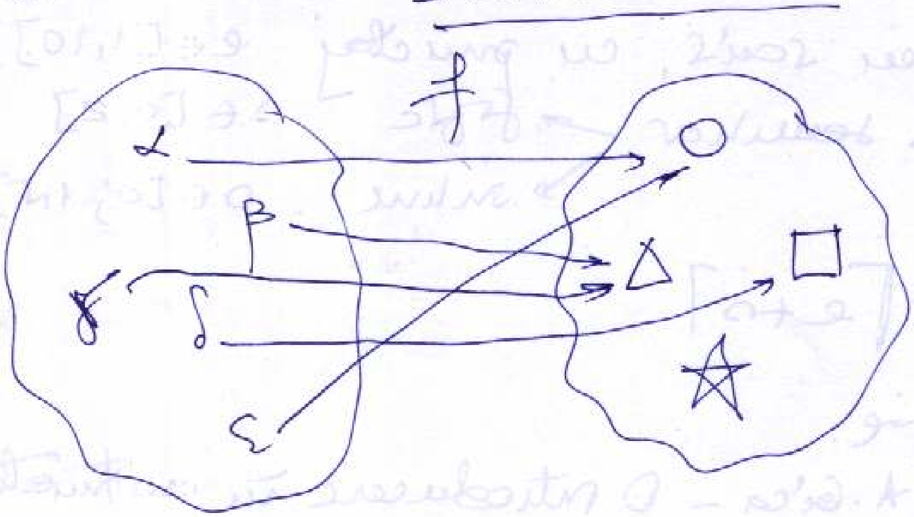
① 05.10.23

SEMINAR 1 - 133



$f(\beta) = \Delta \qquad f(\delta) = \square \qquad f(\alpha) = \bigcirc$

$f(\gamma) = \Delta \qquad f(\varepsilon) = \bigcirc$

$f(\{\alpha, \beta\}) = \{\bigcirc, \Delta\}$

$f(\{\alpha, \beta, \gamma\}) = \{\bigcirc, \Delta\}$

$f(\{\alpha, \varepsilon\}) = \{\bigcirc\}$ „IMAGINEA lui C via f"

$f(\{\beta, \gamma, \delta\}) = \{\Delta, \square\}$

$f(\{\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon\}) = \{\bigcirc, \Delta\}$

$\{f(c);\ c \in C\}$

$\parallel$

$f: A_{C} \longrightarrow B \qquad \boxed{f(C)} = \{b \in B : \exists\, c \in C\ f(c) = b\}$

$f^{-1}(\{\bigcirc, \square\}) = \{\alpha, \delta, \varepsilon\}$

$f^{-1}(\{\bigcirc, \Delta\}) = \{\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon\}$

$f^{-1}(\{\Delta, \square\}) = \{\beta, \gamma, \delta\}$

$f^{-1}(\{\star\}) = \emptyset$

$f : A \to B$

$\quad\quad\quad\ \ \cup$

$\quad\quad\quad\ \ D$

$$\boxed{f^{-1}(D)} \overset{def}{=} \{a \in A : f(a) \in D\}.$$

↳ IMAGINEA INVERSĂ

sau PREIMAGINEA

sau CONTRAIMAGINEA

sau IMAGINEA RECIPROCĂ a lui D via f

Comparând definițiile constatăm că „preimaginea e mai cumsecade" decât imaginea (directă)

③

Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+1$. Determinați:

a) $f((1,4))$ $[-3,1)$

b) $f^{-1}((1,4))$

Sol a): Fie $y\in f((1,4))$

Atunci $\exists x\in(1,4)$ $f(x)=y$.

Deci $\exists x\in(1,4)$ $y=x^2-4x+1$,

adică $\exists x\in(1,4)$ $y=\boxed{(x-2)^2}-3$

TEHNICA CALCULATORIE DE BAZĂ ÎN CONTEXTUL EXPRESIILOR DE GRADUL II ESTE SFÂNTA COMPLETARE A PĂTRATULUI!

De aici, $y\geq -3$. (1)

În plus, $x\in(1,4)\Rightarrow$

$1<x<4\Rightarrow$

$-1<x-2<2\Rightarrow$

$(\boxed{-1<x-2<0} \vee 0\leq x-2<2)\Rightarrow$

$((x-2)^2\in(0,1) \vee (x-2)^2\in[0,4))\Rightarrow$

$\boxed{(x-2)^2\in[0,4)}\Rightarrow$

$y=f(x)=(x-2)^2-3\in[-3,1)$

În gând: Până aici arătăm că $f((1,4))\subset[-3,1)$.

Fie $y \in [-3, 1)$

{În gând: Vreau $y \in f((1,4))$,
adică $\exists x \in (1,4)$ $f(x) = y$

Luăm $x = 2 + \sqrt{y+3}$ (obs: $y \in [-3,1)$, deci $y+3 \geq 0$, deci $\sqrt{y+3}$ are sens!)

Atunci:

$y \in [-3, 1) \Rightarrow$

$y+3 \in [0, 4) \Rightarrow$

$\sqrt{y+3} \in [0, 2) \Rightarrow$

$x = 2 + \sqrt{y+3} \in [2, 4) \subset (1, 4)$

și

$f(x) = (x-2)^2 - 3$

$= (\cancel{2} + \sqrt{y+3} - \cancel{2})^2 - 3 = y + 3 - 3 = y$.

În gând! Asta a probat $[-3,1) \subset f((1,4))$

În concluzie, $f((1,4)) = [-3, 1)$. □

Sol b):

Fie $x \in \mathbb{R}$.

$x \in f^{-1}((1,4)) \Leftrightarrow$

$f(x) \in (1, 4) \Leftrightarrow$

$1 < f(x) < 4 \Leftrightarrow$

$1 < x^2 - 4x + 1 < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x > 0 \\ x^2 - 4x - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty) \\ x \in (2-\sqrt{7}, 2+\sqrt{7}) \end{cases} (\Leftarrow)$$

$$\Leftrightarrow x \in (2-\sqrt{7}, 0) \cup (4, 2+\sqrt{7})$$

Deci, $f^{-1}((1,4)) = (2-\sqrt{7}, 0) \cup (4, 2+\sqrt{7})$ $\square$

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$.

$A = [0, +\infty)$

$B = (-\infty, 0]$.

$$\left.\begin{aligned} f(A \cap B) &= f(\{0\}) = \{0\}. \\ f(A) \cap f(B) &= [0, +\infty) \cap [0, +\infty) = \\ &= [0, +\infty) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$f(A \cap B) \subsetneqq f(A) \cap f(B)$$

- $A = \{1, 2\}$.

$f(A) = \{1, 4\}$

$f^{-1}(f(A)) = \{-1, 1, -2, 2\}$.

Deci $A \subsetneqq f^{-1}(f(A))$

Dacă $f: A \to B$ și $C \subset A$,

Fie $c \in C$.

Atunci $f(c) \in f(C)$,

deci $c \in f^{-1}(f(C))$.

Deci, $C \subseteq f^{-1}(f(C))$. □

Dacă $f: A \to B$ și $C_1, C_2 \subset A$,

fie $y \in f(C_1 \cap C_2)$.

Atunci există $x \in C_1 \cap C_2$ astfel ca $f(x) = y$.

Atunci avem:

$x \in C_1$ și $f(x) = y$, deci $y \in f(C_1)$

și $x \in C_2$ și $f(x) = y$, deci $y \in f(C_2)$

$\Rightarrow y \in f(C_1) \cap f(C_2)$.

Ca urmare,

$$f(C_1 \cap C_2) \subseteq f(C_1) \cap f(C_2).$$

Se întâmplă "bine" însă!

Dacă $f: A \to B$, $C_{1,2} \subset A$, $D_{1,2} \subset B$:

$f(C_1 \cup C_2) = f(C_1) \cup f(C_2)$

$f^{-1}(D_1 \cup D_2) = f^{-1}(D_1) \cup f^{-1}(D_2)$ $\boxed{TD}$

$f^{-1}(D_1 \cap D_2) = f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2)$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -x^2 + 6x - 4$ 7

$f((0,4)) = ?$ $\boxed{TD}$

$f^{-1}((3,7)) = ?$