(1) 28.11.23

SEMINAR 9_132

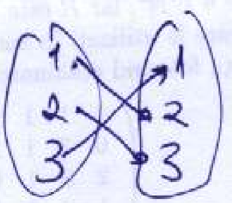
Folosim frecvent termenul de PERMUTARE a unei mulțimi A pentru a desemna o funcție bijectivă ~~σ~~ $: A \longrightarrow A$.

Notând $S(A) = \{f : A \to A \mid f \text{ e bijectivă}\}$, $(S(A), \circ)$ este grup. El s.n. GRUPUL PERMUTĂRILOR lui A.

În cazul particular $A_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, $S(A_n)$ se notează cu S_n.

După cum știm de la liceu, elementele lui S_n se reprezintă frecvent sub forma $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

D.ex., în S_3, bijecția



se reprezintă sub forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

[illegible] când compunem permutările scrise așa, LE APLICĂM DE LA DREAPTA LA STÂNGA!! (că $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, deci, prima se aplică g)

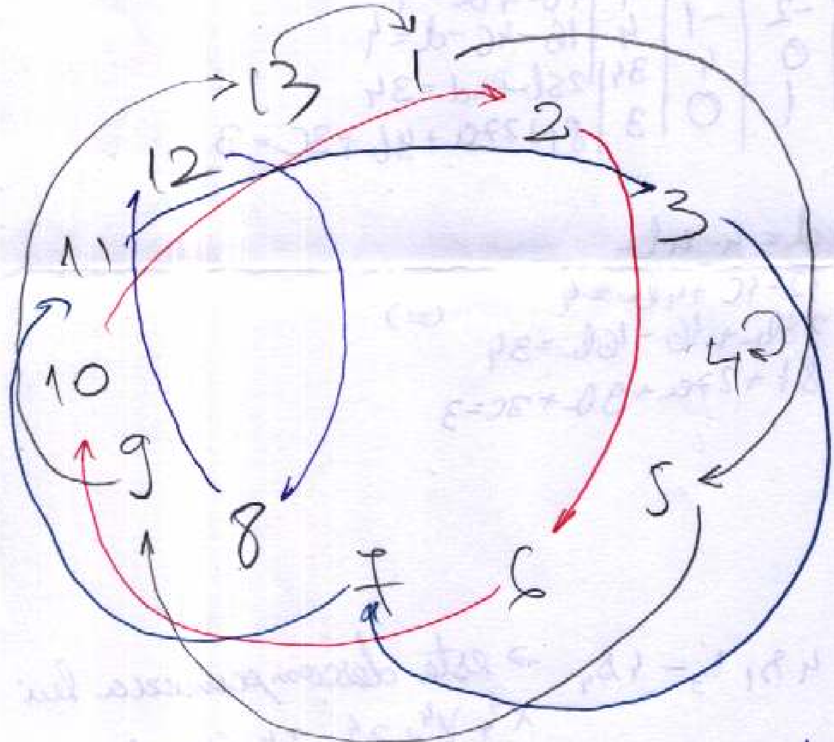
$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&3&2&4\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&3&5&1\end{pmatrix}$

Prea op simplu „citim de jos în sus"!!

(Dar e o mică problemă: ar apărea
$\begin{pmatrix}5&1&3&2&4\\1&2&3&4&5\end{pmatrix}$, scriere „nonstandard"!
De aceea, după acest pas rearanjăm coloanele!)

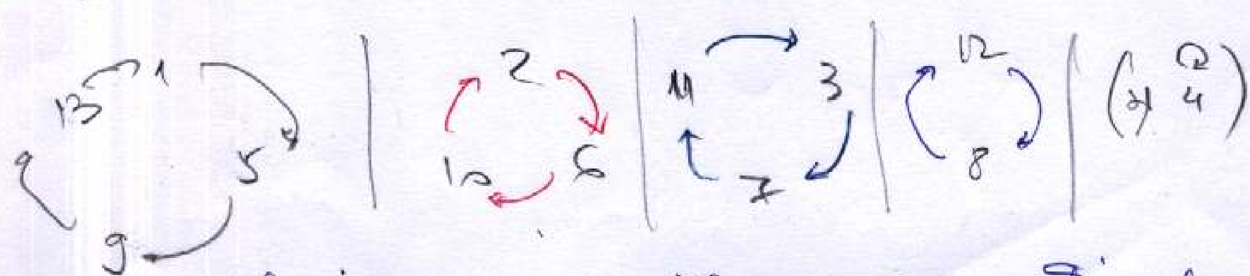
Considerăm

$\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13\\5&6&7&4&9&10&11&12&13&2&3&8&1\end{pmatrix}$



ATENȚIE!

Privind diagrama, constatăm că σ e „alcătuită din" ciclurile



Pt aceste cicluri avem următoarea convenție de reprezentare:

$(1,5,9,13)$ | $(2,6,10)$ | $(3,7,11)$ | $(8,12)$ | (4) (4)

După aplicarea acestei convenții, constatăm că, de pildă,

$$(1,5,9,13)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13\\5&2&3&4&9&6&7&8&13&10&11&12&1\end{pmatrix}$$

(gândind „trecere către următorul")

Acest tip de considerații conduce la definiția:

Def O permutare $\sigma\in S_n$ s.n. PERMUTARE CICLICĂ (sau, încă, CICLU) dacă există $\underbrace{\{i_1,i_2,\dots,i_k\}}\subset\{1,2,\dots,n\}$ a.î.

distincți: $i_j\neq i_l$ $\forall j\neq l$

$$\sigma(i_1)=i_2$$
$$\sigma(i_2)=i_3$$
$$\dots$$
$$\sigma(i_{k-1})=i_k$$
$$\sigma(i_k)=i_1$$
$$\sigma(j)=j\quad\forall j\in\{1,2,\dots,n\}\setminus\{i_1,i_2,\dots,i_k\}.$$

Dacă σ e ca mai sus, ea se notează $(i_1,i_2,\dots,i_k)$

Obs: În S_7, $(1,7,3)(2,4,6)=$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&2&1&4&5&6&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&4&3&6&5&2&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&4&1&6&5&2&3\end{pmatrix}$$

<u>Curs</u>: $\boxed{I}$ Orice permutare $\sigma \in S_n$ se scrie, în mod unic (dacă facem abstracție de ordinea factorilor), sub formă de produs de cicluri disjuncte

---

<u>Exemplu</u>: Considerăm permutarea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 5 & 12 & 9 & 10 & 3 & 2 & 11 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 13 \end{pmatrix} \in S_{13}$$

a) Descompuneți-o în produs de cicli disjuncți.

<u>Sol</u>: $\sigma = (1,5,3,9,7,11)(2,12,4,10,6)$

<u>Curs</u>: $\boxed{I}$ Orice permutare $\sigma \in S_n$ se scrie ca produs de transpoziții

(ca să vorbim:
TRANSPOZIȚIE = Ciclu de <u>lungime 2</u>)

---

b) Descompuneți-o în produs de transpoziții!

În S_5: $(2,5)(5,3) = (2,5,3)$

$(a,b)(b,c) = (a,b,c)$

În S_n: $(a,b)(b,c)(c,d)(d,e) = (a,b,c,d,e)$

<u>Morala</u>:

Obs. În S_n,

$$(i_1, i_2, \ldots, i_k) = (i_1, i_2)(i_2, i_3) \cdots (i_{k-1}, i_k).$$

Sol: $\sigma = (1,5)(5,3)(3,9)(9,7)(7,11)(2,12)(12,4)(4,10)(10,6)$ (**)

c) Determinați signatura! 5

Sol: Desc. e în regulă să facem cu $(-1)^{\text{Inv}(\sigma)}$,

$$\varepsilon(\sigma) \overset{(*)}{=} \varepsilon((1,5))\cdot\varepsilon((5,3))\cdot \ldots \cdot \varepsilon((10,6)) = (-1)^9 = -1$$

CURS $\boxed{\text{Prop}}$ Orice transpoziție e permutare impară!

d) Determinați ordinul!

CURS $\boxed{\text{Prop}}$: Dacă $c_1, c_2, \ldots, c_r \in S_n$ sunt cicluri disjuncte, atunci $\text{ord}(c_1 c_2 \cdots c_r) = [\text{ord}(c_1), \ldots, \text{ord}(c_r)]$.

Obs: În S_7!

$c \overset{\text{not}}{=} (3,2,5,1,6)$

$c^2 = (3,5,6,2,1)$

$c^3 = (3,1,2,6,5)$

$c^4 = (3,6,1,5,2)$

$c^5 = e$

Obs: Ca să ridic un ciclu la puterea p, îl PARCURG DIN p ÎN p!!!

COROLAR: CURS: Ordinul oricărui ciclu coincide cu lungimea sa.

Sol: $\text{ord}(\sigma) = [6,5] = 30$.

Calculați σ^{2023}

Sol: $\sigma^{2023} = \sigma^{30\cdot 67+13} = (\sigma^{30})^{67}\cdot\sigma^{13} =$

$= e^{67}\cdot\sigma^{13} = \sigma^{13} = (1,5,3,9,7,11)^{13}(2,12,4,10,6)^{13} =$

$= \left[(1,5,3,9,7,11)^{6}\right]^{2}\cdot(1,5,3,9,7,11)\cdot\left[(2,12,4,10,6)^{5}\right]^{2}\cdot$

$\cdot(2,12,4,10,6)^{3} =$

$= (1,5,3,9,7,11)\cdot(2,10,12,6,4)$

c) Rezolvați în S_{13} ecuația $x^2=\sigma$.

Sol: Presupunem că are soluții; fie x una din ele. Atunci:

$1 = \varepsilon(x)^2 = \varepsilon(x^2) = \varepsilon(\sigma) = -1$, contradicție!

Rămâne, deci, că ecuația dată nu are soluții în S_{13}.