Sortare topologică

Sortare topologică

- Fie G = (V, E) graf orientat
- Sortare topologică a lui G =

  ordonare a vârfurilor astfel încât dacă uv $\in$ E atunci u se află înaintea lui v în ordonare

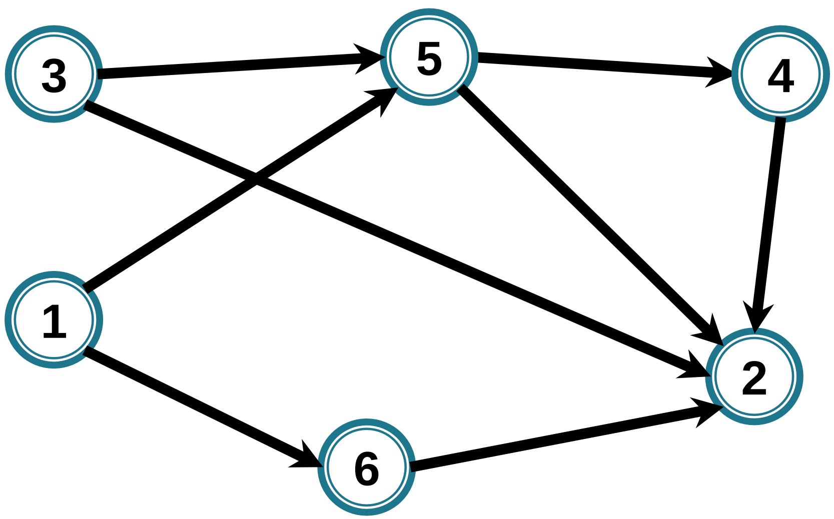
  - Nu este neapărat unică
  - !!! graf orientat

https://www.youtube.com/watch?v=UcaWQZlPXgQ

Sortare topologică

- **Fie G = (V, E) graf orientat**
- **Sortare topologică a lui G =**

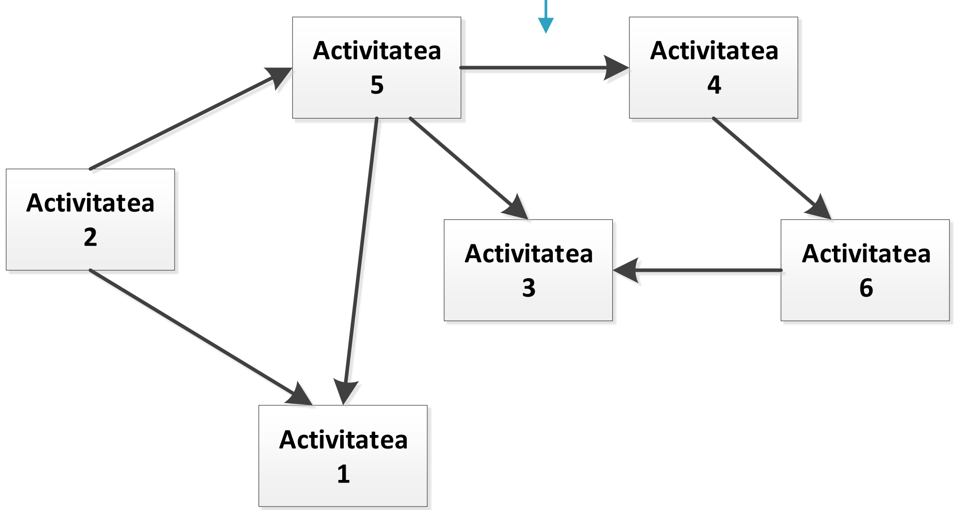
  ordonare a vârfurilor astfel încât dacă uv $\in$ E atunci u se află înaintea lui v în ordonare

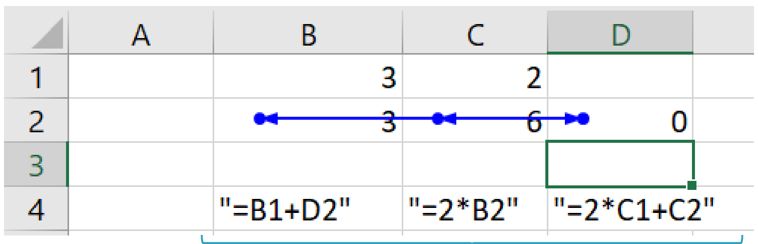


Sortare topologică

- **Aplicații**
  - Ordinea de calcul în proiecte în care intervin relații de dependență / precedență (exp: calcul de formule, ordinea de compilare când clasele/pachetele depind unele de altele)
  - Detecție de deadlock
  - Determinarea de drumuri critice

Activitatea 4 depinde de 5, deci trebuie să se desfăşoare după ea





formulele din celulele B2..D2

În ce ordine trebuie executate activitățile?

În ce ordine se evaluează formulele?

Probleme – dacă există dependențe circulare

Sortare topologică

- **Fie G = (V, E) graf orientat**
- **Sortare topologică a lui G =**

  ordonare a vârfurilor astfel încât dacă uv $\in$ E atunci u se află înaintea lui v în ordonare

- **Propoziţie.** Dacă G este aciclic atunci G are o sortare topologică

Sortare topologică

- **Fie G = (V, E) graf orientat**
- **Sortare topologică a lui G =**

  ordonare a vârfurilor astfel încât dacă uv $\in$ E atunci u se află înaintea lui v în ordonare

- **Propoziţie.** Dacă G este aciclic atunci G are o sortare topologică
  - **Demonstrație $\Rightarrow$ Algoritm?**

Care vârf poate fi primul în sortarea topologică?

Sortare topologică – Algoritm

- **Fie G = (V, E) graf orientat**

- **Lemă.** Dacă G este aciclic, atunci G are cel puţin un vârf v cu gradul intern 0 ($d^-(v) = 0$).

Sortare topologică – Algoritm

- **Fie G = (V, E) graf orientat**

- **Lemă.** Dacă G este aciclic, atunci G are cel puţin un vârf v cu gradul intern 0 ($d^-(v) = 0$).

Demonstrație: considerăm un drum elementar maxim. Extremitatea inițială a sa are grad intern 0

(v. si dem. Proprietății: un arbore cu $n > 2$ vârfuri are minim 2 vârfuri terminale)

Sortare topologică – Algoritm

- **Fie G = (V, E) graf orientat**
- **Lemă.** Dacă G este aciclic, atunci G are cel puţin un vârf v cu gradul intern 0 ($d^-(v) = 0$).
- **Algoritm**

```
cât timp |V(G)|>0 execută
      alege v cu d⁻(v) = 0
      adauga v in ordonare
      G ← G - v
```

- **Corectitudinea** – rezultă din **Lemă** + inducție

Pseudocod

Sortare topologică – Algoritm

- **Algoritm**

cât timp $|V(G)|>0$ **execută**

    alege v cu $d^{-}(v) = 0$

    adauga v in ordonare

    $G \leftarrow G - v$

Implementare? Complexitate?

Sortare topologică – Algoritm

- Algoritm

```
câtimp |V(G)|>0 execută
        alege v cu d⁻(v) = 0
        adauga v in ordonare
        G ← G - v
```

- Implementare – similar BF
  - Pornim cu toate vârfurile cu grad intern 0 și le adăugăm într-o coadă
  -

Sortare topologică – Algoritm

- Algoritm

```
cât timp |V(G)|>0 execută
        alege v cu d⁻(v) = 0
        adauga v in ordonare
        G ← G - v
```

- Implementare – similar BF
  - **Pornim cu toate vârfurile cu grad intern 0 și le adăugăm într-o coadă**
  - **Repetăm:**

    - extragem un vârf din coadă

    - îl eliminăm din graf (= scădem gradele interne ale vecinilor, nu îl eliminăm din reprezentare)

    -

Sortare topologică – Algoritm

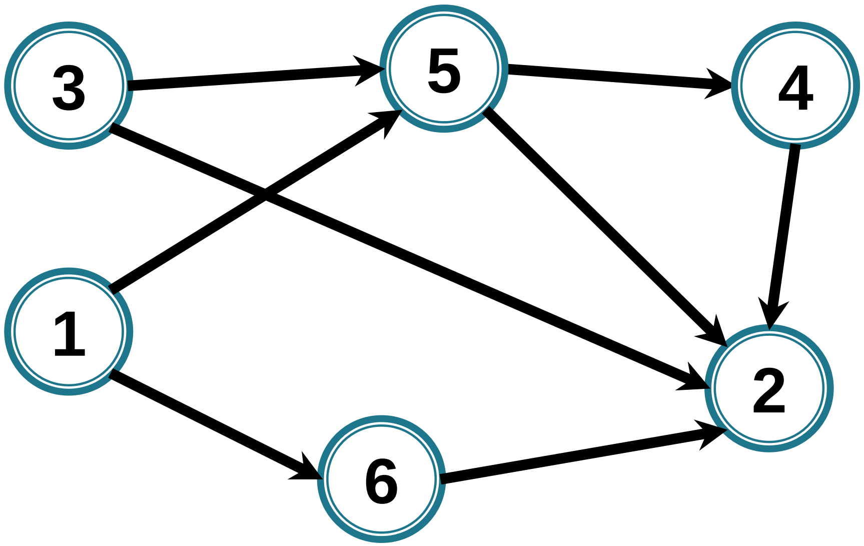
- Algoritm

```
cât timp |V(G)|>0 execută
      alege v cu d⁻(v) = 0
      adauga v in ordonare
      G ← G - v
```

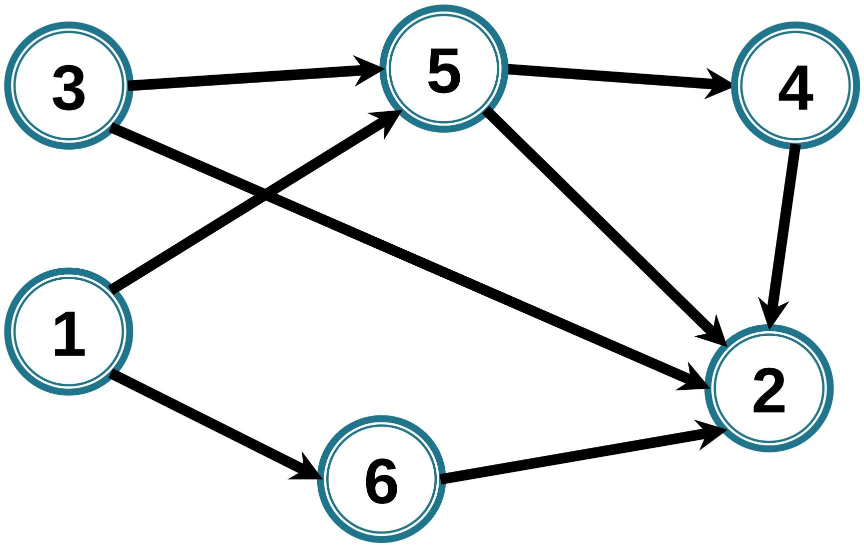
- Implementare – similar BF
  - Pornim cu toate vârfurile cu grad intern 0 și le adăugăm într-o coadă
  - Repetăm:
    - extragem un vârf din coadă
    - îl eliminăm din graf (= scădem gradele interne ale vecinilor, nu îl eliminăm din reprezentare)
    - adăugăm în coadă vecinii al căror grad intern devine 0

Exemplu

Sortare topologică

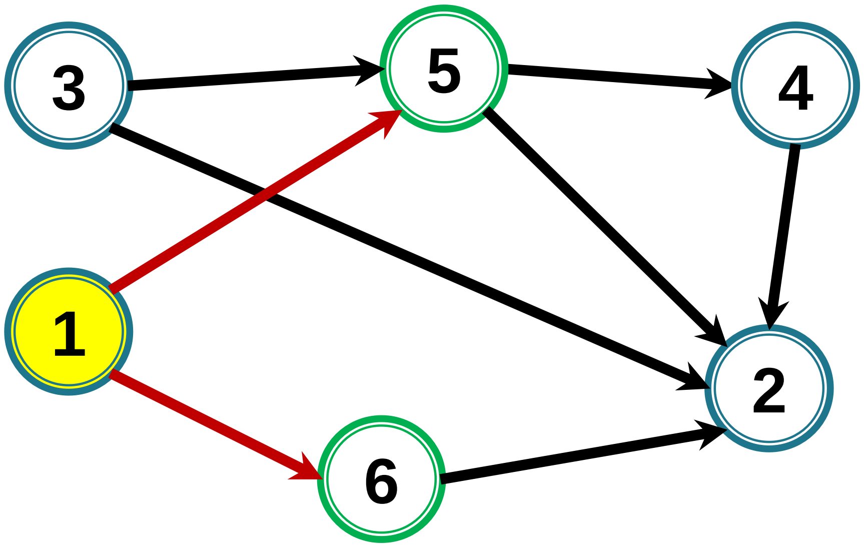


Sortare topologică



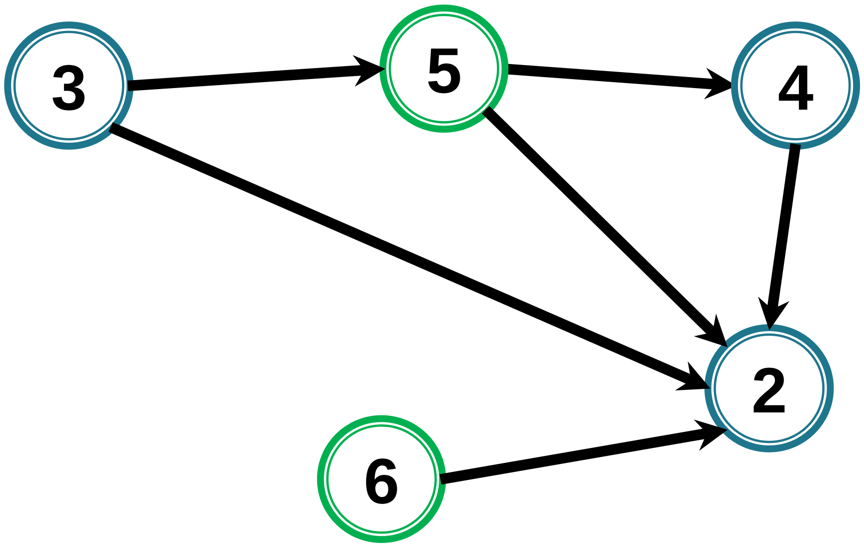
C: 1 3

Sortare topologică



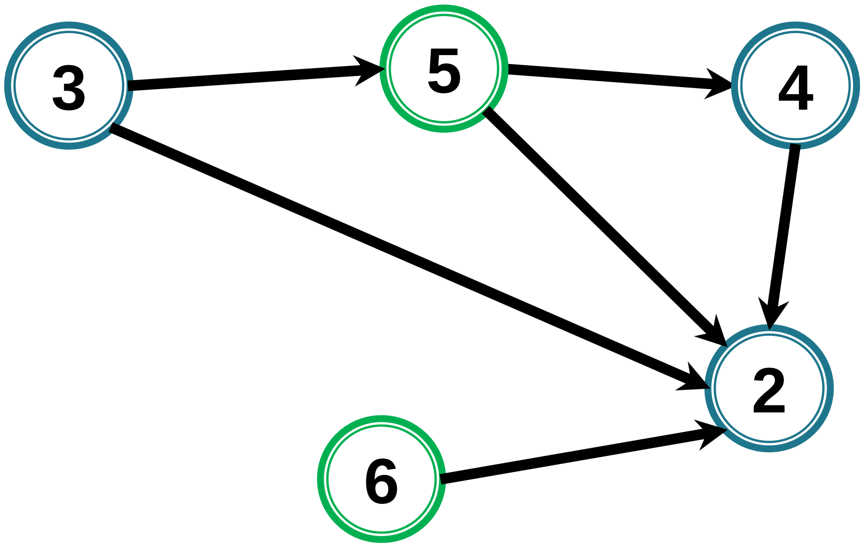
C: 1 3

Sortare topologică



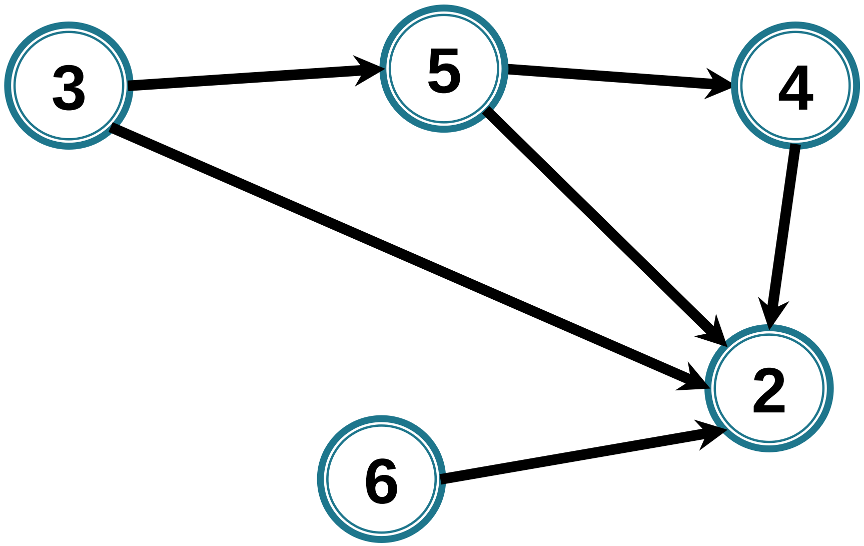
C: 1 3

Sortare topologică



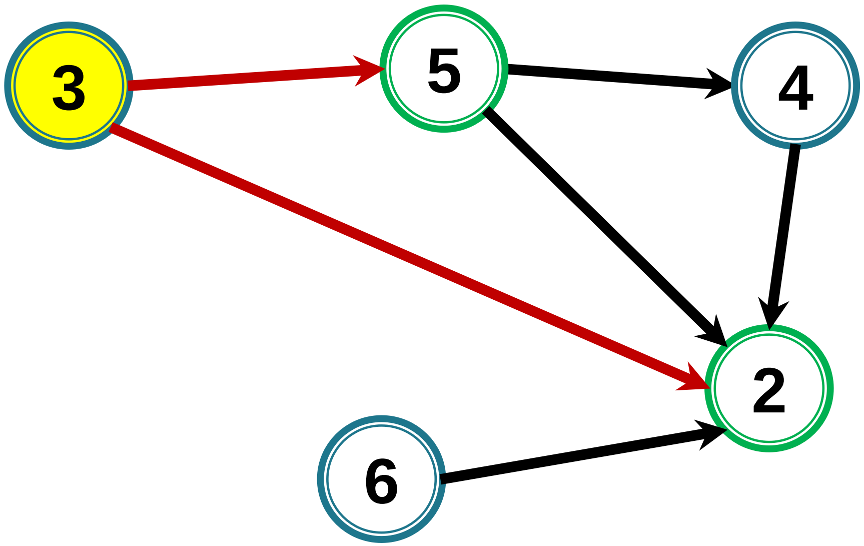
C: 1 3 6

Sortare topologică



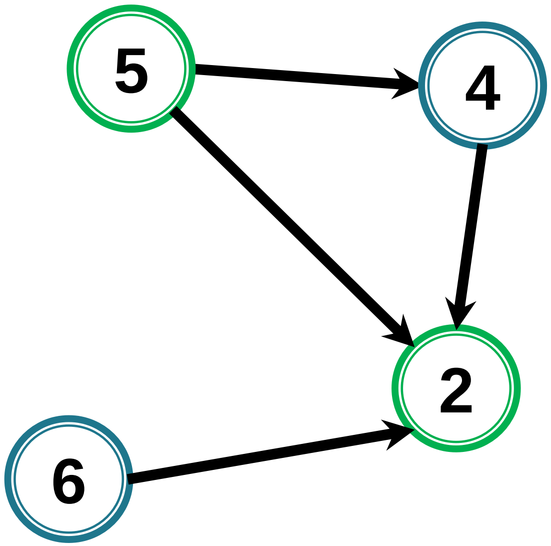
C: 1 3 6

Sortare topologică



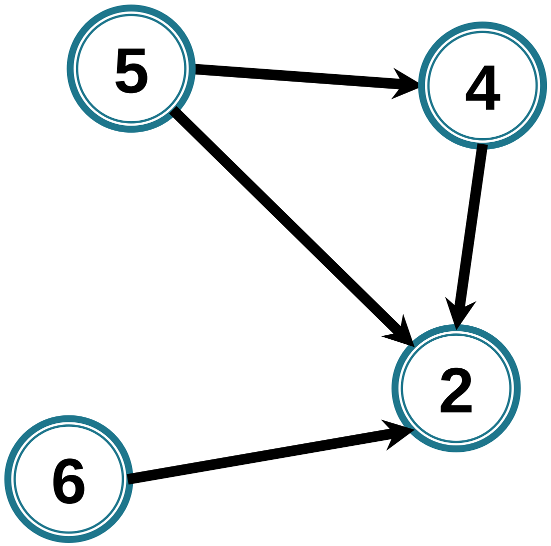
C: 1 3 6

Sortare topologică



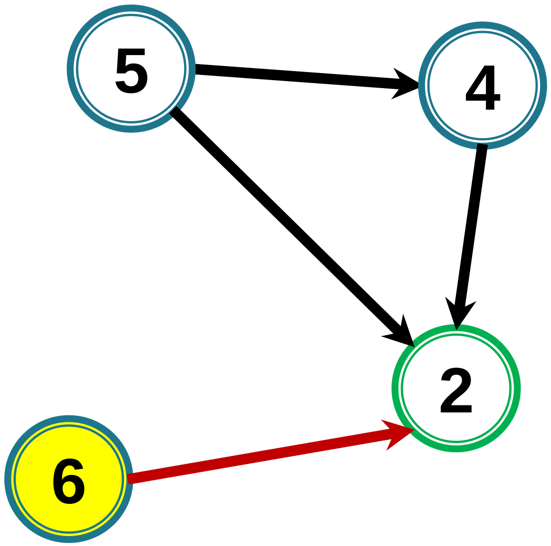
C: 1 3 6

Sortare topologică



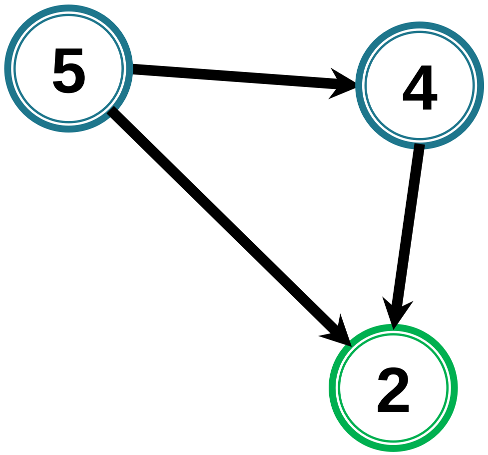
C: 1 3 6 5

Sortare topologică



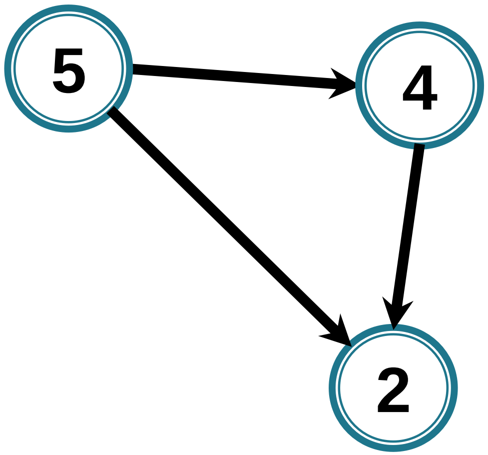
C: 1 3 6 5

Sortare topologică



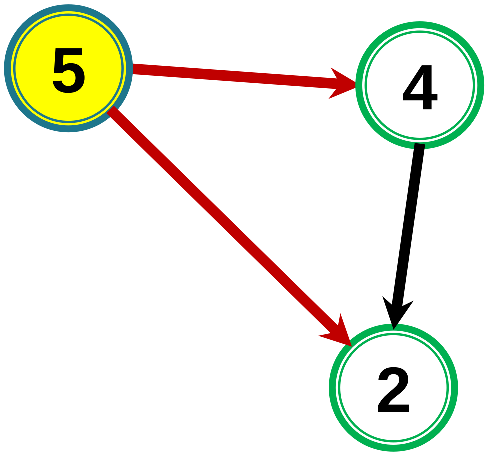
C: 1 3 6 5

Sortare topologică



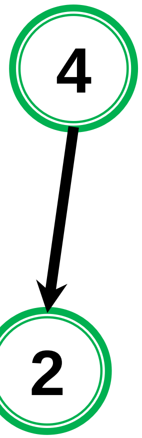
C: 1 3 6 5

Sortare topologică



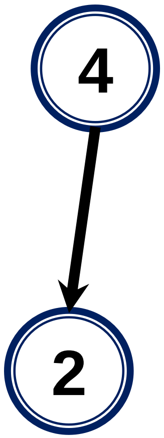
C: 1 3 6 5

Sortare topologică



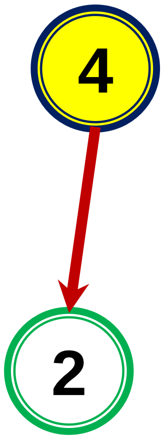
C: 1 3 6 5

Sortare topologică



C: 1 3 6 5 4

Sortare topologică



C: 1 3 6 5 4

Sortare topologică

C: 1 3 6 5 4

Sortare topologică

C: 1 3 6 5 4 2

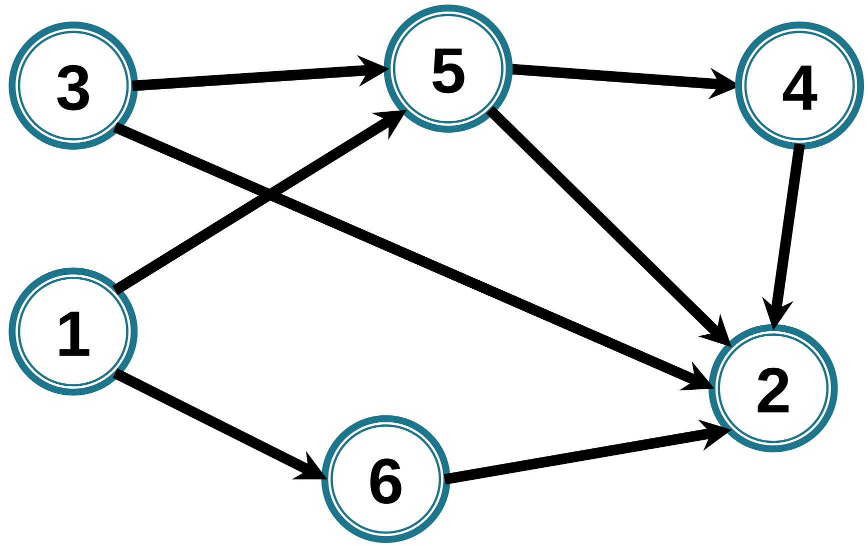
Sortare topologică

C: 1 3 6 5 4 2

Sortare topologică

C: 1 3 6 5 4 2

Sortare topologică



Sortare topologică: 1 3 6 5 4 2

Sortare topologică – Algoritm

```
coada C = ∅;
adauga in C toate vârfurile v cu d⁻[v]=0
```

Sortare topologică – Algoritm

```
coada C = ∅;
adauga in C toate vârfurile v cu d⁻[v]=0

cat timp C ≠ ∅ executa
    i ←  extrage(C);
    adauga i in sortare
    pentru ij ∈ E executa
```

Sortare topologică – Algoritm

```
coada C = ∅;
adauga in C toate vârfurile v cu d⁻[v]=0

cat timp C ≠ ∅ executa
    i ←  extrage(C);
    adauga i in sortare
    pentru ij ∈ E executa
        d⁻[j] = d⁻[j] - 1
```

Sortare topologică – Algoritm

```
coada C = ∅;
adauga in C toate vârfurile v cu d⁻[v]=0

cat timp C ≠ ∅ executa
   i ←  extrage(C);
   adauga i in sortare
   pentru ij ∈ E executa
      d⁻[j] = d⁻[j] - 1
      daca d⁻[j]==0 atunci
          adauga(j, C)
```

Sortare topologică

- Ce se întâmplă dacă graful conține totuși circuite?
- Cum detectăm acest lucru pe parcursul algoritmului?

Alt algoritm

Sortare topologică - Alt algoritm

- **E**xistă un algoritm bazat pe DF, pornind de la următoarea **observație:**
  - Dacă **fin**[u] = momentul la care a fost **finalizat** vârful u în parcurgerea DF avem:

$$uv \in E \Rightarrow fin[u] > fin[v]$$

(deoarece **uv nu poate fi arc de întoarcere)**

Sortare topologică – Alt algoritm

- Există un algoritm bazat pe DF, pornind de la următoarea **observație:**
  - Dacă **fin**[u] = momentul la care a fost **finalizat** vârful u în parcurgerea DF avem:

    $$uv \in E \Rightarrow fin[u] > fin[v]$$

  - Atunci sortare descrescătoare în raport cu fin => sortare topologică

Sortare topologică – Alt algoritm

- Există un algoritm bazat pe DF, pornind de la următoarea **observație:**
  - Dacă **fin**[u] = momentul la care a fost <u>**finalizat**</u> vârful u în parcurgerea DF avem:

    $$\mathbf{uv \in E \;\Rightarrow\; fin[u] > fin[v]}$$

  - Atunci sortare descrescătoare în raport cu fin => sortare topologică

    $\Rightarrow$ **Idee algoritm:** **Memorăm vârfurile într-o stivă pe măsura finalizării lor**; ordinea în care sunt scoase din stivă = sortare topologică

Sortare topologică – Alt algoritm

```
Stack S

DFS(i)
     viz[i] = 1
     pentru ij ∈ E
          daca viz[j]==0 atunci
               DFS(j)
     //i este finalizat
```

Sortare topologică – Alt algoritm

```
Stack S

DFS(i)
     viz[i] = 1
     pentru ij ∈ E
          daca viz[j]==0 atunci
               DFS(j)
     //i este finalizat
     push(S, i)


 pentru i ∈ V executa
        daca viz[i]==0 atunci
               DFS(i)


 cat timp S este nevida executa
        u = pop(S)
        adauga u in sortare
```