(1) 24.10.23

SEMINAR 4_132

Considerăm pe $\mathbb{Z}$ legea de compoziție

$x \Delta y = xy - 7x - 7y + 56.$

Arătați că $(\mathbb{Z}, \Delta)$ este monoid comutativ și determinați elementele simetrizabile.

Sol: Fie $x, y \in \mathbb{Z}$.

Atunci: $xy \in \mathbb{Z}$, $7x \in \mathbb{Z}$, $7y \in \mathbb{Z}$, deci

$x \Delta y = xy - 7x - 7y + 56 \in \mathbb{Z}$.

Ca urmare, Δ e o operație corect definită pe $\mathbb{Z}$ (LC)

Fie $x, y, z \in \mathbb{Z}$

Atunci $x \Delta y = (x-7)y - 7(x-7) + 7 =$

$= (x-7)(y-7) + 7.$

Fie $x, y, z \in \mathbb{Z}$

$(x \Delta y) \Delta z = [(x-7)(y-7) + 7] \Delta z =$

$(x-7)(y-7)(z-7) + 7$ (1)

$x \Delta (y \Delta z) = x \Delta [(y-7)(z-7) + 7] =$

$(x-7)(y-7)(z-7) + 7$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow$ $(x \Delta y) \Delta z = x \Delta (y \Delta z)$.

Deci, Δ e asociativă. (A)

Fie $x, y \in \mathbb{Z}$.

$$\left.\begin{array}{l} x \Delta y = (x-7)(y-7)+7 \\ y \Delta x = (y-7)(x-7)+7 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{în } \mathbb{Z}]{\text{"·" e com.}} x \Delta y = y \Delta x.$$

Deci, legea Δ e comutativă. (C)

Fie $x \in \mathbb{Z}$. Atunci:

$x \Delta 8 = (x-7)(8-7)+7 = x$

$8 \Delta x \overset{\text{com}}{=} x \Delta 8 = x$.

Deci, 8 e e.n. pt Δ.

(ca urmare, Δ admite e.n.) (EN).

Din (LCI), (A), (EN) și (C) obținem că $(\mathbb{Z}, \Delta)$ e monoid comutativ

---

element simetrizabil = element CARE ADMITE SIMETRIC

simetric al unui element a = element CARE COMPUS cu a DĂ e.n. ÎN AMBELE SENSURI!

Fie $x \in \mathbb{Z}$ simetrizabil în raport cu Δ.

Atunci $\exists x' \in \mathbb{Z}$ $x \Delta x' = (x' \Delta x =) 8$,

deci $\exists x' \in \mathbb{Z}$ $(x-7)(x'-7)+7 = 8$,

adică $\exists x' \in \mathbb{Z}$ $(x-7)(x'-7) = 1$, de unde

$x-7 \in \{-1, 1\}$, deci $x \in \{6, 8\}$. (3)

Dar

$6 \Delta 6 = (6-7)(6-7)+7 = 8$, deci 6 e propriu-i simetric, deci 6 e simetrizabil în rap. cu Δ.

$8 \Delta 8 = (8-7)(8-7)+7 = 8$, deci 8 e propriu-i simetric deci 8 e simetrizabil în rap cu Δ.

Ca urmare, $U(\mathbb{Z}, \Delta) = \{6, 8\}$

Aceeași problemă pentru legea $x \square y = xy - 7x - 7y + 56$, dată de această dată pe $\mathbb{R}$

Sol: $(LC), (A), (E), (EN) \to$ Temă!

<u>Care sunt elementele lui $\mathbb{R}$ simetrizabile</u> în rap. cu $\square$?

Sol: Fie $x \in \mathbb{R}$ simetrizabil în raport cu $\square$.

Atunci $\exists x' \in \mathbb{R}$ $x \square x' = 8$,

adică $\exists x' \in \mathbb{R}$ $(x-7)(x'-7)+7 = 8$,

ceea ce se rescrie $\exists x' \in \mathbb{R}$ $(x-7)(x'-7) = 1$,

deci $x \neq 7$

Ca urmare, $x \in \mathbb{R} \setminus \{7\}$

Reciproc, fie $x \in \mathbb{R} \setminus \{7\}$

Notăm $x' = 7 + \frac{1}{x-7}$.

Atunci $x \square x' = (x-7)(x'-7)+7 =$

$= (x-7)\left(\cancel{7} + \frac{1}{x-7} - \cancel{7}\right) + 7 = 8.$

$x' \square x \overset{com.}{=} x \square x' = 8.$

Ca urmare, x' e simetricul lui x în rap cu $\square$

Deci $x' \circ x^4$ sunt inverse pt x în raport cu $\square$

$x^4 = e \square x^4 = (x' \square x) \square x^4 = x' \square (x \square x^4) = x' \square e = x'$

Deci x e simetrizabil în rap cu $\square$.

Ca urmare, $U((\mathbb{R}, \square)) = \mathbb{R} \setminus \{7\}$.

Obs: Conform rezultatului corespunzător din curs, $(\mathbb{R} \setminus \{7\}, \square)$ este grup (abelian)

Considerăm pe $\mathbb{R}$ operația $x \circ y = 3x - \sqrt{2}y$.

a) Este $\circ$ asociativă? b) Dar comutativă?

c) Admite e.n.?

CIORNĂ!! Cum mă gândesc?

Sol

a) $(1 \circ 0) \circ 0 = 3 \circ 0 = 9$
$1 \circ (0 \circ 0) = 1 \circ 0 = 3$ $\Rightarrow$

$(1 \circ 0) \circ 0 \neq 1 \circ (0 \circ 0)$.

Deci $\circ$ nu e asociativă

b) $1 \circ 0 = 3 \neq -\sqrt{2} = 0 \circ 1$.

Deci $\circ$ nu e comutativă.

$\frac{x^3 - y^3}{x - y}$ $\quad x^2 + xy + y^2$

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x = y\}$

$x^6 \quad x^{10}$ pe $\{-1, 0, 1\}$

$(x \circ y) \circ z = (3x - \sqrt{2}y) \circ z =$
$= 9x - 3\sqrt{2}y - \sqrt{2}z$

$x \circ (y \circ z) = x \circ (3y - \sqrt{2}z) =$
$= 3x - 3\sqrt{2}y + 2z$.

$\circ$ e asoc: $\forall a,b,c \in \mathbb{R}\ (a\circ b)\circ c = a\circ(b\circ c)$

$\circ$ nu e asoc: $\boxed{\exists a,b,c \in \mathbb{R}\ (a\circ b)\circ c \neq a\circ(b\circ c)}$

c) Presupunem că $\circ$ admite element neutru, fie el e.

Atunci $e\circ 0 = 0$, deci $3e = 0$, adică $e = 0$

și $e\circ 1 = 1$, deci $3e - 5 = 1$, adică $e = 2$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = 2$, ↯.

Rămâne, deci, că $\circ$ nu admite element neutru.

Notăm $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\}$

Pe $\mathcal{F}$ definim operația $*$ astfel:

$f * g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(f*g)(a) = f(a)\cdot g(a)$.

Arătați că $(\mathcal{F}, *)$ este monoid comutativ și determinați elementele inversabile