Calculul funcției de repartiție a unei v.a. continue

Fie X o v.a. continuă definită prin densitatea f. Atunci:

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt}$$

Exemplu

Fie $f(x) = 2\cdot(x+\theta)^{-3} \cdot \mathbb{1}_{[1-\theta, \infty)}$

I Dacă $x \in (-\infty, 1-\theta)$ atunci $F(x) = 0$

II Dacă $x \in [1-\theta, \infty)$ atunci

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{1-\theta}^{x} 2(t+\theta)^{-3}\,dt = 2 \cdot \int_{1-\theta}^{x} (t+\theta)^{-3}\,dt$$

S.V. $t+\theta = y \Rightarrow t = y-\theta \Rightarrow dt = dy$

$t = 1-\theta \Rightarrow y = 1$

$t = x \Rightarrow y = x+\theta$

$$F(x) = 2 \cdot \int_{1}^{x+\theta} y^{-3}\,dy = \cancel{2} \cdot \frac{y^{-2}}{-\cancel{2}}\Bigg|_{1}^{x+\theta} = -\left(\frac{1}{(x+\theta)^2} - 1\right)$$

$$F(x) = 1 - \frac{1}{(x+\theta)^2}$$

Așadar $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1-\theta \\ 1 - \dfrac{1}{(x+\theta)^2}, & x \geq 1-\theta \end{cases}$

$\boxed{\text{OBS}}$ Se remarcă faptul că $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$.

Aplicații la v.a. bidimensionale

1 Fie (X,Y) o v.a. continuă definită prin densitatea:

$$f(x,y)=\begin{cases} k\,xy^2, & (x,y)\in[1,2]\times[1,3] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

a) Determinați $k\in\mathbb{R}$.

f densitate de probabilitate $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y)\geq 0 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 & (1) \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1 & (2) \end{cases}$

Din (1): $k>0$

(2): $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1 \Leftrightarrow \int_1^2\int_1^3 k\,xy^2\,dy\,dx = 1 \Leftrightarrow$

$$\underbrace{k\cdot\int_1^2 x\,dx\cdot\int_1^3 y^2\,dy}_{\text{din T. lui Fubini}} = 1 \Leftrightarrow k\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_1^3 = 1 \Leftrightarrow \frac{k}{\cancel{2}}\cdot\cancel{3}\cdot\frac{\cancel{26}^{13}}{\cancel{3}} = 1$$

$\Leftrightarrow \boxed{k=\frac{1}{13}}$

b) Determinați funcția de repartiție

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$$

I Dacă $x<1$ sau $y<1$ $\quad f(u,v)=0 \Rightarrow F(x,y)=0$

II Dacă $(x,y)\in[1,2]\times[1,3]$ atunci:

$$F(x,y)=\int_1^x\int_1^y \frac{1}{13}uv^2\,du\,dv = \frac{1}{13}\int_1^x u\,du\cdot\int_1^y v^2\,dv =$$

$$=\frac{1}{13}\cdot\frac{u^2}{2}\Big|_1^x\cdot\frac{v^3}{3}\Big|_1^y = \frac{1}{13}\cdot\frac{x^2-1}{2}\cdot\frac{y^3-1}{3} = \frac{(x^2-1)(y^3-1)}{78}$$

III Dacă $y \in [1,3]$ şi $x > 2$

$$F(x,y) = \int_1^2 \int_1^y \frac{1}{13} \cdot u v^2 \, du \, dv = \frac{1}{13} \cdot \int_1^2 u \, du \cdot \int_1^y v^2 dv = \frac{1}{13} \cdot \frac{u^2}{2}\Big|_1^2 \cdot \frac{v^3}{3}\Big|_1^y$$

$$= \frac{1}{13} \cdot \frac{\cancel{3}}{2} \cdot \frac{y^3-1}{\cancel{3}} = \frac{y^3-1}{26}$$

IV Dacă $x \in [1,2]$ şi $y > 3$

$$F(x,y) = \int_1^x \int_1^3 \frac{1}{13} u v^2 \, du \, dv = \frac{1}{13} \cdot \int_1^x u \, du \int_1^3 v^2 dv = \frac{1}{13} \cdot \frac{u^2}{2}\Big|_1^x \cdot \frac{v^3}{3}\Big|_1^3$$

$$= \frac{1}{\cancel{13}} \cdot \frac{x^2-1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{26}}{3} = \frac{x^2-1}{3}$$

V Dacă $x > 2$ şi $y > 3$

$$F(x,y) = 1$$

$$\text{Deci } F(x,y) = \begin{cases} 0, & x < 1 \text{ sau } y < 1 \\ \frac{(x^2-1)(y^3-1)}{78}, & (x,y) \in [1,2] \times [1,3] \\ \frac{y^3-1}{26}, & x > 2 \text{ şi } y \in [1,3] \\ \frac{x^2-1}{3}, & x \in [1,2] \text{ şi } y > 3 \\ 1, & x > 2 \text{ şi } y > 3 \end{cases}$$

c) Calculaţi $E(X \cdot Y)$.

$$\mathbb{E}(X \cdot Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f(x,y) \, dx \, dy = \frac{1}{13} \int_1^2 \int_1^3 x^2 \cdot y^3 \, dx \, dy =$$

$$= \frac{1}{13} \cdot \int_1^2 x^2 dx \cdot \int_1^3 y^3 dy = \frac{1}{13} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 \cdot \frac{y^4}{4}\Big|_1^3 = \frac{1}{\cancel{13}} \cdot \frac{\cancel{26}^{2}}{3} \cdot \frac{\cancel{80}^{20}}{\cancel{4}} = \frac{40}{3}$$

d) Determinați densitățile marginale pentru X și Y.

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy=\frac{1}{13}\int_1^3 x\cdot y^2\,dy=\frac{x}{13}\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_1^3=\frac{x}{\cancel{13}}\cdot\frac{\cancel{26}^{\,2}}{3}=\frac{2x}{3}$$ pt. $x\in[1,2]$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx=\frac{1}{13}\int_1^2 xy^2\,dx=\frac{y^2}{13}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2=\frac{y^2}{13}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3y^2}{26}$$ pt. $y\in[1,3]$

e) Determinați densitățile condiționate ale lui X și Y.

$$f_1(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{\frac{\cancel{1}}{\cancel{13}}\cdot x\cancel{y^2}}{\frac{\cancel{1}}{\cancel{13}}\cdot\frac{3}{2}\cancel{y^2}}, & (x,y)\in[1,2]\times[1,3]\\ 0, & \text{în rest}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{2x}{3}, & (x,y)\in[1,2]\times[1,3]\\ 0, & \text{în rest}\end{cases}$$

densitatea v.a. $X/Y=y$

$$f_2(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{13}\cancel{x}y^2}{\frac{2\cancel{x}}{3}}, & (x,y)\in[1,2]\times[1,3]\\ 0, & \text{în rest}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{3}{26}y^2, & (x,y)\in[1,2]\times[1,3]\\ 0, & \text{în rest}\end{cases}$$

f) Calculați valorile medii condiționate

$$E(X/Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_1(x/y)\,dx=\int_1^2\frac{2x^2}{3}\,dx=\frac{2}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^2=\frac{2}{9}\cdot 7=\frac{14}{9}$$

$$E(Y|X=x)=\int_{-\infty}^{\infty} y\cdot f_2(y/x)\,dy=\int_1^3\frac{3y^3}{26}\,dy=\frac{3}{26}\cdot\frac{y^4}{4}\Big|_1^3=\frac{3}{\cancel{26}_{13}}\cdot\frac{\cancel{80}^{\,\cancel{20}}}{\cancel{4}}=\frac{30}{13}$$

<u>OBS</u>: Pentru varianța condiționată se folosesc tot densitățile condiționate!

9) Determinați funcția de repartiție a v.a. condiționate $X/Y=y$.

$$F(x/y)=\int_{-\infty}^{x} f_1(t/y)\,dt=\begin{cases}0, & x<1\\ \int_{0}^{x}\frac{2t}{3}\,dt, & x\in[1,2] \text{ și } y\in[1,3] \text{ fixat}\\ 1, & x>2\end{cases}$$

$$F(x/y)=\begin{cases}0, & x<1\\ \frac{1}{3}\cdot x^2, & x\in[1,2] \text{ și } y\in[1,3] \text{ fixat}\\ 1, & x>2\end{cases}$$