschis, pe care funcția respectivă are restricția injectivă și surjectivă.

Intr-adevăr, din studiul făcut asupra funcțiilor trigonometrice, rezultă că:

1. Dacă numărul real x parcurge intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, de la $-\frac{\pi}{2}$ la $\frac{\pi}{2}$, numărul $\sin x$ va parcurge intervalul $[-1, 1]$, de la -1 la 1 , trecind prin fiecare punct al acestui interval, o singură dată.

Aceasta înseamnă că dacă a este un număr din intervalul $[-1, 1]$, atunci există un singur număr $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, astfel ca $\sin x = a$. Numărul x va fi notat prin arcisin a . Avem prin urmare, pentru $a \in [-1, 1]$,

$$\{\operatorname{arcisin} a\} = (\operatorname{Arcsin} a) \cap \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Exemplu. Avem

$$\operatorname{arcisin} 0 = 0, \operatorname{arcisin} (-1) = -\frac{\pi}{2}, \operatorname{arcisin} 1 = \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{arcisin} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \quad \operatorname{arcisin} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{arcisin} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arcisin} \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}, \quad \operatorname{arcisin} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{arcisin} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

2. Dacă numărul x parcurge intervalul $[0, \pi]$, de la 0 la π , atunci numărul $\cos x$ va parcurge intervalul $[-1, 1]$, de la 1 la -1 , o singură dată, trecind prin fiecare punct al acestui interval.

Deci, oricare ar fi numărul $b \in [-1, 1]$, există un singur număr $y \in [0, \pi]$, astfel ca $b = \cos y$. Numărul y , care verifică aceste condiții, va fi notat $y = \arccos b$. Avem deci

$$\{\arccos b\} = (\text{Arccos } b) \cap [0, \pi].$$

Exemplu. Avem

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}, \quad \arccos 1 = 0, \quad \arccos(-1) = \pi,$$

$$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}, \quad \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{4}, \quad \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\arccos \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}, \quad \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}, \quad \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}.$$

3. Dacă numărul x parcurge intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ de la $-\frac{\pi}{2}$ la $+\frac{\pi}{2}$ atunci numărul $\operatorname{tg} x$ va parcurge întreaga dreaptă reală \mathbf{R} , în sensul pozitiv (creșător), trecând prin fiecare punct o singură dată.

Dacă $m \in \mathbf{R}$, există deci un singur număr real $u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, astfel că $\operatorname{tg} u = m$. Acest număr u va fi notat prin $\operatorname{arctg} m$. Avem deci:

$$\{\operatorname{arctg} m\} = (\text{Arctg } m) \cap \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Exemplu. Avem

$$\operatorname{arctg} 0 = 0, \quad \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}, \quad \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6},$$

$$\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}, \quad \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

4. Dacă numărul x parcurge intervalul $(0, \pi)$, de la 0 la π , numărul $\operatorname{ctg} x$ va parcurge întreaga dreaptă reală \mathbf{R} , în sens negativ (descrescător) trecând prin fiecare punct, o singură dată. Deci, oricare ar fi numărul real m , există un unic număr $v \in (0, \pi)$, astfel că $m = \operatorname{ctg} v$. Numărul v având aceste proprietăți, va fi notat $\operatorname{arcctg} m$. Avem deci:

$$\{\operatorname{arcctg} m\} = (\text{Arcctg } m) \cap (0, \pi).$$

Exemplu. Avem

$$\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{arcctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}, \quad \operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$$

$$\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}, \quad \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}, \quad \operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

Recapitulare. Funcțiile următoare, date de restricții,

$$\sin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1],$$

$$\cos : [0, \pi] : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1],$$

$$\operatorname{tg} \left| \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbf{R}, \right.$$

$$\operatorname{ctg} : (0, \pi) : (0, \pi) \rightarrow \mathbf{R}$$

sunt bijective și admit ca inverse funcțiile

$$\operatorname{arcsin} : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi],$$

$$\operatorname{arctg} : \mathbf{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{arcctg} : \mathbf{R} \rightarrow (0, \pi).$$

Exerciții

1. Să se indice, pentru fiecare din funcțiile \sin , \cos , tg și ctg , alte intervale, pe care aceste funcții să aibă restricții bijective.

2. Să se indice intervale, pe care funcțiile \cos și ctg sint crescătoare și intervale, pe care funcțiile \sin și tg sint descrescătoare.

3. Să se arate că următoarele egalități sunt adevărate, în fiecare punct al domeniului de definiție al funcției respective:

$$\operatorname{arcsin}(-a) = -\operatorname{arcsin} a, \quad \operatorname{arctg}(-m) = -\operatorname{arctg} m, \\ \arccos(-b) = \pi - \arccos b, \quad \operatorname{arcctg}(-m) = \pi - \operatorname{arcctg} m.$$

4. Să se arate că, pentru orice număr $a \in [-1, 1]$, avem

$$\operatorname{arcsin} a + \arccos a = \frac{\pi}{2}.$$

5. Pentru orice număr $a \in [-1, 1]$, avem $\sin(\arccos a) = \sqrt{1-a^2}$ și $\cos(\arcsin a) = \sqrt{1-a^2}$.

6. Să se exprime sub o formă cît mai simplă numerele

$$\sin(2\arcsin a), \sin(3\arcsin a), \sin(4\arcsin a), \sin(5\arcsin a), \\ \cos(2\arcsin a), \cos(3\arcsin a), \cos(4\arcsin a), \cos(5\arcsin a), \\ \sin(2\arccos a), \sin(3\arccos a), \sin(4\arccos a), \sin(5\arccos a), \\ \cos(2\arccos a), \cos(3\arccos a), \cos(4\arccos a), \cos(5\arccos a).$$

7. Să se calculeze $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ știind că $x = \arccos \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)$. Apoi să se calculeze, în același ipoteză, $\sin 2x$ și $\cos 2x$. Să se deducă valoarea lui x .

$$\mathbf{R.} \quad x = \frac{\pi}{12}.$$

8. Se dă $x = \arcsin \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$. Să se calculeze $\sin 5x$ și să se afle x .

9. Să se calculeze numerele

$$\sin \frac{\pi}{12}, \quad \cos \frac{\pi}{12}, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}, \quad \sin \frac{\pi}{10}, \quad \cos \frac{\pi}{10}, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{10}$$

folosind rezultatele de la exercițiile 7 și 8.

10. Se dau relațiile

$$u = \arcsin \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{5} - \sqrt{3}}{4}$$

$$\varphi = \arctg(\sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2).$$

Să se calculeze $\sin 5u$ și $\operatorname{tg} 4v$ și să se deducă valorile exacte ale numerelor u și v .

$$\text{R. } u = \frac{\pi}{20}, \quad v = \frac{\pi}{24}.$$

11. Să se arate că, pentru orice număr real nenul, avem

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}.$$

12. Ecuării trigonometrice

Dacă x este un număr real variabil, și dacă

$$P(x) = a + bx + cx^2 + \dots + hx^p$$

este un polinom cu coeficienții a, b, c, \dots, h , egalitatea

$$P(x) = 0$$

constituie o *relație algebrică* în variabila x . Dacă toți coeficienții a, b, c, \dots, h sunt nuli, relația $P(x) = 0$ este adevărată pentru orice valoare dată lui x ; se spune că relația $P(x) = 0$ este o identitate sau că este identic verificată.

Fie E o mulțime de numere reale, $E \subset \mathbb{R}$, și fie $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție numerică definită pe mulțimea E . Dacă $f(x)$ depinde de x prin intermediul unor funcții trigonometrice cunoscute, spunem că și f este o funcție trigonometrică. Dacă f este o funcție trigonometrică, egalitatea

$$f(x) = 0$$

se numește *relație trigonometrică*.

Exemplu. Funcțiile

$$\sin x, \sin 3x, \cos x^2, \sin 3x + \cos 2x, \operatorname{tg} x - 7 \frac{\sin x}{1 - \operatorname{tg} x}$$

sunt funcții trigonometrice. Egalitățile

$$\sin x = 0, \cos(x + 3) - 2 = 0, \operatorname{tg}(\sin x) = 0$$

constituie exemple de relații trigonometrice.

O relație trigonometrică poate fi verificată pentru orice valoare dată variabilei x . Exemplu: $\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$.

Există relații care nu sunt verificate pentru nici o valoare dată variabilei x . Exemplu: $\sin 3x = 2$.

O relație trigonometrică se mai numește și *ecuație trigonometrică*. Deci o ecuație trigonometrică este o relație de forma $f(x) = 0$, unde $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție trigonometrică definită pe o mulțime $E \subset \mathbb{R}$.

Funcțiile trigonometrice pe care le vom considera vor fi combinații polinomiale sau raționale de funcțiile sinus, cosinus, tangentă și cotangentă, aplicate unor multipli sau unor submultipli ai numărului x , sau unor funcții mai complicate de x .

Pentru astfel de funcții, mulțimea de definiție poate fi dedusă din însăși expresia care definește funcția f . De exemplu, funcția

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 - \sin x} + \operatorname{tg} x$$

este definită pe mulțimea E , care se obține din \mathbb{R} scoțind numerele x , pentru care avem $\sin x = 1$ sau $\cos x = 0$.

Prin urmare, putem da o ecuație $f(x) = 0$, fără a specifica domeniul de definiție al funcției f , urmând ca acest domeniu să fie dedus din felul în care a fost exprimat membrul stâng $f(x)$ al ecuației.

A rezolva o ecuație $f(x) = 0$ înseamnă a determina mulțimea S formată din toate numerele $x \in \mathbb{R}$, pentru care avem $f(x) = 0$. Mulțimea S se numește *mulțimea soluțiilor* ecuației $f(x) = 0$.

Deci a rezolva o ecuație înseamnă a determina mulțimea soluțiilor acelei ecuații.

Mulțimea S a soluțiilor unei ecuații $f(x) = 0$ este o submulțime a mulțimii E , pe care este definită funcția f , sau a mulțimii formate din numerele x , pentru care funcția f are sens, dacă mulțimea E nu a fost specificată.

Vom începe prin rezolvarea ecuațiilor trigonometrice cele mai simple.

Ecuția $\sin x = a$, $a \in \mathbb{R}$. Deci fiind dat un număr real a , trebuie să determinăm mulțimea S a numerelor x , pentru care avem $\sin x = a$.

Aveți de distins mai multe cazuri:

Dacă $|a| > 1$, ecuația $\sin x = a$ nu are nici o soluție, deoarece sinusul oricărui număr real este un număr, a cărui valoare absolută nu depășește numărul 1. Deci în cazul $|a| > 1$, mulțimea soluțiilor ecuației date este mulțimea vidă.

Dacă $a = 1$ obținem, ecuația $\sin x = 1$, care admite soluția $x = \frac{\pi}{2}$. Din

periodicitatea funcției sinus, rezultă că orice număr de formă $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, este de asemenea o soluție a ecuației $\sin x = 1$. Din studiul efectuat asupra funcției sinus rezultă pe de altă parte că singurele numere reale care verifică ecuația $\sin x = 1$ sunt numerele de formă $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Deci mulțimea S a soluțiilor ecuației $\sin x = 1$ este mulțimea

$$S = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Dacă r este un număr real, convenim să notăm prin $r\mathbb{Z}$ mulțimea

$$r\mathbb{Z} = \{rm; m \in \mathbb{Z}\}$$

formată din multiplii întregi ai lui r . Mai general, dacă A este o mulțime de numere și dacă $b \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$, notăm $b + rA = \{b + ra; a \in A\}$.

În particular, dacă b, r sunt numere reale, convenim să notăm prin $b + r\mathbb{Z}$ mulțimea

$$b + r\mathbb{Z} = \{b + rm; m \in \mathbb{Z}\}.$$

Cu aceste convenții, putem scrie mulțimea soluțiilor ecuației $\sin x = 1$ sub forma

$$S = \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}.$$

În mod asemănător, din proprietățile cunoscute ale funcției sinus deducem că mulțimea soluțiilor ecuației $\sin x = -1$ este dată de formula

$$S = -\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}.$$

Fie acumă a un număr din intervalul deschis $(-1, 1)$. În intervalul $[0, 2\pi]$ există exact două numere care verifică ecuația $\sin x = a$; dacă x' este unul din aceste numere, al doilea are valoarea $x'' = \pi - x'$, dacă $a > 0$ și $x'' = 3\pi - x'$, dacă $a < 0$.

Intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ conține exact un număr x cu proprietatea $\sin x = a$.

Rezultă că mulțimea soluțiilor ecuației $\sin x = a$, $a \in (-1, 1)$, este

$$S = (x' + 2\pi\mathbf{Z}) \cup (\pi - x' + 2\pi\mathbf{Z}),$$

unde x' este o soluție particulară; se poate presupune că $x' \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

În particular, ecuația $\sin x = 0$ admite ca mulțime a soluțiilor

$$S = \pi\mathbf{Z}.$$

În rezumat, dacă asociem fiecărui număr a din intervalul inchis $[-1, 1]$, acel număr x din intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, pentru care $\sin x = a$ și dacă notăm numărul x astfel definit prin arcsina, atunci putem enunța următorul rezultat:

Pentru $a \in [-1, 1]$, mulțimea soluțiilor ecuației

$$\sin x = a$$

este

$$S = (\arcsina + 2\pi\mathbf{Z}) \cup (\pi - \arcsina + 2\pi\mathbf{Z}).$$

Exercițiu. Să se arate că mulțimea soluțiilor ecuației $\sin x = a$, $a \in [-1, 1]$, se poate defini prin formula

$$S = \{(-1)^n \arcsin a + n\pi; n \in \mathbf{Z}\}.$$

Notăție. Dacă a este un număr din intervalul $[-1, 1]$, se notează prin Arcsina mulțimea soluțiilor ecuației $\sin x = a$. Deci

$$\text{Arcsina} = (\arcsina + 2\pi\mathbf{Z}) \cup (\pi - \arcsina + 2\pi\mathbf{Z}).$$

Exerciții

1. Să se determine numerele

$$\arcsin \frac{1}{2}, \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}, \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right), \arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

2. Să se determine mulțimile

$$\arcsin \frac{1}{2}, \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}, \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right), \arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Aplicație. Să se rezolve ecuația $\sin 2x = 0$.

Soluție. Punind $y = 2x$, relația $\sin 2x = 0$ este echivalentă cu relația $\sin y = 0$ care este la rândul ei echivalentă cu condiția

$$y = 2x \in \text{Arcsin}0.$$

Deci soluțiile ecuației $\sin 2x = 0$ se obțin înmulțind prin 2 soluțiile ecuației $\sin y = 0$. Deci mulțimea soluțiilor ecuației $\sin 2x = 0$ este dată de formula $S = \frac{\pi}{2}\mathbf{Z}$. Putem scrie $S = \frac{1}{2}\text{Arcsin}0$.

Aplicație. Să se rezolve ecuația $\sin x = \frac{1}{3}$.

Soluție. Punind $y = \frac{x}{3}$, ecuația dată devine $\sin y = \frac{1}{2}$. Soluțiile ultimei ecuații formează mulțimea $\text{Arcsin} \frac{1}{2} = \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbf{Z}\right)$.

Rezultă că mulțimea S a soluțiilor ecuației date este formată din numerele care se obțin înmulțind cu 3 elementele mulțimii $\text{Arcsin} \frac{1}{2}$, deci

$$S = \left(\frac{\pi}{2} + 6\pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{2} + 6\pi\mathbf{Z}\right) 3 \text{ Arcsin} \frac{1}{2}.$$

Observație. În cele două rezolvări, am folosit următoarea convenție: Dacă S este o mulțime de numere reale și dacă h este un număr real, notăm $hS = \{hx; x \in S\}$, deci mulțimea hS este formată din produsele cu h ale numerelor din mulțimea S .

Exerciții:

1. Să se arate că sunt mulțimile soluțiilor fiecăreia din ecuațiile

$$\sin x = 0, \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. Să se arate că, pentru $a \in [-1, 1]$, mulțimile soluțiilor ecuațiilor $\sin x = a$ și $\sin x = -a$ sunt simetrice față de originea O a axei reale.

Ecuția $\cos x = a$, $a \in \mathbf{R}$. Pentru $|a| > 1$, ecuația $\cos x = a$ nu are nici o soluție, deci mulțimea soluțiilor este vidă.

Pentru orice număr $a \in [-1, 1]$, ecuația $\cos x = a$ are o soluție unică în intervalul $[0, \pi]$. Această soluție se notează arccosa. Numerele $\pm \text{arccosa} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, sunt de asemenea soluții ale ecuației $\cos x = a$. Din proprietatea

tățile cunoscute ale funcției cosinus deducem că orice soluție a ecuației $\cos x = a$ este un număr de forma $\pm \arccos a + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Deci, notind prin $\text{Arccos } a$ mulțimea formată din aceste numere, putem spune că:

Mulțimea soluțiilor ecuației $\cos x = a$, $a \in [-1, 1]$, este dată de

$$\boxed{\text{Arccos } a = (\arccos a + 2\pi\mathbb{Z}) \cup (-\arccos a + 2\pi\mathbb{Z})}.$$

Aplicații. 1. Avem

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}, \arccos(-1) = \pi, \arccos 1 = 0, \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3},$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}, \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6};$$

$$\text{Arccos} 0 = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}\right) = \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right).$$

$$\text{Arccos} 1 = 2\pi\mathbb{Z}, \text{Arccos}(-1) = \pi + 2\pi\mathbb{Z},$$

$$\text{Arccos} \frac{1}{2} = \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right).$$

Exerciții

1. Să se determine numerele

$$\arccos \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \arccos \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \arccos \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}, \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\arccos \left(-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right).$$

2. Să se determine mulțimile

$$\text{Arccos} \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{Arccos} \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{Arccos} \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \text{Arccos} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \text{Arccos} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

3. Să se rezolve ecuația $2 \cos x - 1 = 0$.

4. Să se determine mulțimea $\text{Arccos} \left(-\frac{1}{2}\right) \cap [0, 3\pi]$.

Aplicație. Să se rezolve ecuația $2\cos x + 1 = 0$.

Soluție. Relația dată este echivalentă cu ecuația $\cos x = -\frac{1}{2}$. Avem

$$\arccos \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}, \text{deci mulțimea soluțiilor va fi}$$

$$S = \text{Arccos} \left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right).$$

Exercițiu. Să se determine elementele mulțimii $\text{Arccos} \left(-\frac{1}{2}\right) \cap [0, 2\pi]$.

Ecuția $\operatorname{tg} x = m$.

Domeniul de definiție al funcției tangentă este multimea $\mathbf{R} - \text{Arccos } 0$, deci mulțimea soluțiilor oricărei ecuații de formă $\operatorname{tg} x = m$ trebuie căutată în acest domeniu.

Codomeniul funcției tangentă este întreaga dreaptă reală \mathbf{R} ; deci orice număr real m este egal cu tangentă unui anumit număr $x \in \mathbf{R}$. Deci oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$, mulțimea soluțiilor ecuației $\operatorname{tg} x = m$ este nevidă. Printre soluțiile acestei ecuații, există una și numai una singură în intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, deoarece atunci cînd x parurge intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, numărul $\operatorname{tg} x$ parurge toată dreapta \mathbf{R} , o singură dată.

Pentru $m \in \mathbf{R}$, numărul $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, pentru care $\operatorname{tg} x = m$, se notează $\text{arctg } m$.

Exemple. Avem

$$\operatorname{arctg} 0 = 0, \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}, \operatorname{arctg} (-1) = -\frac{\pi}{4}, \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arctg} (-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}, \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Numărul $\text{arctg } m$ nu este singura soluție a ecuației $\operatorname{tg} x = m$, deoarece funcția tangentă este periodică, cu perioada principală π . Rezultă că orice număr de formă $\text{arctg } m + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, este o soluție a aceleiași ecuații. Din proprietățile funcției tangentă rezultă că acestea sint singurele soluții ale ecuației $\operatorname{tg} x = m$. Deci:

Mulțimea soluțiilor ecuației $\operatorname{tg} x = m$ este

$$\boxed{\operatorname{arctg} m = \operatorname{arctg} m + \pi\mathbb{Z}.}$$

Exemplu. Mulțimea soluțiilor ecuației $\operatorname{tg} x = 0$ este $\pi\mathbb{Z}$, iar mulțimea soluțiilor ecuației $\operatorname{tg} x = 1$ este $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$.

Exerciții

1. Să se rezolve ecuația $\operatorname{tg} x = -1$.

2. Să se rezolve ecuația $\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$ și să se determine valoarea lui x , care verifică această ecuație și care aparțin intervalului $(1, 8)$.

Aplicație. Să se rezolve ecuația $\sin x = m \cos x$.

Soluție. Nu putem avea, pentru o soluție x a ecuației date, $\cos x = 0$, deoarece din ecuație ar rezulta și $\sin x = 0$; dar relațiile $\sin x = 0$ și $\cos x = 0$ nu pot fi verificate de un același număr x .

Avind în vedere că avem $\cos x \neq 0$, deducem că relația dată este echivalentă cu ecuația $\operatorname{tg}x = m$, care a fost analizată anterior. Deci mulțimea soluțiilor ecuației $\sin x = m \cos x$ este mulțimea $\operatorname{Arctg}m$.

Observație. Avem

$$\operatorname{Arcsin}0 = \operatorname{Arctg}0 = \pi\mathbb{Z}.$$

Ecuația $\operatorname{ctgx} = m$. Funcția cotangentă este definită pe mulțimea

$$\mathbb{R} - \operatorname{Arcsin}0,$$

deci soluțiile oricărei ecuații de forma $\operatorname{ctgx} = m$ trebuie căutate în mulțimea $\mathbb{R} - \operatorname{Arcsin}0$.

Orice număr real este egal cu cotangenta unui număr unic din intervalul $(0, \pi)$, deoarece atunci cînd x parurge intervalul $(0, \pi)$, numărul ctgx parurge o singură dată întreaga dreaptă \mathbb{R} . Numărul real x , cu proprietățile

$$x \in (0, \pi), \operatorname{ctgx} = m$$

se notează $\operatorname{arcctg}m$.

Din proprietățile funcției cotangentă rezultă că mulțimea soluțiilor ecuației $\operatorname{ctgx} = m$ este

$$\boxed{\operatorname{Arcctg}m = \operatorname{arcctg}m + \pi\mathbb{Z}.}$$

Exemplu. Avem

$$\operatorname{arcctg}0 = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Arcctg}0 = \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z},$$

$$\operatorname{arcctg}1 = \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{Arcctg}1 = \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z},$$

$$\operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}, \quad \operatorname{Arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z},$$

$$\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3}, \quad \operatorname{Arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{5\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}.$$

Exerciții

1. Să se rezolve ecuația $\cos x = m \sin x$, pentru $m = -1$ și $m = -\sqrt{3}$.
2. Să se arate că ecuațiile $\cos x = 0$ și $\operatorname{ctg}x = 0$ au aceleasi soluții.

13. Ecuații trigonometrice care se reduc la una sau mai multe ecuații de tipurile $\sin x = a$, $\cos x = b$, $\operatorname{tg}x = p$, $\operatorname{ctgx} = q$.

Aplicînd regulile de calcul algebric și relațiile cunoscute între diferitele funcții trigonometrice, numeroase ecuații trigonometrice pot fi rezolvate prin

reducere la una din ecuațiile studiate anterior, sau la mai multe din aceste ecuații.

Exemplu. Ecuația

$$\sin^2 x - 3 \sin x + 2 = 0$$

poate fi scrisă sub formă

$$(\sin x - 1)(\sin x - 2) = 0,$$

din care rezultă că trebuie să fie verificată cel puțin una din relațiile

$$\sin x = 1 \text{ sau } \sin x = 2.$$

Dar ultima relație este imposibilă, deci ecuația dată este echivalentă cu ecuația $\sin x = 1$. Mulțimea soluțiilor va fi mulțimea $\operatorname{Arcsin}1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Mai general, dacă f este o funcție definită pe o mulțime $A \subset \mathbb{R}$, se poate considera relația

$$f(\sin x) = 0.$$

Făcînd înlocuirea $y = \sin x$, ecuația devine

$$f(y) = 0.$$

Ultima ecuație poate avea 0, 1, 2, 3 sau mai multe soluții. Dacă y' este o soluție a ecuației $f(y) = 0$, ecuația $\sin x = y'$ va admite soluții dacă și numai dacă $y' \in [-1, 1]$. Rezultă că mulțimea soluțiilor ecuației $f(\sin x) = 0$ este egală cu reuniunea mulțimilor $\operatorname{Arcsin}y'$, corespunzătoare acelor soluții y' ale ecuației $f(y) = 0$, pentru care $y' \in [-1, 1]$.

Considerații asemănătoare se pot face pentru ecuațiile de forma

$$f(\cos x) = 0, f(\operatorname{tg}x) = 0, f(\operatorname{ctgx}) = 0.$$

Ecuațiile de forma

$$\sin(f(x)) = \sin(g(x)), \cos(f(x)) = \cos(g(x))$$

$$\operatorname{tg}(f(x)) = \operatorname{tg}(g(x)), \operatorname{ctg}(f(x)) = \operatorname{ctg}(g(x)),$$

în care f, g , h sint funcții numerice date, pot fi rezolvate de asemenea folosind proprietățile pe care le cunoaștem ale funcțiilor trigonometrice.

De exemplu o ecuație de forma

$$(1) \quad \sin(f(x)) = \sin(g(x))$$

se rezolvă observînd că un număr x verifică o astfel de ecuație dacă și numai dacă există un număr întreg k , astfel încît să avem

$$(2) \quad f(x) - g(x) = 2k\pi \text{ sau } f(x) + g(x) = (2k+1)\pi.$$

Deci mulțimea soluțiilor ecuației (1) este egală cu reuniunea mulțimilor de soluții ale fiecăreia din ecuațiile (2), considerate pentru fiecare număr întreg k .

De exemplu, ecuația

$$(3) \quad \sin(x^2) = \sin x$$

are ca mulțime de soluții reuniunea mulțimilor de soluții ale fiecărei din ecuațiile

$$x^2 - x = 2k\pi, \quad x^2 + x = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Prima din aceste ecuații are soluții reale numai dacă $1 + 8k\pi \geq 0$, iar a doua ecuație are soluții reale numai pentru $1 + (8k+4)\pi \geq 0$. Rezultă că ecuația dată admite o infinitate de soluții, anume

$$x_k' = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8k\pi}}{2}, \quad x_k'' = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + (8k+4)\pi}}{2}$$

unde k poate lua orice valoare întreagă, cu condiția ca expresiile de sub radical să fie pozitive, deci $k \geq 0$.

Pentru rezolvarea ecuației (3), am utilizat următorul criteriu:

I) Relația $\sin u = \sin v$ are loc dacă și numai dacă există un număr întreg n , astfel ca să avem fie $u - v = 2n\pi$, fie $u + v = (2n+1)\pi$.

Ultimile două condiții sunt echivalente cu condiția $u \in v + 2\pi\mathbf{Z}$, respectiv cu condiția $u \in \pi - v + 2\pi\mathbf{Z}$.

Pentru rezolvarea ecuațiilor

$$\cos f(x) = \cos g(x), \quad \operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} g(x), \quad \operatorname{ctg} f(x) = \operatorname{ctg} g(x),$$

vom folosi următoarele criterii:

(II) Relația $\cos u = \cos v$ este adevărată dacă și numai dacă există un număr întreg n , astfel încât să avem fie $u - v = 2n\pi$ fie $u + v = 2n\pi$.

(III) Relația $\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} v$ este verificată dacă și numai dacă există un număr întreg n , astfel încât să avem $v = u + n\pi$.

(IV) Relația $\operatorname{ctg} u = \operatorname{ctg} v$ este verificată dacă și numai dacă există un număr întreg n , astfel ca $v = u + n\pi$.

Aplicații. 1. Să se rezolve ecuația $\cos 2x = \cos 3x$.

Soluție. Aplicând criteriul (II), obținem ecuațiile

$$3x = 2x + 2n\pi, \quad 3x + 2x = 2n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}$$

care au soluțiile

$$x_n' = 2n\pi, \quad x_n'' = \frac{2n}{5}\pi.$$

2. Să se rezolve ecuația $\operatorname{ctg} 4x = \operatorname{ctg} x$.

Soluție. Aplicând criteriul (IV), obținem ecuațiile

$$4x = x + n\pi, \quad n \in \mathbf{Z},$$

care au soluțiile

$$x_n = \frac{n}{3}\pi, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Exerciții

Să se rezolve următoarele ecuații:

1. $\sin(2x + 1) = \sin(3x^2)$.

2. $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

3. $\sin x = \cos 2x$.

4. $\operatorname{tg} px = \operatorname{tg} qx$ ($p, q \in \mathbf{R}$).

5. $\cos px = \cos qx$.

6. $\sin px = \sin qx$

7. $\sin px = \cos qx$.

8. $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$.

Exemplu. Să se rezolve ecuația $\sin 2x \sin 3x = \sin x \sin 4x$.

Soluție. Ecuația dată este echivalentă cu fiecare din ecuațiile următoare:

$$2 \sin 2x \sin 3x = 2 \sin x \sin 4x,$$

$$\cos x - \cos 5x = \cos 3x - \cos 5x.$$

$$\cos x = \cos 3x;$$

aplicind criteriul (II), obținem soluțiile $x_n = \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}$.

Exercițiu. Să se rezolve ecuația $\cos 2x \cos 3x = \cos x \cos 4x$.

Ecuații trigonometrice care se reduc la ecuații de gradul II

Ecuării de forma $a \sin^2 x + b \sin x + c = 0$.

Făcind substituția $y = \sin x$, ecuația dată devine

$$(1) \quad ay^2 + by + c = 0.$$

Sunt posibile mai multe cazuri:

1) Rădăcinile ecuației (1) sunt imaginare. Atunci ecuația trigonometrică nu are nici o soluție în \mathbf{R} .

2) Rădăcinile ecuației (1) sunt reale, dar sunt amindouă exterioare intervalului $[-1, 1]$. Nici în acest caz ecuația trigonometrică dată nu are nici o soluție în \mathbf{R} .

3) Ecuația (1) are o singură soluție reală y_0 conținută în intervalul $[-1, 1]$. În acest caz, mulțimea soluțiilor ecuației date este $S = \operatorname{Arcsin} y_0$.

4) Ecuația (1) are două soluții reale y_1, y_2 conținute în intervalul $[-1, 1]$. În acest caz, ecuația trigonometrică dată are ca mulțime a soluțiilor reunirea $\operatorname{Arcsin} y_1 \cup \operatorname{Arcsin} y_2$.

Observații. Pentru ca ecuația (1) să aibă cel puțin o soluție reală este necesar și suficient să avem $b^2 - 4ac \geq 0$.

Dacă $a = 0$, dar $b \neq 0$ și dacă $|c| < |b|$, atunci ecuația dată are ca mulțime a soluțiilor mulțimea $\operatorname{Arcsin} \left(-\frac{c}{b}\right)$.

Ecuăția (1) are două rădăcini în intervalul $[-1, 1]$ dacă și numai dacă

$$-\frac{b}{2a} \in (-1, 1), \quad a(a - b + c) \geq 0 \text{ și } a(a + b + c) \geq 0, \quad b^2 - 4ac > 0.$$

Dacă ecuația (1) are o singură rădăcină în intervalul $[-1, 1]$, avem

$$(a - b + c)(a + b + c) \leq 0.$$

Ecuățiile de forma $a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$ se discută și se rezolvă în mod analog.

Ecuățile de formă $A \cos 2x + B \cos x + C = 0$ se aduc la forma

$$2A \cos^2 x + B \cos x + C - A = 0.$$

Ecuățiile de formă $A \cos^2 x + B \sin x + C = 0$ se reduc de asemenea la o ecuație de gradul II, deoarece putem folosi identitatea

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x.$$

Ecuățiile de tipul $a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0$ sau $a \operatorname{ctg}^2 x + b \operatorname{ctg} x + c = 0$ se rezolvă de asemenea prin reducere la ecuații de gradul II, făcind substituțiile $y = \operatorname{tg} x$ respectiv $y = \operatorname{ctg} x$. Discuția acestor ecuații este mai simplă, deoarece orice soluție reală m a ecuației de gradul II conduce la o mulțime de soluții de formă $\operatorname{Arctg} m$, respectiv $\operatorname{Arcctg} m$.

O ecuație omogenă de gradul II în $\sin x$ și $\cos x$, deci o ecuație de formă

$$(2) \quad a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

poate fi de asemenea redusă la o ecuație algebraică de gradul doi.

Intr-adevăr, dacă $a \neq 0$, orice soluție a ecuației (2) este astfel încât $\cos x \neq 0$, deoarece nu putem avea simultan $\sin x = 0$ și $\cos x = 0$. Deci, în cazul $a \neq 0$ putem împărți primul membru al ecuației (2) prin $\cos x$ și obținem atunci ecuația echivalentă cu (2):

$$a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0,$$

care se reduce la o ecuație algebraică de gradul II, prin efectuarea substituției $y = \operatorname{tg} x$.

Dacă $a = 0$, mulțimea soluțiilor ecuației (2) este egală cu reuniunea mulțimilor formate din soluțiile ecuațiilor

$$\cos x = 0 \text{ și } b \sin x + c \cos x = 0.$$

Stim să determinăm mulțimea soluțiilor primei ecuații. Ecuația a doua se reduce la ecuația

$$\operatorname{tg} x = -\frac{c}{b}$$

dacă $b \neq 0$, și se reduce la ecuația $\cos x = 0$ dacă $b = 0$, dar $c \neq 0$.

Aplicatii. 1. Să se rezolve ecuația $2 \sin^2 x - 7 \sin x + 3 = 0$

Soluție. Notind $y = \sin x$ ecuația devine $2y^2 - 7y + 3 = 0$. Soluțiile ultimei ecuații sunt $\frac{1}{2}$ și 3. Convine numai prima din aceste soluții, care

conduce la mulțimea următoare de soluții pentru ecuația trigonometrică dată:

$$S = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right).$$

2. Să se rezolve ecuația $\cos 2x - 3 \cos x - 1 = 0$.

Soluție. Notăm $y = \cos x$; atunci $\cos 2x = 2y^2 - 1$ și sistem conduși în rezolvarea ecuației algebrice $2y^2 - 3y - 2 = 0$. Ultima ecuație are rădăcinile $-\frac{1}{2}$ și 2, dintre care convine numai prima. Deci mulțimea soluțiilor ecuației trigonometrice date este

$$S = \operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right).$$

3. Să se rezolve ecuația $\sin^2 x - 8 \sin x \cos x + 7 \cos^2 x = 0$.

Soluție. Notăm $y = \operatorname{tg} x$; ecuația dată devine

$$y^2 - 8y + 7 = 0$$

și obținem rădăcinile 1 și 7. Mulțimea soluțiilor ecuației trigonometrice date este deci reuniunea

$$S = \operatorname{Arctg} 1 \cup \operatorname{Arctg} 7.$$

Amintim că $\operatorname{Arctg} 1 = \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$. De asemenea, $\operatorname{Arctg} 7 = \operatorname{arctg} 7 + \pi\mathbb{Z}$.

$$4. \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}.$$

Rezolvare. Folosim identitatea

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

și obținem ecuația echivalentă cu ecuația dată:

$$\sin^2 2x = \frac{3}{4}.$$

Ultima ecuație are ca mulțime de soluții reuniunea mulțimilor de soluții ale ecuațiilor

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Rezultă că mulțimea soluțiilor ecuației date este¹

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cup \frac{1}{2} \operatorname{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \\ \cup \left(-\frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3} + \pi\mathbb{Z}\right).$$

¹ Reamintim că, dacă avem o mulțime A de numere reale, convenim să notăm prin $n + m\mathbb{A}$ mulțimea $\{n + ma; a \in A\}$, oricare ar fi numerele reale m și n .

5. Să rezolvăm ecuația

$$4(\sin^6 x + \cos^6 x) = 1.$$

Soluție. Din identitatea $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ deducem

$$\sin^6 x = 1 - 3 \cos^2 x + 3 \cos^4 x - \cos^6 x$$

astfel încât ecuația dată este echivalentă cu ecuația

$$4(1 - 3 \cos^2 x + 3 \cos^4 x) = 1$$

și cu ecuația

$$4 \cos^4 x - 4 \cos^2 x + 1 = 0.$$

Ultima ecuație poate fi pusă sub forma

$$(2 \cos^2 x - 1)^2 = 0$$

și se reduce la ecuația echivalentă $\cos 2x = 0$. Multimea soluțiilor ultimei ecuații, deci și a ecuației date, va fi

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{Arccos} 0 = \left(\frac{\pi}{4} + \pi \mathbf{Z} \right) \cup \left(-\frac{\pi}{4} + \pi \mathbf{Z} \right).$$

14. Ecuații de forma $a \sin x + b \cos x = c$

Pentru ($a = 0, b \neq 0$) sau ($a \neq 0$ și $b = 0$) ecuația

$$(1) \quad a \sin x + b \cos x = c$$

este echivalentă cu ecuația $\cos x = \frac{c}{b}$ respectiv cu ecuația $\sin x = \frac{c}{a}$ și fiecare din aceste ecuații a fost discutată.

Dacă $ab \neq 0$ dar $c = 0$, ecuația (1) se scrie $a \sin x + b \cos x = 0$ și este echivalentă cu ecuația $\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}$, care a fost de asemenea discutată.

Vom studia acum soluțiile unei ecuații de forma (1), în care $abc \neq 0$.

○ astfel de ecuație poate fi rezolvată prin mai multe metode.

Metoda 1.

Notăm:

$$p = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad q = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

și considerăm punctul $M(p, q)$; acest punct aparține cercului trigonometric, deoarece $p^2 + q^2 = 1$. Aplicația $F: \mathbf{R} \rightarrow C$ fiind surjectivă, rezultă că există un număr real t , astfel ca să avem

$$(2) \quad p = \cos t, \quad q = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi).$$

În acest caz, vom avea

$$a = \sqrt{a^2 + b^2} \cos t, \quad b = \sqrt{a^2 + b^2} \sin t.$$

Introducând aceste valori în ecuația (1), această ecuație capătă forma $\sqrt{a^2 + b^2} (\cos t \sin x + \sin t \cos x) = c$ sau

$$(3) \quad h \sin(t + x) = c, \quad h = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ecuația (3) admite o mulțime nevidă de soluții dacă și numai dacă $|c| \leq h$. În acest caz, mulțimea soluțiilor va fi

$$(I) \quad S = \operatorname{Arcsin} \left(\frac{c}{h} \right) - t = \left(\operatorname{arcsin} \frac{c}{h} - t + 2\pi \mathbf{Z} \right) \cup \left(\pi - \operatorname{arcsin} \frac{c}{h} - t + 2\pi \mathbf{Z} \right).$$

Observație. Aplicarea acestei metode presupune posibilitatea găsirii numărului real t , care să verifice condițiile (2). Existența acestui număr este asigurată, dar aflarea *valorii exacte* a lui t este în general o problemă imposibilă din punct de vedere practic. Totuși, cu ajutorul tabelelor, putem găsi *valoarea aproximativă* a lui t , suficient de apropiată de valoarea exactă, pentru aplicațiile obișnuite. În condițiile unor calcule foarte fine, mașinile electronice de calcul permit obținerea unor aproximări pentru t oricăr de bune vrem, în principiu.

În cazuri particulare favorabile, valoarea exactă a lui t poate fi dedusă fără dificultate din relațiile (2).

Exemplu. Să se rezolve ecuația $\sin x + \cos x = 1$.

Soluție. Avem $a = b = c = 1$, deci $h = \sqrt{2}$, $p = q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $t = \frac{\pi}{4}$.

Ecuația dată este echivalentă cu ecuația

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Potrivit formulei generale, mulțimea soluțiilor ultimei ecuații, deci și a ecuației date, va fi

$$S = \operatorname{Arcsin} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} = (2\pi \mathbf{Z}) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi \mathbf{Z} \right)$$

Metoda 2. Presupunem că $b + c \neq 0$.

Notăm $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ și exprimăm $\sin x$ și $\cos x$ cu ajutorul lui y , folosind formulele care dau sinusul și cosinusul unui unghi în funcție de tangentă unghiu-lui pe jumătate. Avem

$$\sin x = \frac{2y}{1+y^2}, \quad \cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$$

și ecuația (4) capătă forma

$$2ay + b(1 - y^2) = c(1 + y^2)$$

Am obținut o ecuație algebrică de gradul II, care se mai poate scrie

$$(4) \quad (b + c)y^2 - 2ay + (c - b) = 0.$$

Ecuația (4) are rădăcinile reale, dacă este verificată condiția

$$a^2 - (b + c)(c - b) \geq 0$$

sau dacă $a^2 + b^2 \geq c^2$. Dar această condiție este echivalentă cu condiția $b \geq |c|$, găsită prin aplicarea metodei 1.

Să presupunem că avem

$$a^2 + b^2 > c^2$$

și fie m una din soluțiile ecuației (4). Din ecuația

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = m$$

deducem $x \in 2 \operatorname{Arctg} m$, deci mulțimea $2 \operatorname{Arctg} m = 2 \operatorname{arctg} m + 2\pi\mathbb{Z}$ este o mulțime de soluții ale ecuației (1). Dacă ecuația (4) are două rădăcini reale m_1 și m_2 , atunci mulțimea soluțiilor ecuației (1) va fi

$$(II) \quad S = 2 \operatorname{Arctg} m_1 \cup 2 \operatorname{Arctg} m_2.$$

Exercițiu. Să se arate, în legătură cu rezultatele obținute aplicând metoda 1 și metoda 2 că, dacă $b + c \neq 0$, atunci formulele (I) și (II) definesc mulțimi egale.

Observație. Dacă $b + c = 0$, deci dacă $b = -c$ atunci ecuația (4) admite soluțiile $(2k+1)\pi$, pentru $k \in \mathbb{Z}$; într-adevăr, pentru $x = (2k+1)\pi$ avem $\sin x = 0$ și $\cos x = -1$. Pentru aceste soluții, funcția tangentă nu poate fi aplicată numerelor $\frac{x}{2}$. Deci metoda 2 nu poate conduce la găsirea acestor soluții.

Pentru $b = -c$, putem scrie ecuația (4) sub forme de echivalente

$$a \sin x = c(1 + \cos x),$$

$$2a \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2c \cos^2 \frac{x}{2},$$

$$\cos \frac{x}{2} \left(a \sin \frac{x}{2} - c \cos \frac{x}{2} \right) = 0,$$

care admit ca mulțime de soluții reunionează

$$S = (\pi + 2\pi\mathbb{Z}) \cup \left(2 \operatorname{Arctg} \frac{c}{a} \right), \quad (a \neq 0).$$

Exemplu. Să rezolvăm prin metoda 2 ecuația $\sin x + \cos x = 1$.

Avem $b + c = 2 \neq 0$, deci metoda 2 va furniza toate soluțiile.

Punind $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, se obține ecuația

$$y^2 - y = 0,$$

care are soluțiile 0 și 1. Rezultă că ecuația trigonometrică dată are mulțimea de soluții

$$S = 2 \operatorname{Arctg} 0 \cup 2 \operatorname{Arctg} 1 = (2\pi\mathbb{Z}) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z} \right),$$

care a fost obținută și prin aplicarea metodei 1.

Ecuția

$$(5) \quad \sin x + \cos x = -1$$

se rezolvă prin metoda 1. Ecuțiile (2) vor fi verificate de $t = \frac{\pi}{4}$ și ecuația (3) devine

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right);$$

rezultă că mulțimea de soluții ale ecuației (5) este

$$S = \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z} \right) \cup (\pi + 2\pi\mathbb{Z}).$$

Exerciții

1. Să se rezolve ecuațiile

$$\sin x + 3\cos x = 1, \quad 3\sin x - \cos x = -1.$$

2. Să se rezolve ecuațiile

$$3\sin 3x + 4\cos 3x = -5, \quad 3\sin 2x - 4\cos 2x = 5.$$

Alte metode de rezolvare a ecuațiilor trigonometrice

O bună cunoaștere a proprietăților funcțiilor trigonometrice și utilizarea judicioasă a identităților trigonometrice și algebrice permit rezolvarea unei mari varietăți de ecuații trigonometrice.

Trebuie subliniat că nu există o metodă generală pentru rezolvarea oricărei ecuații trigonometrice. Dimpotrivă, se poate afirma că ecuațiile trigonometrice, care pot fi rezolvate efectiv, prin indicarea explicită a mulțimii soluțiilor, constituie o categorie foarte restrinsă, în mulțimea tuturor ecuațiilor trigonometrice care se pot imagina, sau care intervin în practică.

Combinarea metodelor furnizate de algebră și de analiză permit însă, în principiu, să se rezolve orice ecuație trigonometrică, cu o aproximare orică de bună vrem. O parte din aceste metode vor fi prezentate în manualele destinate claselor X, XI și XII. În acest capitol, ne limităm să indicăm numai unele metode elementare, care însă pot fi aplicate multor tipuri de ecuații ce intervin în aplicații practice.

Utilizarea identităților algebrice

Să considerăm ecuația

$$\sin x \cos x - \sin^2 x - \cos x + \sin x = 0.$$

Prințul membru al acestei ecuații poate fi descompus într-un produs de doi factori; se obține atunci ecuația echivalentă:

$$(\sin x - 1)(\cos x - \sin x) = 0,$$

care are mulțimea de soluții:

$$S = (\text{Arcsin } 1) \cup (\text{Arctg } 1) = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z} \right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + \pi\mathbf{Z} \right).$$

Pentru a da alt exemplu, să considerăm ecuația

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Folosind identitatea $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, putem transforma ecuația dată în ecuația echivalentă $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sau $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, care are mulțimea de soluții

$$S = \frac{1}{2} \text{Arccos} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbf{Z} \right) \cup \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbf{Z} \right) \right\}.$$

Să ne propunem acum să rezolvăm ecuația

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}.$$

Folosind identitatea

$$\sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2},$$

ecuația se poate scrie sub forma echivalentă

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0.$$

Transformând în produs suma dintre $\cos 2x$ și $\cos 6x$, ecuația devine

$$\cos 4x(2 \cos 2x + 1) = 0.$$

Mulțimea soluțiilor ultimei ecuații este egală cu reuniunea mulțimilor de soluții ale ecuațiilor

$$\cos 4x = 0, \cos 2x = -\frac{1}{2}.$$

Rezultă că ecuația dată are următoarea mulțime de soluții:

$$S = \left(\frac{1}{4} \text{Arccos } 0 \right) \cup \left(\frac{1}{2} \text{Arccos} \left(-\frac{1}{2} \right) \right).$$

Exerciții. 1. Să se expliciteze membrul drept al ultimei formule.

2. Să se rezolve ecuația

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 2.$$

3. Să se aducă fiecare din ecuațiile următoare la una din formele $\sin x = a$, $\cos x = a$ sau $\tg x = a$. Să se facă discuția după parametrii P, Q, R, p, a, b, c .

- 1) $P \sin^2 x + Q \cos^2 x - R \sin x = 0$.
- 2) $P \cos 2x + Q \cos x + R = 0$.
- 3) $p \sin^2 x + Q \cos x + R = 0$.
- 4) $\cos^2 x + \sin x \cos x = 1$.
- 5) $\sin 3x = \sin x$.
- 6) $\cos 3x + \cos x = p \cos 2x$.
- 7) $\sin x - \sin a = p \sin(x - a)$.
- 8) $A \tg x + B \ctg x + C = 0$.
- 9) $a \cos x + b \cos(c - x) = p$.

4. Să se rezolve ecuațiile

- 1) $\text{arc sin } x = \text{arc cos } x$.
- 2) $\text{arc sin } x = 2 \text{arc cos } x$.
- 3) $\text{arc cos } x = 2 \text{arc sin } x$.
- 4) $\text{arc sin } x = 3 \text{arc sin } x$.
- 5) $\text{arc sin } x = 2 \text{arc(tg } x)$.
- 6) $\text{arc sin } x = 3 \text{arc(ctg } x)$.

5. Fie $a = d(B, C)$, $b = d(C, A)$, $c = d(A, B)$ lungimile laturilor unui triunghi și fie S aria acestui triunghi. Să se demonstreze formulele

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$2S = bc \sin A.$$

6. Fie O un punct în planul triunghiului ABC și fie $a = d(B, C)$, $b = d(C, A)$, $c = d(A, B)$, $a' = d(O, A)$, $b' = d(O, B)$, $c' = d(O, C)$, $L = b'^2 + c'^2 - a^2$, $M = c'^2 + a'^2 - b^2$, $N = a'^2 + b'^2 - c^2$.

Să se demonstreze relația

$$a'^2 L^2 + b'^2 M^2 + c'^2 N^2 = LMN + 4a'^2 b'^2 c'^2.$$

7. Fie $ABCD$ un patrulater convex și fie $a = d(A, B)$, $b = d(B, C)$, $c = d(C, D)$, $d = d(D, A)$, $f = d(A, C)$, $u = \widehat{ABC}$, $v = \widehat{ADC}$, S = aria suprafeței limitată de patrulaterul $ABCD$. Să se demonstreze formulele:

- a) $f^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos u = c^2 + d^2 - 2cd \cos v$;
- b) $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2(ab \cos u - cd \cos v)$;

- c) $2S = ab \sin u + cd \sin v$;
d) $16S^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4(a^2b^2 + c^2d^2) - 8abcd \cos(u + v)$;
e) $16S^2 = 4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 16abcd \left(\cos \frac{u+v}{2}\right)^2$;
f) dacă $2s = a + b + c + d$, atunci $S^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \left(\cos \frac{u+v}{2}\right)^2$.

8. Să se arate că, printre toate patrulaterele convexe, ale căror lungimi ale laturilor au valori date a, b, c și d , patrulaterul de arie maximă este inscriptibil.

(Indicație. Se folosește ultima formulă din exercițiul precedent și se observă că S este maxim dacă unghiul $u + v$ este alungit.)

9. Fiind dată m numere pozitive a_1, a_2, \dots, a_m , astfel că

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m < a_1 + a_2 + \dots + a_{m-1},$$

să se arate că:

- a) Există poligoane cu n laturi, de lungimi egale cu numerele date, în ordinea dată.
b) Printre poligoanele considerate la punctul a), există poligoane care limitează o suprafață de arie maximă și aceste poligoane sunt inscriptibile.

10. Să se arate că aria unui patrulater inscriptibil, având lungimile laturilor egale cu a, b, c și d , este dată de formula

$$S^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d),$$

unde $2s = a + b + c + d$.

Cuprins

<i>Introducere</i>	8
<i>Notări folosite</i>	7
<i>Capitolul I.</i>	
Geometrie euclidiană plană	9
1.. Proprietățiile figurilor plane	9
2. Axiomele sau postulatele geometriei euclidiene plane	10
3. Proprietăți de incidență ale punctelor și dreptelor dintr-un plan	11
4. Proprietăți de ordonare	11
5. Semidrepte și semiplane	12
6. Unghiuri	12
7. Proprietăți de congruență	13
8. Teoremele de congruență a două triunghiuri	14
9. Compararea unghiurilor	15
10. Inegalități într-un triunghi	16
11. Unghiuri drepte	17
12. Locuri geometrice	18
13. Postulatul lui Euclid	19
14. Măsurarea segmentelor	20
15. Aximele de continuitate (text facultativ)	21
16. Măsurarea unghiurilor	22
17. Teorema lui Thales	23
18. Linii poligonale și poligoane	24
19. Funcțiile sinus și cosinus, definite pe mulțimea unghiurilor	25
20. Relații metrice	26
21. Coordonate pe o dreaptă și într-un plan	27
22. Aplicații practice	28
<i>Capitolul II</i>	
<i>Cercul</i>	87
1. Definiții	87
2. Unghiuri inscrise într-un cerc	92
3. Măsura unui arc de cerc	95
4. Măsura unghiulară a unui arc de cerc	96
5. Unghiuri cu virful exterior unui cerc	98

6. Unghiuri cu vîrful interior unui cerc	99
7. Poziții relative a două cercuri	102
8. Axa radicală a două cercuri	105
9. Patrulatere inscriptibile	110
10. Mișcarea circulară uniformă	112
11. Aplicații practice	113

Capitolul III

Elemente de trigonometrie plană	117
1. Vectori	117
2. Funcții trigonometrice	126
3. Formule de reducere la primul cadrant	134
4. Reprezentarea grafică a funcției sinus	135
5. Reprezentarea grafică a funcției cosinus	139
6. Formule de adunare și scădere	140
7. Funcțiile tangentă și cotangentă	146
8. Transformarea în produse a sumelor de două sinusuri sau de două cosinusuri	153
9. Identități condiționate	154
10. Transformarea în produs a sumei a două tangente sau a două cotangente	156
11. Funcții trigonometrice inverse	158
12. Ecuații trigonometrice	162
13. Ecuații trigonometrice care se reduc la una sau mai multe ecuații de tipurile $\sin x = a$, $\cos x = b$, $\operatorname{tg} x = p$, $\operatorname{ctg} x = q$	168
14. Ecuații de forma $a \sin x + b \cos x = c$	174

Nr. colilor de tipar: 11,5
Bun de tipar: 14.07.1980



Com. nr. 90 600/26 386
Combinatul Poligrafic
„CASA SCINTEII“
București — R.S.R.