① 21.11.2023

SEMINAR 8 _ 132

Presupunem că $(\mathbb{Q},+)$ e ciclic.
Atunci există $a, b \in \mathbb{Z}^+$ cu $(a,b)=1$ astfel ca $\mathbb{Q} = < \frac{a}{b} >$

Atunci $\mathbb{Q} \ni \frac{a}{2b} = \alpha \cdot \frac{a}{b}$, deci $a = 2\alpha a$
$\exists \alpha \in \mathbb{Z}$

$\Updownarrow$

$(2\alpha - 1)a = 0$

$\Updownarrow a \neq 0$

$2\mathbb{Z} \not\ni 2\alpha - 1 = 0 \in 2\mathbb{Z}$, ↯

Rămâne, deci, că $(\mathbb{Q},+)$ NU e ciclic.

$\boxed{T}$ (Curs) $\mathbb{Z}_{mn} \underset{\text{Gp}}{\simeq} \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \iff (m,n)=1$.

$\hat{a} \overset{\varphi}{\longmapsto} (\bar{a}, \mathring{a})$

$\hat{a} = \hat{b} \iff mn \mid a-b \implies \begin{cases} m \mid a-b \iff \bar{a} = \bar{b} \\ n \mid a-b \iff \mathring{a} = \mathring{b} \end{cases} \implies$

$(\bar{a}, \mathring{a}) = (\bar{b}, \mathring{b})$. Deci, φ e corect def. și e imediat că-i izo (vortrirea demonstrației)

$(8,9)=1$, deci $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9 \simeq \mathbb{Z}_{72}$, care e ciclic (că-i generat de $\{\hat{1}\}$).
Deci $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9$ e ciclic.

Presupunem că $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{10}$ e ciclic.

Atunci există $m, n \in \mathbb{Z}$

$(8,10) \neq 1$ așa încât $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{10} = \langle\{(\hat{m}, \bar{n})\}\rangle$

Atunci există $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ așa încât

$$\alpha \cdot (\hat{m}, \bar{n}) = (\hat{1}, \bar{0}) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \hat{m} = \hat{1} \\ \alpha \bar{n} = \bar{0} \end{cases} \Rightarrow \beta\alpha\hat{m} = \hat{\beta}$$

$$\beta \cdot (\hat{m}, \bar{n}) = (\hat{0}, \bar{1}) \Leftrightarrow \begin{cases} \beta \hat{m} = \hat{0} \\ \beta \bar{n} = \bar{1} \quad (1) \end{cases}$$

$\beta\alpha\hat{m} = \hat{0}$

$\Downarrow$

$\beta \vdots 8$ (2)

$$\left.\begin{array}{l} (1) \Rightarrow \beta\bar{n} = \bar{1} \Rightarrow \overline{\beta n} = \bar{1} \\ (2) \Rightarrow \beta \vdots 8 \Rightarrow \exists \gamma \in \mathbb{Z}\ \beta = 8\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow (\exists \gamma \in \mathbb{Z}\ \overline{8\gamma n} = \bar{1})$$

$\Downarrow$

$\exists \gamma \in \mathbb{Z}\ \ 10 \mid 8\gamma n - 1 \Rightarrow$

$\exists \gamma, \delta \in \mathbb{Z}\ \ 8\gamma n - 1 = 10\delta \Rightarrow$

$\exists \gamma, \delta \in \mathbb{Z}\ \ 1 = 8\gamma n - 10\delta = 2(4\gamma n - 5\delta)$

$\Downarrow$

$2 \mid 1$, $\lightning$.

Ca urmare, $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{10}$ nu e ciclic. $\square$

<u>Curs</u>: Def. Grup FINIT GENERAT = grup care admite un sistem de generatori finit.

<u>$\mathbb{Q}$ NU e finit generat</u>

<u>dem</u>: Presupunem că e; fie $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$ un sistem finit de ge-

numărător pt el. ($n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{Z}$) 3

Le aducem la același numitor și ele devin

$\frac{a_1}{b}, \frac{a_2}{b}, \dots, \frac{a_n}{b}$.

Atunci există $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$ astfel ca

$$\frac{1}{2b} = \alpha_1 \frac{a_1}{b} + \alpha_2 \frac{a_2}{b} + \dots + \alpha_n \frac{a_n}{b} \Rightarrow$$

$$1 = 2(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n) \Rightarrow 2 \mid 1, \text{ abs}.$$

Rămâne, deci, că $(\mathbb{Q}, +)$ nu e finit generat.

$\boxed{PS}$ Arătați că $(\mathbb{R}, +)$ nu e finit generat.

Proprietăți ale ordinelor elementelor din grupuri:

1) Fie G un grup și $x \in G$ și $k \in \mathbb{Z}$.

1) Atunci $\text{ord}_G(x^k) = \frac{\text{ord } x}{(k, \text{ord } x)}$ (Δ)

2) $\text{ord}_{G_1 \times G_2}((x_1, x_2)) = [\text{ord}_{G_1} x_1, \text{ord}_{G_2} x_2]$

Aplicații:

1) „exerciții de fixarea cunoștințelor":

Determinați $\text{ord}_{\mathbb{Z}_{330}} \hat{120}$

Sol: $\text{ord}_{\mathbb{Z}_{330}} \hat{120} = \text{ord}_{\mathbb{Z}_{330}} (120 \cdot \hat{1}) \overset{(\Delta)}{=} \frac{\text{ord}_{\mathbb{Z}_{330}} (\hat{1})}{(120, \text{ord}_{\mathbb{Z}_{330}} (\hat{1}))} =$

$$= \frac{330}{(120,330)} = \frac{330}{30} = 11 \ \square$$

1') „Problemuță"

a) Determinați elementele de ordin 40 din $\mathbb{Z}_{300}$

b) ——— a ——— u ——— $\mathbb{Z}_{360}$

Sol a): $40 \nmid 300$, deci $\mathbb{Z}_{300}$ nu admite elemente de ordin 40 !!!

b) Fie $a \in \{0, 1, \dots, 359\}$.

$$\operatorname{ord}_{\mathbb{Z}_{360}}(\hat{a}) = 40 \iff \operatorname{ord}(a \cdot \hat{1}) = 40 \iff$$

$$\frac{\operatorname{ord}(\hat{1})}{(a, \operatorname{ord}(\hat{1}))} = 40 \iff \frac{360}{(a,360)} = 40 \iff (a,360) = 9 \iff$$

$$\iff a \in \{9\alpha : \alpha \in \{0,1,\dots,39\} \wedge (\alpha,40)=1\} \quad \left\{\begin{array}{l} a = 9\cdot\alpha \\ 360 = 9\cdot 40 \end{array}\right.$$

CIORNA

$$\iff \hat{a} \in \{\hat{9}, \hat{27}, \hat{63}, \hat{81}, \hat{99}, \hat{117}, \hat{153}, \hat{171}, \hat{189}, \hat{207}, \hat{243}, \hat{261}, \hat{279}, \hat{297}, \hat{333}, \hat{351}\}.$$

2) „Ex. de fixare a cunoștințelor":

Determinați $\operatorname{ord}_{\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_{16}}((\hat{6}, \overline{10}))$

Sol:

$$\operatorname{ord}_{\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_{16}}((\hat{6}, \overline{10})) = [\operatorname{ord}_{\mathbb{Z}_{10}}(\hat{6}), \operatorname{ord}_{\mathbb{Z}_{16}}(\overline{10})] =$$

$$= [5, 8] = 40 \ \square$$

2) „Problemuță"

(5)

Determinați elementele de ordin 12 din $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$.

<u>Sol</u>: Fie $(\hat{a}, \bar{b}) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$.

$$ord_{\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6}((\hat{a}, \bar{b})) = 12 \iff [ord_{\mathbb{Z}_4}(\hat{a}), ord_{\mathbb{Z}_6}(\bar{b})] = 12$$

$$\overset{ord_{\mathbb{Z}_4}(\hat{a}) | 4}{\underset{ord_{\mathbb{Z}_6}(\bar{b}) | 6}{\iff}} \left(ord_{\mathbb{Z}_4}(\hat{a}) = 4 \wedge ord(\bar{b}) \in \{3, 6\} \right)$$

$$\iff \left(\hat{a} \in \{\hat{1}, \hat{3}\} \wedge \bar{b} \in \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}\} \right).$$

Ca urmare, elementele de ordin 12 din $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ sunt

$(\hat{1}, \bar{1}), (\hat{1}, \bar{2}), (\hat{1}, \bar{4}), (\hat{1}, \bar{5}),$
$(\hat{3}, \bar{1}), (\hat{3}, \bar{2}), (\hat{3}, \bar{4}), (\hat{3}, \bar{5}).$

Relevăm absența ciclicității lui $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{10}$:

Presupunem că e ciclic; fie $(\hat{m}, \bar{n})$ un generator al său.

Atunci

$$80 = |\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{10}| = ord_{\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{10}}(\hat{m}, \bar{n}) = [ord_{\mathbb{Z}_8}(\hat{m}), ord_{\mathbb{Z}_{10}}(\bar{n})] = (1)$$

Dar $(1) \mid [8, 10] = 40$, $\not{}$

Rămâne, deci, că $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{10}$ nu e ciclic.

Fie $m, n \in \mathbb{Z}_+^*$.
Presupunem că $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \underset{Grp.}{\simeq} \mathbb{Z}_{mn}$

TD 1) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ NU e ciclic.
2) Determinați elementele de ordin
a) 70
b) 50
din $\mathbb{Z}_{600}$
3) Determinați elementele de ordin 18
din $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_9$

Atunci, întrucât $\mathbb{Z}_{mn}$ e ciclic,
$\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ e ciclic.
Fie $(\hat{a}, \bar{b})$ un generator al lui $\mathbb{Z}_{mn}$.
Atunci

$mn = |\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n| = \mathrm{ord}_{\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n}(\hat{a}, \bar{b}) = [\mathrm{ord}_{\mathbb{Z}_m}(\hat{a}), \mathrm{ord}_{\mathbb{Z}_n}(\bar{b})]$;
aceasta din urmă divide, însă, $[m, n]$.
Deci,
$[m, n] \cdot (m, n) = mn \mid [m, n]$.
Morala: $(m, n) = 1$.