Algoritmul FORD-FULKERSON
CORECTITUDINE

Fără graf rezidual

1. Fie f un flux în N (exp f ≡ 0)

2. Cât timp **există un s-t** lanţ f-nesaturat P în G
   - determină un astfel de P
   - Fie iP capacitatea reziduală a lui P
   - revizuieşte fluxul f de-a lungul lui P

$$f(e) = \begin{cases} f(e) + iP, & e \text{ arc direct în } P \\ f(e) - iP, & e \text{ este arc invers în } P \\ f(e), & \text{altfel} \end{cases}$$

3. Fie X = mulțimea vârfurilor accesibile din s prin lanțuri f-nesaturate

4. returnează f și (X, V-X)

Cu graf rezidual

1. Fie f un flux în N (exp f ≡ 0)

2. Construim G_f graful rezidual pentru f

3. Cât timp **există** **un s-t drum în G_f**
   - **determină P** un s-t **drum** în G_f (pentru arcele cu $c_f(e)>0$)
   - fie cfP capacitatea reziduală a lui P
   - **actualizează** G_f

```
pentru e ∈ E(P) ⊆ E(Gf)
      cf(e)← cf(e) - cfP;
      cf(e⁻¹)← cf(e⁻¹) + cfP
```

4. Fie X = mulțimea vârfurilor accesibile din s în G_f

5. Returnează f corespunzător lui cf și (X, V-X)

Determinare cu parcurgere BFS (lanț/drum minim) => Edmonds-Karp

Proprietăți

Fie f flux, K=(X, Y= V−X) s−t tăietură

1. **$val(f) = f(X, Y) - f(Y, X) = f^+(X) - f^-(X) = f^-(Y) - f^+(Y)$**
   - relația rezultă însumând condițiile de conservare pentru vârfurile din X −{s} și relația $val(f) = f^+(s) - f^-(s)$

$$val(f) = \sum_{x \in X} (f^+(x) - f^-(x))$$

$$= f^+(X) + f(X,X) - (f^-(X) + f(X,X)) = f^+(X) - f^-(X)$$

Proprietăți

Fie f flux, $K=(X, Y= V-X)$ s-t tăietură

1. $val(f) = f(X, Y) - f(Y, X) = f^+(X) - f^-(X) \leq c(K) - 0$
2. $val(f) \leq c(K)$ **cu egalitate dacă și numai dacă $f^+(X) = c(K)$ și $f^-(X)=0$**
   (deci toate arcele directe din K au flux= capacitate, și toate cele inverse au flux 0)

Proprietăți

Fie f flux, K=(X, Y= V−X) s−t tăietură

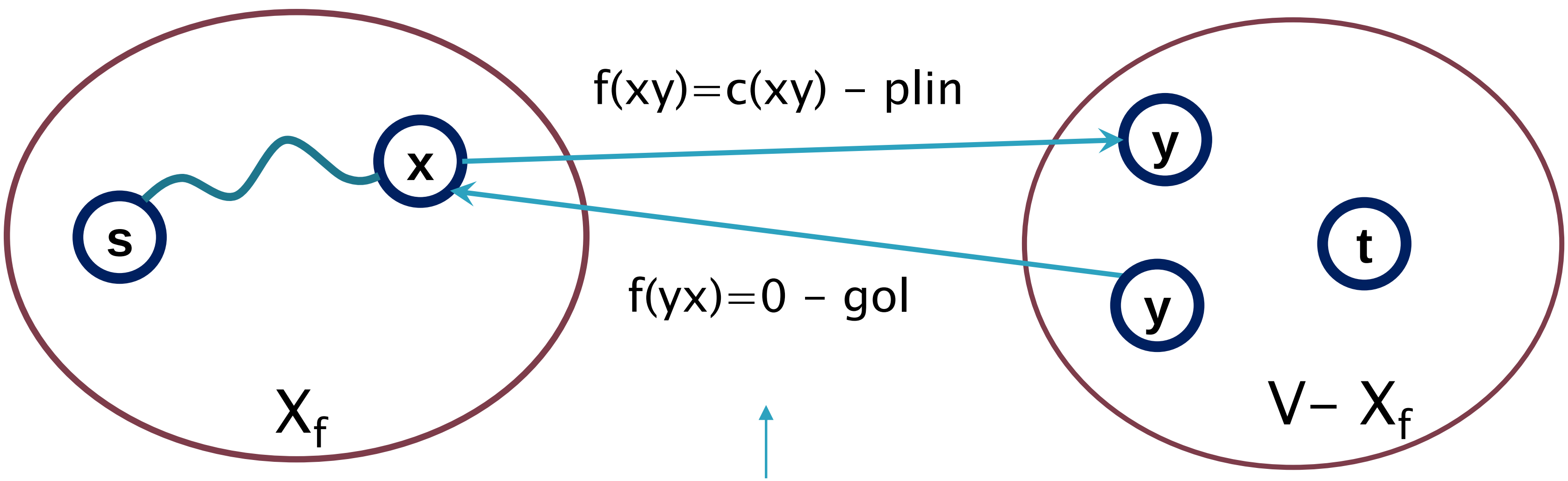
1. $val(f) = f(X, Y) - f(Y, X) = f^+(X) - f^-(X) \leq c(K) - 0$
2. $val(f) \leq c(K)$ **cu egalitate dacă și numai dacă $f^+(X) = c(K)$ și $f^-(X)=0$** (deci toate arcele directe din K au flux= capacitate, și toate cele inverse au flux 0)
3. Dacă $val(f) = c(K)$, f este flux maxim și K tăietură minimă

Tăietura minimă asociată unui flux maxim

Fie f flux.

Dacă **nu există s-t lanț f-nesaturat** => există o s-t tăietură K_f cu val(f) = c(K_f) deci **f este flux maxim și K_f este s-t tăietură minimă**, unde K_f = (X_f, V-X_f) se definește astfel:

X_f = {x| există s-x lanț f-nesaturat} = {x| există s-x drum în graful rezidual G_f}



altfel s-x lanțul f-nesaturat poate fi extins cu arcul xy /yx și y ar fi în X_f

Tăietura minimă asociată unui flux maxim

Consecință

Fie f flux flux maxim -> tăietura minimă asociată se poate determina în O(n+m)

X_f = {x| există s-x lanț f-nesaturat} = {x| există s-x drum în graful rezidual G_f}

Observaţie In finalul algoritmului Ford-Fulkerson mulțimea X care definește tăietura minimă asociată lui f este chiar **mulțimea varfurilor vizitate** la ultima parcurgere a grafului (in care nu s-a mai gasit un s – t lanț f-nesaturat).

Tăietura minimă asociată unui flux maxim

Consecințe

Caracterizare flux maxim

f flux maxim ⇔ nu există s-t lanț f-nesaturat în G

Corectitudine algoritm FF

Algoritmului Ford-Fulkerson se termină într-un număr finit de pași și fluxul f determinat de algoritm este flux maxim. În plus, mulțimea X a vârfurilor accesibile din s prin lanțuri f-nesaturate determină o tăietură de capacitate minimă.

Teorema MAX-Flow, MIN-Cut FF

valoarea unui $s - t$ flux maxim = capacitatea unei $s - t$ tăieturi minime