1

07.12.23

SEMINAR 10_132

1. Rezolvați în S_{13} ecuația

$$x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 5 & 12 & 11 & 10 & 9 & 7 & 8 & 3 & 13 & 2 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \overset{not}{=} \sigma$$

Încercat:

$\sigma = (1,5,9,13)(2,12,4,10)(3,11,6,7,8)$

$c \overset{not}{=} (1\ 5\ 2\ 6\ 3\ 4) \in S_n,\ n \geq 6.$

$c^2 = (1,2,3)(5,6,4)$

$c^3 = (1,6)(2,4)(3,5)$

$c^4 = (1,3,2)(5,4,6)$

$c^5 = (1,4,3,6,2,5)$

$c^6 = e$

Sol: Întrucât σ e produsul a două cicluri de lungime 4 și al unui ciclu de lungime 5, dacă σ e pătratul vreunei permutări din S_{13}, aceasta trebuie să conțină „niște" (adică măcar unul!) cicluri de lungime multiplu de 4 și un ciclu de lungime 5.

Dar, gândindu-ne în S_{13}, nu „încap" cicluri de lungime multiplu de 4 mai lungi de 12 elemente. În plus:

- Ciclurile de lg. 4 dau prin ridicare la pătrat produse de două cicluri de lg. 2;

- ciclurile de lg. 12 date prin ridicare la pătrat produc câte două cicluri de lg 6.

Ca urmare, singura posibilitate pentru o permutare π ca prin ridicare la pătrat să dea σ este ca π să fie produsul a două cicluri disjuncte de lungimi 8, respectiv 5. În plus, ciclul de lungime 8 trebuie să aibă ca orbită

$\{1, 5, 9, 13, 2, 12, 4, 10\}$, iar celălalt $\{3, 11, 6, 7, 8\}$.

Notând

$$\pi = (1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8)(3, b_2, b_3, b_4, b_5),$$

din $\pi^2 = \sigma$ obținem

$$\sigma = (1, a_3, a_5, a_7)(a_2, a_4, a_6, a_8)(3, b_3, b_5, b_2, b_4),$$

deci: $a_3 = 5$; $a_5 = 9$; $a_7 = 13$;

$(a_2, a_4, a_6, a_8) = (2, 12, 4, 10)$

și $b_3 = 11$, $b_5 = 6$, $b_2 = 7$, $b_4 = 8$;

obținem

$$\pi \in \{(1, 2, 5, 12, 9, 4, 13, 10)(3, 7, 11, 8, 6),$$
$$(1, 12, 5, 4, 9, 10, 13, 2)(3, 7, 11, 8, 6),$$
$$(1, 4, 5, 10, 9, 2, 13, 12)(3, 7, 11, 8, 6),$$
$$(1, 10, 5, 2, 9, 12, 13, 4)(3, 7, 11, 8, 6)\}$$ și

Se observă că fiecare permutare $x \in \mathcal{S}$ (3)
are într-adevăr proprietatea $x^2 = \sigma$.
Ca urmare, soluția ec. date este $\mathcal{S}$.

Considerăm permutarea

$S_{13} \ni \sigma = (1,3,5,2,4)(5,8,3,4,6)(10,3,11,2,8)$

- ca produs de cicluri disjuncte:

$\sigma = (1,3,11,4,6,2,5,8,10)$

- $\sigma^3 = (1,4,5)(3,6,8)(11,2,10)$

- $\mathrm{ord}(\sigma) = 9$.
- $\sigma^{2023} = \sigma^{9 \cdot 224 + 7} = (\sigma^9)^{224} \cdot \sigma^7 = \sigma^7 =$

$= (1,8,2,4,3,10,5,6,11)$.

Determinați $\mathrm{Hom}_{Grp}(\mathbb{Z}_6, S_3)$ și $\mathrm{Hom}_{Grp}(S_3, \mathbb{Z}_6)$.

Pentru detalierea considerațiilor privitoare la S_3, vom nota $\rho = (1,3,2)$ și $\sigma = (1,2)$.
Deci $\rho^3 = e$; $\sigma^2 = e$ și $\sigma\rho = (1,3) = \rho^2\sigma$.

Sol: Fie $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_6, S_3)$.

Cât e $\ker f$? $\Leftarrow$ Asta e o întrebare ce constituie un bun punct de plecare pentru rezolvare!

- Dacă $\ker f = \mathbb{Z}_6$, atunci $f(\hat{a}) = e$ $\forall \hat{a} \in \mathbb{Z}_6$
(îl notăm cu f_e pe acest f)

• Dacă $\ker f = \hat{2}\mathbb{Z}_6$, atunci, întrucât

$$\frac{\mathbb{Z}_6}{\hat{2}\mathbb{Z}_6} = \frac{\mathbb{Z}_6}{\ker f} \simeq \operatorname{im} f,$$

$$\frac{\mathbb{Z}_6}{\hat{2}\mathbb{Z}_6} \simeq \mathbb{Z}_2.$$

$\boxed{\text{Dacă } d \mid n, \quad \frac{\mathbb{Z}_n}{\hat{d}\mathbb{Z}_n} \simeq \mathbb{Z}_d}$

Atunci, ~~cum~~ $\operatorname{im} f \leq S_3$ și $|\operatorname{im} f| = 2$, există o transpoziție τ așa încât $\operatorname{im} f = \{e, \tau\}$.

Atunci $f(\hat{0}) = e$ și $f(\hat{1}) = \tau$; cum f e morfism de grupuri, $f(\hat{a}) = \tau^a = \begin{cases} e, & a \text{ e par} \\ \tau, & a \text{ e impar} \end{cases}$

$\forall a \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

Se verifică imediat că f de mai sus e morfism de grupuri; îl notăm cu f_τ.

• Dacă $\ker f = \hat{3}\mathbb{Z}_6$, atunci, cum

$$\mathbb{Z}_3 \simeq \frac{\mathbb{Z}_6}{\hat{3}\mathbb{Z}_6} = \frac{\mathbb{Z}_6}{\ker f} \simeq \operatorname{im} f, \quad \text{avem } |\operatorname{im} f| = 3,$$

deci $\operatorname{im} f = \{e, \rho, \rho^2\}$.

Atunci ~~putem avea~~ $f(\hat{0}) = e$;

putem avea $f(\hat{1}) = \rho$ sau $f(\hat{1}) = \rho^2$.

Dacă $f(\hat{1}) = \rho$, atunci $f(\hat{a}) = \rho^a = \begin{cases} e, & a \in \{0,3\} \\ \rho, & a \in \{1,4\} \\ \rho^2, & a \in \{2,5\} \end{cases}$

$\forall a \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

~~Dacă~~ Notăm această funcție f cu f_ρ;

este imediat că e morfism de grupuri

(căci $f(\hat{a}+\hat{b}) = f(\widehat{a+b}) = \rho^{a+b} = \rho^a \cdot \rho^b = f(\hat{a}) \cdot f(\hat{b})$).

(5)

Analog, dacă $f(\hat{1}) = \rho^2$ atunci

$f(\hat{a}) = (\rho^2)^a = \rho^{2a}$ $\forall a \in \mathbb{Z}$.

(e corect def., căci dacă $\hat{a} = \hat{b}$,
$b - a \vdots 6$, deci $\exists k \in \mathbb{Z}$ $b = a + 6k$ și

avem
$\rho^{2b} = \rho^{2(a+6k)} = \rho^{2a+12k} = \rho^{2a} \cdot (\rho^3)^{4k} = \rho^{2a} \cdot e^{4k} = \rho^{2a}$);

notăm această funcție cu f_{ρ^2}.

E imediat că e morfism de grupuri.

Dacă $\ker f = \hat{0}\mathbb{Z}_6 = \{\hat{0}\}$, atunci

$$\mathbb{Z}_6 \simeq \frac{\mathbb{Z}_6}{\{\hat{0}\}} = \frac{\mathbb{Z}_6}{\ker f} \simeq \operatorname{Im} f, \text{ deci } \operatorname{Im} f:$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ e ciclic} \\ \bullet\ \left.\begin{array}{l} |\operatorname{Im} f| = |\mathbb{Z}_6| = 6. \\ \text{Dar } \operatorname{Im} f \subset S_3 \\ |S_3| = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{Im} f = S_3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

S_3 e ciclic $\Rightarrow$ S_3 e comutativ, abs.

Trecând în revistă cazurile studiate mai sus găsim, cu notațiile anterioare,

$\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_6, S_3) = \{f_e\} \cup \{f_\tau : \tau \text{ e transpoziție}\} \cup$
$\cup \{f_\rho, f_{\rho^2}\}$.

TD Determinați $\operatorname{Hom}(S_3, \mathbb{Z}_6)$