① 02.11.23

SEMINAR I - 133

Considerăm două grupuri $(G,\circ)$ și (Γ,Δ).

Pe $\mathcal{T} = G\times\Gamma$ definim operația

$$(a,\alpha)\,\square\,(b,\beta) = (a\circ b,\ \alpha\Delta\beta)$$

Arătați că $(\mathcal{T},\square)$ e grup.

__Dem__: Evident, $\square$ e lege de compoziție pe $\mathcal{T}$. (LC)

Fie $A = (a,\alpha)$, $B = (b,\beta)$, $C = (c,\gamma) \in \mathcal{T}$.

Atunci

$(A\square B)\square C = (a\circ b, \alpha\Delta\beta)\square C = ((a\circ b)\circ c, (\alpha\Delta\beta)\Delta\gamma) = (1)$

$A\square(B\square C) = A\square(b\circ c, \beta\Delta\gamma) = (a\circ(b\circ c), \alpha\Delta(\beta\Delta\gamma)) = (2)$

Dar, cum $\circ$ și Δ sunt asociative, $(1) = (2)$,

deci $(A\square B)\square C = A\square(B\square C)$.

Ca urmare, $\square$ e asociativă. (A)

Notăm cu e e.n. al lui G, respectiv cu ε e.n al lui Γ. Notăm $\exists = (e,\varepsilon)$.

Fie $A = (a,\alpha)\in\mathcal{T}$.

$A\square\exists = (a\circ e, \alpha\Delta\varepsilon) = (a,\alpha) = A$.

$\exists\square A = (e\circ a, \varepsilon\Delta\alpha) = (a,\alpha) = A$.

Ca urmare, $\exists$ e element neutru pt $\square$,

deci legea $\square$ admite e.n (EN)

Fie $A = (a,\alpha)\in\mathcal{T}$.

Notăm cu a' simetricul (din G al) lui a, respectiv cu $'\alpha$ simetricul (din Γ al) lui α

Notăm $\tilde{A} = (a', 'α)$. (2)

Atunci $A \square \tilde{A} = (a \circ a', α \Delta 'α) = (e, ε) = \exists$.

$\tilde{A} \square A = (a' \circ a, 'α \Delta α) = (e, ε) = \exists$.

Ca urmare, $\tilde{A}$ e simetricul lui A în raport cu $\square$. Deci, A e simetrizabil în raport cu $\square$. Cum A a fost ales arbitrar, concluzionăm că toate elementele lui $\mathcal{J}$ sunt simetrizabile în raport cu $\square$ (TES).

Din (LC), (A), (EN) și (TES) obținem faptul că $(\mathcal{J}, \square)$ e grup.

Def! $(\mathcal{J}, \square)$ s.n. PRODUSUL DIRECT al grupurilor $(G, \circ)$ și (Γ, Δ)

Exemple: Considerăm grupul $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{Z}_4, *)$

$$(5, \hat{1}) * (12, \hat{3}) = (60, \hat{0})$$

$$(\pi, \hat{2}) * \left(\frac{7}{5}, \hat{3}\right) = \left(\frac{7\pi}{5}, \hat{1}\right)$$

$$(3, \hat{3})' = \left(\frac{1}{3}, \hat{1}\right)$$

$$e_{\mathbb{R}^* \times \mathbb{Z}_4} = (1, \hat{0})$$

Alcătuiți tabla grupului $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$.

	$\hat{0}\bar{0}$	$\hat{0}\bar{1}$	$\hat{0}\bar{2}$	$\hat{1}\bar{0}$	$\hat{1}\bar{1}$	$\hat{1}\bar{2}$
00	00	01	02	10	11	12
01	01	02	00	11	12	10
02	02	00	01	12	10	11
10	10	11	12	00	01	02
11	11	12	10	01	02	00
12	12	10	11	02	00	01

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

<u>Curs</u>: Dacă $a, b \in \mathbb{N}^*$ și $(a,b)=1$,

atunci $\underline{\mathbb{Z}_{ab} \underset{Grp}{\simeq} \mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b}$

Fie a, b ca în enunț

<u>dem</u>: Considerăm $f: \mathbb{Z}_{ab} \to \mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b$,

$f(\hat{x}) = (\bar{x}, \bar{\bar{x}})$

Dacă $x, y \in \mathbb{Z}$ sunt așa încât $\hat{x} = \hat{y}$,

atunci $x - y \,\vdots\, ab, \begin{cases} \vdots\, a \Rightarrow \bar{x} = \bar{y} \\ \vdots\, b \Rightarrow \bar{\bar{x}} = \bar{\bar{y}} \end{cases} \Rightarrow (\bar{x}, \bar{\bar{x}}) = (\bar{y}, \bar{\bar{y}})$

4

Ca urmare, f e corect definită.

Fie $x, y \in \mathbb{Z}$

$$f(\hat{x}+\hat{y}) = f(\widehat{x+y}) = (\overline{x+y}, \overline{\overline{x+y}}) =$$

$$= (\bar{x}+\bar{y}, \bar{\bar{x}}+\bar{\bar{y}}) = (\bar{x}, \bar{\bar{x}}) + (\bar{y}, \bar{\bar{y}})$$

$$= f(\hat{x}) + f(\hat{y}).$$

Deci, f e morfism de grupuri. (1)

Fie $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{Z}_{ab}$ astfel ca $f(\hat{x}) = f(\hat{y})$.

Atunci $(\bar{x}, \bar{\bar{x}}) = (\bar{y}, \bar{\bar{y}})$, deci

$$\left.\begin{cases} \bar{x} = \bar{y} \iff a \mid x-y \\ \bar{\bar{x}} = \bar{\bar{y}} \iff b \mid x-y \end{cases}\right\} \xRightarrow{(a,b)=1} ab \mid x-y \Rightarrow \hat{x} = \hat{y}.$$

Deci, f e injectivă (2)

Ca urmare, $|\operatorname{im} f| = |\mathbb{Z}_{ab}|$

Dar, $\operatorname{im} f \subset \mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b$

și avem

$$ab = |\mathbb{Z}_{ab}| = |\operatorname{im} f| \le |\mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b| = ab.$$

Deci în „$\le$" e de fapt „$=$".

În concluzie,

$$\left.\begin{array}{l} |\operatorname{im} f| = |\mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b| < +\infty \\ \text{Dar } \operatorname{im} f \subset \mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{im} f = \mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b$$

Ca urmare, f e injectivă (3)

Din (1), (2) și (3) obținem faptul că f e izomorfism de grupuri.

Ca urmare, $\mathbb{Z}_{ab} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b$. □

★ Determinați $\mathrm{Hom}_{Grp}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_5)$

NOTAȚIE ① Date fiind două grupuri, G_1 și G_2, notăm cu $\mathrm{Hom}_{Grp}(G_1, G_2)$ mulțimea morfismelor de grupuri de la G_1 la G_2.
Homomorfism

② Dat fiind un grup G,

$\mathrm{End}_{Grp}(G)$ = Mulțimea endomorfismelor de grup ale lui G.

$\mathrm{Aut}_{Grp}(G)$ = Mulțimea automorfismelor de grup ale lui G.

Sol ★: Fie $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_5)$.

Fie $x \in \mathbb{Q}$.

Atunci $f(x) = f\left(\frac{x}{5} + \frac{x}{5} + \frac{x}{5} + \frac{x}{5} + \frac{x}{5}\right) =$

$= f\left(\frac{x}{5}\right) + f\left(\frac{x}{5}\right) + f\left(\frac{x}{5}\right) + f\left(\frac{x}{5}\right) + f\left(\frac{x}{5}\right) = 5 f\left(\frac{x}{5}\right) = \hat{0}$.

Ca urmare, $f(x) = \hat{0}\ \forall x \in \mathbb{Q}$. (6)

Reciproc, pt $\boxed{g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}_5,\ g(x) = \hat{0}}$ $\Rightarrow$ e notată uneori cu 0.

dacă $x, y \in \mathbb{Q}$ avem

$$g(x+y) = \hat{0} = \hat{0} + \hat{0} = g(x) + g(y),$$

deci $g \in Hom(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_5)$

Ca urmare, $Hom(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_5) = \{g\}$, unde g e funcția de mai sus. $\square$

Determinați $Hom(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$

Sol: Fie $f \in Hom(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$.

Presupunem că există $x \in \mathbb{Q}$ pt care $f(x) \neq 0$ și notăm $\alpha = f(x)$.

Atunci $2f\left(\frac{x}{2\alpha}\right) = f\left(\frac{x}{2\alpha}\right) + f\left(\frac{x}{2\alpha}\right) =$

$$= f\left(\frac{x}{2\alpha} + \frac{x}{2\alpha}\right) = f\left(\frac{x}{\alpha}\right) \quad (1)$$

Dar:

- Pt $\alpha > 0$:

$$f(x) = f\Big(\underbrace{\frac{x}{\alpha} + \frac{x}{\alpha} + \dots + \frac{x}{\alpha}}_{\alpha \text{ termeni}}\Big) = \underbrace{f\left(\frac{x}{\alpha}\right) + f\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \dots + f\left(\frac{x}{\alpha}\right)}_{\alpha \text{ termeni}} =$$

$$= \alpha f\left(\frac{x}{\alpha}\right), \text{ deci } f\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{f(x)}{\alpha}. \quad (2)$$

- Pt $\alpha < 0$, $0 = f(0) = f\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{x}{-\alpha}\right) = f\left(\frac{x}{\alpha}\right) + f\left(\frac{x}{-\alpha}\right) =$

$= f\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \frac{f(x)}{\alpha} \Rightarrow f\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{f(x)}{\alpha}$ (3)

(1), (2), (3) $\Rightarrow \boxed{\underbrace{\boxed{2f\left(\frac{x}{2\alpha}\right)}}_{\in \mathbb{Z}}}_{\in 2\mathbb{Z}} = \frac{f(x)^{2\alpha}}{\alpha} = 1$, ~~$\not\!\!\!$~~.

$\in 2\mathbb{Z}$ (adică e par)

Rămâne, deci, că $f(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{Q}$.

Faptul că $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 0$ e morfism de grupuri e imediat.

În concluzie,

$\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = \{0\}$ $\square$

(adică $h: \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$, $h(x) = 0$)