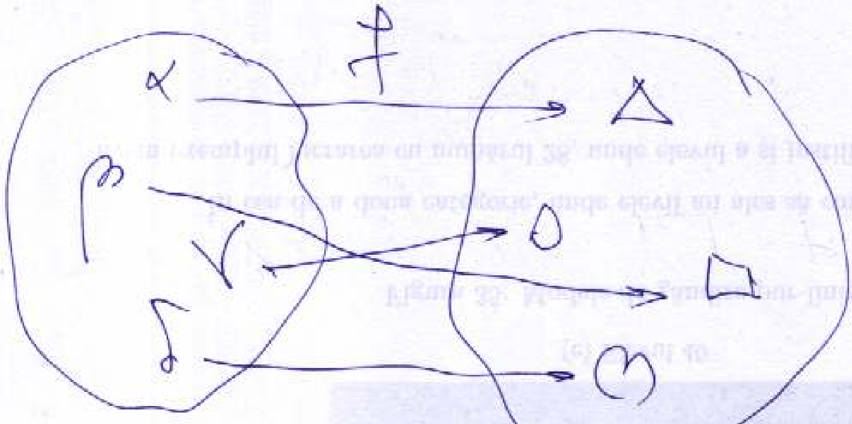
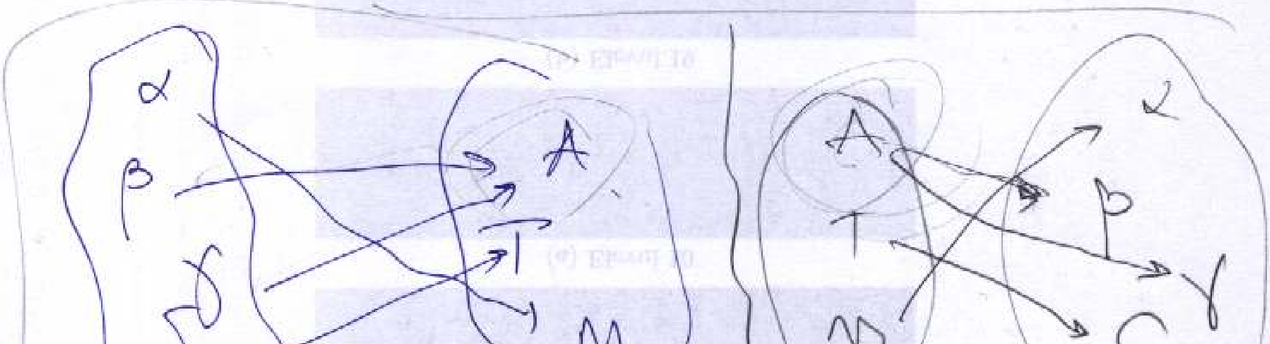
① 12.10.23

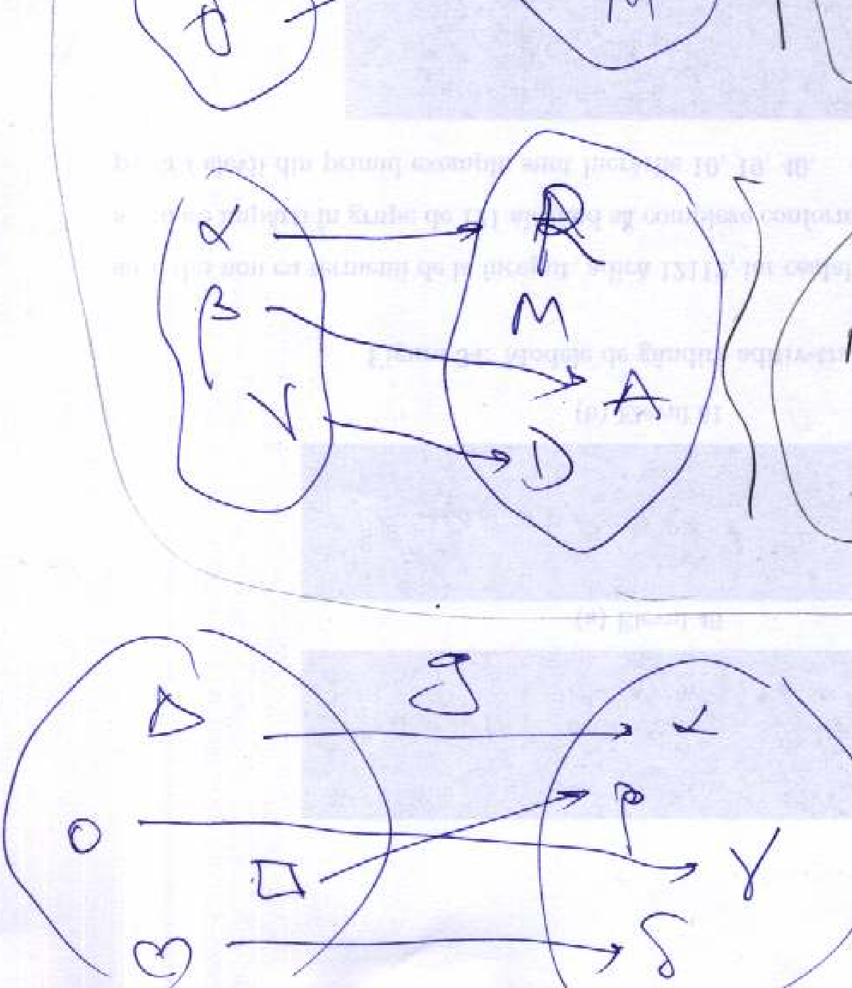
SEMINAR 2 _ 133





NU e funcție!

NU e funcție!



$g(\Delta)=\alpha$

adică

$g(f(\alpha))=\alpha$

$g(f(\beta))=\beta$

Până la urmă

$g(f(\zeta)) = \zeta \quad \forall \zeta \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$

În plus,

$f(g(\star)) = \star \quad \forall \star \in \{\triangle, \circ, \square, \heartsuit\}$.

Def 1) Dacă $f: A \to B$, numim INVERSĂ a lui f orice funcție $g: B \to A$ cu propr.

$g(f(a)) = a \quad \forall a \in A$

și

$f(g(b)) = b \quad \forall b \in B$.

Def 2) O funcție s.n. INVERSABILĂ dacă ea admite măcar o inversă.

$\boxed{\text{Prop 3}}$ Pentru orice funcții $f: A \to B$, $g: C \to D$, $h: E \to F$ cu $B \subset C$ și $D \subset E$,

$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

Dem: Avem $(h \circ g) \circ f: A \to F$ și $h \circ (g \circ f): A \to F$

Fie $a \in A$.

$[(h \circ g) \circ f](a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a)))$

$[h \circ (g \circ f)](a) = h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a)))$

$\Rightarrow [(h \circ g) \circ f](a) = [h \circ (g \circ f)](a)$ □

Fie $g_1, g_2 : B \to A$ inverse pt $f : A \to B$. (3)

Atunci

$$g_2 = 1_A \circ g_2 = (g_1 \circ f) \circ g_2 \overset{\text{Prop 3}}{=} g_1 \circ (f \circ g_2) = g_1 \circ 1_B = g_1$$

$\boxed{\text{Prop 4}}$ O funcție inversabilă are EXACT o INVERSĂ

Def 5) Dată fiind o funcție inversabilă f, unica (cf Prop 4) sa inversă s.n. INVERSA lui f.

Exemple: Sunt funcțiile

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 7x - 2$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 3, & x \le -1 \\ 1 - x, & x > -1 \end{cases}$

inversabile?

Celor care sunt determinați-le inversele!

Sol: Luam $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{x+2}{7}$.

Atunci:

$h \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

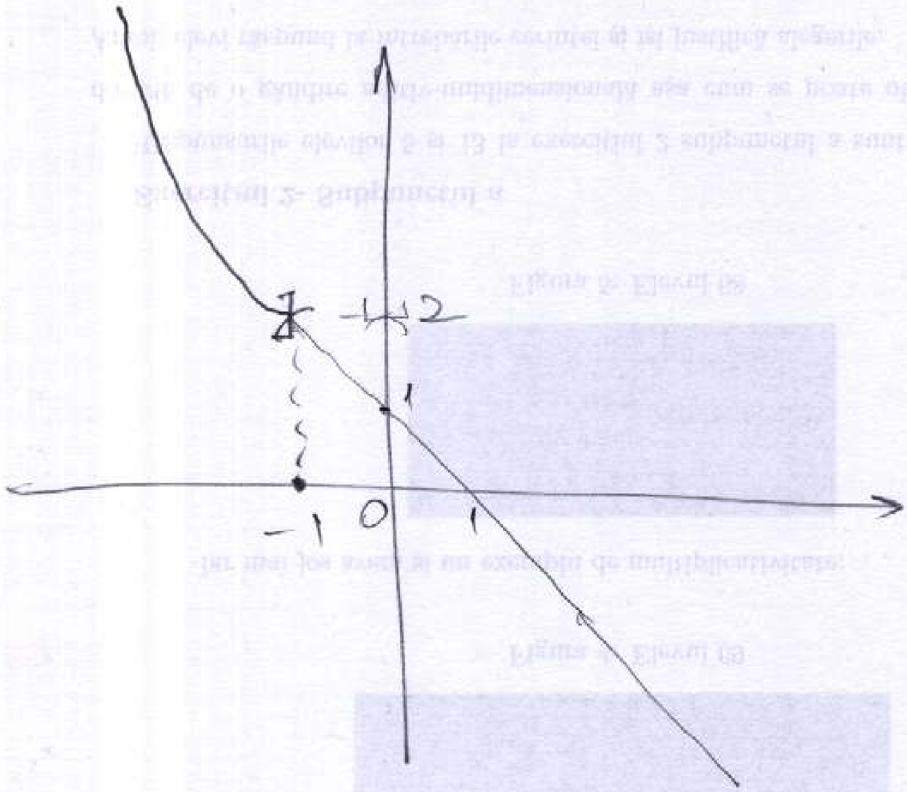
$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = \frac{f(x)+2}{7} = \frac{7x \cancel{-2} \cancel{+2}}{7} = x$

$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = 7h(x) - 2 = 7 \cdot \frac{x+2}{7} - 2 = x$

Ca urmare, $h = f^{-1}$

CIORNĂ

(4)



$$g(k(x)) = x \rightarrow k(x)^2 + 2k(x) + 3 = x \Leftrightarrow k(x) = -1 \pm \sqrt{x-2}$$

$$\rightarrow 1 - k(x) = x \Leftrightarrow k(x) = 1 - x$$

deci f e inversabilă.

Luăm $k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$k(x) = \begin{cases} -1 - \sqrt{x-2}, & x \geq 2 \\ 1 - x, & x < 2 \end{cases}$$

Atunci:

$k \circ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$(k \circ g)(x) = k(g(x)) = \begin{cases} -1 - \sqrt{g(x) - 2}, & g(x) \geq 2 \\ 1 - g(x), & g(x) < 2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -1 - \sqrt{x^2+2x+3-2}, & \begin{cases} x^2+2x+3 \geq 2 \Leftrightarrow x^2+2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -1. \\ -1 - \sqrt{1-x-2}, & \begin{cases} 1-x \geq 2 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset \\ 1 - x^2 - 2x - 3, & \begin{cases} x^2+2x+3 < 2 \Leftrightarrow x^2+2x+1 < 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset. \\ x \leq -1 \end{cases} \\ 1 - (1 - x), & \begin{cases} 1-x < 2 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x > -1. \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -1 - \sqrt{(x+1)^2}, & x \leq -1 \\ x, & x > -1 \end{cases} = \begin{cases} -1 - |x+1|, & x \leq -1 \\ x, & x > -1. \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -1 + x + 1, & x \leq -1 \\ x, & x > -1 \end{cases} = x.$$

(6)

$g \circ k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$g \circ k(x) = x$ $\boxed{TD}$

Ca urmare, $k = g^{-1}$,

deci g e inversabilă.

- Pe $M = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ definim relația $\alpha \rho \beta \overset{def}{\iff} 3 \mid \alpha - \beta$.

- Pe mulțimea oamenilor definim $x \mathcal{V} y \overset{def}{\iff} x$ e văr cu y

- Pe $\mathbb{R}$ definim $x \sim y \overset{def}{\iff} f(x) = f(y)$, unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 1$.

(Am arătat (verbal) că ρ e rel. de echivalență)

$\overline{-5}^{\rho} = \{-5, -2, 1, 4\}$

$\overline{-4}^{\rho} = \{-4, -1, 2, 5\}$

$\overline{-3}^{\rho} = \{-3, 0, 3\}$

MULȚIMEA FACTOR (a unei mulțimi în raport cu o rel. de echivalență) =

MULȚIMEA CLASELOR DE ECHIVALENȚĂ!

Deci la noi:

$$\frac{M}{\rho} = \{\{-5,-2,1,4\}, \{-4,-1,2,5\}, \{-3,0,3\}\}$$

Tot în contextul unei rel. de echiv. pe o mulțime!

SISTEM COMPLET ȘI INDEPENDENT DE REPREZENTANȚI =

Submulțime a celei inițiale alcătuită cu câte exact un element din fiecare clasă de echivalență.

Exemple de S.C.I.R în exemplul nostru:

- {-5, -4, -3}
- {1, 2, 3}
- {-5, -4, 0}

$\boxed{\text{TD}}$ Arătați că ∼ e de echivalență și determinați mulțimea factor a 3 SCIR.