b) $(S_2)\begin{cases} x_1 + \alpha x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = \beta \end{cases}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

{DISCUŢIE}

$(S_2) \rightarrow$ sist. de 3 ec. lin. cu 3 nec și 2 parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

Rez. b) $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3(\alpha - 1)$$

1) Dacă $\boxed{\alpha \neq 1} \Rightarrow \Delta \neq 0 \Rightarrow (S_2)$ sistem CRAMER (comp. det., i.e. are sol. unică)

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} \\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} \end{cases}, \text{ unde } \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ \beta & 1 & -1 \end{vmatrix} = \alpha\beta - \alpha - 4\beta - 5$$

Formulele CRAMER

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & \beta & -1 \end{vmatrix} = 3(\beta + 2)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & \beta \end{vmatrix} = (1 - \alpha)(1 + 2\beta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{\alpha\beta - \alpha - 4\beta - 5}{3(\alpha - 1)} \\ x_2 = \dfrac{\beta + 2}{\alpha - 1} \\ x_3 = -\dfrac{2\beta + 1}{3} \end{cases} \rightarrow \text{sol. unică}$$

$$\boxed{\mathcal{S}_2 = \left\{ \left(\frac{\alpha\beta - \alpha - 4\beta - 5}{3(\alpha - 1)}, \frac{\beta + 2}{\alpha - 1}, -\frac{2\beta + 1}{3} \right) \right\} \quad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \beta \in \mathbb{C}}$$

2) Dacă $\boxed{\alpha = 1} \Rightarrow \Delta = 0$

$$\Delta_p = d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

$\begin{cases} L_{1,2} \\ C_{1,3} \end{cases}$

$(\exists)$ un singur minor caracteristic: $\Delta_{car_1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & \beta \end{vmatrix} =$

$= -3(\beta + 2)$

$\boxed{\alpha = 1}$

2)

ⓐ Dacă $\boxed{\beta \neq -2} \Rightarrow \Delta_{car\,1} \neq 0 \Rightarrow (S_2)$ sistem incompatibil

$\boxed{S_2 = \emptyset}$ $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta \in \mathbb{C} \setminus \{-2\} \end{cases}$

ⓑ Dacă $\boxed{\beta = -2} \Rightarrow \Delta_{car\,1} = 0 \Rightarrow (S_2')$ sistem compatibil simplu nedet.

Gr. de ned $= n - rgA = 3 - 2 = 1$ (= nr. nec sec)

$\begin{cases} x_1, x_3 \to \text{nec princ} \\ x_2 = \lambda, \lambda \in \mathbb{C} \to \text{nec. sec.} \end{cases}$

Rescriem sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 - \lambda \\ 2x_1 + x_3 = -1 - 2\lambda \quad | \cdot (-2) \\ x_2 = \lambda, \lambda \in \mathbb{C} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -(\lambda + 1) \\ x_2 = \lambda \quad , \lambda \in \mathbb{C} \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

$$S_2 = \{(-(\lambda+1), \lambda, 1) / \lambda \in \mathbb{C}\}$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -2 \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

- Matricea unei aplicații liniare.
- Endomorfisme de sp. vectoriale
  Vectori și valori proprii, diagonalizare

$\boxed{\text{Apl.}}$ Fie aplicația liniară:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\quad f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x+4y\\5x+2y\end{pmatrix},\ (\forall)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$$

a) Determinați matricea asociată lui f în raport cu baza canonică $B_0 = \{e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\} \subset \mathbb{R}^2$

b) Determinați matricea asociată lui f în raport cu baza $B = \{f_1 = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\} \subset \mathbb{R}^2$

c) Calculați valorile proprii și vectorii proprii coresp. lui f.

d) Stabiliți dacă endomorf. f este diagonalizabil.

Rez: a) $f: \underline{\mathbb{R}^2} \to \underline{\mathbb{R}^2}$ apl. liniară $\to$ endomorfism al sp. vect. $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$.

Ⓥ₁ $A_f = \begin{pmatrix}3&4\\5&2\end{pmatrix}$ $\to$ matricea asociată lui f în raport cu baza canonică B_0

$\{[f]_{B_0}\}$

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x+4y\\5x+2y\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}3&4\\5&2\end{pmatrix}}_{A_f}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\ (\forall)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$$

$\boxed{\text{sau}}$: $f(X) = A_f X,\ (\forall)\, X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Ⓥ₂ $A_f = \left(\underset{f(e_1)}{\underset{\shortparallel}{\boxed{\begin{matrix}3\\5\end{matrix}}}}\ \underset{f(e_2)}{\underset{\shortparallel}{\boxed{\begin{matrix}4\\2\end{matrix}}}}\right)$,

$$f(e_1) = f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \underline{3e_1 + 5e_2}$$

$$f(e_2) = f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \underline{4e_1 + 2e_2}$$

b) $f_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$B = \{f_1, f_2\} \subset \mathbb{R}^2$

$\underline{\text{bază}}$

$\cdot \quad \left.\begin{array}{l} \underset{\text{SLi}}{\{f_1, f_2\}} \subset \mathbb{R}^2 \\ \dim \mathbb{R}^2 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{\text{bază } \checkmark}{B = \{f_1, f_2\} \subset \mathbb{R}^2}$

$\cdot\cdot \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \underset{\text{bază}}{B = \{f_1, f_2\} \subset \mathbb{R}^2}$

(V1) **[P]** $f : V \to V$ endomorfism $(\dim_K V = n < \infty)$

$\underset{\text{2 baze}}{B_1, B_2 \subset V}$ și $B_1 \xrightarrow{S} B_2$ m. de trecere de la B_1 la B_2

$A_1, A_2 \to$ m. asoc. endm. f în raport cu bazele B_1, resp. B_2

Atunci: $\boxed{A_2 = S^{-1} A_1 S}$

<u>Proprietățile matricei de trecere</u>

[P1] Fie V/K sp. vect. $(\dim_K V = n < \infty)$

$\underset{\text{3 baze}}{B_1, B_2, B_3 \subset V/K}$

a) Dacă: $B_1 \xrightarrow{A_{12}} B_2 \Rightarrow B_2 \xrightarrow{A_{12}^{-1}} B_1$

m. de trecere de la B_1 la B_2

b) Dacă: $B_1 \xrightarrow{A_{12}} B_2 \xrightarrow{A_{23}} B_3 \Rightarrow B_1 \xrightarrow{A_{12} \cdot A_{23}} B_3$

m. de trecere de la B_2 la B_3

$\nearrow B_0 = \{e_1, \overset{u}{\ldots}, e_n\}$

$\boxed{P_2}$ 1) Matricea de trecere de la baza canonică la o bază arbitrară $B = \{f_1, \ldots, f_n\}$ a lui $K^n/_K$ se găsește foarte ușor: coloana sa de indice "i" este formată din coordonatele vectorului f_i în baza canonică.

2) În consecință, matricea de trecere între 2 baze arbitrare ale lui $K^n/_K$ se poate determina foarte simplu, folosind $\boxed{P_2}$ 1) și proprietatea $\boxed{P_1}$: calculele implicate fiind inversarea unei matrice și înmulțirea ei cu o alta.

Revenim la aplicația noastr (punctual):

$$B_0 = \{e_1, e_2\} \xrightarrow{S'} B = \{f_1, f_2\}$$

$\downarrow$ m. de trecere de la baza canonică B_0 la baza arbitrară B

$$\text{Conform } \boxed{P_2}\ 1) \Rightarrow S' = \begin{array}{c}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}\\ \begin{array}{cc}\overline{f_1} & \overline{f_2}\end{array}\end{array}$$

$$\boxed{P} \Rightarrow \underbrace{A'_f}_{\downarrow} = S^{-1} A_f S' = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

Ⓣ → calc. efectiv

m. asoc. lui f în raport cu baza B

Ⓥ$_2$ $\cdot\ f(f_1) = f\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18\\16\end{pmatrix} = a\underbrace{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}}_{f_1} + b\underbrace{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}}_{f_2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2a + 3b = 18\\ 3a + 4b = 16\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a = -24\\ b = 22\end{cases}$$

$\cdot\ f(f_2) = f\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}25\\23\end{pmatrix} = c\underbrace{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}}_{f_1} + d\underbrace{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}}_{f_2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2c + 3d = 25\\ 3c + 4d = 23\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}c = -31\\ d = 29\end{cases}$$

Deci: $A'_f = \begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-24 & -31\\ 22 & 29\end{pmatrix}$

e) Valorile proprii și vectorii proprii coresp. lui $\underline{f}$ ⟺

⟺ Valorile proprii și vectorii proprii coresp. lui $\underline{A_f}$.

$\boxed{\text{Valorile proprii}}$ → rădăcinile (în K) ale polinomului caracteristic

$$P(\lambda) = \det(\underbrace{A_f - \lambda I_2}_{\text{m. caract. a lui } A_f})$$

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\det(A_f - \lambda I_2) = 0}_{\text{ec. caracteristică}}$$

$$A_f - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 5 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\underline{P(\lambda)} = \det(A_f - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) - 20$$

$$= \underline{\lambda^2 - 5\lambda - 14}$$

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0 < \begin{matrix} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 7 \end{matrix} \quad \boxed{\in \mathbb{R}}$$

$$\{ \text{Obs: } P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = (\lambda + 2)(\lambda - 7) \}$$

$\text{Spec}(A_f) \overset{\text{not}}{=}$ mulțimea valorilor proprii $\Rightarrow \underline{\text{Spec}(A_f) = \{-2, 7\}}$

↓

spectrul endom. f (sau matricei A_f)

Multiplicitatea <u>algebrică</u>: $\begin{cases} m_a(\lambda_1) = 1 \\ m_a(\lambda_2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_a(-2) = 1 \\ m_a(7) = 1 \end{cases}$

$\boxed{\text{Vectorii proprii}}$ coresp. lui f (sau A_f)

$\lambda \in Spec(A_f) \to V_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^2 / A_f v = \lambda v\}$

$\downarrow$ subsp. propriu coresp. valorii proprii $\underline{\lambda}$

$\Updownarrow$

$(A_f - \lambda I_2)v = O_{(2,1)}$

i.e. $V_\lambda = Ker(A_f - \lambda I_2)$

- $\boxed{\lambda_1 = -2}$ $V_{\lambda_1=-2} = \{v \in \mathbb{R}^2 / A_f v = \lambda_1 v\}$

$\downarrow$ subsp. propriu coresp. val. proprii $\lambda_1=-2$

v "$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$"

$A_f v = -2v$

$(A_f + 2I_2)v = O_{(3,1)}$

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+4y = 0 \\ 5x+4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{5x+4y=0}$$

S.L.O.

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} y = \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \text{ nec. sec.} \\ x = -\frac{4}{5}\alpha \end{array} \right.$$

$$V_{\lambda_1=-2} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{4}{5}\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} / \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix} / \alpha \in \mathbb{R} \right\} =$$

Luăm $\alpha = 5\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$

$$= \left\{ \beta \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} / \beta \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Deci: $\underset{\text{bază}}{B_1} = \{ \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\overset{\text{not}}{v_1}} \} \subset V_{\lambda_1=-2}$

Multiplicitatea geometrică (a unei valorii proprii) = dimensiunea subsp. propriu coresp. valorii proprii λ.

Not: $m_g(\lambda) \overset{def}{=} \dim V_\lambda$

În cazul nostru: $m_g(\lambda_1) = \dim V_{\lambda_1} = 1$

i.e. $\boxed{m_g(-2) = 1}$

$\therefore \boxed{\lambda_2 = 7}$ $\quad V_{\lambda_2=7} = \{ \overset{}{v} \in \mathbb{R}^2 / A_f v = \lambda_2 v \}$

$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad A_f v = 7v$

$\downarrow$

subsp. proprii coresp. val. proprii: $\lambda_2 = 7$. $\qquad (A_f - 7 I_2) v = O_{(2,1)}$

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} -4x + 4y = \boxed{0} \\ 5x - 5y = \boxed{0} \end{cases} \Longleftrightarrow \boxed{x - y = 0}$$

S.L.O.

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x = \alpha \\ y = \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R} \text{ nec. sec.} \end{vmatrix}$$

$$V_{\lambda_2=7} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} / \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} / \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Deci: $\underset{\text{bază}}{B_2} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{not } v_2} \right\} \subset V_{\lambda_2=7}$

$m_g(\lambda_2) = \dim V_{\lambda_2} = 1$

i.e. $\boxed{m_g(7) = 1}$

d) f-endomorfism diagonalizabil?

Teorie **Def** Fie V/K sp. vectorial ($\dim_K V = n < \infty$)

și $f: V \to V$ endomorfism.

f s.n. endomorfism diagonalizabil dacă:

$(\exists)\ B \subset V$ (bază) a.î. matricea asociată lui f (A_f) în raport cu baza B are forma diagonală.

$\Updownarrow$ $(\exists)\ B \subset V$ bază formată numai din vectori proprii.

$\boxed{\text{Th}}$ $f : V \to V$ endomorf. diagonalizabil

$\iff \begin{cases} 1) \ \underline{\text{Toate}} \text{ răd. polinomului său caract. sunt în } K \\ \quad (\text{i.e. valorile proprii}) \\ 2) \text{ Dimensiunea fiecărui subsp. propriu } V_\lambda \text{ coincide} \\ \quad \text{cu multiplicitatea sa algebrică} \\ \quad (\text{i.e. } m_a(\lambda) = m_g(\lambda), (\forall)\ \lambda \in \text{Spec}(f)) \end{cases}$

Fie : $\lambda_1, \dots, \lambda_p \to$ valorile proprii coresp. endm. f (A_f)

$m_a(\lambda_i)$ = multipl. algebrică a val. proprii λ_i, $(\forall)\ i = \overline{1,p}$

Reformulare:

$f : V \to V$ endomorf. diagonalizabil

$$\iff \begin{cases} 1) \ m_a(\lambda_1) + m_a(\lambda_2) + \dots + m_a(\lambda_p) = n = \dim_K V \\ 2) \ m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i), (\forall)\ i = \overline{1,p} \end{cases}$$

Obs: $f : V \to V$ endm. diagonalizabil

$B, B' \subset V$ baze ,

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "S"] \arrow[d] & B' \arrow[d] \\ A_f & \boxed{D = S^{-1} A_f S} \end{tikzcd}$$

m. de trecere (de la baza inițială la baza în care se realizează f. diagonală) ,

unde

$$D = \begin{pmatrix} \overbrace{\lambda_1 \cdots \lambda_1}^{m_a(\lambda_1)} & & & 0 \\ & \overbrace{\lambda_2 \cdots \lambda_2}^{m_a(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \overbrace{\lambda_p \cdots \lambda_p}^{m_a(\lambda_p)} \end{pmatrix} \to \text{forma diagonală}$$

Revenim, în cazul nostru, punctual:

Avem: 1) $m_a(\lambda_1) + m_a(\lambda_2) = 1 + 1 = 2 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$ ✓

$$2) \begin{cases} m_a(\lambda_1) = m_g(\lambda_1) (=1) \\ m_a(\lambda_2) = m_g(\lambda_2) (=1) \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$ f endomorf. diagonalizabil

$D = S'^{-1} A_f S'$, unde $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \to$ f. diagonală

$$B_0 \xrightarrow{S'} B = \{v_1, v_2\}$$

B_0 "$\{e_1, e_2\}$" b. canonică (bază inițială)

$B = \{v_1, v_2\}$ bază în care se realizează f. diagonală (bază finală)

$\searrow$ m. de trecere de la B_0 la B

Rezultă: $S' = \left(\begin{array}{cc} -4 & 1 \\ \underbrace{5}_{v_1} & \underbrace{1}_{v_2} \end{array} \right)$

i.e. $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ (de verificat! $\boxed{\text{TEMA}}$)

$\boxed{\text{Suplimentar:}}$ Calculați $A_f^n = ?$, $n \in \mathbb{N}^*$

Rez: Obs: $D = S'^{-1} A_f S' \Leftrightarrow A_f = S' D S'^{-1}$

$$A_f^n = A_f \cdot A_f \ldots A_f = SD\underbrace{S^{-1}S}_{I_2}D\underbrace{S^{-1}\ldots}_{I_2}\underbrace{\ldots S}_{I_2}DS^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_f^n = S' D^n S'^{-1}}$$

Dar: $D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \to D^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 7^n \end{pmatrix}$

În consecință: $A_f^n = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 7^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \to \boxed{\text{Temă}}$ (de calculat)

V

$\boxed{\text{TEMA}}$ Aceleași cerințe (ca în cadrul ultimei aplicații) pentru apl. liniară:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 3y \end{pmatrix},\ (\forall)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

<u>Obs:</u>

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\underline{\underline{\text{nu}}}$ e algebric închis

- Endomorf. <u>fără nicio valoare proprie</u>

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix},\ (\forall)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$$

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = iz,\ (\forall)\ z \in \mathbb{C}$$

$$P(\lambda) = \det(A_f - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & -1 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

$\lambda^2 + 1 = 0 \to$ nu are răd. reale

$P(\lambda) = 0$

$\boxed{\text{General}}$ Fie $V/_{\mathbb{R}}$ sp. vectorial real, $\dim_{\mathbb{R}} V = 2n < \infty$

$$J : V \to V \text{ endomorf.}$$

a.î. $J^2 = -\mathbb{1}_V$ $\{J^2 = J \circ J\}$

$\Rightarrow J$ − endomorf. <u>fără nicio valoare proprie</u>

<u>Dem:</u> <u>Pp. λ val. proprie</u> pt. endom J (cu $v \to$ vector propriu coresp.)

$$\Rightarrow -v = J^2(v) = J(\underbrace{J(v)}_{\lambda v}) = J(\lambda v) = \lambda \underbrace{J(v)}_{\lambda v} = \underline{\lambda^2 v}$$

$\Rightarrow \underset{\lightning}{\lambda^2 + 1 = 0} \to$ nu are răd. reale ($V/_{\mathbb{R}}$ sp. vect. real, deci $\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{R}}$)

$\boxed{\text{Obs:}}$ Atunci când corpul $\mathbb{K}$ peste care lucrăm (corpul scalarilor) <u>nu</u> este algebric închis, cum este cazul lui $\mathbb{R}$, sunt puține șanse să putem diagonaliza un endomorfism.

Funcționează, însă, un alt tip de "formă canonică" valabilă peste orice corp, anume $\boxed{\text{forma Jordan}}$.