Examen la algebră [1]
an I, sem. I
31.05.2022

Numele şi prenumele ...Voinea Ana Maria...
Grupa ...133...

La toate problemele veti lua valorile:

α = **numărul de litere al primului nume** = ..6...
β = **numărul de litere al primului prenume** = .3.....

Subiectul I.

1. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + 1 & , x \leq -\frac{1}{2} \\ x^2 + x + 1 & , x > -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Este funcţia f injectivă? Dar surjectivă? Calculaţi mulţimile $f([-2, 0])$ şi $f^{-1}([-3, 3])$. **(6 pct.)**

2. Pe $\mathbb{R}$ definim relaţia "$\sim$" astfel: $x \sim y$ dacă şi numai dacă $f(x) = f(y)$, unde f este funcţia de la punctul anterior. Să arate că $\sim$ este o relaţie de echivalenţă şi să se determine clasa de echivalenţă a numărului real 2022 în raport cu relaţia $\sim$. **(3 pct.)**

Subiectul II.

1. Determinaţi elementele de ordin 3 şi elementele de ordin 4 din grupul $(\mathbb{Z}_{\alpha+6}, +)$. **(3 pct.)**
2. Determinaţi elementele de ordin 6 din grupul $(\mathbb{Z}_{\alpha+6} \times \mathbb{Z}_{\beta+10}, +)$. **(3 pct.)**
3. Conţine grupul $(\mathbb{Z}_\alpha \times \mathbb{Z}_\beta, +)$ un element de ordin $\alpha \cdot \beta$? **(3 pct.)**

[1]**Toate subiectele sunt obligatorii.**
La fiecare subiect, înlocuiţi α şi β cu valorile specificate mai sus!
Toate răspunsurile trebuie justificate. Fiecare subiect trebuie scris pe foi separate.
Timp de lucru 2 ore. Succes!

Subiectul III. Se consideră permutarea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 9 & 1 & 5 & 11 & 10 & 3 & 4 & 6 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix} \in S_{11}.$$

1. Descompuneţi σ în produs de cicluri disjuncte şi în produs de transpoziţii. **(3 pct.)**
2. Aflaţi ordinul şi signatura permutării σ. Calculaţi $\sigma^{2022+\alpha}$. **(3 pct.)**
3. Determinaţi permutările $\tau \in S_{10}$ cu proprietatea că $\tau^2 = \sigma^\beta$. **(3 pct.)**

Subiectul IV.

1. Să se determine cmmdc al polinoamelor $X^3 + X^2 + \alpha$ şi $X^3 - X + \beta$ în $\mathbb{Q}[X]$. **(3 pct.)**
2. Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului $X^5 + X^2 + \hat{\alpha}$ la polinomul $X^3 + X^2 + \hat{\beta}X + \hat{1}$ în $\mathbb{Z}_2[X]$. **(3 pct.)**
3. Să se determine numărul elementelor inversabile, al elementelor nilpotente şi al elementelor idempotente din inelul $\mathbb{Z}_{6\alpha+1}$. **(3 pct.)**

Voinea Ana-Maria 31.05.2022
Grupa 133

$\alpha = 6$
$\beta = 3$

Examen la algebră

Subiectul I

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = 6x+1, & x \le -\frac{1}{6} \\ f_2(x) = x^2+x+1, & x > -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$

x	$-\frac{1}{6}$
$f_1(x)$	$- - - . 0 + + + +$

$\Rightarrow \mathrm{Im} f_1 = (-\infty, 0]$

$x^2+x+1=0 \Rightarrow \Delta = 1-4 = -3 < 0$
$a > 0$

$\left.\begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ x > -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow x \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$

- inj: $(-\infty, 0] \cap \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right] \neq \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow$ nu este inj

- surj: $\mathrm{Im} f = (-\infty, 0] \cup \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) = \mathbb{R} = C. \Rightarrow$

$\Rightarrow$ este surj.

$$f([-2,0]) = f_1\left(\left[-2, -\frac{1}{6}\right]\right) \cup f_2\left(\left(-\frac{1}{2}, 0\right]\right)$$
$$= [-11, 0] \cup \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1, 1\right]$$
$$= [-11, 0] \cup \left(\frac{3}{4}, 1\right]$$

$f^{-1}([-3,3])$

$f_1^{-1}([-3,0]) \cup f_2^{-1}\left(\left(\frac{3}{4},3\right]\right)$

$-3 \leq 6x+1 \leq 0$

$-\frac{2}{3} \leq x \leq -\frac{1}{6}$

$6x+1 \geq -3 \quad /-1$

$6x \geq -4 \quad /\cdot\frac{1}{6}$

$x \geq -\frac{2}{3}$

$x \in \left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}\right]$ (1)

$\frac{3}{4} \leq x^2+x+1 \leq 3$

$\begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, \infty\right) \\ x \in [-2,1] \end{cases}$

$\Downarrow$

$x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ (2)

$x^2+x+1 \leq 3$

$x^2+x-2 \leq 0$

$\Delta = 1+8 = 9$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$ $\nearrow -2$, $\searrow 1$

$\Rightarrow [-2,1]$

$\Rightarrow$ Sol: (1) $\cup$ (2)

$x \in \left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}\right] \cup \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

Subiectul II

$\text{ord}(\hat{k}) = \text{ord}[\hat{k}\cdot\hat{1}] = \frac{n}{(n,k)}$, $(\mathbb{Z}_n,+)$

1) ord 3,4 în $(\mathbb{Z}_{12},+)$

ord 3 : $3 = \frac{12}{(a,12)} \Rightarrow (a,12) = 4 \quad a \in \{\hat{4}, \hat{8}\}$

ord 4 : $4 = \frac{12}{(b,12)} \Rightarrow (b,12) = 3 \quad b \in \{\hat{3}, \hat{9}\}$

2) $(\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{13})$ elem. de ord 6.

$[\text{ord}(a), \text{ord}(b)] = 6$ și $\begin{matrix} a/12 \\ b/13 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 1 \end{cases}$

$6 = \frac{12}{(a,12)} \Rightarrow (a,12) = 2 \quad a \in \{\hat{2}, \hat{10}\}$

$1 = \frac{13}{(b,13)} \Rightarrow (b,13) = 13 \quad b \in \{\bar{0}\}$

$\Rightarrow$ 2 perechi : $(\hat{2}, \bar{0})$ și $(\hat{10}, \bar{0})$

3) Conține grupul $(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3, +)$ un element de ord 18?

P.p. $[\text{ord}(a), \text{ord}(b)] = 18$ și $\begin{matrix} a/6 \\ b/3 \end{matrix} \begin{matrix} \Rightarrow a \in \{1,2,3,6\} \\ \Rightarrow b \in \{1,3\} \end{matrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ordinul maxim al perechii este 6 $\left((6,3) = \underset{\neq 1}{3}\right)$

$\Rightarrow$ Nu există elemente de ord 18 din $(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3, +)$

Subiectul III

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 9 & 1 & 5 & 11 & 10 & 3 & 4 & 6 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix} \in S_{11}$$

1) $\sigma = (1\ 9\ 2)(3\ 5\ 10\ 8\ 6)(4\ 11\ 7)$ – produs de cicluri disjuncte

$\sigma = (1\ 9)(9\ 2)(3\ 5)(5\ 10)(10\ 8)(8\ 6)(4\ 11)(11\ 7)$ – produs de transpoziții

2) $\text{ord}(\sigma) = \text{c.m.m.m.c}(3,5) = 15$

$\varepsilon(\sigma) = (-1)^8 = 1 \Rightarrow$ permutare pară

$\sigma^{2022+6} = \sigma^{2028} = \cancel{\sigma^{2025} \cdot \sigma^{20}}\ \sigma^{2025} \cdot \sigma^3 = e \cdot \sigma^3 = \sigma^3$

$\sigma^3 = \left((1\ 9\ 2)(3\ 5\ 10\ 8\ 6)(4\ 11\ 7)\right)^3$

$= (1\ 9\ 2)^3 (3\ 5\ 10\ 8\ 6)^3 (4\ 11\ 7)^3$

$= e \cdot (3\ 5\ 10\ 8\ 6)^3 \cdot e$

$= (3\ 5\ 10\ 8\ 6)^3$

$= (3\ 8\ 5\ 6\ 10)$

3) $T \in S_{10}$

$T^2 = \sigma^3$

$T^2 = \sigma^3 \Rightarrow \varepsilon(T^2) = \varepsilon(\sigma^3)$

$\sigma^3 = (3\ 8\ 5\ 6\ 10) \Rightarrow \varepsilon(\sigma^3) = (-1)^1 = -1 \Rightarrow$ permutare impară $\Rightarrow$

$\Rightarrow \varepsilon(T^2) = -1 \Rightarrow$ permutare impară

Scanned with CamScanner

$\tau^2 = \sigma^3 \iff \tau^2 = (3, 8, 5, 6, 10)$

Pp. că există τ a.i. $\tau^2 = \sigma^3$

Fie $\tau = C_{i_1} \cdot C_{i_2} \cdot \ldots \cdot C_{i_k}$ desc. în prod. de cicli disjuncți, $i_1 + i_2 + \ldots + i_k = 11$, C_{i_j} = ciclu de lungime i_j, $1 \le j \le k$

$\tau^2 = C_{i_1}^2 \cdot C_{i_2}^2 \cdot \ldots \cdot C_{i_k}^2$

$C_5^2 \xrightarrow{2 \nmid 5} C_5^2$ va fi un ciclu de lungime 5 $\Rightarrow$

$\Rightarrow C_5^2 = (3\ 8\ 5\ 6\ 10) \Rightarrow C_5 = (3\ 6\ 8\ 10\ 5)$

$\Rightarrow \tau = (3\ 6\ 8\ 10\ 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 6 & 4 & 3 & 8 & 7 & 8 & 9 & 5 \end{pmatrix}$

Subiectul IV

2) $(x^5 + x^2 + \hat{6}) : (x^3 + x^2 + \hat{3}x + \hat{1})$, în $\mathbb{Z}_2[x]$ =>

$$\begin{array}{l|l} x^5 + x^2 + \hat{0} & x^3 + x^2 + \hat{1}x + \hat{1} \\ \hline -x^5 - x^4 - x^3 - x^2 & x^2 - x \\ \hline -x^4 - x^3 & \\ x^4 + x^3 + x^2 + x & \\ \hline x^2 + x & \end{array}$$

=> câtul $= x^2 - x$

restul $= x^2 + x$

1) Fie: $P = x^3 - x^2 + 6$

$Q = x^3 - x + 3$

Pas 1 :

$$\begin{array}{l|l} x^3 - x^2 + 6 & x^3 - x + 3 \\ \hline -x^3 + x - 3 & -1 \\ \hline -x^2 + x + 3 & \end{array}$$

Pas 2 :

$$\begin{array}{l|l} x^3 - x + 3 & -x^2 + x + 3 \\ \hline -x^3 + x^2 + 3x & +x + 1 \\ \hline x^2 + 2x + 3 & \\ -x^2 + x + 3 & \\ \hline 3x + 6 & \end{array}$$

$3x + 6 = 3(x+2) \Rightarrow x + 2 = \text{cmmdc}(P, Q)$