

(1)

16.11.23

SEMINAR 133

$$I \stackrel{\text{not}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad I \stackrel{\text{not}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad J \stackrel{\text{not}}{=} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix};$$

$$K = \begin{pmatrix} e^{-i} & \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

.	1	-1	I	-I	J	-J	K	-K
1	1	-1	I	-I	J	-J	K	-K
-1	-1	1	-I	I	-J	J	-K	K
I	I	-I	-1	1	K	-K	-J	J
-I	-I	I	1	-1	-K	K	J	-J
J	J	-J	-K	K	-1	1	I	-I
-J	-J	J	K	-K	1	-1	-I	I
K	K	-K	J	-J	-I	I	-1	1
-K	-K	K	-J	J	I	-I	1	-1

$$\langle 1 \rangle = \{1\}$$

$$\langle -1 \rangle = \{-1, 1\}$$

$$\langle I \rangle = \{I, -1, -I, 1\} = \langle -I \rangle$$

$$\langle J \rangle = \{1, J, -J, -1\} = \langle -J \rangle$$

$$\langle K \rangle = \{1, K, -1, -K\} = \langle -K \rangle$$

Am scris toate subgrupurile ciclice  $\textcircled{2}$   
ale lui  $\mathbb{Q}$  și niciunul nu e  $\mathbb{Q}$ .  
Deci,  $\mathbb{Q}$  nu e ciclic

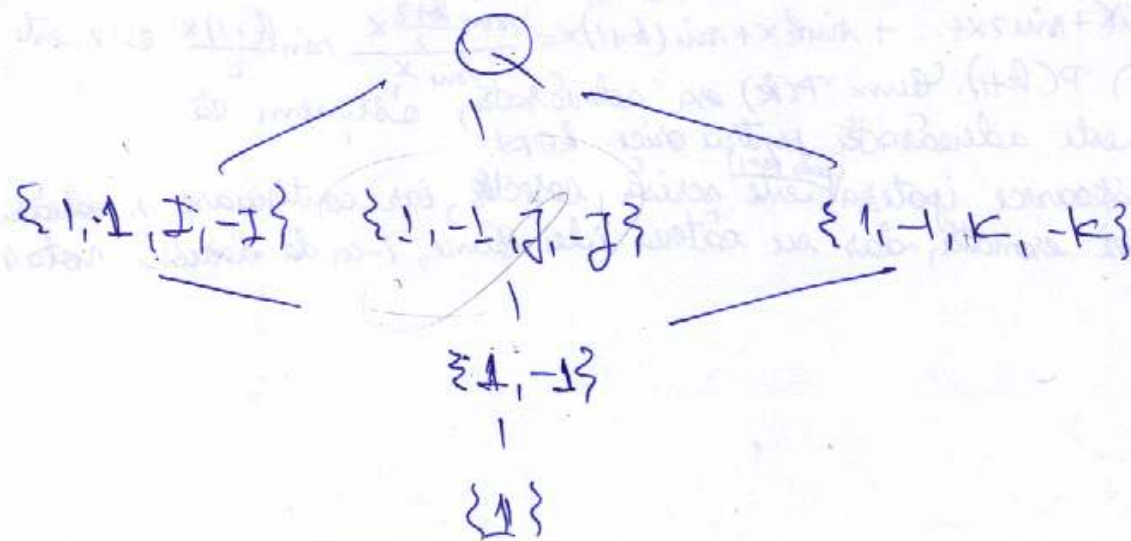
$\textcircled{\text{Def}}$   $\mathbb{Q}$  s.n. GRUPUL CUATERNIONILOR

CURS: T. LAGRANGE:

Dacă  $G$  e grup și  $H \leq G$ , atunci

$$\begin{array}{ccccc} |G| & = & |H| \cdot |G:H| & \rightarrow & \text{Indicele lui } H \text{ în } G. \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{ordinul} & & \text{ordinul} & & \\ \text{lui } G & & \text{lui } H & & \end{array}$$

LATICEA SUBGRUPURILOR LUI  $\mathbb{Q}$ :



Dacă  $G$  e grup, iar  $H \leq G$ , atunci

$$|(G/H)_n| = |(G/H)_d|.$$

Se poate întâmpla să avem chiar



$$(G/H)_s = (G/H)_d \quad \text{sau in. (v. Lem 7-132)} \quad (13)$$

Teorema (7-133): Spunem ca  $H$  e subgrup  
NORMAL al lui  $G$  daca  $(G/H)_s = (G/H)_d$ .

not:  $H \trianglelefteq G$

$$\forall x \in G \quad xH = Hx$$

$$\forall x \in G \quad xHx^{-1} = H$$

$$\forall x \in G \quad xHx^{-1} \subset H$$

Obs: Orice subgrup al unui grup comu-  
 tativ e normal

$$\begin{cases} \{1, 7\} \cdot \{10, 20, 90\} \subset \\ \{10, 20, 90, 70, 140, 630\} \end{cases}$$

Alte caturi de identificare a subgrupurilor  
 normale:

①  $\{H\} \trianglelefteq G$ ,  $G \trianglelefteq G$

② Orice subgrup de indice 2 e normal

③ Intersectia de subgrupuri normale e  
 subgrup normal.

deci:  $\{H_\alpha\}_{\alpha \in A}$  cu  $H_\alpha \trianglelefteq G$ ,

$$\forall x \in G \quad \forall \alpha \in A \quad H_\alpha \trianglelefteq H_\alpha \stackrel{\text{not}}{=} \bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha$$

Atunci  $\forall x \in A$  in  $H_\alpha$ ,

deci, fiindca  $H_\alpha \trianglelefteq G$ ,  $xH_\alpha x^{-1} \subset H_\alpha$ ,  $\forall x \in A$ ,

$$\text{deci } xH_\alpha x^{-1} \subset H_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha \quad \text{deci}$$



$$\forall x \in G \quad x \neq x^{-1} \in H \quad (4)$$

$$\text{Dacă, } H \trianglelefteq G$$

Consecutiv

Latticea subgroupurilor normale ale lui  $Q$  coincide cu latticea subgroupurilor lui  $Q$

Să descriem grupul factor  $Q/\langle I \rangle$ :

Notăm de la curs:

urmează  
folosim notația  
 $\{xH : x \in G\}$

$$\text{Dacă } H \trianglelefteq G,$$

$$\frac{G}{H} = (G/H)_n = \{xH : x \in G\} \rightarrow \text{multimea sublocus a lui } \frac{G}{H}$$

$$(xH) \cdot (yH) = (xy)H \rightarrow \text{operatorul lui } G/H$$

cu notația  $\hat{x}$

asta se rescrie

$$\hat{x} \cdot \hat{y} = \widehat{xy}$$

Deci:

$$Q/\langle I \rangle = \{ \{1, I, -1, -I\}, \{I, -I, K, -K\} \}$$

cu operatorul

$\{1, I, -1, -I\}$	$\{I, -I, K, -K\}$
$\{1, I, -1, -I\}$	$\{I, -I, K, -K\}$
$\{I, -I, K, -K\}$	$\{1, I, -1, -I\}$

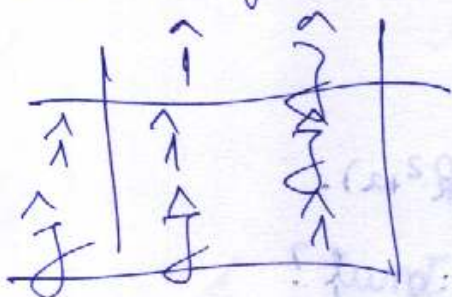


: Mai sus am folosit niste notati  
 precise, dar f. explicite.

Notatiile uzuale sunt mai degrabă  
 în registru:

$$Q/\langle I \rangle = \{ \hat{1}, \hat{j} \},$$

cu operația



Asta e  
 descrierea  
 grupului  
 factor

$$Q/\langle I \rangle.$$

[D] Descrie grupul factor  $\frac{Q}{\langle I \rangle}$

Exale din unuatabele: grupul e ciclic  
 si de ce?

- $\mathbb{Z}_2$
- $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_7$
- $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8$
- $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}$

Da, cate  
 e generat  
 de  $\{ \hat{1} \}$ .

C  
R  
S:

$$[T] (m, n) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$$

Prin urmare cu  $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}$  e ciclic.



Atunci există  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  așa încât (6)

$$\langle (\hat{a}, b) \rangle = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}$$

Atunci există  $m, n \in \mathbb{Z}$  așa ca

$$ca) \quad m \cdot (\hat{a}, b) = (\hat{1}, 0) \Rightarrow mb = 0$$

$$* \quad n \cdot (\hat{a}, b) = (\hat{0}, 1) \Rightarrow nb = 1 \Rightarrow b \neq 0$$

$$\Rightarrow m = 0.$$

ca urmare,

$$* \Rightarrow (\hat{1}, 0) = 0 \cdot (\hat{a}, b) = (\hat{0}, 0),$$

deci  $\hat{1} = \hat{0}, \forall$

Rămân, deci, că  $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}$  nu e ciclic.

TD Care alii grupuri

$$\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{13}, \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}$$

sunt ciclice? Care nu? Justifică!