1 19.12.23

SEMINAR 12 _ 132

Curs:

Dacă $I \leq^d R$ și I conține un element a inversabil la dreapta (atunci $\exists b \in R$ $ab=1$), fie $x \in R$. Atunci $I \ni a\cdot(bx) = (ab)x = 1x = x$.

Deci, $I = R$.

Dacă avem un inel R și $a \in R$.

- Care e $\boxed{\text{subinelul lui } R \text{ generat de } a}$ Not ad-hoc: $S(a)$

(adică „cel mai mic" (C) subinel al lui R care-l conține pe a)

Î: Ce „tb" să punem"?

R: a, 0, $\underset{}{a+a} \overset{not}{=} 2a$; $a+a+a \overset{not}{=} 3a$; ...

$-a$; $-a+(-a) = -2a$; ...

adică opusul lui a

Morala: „Ne trebuie" toate elem. de forma na, $n \in \mathbb{Z}$

a^2 ... ma^2, $m \in \mathbb{Z}$

a^3 ... pa^3, $p \in \mathbb{Z}$

Deci, tb puse toate elem. de forma ka^n ($k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$).

Și și sumele de astfel de elemente, adică elementele de forma $\alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + \dots + \alpha_n a^n$

$n \in \mathbb{N}^*$, și $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$

$(\alpha_k a^k)(\beta_l a^l) = \alpha_k \beta_l a^{k+l}$

$= (\underbrace{a^k + \dots + a^k}_{\alpha_k \text{ termeni}})(\underbrace{a^l + a^l + \dots + a^l}_{\beta_l}) = \underbrace{a^{k+l} + a^{k+l} + \dots + a^{k+l}}_{\alpha_k \beta_l}$

Morala: $J(a) = \{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k a^k : n \in \mathbb{N}^*, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}\}$.

Dacă R e inel comutativ,

$J(\{a, b\}) = ?$

Procedând ca mai sus, obținem

$J(\{a, b\}) = \{\sum_{\substack{1 \le k \le m \\ 1 \le l \le n}} \alpha_{kl} a^k b^l : m, n \in \mathbb{N}$, nu ambii nuli, $\alpha_{kl} \in \mathbb{Z}\}$

cu convenția: • dacă $n = 0$ nu apar termenii cu b
• dacă $m = 0$ nu apar termenii cu a.
~~„a^0, b^0 dispar"~~

Pe baza ideilor de mai sus, găsim:

Dacă R e inel comutativ, iar $M \subset R$, $J(M)$ constă în expresiile de forma

$$\sum a_{k_1 k_2 \dots k_r} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_r^{k_r} \text{ cu } a_{k_1 \dots k_r} \in \mathbb{Z},$$

$x_1, \dots, x_r \in M$, $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$, $k_1 + \dots + k_r \neq 0$,

adică, în esență, în expresiile polinomiale fără termen liber, cu coeficienți în $\mathbb{Z}$, de elemente din M.

Fie R un inel neunitar, iar $a \in R$.

$(\{a\})^d = ?$

Idealul drept al lui R generat de a.

Trebuie să punem ! $\cdot\, ka,\ k\in\mathbb{Z}$

$\underbrace{a+a+\dots+a}_{k} = a\underbrace{(1+1+\dots+1)}_{k}$ (pt $k>0$) $\in R$.

• $a\alpha\ ;\ \alpha\in R$.

Nu știm încă să punem și altceva.

De aceea, verific!

• $a\alpha - a\beta = a(\underbrace{\alpha-\beta}_{\in R}) \in \{a\cdot\mu : \mu\in R\}\quad \forall \alpha,\beta\in R$

• $(a\alpha)\gamma = a(\alpha\gamma) \in \{a\cdot\mu : \mu\in R\}.\ \forall \alpha,\gamma\in R$, ok.

Concluzie:

$$(\{a\})^d = \{a\cdot\alpha : \alpha\in R\} \overset{not}{=} aR$$

Analog se obține:

$$(a)^s = \{\alpha a : \alpha\in R\} \overset{not}{=} Ra$$

$$(a) = \{\alpha a\beta : \alpha,\beta\in R\} \overset{not}{=} RaR$$

Dar dacă avem mai mulți generatori?

$$(\{a,b\})^d = aR + bR = \{a\alpha+b\beta : \alpha,\beta\in R\}$$

$$(a,b,c)^d = \{a\alpha+b\beta+c\gamma : \alpha,\beta,\gamma\in R\}.$$

— —

În general,

$$(M)^d = \left\{\sum_{k=1}^{n} x_k\alpha_k : n\in\mathbb{N}^*,\ x_k\in M,\ \alpha_k\in R\right\}$$

$$(M)^s = \left\{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k : \text{—}\ \ \text{"}\ \ \text{—}\right\}$$

$$(M) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \beta_k : n \in \mathbb{N}^*, x_k \in M, \alpha_k, \beta_k \in R \right\}$$

Exemple: în $\mathbb{C}[X,Y]$.

$$(X, Y^2) = ?$$

Sol: $(X,Y^2) = \{ F(X,Y)\cdot X + G(X,Y)\cdot Y^2 : F, G \in \mathbb{C}[X,Y] \}$

TD E adevărat că (X,Y^2) constă exact în polinoamele fără termen liber și fără termeni de forma aY, $a \in \mathbb{C}$?