(1) 07.12.23

SEMINAR 9 _ 133

INEL = TRIPLET ORDONAT alcătuit din:

- o mulțime nevidă R
- două operații algebrice, Δ și $\circ$, pe R, astfel încât:

notații extrase de provizoriu!

(i) (R, Δ) e grup abelian

(ii) $(R, \circ)$ e semigrup

(iii) $\circ$ e distributivă în raport cu Δ

adică $\circ$ e distributivă la stânga și distributivă la dreapta în raport cu Δ

$\forall a, b, c \in R \quad a \circ (b \Delta c) = (a \circ b) \Delta (a \circ c)$

$\forall a, b, c \in R \quad (b \Delta c) \circ a = (b \circ a) \Delta (c \circ a)$

Exemple de inele: I: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$; $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$; $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$; $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

Obs: Vom nota frecvent prima operație a unui inel cu „+" și pe cea de-a doua cu „·" CHIAR DACĂ ELE NU AU, DE FAPT, NIMIC DE-A FACE CU ADUNAREA SAU CU ÎNMULȚIREA STANDARD DIN $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$

II Dat fiind un inel comutativ și unitar R, și dat $n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathcal{M}_n(R), +, \cdot)$ e inel unitar. ②

III Dat fiind un inel comutativ și unitar, $(R[X], +, \cdot)$ e inel comutativ și unitar

IV $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$, $n \in \mathbb{N}^*$

V „INELUL PRODUS":

Date fiind „niște" inele, pe produsul lor cartezian definim „+" și „·" PE COMPONENTE. De această manieră obținem pe produsul cartezian respectiv o structură de inel

măcar unul!

Obs ~~Date fiind inelele~~ R_1 și R_2, inelul produs $R_1 \times R_2$ e comutativ dacă R_1 și R_2 sunt comutative.

Dem: „⇐": Fie $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R_1 \times R_2 \overset{not}{=} R$

Atunci $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1y_2) = (x_2x_1, y_2y_1) = (x_2, y_2)\cdot(x_1, y_1)$.

Ca urmare, înmulțirea din $R_1 \times R_2$ e comutativă, deci $R_1 \times R_2$ e comutativ.

„⇒": Fie $y_1, y_2 \in R_2$.

Cum R e comutativ,

$(0, y_1y_2) = (0, y_1)\cdot(0, y_2) = (0, y_2)(0, y_1) = (0, y_2y_1)$.

deci $y_1 y_2 = y_2 y_1$.

Ca urmare, „·" e comutativă pe R_2.

Deci, R_2 e comutativ.

Analog se arată că R_1 e comutativ. □

Analog se demonstrează:

Obs. Un produs direct de inele este comutativ ddacă fiecare factor al produsului e comutativ.
↳ e inel!!

În acelaşi registru:

Obs. Un produs direct de inele e unitar ddacă fiecare factor e unitar.
În plus, unitatea lui $R \overset{not}{=} \prod_{i\in I} R_i$

este $(1_i)_{i\in I}$
↳ Elementul unitate din R_i (NU trebuie să fie identice!)

ELEMENTE „INTERESANTE" DIN INELE

Fie $(R,+,\cdot)$ un inel şi fie $a\in R$.

Def a s.n. IDEMPOTENT dacă $a^2=a$

Obs Dacă $a\in R$ e idempotent,
$a^n = a \quad \forall n\in \mathbb{N}^*$.

NOT (ad-hoc!) $idemp(R) = \{a\in R : a$ e idempotent$\}$

Def a s.n. NILPOTENT dacă $\exists n \in \mathbb{N}^* : a^n = 0$

NOT $\mathcal{N}(R) \overset{not}{=} \{a \in R : a \text{ e nilpotent}\}$.

Def a s.n. DIVIZOR AL LUI ZERO LA STG/DR dacă $\dfrac{\exists b \in R \setminus \{0\} \quad ab = 0}{\exists c \in R \setminus \{0\} \quad ca = 0}$.

NOT (ad-hoc) $\mathcal{Z}(R) = \{a \in R : a \text{ e divizor al lui zero}\}$

Dacă R e unitar:

Def a s.n. INVERSABIL LA $\dfrac{\text{STG}}{\text{DR}}$

dacă $\dfrac{\exists b \in R \quad ba = 1}{\exists c \in R \quad ac = 1}$

a s.n. INVERSABIL dacă e inversabil și la stg, și la dr.

$c \overset{ba=1}{=} bac \overset{ac=1}{=} b$.

Prop $a \in R$ e inversabil ddacă $\exists a' \in R \quad aa' = 1 = a'a$.

NOT $U(R) \overset{not}{=} \{a \in R : a \text{ e inversabil}\}$.

---

pt inelele „standard”:

$U(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$; $\mathcal{Z}(\mathbb{Z}) = \{0\}$; $\mathcal{N}(\mathbb{Z}) = \{0\}$

$\mathrm{Idemp}(\mathbb{Z}) = \{0, 1\}$.

(Obs) Orice element nilpotent e divizor al lui zero!

$U(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^*$; $\mathcal{Z}(\mathbb{Q}) = \{0\}$; $\mathcal{N}(\mathbb{Q}) = \{0\}$;
$\mathrm{Idemp}(\mathbb{Q}) = \{0,1\}$.

$U(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$; $\mathcal{Z}(\mathbb{R}) = \{0\}$; $\mathcal{N}(\mathbb{R}) = \{0\}$;
$\mathrm{Idemp}(\mathbb{R}) = \{0,1\}$.

$U(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$; $\mathcal{Z}(\mathbb{C}) = \{0\}$; $\mathcal{N}(\mathbb{C}) = \{0\}$;
$\mathrm{idemp}(\mathbb{C}) = \{0,1\}$.

(Def) CORP = inel unitar în care:

(i) $1 \neq 0$

și (ii) toate elementele nenule sunt inversabile

Curs: (Def) INEL INTEGRU = inel fără divizori (nenuli!) ai lui zero.

(Def) DOMENIU (DE INTEGRITATE) = inel comutativ, unitar și integru

(Def) Inel REDUS = inel fără elemente nilpotente (nenule!)

Ce alți termeni, din cele de mai sus deducem

- $\mathbb{Z}$ este domeniu de integritate (deci, e și inel redus!)
- $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ și $\mathbb{C}$ sunt corpuri comutative.

(Obs.: Orice corp e inel integru!)

$\boxed{TD}$ Demonstrați că, date fiind inelele R_1, R_2, R_3, $R_1 \times R_2 \times R_3$ e unitar dacă fiecare R_i, $i = \overline{1,3}$ e unitar.