(1) 16.11.23

SEMINAR 7_133

$\mathbb{1} \overset{not}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $I \overset{not}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $J \overset{not}{=} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$;

$K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$.

$\cdot$	$\mathbb{1}$	$-\mathbb{1}$	I	$-I$	J	$-J$	K	$-K$
$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	$-\mathbb{1}$	I	$-I$	J	$-J$	K	$-K$
$-\mathbb{1}$	$-\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	$-I$	I	$-J$	J	$-K$	K
I	I	$-I$	$-\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	K	$-K$	$-J$	J
$-I$	$-I$	I	$\mathbb{1}$	$-\mathbb{1}$	$-K$	K	J	$-J$
J	J	$-J$	$-K$	K	$-\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	I	$-I$
$-J$	$-J$	J	K	$-K$	$\mathbb{1}$	$-\mathbb{1}$	$-I$	I
K	K	$-K$	J	$-J$	$-I$	I	$-\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$
$-K$	$-K$	K	$-J$	J	I	$-I$	$\mathbb{1}$	$-\mathbb{1}$

$\langle \mathbb{1} \rangle = \{\mathbb{1}\}$

$\langle -\mathbb{1} \rangle = \{-\mathbb{1}, \mathbb{1}\}$

$\langle I \rangle = \{I, -\mathbb{1}, -I, \mathbb{1}\} = \langle -I \rangle$

$\langle J \rangle = \{\mathbb{1}, J, -J, -\mathbb{1}\} = \langle -J \rangle$.

$\langle K \rangle = \{1, K, -\mathbb{1}, -K\} = \langle -K \rangle$.

Am scris toate subgrupurile ciclice ale lui Q și niciunul nu e Q. Deci, Q nu e ciclic

Def Q s.n. GRUPUL CUATERNIONILOR

CURS: T. LAGRANGE:

Dacă G e grup și $H \leq G$, atunci

$$\underbrace{|G|}_{\text{ordinul lui } G} = \underbrace{|H|}_{\text{ordinul lui } H} \cdot |G:H| \to \text{indicele lui } H \text{ în } G.$$

LATICEA SUBGRUPURILOR LUI Q:

Q

$\{1,-1,i,-i\}$ $\quad \{1,-1,j,-j\}$ $\quad \{1,-1,k,-k\}$

$\{1,-1\}$

$\{1\}$

Dacă G e grup, iar $H \leq G$, atunci

$$|(G/H)_s| = |(G/H)_d|.$$

Se poate întâmpla să avem chiar

$(G/H)_s = (G/H)_d$ sau nu (v. sem 7_132)

<u>CURS</u>: (Def): Spunem că H e SUBGRUP NORMAL al lui G dacă $(G/H)_s = (G/H)_d$.

not: $H \trianglelefteq G$ $\quad \forall x \in G \ \ xH = Hx$

$\Updownarrow$

$\forall x \in G \ \ xHx^{-1} = H$

$\Updownarrow$

$\forall x \in G \ \ xHx^{-1} \subset H$

<u>OBS</u>: Orice subgrup al unui grup comutativ e normal

$\{1,7\} \cdot \{10, 20, 90\} = \{10, 20, 90, 70, 140, 630\}$

Alte criterii de identificare a subgrupurilor normale:

(0) $\{e\} \trianglelefteq G$; $G \trianglelefteq G$

(1) Orice subgrup de indice 2 e normal

(2) Intersecție de subgrupuri normale e subgrup normal

dem: Fie $(H_\alpha)_{\alpha \in A}$ cu $H_\alpha \trianglelefteq G$,

Fie $x \in G$. Fie $h \in H \overset{not}{=} \bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha$

Atunci $\forall \alpha \in A \ \ h \in H_\alpha$

deci, fiindcă $H_\alpha \trianglelefteq G$, $xhx^{-1} \in H_\alpha, \forall \alpha \in A$,

deci $xhx^{-1} \in H = \bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha$, Deci,

$\forall x \in G \quad xHx^{-1} \subset H$.

Deci, $H \trianglelefteq G$.

Ca aceasta

Laticea subgrupurilor normali ale lui Q coincide cu laticea subgrupurilor lui Q

Să descriem grupul factor $Q/_{<I>}$:

Noi știm de la curs:

Dacă $H \trianglelefteq G$,

$$\frac{G}{H} = (G/H)_{\Delta} = \{xH : x \in G\}$$

mulțimea dublă centă a lui $\frac{G}{H}$

uneori se folosește notația $\{\hat{x} : x \in G\}$.

$$(xH) \cdot (yH) = (xy)H \longrightarrow \text{operația lui } G/H$$

cu notația „$\hat{x}$"

asta se rescrie

$$\hat{x} \cdot \hat{y} = \widehat{xy}$$

Deci:

$$Q/_{<I>} = \{\{1, I, -1, -I\}, \{J, -J, K, -K\}\}$$

cu operația

	$\{1, I, -1, -I\}$	$\{J, -J, K, -K\}$
$\{1, I, -1, -I\}$	$\{1, I, -1, -I\}$	$\{J, -J, K, -K\}$
$\{J, -J, K, -K\}$	$\{J, -J, K, -K\}$	$\{1, I, -1, -I\}$

Mai sus am folosit niște notații precise, dar f. explicite.

Notațiile uzuale mult mai elegante în registrul:

$Q/_{\langle I\rangle} = \{\hat{1}, \hat{j}\}$

cu operația

	$\hat{1}$	$\hat{j}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{j}$
$\hat{j}$	$\hat{j}$	$\hat{1}$

Asta e descrierea grupului factor $Q/_{\langle I\rangle}$.

$\boxed{TD}$ Descrieți grupul factor $Q/_{\{-1,1\}}$.

Care din următoarele grupuri e ciclic și de ce?

• $\mathbb{Z}$ ⟶ Da, că e generat de $\{1\}$

• $\mathbb{Z}_{20}$ • $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_7$ • $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8$ • $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}$

Da, căci e generat de $\{\hat{1}\}$.

GRS! $\boxed{T}$ $(m,n)=1 \iff \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_{mn}$

Presupunem că $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}$ e ciclic.

Atunci există $a, b \in \mathbb{Z}$ așa încât

$<(\hat{a}, b)> = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}$

Atunci există $m, n \in \mathbb{Z}$ așa ca

$(*)$ $m \cdot (\hat{a}, b) = (\hat{1}, 0) \Rightarrow mb = 0$

și $n \cdot (\hat{a}, b) = (\hat{0}, 1) \Rightarrow nb = 1 \Rightarrow b \neq 0$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow m = 0$.

Ca urmare,

$(*) \Rightarrow (\hat{1}, 0) = 0 \cdot (\hat{a}, b) = (\hat{0}, 0)$,

deci $\hat{1} = \hat{0}$, fals.

Rămâne, deci, că $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}$ nu e ciclic.

$\boxed{\text{TD}}$ Care din grupurile

$\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}$, $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{13}$, $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}$

e ciclic și care nu? Justificați!