

ISBN 978-973-640-
LEI

ANTON SOLOI • CALCUL DIFERENȚIAL ȘI INTEGRAL. **BREVIAR TEORETIC ȘI APLICAȚII**

ACADEMIA TEHNICĂ MILITARĂ

ANTON SOLOI

CALCUL DIFERENȚIAL ȘI INTEGRAL

BREVIAR TEORETIC ȘI APLICAȚII



EDITURA ACADEMIEI TEHNICE MILITARE

BUCUREȘTI, 2009

ACADEMIA TEHNICĂ MILITARĂ

ANTON SOLOI

**CALCUL DIFERENȚIAL
ȘI INTEGRAL**

BREVIAR TEORETIC ȘI APLICAȚII

**EDITURA ACADEMIEI TEHNICE MILITARE
București, 2009**

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

SOLOI, ANTON

Calcul diferențial și integral. Breviar teoretic și aplicații. Anton Soloi.

- București : Editura Academiei Tehnice Militare, 2009

ISBN 978-973-640-

Editat: Academia Tehnică Militară

Redactor-șef: lt. col. ing. Stelian SPÎNU

Corectură: ing. Alina CIOBANU

Tehnoredactare: conf. dr. mat. Anton SOLOI

Operațiuni tipografice: plt. maj. Mitruța TOMESCU,
Silvia STROE, Viorica TOMA, Adrian STĂNICĂ

Bun de tipar: **00.07.2009**

Hârtie ofset: **61 × 86**

Format: **32 / 61 × 86**

Coli tipar: **29,8**

Coli editură: **14,9**

Tiparul: Academia Tehnică Militară

Lucrarea conține **474** pagini

0208

C. C-

PREFATĂ

Este cunoscut faptul că o carte se scrie folosind alte cărți, dintre care, în general, cea mai mare parte nu este a autorului însuși, dar pot să fie și unele rezultate proprii ale autorului cărții.

Mereu se pun mai multe întrebări. Când se scrie o carte? Atunci când autorul simte că are ceva nou de spus. Nou ca materie științifică sau măcar ca mod de organizare și filtrare pedagogică. Această idee stă sub semnul dictului latin *Non idem este si duo dicunt idem*.

Ce își propune autorul printre-o carte? Își propune să înevețe ceva pe cititor sau să dea răspunsuri la unele din întrebările pe care acesta și le pune.

Având în vedere numai domeniul matematicii, cartea este nu numai cele n pagini materializate ale ei, ci și paginile virtuale, cele cu idei și calcule intermediare. Numai cititorul care reface calculele dintr-o carte va înțelege acest aspect și va fi cu adevărat căștigat. Un căștig real și de durată.

Scrierea acestei cărți a fost guvernată de ideile de mai sus și încă multe altele. Cuprinde 12 capitole care reprezintă esența Analizei matematice.

Analiza matematică a fost studiată mult și în diverse moduri în istoria matematicii. De ce? Datorită importanței sale covârșitoare în toate domeniile științei. Dintre problemele elucidate în această carte menționăm:

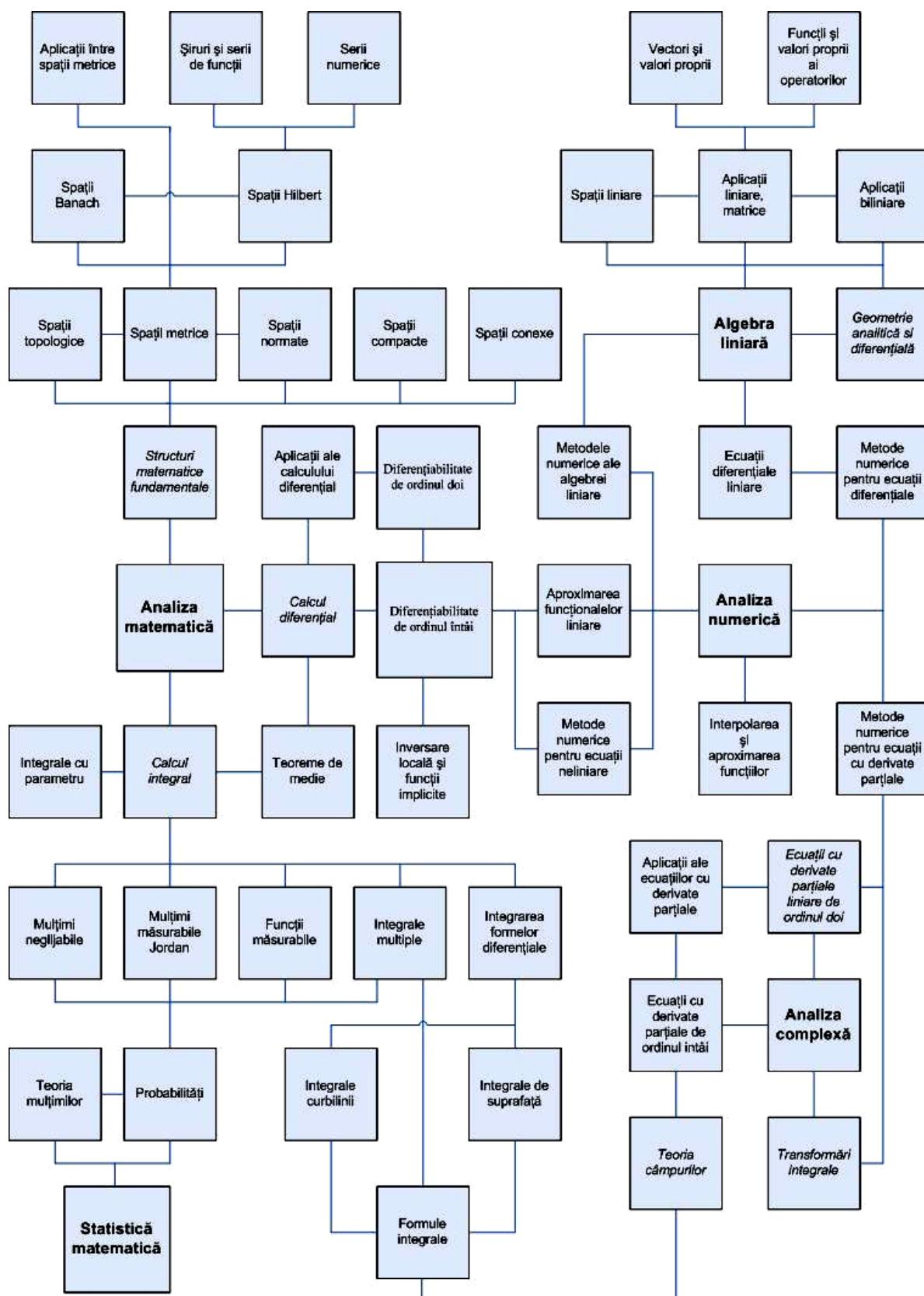
- aproximările liniare și de ordinul doi;
- extretele condiționate ale funcțiilor explicate și implicate;
- dependența funcțională;
- schimbări de variabilă;
- integrala impropriu cu parametru;
- integrala curbilinie de primul și al doilea tip;
- integrala de suprafață de primul și al doilea tip;
- integralele multiple;
- formulele integrale;
- ecuațiile și sistemele de ecuații diferențiale liniare;
- ecuațiile cu derivate parțiale liniare de ordinul întâi.

Problemele rezolvate în carte sunt prezentate în stil algoritmic. Cititorul își poate însuși metoda de rezolvare pe care ulterior să o aplice independent.

La unele probleme se dau două sau trei metode de rezolvare în scopul de a-l face pe cititor să înțeleagă avantajele și dezavantajele fiecărei metode și ca ulterior să fie capabil să aleagă singur cea mai bună metodă de rezolvare.

Cartea reprezintă un manual util pentru studenții din anul I, dar oricine o citește cu atenție are ceva de învățat.

Anton Soloi



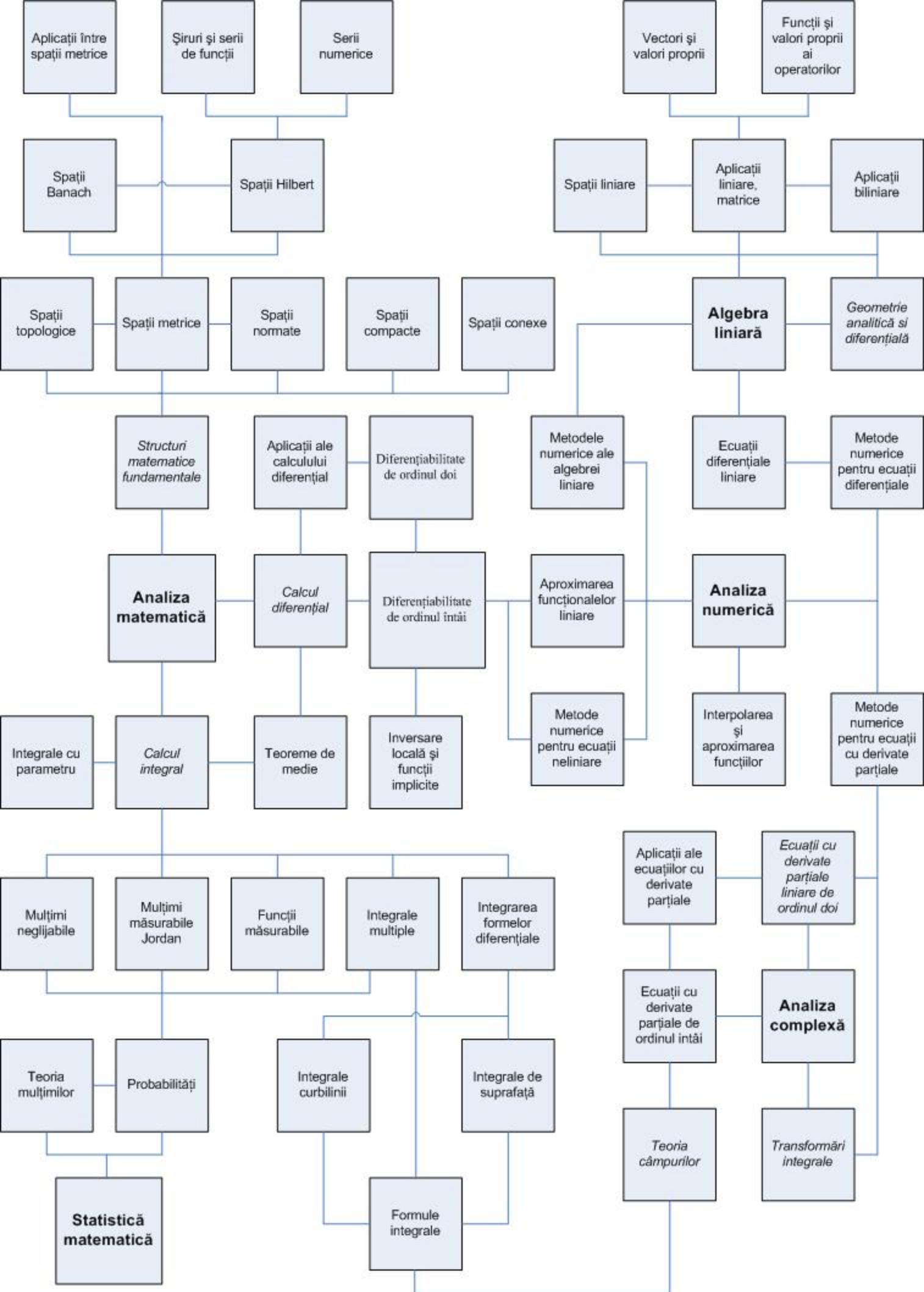
CUPRINS

CAPITOLUL 1 STRUCTURI MATEMATICE FUNDAMENTALE.....	9
1.1 Spații topologice	9
1.1.1 Mulțimi de puncte în spații topologice	13
1.1.2 Exerciții.....	20
1.2 Spații compacte	25
1.3 Spații conexe	29
1.4 Spații metrice	30
1.4.1 Spații metrice complete.....	40
1.4.2 Prinzipiul contracției.....	41
1.4.3 Exerciții	45
1.5 Spații normate	46
1.5.1 Spații Banach	51
1.5.2 Spații Hilbert.....	52
1.5.3 Exerciții	62
CAPITOLUL 2 SERII NUMERICE.....	69
2.1 Proprietăți generale ale seriilor convergente	69
2.2 Serii numerice cu termeni pozitivi.....	72
2.3 Serii numerice cu termeni arbitrari	85
2.4 Schimbarea ordinii termenilor unei serii numerice.....	88
2.5 Produsul a două serii numerice	90
2.6 Exerciții	94
CAPITOLUL 3 APLICAȚII ÎNTRE SPAȚII METRICE.....	96
3.1 Limita unei aplicații într-un punct	96
3.2 Funcții reale de argument vectorial.....	105
3.3 Aplicații continue	110
3.4 Exerciții	123
CAPITOLUL 4 ȘIRURI DE FUNCȚII.....	125
4.1 Tipuri de convergență	125
4.2 Criterii de convergență uniformă	128
4.3 Proprietăți	137
4.4 Exerciții	147

CAPITOLUL 5 SERII DE FUNCȚII.....	153
5.1 Criterii de uniform convergență.....	155
5.2 Proprietăți.....	156
5.3 Serii de puteri.....	158
5.4 Seria Taylor reală	162
5.5 Exerciții.....	164
CAPITOLUL 6 CALCUL DIFERENȚIAL ÎN \mathbb{R}^p.....	166
6.1 Diferențierabilitate de ordinul întâi	166
6.1.1 Derivabilitate parțială de ordinul întâi	166
6.1.2 Diferențierabilitate în sens Gâteaux de ordinul întâi	174
6.1.3 Diferențierabilitate în sens Fréchet de ordinul întâi.....	179
6.1.4 Diferențierabilitate globală	203
6.1.5 Exerciții	205
6.2 Teorema de medie în \mathbb{R}^p	209
6.2.1 Teorema lui Fermat.....	209
6.2.2 Teorema lui Rolle	213
6.2.3 Teorema lui Lagrange	214
6.2.4 Teorema lui Cauchy	223
6.2.5 Exerciții	223
6.3 Inversare locală și funcții implice	224
6.3.1 Inversare locală	224
6.3.2 Funcții implice	230
6.3.3 Condiții necesare pentru extrem condiționat	234
6.3.4 Dependență funcțională	244
6.3.5 Schimbări de variabile	245
6.3.5.1 Schimbări de variabilă în cazul funcțiilor de o singură variabilă independentă	245
6.3.5.2 Intervertirea variabilelor cu funcția în cazul unidimensional	246
6.3.5.3 Schimbarea de variabilă independentă și de funcție	247
6.3.5.4 Schimbări de variabilă în expresiile care conțin derivate parțiale	248
6.3.5.5 Schimbări de variabilă și de funcție în expresiile care conțin derivate parțiale	250
6.3.6 Exerciții	254
6.4 Diferențierabilitate de ordinul doi	258
6.4.1 Derivabilitate parțială de ordinul doi	258
6.4.2 Diferențierabilitate în sens Gâteaux de ordinul doi	264
6.4.3 Diferențierabilitate în sens Fréchet de ordinul doi.....	265
6.4.4 Diferențierabilitate globală de ordinul doi	273

6.4.5 Exerciții	275
6.5 Concepte de diferențiabilitate de ordin superior	278
6.5.1 Derivabilitate parțială de ordin superior	278
6.5.2 Diferențiabilitate de ordin superior	281
6.5.3 Diferențiabilitate globală de ordin superior	284
6.5.4 Formule de tip Taylor în \mathbb{R}^p	285
6.5.5 Condiții suficiente pentru extrem	288
6.5.5.1 Extrem necondiționat	289
6.5.5.2 Extrem condiționat	294
6.5.5.3 Extrem necondiționat al unei funcții implice	298
6.5.5.4 Extrem condiționat al unei funcții implice	300
6.5.6 Exerciții	305
CAPITOLUL 7 CALCUL INTEGRAL ÎN \mathbb{R}^p	309
7.1 Mulțimi neglijabile	309
7.1.1 Mulțimi elementare	309
7.1.2 Măsura exterioară Jordan	311
7.1.3 Mulțimi de măsură Jordan nulă	313
7.1.4 Mulțimi de măsură Lebesgue nulă	315
7.1.5 Exerciții	317
7.2 Mulțimi măsurabile Jordan	318
7.2.1 Mulțimi mărginite măsurabile Jordan	318
7.2.2 Măsura Jordan în \mathbb{R}^p	321
7.2.3 Mulțimi nemărginite măsurabile Jordan	323
7.2.4 Exerciții	324
7.3 Funcții măsurabile pe mulțimi mărginite măsurabile Jordan	325
7.3.1 Criterii de integrabilitate pe mulțimi mărginite măsurabile Jordan	325
7.3.2 Proprietățile funcțiilor integrabile pe mulțimi mărginite măsurabile Jordan	335
7.3.3 Formule de calcul a integralelor multiple	340
7.3.4 Exerciții	350
7.4 Integrale multiple generalizate pe mulțimi măsurabile Jordan	353
7.4.1 Integrabilitate pe mulțimi nemărginite măsurabile Jordan	353
7.4.2 Proprietățile funcțiilor integrabile pe mulțimi nemărginite măsurabile Jordan	358
7.4.3 Funcții nemărginite integrabile pe mulțimi mărginite măsurabile Jordan	359
7.4.4 Exerciții	360
7.5 Integrale cu parametru	361
7.5.1 Integrale cu parametru pe mulțimi mărginite măsurabile Jordan	361

7.5.2 Integrale generalizate cu parametru	366
7.5.3 Exerciții	372
CAPITOLUL 8 INTEGRAREA FORMELOR DIFERENȚIABILE DE GRADUL ÎNTÂI ȘI DOI	377
8.1 Integrale curbilinii	377
8.1.1 Drumuri și curbe în \mathbb{R}^n	377
8.1.2 Forme diferențiale de gradul întâi în \mathbb{R}^n	381
8.1.3 Integrala unei forme diferențiale de gradul întâi pe un drum	383
8.1.4 Integrarea formelor diferențiale primitivabile	388
8.1.5 Exerciții	393
8.2 Integrale de suprafață	397
8.2.1 Pânze și lanțuri în \mathbb{R}^n	397
8.2.2 Noțiunea de suprafață	399
8.2.3 Forme diferențiale de gradul doi	401
8.2.4 Integrarea formelor diferențiale de gradul doi în \mathbb{R}^3	402
8.2.5 Exerciții	407
CAPITOLUL 9 ECUAȚII DIFERENȚIALE.....	409
9.1 Ecuații diferențiale liniare	409
9.2 Sisteme de ecuații diferențiale liniare	423
CAPITOLUL 10 ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDINUL ÎNTÂI	457
10.1 Sisteme simetrice. Integrale prime	457
10.2 Ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi liniare	459
10.3 Ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi cvasiliniare	464
10.4 Interpretarea geometrică a soluțiilor	466
10.5 Aplicații ale sistemelor de ecuații diferențiale	468
10.5.1 Traекторiile ortogonale ale unei familii de suprafete	468
10.5.2 Liniile de câmp ale unui câmp vectorial	469
10.5.3 Generarea suprafețelor	470
BIBLIOGRAFIE	473



CAPITOLUL 1

STRUCTURI MATEMATICE FUNDAMENTALE

1.1 Spații topologice

Când un *topolog* este întrebat *Ce este topologia?*, *La ce folosește?*, acesta este pus într-o poziție incomodă, deoarece interlocutorul său aşteptă acel gen de răspuns care se dă pentru întrebări similare despre trigonometrie, și anume: că trigonometria se ocupă cu determinarea unghiurilor și este folosită pentru a rezolva probleme de geodezie, navigație și astronomie. Topologul nu poate da un răspuns atât de direct; el poate spune că topologia este un tip de reprezentare geometrică folosit în multe domenii ale matematicii moderne, dar acest răspuns, de regulă, nu îl satisfacă pe cel care dorește elemente specifice. În acest caz topologul poate să construiască o bandă **Möbius**¹ și să o taie de-a lungul liniei mediane obținând o nouă bandă **Möbius** sau poate să ia o bucată de sfoară și să arate cum se pot forma, fără a înnodă, trei bucle. De asemenea, poate demonstra cum se poate scoate vesta fără a scoate haina. Fiecare din aceste scamatorii este bazată pe o idee matematică care necesită câteva ore pentru a fi explicată. A prezenta aceste scamatorii fără o explicație adecvată înseamnă a prezenta o caricatură a topologiei.

Topologia a început să fie recunoscută ca un domeniu distinct al matematicii acum aproximativ șaptezeci de ani, dar dezvoltarea ei semnificativă a avut loc în ultimii patruzeci de ani. Topologia este cea mai viguroasă dintre ramurile noi ale matematicii și a influențat puternic majoritatea ramurilor mai vechi; ea a fost inițiată ca un răspuns la necesitățile analizei matematice (partea matematicii care conține calculul diferențial, calculul integral și ecuațiile diferențiale). Cel mai remarcabil fapt este că ideile topologiei au pătruns în aproape toate domeniile matematicii. Pentru a aprecia topologia este necesar să se studieze unele dintre aplicațiile ei fructuoase. În cele mai multe dintre aceste aplicații, topologia furnizează metode și concepte pentru demonstrarea unor propoziții fundamentale cunoscute ca teoreme de existență. O teoremă de existență afirmă că pentru o anumită problemă există o *soluție*; aceasta îi asigură pe cei care caută o astfel de soluție că efortul lor nu este zadarnic. Deoarece teoremele de existență sunt adesea fundamentale în structura unui subiect matematic, posibilitățile pe care le are topologia în demonstrarea acestor teoreme constituie o forță unificatoare pentru domenii vaste ale matematicii.

¹ August Ferdinand Möbius, 1790-1868, matematician german

O definiție succintă a topologiei poate fi următoarea:

Definiție 1.1. *Topologia este ramura matematicii care studiază proprietățile topologice ale mulțimilor de puncte și ale funcțiilor.*

Observație 1.2

Cunoaștem că pe axa reală o mulțime $D \subset \mathbb{R}$ se numește *mulțime deschisă* dacă $D = \emptyset$ sau $D \neq \emptyset$ și $\forall x \in D, \exists r > 0$, astfel încât $(x - r, x + r) \subset D$. Complementara unei mulțimi deschise față de mulțimea totală $X = \mathbb{R}$ se numește *mulțime închisă*.

Definiție 1.3

Fie $X \neq \emptyset$ o mulțime arbitrară. O familie $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ de părți ale lui X se numește *topologie* pentru X dacă satisface următoarele axiome:

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{D}$ (mulțimea vidă și mulțimea totală aparțin familiei \mathcal{D});
- (ii) $\forall (D_\alpha)_{\alpha \in A} \subset \mathcal{D} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} D_\alpha \in \mathcal{D}$ (reuniunea infinită de mulțimi din \mathcal{D} este în \mathcal{D});
- (iii) $\forall D_i \in \mathcal{D}, i = \overline{1, n} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n D_i \in \mathcal{D}$ (intersecție finită de mulțimi din \mathcal{D} este în \mathcal{D}).

Definiție 1.4. O pereche (X, \mathcal{D}) , unde X este o mulțime nevidă, iar $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ este o topologie pentru X se numește *spațiu topologic*. Elementele lui $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ se numesc *mulțimi deschise* în raport cu topologia \mathcal{D} , iar complementarele mulțimilor deschise se numesc *mulțimi închise* în raport cu topologia \mathcal{D} . Dacă $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ sunt două topologii pe X , \mathcal{D}_2 este **mai fină** decât \mathcal{D}_1 , dacă $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2$.

Exemple:

(i) Fie X o mulțime. Familia $\mathcal{D} = \{\emptyset, X\}$ este o topologie pentru X numită *topologie trivială sau grosieră*, iar perechea (X, \mathcal{D}) este *spațiu topologic trivial*.

(ii) Fie X o mulțime. Familia $\mathcal{P}(X)$ este o topologie pentru X numită *topologie discretă*, iar perechea $(X, \mathcal{P}(X))$ este *spațiu topologic discret*.

(iii) Pe \mathbb{R} se consideră familia de mulțimi deschise

$\mathcal{D}_{\mathbb{R}} = \{D \subset \mathbb{R} \mid (\forall x \in D, \exists r > 0, \text{ astfel încât } (x - r, x + r) \subset D\} \cup \emptyset$, ce reprezintă *topologia uzuală* pe \mathbb{R} . Perechea $(\mathbb{R}, \mathcal{D}_{\mathbb{R}})$ este *spațiu topologic uzual*.

(iv) Pe $\overline{\mathbb{R}}$ se consideră familia de mulțimi

$\mathcal{D}_{\overline{\mathbb{R}}} = \mathcal{D}_{\mathbb{R}} \cup \{D \cup (a, \infty], D \cup [-\infty, b), D \cup [-\infty, b) \cup (a, \infty] \mid D \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}, a, b \in \mathbb{R}\}$, ce reprezintă o topologie pe $\overline{\mathbb{R}}$. Perechea $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{D}_{\overline{\mathbb{R}}})$ este un spațiu topologic.

(v) Pe mulțimea \mathbb{C} a numerelor complexe se consideră familia de mulțimi deschise

$$\mathcal{D}_{\mathbb{C}} = \{D \subset \mathbb{C} \mid (\forall) a \in D, (\exists) r > 0 \text{ astfel încât } B(a, r) \subset D\} \cup \emptyset,$$

unde $B(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$ este discul deschis centrat în a și de rază r .

Perechea $(\mathbb{C}, \mathcal{D}_{\mathbb{C}})$ este spațiu topologic.

Observație 1.5

Din legile lui **de Morgan**² deducem $C(A \cup B) = CA \cap CB$ și $C(A \cap B) = CA \cup CB$, $CX = \emptyset$ și $C\emptyset = X$, adică orice reuniune finită de submulțimi închise ale lui X este o mulțime închisă și orice intersecție de submulțimi închise ale lui X este o închisă.

Definiție 1.6

Fie (X, \mathcal{D}) un spațiu topologic. Mulțimea $V \subset X$ se numește *vecinătate* a punctului $x \in X$ dacă $\exists D \in \mathcal{D}$ astfel ca $x \in D \subset V$.

Observație 1.7

Dacă $(X, \mathcal{D}_{\mathbb{R}})$ este topologia uzuale pe $X = \mathbb{R}$, spunem că V este o *vecinătate* a lui $x \in X$ dacă $\exists D \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ cu $x \in D \subset V$, altfel spus cum D este o deschisă și $x \in D \Rightarrow \exists r > 0$ astfel încât $(x - r, x + r) \subset D \subset V$.

Definiție 1.8

Numim *filtrul vecinătăților punctului* x în spațiul topologic (X, \mathcal{D}) familia tuturor vecinătăților lui x și notăm

$$\mathcal{V}(x) = \{V \subset X \mid V \text{ este o vecinătate a lui } x\}.$$

Propoziție 1.9

Fie (X, \mathcal{D}) un spațiu topologic și $x \in X$, filtrul vecinătăților $\mathcal{V}(x)$ are următoarele proprietăți:

- (i) Dacă $V \in \mathcal{V}(x)$, atunci $x \in V$.
- (ii) Dacă $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x)$, atunci $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x)$.
- (iii) Dacă $V \in \mathcal{V}(x)$ și $V \subset U$, atunci $U \in \mathcal{V}(x)$.
- (iv) Dacă $V \in \mathcal{V}(x)$, atunci există $W \in \mathcal{V}(x)$ astfel încât $W \subset V$ și pentru orice $y \in W, V \in \mathcal{V}(y)$.

Demonstrație

(i) Fie $V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists D \in \mathcal{D}$ cu $x \in D \subset V \Rightarrow x \in V$.

(ii) $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ cu $x \in D_i \subset V_i$,

$$i = \overline{1, 2} \Rightarrow x \in D_1 \cap D_2 \subset V_1 \cap V_2.$$

Dar $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{D} \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x)$.

² Augustus de Morgan, 1806-1871, matematician englez

(iii) Dacă $V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists D \in \mathcal{D}$ cu proprietatea

$$x \in D \subset U \Rightarrow U \in \mathcal{V}(x)$$

(iv) Fie $V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists D \in \mathcal{D}$ cu $x \in D \subset V$. Să luăm $W = D \Rightarrow W \in \mathcal{D}$.

Dacă $y \in W$, atunci putem scrie că $\exists W \in \mathcal{D}$ astfel încât $y \in W \subset W \Rightarrow W \in \mathcal{V}(y)$.

Definiție 1.10

Un spațiu topologic (X, \mathcal{D}) se numește *spațiu topologic separat* (sau spațiu **Hausdorff**³) dacă pentru orice două puncte $x, y \in X$, cu $x \neq y$ rezultă că există vecinătățile $V \in \mathcal{V}(x)$, $U \in \mathcal{V}(y)$, astfel încât $U \cap V = \emptyset$.

Exemplu:

1) $(\mathbb{R}, \mathcal{D}_{\mathbb{R}})$ este spațiu topologic separat.

2) $(\mathbb{C}, \mathcal{D}_{\mathbb{C}})$ este spațiu topologic separat.

Definiție 1.11. Fie (X, τ) un spațiu topologic. O aplicație $f : \mathbb{N} \rightarrow X$, $f(n) = x_n$, $n \in \mathbb{N}$, se numește *șir de puncte* și se notează prin $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Dacă x_n sunt numere reale, șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se numește *șir de numere reale*.

Fie $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ un spațiu topologic, un șir $(x_n)_n \subset X$ și $x \in X$. Spunem că șirul $(x_n)_n$ converge la x și scriem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(x)$ există un număr $n_V \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_V \Rightarrow x_n \in V$.

Este ușor de demonstrat următoarea afirmație

Propoziție 1.12

Limita unui șir convergent într-un spațiu topologic separat este unică.

Observație. În mulțimea \mathbb{R} a numerelor reale, dacă un șir de numere este convergent, limita sa este unică. Într-un spațiu topologic oarecare, limita unui șir, în general, nu este unică, fapt ce poate fi constatat din următorul

Exemplu:

Fie X o mulțime infinită, nenumărabilă și

$$\mathcal{D} = \{G \mid X \setminus G \text{ este finit}\} \cup \{\emptyset\}.$$

În spațiul topologic (X, \mathcal{D}) orice șir $(x_n)_{n \in N}$, cu termenii diferenți doi câte doi, este convergent către orice punct x al spațiului, deci are o infinitate de limite. Spațiile topologice în care este asigurată unicitatea limitei sunt **spațiile topologice separate (Hausdorff)**.

³ Felix Hausdorff, 1868-1942, matematician german

Definiție. Fie (X, \mathcal{D}) un spațiu topologic, $x \in X$ și mulțimea $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{V}(x)$. $\mathcal{U}(x)$ se numește **sistem fundamental de vecinătăți** ale lui x , dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(x)$ există submulțimea $W \in \mathcal{U}(x)$ astfel încât $W \subset V$.

Exemple:

1) În spațiul topologic $(\mathbb{R}, \mathcal{D}_{\mathbb{R}})$, familia $U(x) = \{(x-r, x+r) \mid r > 0\}$ este un sistem fundamental de vecinătăți ale lui x .

2) În spațiul topologic $(\mathbb{R}, \mathcal{D}_{\mathbb{R}})$, familia $U(x) = \left\{ \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right) \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$

este un sistem fundamental *numărabil* de vecinătăți ale punctului $x \in \mathbb{R}$.

3) În spațiul topologic $(\mathbb{C}, \mathcal{D}_{\mathbb{C}})$, familia $U(z) = \{B(z, r) \mid r > 0\}$ este un sistem fundamental de vecinătăți ale punctului $z \in \mathbb{C}$.

4) În spațiul topologic $(\mathbb{C}, \mathcal{D}_{\mathbb{C}})$, familia $U(z) = \left\{ B\left(z, \frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ este

un sistem fundamental *numărabil* de vecinătăți ale lui $z \in \mathbb{C}$.

1.1.1 Multimi de puncte în spații topologice

Definiție 1.13

Fie (X, \mathcal{D}) un spațiu topologic, $A \subset X$ și $x \in X$. Punctul x se numește *punct interior* al mulțimii A dacă mulțimea A este o vecinătate pentru punctul x adică $A \in \mathcal{V}(x)$ sau echivalent există $D \in \mathcal{D}$ cu proprietatea $x \in D \subset A \in \mathcal{V}(x)$.

Notăm cu $\overset{\circ}{A} = \text{int } A = \{x \in X \mid x \text{ este punct interior al lui } A\}$ și o numim *interiorul mulțimii* A în topologia \mathcal{D} .

Exemplu: Fie spațiul topologic $(\mathbb{R}^2, \mathcal{D}_{\mathbb{R}^2})$. Dacă

$$A = [a, b] \times [a, b], \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b, \quad \text{atunci } \overset{\circ}{A} = (a, b) \times (a, b).$$

Propoziție 1.14. Proprietăți ale interiorului mulțimii A .

(i) $\overset{\circ}{A} \subset A$.

(ii) $A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

(iii) $\overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

(iv) A este deschisă $\Leftrightarrow A = \overset{\circ}{A}$.

(v) $\overset{\circ}{A} = \bigcup_{D \in \mathcal{D}, D \subset A} D$, adică interiorul lui A este cea mai mare mulțime deschisă conținută în A .

Demonstrație

(i) $x \in \overset{\circ}{A} \Rightarrow A \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in A$.

(ii) Fie $x \in \overset{\circ}{A} \Rightarrow A \in \mathcal{V}(x)$ și cum $A \subset B \Rightarrow B \in \mathcal{V}(x)$, deci $x \in \overset{\circ}{B}$.

(iii) Avem următoarele relații $A \cap B \subset A$ și $A \cap B \subset B$. Din (ii) \Rightarrow

$$\widehat{A \cap B} \subset \overset{\circ}{A} \text{ și } \widehat{A \cap B} \subset \overset{\circ}{B} \Rightarrow \widehat{A \cap B} \subset \overset{\circ}{A \cap B}.$$

Reciproc $\forall x \in \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \Rightarrow x \in \overset{\circ}{A}$ și $x \in \overset{\circ}{B} \Rightarrow A \in \mathcal{V}(x)$ și

$$B \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in \widehat{A \cap B}$$

(iv) A deschisă $\Rightarrow \exists D \in \mathcal{D}$ astfel încât $\forall x \in A$, $x \in D \subset A$. Aleg $D = A$, deoarece $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A \in \mathcal{V}(x)$, $\forall x \in A \Rightarrow x \in \overset{\circ}{A} \Rightarrow A \subset \overset{\circ}{A}$.

Cum $\overset{\circ}{A} \subset A \Rightarrow \overset{\circ}{A} = A$.

(v) Dacă $x \in \overset{\circ}{A} \Rightarrow \exists D \in \mathcal{D}$ cu $x \in D \subset A$, deci $x \in \bigcup \{D \mid D \in \mathcal{D}, D \subset A\}$.

Reciproc, dacă $x \in \bigcup \{D \mid D \in \mathcal{D}, D \subset A\}$, atunci $\exists D \in \mathcal{D}$, $D \subset A$ cu proprietatea $x \in D$.

Prin urmare, $\exists D \in \mathcal{D}$ astfel încât $x \in D \subset A \Rightarrow A \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in \overset{\circ}{A}$. \square

Definiție 1.15. Fie (X, \mathcal{D}) un spațiu topologic și $A \subset X$. Un element $x \in X$ se numește *punct aderent* al mulțimii A dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(x)$ rezultă $V \cap A \neq \emptyset$.

Mulțimea $\overline{A} = \{x \in X \mid x \text{ este punct aderent al lui } A\}$ se numește *aderența lui A* sau *închiderea* lui A în topologia \mathcal{D} .

Exemplu: Fie spațiul topologic $(\mathbb{R}^2, \mathcal{D}_{\mathbb{R}^2})$.

Dacă $A = (a, b) \times (a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, atunci $\overline{A} = [a, b] \times [a, b]$.

Definiție 1.16. Fie $A \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. Notăm cu $d(x, A) = \inf_{a \in A} |x - a|$ distanța de la punctul x la mulțimea A .

Teoremă 1.17. Fie spațiul topologic real $(\mathbb{R}, \mathcal{D}_{\mathbb{R}})$, mulțimea $A \subset \mathbb{R}$ și punctul $x \in \mathbb{R}$. Următoarele afirmații sunt echivalente.

(i) punctul x este punct aderent al mulțimii A ,

(ii) există sirul $(a_n)_n \subset A$ convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$,

(iii) $d(x, A) = 0$.

Demonstrație

Să demonstrăm că (i) \Rightarrow (ii). Presupun că $x \in \bar{A} \Rightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x)$ avem

$V \cap A = \emptyset$. În particular pentru $V_n = \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right)$ avem $V_n \cap A \neq \emptyset$, $\forall n \geq 1$.

Construim sirul $a_n \in A \cap V_n$, $\forall n \geq 1 \Rightarrow a_n \in A$ și $|a_n - x| < \frac{1}{n}$, adică sirul $(a_n)_n$ are limită și $\lim_n a_n = x$.

(ii) \Rightarrow (iii). Presupun că $\exists (a_n)_n \subset A$ și $\lim_n a_n = x$.

Atunci $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|a_n - x| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_\varepsilon$.

Dar $d(x, A) = \inf_{a \in A} |x - a|$ și cum $a_n \in A \Rightarrow d(x, A) = \inf |x - a| \leq |x - a_n| \Rightarrow d(x, A) < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow d(x, A) = 0$.

(iii) \Rightarrow (i). Vom presupune că $d(x, A) = 0$ și fie o vecinătate arbitrară a punctului x , $V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists D \in \mathcal{D}$ cu proprietatea că $x \in D \subset V$.

Cum mulțimea $D \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}} \Rightarrow \exists r > 0$ astfel încât $(x - r, x + r) \subset D \subset V$, adică $(x - r, x + r) \subset V$.

Deoarece $0 = d(x, A) = \inf_{a \in A} |x - a|$ este cel mai mare minorant al mulțimii $\{|x - a|\}_{a \in A}$ rezultă că $r > 0$ nu este minorant pentru această mulțime, adică există un element $a_r \in A$ astfel încât $r > |x - a_r| \Rightarrow -r < x - a_r < r$, prin urmare $a_r \in (x - r, x + r) \subset V$ și cum $a_r \in A$ rezultă că $a_r \in (x - r, x + r) \cap A$ sau echivalent $a_r \subset V \cap A$. În concluzie, $\forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow A \cap V \neq \emptyset$, adică $x \in \bar{A}$. \square

O afirmație similară are loc și pentru mulțimi $A \subset \mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$.

Propoziție 1.18. Fie (X, \mathcal{D}) un spațiu topologic și $A \subset X$. Aderența mulțimii A are următoarele proprietăți:

(i) $A \subset \bar{A}$;

(ii) $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$;

(iii) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;

(iv) A închisă $\Leftrightarrow A = \bar{A}$;

(v) $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$;

(vi) $\bar{A} = \bigcap_{F=F, F \supset A} F$ (adică \bar{A} este cea mai mică închisă ce include pe A).

Demonstrație

(i) Fie $x \in A \Rightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x), (x \in V) \Rightarrow x \in V \cap A \Rightarrow x \in \bar{A} \Rightarrow A \subset \bar{A}$.

(ii) Fie $x \in \bar{A}$ și $\mathcal{V} \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset$ și cum

$$A \subset B \Rightarrow B \cap V \neq \emptyset, \forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in \bar{B}.$$

(iii) Avem următoarele incluziuni $A \subset A \cup B$ și $B \subset A \cup B$.

Din (ii) rezultă $\bar{A} \subset \overline{A \cup B}$ și $\bar{B} \subset \overline{A \cup B}$, prin urmare $\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Trebuie să arătăm că $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B} \Leftrightarrow C(\overline{A \cup B}) \supset C(\bar{A} \cup \bar{B}) = C\bar{A} \cap C\bar{B}$.

Fie $x \in C\bar{A} \cap C\bar{B} \Rightarrow x \notin \bar{A}$ și $x \notin \bar{B} \Rightarrow \exists U_1, U_2 \in \mathcal{V}(x)$ cu proprietatea $U_1 \cap A = \emptyset$ și $U_2 \cap B = \emptyset$. Luăm $U_0 = U_1 \cap U_2 \Rightarrow U_0 \subset U_1$ și $U_0 \subset U_2 \Rightarrow U_0 \cap A = \emptyset$ și $U_0 \cap B = \emptyset \Rightarrow U_0 \cap (A \cup B) = \emptyset$. Cum $U_0 \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow x \notin \overline{A \cup B}$.

(iv) Vom spune că $A \subset (X, \mathcal{D})$ este închisă dacă $CA \in \mathcal{D}$. Să presupunem că A este închisă $\Rightarrow CA \in \mathcal{D}$. Va trebui să arătăm că $\bar{A} \subset A$, cealaltă incluziune fiind demonstrată la (i). Dar $\bar{A} \subset A \Leftrightarrow CA \subset C\bar{A}$.

Fie $x \in CA$ care este deschisă $\Rightarrow CA \in \mathcal{V}(x)$, $\forall x \in CA$. Însă $CA \cap A = \emptyset \Rightarrow x \notin \bar{A} \Rightarrow x \in C\bar{A}$.

Reciproc presupunem că $A = \bar{A}$ și demonstrăm că A este închisă, adică CA este deschisă $\Leftrightarrow CA \in \mathcal{V}(x)$, $\forall x \in CA$.

Fie $x \in CA = C\bar{A}$ conform ipotezei. Atunci $x \notin \bar{A}$, deci $\exists V_0 \in \mathcal{V}(x)$ cu proprietatea că $V_0 \cap A = \emptyset$ ceea ce este echivalent cu $V_0 \subset CA$. Însă $V_0 \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow CA \subset \mathcal{V}(x)$, $\forall x \in CA \Rightarrow CA$ este deschisă $\Rightarrow A$ este închisă.

(v) Din (i) $\Rightarrow \bar{A} \subset \bar{\bar{A}}$.

Fie $x \in \bar{\bar{A}} \Rightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x)$ avem $V \cap \bar{A} = \emptyset$.

Cum $\overset{\circ}{V} \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow \overset{\circ}{V} \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in A \cap \overset{\circ}{V}$. Deoarece $\overset{\circ}{V}$ este o deschisă și îl conține pe $y \Rightarrow \overset{\circ}{V} \in \mathcal{V}(y)$. Însă $y \in \bar{A} \Rightarrow \overset{\circ}{V} \cap A \neq \emptyset$ de unde datorită lui $\overset{\circ}{V} \subset V \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset$. Cum $V \in \mathcal{V}(x)$ este arbitrară $\Rightarrow x \in \bar{A} \Rightarrow \bar{\bar{A}} \subset \bar{A}$.

(vi) Fie F o mulțime închisă ce include mulțimea $A \Rightarrow F = \bar{F} \supset \bar{A}$.

Cum F a fost aleasă arbitrar deducem că pentru orice F închisă care include pe A , adică $A \subset F \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{F} = F$ (include și pe \bar{A}). Rezultă $\bar{A} \subset \bigcap_{\substack{F=\bar{F} \\ F \supset A}} F$.

Reciproc, observăm că $\bigcap_{F=\bar{F}} F \subset F = \bar{F}$, $\forall F = \bar{F} \supset A$. În particular pentru $F = \bar{A} \Rightarrow \bigcap F \subset \bar{A}$. \square

Definiție 1.19. Fie (X, \mathcal{D}) un spațiu topologic și $A \subset X$. Un element $x \in X$ se numește *punct de acumulare* al mulțimii A dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(x)$ rezultă $V \cap A - \{x\} \neq \emptyset$.

Notăm cu $A' = \{x \in X \mid x \text{ este punct de acumulare pentru } A\}$ și o numim *mulțimea derivată* a lui A în topologia \mathcal{D} .

Propoziție 1.20. Fie (X, τ) un spațiu topologic și $A \subset X$. Mulțimea derivată a lui A în topologia \mathcal{D} are următoarele proprietăți:

- (i) $A' \subset \bar{A}$;
- (ii) $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$;
- (iii) $(A \cup B)' = A' \cup B'$;
- (iv) $\bar{A} = A \cup A'$;

(v) A este închisă dacă și numai dacă $A' \subset A$.

Demonstrație Primele două propoziții sunt evidente.

(iii) Avem incluziunile $A \subset A \cup B$ și $B \subset A \cup B$.

Conform (ii) $\Rightarrow A' \subset (A \cup B)'$ și $B' \subset (A \cup B)' \Rightarrow A' \cup B' \subset (A \cup B)'$.

Reciproc, vom arăta că $(A \cup B)' \cup A' \cup B' \Leftrightarrow C(A' \cup B') \subset C(A \cup B)'$.

Fie acum $x \in C(A' \cup B') = CA' \cap CB' \Rightarrow x \in CA'$ și $x \in CB' \Rightarrow x \notin A'$ și $x \notin B'$. Prin urmare, există două vecinătăți $V, U \in \mathcal{V}(x)$ astfel încât $(U - \{x\}) \cap A = \emptyset$ și $(V - \{x\}) \cap B = \emptyset$.

Luând $W = U \cap V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow (W - \{x\}) \cap (A \cup B) = \emptyset$ deci $x \notin (A \cup B)'$ $\Rightarrow x \in C(A \cup B)'$.

(iv) Avem următoarele incluziuni $A \subset \bar{A}$, $A' \subset \bar{A} \Rightarrow A \cup A' \subset \bar{A}$.

Reciproc, fie $x \in \bar{A}$. Atunci $\forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset$. Avem sau $x \in A$ sau $x \notin A$. Dacă $x \notin A$, atunci $(V - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$, $\forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in A'$, deci $x \in A \cup A'$.

(v) Dacă A este închisă $\Leftrightarrow A = \bar{A}$. Dar $\bar{A} = A \cup A' \Rightarrow A = A \cup A' \Rightarrow A' \subset A$. \square

Propoziție 1.21. Dacă în orice vecinătate a lui x există o infinitate de puncte ale lui A , atunci punctul $x \in X$ este *punct de acumulare* al mulțimii $A \subset X$.

Consecință 1.22. Dacă A are un punct de acumulare, atunci este infinită. O mulțime finită nu are puncte de acumulare.

O caracterizare utilă a punctelor de acumulare (aderență) este dată de

Teoremă 1.23. Fie (X, \mathcal{D}) un spațiu topologic, mulțimea $A \subset X$ și punctul $x \in X$. Sunt echivalente afirmațiile

- (i) x este punct de acumulare pentru mulțimea A sau $x \in A'$,
- (ii) există $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un sir de elemente distincte din A , cu $x_n \neq x$, $\forall n \in \mathbb{N}$ astfel ca $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Demonstrație

Fie $x \in A'$ și familia $\{V_n\}_n \subset \mathcal{V}(x)$ pe care o putem considera descrescătoare, în caz contrar considerăm $\{U_n\}_n \subset \mathcal{V}(x)$, $U_n = \bigcap_{i=1}^n V_i$.

Atunci $V_n \cap A - \{x\} \neq \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$, deci pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există cel puțin un element $a_n \in V_n \cap A - \{x\}$.

Pentru orice vecinătate $V \subset \mathcal{V}(x)$, există numărul $n_V \in \mathbb{N}$ astfel încât $V_{n_V} \subset V$. Mai mult, sirul $\{V_n\}_n \subset \mathcal{V}(x)$ fiind descrescător obținem

$$V_n \subset V_{n_V} \subset V, \quad \forall n \geq n_V.$$

Din ultimele afirmații deducem că $a_n \in V$, $\forall n \geq n_V$, adică $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$.

Reciproc, presupunem că există sirul $(x_n)_n \subset A$ neconstant, convergent la punctul x . Atunci pentru orice vecinătate $V \subset \mathcal{V}(x)$ există $n_V \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n \in V$, $\forall n \geq n_V$. Deoarece $(x_n)_n \subset A$ deducem că $V \cap A - \{x\} \neq \emptyset$, deci $x \in A'$. \square

Definiție 1.24. Fie (X, \mathcal{D}) un spațiu topologic și $A \subset X$.

Mulțimea $\text{Fr}A = \partial A = \overline{A} \cap (\overline{X - A}) = \overline{A} \cap \overline{CA}$ se numește *frontiera mulțimii* A .

Exemplu: Fie spațiul topologic $(\mathbb{R}^2, \mathcal{D}_{\mathbb{R}^2})$. Frontiera mulțimii $A = (a, b) \times (a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ este

$$\partial A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b] \text{ și } y \in \{a, b\} \text{ sau } x \in \{a, b\} \text{ și } y \in [a, b] \right\}.$$

Definiție 1.25

Fie $A \subset \mathbb{R}$. Vom spune că A este *majorată* (sau *mărginită superior*) dacă $\exists b \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \leq b$, $\forall x \in A$.

Numărul b se numește *majorant* al mulțimii A . Un număr M se numește *margine superioară* a unei mulțimi A dacă este cel mai mic majorant al mulțimii A și notăm $M = \sup A$. Similar definim $m = \inf A$ *marginea inferioară*.

Teoremă 1.26. Orice mulțime nevidă majorată are margine superioară.

Demonstrație

Fie a care nu este majorant al lui A și b un majorant al lui $A \Rightarrow \exists x \in A$ astfel încât $a \leq x \leq b$ și $b - a = \ell > 0$. În plus, putem alege.

Prin metoda **Cantor**⁴ se construiesc două siruri $(a_n)_n, (b_n)_n \subset \mathbb{Q}$ astfel ca:

(i) a_n nu este majorant al lui A și b_n este majorant al lui A , $\forall n \in \mathbb{N}$;

(ii) $b_n - a_n = \frac{\ell}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

(iii) $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$.

Din proprietatea (ii) și (iii) $\exists! \alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $a_n \leq \alpha \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Vom arăta, în doi pași, că $\alpha = \sup A$.

1) α este majorant al lui A . Dacă prin absurd nu este majorant, atunci $\exists x_0 \in A$ cu $\alpha < x_0$. Putem alege $n \in \mathbb{N}$ suficient de mare astfel încât

$$\frac{\ell}{2^n} < x_0 - \alpha \Rightarrow b_n - a_n < x_0 - \alpha \Rightarrow b_n < a_n - \alpha + x_0 \Rightarrow b_n < x_0$$

ceea ce contrazice faptul că b_n este majorant.

2) α este cel mai mic majorant al lui A . Dacă prin absurd $\exists \alpha' < \alpha$ un majorant al lui A , putem alege $n \in \mathbb{N}$ suficient de mare astfel încât $\frac{\ell}{2^n} < \alpha - \alpha'$ $\Rightarrow b_n - a_n < \alpha - \alpha' \Rightarrow -a_n < \alpha - b_n - \alpha' \Rightarrow -a_n < -\alpha' \Rightarrow \alpha' < a_n \Rightarrow a_n$ este majorant pentru A , contradicție. \square

O afirmație similară are loc și pentru mulțimi $A \subset \mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$.

Consecință 1.27. Orice mulțime mărginită are margine superioară și inferioară.

Definiție. Fie $A \subset B$ două mulțimi. Vom spune că mulțimea A este *densă* în B dacă și numai dacă pentru orice $x \in B$ există un sir de puncte $(a_n)_n \subset A$ convergent la x .

⁴ Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, 1845-1918, matematician german

Propoziție. Fie $A \subset B$ două mulțimi. Dacă $\overline{A} = B$, atunci mulțimea A este densă în B .

Exemplu: Mulțimile \mathbb{Q} , $\{m \cdot \alpha + m \mid m, n \in \mathbb{Z}, \alpha \notin \mathbb{Q}\}$ sunt mulțimi dense în \mathbb{R} , pe când mulțimea \mathbb{Z} nu este densă în \mathbb{R} , deoarece $\mathbb{Z} = \overline{\mathbb{Z}} \neq \mathbb{R}$.

Teoremă 1.28 (Weierstrass⁵ - Bolzano⁶)

Orice mulțime A infinită și mărginită are cel puțin un punct de acumulare.

Demonstrație

Pentru simplitate vom considera mulțimea A ca fiind submulțime a mulțimii \mathbb{R} , deși afirmația este adevărată și pentru submulțimi din \mathbb{R}^P .

Fie a un minorant și b un majorant al mulțimii A . În plus, putem alege $a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow \ell = b - a \in \mathbb{Q}$ și $A \subset [a, b]$. Prin metoda **Cantor**⁷ se construiesc două siruri $(a_n)_n, (b_n)_n \subset \mathbb{Q}$ cu proprietățile:

$$(i) \quad a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1;$$

$$(ii) \quad b_n - a_n = \frac{\ell}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

(iii) mulțimea $[a_n, b_n], n \in \mathbb{N}$, conține o infinitate de puncte din A .

Din (i) și (ii) deducem că există în mod unic punctul x_0 astfel ca

$$a_n \leq x_0 \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Fie vecinătatea arbitrară $V = (\alpha, \beta) \in \mathcal{V}(x_0) \Rightarrow \alpha < x_0 < \beta$. Putem alege $n \in \mathbb{N}$ suficient de mare astfel ca $\alpha < a_n \leq x_0 \leq b_n < \beta$ și prin urmare intervalul (α, β) conține o infinitate de puncte din A , adică $(V - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$, deci $x_0 \in A'$. \square

1.1.2 Exerciții

1. Fie mulțimea $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Să se stabilească care din familiile următoare de părți ale lui X este topologie pe X :

$$\mathcal{D}_1 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}\};$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_2 = & \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \\ & \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}\} \end{aligned}$$

Indicație. Cum $\{1, 2\}, \{1, 3\} \in \mathcal{D}_1$, dar $\{1, 2\} \cup \{1, 3\} = \{1, 2, 3\} \notin \mathcal{D}_1$ rezultă că \mathcal{D}_1 nu este topologie pe X .

⁵ Karl Theodor Weierstrass, 1815-1897, matematician german

⁶ Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano, 1871-1948, matematician ceh

⁷ Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, 1845-1918, matematician rus

Pentru \mathcal{D}_2 se verifică toate condițiile din definiția topologiei, deci este o topologie pe X .

- 2.** Să se găsească un exemplu de familie infinită de mulțimi deschise pentru care intersecția nu este o mulțime deschisă.

Indicație

Se consideră, pe axa reală, familia de mulțimi deschise $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, pentru care $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$ este o mulțime închisă.

- 3.** Să se găsească un exemplu de familie infinită de mulțimi închise pentru care reuniunea nu este mulțime închisă.

Indicație

Se consideră, pe axa reală, familia de mulțimi închise $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, pentru care $A_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right]$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0, 1]$ nu este o mulțime închisă.

- 4.** (principiul lui **Cantor** - lema intervalelor incluse)

Dacă sirul de intervale reale închise $I_n = [a_n, b_n]$, $n \geq 1$, are proprietatea

$$I_{n+1} \subset I_n, \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ atunci } \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset.$$

Indicație. Să observăm că din modul în care au fost definite intervalele avem următoarele

$$a_1 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Şirurile reale $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ fiind mărginite și monotone sunt convergente, adică există

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} a_n, \quad b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} b_n.$$

Se arată ușor că pentru orice numere naturale j, k are loc $a_k \leq b_j$. Prin urmare, pentru orice număr natural j , are loc $a = \sup_{k \in \mathbb{N}^*} a_k \leq b_j$. În final se obține

$$a_k \leq a = \sup_{k \in \mathbb{N}^*} a_k \leq \inf_{j \in \mathbb{N}^*} b_j = b \leq b_j, \quad \forall k, j \in \mathbb{N}^*.$$

Pentru $k = j = n \in \mathbb{N}^*$ are loc

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [a, b] \neq \emptyset.$$

5. Fie mulțimea infinită $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$. Să se determine mulțimea punctelor de acumulare A' .

Indicație. Se demonstrează că $0 \in A'$, adică pentru orice vecinătate V a lui 0 se verifică $(V \setminus \{0\}) \cap A \neq \emptyset$.

Fie $n_0 \in N^*$ arbitrar și vecinătatea $V = \left(-\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0}\right) \in V_0$.

Rezultă că $\left[-\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0}\right] \setminus \{0\} \cap A \neq \emptyset$, deoarece $\frac{1}{n_0+1}$ aparține intersecției.

Se arată că nu mai există niciun punct de acumulare pentru mulțimea A .

Fie $x_0 \in A$, $x_0 \neq 0 \Rightarrow (\exists) n_0 \in N^*$ astfel ca $x_0 = \frac{1}{n_0}$. Se consideră vecinătatea punctului x_0 , de forma $V = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon = \frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_0+1}$.

Rezultă $(V \setminus \{x_0\}) \cap A = \emptyset$, deci x_0 nu este punct de acumulare.

Astfel, $A' = \{0\}$.

6. Fie mulțimea $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}; n, m \in N^*\right\}$.

Să se determine mulțimea A' .

Indicație. Se consideră mulțimile

$$A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}, (\forall) m \in N^*\right\}, (\forall) n \in N^*.$$

Atunci $A_n \subset A \Rightarrow A'_n \subset A'$. Cum $A'_n = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, rezultă că mulțimea $B = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\} \subseteq A'$. Se demonstrează incluziunea inversă, adică $A' \subseteq B$.

Pentru aceasta, fie un punct $x_0 \in A' \Rightarrow (\exists) (x_n)_n \subset A$, $x_n \neq x_0$, astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Cum $x_n \in A \Rightarrow x_n = y_n + z_n$. Fie $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ și $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Rezultă că $x_0 = y + z$. Dacă $y = z = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \in B$. Dacă $y \neq 0 \Rightarrow (y_n)_n$ este un sir staționar și $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z = 0$, deci $x_0 = y \in B$.

Rezultă astfel că $A' = B$.

7. Fie $A = \left\{ \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \dots, \frac{2^n - 1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Să se demonstreze că $\overline{A} = [0,1]$.

Indicație. Este clar că $A \subset [0,1] \Rightarrow \overline{A} \subset [0,1]$. Pentru a demonstra inclusiunea inversă, se consideră un punct

$$x \in [0,1] = \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right] \Rightarrow (\exists) k \in \{0, \dots, 2^n - 1\} \text{ astfel ca } x \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right].$$

În consecință, pentru orice vecinătate $V = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ cu $\varepsilon > \frac{1}{2^n}$ rezultă $V \cap A \neq \emptyset$, deci $x \in \overline{A}$, adică $\overline{A} = [0,1]$.

8. Fie funcția reală $f : A \times B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Să se demonstreze că

$$\sup_{y \in B} \inf_{x \in A} f(x, y) \leq \inf_{x \in A} \sup_{y \in B} f(x, y).$$

Indicație

Avem inegalitățile

$$f(x, y) \leq \sup_{y \in B} f(x, y), \quad \forall (x, y) \in A \times B,$$

$$\inf_{x \in A} f(x, y) \leq \inf_{x \in A} \sup_{y \in B} f(x, y), \quad \forall y \in B.$$

Cum termenul din dreapta este o constantă, luăm în stânga supremul după y și avem

$$\sup_{y \in B} \inf_{x \in A} f(x, y) \leq \inf_{x \in A} \sup_{y \in B} f(x, y).$$

9. Fie (X, \mathcal{D}) un spațiu topologic și mulțimea $A \subset X$. Să se arate că

- ◆ $\overline{A} = A \cup \partial A$,
- ◆ A este închisă dacă și numai dacă $A \supseteq \partial A$,
- ◆ A este deschisă dacă și numai dacă $A \cap \partial A = \emptyset$.

10. Demonstrați că mulțimea $K = \{z \in \mathbb{C} \mid z = x + i \cdot y, \quad x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ este o mulțime *închisă* în spațiul topologic complex $(\mathbb{C}, \tau_{\mathbb{C}})$.

11. Să se arate că orice mulțime deschisă nevidă din \mathbb{R}^p , $p \geq 1$, se poate scrie ca reuniune numărabilă de intervale încise.

Indicație

Fie $x \in D = \overset{\circ}{D}$. Prin urmare, există un $r_x > 0$ astfel încât $B(x, r_x) \subset D$. Deoarece mulțimea numerelor raționale este densă în \mathbb{R} , deducem că între două

numere reale diferite există cel puțin un număr rațional, adică există intervalul p dimensional astfel încât $x \in I_x = \prod_{k=1}^p (a_x^{(k)}, b_x^{(k)}) \subset B(x, r_x) \subset D$.

Egalitatea $D = \bigcup_{x \in D} I_x$ este evidentă. Pe de altă parte, deoarece mulțimea $\mathbb{Q}^p \times \mathbb{Q}^p$ este numărabilă, rezultă că familia intervalelor $(I_x)_{x \in D}$ este cel mult numărabilă.

12. Fie $A, B \subset \mathbb{R}$ două mulțimi și $x \in \mathbb{R}$ arbitrar. Să se demonstreze că au loc următoarele egalități

$$\begin{aligned}\sup(A + x) &= \sup A + x \\ \sup(A \cdot x) &= \begin{cases} x \cdot \sup A, & x > 0 \\ x \cdot \inf A, & x < 0 \end{cases} \\ \sup(A + B) &= \sup A + \sup B\end{aligned}$$

Indicație

Demonstrăm numai ultima egalitate. Dacă $x \in A + B$, atunci există numerele reale $a \in A, b \in B$ astfel ca

$$x = a + b \leq \sup(A + B), \quad \forall x \in A + B,$$

ceea ce înseamnă că $\sup A + \sup B$ este un majorant pentru mulțimea $A + B$, adică

$$\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B.$$

Pentru orice $\varepsilon > 0$, din definiția supremului unei mulțimi, există numerele reale $a \in A, b \in B$ astfel ca

$$\sup A - \varepsilon \leq a \leq \sup A$$

și

$$\sup B - \varepsilon \leq b \leq \sup B.$$

Prin adunare obținem

$$\sup A + \sup B - 2 \cdot \varepsilon < a + b \leq \sup A + \sup B.$$

Dar

$a + b \in A + B \Rightarrow a + b \leq \sup(A + B) \Rightarrow \sup A + \sup B - 2 \cdot \varepsilon < \sup(A + B)$, $\forall \varepsilon > 0$, adică

$$\sup A + \sup B \leq \sup(A + B).$$

Cele două inegalități obținute ne conduc la

$$\sup A + \sup B = \sup(A + B).$$

1.2 Spații compacte

Definiție 1.29 Fie (X, \mathcal{D}_X) un spațiu topologic și mulțimea $A \subset X$. O familie $(D_\alpha)_{\alpha \in J}$ de submulțimi ale lui X se numește *acoperire* a lui A dacă $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} D_\alpha$, unde J este o familie nevidă de indici.

O familie $(D_\alpha)_{\alpha \in J} \subset \mathcal{D}_X$ (J o mulțime nevidă de indici) de mulțimi deschise cu proprietatea că pentru orice element $x \in A$, $\exists \alpha \in J$, astfel încât $x \in D_\alpha$, adică $A \subset \bigcup_{\alpha \in J} D_\alpha$, se numește *acoperirea cu mulțimi deschise* a mulțimii A .

Dacă mulțimea J este finită, atunci acoperirea se numește *acoperire finită*.

Se spune că din acoperirea $(D_\alpha)_{\alpha \in J} \subset \mathcal{D}_X$ cu mulțimi deschise a mulțimii A se poate extrage o *subacoperire finită*, dacă există un număr finit de mulțimi deschise $D_{i_1}, D_{i_2}, \dots, D_{i_n} \subset \mathcal{D}_X$, astfel încât $A \subset D_{i_1} \cup D_{i_2} \cup \dots \cup D_{i_n}$.

Definiție. O mulțime închisă și mărginită se numește mulțime *compactă*.

Exemple:

- 1) Orice mulțime finită dintr-un spațiu topologic separat este compactă.
- 2) O submulțime a unui spațiu topologic compact nu este totdeauna compactă. De exemplu, $X = [a, b]$ este compact, dar (a, b) nu este compact.

Teoremă (Borel⁸-Lebesgue⁹). Fie (\mathbb{R}^p, τ) și mulțimea $K \subset \mathbb{R}^p$.

Mulțimea K este compactă dacă și numai dacă din orice acoperire deschisă a lui K se poate extrage o subacoperire finită.

Demonstrație

Pentru simplitate vom considera mulțimea K ca fiind submulțime a mulțimii \mathbb{R} , deși afirmația este adevărată și pentru submulțimi din \mathbb{R}^p . Este clar că dacă din orice acoperire deschisă a lui K se poate extrage o subacoperire finită, mulțimea K este compactă.

Să admitem acum că mulțimea K este compactă și să demonstrăm că din orice acoperire deschisă a sa se poate extrage o subacoperire finită.

- a) Dacă K este finită, afirmația este evidentă.

⁸ Armand Borel, 1923-2003, matematician elvețian

⁹ Henri Léon Lebesgue, 1875-1941, matematician francez

b) Dacă K este infinită, vom presupune prin absurd că K nu poate fi acoperită cu un număr finit de intervale deschise. Cum K este compactă $\Rightarrow K$ este mărginită $\Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{Q}$ astfel încât $\forall x \in C, a \leq x \leq b$.

Vom construi şirurile $(a_n)_n, (b_n)_n \subset \mathbb{Q}$ cu proprietățile:

(i) $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$;

(ii) $b_n - a_n = \frac{\ell}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$;

(iii) mulțimea $A_n \subset K$, cu proprietatea că $\forall x \in A_n, a_n \leq x \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$, nu poate fi acoperită cu un număr finit de intervale deschise.

Din (i) și (ii) $\exists! x_0$ astfel încât $a_n \leq x_0 \leq b_n, \forall n$ și $x_0 \in K'$.

Fie $V = (\alpha, \beta)$ astfel încât $\alpha < x_0 < \beta$. Putem găsi $n \in \mathbb{N}$ suficient de mare $n > \left\lceil \log_2 \left(\frac{\ell}{\beta - \alpha} \right) \right\rceil + 1$ astfel încât $\alpha < a_n \leq x_0 \leq b_n < \beta \Rightarrow A_n \subset V$.

Dar A_n conține o infinitate de puncte din $K \Rightarrow (V - \{x_0\}) \cap K \neq \emptyset$.

Însă K este compactă \Rightarrow este închisă \Rightarrow își conține punctele de acumulare $\Rightarrow x_0 \in K$. Există deci un interval V ce conține pe x_0 , $V \in \mathcal{V}(x)$ ce poate fi acoperire a mulțimii A_n cu n suficient de mare, fapt ce vine în contradicție cu afirmația (iii). \square

Definiție. Un spațiu topologic separat (X, τ_X) se numește *compact*, dacă din orice acoperire deschisă a lui X se poate extrage o subacoperire finită.

Un spațiu topologic $n_j(\varepsilon) \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, p$, se numește *local compact* dacă orice punct din X are o vecinătate compactă.

Observație. Spațiul topologic $(\mathbb{R}, \mathcal{D}_{\mathbb{R}})$ nu este compact, deoarece din acoperirea deschisă $\{(-n, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ a axei reale \mathbb{R} nu se poate extrage o subacoperire deschisă și finită. Totuși, spațiul topologic $(\mathbb{R}, \mathcal{D}_{\mathbb{R}})$ este local compact, deoarece orice $x \in \mathbb{R}$ este punct interior unui interval $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, care este o mulțime compactă. Mulțimea \mathbb{R} poate fi făcută compactă prin adăugarea punctului de la infinit, numit *punctul de compactificare* al lui Aleksandrov¹⁰.

Vom prezenta câteva condiții echivalente de compactitate în spații topologice separate.

¹⁰ Pavel Sergeevich Aleksandrov, 1896-1982, matematician rus

Teoremă. Fie (X, \mathcal{D}) un spațiu topologic și $K \subset X$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- i. Mulțimea K este compactă,
- ii. Din orice familie de mulțimi închise cu intersecția vidă se poate extrage o subfamilie finită cu intersecția vidă.

Demonstrație

$i \Rightarrow ii$. Fie familia $\{F_i\}_{i \in I}$ de mulțimi închise cu proprietatea

$$K \cap \left(\bigcap_{i \in I} F_i \right) = \emptyset.$$

Rezultă că $K \subset C_X \left(\bigcap_{i \in I} F_i \right) = \bigcup_{i \in I} C_X F_i$. Deoarece toate mulțimile $C_X F_i$ sunt închise, iar K este compactă deducem, prin teorema **Borel-Lebesgue**, că există o familie finită de indici $J \subset I$ cu proprietatea:

$$K \cap \left(\bigcap_{i \in J} F_i \right) = \emptyset.$$

$ii \Rightarrow i$. Fie $\mathcal{D} = (D_i)_{i \in I}$ o acoperire cu deschise a lui K , adică

$$K \subset \bigcup_{i \in I} D_i.$$

Pentru mulțimile închise $F_i = C_X D_i$, $i \in I$, putem folosi afirmația ii . Mai mult, cum $K \cap \left(\bigcap_{i \in I} F_i \right) = \emptyset$, există o familie finită de indici $J \subset I$ cu proprietatea $K \cap \left(\bigcap_{i \in J} F_i \right) = \emptyset$, de unde deducem că $K \subset \bigcup_{i \in I} D_i$, adică K este compactă. \square

Propoziția următoare, pe care o lăsăm drept exercițiu, evidențiază principalele proprietăți ale mulțimilor compacte în spații topologice separate.

Propoziție. Dacă (X, \mathcal{D}) este un spațiu topologic separat, atunci:

- i. orice mulțime $K \subset X$ compactă este închisă,
- ii. pentru orice $K, L \subset X$ mulțimi compacte, reuniunea lor $K \cup L$ este compactă echivalent cu afirmația că reuniunea finită de mulțimi compacte este o mulțime compactă,

iii. pentru orice familie nevidă $\{K_i\}_{i \in I}$ de părți compacte ale lui X , intersecția $\bigcap_{i \in I} K_i$ este o mulțime compactă echivalent cu afirmația că intersecția de mulțimi compacte este o mulțime compactă.

Indicație

ii. Se folosește teorema **Borel-Lebesgue**.

iii. Dacă mulțimea K_i este închisă și mărginită pentru orice $i \in I$, unde I este o mulțime de indici, atunci $\bigcap_{i \in I} K_i$ este închisă și mărginită.

Exerciții

1. Să se demonstreze că mulțimea $A = (0,1) \cap Q$ nu este compactă.

Indicație

Fie familia de mulțimi deschise $D_n = \left(\frac{1}{n}, 1 \right)$, $n \in \mathbb{N}^*$, astfel ca

$$A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} D_n.$$

Presupunând, prin reducere la absurd, că A este compactă, prin teorema **Borel-Lebesgue** rezultă că din orice acoperire deschisă a sa se poate extrage o subacoperire finită, adică există k numere naturale $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ astfel ca

$$A \subset \bigcup_{i=1}^k D_{n_i}, \text{ unde } D_{n_1} \subset D_{n_2} \subset \dots \subset D_{n_k}. \text{ Rezultă că } A \subset D_{n_k} \Rightarrow A \subset \left(\frac{1}{n_k}, 1 \right),$$

ceea ce este fals, deoarece $\frac{1}{n_k+1} \in A$, iar $\frac{1}{n_k+1} \notin \left(\frac{1}{n_k}, 1 \right) = D_{n_k}$. Presupunerea făcută fiind falsă, A nu este compactă.

2. Să se arate că orice mulțime deschisă nevidă din \mathbb{R}^p , $p \geq 1$, se poate scrie ca reuniune numărabilă de intervale închise.

Indicație

Fie $x \in D = \overset{\circ}{D}$. Prin urmare, există un $r_x > 0$ astfel încât $B(x, r_x) \subset D$.

Deoarece mulțimea numerelor raționale este densă în \mathbb{R} , deducem că între două numere reale diferite există cel puțin un număr rațional, adică există intervalul p

$$\text{dimensional astfel încât } x \in I_x = \prod_{k=1}^p (a_x^{(k)}, b_x^{(k)}) \subset B(x, r_x) \subset D.$$

Egalitatea $D = \bigcup_{x \in D} I_x$ este evidentă. Pe de altă parte, deoarece mulțimea

$\mathbb{Q}^p \times \mathbb{Q}^p$ este numărabilă, rezultă că familia intervalelor $(I_x)_{x \in D}$ este cel mult numărabilă.

1.3 Spații conexe

Intuitiv, mulțimile conexe sunt *mulțimi dintr-o bucătă*, adică nu sunt reuniuni de mulțimi deschise disjuncte.

Definiție 1.30. O mulțime $A \neq \emptyset$ din spațiul topologic (X, \mathcal{D}) se numește *conexă* în X , dacă nu există mulțimile $D_1, D_2 \subset \mathcal{D}$ astfel încât

$$A \cap D_1 \cap D_2 = \emptyset, \quad D_1 \cap A \neq \emptyset, \quad A \cap D_2 \neq \emptyset, \quad A \subset D_1 \cup D_2.$$

Propoziție. Dacă în spațiul topologic (X, \mathcal{D}) există mulțimile $D_1, D_2 \subset X$ astfel încât

$$D_1 \cap D_2 = \emptyset, \quad D_1 \cap (D_2)' = \emptyset, \quad (D_1)' \cap D_2 = \emptyset, \quad A = D_1 \cup D_2,$$

atunci mulțimea A este conexă în X .

Definiție 1.31. O mulțime $X \neq \emptyset$ deschisă și conexă se numește *domeniu*.

Un domeniu la care i se adaugă frontiera se numește *domeniu închis*.

Definiție. Un spațiu topologic (X, \mathcal{D}) se numește *spațiu conex* dacă nu există două deschise $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ cu următoarele trei proprietăți

- ◆ $X = D_1 \cup D_2$,
- ◆ $D_1 \cap D_2 = \emptyset$,
- ◆ $D_1 \neq \emptyset, D_2 \neq \emptyset$.

Exemplu:

- ◆ Mulțimea finită $A = \{a, b\} \subset \mathbb{R}$ nu este conexă în \mathbb{R} . În adevăr pentru

$$t = \frac{1}{4} \cdot |b - a| \text{ definim deschisele}$$

$$D_1 = (a - t, a + t) \in \mathcal{D}, \quad D_2 = (b - t, b + t) \in \mathcal{D}$$

care verifică cerințele definiției.

- ◆ O submulțime A nevidă a lui \mathbb{R} este conexă dacă și numai dacă A este un interval.

Următoarea teoremă este o teoremă de caracterizare a spațiilor conexe.

Teoremă. Fie (X, \mathcal{D}) un spațiu topologic. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- i. X este spațiu conex,
- ii. X nu se poate descompune în două submulțimi închise, disjuncte și nevide.

Demonstrație

$i \Rightarrow ii$. Presupunem că există mulțimile F_1, F_2 nevide, închise și

$$X = F_1 \cup F_2, \quad F_1 \cap F_2 = \emptyset.$$

Fie deschisele $D_1 = C_X F_1$, $D_2 = C_X F_2$. Din proprietățile lui F_1, F_2 deducem că D_1, D_2 sunt nevide, în plus

$$D_1 \cap D_2 = C_X F_1 \cap C_X F_2 = C_X (F_1 \cup F_2) = C_X (X) = \emptyset$$

$$D_1 \cup D_2 = C_X F_1 \cup C_X F_2 = C_X (F_1 \cap F_2) = C_X (\emptyset) = X,$$

adică X nu este conex, fapt ce contrazice ipoteza i .

$ii \Rightarrow i$. Presupunând că X ar fi neconex, adică există deschisele $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ cu următoarele proprietăți

$$X = D_1 \cup D_2, \quad D_1 \cap D_2 = \emptyset, \quad D_1 \neq \emptyset, \quad D_2 \neq \emptyset.$$

În consecință, există două mulțimi închise, disjuncte și nevide $F_1 = C_X D_1$, $F_2 = C_X D_2$ astfel ca $X = F_1 \cup F_2$, fapt ce contrazice ii . Așadar, X este spațiu conex.

1.4 Spații metrice

Definiție 1.32. Fie X o mulțime nevidă. O *metrică (distanță)* pe X este o aplicație $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ce satisface axiomele distanței:

(M1) $d(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in X$ și $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (pozitivitate);

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in X$ (simetrie);

(M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, $\forall x, y, z \in X$ (inegalitatea triunghiului).

Perechea (X, d) se numește *spațiu metric*. Elementele din X se numesc *puncte*, iar $d(x, y)$ este *distanța de la x la y*.

Proprietatea 1 arată că distanța are valori pozitive, fiind nulă doar dacă punctele x, y coincid, proprietatea 2 arată că distanța este simetrică, iar proprietatea 3 se mai numește inegalitatea triunghiului. Perechea (X, d) formată din mulțimea nevidă X și distanța (metrica) d pe X se numește *spațiu metric*.¹¹ Elementele lui X se numesc *puncte*, iar $d(x, y)$ este *distanța de la x la y*.

Remarcăm că, pe o mulțime, se pot defini mai multe distanțe, deci mai multe structuri de spațiu metric. De asemenea, dacă (X, d) este spațiu metric și $Y \subset X$, atunci (Y, d) este spațiu metric în raport cu distanța indusă pe X .

¹¹ Noțiunea de spațiu metric a fost introdusă de **Frèchet** (1906) și dezvoltată de **Hausdorff** (1914) pornind de la ideile lui **Riemann** (1854).

Exemplu:

1) Perechea (\mathbb{R}, d) unde $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ este spațiu metric.

2) Perechea (\mathbb{C}, d) unde $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ este spațiu metric.

3) Perechea (\mathbb{R}^n, d) unde $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$

pentru $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ este spațiu metric.

Propoziție 1.33. Dacă (X, d) este un spațiu metric, atunci:

(i) $d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_{n-1}, x_n)$, $\forall x_k \in X$, $k = \overline{1, n}$;

(ii) $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$, $\forall x, y, z \in X$;

(iii) $|d(x, y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y, y')$, $\forall x, x', y, y' \in X$ (inegalitatea patrulaterului).

Demonstrație

(ii) Din **M3** avem

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ și} \\ d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) = d(x, y) + d(x, z) \end{array} \right. \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y) \\ d(y, z) - d(x, z) \leq d(x, y) \end{array} \right. \Rightarrow |d(y, z) - d(x, z)| \leq d(x, y) \end{aligned}$$

(iii) Folosind (i) avem:

$$d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y') + d(y', y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(x, y) - d(x', y') \leq d(x, x') + d(y', y)$$

Schimbând rolul lui $x \rightarrow x'$ și $y \rightarrow y'$

$$\Rightarrow d(x', y') - d(x, y) \leq d(x, x') + d(y', y) \Rightarrow \text{(iii)} \square$$

Definiție 1.34. Fie (X, d) un spațiu metric și $a \in X$. Se numește *bilă deschisă de centru a și rază $r > 0$* mulțimea

$$B(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\}.$$

Analog, mulțimea $\forall n \geq n_j(\varepsilon)$ se numește *bilă închisă de centru a și rază r*.

Exemplu:

1) Fie spațiul metric (\mathbb{R}, d) unde $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$.

Mulțimea $B(x, r) = (x - r, x + r)$, adică bila deschisă de centru x și rază r coincide cu intervalul deschis $(x - r, x + r)$.

2) Fie spațiul metric (\mathbb{R}^2, d) unde $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.

Bila deschisă de centru $x = (x_1, x_2)$ și rază $r > 0$ coincide cu mulțimea punctelor interioare discului cu centrul în $x = (x_1, x_2)$ și de rază $r > 0$.

3) Fie spațiul metric

(\mathbb{R}^3, d) unde $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$.

Atunci bila deschisă de centru $x = (x_1, x_2, x_3)$ și rază $r > 0$ coincide cu interiorul sferei centrate în $x = (x_1, x_2, x_3)$ și de rază r .

În cele ce urmează arătăm cum putem defini pe spațiul \mathbb{R}^n o structură de spațiu metric. Mulțimea $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ este formată din toate sistemele ordonate de puncte (x_1, x_2, \dots, x_n) . Elementele lui $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se numesc *puncte*, iar numerele x_i se numesc *coordonate de rang i ale punctului x*. Mulțimea \mathbb{R}^n se mai numește *spațiu aritmetic cu n dimensiuni*.

Putem defini pe \mathbb{R}^n următoarele operații peste \mathbb{R} :

- adunarea vectorilor $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$,
- înmulțirea cu scalar $\alpha \cdot x = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \dots, \alpha \cdot x_n)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Se pot verifica axiomele spațiului vectorial, rezultă că $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ este spațiu vectorial peste \mathbb{R} , iar punctele sale se numesc *vectori* și x_i *coordonatele vectorilor*. În \mathbb{R}^n se mai definește *produsul scalar* a doi vectori

$$\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n$$

cu proprietățile

- (i) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (comutativitate);
- (ii) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ (distributivitatea față de adunare);
- (iii) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ (omogenitate);
- (iv) $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ și $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (pozitivitate).

Definiție. Spațiul vectorial \mathbb{R}^n în care s-a definit un produs scalar se numește *spațiu Euclidian cu n dimensiuni*.

Definiție 1.35. În spațiul **Euclidian** $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ putem defini *norma* vectorului $x \in \mathbb{R}^n$ ca fiind număr real

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

ce are proprietățile

- (i) $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ și $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (pozitivitate);
- (ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (inegalitatea triunghiului);
- (iii) $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. (omogenitate).

Definiție 1.36. Un spațiu vectorial pe care s-a definit o normă cu proprietățile precedente se numește *spațiu normat*. Într-un spațiu normat putem definim *distanța dintre două puncte* ca fiind $d(x, y) = \|x - y\|$.

Observație 1.37. Într-un spațiu metric se poate introduce o topologie \mathcal{D}_d cu ajutorul distanței, numită *topologia metrică* $(X, d) \rightarrow (X, \mathcal{D}_d)$. În acest sens este necesar să definim *mulțimile deschise*.

Definiție 1.38. Fie (X, d) un spațiu metric. Spunem că mulțimea $D \subset X$ este *deschisă* și notăm $D \in \mathcal{D}_d$ dacă pentru orice punct $a \in D$, există $r > 0$ astfel încât $B(a, r) \subset D$.

Se poate arăta că familia de mulțimi \mathcal{D}_d care conține \emptyset , X și toate mulțimile deschise D formează o topologie pe (X, d) și spațiul metric (X, d) este un spațiu topologic separat.

Teoremă 1.39. Familia de mulțimi \mathcal{D}_d formată din \emptyset, X și toate mulțimile D definite mai sus formează o topologie pe (X, d) .

Demonstrație

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{D}_d$;

(ii) Fie $D_1, D_2 \in \mathcal{D}_d$ nevide (dacă este una vidă, atunci $\bigcap D_i \in \mathcal{D}_d$).

Fie $x_0 \in D_1 \cap D_2 \Rightarrow x_0 \in D_1$ și $x_0 \in D_2 \Rightarrow \exists r_1, r_2 > 0$ astfel încât

$$B(x_0, r_1) \subset D_1 \text{ și } B(x_0, r_2) \subset D_2.$$

Notăm cu $r = \min(r_1, r_2)$ și găsim $B(x_0, r) \subset D_i$, $i = \overline{1, 2}$

$$\Rightarrow B(x_0, r) \subset D_1 \cap D_2 \Rightarrow D_1 \cap D_2 \in \mathcal{D}_d.$$

(iii) Fie o familie oarecare $(D_k)_{k \in J} \subset \mathcal{D}_d$. Vom arăta că $\bigcup_{k \in J} D_k \in \mathcal{D}_d$.

Vom presupune că cel puțin una este nevidă.

Fie $x \in \bigcup_{k \in J} D_k$ rezultă că $\exists k_0 \in J$ astfel încât $x_0 \in D_{k_0} \in \mathcal{D}_d$ și $\exists r > 0$

astfel încât $B(x_0, r) \subset D_{k_0} \subset \bigcup_{k \in J} D_k$ deci $B(x_0, r) \subset \bigcup_{k \in J} D_k$, adică $\bigcup_{k \in J} D_k \in \mathcal{D}_d$. \square

Definiție. O *vecinătate* a punctului $a \in X$ în spațiul topologic (X, \mathcal{D}_d) este o mulțime nevidă $V \subset X$ cu proprietatea că $\exists r > 0$ astfel încât $B(a, r) \subset V$.

Definiție. În spațiul metric $(\mathbb{R}^n, d_2), n \geq 2$, se numește *interval n-dimensional*, mulțimea

$$I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_1 \in I_1, \dots, x_n \in I_n\}$$

unde $I_k, k = \overline{1, n}$, este un interval (latura intervalului I) pe dreapta reală.

După cum intervalele I_k sunt **toate închise, deschise, mărginite**, spunem că intervalul I este închis, deschis, mărginit.

Din propoziția următoare deducem că orice interval n – dimensional mărginit și deschis ce conține pe a este la rândul său o vecinătate.

Propoziție. Orice bilă $B(a, r)$ deschisă include un interval n – dimensional mărginit și deschis ce conține pe a și reciproc, orice interval n – dimensional, mărginit și deschis care conține pe a include o bilă deschisă $B(a, r)$.

Demonstrație

$$\begin{aligned} \text{,,}\Rightarrow\text{''}. \text{ Fie } S_r(a) \text{ o sferă deschisă } \Rightarrow x \in S_r(a) \Leftrightarrow d(x, a) < r \\ \Rightarrow (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 < r^2. \end{aligned}$$

$$\text{Aleg intervalul } I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n, \text{ unde } I_k = \left(a_k - \frac{r}{\sqrt{n}}, a_k + \frac{r}{\sqrt{n}} \right),$$

$\forall k = \overline{1, n}$ care conține pe a și este inclus în $S_r(a)$ deoarece $\forall x \in I \Rightarrow x_k \in I_k$

$$\text{sau } |x_k - a_k| < \frac{r}{\sqrt{n}}, \forall k = \overline{1, n}$$

$$\Rightarrow (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 < r^2 \Rightarrow x \in S_r(a).$$

$\text{,,}\Leftarrow\text{''}. \text{ Fie } I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n \text{ un interval } n \text{ – dimensional mărginit și deschis ce conține pe } a \in \mathbb{R}^3. \text{ Dacă } I_k = (\alpha_k, \beta_k) \Rightarrow \alpha_k < a_k < \beta_k, \forall k = \overline{1, n}. \text{ Vom nota } \rho = \min_k(\alpha_k - \alpha_k, \beta_k - \alpha_k) \text{ și consider intervalul } J = J_1 \times J_2 \times \dots \times J_n \text{ cu centralul în } a \text{ și cu laturile } J_1, J_2, \dots, J_n \text{ de aceeași lungime } J_k = (a_k - r, a_k + r) \text{ cu } 0 < r \leq \rho. \text{ Să arătăm că } J \subseteq I. \text{ Fie } x \in J \Rightarrow x_k \in J_k, \forall k, \Rightarrow a_k - r < x_k < a_k + r, \forall k \Rightarrow 0 < r \leq \rho \min(a_k - \alpha_k, \beta_k - \alpha_k), \forall k \Rightarrow \alpha_k \leq a_k - r < x_k < a_k + r < \beta_k, \forall k \Rightarrow x_k \in I_k, \forall k \Rightarrow x \in I \Rightarrow J \subseteq I.$

Să arătăm că $S_r(a) \subseteq J$. Într-adevăr, dacă $x \in S_r(a)$, rezultă că

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 < r$$

de unde $|x_k - a_k| < r, \forall k = 1, \dots, n$, adică $x_k \in J_k, \forall k = 1, \dots, n$, ceea ce atrage faptul că $x \in J$, deci $S_r(a) \subseteq J$, adică $S_r(a) \subseteq I$.

Prin urmare, un spațiu metric este de fapt un caz particular de spațiu topologic. Mai mult, se poate arăta că orice spațiu metric (X, d) este un spațiu topologic separat.

Considerăm (X, d) un spațiu metric și $a \in X$ un punct. Dacă notăm mulțimea vecinătăților punctului a (*filtrul vecinătăților*) prin $V(a) = \{B(a, r) | r > 0\}$, atunci prin *convergența sirului* $(x_n)_n \subset X$ înțelegem:

Definiție 1.40. Sirul $(x_n)_n \subset X$ converge la $\bar{x} \in X$, dacă pentru orice $B(\bar{x}, \varepsilon) \in V(\bar{x})$ există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, astfel încât pentru orice $n \geq n(\varepsilon)$ să rezulte $x_n \in B(\bar{x}, \varepsilon)$ și scriem $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$.

Cu alte cuvinte, sirul $(x_n)_n \subset X$ este *convergent* la $\bar{x} \in X$, dacă avem îndeplinită condiția

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow d(x_n, \bar{x}) < \varepsilon.$$

Spațiul topologic (X, \mathcal{D}_d) fiind separat deducem că limita unui sir convergent într-un spațiu metric este unică.

Definiție 1.41. Fie (X, d) un spațiu metric. Sirul de puncte $(x_n)_n \subset X$ se numește sir **Cauchy**¹² (*fundamental*), dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există rangul $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, astfel încât pentru orice $m > n \geq n(\varepsilon)$ să rezulte $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ sau echivalent

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \quad \forall m > n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Cum $m > n$, există $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 1$, astfel încât $m = n + p$. Prin urmare, putem reformula definiția anterioară astfel:

Definiție 1.42. Sirul $(x_n)_n$ de puncte din spațiul metric (X, d) se numește sir **Cauchy** (*fundamental*), dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există rangul $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, astfel încât pentru orice $n \geq n(\varepsilon)$ și $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 1$, să rezulte $d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$ sau echivalent

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n(\varepsilon), \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad p \geq 1 \Rightarrow d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon.$$

Teoremă 1.43. Fie (X, d) un spațiu metric, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un sir de puncte din X și $\bar{x} \in X$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

$$1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x};$$

¹² **Augustin Louis Cauchy** (1789-1857), matematician francez. A introdus noțiunile fundamentale ale analizei matematice în spiritul analizei matematice moderne.

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \bar{x}) = 0.$$

Definiție 1.44. Spațiul metric (X, d) se numește *spațiu metric complet*, relativ la distanța d , dacă orice sir fundamental $(x_n)_n$ de puncte din (X, d) este convergent, adică $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} \in X$.

Exemplu:

- În mecanica analitică a lui **Lagrange** spațiul cu $3n$ dimensiuni apare în studiul mișcării unui sistem de n puncte materiale; $3n$ fiind numărul gradelor de libertate.
- Un solid rigid are 6 grade de libertate – trei translații de-a lungul axelor și trei rotații în jurul fiecărei axe. Spațiul cu 6 dimensiuni apare în studiul mișcării unui solid rigid.

Definiție 1.45. Fie două distanțe definite pe aceeași mulțime nevidă X , $d_1, d_2 : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$. Spunem că d_1 și d_2 sunt *echivalente* dacă există constantele reale $\alpha > 0$ și $\beta > \alpha$ astfel încât:

$$\forall x, y \in X, \quad \alpha \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta \cdot d_1(x, y)$$

și scriem $d_1 \sim d_2$.

Teoremă 1.46. Metricele $d_2, \delta, \rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$, definite prin

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}, \quad \delta(x, y) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k| \text{ și } \rho(x, y) = \max_{k=1, n} |x_k - y_k|,$$

sunt trei metrii echivalente pe spațiul $X = \mathbb{R}^n$.

Demonstrație

Se arată că are loc sirul de inegalități

$$\delta(x, y) \geq d(x, y) \geq \rho(x, y) \geq \frac{1}{n} \cdot \delta(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \square$$

Propoziție 1.47. Fie (X, d) un spațiu metric. Dacă $(x_n)_{n \in N}$ este un sir convergent de puncte din X și $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, atunci orice subșir al sirului $(x_n)_{n \in N}$ este convergent și are limita a .

Definiție 1.48. Fie (X, d) un spațiu metric, mulțimile $A, B \subset X$ și punctul $x \in X$

- numărul $d(x, A) = \inf \{d(x, a) \mid a \in A\}$ se numește *distanța de la punctul x la mulțimea A* ,

- numărul $d(A, B) = \inf \{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ se numește *distanța de la mulțimea A la mulțimea B*,
- numărul $\text{diam } A = \sup \{d(x, y) \mid x, y \in A\}$ se numește *diametrul mulțimii A*,
- spunem că mulțimea A este *mărginită* dacă are diametrul finit sau echivalent dacă există $x_0 \in X$ și $r > 0$ astfel încât $A \subset B(x_0, r)$.

Propoziție 1.49. Într-un spațiu metric orice sir convergent este mărginit.

Propoziție 1.50

Într-un spațiu metric (X, d) orice sir convergent este sir fundamental.

Demonstrație

Fie $(x_n)_n \subset X$, $x_n \rightarrow a \in X$ un sir convergent, adică

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } \forall n \geq n_\varepsilon \text{ avem } d(x_n, a) < \varepsilon.$$

Dar $n + p > n \geq n_\varepsilon$, $p \in \mathbb{N}^*$ $\Rightarrow d(x_{n+p}, a) < \varepsilon$, prin urmare pentru orice numere $n \geq n_\varepsilon$ și $p \in \mathbb{N}^*$ rezultă

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq d(x_{n+p}, a) + d(x_n, a) < 2 \cdot \varepsilon. \square$$

Reciproca propoziției anterioare nu este în general adevărată după cum arată următorul

Exemplu:

(i) Vom arăta că (\mathbb{R}, d) cu metrika $d(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$ este un spațiu metric, dar **nu** este spațiu metric complet.

Faptul că d este o metrică, este clar. Vom arăta că, în această metrică, sirul de termen general $x_n = n$ este fundamental, dar nu este convergent.

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &= |\operatorname{arctg}(n+p) - \operatorname{arctg} n| = \\ &= \left| \operatorname{arctg} \frac{p}{1+n(n+p)} \right| \leq \operatorname{arctg} \frac{p}{1+n(n+p)} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Dar $(x_n)_n$ nu este convergent. Vom presupune prin absurd că

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, a) = 0.$$

$$d(x_n, a) = |\operatorname{arctg} n - \operatorname{arctg} a| = \left| \operatorname{arctg} \frac{n-a}{1+n \cdot a} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left| \operatorname{arctg} \frac{1}{a} \right| \neq 0$$

contradicție. Pentru $a = 0$ raționamentul este similar doar că $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, 0) = \frac{\pi}{2}$.

Propoziție 1.51

Orice sir **Cauchy (fundamental)** $(x_n)_n \subset (\mathbb{R}^p, d_2)$, $p \geq 1$ este mărginit.

Demonstrație

Vom demonstra afirmația numai pentru $(x_n)_n \subset (\mathbb{R}, |\cdot| = \delta)$, ea rămânând adevărată și pentru cazul $(x_n)_n \subset (\mathbb{R}^p, d)$, $p \geq 1$. Fie un $(x_n)_n \subset (\mathbb{R}, |\cdot| = \delta)$ un sir fundamental, adică pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ și $p \in \mathbb{N}^*$ $\Rightarrow |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

Luăm $\varepsilon = 1$, $n = n_1 \Rightarrow |x_{n_1+p}| < 1 + |x_{n_1}|$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, fapt ce arată că mulțimea infinită $\{x_{n_1}, x_{n_1+1}, \dots\}$ este mărginită.

Dacă luăm $M = \max \{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_1}|\}$, atunci $\bar{M} = \max \{M, |x_{n_1}| + 1\}$ are proprietatea că $|x_n| \leq \bar{M}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Propoziție 1.52 (Cesáro¹³)

Orice sir mărginit de numere reale $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^p$ conține un subșir convergent.

Demonstrație

Fie $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subset \mathbb{R}^p$, $p \geq 1$ este infinită și mărginită. Prin teorema **Weierstrass Bolzano** obținem $A' \neq \emptyset \Rightarrow \bar{A} \neq \emptyset$, adică există cel puțin un punct de acumulare $\bar{x} \in \bar{A}$ și subșirul $(x_{n_p})_{n_p} \subset A$ astfel încât $\lim_{n_p \rightarrow \infty} x_{n_p} = \bar{x}$.

Teoremă 1.53

(i) Orice subșir al unui sir convergent de numere reale este convergent către aceeași limită.

(ii) Dacă un sir **Cauchy** $(x_n)_n$ are un subșir convergent către $a \in (\mathbb{R}^p, d)$, $p \geq 1$, atunci sirul $(x_n)_n$ este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Demonstrație

(ii) Fie sirul $(x_n)_n$ fundamental și subșirul $(x_{n_p})_{n_p}$ convergent la $a \in \mathbb{R}^p$.

Prin urmare, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon = \max(n_{\varepsilon_1}, n_{\varepsilon_2}) \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru orice $n, n_p \geq n_\varepsilon$ să rezulte $d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_p}) + d(x_{n_p}, a) < 2 \cdot \varepsilon$. \square

¹³ Ernesto Cesàro, 1859-1906, matematician italian

Teoremă 1.54 (Cauchy¹⁴)

Un sir $(x_n)_n \subset (\mathbb{R}, |\cdot|)$ este convergent dacă și numai dacă este fundamental sau echivalent spațiul $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ este spațiu metric complet.

Demonstrație

„ \Rightarrow ” Cum $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ este un spațiu metric, rezultă că dacă $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ este convergent, atunci el este fundamental.

„ \Leftarrow ” Dacă $(x_n)_n$ este fundamental, atunci este mărginit. Din propoziția lui **Cesaro**, sirul conține un subșir convergent și prin teorema anterioară sirul $(x_n)_n$ este convergent. \square

Teoremă 1.55. Condiția necesară și suficientă ca un sir $(x^{(n)})_n \subset (\mathbb{R}^p, d_2)$, $p \geq 1$ să aibă ca limită punctul $a \in \mathbb{R}^p$, adică $\lim_{n \rightarrow \infty} x_j^{(n)} = a = (a_1, a_2, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$, este ca **toate** componentele $(x_j^{(n)})_n \subset \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, p$ ale sirului $(x^{(n)})_n$ să fie convergente și să existe relațiile $\lim_{n \rightarrow \infty} x_k^{(n)} = a_k \in \mathbb{R}$, $\forall k = 1 : p$.

Demonstrație

Vom utiliza dubla inegalitate

$$|x_j^{(n)} - a_j| \leq d_2(x^{(n)}, a) = \sqrt{(x_1^{(n)} - a_1)^2 + \dots + (x_p^{(n)} - a_p)^2} < |x_1^{(n)} - a_1| + \dots + |x_p^{(n)} - a_p|$$

„ \Rightarrow ” Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a$, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel

încât pentru orice $\forall n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow d(x^{(n)}, a) < \varepsilon$ și din inegalitatea stângă

deducem $|x_j^{(n)} - a_j| < \varepsilon$, $\forall j = \overline{1, p}$, adică $\lim_{n \rightarrow \infty} x_j^{(n)} = a_j$, $\forall j = \overline{1, p}$.

„ \Leftarrow ” Din convergența componentelor deducem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_j(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, p$ astfel ca $\forall n \geq n_j(\varepsilon)$ să avem $|x_j^{(n)} - a_j| < \frac{\varepsilon}{p}$.

Dacă $n(\varepsilon) = \max_{j=1, \dots, p} n_j(\varepsilon)$, atunci pentru orice $n \geq n(\varepsilon)$

$$\Rightarrow d(x^{(n)}, a) < p \cdot \frac{\varepsilon}{p} = \varepsilon. \square$$

¹⁴ Augustin Louis Cauchy, 1789-1857, matematician francez

Observație. O reformulare a acestei teoreme este următoarea. În spațiul (\mathbb{R}^p, d) , convergența este echivalentă cu convergența în spațiul coordonatelor.

1.4.1 Spații metrice complete

Teoremă 1.56 (completitudinea - Banach¹⁵)

Spațiul metric (\mathbb{R}^p, d_2) , $p \geq 2$ este spațiu metric complet sau echivalent un sir $(x^{(n)})_n \subset \mathbb{R}^p$ este convergent dacă și numai dacă este fundamental.

Demonstrație

„ \Rightarrow ” Dacă sirul $(x^{(n)})_n \subset \mathbb{R}^p$ este convergent, prin teorema anterioară,

deducem că toate componentele sale sunt convergente. Cum $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ este spațiu metric complet, prin teorema lui **Cauchy**, deducem că toate componentele sirului $(x^{(n)})_n \subset \mathbb{R}^p$ sunt fundamentale, adică pentru orice $\varepsilon > 0$ există

$n_j(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, p$ astfel încât pentru orice $k, \ell \geq n_j(\varepsilon) \Rightarrow |x_j^{(k)} - x_j^{(\ell)}| < \varepsilon$.

Prin urmare, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n = \max_{j=1, \dots, p} n_j(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $k, \ell \geq n(\varepsilon)$,

$$d_2(x^{(k)}, x^{(\ell)}) = \sqrt{\sum_{i=1}^p (x_i^{(k)} - x_i^{(\ell)})^2} < |x_1^{(k)} - x_1^{(\ell)}| + |x_2^{(k)} - x_2^{(\ell)}| + \dots + |x_p^{(k)} - x_p^{(\ell)}| < p \cdot \varepsilon$$

„ \Leftarrow ” Dacă sirul $(x^{(n)})_n \subset \mathbb{R}^p$ este fundamental, deducem că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $k, \ell \geq n(\varepsilon) \Rightarrow d(x^{(k)}, x^{(\ell)}) < \varepsilon$.

Din inegalitatea

$$|x_i^{(k)} - x_i^{(\ell)}| < d_2(x^{(k)}, x^{(\ell)}) = \sqrt{\sum_{i=1}^p (x_i^{(k)} - x_i^{(\ell)})^2} < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, p,$$

deducem că sirul componentelor $(x_i^{(n)})_n \subset \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, p$, este fundamental. Prin teorema lui **Cauchy** sirul $(x_i^{(n)})_n \subset \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, p$, este convergent și prin teorema anterioară deducem că sirul $(x^{(n)})_n \subset \mathbb{R}^p$ este convergent. \square

¹⁵ Stefan Banach, 1892-1945, matematician polonez

Consecință. Condiția necesară și suficientă ca un sir $\left(x^{(n)}\right)_n \subset (\mathbb{R}^p, d_2)$, $p \geq 1$, să fie fundamental este ca *toate* componentele $\left(x_j^{(n)}\right)_n \subset \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, p$, sirului $\left(x^{(n)}\right)_n$ să fie fundamentale.

Demonstrație

Sirul $\left(x^{(n)}\right)_n \subset (\mathbb{R}^p, d_2)$, $p \geq 1$, este fundamental dacă și numai dacă este convergent, iar el este convergent dacă și numai dacă toate componentele $\left(x_j^{(n)}\right)_n \subset \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, p$, sirului $\left(x^{(n)}\right)_n$ sunt convergente. Prin teorema lui **Cauchy**, dacă componentele $\left(x_j^{(n)}\right)_n \subset \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, p$, sunt siruri reale convergente, atunci ele sunt siruri fundamentale. \square

Consecință. Spațiile metrice (\mathbb{C}, d_2) și (\mathbb{R}^p, d_2) , $p \in \mathbb{N}^*$ sunt spații metrice complete.

1.4.2 Principiul contracției

Definiție. O aplicație $T: X \rightarrow X$ cu proprietatea că există constantă $c \in (0, 1)$ astfel încât pentru orice două puncte $x, y \in X$ rezultă

$$d(T(x), T(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$

se numește **contracție de coeficient c a spațiului metric X** . Numim **punct fix** al aplicației T punctul $\bar{x} \in X$ ce satisfacă egalitatea $T(\bar{x}) = \bar{x}$.

Teoremă (principiul contracției – Banach). Fie (X, d) un spațiu metric complet. Dacă aplicația continuă $T: X \rightarrow X$ este o contracție de coeficient $c \in (0, 1)$ a spațiului X , adică pentru orice două puncte $x, y \in X$ are loc

$$d(T(x), T(y)) \leq c \cdot d(x, y),$$

atunci aplicația T are un unic punct fix \bar{x} în spațiul metric complet (X, d) , care se poate obține ca limită a următorului proces iterativ:

$$x_{n+1} = T(x_n), \quad n \in \mathbb{N}, \text{ cu } x_0 \in X.$$

În plus, are loc *formula de evaluare a erorii de aproximare*

$$d(x_n, \bar{x}) \leq \frac{c^n}{1-c} \cdot d(x_0, x_1), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Demonstrație

- Vom arăta că sirul $(x_n)_n$ este sir fundamental în $(x_n)_n$. Fie punctul $x_0 \in X$ arbitrar și sirul approximațiilor succesive

$$x_{n+1} = T(x_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Deoarece

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq c \cdot d(x_n, x_{n-1}),$$

deducem prin inducție matematică că

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq c^n \cdot d(x_1, x_0), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prin urmare, pentru orice numere $n, p \in \mathbb{N}$ are loc

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \leq \\ &\leq (c^{n+p-1} + c^{n+p-2} + \dots + c^n) \cdot d(x_1, x_0) < \frac{c^n}{1-c} \cdot d(x_1, x_0). \end{aligned} \tag{2}$$

Cum $c \in (0, 1)$, rezultă imediat că sirul $(x_n)_n$ este fundamental în X .

Spațiul metric (X, d) fiind complet deducem că sirul aproximățiilor succesive $(x_n)_n$ este convergent în (X, d) , adică există punctul $\bar{x} \in X$ astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}.$$

- Vom arăta în continuare că punctul $\bar{x} \in X$ este punct fix al aplicației T .

Deoarece pentru orice $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} d(\bar{x}, T(\bar{x})) &\leq d(\bar{x}, x_n) + d(x_n, T(\bar{x})) = d(\bar{x}, x_n) + d(T(x_{n-1}), T(\bar{x})) \leq \\ &\leq d(\bar{x}, x_n) + c \cdot d(x_{n-1}, \bar{x}) \leq (1+c) \cdot d(x_{n-1}, \bar{x}) \end{aligned}$$

din convergența sirului $(x_n)_n$ deducem că $T(\bar{x}) = \bar{x}$, adică $\bar{x} \in X$ este punct fix al aplicației T .

- Să arătăm că $\bar{x} \in X$ este singurul punct fix al aplicației T . Dacă prin absurd ar mai exista un punct $\bar{y} \in X$ astfel ca $T(\bar{y}) = \bar{y} \neq \bar{x} = T(\bar{x})$, atunci

$d(\bar{x}, \bar{y}) = d(T(\bar{x}), T(\bar{y})) \leq c \cdot d(\bar{x}, \bar{y}) \Rightarrow (1-c) \cdot d(\bar{x}, \bar{y}) \leq 0 \Rightarrow d(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$, contradicție, fapt ce arată că ecuația $T(x) = x$ are soluție unică în spațiul metric complet (X, d) . Formula de evaluare a erorii de aproximatie se obține trecând la limită pentru $p \rightarrow \infty$ în inegalitatea (2).

Pe baza relației (1) putem obține o evaluare a erorii absolute, atunci când facem aproximarea $x_n \approx \bar{x}$. Mai mult, dacă dorim să determinăm punctul fix \bar{x} cu o eroare mai mică decât $\varepsilon > 0$, putem găsi numărul natural minim n_{\min} ce satisface relația

$$\frac{d(x_0, x_1)}{1-c} \cdot c^n < \varepsilon \Rightarrow n_{\min} = \left\lceil \log_c \frac{(1-c) \cdot \varepsilon}{d(x_0, x_1)} \right\rceil + 1$$

efectuându-se atâtea iterării câte indică n_{\min} . În acest caz punctul fix \bar{x} este aproximat cu eroarea ε . \square

Exemplu: Ca aplicație a teoremei lui **Banach** vom prezenta cazul sirurilor recurente de ordinul întâi, definite printr-o funcție **lipschitziană**

$$x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N}, \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

adică I este un interval real și funcția f are proprietatea:

$$\exists M > 0, \forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| < M \cdot |x - y|.$$

Deoarece sirul $(x_n)_n$ trebuie să fie bine definit va trebui ca $J = \text{Im } f \subseteq I$.

Prin urmare, vom considera funcția **lipschitziană**

$$f: I = [a, b] \rightarrow J = [c, d] \subseteq [a, b]$$

pentru care $0 < M < 1$, adică funcția f este o contracție a intervalului I . Se cunoaște că dacă funcția f este o contracție a intervalului real I , atunci funcția f are un unic punct fix, adică ecuația $f(u) = u$ admite soluție unică pe intervalul I , mai mult sirul $(x_n)_n$ este convergent și limita sa este punctul fix al funcției f .

Pentru exemplificare studiem convergența sirului $(x_n)_n$ dat prin recurență:

$$x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{1}{2} \cdot x_n^2, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad x_1 \in [1, 2].$$

Consider funcția $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x - \frac{1}{2} \cdot x^2$. Este o funcție de gradul doi al cărei grafic este o parabolă ce are vârful în punctul $\left(1, \frac{3}{2}\right)$. Pe intervalul $[1, 2]$ funcția f este descrescătoare, prin urmare:

$$1 = f(2) \leq f(x) \leq f(1) = \frac{3}{2}, \quad x \in [1, 2] \Rightarrow \text{Im}_{x \in [1, 2]} f = \left[1, \frac{3}{2}\right]$$

În virtutea celor de mai sus, putem afirma că sirul $(x_n)_n$ este bine definit, mai mult că $1 \leq x_n \leq \frac{3}{2}$, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$. Putem deci considera restricția funcției f la intervalul $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ și reformulăm problema astfel:

$$x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \quad x_2 \in \left[1, \frac{3}{2}\right], \quad f : \left[1, \frac{3}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 + x - \frac{1}{2} \cdot x^2$$

Verificăm ipotezele teoremei anterioare:

- este clar că restricția funcției f la intervalul $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ este o contracție:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (x + y) - 1 \right] \leq \frac{1}{2} \cdot |x - y|, \quad \forall x, y \in \left[1, \frac{3}{2}\right];$$
- ecuația $f(u) = u$ are o soluție pe intervalul $\left[1, \frac{3}{2}\right]$, aceasta fiind $\bar{x} = \sqrt{2}$.

Suntem în ipotezele teoremei anterioare. În concluzie, sirul $(x_n)_n$ este convergent și $\lim_n x_n = \bar{x} = \sqrt{2}$.

Exemplu: Fie (X, d) un spațiu metric complet și aplicația continuă $f : X \rightarrow X$ cu proprietatea că $\exists n \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $f^{(n)} = f \circ f \circ \dots \circ f$ este o contracție în X . Arătați că f are un unic punct fix (al doilea principiu al contracțiilor).

Indicație. Din teorema lui **Banach** deducem că pentru aplicația $f^{(n)}$ există un singur punct fix, fie acesta $\bar{x} \in X$, adică $f^{(n)}(\bar{x}) = \bar{x}$. Prin compunere cu f , obținem $(f \circ f^{(n)})(\bar{x}) = f(\bar{x})$ sau echivalent $(f^{(n)} \circ f)(\bar{x}) = f(\bar{x})$ sau încă

$$f^{(n)}(f(\bar{x})) = f(\bar{x}).$$

Ceea ce arată că $f(\bar{x}) \in X$ este un punct fix al aplicației $f^{(n)}$. Dar acesta este unic pentru aplicația $f^{(n)} = f \circ f \circ \dots \circ f$, prin urmare $f(\bar{x}) = \bar{x}$, adică $\bar{x} \in X$ este punct fix și pentru aplicația f . Pentru a demonstra unicitatea punctului $\bar{x} \in X$ fix pentru aplicația f , presupunem că ar mai exista un alt punct fix al aplicației f $\bar{y} \in X$, astfel ca $f(\bar{x}) = \bar{x} \neq \bar{y} = f(\bar{y})$. Cum $f^{(n)}$ este o contracție deducem

$$\begin{aligned} d(f(\bar{x}), f(\bar{y})) &= d(f^{(n)}(f(\bar{x})), f^{(n)}(f(\bar{y}))) \leq L \cdot d(f(\bar{x}), f(\bar{y})) \Rightarrow \\ d(f(\bar{x}), f(\bar{y})) &= 0 \Rightarrow f(\bar{x}) = f(\bar{y}) \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}, \end{aligned}$$

contradicție, deci f are un singur punct fix și acesta este $\bar{x} \in X$.

1.4.3 Exerciții

1. Să se arate că (\mathbb{R}, d) unde $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$ este un spațiu metric.

Indicație. Se verifică imediat că

$$d(x, y) > 0 \text{ pentru } x \neq y; \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

și că $d(x, y) = d(y, x)$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$.

Pentru a demonstra inegalitatea triunghiului se folosește faptul că funcția

$\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{x}{1+x}$ este *crescătoare* și *subaditivă*. Astfel are loc:

$$\varphi(|\alpha + \beta|) = \frac{|\alpha + \beta|}{1 + |\alpha + \beta|} \leq \varphi(|\alpha| + |\beta|) = \frac{|\alpha| + |\beta|}{1 + |\alpha| + |\beta|} \leq \varphi(|\alpha|) + \varphi(|\beta|) = \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} + \frac{|\beta|}{1 + |\beta|},$$

Rezultă că

$$d(x, z) = \frac{|x - z|}{1 + |x - z|} = \frac{|(x - y) + (y - z)|}{1 + |(x - y) + (y - z)|} \leq \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} + \frac{|y - z|}{1 + |y - z|} = d(x, y) + d(y, z)$$

2. Fie $X = \{s\} = \{x = (x_n)_n \mid x_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}\}$ mulțimea sirurilor de numere reale. Să se arate că aplicația

- $d : s \times s \rightarrow \mathbb{R}$, $d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$ este o distanță în spațiul X ,
- $d_k : s \times s \rightarrow \mathbb{R}$, $d_k(x, y) = \sum_{n=1}^k \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$, unde $k \geq 1$ fixat, nu este o distanță în spațiul X .

Indicație

- Fie $x, y \in X$ două siruri reale. Cum sirul sumelor parțiale

$$S_n(x, y) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|} \text{ este crescător și mărginit superior}$$

$$S_n(x, y) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} < 1, \forall n \in \mathbb{N},$$

prin teorema lui **Weierstrass**¹⁶, există $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x, y) = d(x, y)$ și în plus $d(x, y) \geq S_n(x, y) \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Dacă $d(x, y) = 0$, atunci

¹⁶ Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, 1815-1897, matematician german

$$0 = d(x, y) \geq S_n(x, y) \geq 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

de unde $S_n(x, y) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, ceea ce atrage că $|x_k - y_k| = 0, \forall k = 1, \dots, n, \forall n \in \mathbb{N}$, prin urmare $x = y$. Celelalte condiții ale distanței se verifică ușor folosind exercițiul precedent.

- Pentru d_k se arată că există două siruri $x, y \in X, x \neq y$ astfel ca $d_k(x, y) = 0$.

3. Să se arate că mulțimea $L^2([a, b])$ a funcțiilor pătrat integrabile $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este un spațiu normat relativ la aplicația

$$f \in L^2([a, b]) \rightarrow \|f\| = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \in \mathbb{R}.$$

Indicație. Condițiile 1) și 2) din definiția normei se verifică imediat.

Pentru condiția 3) se utilizează inegalitatea

$$\begin{aligned} & \left(\int_a^b [\lambda \cdot |f(t)| + |g(t)|]^2 dt \right)^{1/2} \geq 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \lambda^2 \cdot \int_a^b |f(t)|^2 dt + 2 \cdot \lambda \cdot \int_a^b |f(t)| \cdot |g(t)| dt + \int_a^b |g(t)|^2 dt \geq 0 \end{aligned}$$

Tinând seama de semnul trinomului de gradul doi, rezultă că discriminantul $\Delta \leq 0$, adică:

$$\left(\int_a^b |f(t) \cdot g(t)| dt \right)^2 - \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right) \cdot \left(\int_a^b |g(t)|^2 dt \right) \leq 0.$$

Extrăgând radicalul, se va obține imediat condiția 3) din definiția normei.

1.5 Spații normate

Definiție 1.57. Fie E un K -spațiu vectorial (K este \mathbb{R} sau \mathbb{C}). Numim *normă* pe spațiul vectorial real E aplicația $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ care are următoarele trei proprietăți:

- 1) $\forall x \in E, f(x) \geq 0$ și $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in E$ (pozitivitate);
- 2) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda \cdot x) = |\lambda| \cdot f(x)$ (omogenitate);
- 3) $\forall x, y \in E, f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ (inegalitatea triunghiului)

și notăm $f(x) = \|x\|$. Numărul $\|x\|$ se citește **normă lui** x .

Definiție 1.58. Se numește **spațiu vectorial normat** un spațiu vectorial pe care s-a definit o normă *compatibilă* cu structura de spațiu vectorial, adică în raport cu care operațiile spațiului vectorial sunt *continue*.

Dacă corpul K este corpul numerelor reale, spațiul $(X, \|\cdot\|)$ se va numi **spațiu normat real**.

Dacă corpul K este corpul numerelor complexe, spațiul $(X, \|\cdot\|)$ se va numi **spațiu normat complex**.

Definiție. Fie X un spațiu vectorial pe care sunt definite două norme diferite. Spunem că normele $\|\cdot\|_p, \|\cdot\|_q : X \rightarrow \mathbb{R}$ sunt **echivalente** dacă există constantele pozitive $\alpha, \beta > 0$ astfel ca

$$\alpha \cdot \|x\|_q \leq \|x\|_p \leq \beta \cdot \|x\|_q, \quad \forall x \in X,$$

și scriem $\|\cdot\|_p \sim \|\cdot\|_q$.

Exemplu: În spațiul **Euclidian** $(\mathbb{R}^p, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $p \geq 1$ numim **normă euclidiană** a vectorului $x \in \mathbb{R}^p$ număr real

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2}, \quad (\forall) \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p.$$

Exemplu: Fie $C^m([a, b]; \mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}$, mulțimea tuturor funcțiilor reale de m ori derivabile cu derivatele continue pe intervalul real $[a, b]$.

Aplicația $f \rightarrow \|f\| = \max_{x \in [a, b]} \{|f(x)|, |f^{(1)}(x)|, \dots, |f^{(m)}(x)|\}$ definește o normă pe mulțimea $C^m([a, b]; \mathbb{R})$, normă care nu provine din produs scalar. Spațiul $(C^m([a, b]; \mathbb{R}), \|\cdot\|)$ devine spațiu normat real.

Exemplu: Notăm prin $L^2([a, b])$ mulțimea tuturor funcțiilor pătrat integrabile pe intervalul real $[a, b]$.

Aplicația $f \rightarrow \|f\| = \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2}$ definește o normă pe mulțimea $L^2([a, b])$. Spațiul $(L^2([a, b]), \|\cdot\|)$ devine spațiu normat real.

Exemplu: Notăm prin $L^p([a, b])$, $p \geq 1$, mulțimea tuturor funcțiilor p integrabile pe intervalul real $[a, b]$.

Aplicația $f \rightarrow \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$ definește o normă pe mulțimea

$L^p([a,b])$. Spațiul $(L^p([a,b]), \|\cdot\|)$ devine spațiu normat real.

Exemplu: Aplicația care asociază fiecărei funcții liniare și continue $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, unde V este un spațiu vectorial normat, numărul:

$$\|f\|_L = \sup_{\|x\|_V \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_V} = \sup_{\|x\|_V=1} |f(x)|$$

satisfac axiomele normei.

Propoziție. Într-un spațiu X vectorial de dimensiune finită, peste corpul K , orice normă este echivalentă cu norma euclidiană.

Demonstrație. Fie $x \in X$ și baza $B = \{e_k\}_{k=1:p}$ în spațiu vectorial X .

Dacă $x = \sum_{k=1}^p x_k \cdot e_k$, atunci pentru orice normă definită pe spațiul X obținem, prin intermediul inegalității **Schwartz**, evaluarea

$$\|x\| = \left\| \sum_{k=1}^p x_k \cdot e_k \right\| \leq \sum_{k=1}^p |x_k| \cdot \|e_k\| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^p x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^p \|e_k\|^2}.$$

Notând cu $\alpha = \sqrt{\sum_{k=1}^p \|e_k\|^2} > 0$ deducem $\|x\| \leq \alpha \cdot \|x\|_2$.

Vom arăta că există constantă $\beta > 0$ astfel ca $\|x\| \geq \beta \cdot \|x\|_2$ pentru orice element $x \in X$. Dacă presupunem prin absurd că nu ar exista o astfel de constantă, atunci putem determina un sir de elemente $x_m \in X, m \in \mathbb{N}$ cu proprietatea

$$\|x_m\| < \frac{1}{m} \cdot \|x_m\|_2, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

Construim sirul de elemente $y_m \in X, m \in \mathbb{N}$, astfel $y_m = \frac{1}{\|x_m\|} \cdot x_m, m \in \mathbb{N}$.

Este clar că $\|y_m\| = 1, m \in \mathbb{N}$, prin urmare sirul $(y_m)_m$ este mărginit. Prin lema lui **Cesaro** rezultă că sirul $(y_m)_m$ conține un subșir convergent $(y_{m_k})_{m_k}$ care are normă 1.

În consecință, prin trecere la limită în relația $\|y_{m_k}\|=1$, $m_k \in \mathbb{N}$ deducem că subșirul $(y_{m_k})_{m_k}$ are limita \bar{y} nenulă și $\|\bar{y}\|=1$.

Pe de altă parte, are loc $\|y_{m_k}\| = \frac{\|x_{m_k}\|}{\|x_{m_k}\|_2} < \frac{1}{m_k}$, $\forall m_k \in \mathbb{N}$. Prin trecere la

limită după $m_k \rightarrow \infty$, în această ultimă inegalitate deducem că $\|\bar{y}\|=0$, contradicție. Prin urmare, există constanta $\beta > 0$ astfel ca $\|x\| \leq \beta \cdot \|x\|_2$. Cu aceasta am demonstrat afirmația din propoziție. \square

Consecință imediată ale acestei afirmații este următoarea

Într-un spațiu normat de dimensiune finită convergența în raport cu orice normă este echivalentă cu convergența pe componente.

Observație 1.59. Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu normat. Aplicația $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $d(x, y) = \|x - y\|$ $(\forall)(x, y) \in X \times X$ este o **distanță** (indusă de normă) pe X , de unde rezultă că orice spațiu normat este spațiu metric.

Reciproca nu este adevărată. De exemplu, mulțimea numerelor rationale \mathbb{Q} este spațiu metric relativ la distanța euclidiană, dar nu este spațiu normat (nu este nici spațiu vectorial).

Exemple:

1) Dacă pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n$, $(K = \mathbb{R}, K = \mathbb{C})$ definim următoarele norme

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad p > 1; \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|; \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|,$$

atunci $(K^n, \|\cdot\|_p)$, $(K^n, \|\cdot\|_1)$, $(K^n, \|\cdot\|_\infty)$ sunt spații normate. Spațiul vectorial K^n fiind de dimensiune finită, aceste norme sunt echivalente.

2). Se notează cu $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ mulțimea matricelor cu n linii și n coloane și cu elementele numere reale. Fiind dată o normă vectorială $\|\cdot\|$ pe spațiul vectorial real \mathbb{R}^n , aplicația $\|\cdot\|_L : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+$, definită prin:

$$\|A\|_L = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|A \cdot x\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\| \leq 1}} \|A \cdot x\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|=1}} \|A \cdot x\|,$$

este **norma matriceală subordonată normei vectoriale**.

Definiție 1.60. Un spațiu vectorial real H se numește *prehilbertian* dacă există o aplicație $f : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ numită *produs scalar* și notată prin $f(x, y) = \langle x, y \rangle$, care are următoarele patru proprietăți:

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \quad \forall x, y \in H$ (comutativitate);
2. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle, \quad \forall x, y, z \in H$ (distributivitatea față de adunare);
3. $\langle \lambda \cdot x, y \rangle = \lambda \cdot \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in H, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ (omogenitate);
4. $\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in H$ și $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (inegalitatea triunghiului).

Spațiile prehilbertiene finit dimensionale se numesc și *spații euclidiene*. Pentru orice $x \in H$ se notează $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ definind în acest fel o aplicație $h : H \rightarrow \mathbb{R}$. Se poate verifica că $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ are proprietățile normei, fapt pentru care se numește *norma lui x*.

Observație 1.61. Putem defini pe \mathbb{R}^n următoarele operații peste corpul \mathbb{R} :

- adunarea vectorilor $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$,
- înmulțirea cu scalar $\alpha \cdot x = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \dots, \alpha \cdot x_n)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Se pot verifica axiomele spațiului vectorial, adică $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ este spațiu vectorial peste \mathbb{R} , iar punctele sale se numesc *vectori* și x_i *coordonatele vectorilor*. În \mathbb{R} spațiul vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ se mai poate defini *produsul scalar* a doi vectori

$$\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n.$$

Teoremă 1.62. Fie H un spațiu prehilbertian real.

- Pentru orice două elemente $x, y \in H$ are loc inegalitatea¹⁷

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$
- H este spațiu vectorial normat relativ la norma
$$h : H \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$
- Pentru orice două elemente $x, y \in H$ are loc relația¹⁸

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \cdot (\|x\|^2 + \|y\|^2).$$
- Pentru orice două elemente $x, y \in H$ au loc următoarele două duble implicații $\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad y = \lambda \cdot x$.

¹⁷ Inegalitatea lui Schwarz

¹⁸ Regula paralelogramului

Pe un spațiu normat putem defini o topologie indușă de normă, astfel

Definiție 1.63. Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu normat și $a \in X$.

Mulțimea $B(a, r) = \{x \in X \mid \|x - a\| < r\}$ ($r > 0$) se numește **bila deschisă de centru a și rază r** .

Mulțimea $B'(a, r) = \{x \in X \mid \|x - a\| \leq r\}$ ($r > 0$) se numește **bila închisă de centru a și rază r** .

Observație 1.64. Topologia asociată normei $\|\cdot\|$ este:

$$\tau_{\|\cdot\|} = \{D \subset X \mid (\forall) x \in D, (\exists) r > 0 \text{ pentru care } B(x, r) \subset D\} \cup \{\emptyset\}.$$

Prin urmare, perechea $(X, \tau_{\|\cdot\|})$ este un spațiu topologic și putem defini noțiunea de **convergență a unui sir**. Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu normat, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un sir din X și $a \in X$.

Şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este *convergent* la $a \in X$ și scriem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există numărul $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice număr natural $n \geq n_\varepsilon$ să aibă loc $\|x_n - a\| < \varepsilon$.

1.5.1 Spații Banach

Definiție. Un spațiu normat care este metric complet relativ la distanța indușă de normă se numește **spațiu Banach**.

Exemplu: Spațiul metric (\mathbb{R}^p, d) , $d(x, y) = \|x - y\|$ este spațiu **Banach** relativ la norma euclidiană,

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^p x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2}, \quad (\forall) x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p.$$

Exemplu: Fie A o mulțime nevidă și $\mathcal{B}(A)$ mulțimea funcțiilor mărginite $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Spațiul $(\mathcal{B}(A), \|\cdot\|)$, unde $\|f\| = \sup_{x \in A} |f(x)|$, este un spațiu normat real. Norma definită astfel se mai numește **normă uniformă**. Dacă definim distanța indușă de normă uniformă $d(f, g) = \|f - g\| = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|$, se poate arăta că spațiul $(\mathcal{B}(A), d)$ este spațiu **Banach**.

Exemplu Fie m mulțimea sirurilor mărginite de numere reale. Pentru orice $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x \in m$ aplicația $x \rightarrow \|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ este o normă pe m . Distanța

indusă de această normă $d(x, y) = \|x - y\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|$ generează spațiul metric (m, d) care se poate demonstra că este spațiu **Banach**.

Exemplu: Fie c mulțimea sirurilor convergente de numere reale. Pentru orice sir $x = (x_n)_n \in c$, aplicația $x \rightarrow \|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ este o normă pe c . Distanța indusă de această normă $d(x, y) = \|x - y\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|$ generează spațiul metric (c, d) care se poate demonstra că este spațiu **Banach**.

Exemplu: Fie mulțimea l_q , $q \geq 1$ de siruri reale definită prin

$$l_q = \left\{ x = (x_n)_n \mid x_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ seria } \sum_{n \geq 0} |x_n|^q \text{ este convergentă} \right\}.$$

Pentru orice element $x = (x_n)_n \in l_q$, aplicația $x \rightarrow \|x\| = \left(\sum_{n \geq 0} |x_n|^q \right)^{1/q}$ este

o normă pe l_q . Distanța indusă de această normă

$$d(x, y) = \|x - y\| = \left(\sum_{n \geq 0} |x_n - y_n|^q \right)^{1/q}$$

generează spațiul metric (l_q, d) care se poate demonstra că este spațiu **Banach**.

Pentru $q = \infty$ se consideră $l_\infty = m$.

Remarcă. Orice spațiu normat de dimensiune finită este un spațiu **Banach**. Reciproca nu este adevărată.

1.5.2 Spații Hilbert

Într-un spațiu normat (metric) se pot măsura distanțele, dar nu și unghiiurile, ceea ce restrâne posibilitatea de interpretare geometrică. Pentru a elibera acest neajuns vom introduce o clasă specială de spații cu largi aplicații în inginerie, și anume: spațiu **Hilbert**. Într-un spațiu **Hilbert** avem definit produsul scalar a doi vectori cu ajutorul căruia definim norma, putând astfel determina atât unghiiurile, cât și lungimile vectorilor.

Exemplu: Fie mulțimea l_2 de siruri reale definită prin

$$l_2 = \left\{ x = (x_n)_n \mid x_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ seria } \sum_{n \geq 0} |x_n|^2 \text{ este convergentă} \right\}.$$

Aplicația $(x, y) \rightarrow \sum_{n \geq 0} x_n \cdot y_n$ este un produs scalar pe l_2 . Norma indusă de acest produs scalar este $\|x\| = \left(\sum_{n \geq 0} x_n^2 \right)^{1/2}$. Se poate arăta că spațiul $(l_2, \|\cdot\|)$ este spațiu **Hilbert**.

Fie H_1, H_2 și H spații vectoriale peste același corp de scalari K .

Definiție. O aplicație notată $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a produsului cartezian $H_1 \times H_2$ în K se numește *forma hermitiană* dacă are următoarele două proprietăți:

1. $\langle a_1 x_1 + a_2 x_2, y \rangle = a_1 \cdot \langle x_1, y \rangle + a_2 \cdot \langle x_2, y \rangle$,
 $\forall x_1, x_2 \in H_1, y \in H_2, \quad \forall a_1, a_2 \in K,$
2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \quad \forall x \in H_1, y \in H_2$, bara marcând operația de conjugare în K .

Definiție. O formă hermitiană $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pe $H \times H$ care are în plus proprietatea

3. $\langle x, x \rangle > 0, \quad \forall x \in H, x \neq 0_H$ se numește *produs scalar* pe H . Condiția are sens, deoarece din definiția anterioară rezultă că $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$.

Teoremă. Într-un spațiu vectorial H peste corpul K în care sunt îndeplinite pentru aplicația $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow K$ proprietățile 1, 2 și 3, funcția $f : H \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ este o normă.

Demonstrație Vom observa în primul rând că

$$\begin{aligned} \langle x, y_1 + y_2 \rangle &= \overline{\langle y_1 + y_2, x \rangle} = \overline{\langle y_1, x \rangle + \langle y_2, x \rangle} = \overline{\langle y_1, x \rangle} + \overline{\langle y_2, x \rangle} = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle \\ \langle x, \alpha y \rangle &= \overline{\langle \alpha y, x \rangle} = \overline{\alpha \cdot \langle y, x \rangle} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\langle y, x \rangle} = \overline{\alpha} \cdot \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Vom scrie anticipat $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ și obținem

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0_H.$$

$$\text{Apoi } \|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha \cdot \overline{\alpha} \cdot \langle x, x \rangle} = |\alpha| \cdot \|x\|.$$

Să stabilim inegalitatea triunghiului.

Observăm că $\forall \alpha \in K \Rightarrow \|x + \alpha y\| \geq 0 \Rightarrow \langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle \geq 0 \Rightarrow$

$$\|x\|^2 + \alpha \cdot \langle y, x \rangle + \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + |\alpha|^2 \|y\|^2 \geq 0.$$

Pentru $\alpha = -\frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$ obținem inegalitatea $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ cunoscută sub

denumirea de inegalitatea lui **Schwartz**.

În baza acestei inegalități deducem:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2 \cdot \langle x, y \rangle + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

de unde $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ și cu aceasta am arătat că funcția $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ este o normă în H . \square

Definiție. Un spațiu vectorial H în care s-a introdus un produs scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ cu proprietățile 1, 2, 3 și s-a definit norma prin relația $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ (adică norma provine din produsul scalar) se numește *spațiu prehilbertian*.

Un *spațiu Hilbert*¹⁹ este prin definiție un spațiu prehilbertian complet. În particular, orice spațiu euclidian este spațiu **Hilbert**.

Exemplu: Fie $L^2([a,b]; \mathbb{R})$ mulțimea tuturor funcțiilor reale pătrat integrabile pe intervalul real $[a,b]$. Aplicația $(f,g) \rightarrow \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$ definește un produs scalar pe mulțimea $L^2([a,b]; \mathbb{R})$. Norma indusă de acest produs scalar este $\|f\| = \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2}$. Se poate arăta că spațiul $(L^2([a,b]; \mathbb{R}), \|\cdot\|)$ este spațiu **Hilbert**.

Observație. În general, dintr-o normă nu putem defini un produs scalar după cum putem vedea din

Teoremă. Fie $(H, \|\cdot\|)$ un spațiu vectorial normat. O condiție necesară și suficientă pentru ca norma $\|\cdot\|$ definită pe H să fie generată de un produs scalar pe H este ca să fie satisfăcută *egalitatea paralelogramului*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \cdot (\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad \forall x, y \in H.$$

Demonstrație „=>” Dacă există un produs scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pe H care generează norma $\|\cdot\|$ pe H , atunci $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ și

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle = \\ &= \langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle + \langle x, x - y \rangle - \langle y, x - y \rangle = \\ &= \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \|y\|^2 = 2 \cdot (\|x\|^2 + \|y\|^2) \end{aligned}$$

„=<” Să presupunem relația verificată. Definim produsul scalar pe H care generează norma $\|\cdot\|$ pe H , după relația

¹⁹ David Hilbert (1862-1943), matematician german, a introdus noțiunea de produs scalar abstract.

$$\langle x, y \rangle_H = \frac{1}{4} \left(\|x+y\|_H^2 + \|x-y\|_H^2 \right) \text{ pentru } H \text{ spațiu real,}$$

$$\langle x, y \rangle_H = \frac{1}{4} \left(\|x+y\|_H^2 - \|x-y\|_H^2 + i \cdot \|x+y\|_H^2 - i \cdot \|x-y\|_H^2 \right) \text{ pentru } H \text{ spațiu complex}$$

și verificăm cu ușurință axiomele produsului scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$. \square

Observație. Rezultă imediat că un spațiu **Banach** a cărui normă satisface egalitatea paralelogramului este un spațiu **Hilbert**.

Definiție. O mulțime $M \subset H$ nevidă care odată cu două puncte ale sale conține și dreapta determinată de cele două puncte *mulțime convexă*, adică

$$\forall u, v \in M, \forall \alpha \in [0,1] \Rightarrow \alpha \cdot v + (1-\alpha) \cdot u \in M.$$

Definiție. Fie H un spațiu hilbertian. Două elemente $u, v \in H$ se numesc *ortogonale* dacă produsul lor scalar este nul, adică $\langle u, v \rangle_H = 0$.

Observație. Dacă elementele $u, v \in H$ sunt ortogonale, atunci are loc teorema lui **Pitagora**²⁰ rezisă în limbajul normei:

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

În adevăr, din

$$\langle u, v \rangle = 0 \Rightarrow \|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Observație. Să presupunem că în produsul scalar $\langle x, y \rangle$ fixăm unul din puncte, de pildă pe y , și definim aplicația $f_y : H \rightarrow K$, $f_y(x) = \langle x, y \rangle$.

Se poate arăta că această aplicație este liniară și continuă.

Într-adevăr

$$f_y(ax) = \langle ax, y \rangle = a \cdot \langle x, y \rangle = a \cdot f_y(x),$$

$$f_y(x+z) = \langle x+z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle = f_y(x) + f_y(z),$$

iar din inegalitatea lui **Schwartz**²¹ obținem

$$|f_y(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \quad \forall x \in H,$$

adică f_y este mărginită și cum este și liniară, deducem că f_y este continuă.

Fréchet²² și **Riesz**²³ au arătat independent unul de altul că oricarei funcționale liniare și mărginite $f : H \rightarrow K$ îi corespunde un produs scalar $\langle \cdot, y_f \rangle$ și unul singur, astfel ca $f(x) = \langle x, y_f \rangle$, $\forall x \in H$.

²⁰ Pythagoras, 559-500 î.C., matematician grec

²¹ Laurent Schwartz, 1915-2002, matematician francez

²² Maurice René Fréchet, 1878-1973, matematician francez

²³ Frigyes Riesz, 1880-1956, matematician maghiar

Teoremă (existența și unicitatea elementului de normă minimă)

Dacă H este un spațiu hilbertian și $M \subset H$ o mulțime convexă și închisă, atunci există un element unic $\bar{x} \in M$ astfel încât

$$\|\bar{x}\| \leq \|x\|, \quad \forall x \in M$$

și notăm $\bar{x} = \arg \inf \{\|x\| \mid x \in M\}$.

Demonstrație. Demonstrația are două etape.

◆ Vom demonstra mai întâi existența lui \bar{x} din M .

Deoarece $\|x\| \geq 0$ rezultă că mulțimea $\{\|x\| \mid x \in M\}$ este minorată de zero, deci posedă o margine inferioară. Prin urmare, există $d = \inf \{\|x\| \mid x \in M\}$ și care este geometric distanța de la elementul 0_H la M , adică $d = \text{dist}(M, 0_H)$.

Cum $d = \inf \{\|x\| \mid x \in M\}$ este marginea inferioară a mulțimii $\{\|x\| \mid x \in M\}$, prin urmare este punct aderent, există sirul $(x_n)_n \subset M$ astfel ca $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = d$.

Arătăm că există elementul $\bar{x} \in M$ astfel ca $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|\bar{x}\| = d$.

Din egalitatea paralelogramului

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \cdot (\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad \forall x, y \in M$$

deducem că:

$$\|x - y\|^2 = 2 \cdot (\|x\|^2 + \|y\|^2) - \|x + y\|^2 = 2 \cdot (\|x\|^2 + \|y\|^2) - 4 \cdot \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2, \quad \forall x, y \in M$$

Folosim în continuare faptul că atât produsul scalar, cât norma $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ sunt funcții continue, fapt exemplificat în capitolul de funcții continue.

Pentru $x = x_n \in M$, $y = x_m \in M$, $m, n \in \mathbb{N}$, cum M este mulțime convexă obținem $\frac{x+y}{2} = \frac{x_n+x_m}{2} \in M$, deci

$$\|x_n - x_m\|^2 = 2 \cdot (\|x_n\|^2 + \|x_m\|^2) - 4 \cdot \left\| \frac{x_n+x_m}{2} \right\|^2.$$

Dar cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|^2 = d^2$, prin definiție avem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există numărul $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru orice $m, n \geq n_\varepsilon$ să rezulte atât $\|x_n\|^2 - d^2 < \varepsilon$, cât

și $\left| \left\| \frac{x_n+x_m}{2} \right\|^2 - d^2 \right| < \varepsilon$. Prin urmare,

$$\|x_n - x_m\|^2 = 2 \cdot (\|x_n\|^2 + \|x_m\|^2) - 4 \cdot \left\| \frac{x_n + x_m}{2} \right\|^2 \leq 2 \cdot (2 \cdot d^2 + 2 \cdot \varepsilon) - 4 \cdot (d^2 - \varepsilon) = 8 \cdot \varepsilon,$$

adică sirul $(x_n)_n \subset M$ este un sir fundamental și cum $M \subset H$ care este spațiu Hilbert rezultă că sirul $(x_n)_n \subset M$ este și convergent.

În consecință, $\exists \bar{x} \in M$ astfel ca $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$.

Din ipoteza că M este mulțime închisă deducem că $\bar{x} \in M$.

◆ Să arătăm că \bar{x} este unic.

Fie prin absurd un alt element $\bar{y} \in M$ cu proprietatea că $\bar{x} \neq \bar{y}$ și

$$\bar{y} = \arg \inf \{\|x\| \mid x \in M\}.$$

Folosind din nou egalitatea paralelogramului deducem:

$$0 < \|\bar{x} - \bar{y}\|^2 = 2 \cdot (\|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2) - 4 \cdot \left\| \frac{\bar{x} + \bar{y}}{2} \right\|^2.$$

Deoarece $\bar{x}, \bar{y} \in M$, M fiind convexă, rezultă că există elementul $z \in M$ astfel ca $z = \frac{\bar{x} + \bar{y}}{2}$. Prin urmare,

$$\|z\| \geq \inf \{\|x\| \mid x \in M\} = d \Rightarrow \|z\|^2 \geq d^2$$

și înlocuind în relația anterioară deducem

$$0 < \|\bar{x} - \bar{y}\|^2 = 4 \cdot d^2 - 4 \cdot \|z\|^2 \leq 0$$

fals, ceea ce arată că elementul $\bar{x} \in M$ este unic. \square

Definiție. Vom defini distanța de la o mulțime $M \subset H$ la un punct $u \in H$ ca fiind numărul $d = \inf \{\|u - v\| \mid v \in M\} =: \text{dist}(u, M)$, iar dacă elementul $x \in H$ are proprietatea că $\langle x, u \rangle = 0$, $\forall u \in M$, spunem că x este ortogonal pe mulțimea M și scriem $x \perp M$.

Observație. Teorema anterioară se poate generaliza în modul următor.

Fie H un spațiu hilbertian peste K , $M \subset H$ o mulțime închisă convexă nevidă. Dacă $u \in H$ și $d = \inf \{\|u - v\| \mid v \in M\} =: \text{dist}(u, M)$, atunci există elementul $\bar{w} \in M$ unic determinat astfel încât $d = \text{dist}(u, M) = \|u - \bar{w}\|_H$.

În adevăr, dacă definim submulțimea $P \subset H$ astfel că pentru orice $x \in P$ există elementul $v_x \in M$ cu proprietatea $x = u - v_x$, atunci constatăm că P este mulțime convexă,

$$\begin{aligned}\forall x, y \in P \Rightarrow ax + (1-a)y &= a(u - v_x) + (1-a)(u - v_y) = \\ &= u - [av_x + (1-a)v_y] = u - v_{ax+(1-a)y} \in P\end{aligned}$$

și închisă deoarece M este închisă.

Din teorema anterioară deducem că există în mod unic elementul $\bar{x} \in P$ astfel ca $\|\bar{x}\| = \inf \{\|x\| \mid x \in P\} =: \text{dist}(0_H, P)$, prin urmare există și este unic elementul $\bar{w} \in M$ astfel ca $d = \text{dist}(u, M) = \|u - \bar{w}\|_H$. \square

În baza teoremei anterioare putem formula

Definiția Fie H un spațiu hilbertian, $M \subset H$ o mulțime nevidă convexă și închisă. Fie $P: H \rightarrow M$ aplicația care asociază fiecărui element $u \in H$ elementul $\bar{w} \in M$ definit ca fiind cel cu proprietatea

$$d = \text{dist}(u, M) = \|u - \bar{w}\|_H.$$

Operatorul (aplicația) P astfel definită se numește *operator de proiecție* (*projector*) al lui H pe M , iar $\bar{w} = P(u) \in M$ se numește proiecția lui u pe M .

Definiție. Fie H un spațiu hilbertian și M o parte nevidă a sa. Se numește *complementul ortogonal* al lui M și se notează M^\perp mulțimea elementelor lui H ortogonale pe M , adică

$$M^\perp := \left\{ x \in H \mid \langle x, y \rangle_H = 0, \forall y \in M \right\}.$$

Teoremă (principiul ortogonalității)

Dacă $M \subset H$ este un subspațiu închis al lui H , atunci există o pereche unică de aplicații $P, G: H \rightarrow M$ cu proprietatea că pentru oricare element $x \in H$ există și este unică perechea de elemente $x^-, x^\perp \in M$ astfel ca $x^- = P(x)$, $x^\perp = G(x)$ și

$$x = x^- + x^\perp$$

Demonstrație. Demonstrația are două etape.

- ◆ Să arătăm că există o descompunere de forma

$$H = M \oplus M^\perp = \text{Im } P \oplus \text{Im } G.$$

Fie elementul $x \in H$ arbitrar și definim mulțimea $x + M = \{x + y \mid y \in M\}$ care se poate arăta că este închisă (căci M este închisă) și conexă (căci M este subspațiu).

Din teorema anterioară deducem că există elementul $x^\perp \in x + M$ unic determinat ce are cea mai mică normă în mulțimea $x + M$. Să notăm cu $x^- = x - x^\perp$. Deoarece $x \in x + M$ și $x^\perp \in x + M$, iar M este subspațiu al

spațiului liniar H , deducem că $x - x^\perp = x^- \in M$, elementul $x^- \in M$ fiind unic determinat.

Prin urmare, putem defini aplicația $P: H \rightarrow M$ prin $P(x) = x^-$.

Să arătăm că elementul $x^\perp \in x + M$ este ortogonal pe mulțimea M , adică $\langle x^\perp, y \rangle_H = 0, \forall y \in M$. Presupunem pentru simplitate $\|y\| = 1$.

Deoarece $x^\perp \in x + M$ este de normă minimă în mulțimea $x + M$ putem scrie

$$\begin{aligned} \langle x^\perp, x^\perp \rangle &= \|x^\perp\|^2 \leq \|x^\perp - a \cdot y\|^2 \leq \langle x^\perp - a \cdot y, x^\perp - a \cdot y \rangle = \\ &= \|x^\perp\|^2 - a \cdot \langle y, x^\perp \rangle - a \cdot \langle x^\perp, y \rangle + a^2 \cdot \|y\|^2, \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in M \end{aligned}$$

Pentru $a = \langle x^\perp, y \rangle$, cum $\|y\| = 1$ obținem

$$\|x^\perp\|^2 \leq \langle x^\perp - a \cdot y, x^\perp - a \cdot y \rangle = \|x^\perp\|^2 - \langle x^\perp, y \rangle.$$

Prin urmare, $\langle x^\perp, y \rangle_H = 0, \forall y \in M$. Ipoteza restrictivă $\|y\| = 1$ nu micșorează generalitatea, deoarece pentru $\|y\| \neq 1$ putem simplifica toate relațiile prin această cantitate. Prin urmare, $x^\perp \perp M$, adică $x^\perp \in M^\perp$.

♦ Să demonstrăm unicitatea.

Presupunem prin absurd că există două descompuneri distincte

$$\begin{cases} x = x_1^- + x_1^\perp, x_1^- \in M, x_1^\perp \in M^\perp \\ x = x_2^- + x_2^\perp, x_2^- \in M, x_2^\perp \in M^\perp \end{cases} \text{ cu } \begin{array}{l} x_2^- \neq x_1^- \\ x_2^\perp \neq x_1^\perp \end{array}$$

Scăzând cele două relații, obținem

$$x_1^- - x_2^- = x_2^\perp - x_1^\perp.$$

Însă $x_1^- - x_2^- \in M, x_1^\perp - x_2^\perp \in M^\perp$ deoarece atât M , cât și M^\perp sunt subspații ale lui H . Dacă în relația anterioară facem produsul scalar cu $x_1^- - x_2^-$, deducem:

$$\begin{aligned} \langle x_1^- - x_2^-, x_1^- - x_2^- \rangle &= \langle x_2^\perp - x_1^\perp, x_1^- - x_2^- \rangle = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \|x_1^- - x_2^-\|^2 &= 0 \Leftrightarrow x_1^- = x_2^- \Leftrightarrow x_1^\perp = x_2^\perp \end{aligned}$$

contradicție, prin urmare descompunerea este unică și putem scrie

$$H = M \oplus M^\perp = \text{Im } P \oplus \text{Im } G. \square$$

Elementele x^- , x^\perp se mai numesc *proiecțiile ortogonale* ale elementului $x \in H$ pe mulțimile M , respectiv M^\perp și se notează prin $x^- = \text{p.o}[x, M^-]$, respectiv $x^\perp = \text{p.o}[x, M^\perp]$.

Propoziție. Aceste aplicații au următoarele proprietăți:

- ◆ Dacă elementul $x \in M$, atunci $x = x^-$ și $x^\perp = 0$, iar dacă $x \in M^\perp$, atunci $x = x^\perp$ și $x^- = 0$,
- ◆ $\|x^\perp\| = \|x - x^-\| = \inf \{\|x - y\| \mid y \in M\}$ numită și *proprietatea de minimizare* a componentei x^\perp (în tehnica x^\perp este *eroarea de aproximare* a elementului $x \in H$ cu elementul $x^- \in M$),
- ◆ $\|x\|^2 = \|x^\perp\|^2 + \|x^-\|^2$, $\forall x \in H$,
- ◆ aplicațiile P și G sunt funcționale liniare, continue și idempotente, adică $P^2 = P$ și $G^2 = G$. În plus, $G = I - P$,
- ◆ $\langle P(u), v \rangle = \langle u, P(v) \rangle$, $\forall u, v \in H$.

Demonstrație. Vom demonstra a doua proprietate, celelalte lăsându-le cititorului drept exercițiu.

Pentru orice element $y \in M$ putem scrie

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \|x^\perp + x^- - y\|^2 = \langle x^\perp + x^- - y, x^\perp + x^- - y \rangle = \\ &= \|x^\perp\|^2 + \|x^- - y\|^2 - 2 \cdot \langle x^\perp, x^- - y \rangle \end{aligned}$$

Cum M este subspațiu al lui H , iar $x^-, x \in M$ rezultă că $x^- - x \in M$, prin urmare $\langle x^\perp, x^- - y \rangle = 0$ și în consecință, $\|x - y\|^2 = \|x^\perp\|^2 + \|x^- - y\|^2$, $\forall y \in M$.

Urmează că $\|x - y\|^2 = \|x - x^-\|^2 + \|x^- - y\|^2 \geq \|x - x^-\|^2$, $\forall y \in M$, adică $\|x^\perp\| = \|x - x^-\| = \inf \{\|x - y\| \mid y \in M\}$. \square

Exemplu: Fie H un spațiu hilbertian, $H_n, n \in \mathbb{N}$, un subspațiu finit dimensional al său ($\dim H_n = n$) și elementul $u \in H$. Vom calcula $d = \text{dist}(u, H_n)$.

Fie $\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset H_n$ un sistem de n elemente liniar independente și P_n operatorul de proiecție al spațiului H pe subspațiul $H_n, n \in \mathbb{N}$.

Avem $d(u, H_n) = \inf_{v \in H_n} d(u, v) = \inf_{v \in H_n} \|u - v\|_H = \|u - P_n(u)\|_H$ și $P_n(u)$ este unicul element din H_n cu proprietatea că realizează distanța de la u la H_n . Deoarece $P_n(u) \in H_n$ rezultă că elementul $P_n(u)$ se scrie în mod unic astfel

$$P_n(u) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot e_k.$$

Condiția $u - P_n(u) \perp H_n$ este echivalentă cu condițiile $u - P_n(u) \perp e_k, k = 1:n$ sau cu condițiile $\langle u - P_n(u), e_k \rangle = 0, k = 1:n$. Înând seama de reprezentarea elementului $P_n(u) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot e_k$ în spațiul H_n , deducem următorul sistem liniar

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \langle e_k, e_j \rangle_H = \langle u, e_j \rangle_H, \quad \forall j = 1:n$$

sau încă

$$\begin{cases} \lambda_1 \cdot \langle e_1, e_1 \rangle + \lambda_2 \cdot \langle e_2, e_1 \rangle + \dots + \lambda_n \cdot \langle e_n, e_1 \rangle = \langle u, e_1 \rangle \\ \lambda_1 \cdot \langle e_1, e_2 \rangle + \lambda_2 \cdot \langle e_2, e_2 \rangle + \dots + \lambda_n \cdot \langle e_n, e_2 \rangle = \langle u, e_2 \rangle \\ \dots \\ \lambda_1 \cdot \langle e_1, e_n \rangle + \lambda_2 \cdot \langle e_2, e_n \rangle + \dots + \lambda_n \cdot \langle e_n, e_n \rangle = \langle u, e_n \rangle \end{cases}$$

Cum $P_n(u)$ este singurul element din H_n proprietatea că $u - P_n(u) \perp e_k, k = 1:n$, deducem că sistemul de mai sus privit ca sistem liniar în necunoscutele $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ are soluție unică, prin urmare determinantul sistemului, numit *grammian*, este nenul

$$\Gamma(e_1, e_2, \dots, e_n) = \det \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_2, e_1 \rangle & \dots & \langle e_n, e_1 \rangle \\ \langle e_1, e_2 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle & \dots & \langle e_n, e_2 \rangle \\ \dots \\ \langle e_1, e_n \rangle & \langle e_2, e_n \rangle & \dots & \langle e_n, e_n \rangle \end{pmatrix} \neq 0.$$

În concluzie, proiecția lui u pe spațiul H_n este definită unic de constantele $(\lambda_i)_{i=1,n}$ ce reprezintă soluția sistemului liniar de mai sus. În particular, dacă sistemul de elemente $\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset H_n$ este ortonormat, adică $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}, i, j = 1:n$, atunci

$$\lambda_k = \langle u, e_k \rangle, \quad k = 1:n \quad \text{și} \quad P_n(u) = \sum_{k=1}^n \langle u, e_k \rangle \cdot e_k.$$

Revenind la determinarea distanței $d = \text{dist}(u, H_n)$ avem:

$$d^2 = \|u - P_n(u)\|^2 = \langle u - P_n(u), u - P_n(u) \rangle = \langle u - P_n(u), u \rangle = \|u\|^2 - \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \langle e_k, u \rangle$$

sau încă

$$\lambda_1 \cdot \langle e_1, u \rangle + \lambda_2 \cdot \langle e_2, u \rangle + \dots + \lambda_n \cdot \langle e_n, u \rangle = \langle u, u \rangle - d^2.$$

Sistemul liniar anterior completat cu această ecuație, în necunoscutele $\lambda_k, k = 1:n$, este compatibil. Prin urmare,

$$\det \begin{pmatrix} \langle u, u \rangle - d^2 & \langle e_1, u \rangle & \dots & \langle e_n, u \rangle \\ \langle u, e_1 \rangle & \langle e_1, e_1 \rangle & \dots & \langle e_n, e_1 \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle u, e_n \rangle & \langle e_1, e_n \rangle & \dots & \langle e_n, e_n \rangle \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow d^2 = \frac{\Gamma(u, e_1, \dots, e_n)}{\Gamma(e_1, e_2, \dots, e_n)}.$$

1.5.3 Exerciții

1. Să se arate că (\mathbb{R}, d) unde $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$ este un spațiu metric.

Indicație

Se verifică imediat că $d(x, y) > 0$ pentru $x \neq y$; $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ și că $d(x, y) = d(y, x)$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$.

Pentru a demonstra inegalitatea triunghiului se folosește faptul că funcția $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{x}{1+x}$ este crescătoare și subaditivă. Astfel are loc:

$$\varphi(|\alpha + \beta|) = \frac{|\alpha + \beta|}{1 + |\alpha + \beta|} \leq \varphi(|\alpha| + |\beta|) = \frac{|\alpha| + |\beta|}{1 + |\alpha| + |\beta|} \leq \varphi(|\alpha|) + \varphi(|\beta|) = \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} + \frac{|\beta|}{1 + |\beta|},$$

Rezultă că

$$d(x, z) = \frac{|x - z|}{1 + |x - z|} = \frac{|(x - y) + (y - z)|}{1 + |(x - y) + (y - z)|} \leq \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} + \frac{|y - z|}{1 + |y - z|} = d(x, y) + d(y, z)$$

2. Fie $X = (s) = \left\{ x = (x_n)_n \mid x_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \right\}$ mulțimea sirurilor de numere reale. Să se arate că aplicația

- $d : s \times s \rightarrow \mathbb{R}$, $d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$ este o distanță în spațiul X ,

- $d_k : s \times s \rightarrow \mathbb{R}$, $d_k(x, y) = \sum_{n=1}^k \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$, unde $k \geq 1$ fixat, nu este o distanță în spațiul X .

Indicație

- Fie $x, y \in X$ două siruri reale. Cum sirul sumelor parțiale $S_n(x, y) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$ este crescător și mărginit superior $S_n(x, y) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} < 1, \forall n \in \mathbb{N}$, prin teorema lui Weierstrass²⁴, există $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x, y) = d(x, y)$ și în plus $d(x, y) \geq S_n(x, y) \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Dacă $d(x, y) = 0$, atunci $0 = d(x, y) \geq S_n(x, y) \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, de unde $S_n(x, y) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, ceea ce atrage că $|x_k - y_k| = 0, \forall k = 1, \dots, n, \forall n \in \mathbb{N}$, prin urmare $x = y$. Celelalte condiții ale distanței se verifică ușor folosind exercițiul precedent.
- Pentru d_k se arată că există două siruri $x, y \in X, x \neq y$, astfel ca $d_k(x, y) = 0$.

3. Să se arate că mulțimea $L^2([a, b])$ a funcțiilor pătrat integrabile $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este un spațiu normat relativ la aplicația

$$f \in L^2([a, b]) \rightarrow \|f\| = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \in \mathbb{R}.$$

Indicație. Condițiile 1) și 2) din definiția normei se verifică imediat.

Pentru condiția 3) se utilizează inegalitatea

$$\begin{aligned} & \left(\int_a^b [\lambda \cdot |f(t)| + |g(t)|]^2 dt \right) \geq 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \lambda^2 \cdot \int_a^b |f(t)|^2 dt + 2 \cdot \lambda \cdot \int_a^b |f(t)| \cdot |g(t)| dt + \int_a^b |g(t)|^2 dt \geq 0 \end{aligned}$$

²⁴ Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, 1815-1897, matematician german

Înând seama de semnul trinomului de gradul doi, rezultă că discriminantul $\Delta \leq 0$, adică:

$$\left(\int_a^b |f(t) \cdot g(t)| dt \right)^2 - \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right) \cdot \left(\int_a^b |g(t)|^2 dt \right) \leq 0.$$

Extrăgând radicalul, se va obține imediat condiția 3) din definiția normei.

- 4.** Fie sirul $(x_n)_n \subset (\bar{\mathbb{R}}, |\cdot|)$. Notăm $y_n = \inf_{k \geq n} x_k$ și $z_n = \sup_{k \geq n} x_k$, $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că cele două siruri sunt convergente și $\lim_n y_n \leq \lim_n z_n$.

Indicație. Observăm că $y_n \leq z_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și

$$y_n = \inf(y_{n+1}, x_n) \leq y_{n+1}, \text{ iar } z_n = \sup(z_{n+1}, x_n) \geq z_{n+1}.$$

Prin urmare au loc inegalitățile $y_1 \leq \dots \leq y_n \leq y_{n+1} \leq z_n \leq \dots \leq z_1$, adică sirurile $(y_n)_n, (z_n)_n \subset (\bar{\mathbb{R}}, |\cdot|)$ sunt convergente și $\lim_n y_n \leq \lim_n z_n$.

Numerele $\lim_n y_n = \sup_{m \geq 1} \left(\inf_{n \geq m} x_n \right) =: \underline{\lim}_n x_n$ și $\lim_n z_n = \inf_{m \geq 1} \left(\sup_{n \geq m} x_n \right) =: \overline{\lim}_n x_n$

se numesc *limită inferioară* sau *cel mai mic punct limită*, respectiv *limită superioară* sau *cel mai mare punct limită* al sirului $(x_n)_n$. Aceste limite există chiar dacă sirul $(x_n)_n$ nu este convergent. Rezultatul următor prezintă o legătură între aceste limite și convergența sirului $(x_n)_n$.

- 5.** Să se arate că un sir $(x_n)_n \subset (\mathbb{R}, |\cdot|)$ este convergent dacă și numai dacă

$$\exists \underline{\lim}_n x_n = \overline{\lim}_n x_n = \ell.$$

Indicație

„ \Rightarrow ” $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ cu $|x_n - x_0| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_\varepsilon$

$\Rightarrow x_0 - \varepsilon \leq \inf_{j \geq n_\varepsilon} x_j = y_{n_\varepsilon} \leq \sup_{n \geq 1} y_n = \underline{\lim}_n x_n = \ell$ și

$$x_0 + \varepsilon \geq \sup_{j \geq n_\varepsilon} x_j = z_{n_\varepsilon} \geq \inf_{n \geq 1} z_n = \overline{\lim}_n x_n = L$$

$$x_0 - \varepsilon \leq \ell \leq L \leq x_0 + \varepsilon \Rightarrow |L - \ell| \leq |x_0 + \varepsilon - x_0 - \varepsilon| = 2\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow L = \ell.$$

„ \Leftarrow ” Fie $\ell = L = c \in \mathbb{R}$, atunci $\forall \varepsilon > 0$ avem

$\ell - \varepsilon \neq \sup_{n \geq 1} y_n =$ cel mai mic majorant al lui $(y_n)_n \Rightarrow \ell - \varepsilon$ nu este

majorant pentru $(y_n)_n \Rightarrow \exists p_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\ell - \varepsilon < y_{p_\varepsilon} \leq x_j$, $\forall j \geq p_\varepsilon$.

Analog se obține un $q_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $L + \varepsilon < z_{q_\varepsilon} \geq x_j$, $\forall j \geq q_\varepsilon$.

Cum $\ell = L = c$ deducem

$$c - \varepsilon < x_j < c + \varepsilon, \quad \ell - \varepsilon < y_{p_\varepsilon} \leq x_j, \quad \forall j > n_\varepsilon = \max(p_\varepsilon, q_\varepsilon).$$

6. Să se calculeze $\underline{\lim}_n$ și $\overline{\lim}_n$ pentru sirurile următoare

(i) $x_n = \frac{n}{n+1} \cdot \cos(n \cdot \pi);$

(ii) $x_n = \frac{1+(-1)^n}{3} + (-1)^n \frac{2n}{3n+1};$

(iii) $x_n = (-1)^n \cdot \left(a + \frac{1}{n} \right), \quad a \geq 0.$

7. Să se studieze convergența sirului de termen general

- $y_n = \left(\frac{1}{n \cdot \sqrt{n}} \cdot \sum_{k=1}^n \sqrt{k}, \quad \frac{\ln(n!)}{n \cdot \ln n}, \quad \sqrt[n]{n! \cdot \sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{3} \cdots \sin \frac{\pi}{n}} \right) \in (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2), \quad n \in \mathbb{N}^*;$

- $x_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot (k+1)}, \quad \frac{n!}{n^n}, \quad \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k} \right) \in (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2), \quad n \in \mathbb{N}^*.$

Indicație. Se cunoaște că sirurile din $(\mathbb{R}^p, \|\cdot\|_2)$, $p \in \mathbb{N}^*$, convergența este echivalentă cu convergența coordonatelor. Pentru sirul $(y_n)_n \subset (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ vom aplica trei rezultate de convergență sirurilor reale:

- Pentru prima componentă folosim suma **Riemann** asociată funcției $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \sqrt{x}$, diviziunii

$$x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{n} < \dots < x_k = \frac{k}{n} < \dots < x_n = 1,$$

și punctelor intermediare $\xi_k = x_k, k = 1:n$.

Se obține $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt{n}} \cdot \sum_{k=1}^n \sqrt{k} = \int_0^1 \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3}.$

- Pentru a doua componentă, folosim teorema lui **Stolz**²⁵-**Cesàro**²⁶, și anume: dacă sirurile reale $(x_n)_n, (y_n)_n \subset (\mathbb{R}, |\cdot|)$ au proprietățile:

- (i) $(y_n)_n$ este strict monoton și nemărginit,

²⁵ Otto Stolz, 1842-1905, matematician austriac

²⁶ Ernesto Cesàro, 1859-1906, matematician italian

$$(ii) \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}},$$

$$\text{atunci } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \ell.$$

$$\text{Prin urmare, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n!)}{n \cdot \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{(n+1) \cdot \ln(n+1) - n \cdot \ln n} = 1.$$

- Pentru a treia componentă folosim criteriul raportului, și anume: dacă sirul $(x_n)_n \subset (\mathbb{R}_+, |\cdot|)$ are proprietatea că există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell \in \mathbb{R}$, atunci
 - există $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$ și are loc egalitatea $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$,
 - există $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \begin{cases} 0, & \ell < 1 \\ \infty, & \ell > 1 \end{cases}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n! \cdot \sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{3} \cdot \dots \cdot \sin \frac{\pi}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! \cdot \sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{3} \cdot \dots \cdot \sin \frac{\pi}{n+1}}{n! \cdot \sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{3} \cdot \dots \cdot \sin \frac{\pi}{n}} = \pi.$$

Reunind cele trei rezultate, obținem că sirul $(y_n)_n \subset (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \left(\frac{2}{3}, 1, \pi\right)$. Procedând similar pentru sirul $(x_n)_n \subset (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$, se obține $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$.

- 8.** Fie sirul $X_n = (x_n, y_n, z_n) \in (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$, $n \in \mathbb{N}^*$, ale cărui componente sunt definite prin recurențe

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n + y_n + z_n}{3}, & x_1 > 0 \\ y_{n+1} = \sqrt[3]{x_n \cdot y_n \cdot z_n}, & y_1 > 0, \quad n \in \mathbb{N}^* \\ \frac{3}{z_{n+1}} = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{y_n} + \frac{1}{z_n}, & z_1 > 0 \end{cases}$$

- Să se arate că dacă $x_1 \neq y_1$ sau $y_1 \neq z_1$ sau $z_1 \neq x_1$, atunci pentru orice $n > 1$ are loc $x_n > y_n > z_n$.
- Să se arate că dacă $x_1 \cdot z_1 = y_1^2$, atunci sirul $(X_n)_n$ este convergent. Precizați limita sa.

9. Fie X un spațiu **Banach** și $T \in \mathcal{L}(X)$ un operator liniar. Pentru $\lambda \in \rho(T)$ notăm prin $d(\lambda)$ distanța de la λ la spectrul lui T , adică la mulțimea $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists x \in D(T), x \neq 0, T(x) = \lambda \cdot x\}$, definită prin

$$d(\lambda) = \min_{\mu \in \sigma(T)} |\lambda - \mu|.$$

Arătați că

$$\|(\lambda \cdot I - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{d(\lambda)}, \quad \forall \lambda \in \rho(T).$$

10. Fie X un spațiu **Banach** și $T \in \mathcal{L}(X)$ un operator liniar. Arătați că $(\lambda \cdot I - T)^{-1} - (\mu \cdot I - T)^{-1} = (\lambda - \mu) \cdot (\lambda \cdot I - T)^{-1} \cdot (\mu \cdot I - T)^{-1}$, $\forall \lambda, \mu \in \sigma(T)$.

11. Fie X un spațiu **Banach complex** și $T : D(T) \subset X \rightarrow X$ un operator liniar închis. Arătați că spectrul lui T , adică mulțimea notată $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists x \in D(T), x \neq 0, T(x) = \lambda \cdot x\}$ este o mulțime închisă pe \mathbb{C} .

12. Fie mulțimea

$$V[a,b] = \left\{ f = (f_n)_n \mid f_n \in C([a,b], \mathbb{R}), n \in \mathbb{N}, \sum_{n \geq 0} f_n^2(x) \text{ este uniform convergentă} \right\}$$

- Să se arate că $(V[a,b], +, \cdot)$ este un spațiu vectorial peste corpul $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.
- În \mathbb{R} - spațiu vectorial $V[a,b]$ definim aplicația

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \sum_{n \geq 0} f_n(x) \cdot g_n(x) dx, \quad f = (f_n)_n, g = (g_n)_n \in V[a,b],$$

care asociază fiecărei perechi $(f, g) \in V[a,b] \times V[a,b]$ numărul real definit prin relația anterioară, este un produs scalar în $V[a,b]$.

- Stabiliți că $f = (f_n)_n \in V\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $g = (g_n)_n \in V\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, unde

$$\begin{cases} f_n(x) = \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2^2} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2^n} \\ g_n(x) = \sin \frac{x}{2^n} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

și calculați $\langle f, g \rangle$.

- Stabiliți că

$$h = (h_n)_n \in V[\mathbb{R}], \quad h_n(x) = \left(\frac{2 \cdot x}{1 + x^2} \right)^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

și calculați $\|h\|$.

Indicație. $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{\sin x}{x}$ și $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{|\sin x|}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$, de unde convergența uniformă.

CAPITOLUL 2

SERII NUMERICE

2.1 Proprietăți generale ale seriilor convergente

Definiție 2.1. Fie sirul $(x_n)_n \subset \mathbb{C}$ și corespunzător acestuia se formează sirul $(S_n)_n$ cu termenul general $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$. Sirul $(S_n)_n$ se numește *sirul sumelor parțiale* asociat sirului $(x_n)_n$. Cuplul format din sirurile $(x_n)_n$ și $(S_n)_n$ se numește *serie de termen general* x_n , iar $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ se numește *seria asociată* sirului $(x_n)_n$.

Dacă sirul $(S_n)_n$ este convergent și există $\left| \sum_{m=1}^n x_m \right| \leq M$ astfel încât $S = \lim_n S_n$, atunci spunem că *seria $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ este convergentă*. Numărul S se numește suma seriei și scriem $S = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$. Dacă limita sirului $(S_n)_n$ nu există sau nu este finită, spunem că *seria diverge*.

Definiție 2.2. Fie seria $\sum_{k \geq 1} x_k$ o serie numerică. Spunem că seria $R_n = \sum_{k \geq n+1} x_k$ este *restul de ordinul n al seriei inițiale*.

Ținând seama de definiția seriilor convergente, se obțin cu ușurință următoarele proprietăți.

Teoremă. Dacă unei serii i se adaugă sau i se suprimă un număr finit de termeni, atunci natura ei nu se schimbă.

Observație. În cazul când seria este convergentă suma acesteia se modifică, și anume: adăugând suma finită a termenilor ce se adaugă. Formulați rezultatul pentru cazul când se suprimă un număr finit de termeni.

Teoremă. Seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă restul de ordinul n este o serie convergentă, în plus $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$.

Propoziție. Dacă seria numerică $\sum_{n \geq 1} x_n$ este convergentă, atunci termenul general al seriei este convergent la zero, adică $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Consecință. Contrara reciprocei este adevărată, adică dacă pentru seria numerică $\sum_{n \geq 1} x_n$, sirul $(x_n)_n$ nu converge sau converge, dar nu converge la zero, atunci seria este divergentă.

Observație. Condiția $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ este necesară nu și suficientă pentru convergența seriei după cum se poate vedea lesne analizând exemplul următor, al seriei armonice $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ care este divergentă, deși $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Exemplu: Seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ numită *seria armonică*, întrucât termenul general x_n al seriei este media armonică a numerelor x_{n-1}, x_{n+1} , este divergentă.

Să considerăm sirul sumelor parțiale

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

și să arătăm că nu este sir **Cauchy**¹, adică nu este convergent.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $p \geq n$. Avem

$$|S_{n+p} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p} > \frac{p}{n+p} > \frac{1}{2}.$$

Prin urmare, există $\varepsilon = \frac{1}{2}$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există $p \in \mathbb{N}$ astfel ca $|S_{n+p} - S_n| > \varepsilon = \frac{1}{2}$, fapt ce asigură că sirul $(S_n)_n$ nu este sir **Cauchy**.

Exemplu: Seria $\sum_{n \geq 1} (-1)^n$ este divergentă, deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ nu există.

Teoremă. Dacă seria $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge, având suma A , iar seria $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge având suma B , atunci seria $\sum_{n \geq 1} (\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, converge și are suma $\alpha \cdot A + \beta \cdot B$.

¹ **Augustin Louis Cauchy**, 1789-1857, matematician francez

Observație. Dacă seriile $\sum_{n \geq 1} a_n$ și $\sum_{n \geq 1} b_n$ sunt divergente, atunci este posibil ca seria $\sum_{n \geq 1} (\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, să fie convergentă, după cum se poate vedea din următorul exemplu.

Exemplu: Seriile $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1}$ și $\sum_{n \geq 1} (-1)^n$ sunt divergente, însă seria $\sum_{n \geq 1} [(-1)^{n-1} + (-1)^n]$ este convergentă.

Propoziție 2.3. Dacă seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este convergentă, atunci sirul sumelor parțiale este mărginit (reciproca nu este adevărată, de exemplu seria $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1}$).

Teoremă 2.4 (criteriul lui Cauchy)

O serie $\sum_{n \geq 1} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$

există un număr natural $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n > m \geq n_\varepsilon$ să avem:

$$|x_{m+1} + x_{m+2} + \dots + x_n| < \varepsilon.$$

Demonstrație Fie $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$. Cum seria numerică $\sum_{n \geq 1} x_n$ converge dacă sirul sumelor parțiale $(S_n)_n$ este convergent, iar sirul $(S_n)_n$ este convergent dacă și numai dacă este sir fundamental, rezultă că seria numerică $\sum_{n \geq 1} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr natural $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ aşa ca pentru orice numere naturale $n > m \geq n_\varepsilon$ are loc $|S_n - S_m| = |x_{m+1} + x_{m+2} + \dots + x_n| < \varepsilon$.

Teoremă. Dacă într-o serie convergentă se asociază termenii seriei în grupuri finite, cu păstrarea ordinii, atunci se obține o serie convergentă și cu aceeași sumă.

Demonstrație. Fie seria convergentă $\sum_{n \geq 1} x_n$ și sirul sumelor parțiale cu termenul general $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. Fie seria $(x_1 + x_2 + \dots + x_{n_1}) + (x_{n_1+1} + x_{n_1+2} + \dots + x_{n_2}) + \dots + (x_{n_{k-1}+1} + x_{n_{k-1}+2} + \dots + x_{n_k}) + \dots$

obținută din prima serie prin asocierea termenilor seriei în grupe finite, cu păstrarea ordinii termenilor. Dacă notăm cu

$$a_i = x_{n_{i-1}+1} + x_{n_{i-1}+2} + \dots + x_{n_i}$$

termenul general al seriei obținute, iar cu

$$A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

atunci observăm că

$$\begin{aligned} A_k &= (x_1 + x_2 + \dots + x_{n_1}) + (x_{n_1+1} + x_{n_1+2} + \dots + x_{n_2}) + \\ &\quad + \dots + (x_{n_{k-1}+1} + x_{n_{k-1}+2} + \dots + x_{n_k}) = S_{n_k} \end{aligned}$$

adică sirul $(T_k)_k$ este un subșir al sirului convergent $(S_n)_n$. Prin urmare, sirul $(T_k)_k$ este convergent și are aceeași limită, adică $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k$.

Observație. Prin asocierea termenilor unei serii divergente în grupe finite, cu păstrarea ordinii, se pot obține serii convergente. Spre exemplu, dacă se consideră seria $\sum_{n \geq 1} (-1)^n$ și seria

$$(-1+1) + (-1+1) + \dots + (-1+1) + \dots$$

obținută prin asocierea termenilor în grupe de câte doi termeni, observăm că seria obținută este convergentă și are suma zero.

De asemenea, dacă avem o serie convergentă ai cărei termeni sunt sume finite, prin desfacerea parantezelor se poate obține o serie divergentă.

2.2 Serii numerice cu termeni pozitivi

Dacă seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ are termenii pozitivi, se constată cu ușurință că sirul sumelor parțiale $(S_n)_n$ este crescător. Înținând seama de teorema de convergență a sirurilor monotone, rezultă că, în acest caz, condiția ca sirul $(S_n)_n$ să fie majorat este nu numai necesară, ci și suficientă pentru convergența seriei.

Propoziție 2.5. Seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ cu termeni pozitivi este convergentă dacă și

numai dacă sirul sumelor parțiale mărginit.

Observație. Contrara teoremei este adevărată, adică seria este divergentă dacă și numai dacă sirul sumelor parțiale este nemărginit.

Acest rezultat ne permite să obținem cu ușurință rezultate deosebite privind convergența seriilor cu termeni pozitivi.

Propoziție 2.6 (primul criteriu de comparație)

Dacă seriile cu termeni pozitivi $\sum_{n \geq 1} u_n$ și $\sum_{n \geq 1} v_n$ au proprietatea:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } u_n \leq v_n, \forall n \geq n_0,$$

și dacă

- (i) seria $\sum_{n \geq 1} v_n$ este convergentă, atunci și seria $\sum_{n \geq 1} u_n$ este convergentă,
- (ii) seria $\sum_{n \geq 1} u_n$ este divergentă, atunci și seria $\sum_{n \geq 1} v_n$ este divergentă.

Exemplu: Seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha < 1$ este divergentă. În adevăr, în acest caz

$$\frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{n}, \forall n \geq 1$$

și cum seria armonică este divergentă rezultă că seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha < 1$ este divergentă, pentru orice $\alpha < 1$.

Propoziție 2.7 (al doilea criteriu de comparație)

Dacă seriile cu termeni strict pozitivi $\sum_{n \geq 1} u_n$ și $\sum_{n \geq 1} v_n$ au proprietatea:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}, \forall n \geq n_0,$$

și dacă

- (i) seria $\sum_{n \geq 1} v_n$ este convergentă, atunci și seria $\sum_{n \geq 1} u_n$ este convergentă,
- (ii) seria $\sum_{n \geq 1} u_n$ este divergentă, atunci și seria $\sum_{n \geq 1} v_n$ este divergentă.

Exemplu: Seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ este convergentă. În adevăr, în acest caz

$$\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} \leq \frac{\frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)}}{\frac{1}{n \cdot (n+1)}}, \forall n \geq 1$$

și cum seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \cdot (n+1)}$ este convergentă rezultă că seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ este convergentă.

Propoziție 2.8 (criteriu de comparație la limită)

Fie seriile cu termeni strict pozitivi, $\sum_{n \geq 1} u_n$ și $\sum_{n \geq 1} v_n$. Dacă există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lambda \in [0, \infty), \text{ atunci seriile au aceeași natură.}$$

Demonstrație. Dacă există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lambda \in [0, \infty)$, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ aşa ca pentru orice $n \geq n(\varepsilon)$ să aibă loc

$$\lambda - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < \lambda + \varepsilon.$$

Dacă $\lambda > 0$, atunci pentru $\varepsilon = \frac{\lambda}{2}$ și pentru orice $n \geq n(\varepsilon)$ are loc

$$\frac{\lambda}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{3}{2} \cdot \lambda,$$

de unde prin aplicarea primului criteriu de comparație rezultă afirmația din teorema.

Dacă $\lambda = 0$, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ și orice $n \geq n(\varepsilon)$ rezultă

$$0 \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \varepsilon \Rightarrow u_n \leq \varepsilon \cdot v_n,$$

de unde prin aplicarea din nou a primului criteriu de comparație deducem afirmația din teorema.

Observație. Dacă există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \infty$, atunci există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$ și prin criteriul precedent seriile cu termeni pozitivi $\sum_{n \geq 1} u_n$ și $\sum_{n \geq 1} v_n$ au aceeași natură.

Observație. În particular, dacă $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$, atunci obținem criteriul de comparație la limită cu seria armonică generalizată (**Riemann**²). Fie $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \cdot u_n = l$. Dacă

- $\alpha > 1$ și $l \in \mathbb{R}$, atunci seria $\sum_{n \geq 1} u_n$ este convergentă,
- $\alpha \leq 1$ și $l > 0$, atunci seria $\sum_{n \geq 1} u_n$ este divergentă.

Exemplu: Seria $C = A \cdot B$ este divergentă deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{n}} = 1$, iar

seria armonică este divergentă.

Teoremă (criteriul logaritmic). Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}_+$ un sir de numere pozitive și există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln x_n}{\ln n} = l$. Dacă

² Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826-1866, matematician german

- $l > 1$, atunci seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este convergentă,
- $l < 1$, atunci seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este divergentă.

Teoremă 2.9 (condensării - Cauchy). Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}_+$ un sir de numere pozitive și descrescător. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este convergentă,

(ii) seria $\sum_{n \geq 1} 2^n \cdot x_{2^n}$ este convergentă.

Demonstrație

Pentru orice număr $n \in \mathbb{N}^*$, $\exists k = k_n \in \mathbb{N}$ astfel încât $2^k \leq n \leq 2^{k+1} - 1$.

Fie sirurile $(s_n)_n, (t_k)_k \subset \mathbb{R}$ definite prin

$$s_n = \sum_{k=1}^n x_k, \quad t_k := \sum_{m=0}^k 2^m \cdot x_{2^m} = \sum_{m=0}^{k_n} 2^m \cdot x_{2^m} = t_{k_n}.$$

Din monotonia lui $(x_n)_n$ și cum $n \leq 2^{k+1} - 1 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} s_n &= x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq x_1 + x_2 + \dots + x_{2^{k+1}-1} = \\ &= x_1 + (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) + \dots + (x_{2^k} + x_{2^k+1} + \dots + x_{2^{k+1}-1}) \leq \quad (1) \\ &\leq x_1 + 2 \cdot x_2 + 2^2 \cdot x_{2^2} + \dots + 2^k \cdot x_{2^k} = t_k \end{aligned}$$

Similar, cum $2^k \leq n$, obținem

$$\begin{aligned} s_n &= x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq x_1 + x_2 + \dots + x_{2^k} = \\ &= x_1 + x_2 + (x_3 + x_4) + (x_5 + x_6 + x_7 + x_8) + \dots + \\ &\quad + \dots + (x_{2^{k-1}+1} + x_{2^{k-1}+2} + \dots + x_{2^k}) \geq \quad (2) \\ &\geq x_1 + x_2 + 2 \cdot x_{2^2} + 2^2 \cdot x_{2^3} + \dots + 2^{k-1} \cdot x_{2^k} = \\ &= \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} (x_1 + 2 \cdot x_2 + 2^2 \cdot x_{2^2} + \dots + 2^k \cdot x_{2^k}) = \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} t_k \geq \frac{1}{2} t_k \end{aligned}$$

Observăm că sirurile $(s_n)_n$ și $(t_k)_k$ de numere reale pozitive sunt siruri crescătoare. Pentru a fi convergente rămâne să demonstrăm că sunt mărginite.

(i) $\Rightarrow (s_n)_n$ convergent $\Rightarrow (s_n)_n$ mărginit $\stackrel{(2)}{\Rightarrow} (t_k)_k$ mărginit \Rightarrow (ii) și

(ii) $\Rightarrow (t_k)_k$ convergent $\Rightarrow (t_k)$ mărginit $\stackrel{(1)}{\Rightarrow} (s_n)_n$ mărginit \Rightarrow (i).

Exemplu 2.10. Vom arăta folosind criteriul condensării că *seria armonică generalizată* $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă dacă și numai dacă $\alpha > 1$.

Într-adevăr, din criteriul condensării, seria $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă dacă

și numai dacă seria geometrică $\sum_{n \geq 1} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n$ este convergentă,

adică dacă și numai dacă $\alpha > 1$.

Teoremă 2.11 (d'Alembert³) (Criteriul raportului). Fie sirul $(x_n)_n \subset \mathbb{C}$.

(a) Dacă $\exists \limsup_{m \rightarrow \infty} \sup_{n \geq m} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| < 1$, atunci seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este absolut

convergentă.

(b) Dacă $\exists \liminf_{m \rightarrow \infty} \inf_{n \geq m} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| > 1$, atunci seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este

divergentă.

Demonstrație

(a) Presupunem că: $L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} \left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| < 1$ și $\exists a > 0$ astfel încât $L < a < 1$. Notând $z_n = \sup_{k \geq n} \left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| \Rightarrow \inf_{n \geq 1} z_n < a < 1$. Deoarece $\inf_{n \geq 1} z_n$ este cel mai mare minorant pentru sirul $(z_n)_n$ rezultă că a nu este minorant pentru sirul $(z_n)_n$. Prin urmare, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $z_{n_0} < a$, adică

$$\Rightarrow \left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| \leq \sup_{k \geq n_0} \left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| = z_{n_0} < a, \quad \forall k \geq n_0.$$

În consecință, $|x_{k+1}| < a \cdot |x_k|$, $\forall k \geq n_0$, adică $|x_m| < c \cdot a^m$, $\forall m \geq n_0 + 1$, unde $c = \frac{|x_{n_0}|}{a^{n_0}}$. Cum $0 < a < 1$ seria geometrică $\sum_{n \geq 1} a^n$ este convergentă, din primul criteriu de comparație deducem că seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este absolut convergentă.

(b) Să presupunem că $1 < \underline{\lim}_n \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} \left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right|$.

³ Jean Le Rond d'Alembert, 1717-1783, matematician francez

Notând cu $b_n = \inf_{k \geq n} \left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right|$, rezultă că $1 < \sup_{n \geq 1} b_n$, adică 1 nu este majorant pentru şirul $(b_n)_n$. Prin urmare, există $n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $1 \leq b_{n_0} = \inf_{k \geq n_0} \left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| < \left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right|, \forall k \geq n_0$, deci $|x_{n+1}| > |x_n| > 0, \forall n \geq n_0$, adică şirul $(|x_n|)_n$ este monoton crescător pozitiv, deci nu converge la zero, adică seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ diverge.

Consecință 2.12. Dacă $(x_n)_n \subset \mathbb{C}$ are proprietatea că şirul $\left(\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| \right)_n$ este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \begin{cases} < 1, & \text{atunci } \sum_{n \geq 1} x_n \text{ este absolut convergentă} \\ > 1, & \text{atunci } \sum_{n \geq 1} x_n \text{ este divergentă} \end{cases}$$

De remarcat că acest criteriu nu precizează nimic despre natura seriei $\sum_{n \geq 1} x_n$ în situația când $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = 1$.

Exercițiu:

(i) Să se studieze convergența absolută a seriei

$$\sum_n x_n = 1 + a + a \cdot b + a^2 \cdot b + a^2 \cdot b^2 + a^3 \cdot b^2 + a^3 \cdot b^3 + \dots, \quad 0 < |a| < |b| < 1.$$

(ii) Să se arate că pentru $|a| > 2$ seria $\sum_n x_n = 1 + \frac{a}{2} + a + \frac{a^2}{2} + a^2 + \dots$ este

divergentă.

Teoremă 2.13 (Cauchy-Hadamard⁴) (Criteriul radicalului)

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{C}$ și $L = \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{m \geq n} \sqrt[n]{|x_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|}$.

(a) Dacă $L < 1$, atunci seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este *absolut convergentă*.

(b) Dacă $L > 1$, atunci seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este *divergentă*.

⁴ Jacques Salomon Hadamard, 1865-1963, matematician francez

Demonstrație

(a) Dacă $L < 1$, atunci există $r > 0$ astfel încât $L < r < 1$, adică $\inf \sup_{n \geq 1} \sqrt[k]{|x_k|} = L < r$ și dacă notăm cu $z_n = \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{|x_k|}$, obținem $\inf_{n \geq 1} z_n < r$. Prin urmare, r este mai mare decât cel mai mare minorant al sirului $(z_n)_n$, deci r nu este minorant pentru sirul $(z_n)_n$. Prin urmare, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $z_{n_0} < r$, deci

$$\sqrt[k]{|z_k|} \leq \sup_{k \geq n_0} \sqrt[k]{|x_k|} = z_{n_0} < r, \quad \forall k \geq n_0, \text{ adică} \\ |x_k| < r^k, \quad \forall k \geq n_0.$$

Cum $0 < r < 1$, seria geometrică $\sum_{n \geq 1} r^n$ este convergentă și din primul criteriu de comparație deducem că seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este absolut convergentă.

(b) Dacă $L > 1 \Rightarrow 1 < L = \inf_{n \geq 1} z_n \leq z_n = \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{|x_k|}, \forall n \geq 1$, adică 1 este mai mic decât cel mai mic majorant al sirului $(z_n)_n$, deci 1 nu este majorant pentru sirul $(z_n)_n$. Prin urmare, există $n \in \mathbb{N}$ astfel ca $z_n = \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{|x_k|} > 1$; deci, există $k_n \geq n$ astfel ca $x_{k_n} > 1$, adică sirul $(x_n)_n$ nu converge la zero și, în consecință, seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este divergentă.

Consecință 2.14. Dacă sirul $(x_n)_n \subset \mathbb{C}$ are proprietatea că sirul $(\sqrt[n]{|x_n|})_n$ este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \begin{cases} < 1, & \text{atunci } \sum_{n \geq 1} x_n \text{ este absolut convergentă} \\ > 1, & \text{atunci } \sum_{n \geq 1} x_n \text{ este divergentă} \end{cases}$$

De remarcat că nici acest criteriu nu precizează nimic despre natura seriei $\sum_{n \geq 1} x_n$ în situația când $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} = 1$.

Observație. Se cunoaște că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right|,$$

ceea ce arată că criteriul radicalului este mai tare decât criteriul raportului, deoarece ori de câte ori putem decide natura unei serii prin criteriul raportului vom putea decide natura seriei și prin criteriul radicalului, dar există situații în

care natura unei serii se poate preciza cu criteriul rădăcinii, dar nu se poate preciza cu criteriul raportului. Exemplificăm această afirmație prin

Exemplu: Fie seria numerică de termen general

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & n = 2 \cdot k \\ \frac{1}{3^n}, & n = 2 \cdot k + 1 \end{cases}$$

Observăm că $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \frac{1}{2} < 1$ și conform criteriului radicalului, seria este convergentă. Pe de altă parte, se constată că

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{2 \cdot k}}{x_{2 \cdot k - 1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3^{2 \cdot k - 1}}{2^{2 \cdot k}} = \infty,$$

iar

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{2 \cdot k + 1}}{x_{2 \cdot k}} \right| = \lim \frac{2^{2 \cdot k}}{3^{2 \cdot k + 1}} = 0,$$

adică

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = 0 < 1 < \infty = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right|.$$

Prin urmare, criteriul raportului nu dă niciun fel de informații despre natura seriei, în timp ce criteriul radicalului permite precizarea naturii seriei.

Observație. Dacă criteriul radicalului nu poate da informații despre natura seriei, nici criteriul raportului nu poate preciza natura seriei. Astfel dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = 1$, atunci $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} = 1$ și nici criteriul raportului, nici cel al radicalului nu poate preciza natura seriei.

Exemplu: Fie seria $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{2 \cdot n^2 - 1}$. Observăm că

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2 \cdot (n+1)^2 - 1} \cdot \frac{2 \cdot n^2 - 1}{n} = 1.$$

Prin urmare, nici criteriul raportului, nici cel al rădăcinii nu ne permite să precizăm natura seriei. Apelând la un criteriu de comparație, constatăm că

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{2 \cdot n^2 - 1}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$. Astfel am arătat că seria dată are aceeași natură cu seria armonică, adică este divergentă.

Teoremă 2.15 (Criteriul Kummer⁵) Fie sirul $(x_n)_n \subset \mathbb{R}_+^*$.

(a) Dacă există sirul $(a_n)_n \subset \mathbb{R}_+^*$, constanta $\rho > 0$ și numărul natural $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_0$

$$a_n \cdot \frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1} \geq \rho,$$

atunci seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este convergentă.

(b) Dacă $\exists (a_n)_n \subset \mathbb{R}_+^*$ astfel încât seria $\sum_n \frac{1}{a_n}$ este divergentă și

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } \forall n \geq n_0, a_n \cdot \frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1} \leq 0,$$

atunci seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este divergentă.

Demonstrație. Fără a micșora generalitatea, consider $n_0 = 1$.

(a) Din $a_n \frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1} \geq \rho$, $\forall n \geq 1$, rezultă

$$\rho \cdot x_{n+1} \leq a_n \cdot x_n - a_{n+1} \cdot x_{n+1}, \forall n \geq 1.$$

Însumând după n , deducem

$$\rho \cdot S_n \leq (\rho + a_1) \cdot x_1 - a_n \cdot x_n \leq (\rho + a_1) \cdot x_1,$$

de unde obținem că sirul $(S_n)_n$ este mărginit și fiind crescător, este convergent, adică seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este convergentă.

(b) Din $a_n \frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1} \leq 0$ rezultă $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{x_n}{x_{n+1}}$ și prin al doilea criteriu de

comparație seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este divergentă.

Observație. Pentru diverse alegeri ale sirului $(a_n)_n$ în teorema lui **Kummer** se pot obține criterii utile în practică. Astfel pentru $a_n = 1$ se obține criteriul raportului. Dacă $a_n = n$, se obține criteriul lui **Raabe-Duhamel**, iar pentru $a_n = n \cdot \ln n$ se obține criteriul lui **Bertrand**⁶.

⁵ Ernst Eduard Kummer, 1810-1893, matematician german

⁶ Joseph Louis François Bertrand, 1822-1900, matematician francez

Consecință 2.16 (Criteriul Raabe⁷-Duhamel⁸) Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}_+^*$.

(a) Dacă $\exists k > 1$ și $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca $n \cdot \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) \geq k$, $\forall n \geq n_0$, atunci

seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este convergentă.

(b) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $n \cdot \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) < 1$, $\forall n \geq n_0$, atunci seria $\sum_{n \geq 1} x_n$

este divergentă.

Consecință 2.17 (Criteriul lui Bertrand) Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}_+^*$ și

$$B_n = n \cdot \ln n \cdot \frac{x_n}{x_{n+1}} - (n+1) \cdot \ln(n+1), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Dacă:

(a) există $\liminf_{n \rightarrow \infty} B_n > 0$, atunci seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este convergentă;

(b) există $\limsup_{n \rightarrow \infty} B_n < 0$, atunci seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este divergentă.

Demonstrație. Seria $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \cdot \ln n}$ este divergentă. În adevăr, conform

criteriului condensării ea are aceeași natură cu seria $\sum_{n \geq 2} \frac{2^n}{2^n \cdot \ln 2^n} = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \cdot \ln 2}$

care este divergentă. Folosind apoi criteriul **Kummer** cu $a_n = n \cdot \ln n$ se obține concluzia din teoremă.

Un criteriu mai general decât criteriul lui **Kummer** este criteriul lui **Gauss**.

Teoremă 2.18 (Criteriul Gauss⁹)

Dacă sirul $(a_n)_n \subset \mathbb{R}_+^*$ are proprietatea că există constantele reale $\lambda, \mu, L, \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ și sirul $(\theta_n)_n \subset \mathbb{R}$, cu $|\theta_n| \leq L$, $\forall n \in \mathbb{N}$, astfel ca

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\alpha}}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

și dacă

(a) $\lambda > 1$ sau dacă $\lambda = 1$, dar $\mu > 1$, atunci $\sum_{n \geq 1} a_n$ este convergentă;

⁷ Joachim Raabe, 1801-1872, matematician german

⁸ Jean Marie Constant Duhamel, 1797-1872, matematician francez

⁹ Johann Carl Friedrich Gauss, 1777-1855, matematician german

(b) $\lambda < 1$ sau dacă $\lambda = 1$, dar $\mu \leq 1$, atunci $\sum_{n \geq 1} a_n$ este divergentă.

Demonstrație. Dacă $\lambda > 1$ sau $\lambda < 1$ prin criteriul raportului afirmația teoremei este clară. Pentru $\lambda = 1$ aplicăm criteriul lui **Raabe-Duhamel**. Are loc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \mu.$$

Dacă $\mu > 1$, seria $\sum_{n \geq 1} a_n$ este convergentă, iar pentru $\mu < 1$ seria este

divergentă. Mai rămâne să analizăm cazul $\mu = 1$. În acest caz constatăm că

$$B_n = n \cdot \ln n \cdot \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\alpha}} \right) - (n+1) \cdot \ln(n+1) = (n+1) \cdot \ln \frac{n}{n+1} + \theta_n \cdot \frac{\ln n}{n^\alpha}.$$

Însă

$$0 < \frac{\ln n}{n^\alpha} = \frac{2 \cdot \ln n^{\alpha/2}}{\alpha \cdot n^\alpha} < \frac{2 \cdot n^{\alpha/2}}{\alpha \cdot n^\alpha} = \frac{2}{\alpha \cdot n^{\alpha/2}},$$

ceea ce antrenează că $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = 0$. Deci, $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n \frac{\ln n}{n^\alpha} = 0$. Pe de altă parte,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \cdot \ln \frac{n}{n+1} = -1 < 0.$$

Prin urmare, $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = -1 < 0$ și conform criteriului **Bertrand** seria $\sum_{n \geq 1} a_n$

este divergentă.

Exemplu: Să se discute natura seriei numerice

$$\sum_{n \geq 1} \left[\frac{a \cdot (a+r) \cdot \dots \cdot (a+n \cdot r - r)}{b \cdot (b+r) \cdot \dots \cdot (b+n \cdot r - r)} \right]^\alpha, \quad a, b, r, \alpha \in \mathbb{R}_+.$$

Seria este cu termeni pozitivi. Pentru $b \geq a+r$ deducem că

$$x_n = \left[\frac{a \cdot (a+r) \cdot \dots \cdot (a+n \cdot r - r)}{b \cdot (b+r) \cdot \dots \cdot (b+n \cdot r - r)} \right]^\alpha \leq \left(\frac{a}{a+n \cdot r} \right)^\alpha$$

și condiția necesară de convergență $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ este îndeplinită.

Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a+n \cdot r}{b+n \cdot r} \right)^\alpha = 1$, criteriul raportului nu dă nicio

informație despre natura seriei.

Din

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left[\left(\frac{b+n \cdot r}{a+n \cdot r} \right)^\alpha - 1 \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{b+z+r}{a+z+r} \right)^\alpha - 1}{z} = \frac{\alpha}{r} \cdot (b-a)$$

deducem următoarele

- dacă $\frac{\alpha}{r} \cdot (b - a) < 1 \Leftrightarrow b < a + \frac{r}{\alpha}$ seria este convergentă,
- dacă $\frac{\alpha}{r} \cdot (b - a) > 1 \Leftrightarrow b > a + \frac{r}{\alpha}$ seria este divergentă.

Pentru $b = a + \frac{r}{\alpha}$ vom folosi criteriul lui **Gauss**

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \left(\frac{b + n \cdot r}{a + n \cdot r} \right)^\alpha = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \cdot \left[n^2 \cdot \left(\frac{a + \frac{r}{\alpha} + n \cdot r}{a + n \cdot r} \right)^\alpha - n^2 - n \right].$$

Dacă analizăm

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \left[\left(\frac{a + \frac{r}{\alpha} + n \cdot r}{a + n \cdot r} \right)^\alpha - 1 - \frac{1}{n} \right] &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\left[\left(\frac{a + \frac{r}{\alpha} \cdot z + r}{a \cdot z + r} \right)^\alpha - 1 - z \right]}{z^2} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{r^2}{(a \cdot z + r)^2} \left[\left(\frac{a + \frac{r}{\alpha} \cdot z + r}{a \cdot z + r} \right)^\alpha - 1 \right]^{\alpha-1}}{2 \cdot z} = -\frac{a}{r} + \frac{\alpha-1}{\alpha} < \infty, \end{aligned}$$

deducem că și în acest caz seria este divergentă.

Exemplu (dat de Gauss în anul 1821): Fie seria

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha \cdot (\alpha + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha + n - 1)}{n!} \cdot \frac{\beta \cdot (\beta + 1) \cdot \dots \cdot (\beta + n - 1)}{\gamma \cdot (\gamma + 1) \cdot \dots \cdot (\gamma + n - 1)},$$

unde α, β, γ sunt numere reale pozitive nenule, numită *seria hipergeometrică*.

Dacă aplicăm criteriul raportului, observăm că

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + (\alpha + \beta) \cdot n + \alpha \cdot \beta}{n^2 + (\gamma + 1) \cdot n + \gamma} = 1,$$

deci cu acest criteriu nu putem decide natura seriei. Observăm însă că

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{n^2 + (\gamma + 1) \cdot n + \gamma}{n^2 + (\alpha + \beta) \cdot n + \alpha \cdot \beta} = 1 + \frac{\gamma + 1 - \alpha - \beta}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

unde sirul

$$\theta_n = \frac{n^3 \cdot [\gamma - \alpha \cdot \beta - (\alpha + \beta) \cdot (\gamma + 1 - \alpha - \beta)] - \alpha \cdot \beta \cdot (\gamma + 1 - \alpha - \beta) \cdot n^2}{n \cdot (n + \alpha) \cdot (n + \beta)}$$

este un sir convergent, deci mărginit. Aplicând criteriul lui **Gauss**, deducem că seria este

- convergentă pentru $\gamma + 1 - \alpha - \beta > 1 \Leftrightarrow \gamma > \alpha + \beta$;
- divergentă pentru $\gamma + 1 - \alpha - \beta \leq 1 \Leftrightarrow \gamma \leq \alpha + \beta$.

Teoremă (criteriul integral - Cauchy). Fie funcția $f : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ descrescătoare și sirul

$$x_n = \int_1^n f(t) dt.$$

Seria $\sum_{n \geq 1} f(n)$ este convergentă dacă și numai dacă sirul $(x_n)_n$ este convergent.

Teoremă 2.19 (Criteriul Ermakov¹⁰)

Fie funcția $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ monoton descrescătoare și $a_n = f(n)$,

$n \in \mathbb{N}$. Dacă $\exists x_0 \geq 1$ cu proprietatea $\frac{f(e^x) \cdot e^x}{f(x)} \leq q > 1$, $\forall x \geq x_0$, și

- $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x f(t) dt < \infty$, atunci seria $\sum_{n \geq 1} a_n$ este convergentă;
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x f(t) dt$ nu există sau are valoare infinită, atunci seria $\sum_{n \geq 1} a_n$ este divergentă.

În general nu se poate calcula suma exactă a unei serii numerice convergente. De aceea, în cele mai multe cazuri se preferă să se determine o aproximată a sumei seriilor cu termeni pozitivi.

Teoremă. Fie sirul $(x_n)_n \subset \mathbb{R}_+$ și seria numerică $\sum_{n \geq 1} x_n$.

Dacă există $\alpha \in [0, 1)$ și $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca $\frac{x_{n+1}}{x_n} < \alpha$, $\forall n \geq n_0$, atunci

$$|S - S_n| < \frac{\alpha}{1 - \alpha} \cdot x_n,$$

unde S este suma seriei $\sum_{n \geq 1} x_n$, iar $(S_n)_n$ este sirul sumelor parțiale.

¹⁰ **Vassili Petrovitch Ermakov**, 1845-1922, matematician rus

2.3 Serii numerice cu termeni arbitrari

Teoremă 2.20 (criteriul Dirichlet¹¹)

Dacă şirurile $(x_n)_n \subset \mathbb{C}$ și $(y_n)_n \subset \mathbb{R}_+$ au proprietățile:

(i) $\exists M > 0$ astfel încât $\left| \sum_{m=1}^n x_m \right| \leq M, \forall n \in \mathbb{N},$

(ii) şirul $(y_n)_n$ este descrescător convergent la zero,

atunci seria $\sum_{n \geq 1} x_n \cdot y_n$ este convergentă.

Demonstrație

Dacă $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$ este şirul sumelor parțiale, atunci pentru $m > n$ avem:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n}^m x_k \cdot y_k \right| &= |x_n \cdot y_n + x_{n+1} \cdot y_{n+1} + \dots + x_m \cdot y_m| = \\ &= |y_n \cdot (s_n - s_{n-1}) + y_{n+1} \cdot (s_{n+1} - s_n) + \dots + y_m \cdot (s_m - s_{m-1})| = \\ &= |-s_{n-1} \cdot y_n + s_n \cdot (y_n - y_{n+1}) + \dots + s_{m-1} \cdot (y_{m-1} - y_m) + s_m \cdot y_m| \leq \\ &\leq |s_{n-1}| \cdot y_n + |s_n| \cdot |y_n - y_{n+1}| + \dots + |s_{m-1}| \cdot |y_{m-1} - y_m| + |s_m| \cdot y_m \leq \\ &\leq M \cdot y_n + M \cdot (y_n - y_{n+1}) + \dots + M \cdot (y_{m-1} - y_m) + M \cdot y_m = 2 \cdot M \cdot y_n \end{aligned}$$

Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ rezultă concluzia teoremei.

Exemplu: Fie seria $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n \cdot x)}{n}, x \in \mathbb{R}$. Observăm că seria

$\sum_{n \geq 1} \sin(n \cdot x)$ are şirul sumelor parțiale $\{S_n(x)\}_n$ mărginit. În adevăr, dacă $x \neq 2 \cdot k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$, atunci

$$|S_n(x)| = |\sin x + \sin(2 \cdot x) + \dots + \sin(n \cdot x)| = \left| \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot x}{2 \cdot \sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|},$$

iar dacă $x = 2 \cdot k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$, atunci $S_n(x) = 0$. Prin urmare, în ambele cazuri, şirul $\{S_n(x)\}_n$ este mărginit.

¹¹ Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805-1859, matematician belgian

Pe de altă parte, şirul $y_n = \frac{1}{n}$ este descrescător convergent la zero. Fiind îndeplinite condiţiile criteriului **Dirichlet**, rezultă că seria $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n \cdot x)}{n}$ este convergentă pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Consecință 2.21 (Criteriul Leibniz¹²)

Dacă şirul $(a_n)_n \subset \mathbb{R}_+$ este monoton descrescător și convergent la zero, atunci seria alternantă $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \cdot a_n$ este convergentă.

În plus, suma seriei s are proprietatea $0 < (-1)^n \cdot (s - s_n) < a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, unde $s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \cdot a_k$ este şirul sumelor parțiale.

Demonstrație. Se observă că $\left| \sum_{k=0}^n (-1)^k \right| \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și se aplică criteriul

lui **Dirichlet**.

În plus, $s_2 < s_4 < \dots < s_{2n} < \dots < s < \dots < s_{2n-1} < \dots < s_3 < s_1$ și

$$\begin{aligned} 0 < s - s_{2n} < s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \\ 0 < s_{2n+1} - s < s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+2} \end{aligned} \Rightarrow 0 < (-1)^n \cdot (s - s_n) < a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemplu: Seria $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ este convergentă, întrucât şirul $a_n = \frac{1}{n}$ este

descrescător convergent la zero, fiind astfel îndeplinite ipotezele criteriului lui **Leibniz**. Mai mult, criteriul lui **Leibniz** ne asigură că modulul diferenței dintre suma seriei și o sumă parțială oarecare nu poate depăși modulul primului termen care nu a fost considerat în suma parțială. Astfel, dacă notăm cu S suma seriei, atunci

$$|S_n - S| = \left| \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right) - S \right| \leq \frac{1}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Prin urmare, în acest caz chiar dacă nu putem găsi valoarea exactă a lui S ($S = \ln 2$) putem determina valoarea sa cu aproximatie. Pentru a obține valoarea sumei seriei cu eroarea de $\varepsilon = 10^{-3}$ este necesar ca $\frac{1}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow n = 1000$, adică sunt necesari cel puțin primii 1000 de termeni din serie pentru a obține valoarea sumei seriei cu aproximată $\varepsilon = 10^{-3}$.

¹² Gottfried Wilhelm von Leibniz, 1646-1716, matematician german

Teoremă 2.22 (Criteriul Abel¹³⁾

Dacă sirurile $(x_n)_n \subset \mathbb{C}$ și $(y_n)_n \subset \mathbb{C}$ au proprietățile:

(i) $\exists M > 0$ astfel încât $|x_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ($(x_n)_n$ este mărginit),

(ii) $(x_n)_n$ monoton,

(iii) seria $\sum_{k \geq 1} y_k$ este convergentă,

atunci seria $\sum_{n \geq 1} x_n \cdot y_n$ este convergentă.

Demonstrație

Din (i) și (ii) deducem că sirul $(x_n)_n$ este convergent și fie $\lim_n x_n = x$.

Vom presupune, fără a micșora generalitatea, că sirul $(x_n)_n$ este monoton descrescător $\Rightarrow z_n = x_n - x$ este descrescător, convergent la zero. Cum seria $\sum_{k \geq 1} y_k$ este convergentă deducem că sirul sumelor sale parțiale este mărginit.

Aplicăm criteriul **Dirichlet** seriei $\sum_{n \geq 1} y_n \cdot z_n = \sum_{n \geq 1} y_n \cdot (x_n - x)$, rezultă că seria $\sum_{n \geq 1} y_n \cdot z_n$ este convergentă și combinând cu (iii) deducem că seria $\sum_{n \geq 1} x_n \cdot y_n$ este convergentă.

Exemplu: Vom studia natura seriei $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ folosind criteriile

Dirichlet și Abel, astfel dacă rescriem seria dată în forma

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{1+\frac{1}{n}}} = \sum_{n \geq 1} \underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}}_{x_n} \cdot \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{n}}_{y_n},$$

unde atât seria $\sum_{n \geq 1} y_n$, cât și sirul $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ sunt convergente (mărginite), mai mult sirul $(x_n)_n$ este monoton crescător. Prin urmare, seria este convergentă.

Definiție 2.23. Spunem că seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este *absolut convergentă* dacă seria modulelor $\sum_{n \geq 1} |x_n|$ este convergentă.

¹³ Niels Henrik Abel, 1802-1829, matematician norvegian

Spunem că seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este *semiconvergentă* dacă seria este convergentă, dar seria modulelor $\sum_{n \geq 1} |x_n|$ este divergentă.

Spunem că seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este *necondiționat convergentă* dacă pentru orice funcție bijectivă $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, seria $\sum_{n \geq 1} x_{\sigma(n)}$ este convergentă; altfel seria se numește *condiționat convergentă*.

Din teorema lui Cauchy se obțin imediat următoarele consecințe.

Consecință 2.24. Dacă seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este absolut convergentă, atunci ea

este convergentă, reciproca nu este adevărată, de exemplu seria $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ este semiconvergentă, deoarece seria modulelor $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ este divergentă.

Consecință 2.25. Dacă sirurile $(x_n)_n \subset \mathbb{C}$ și $(r_n)_n \subset \mathbb{R}_+$ au proprietățile:

(i) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n| \leq r_n, \forall n \geq n_0$;

(ii) seria $\sum_{n \geq 1} r_n$ este convergentă,

atunci seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este absolut convergentă.

Propoziție. Fie sirul $(x_n)_n \subset \mathbb{R}_+$. Dacă seria numerică $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot x_n$ este convergentă, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}$ are loc inegalitatea

$$|S - S_n| < x_{n+1},$$

unde S este suma seriei $\sum_{n \geq 1} x_n$, iar $(S_n)_n$ este sirul sumelor parțiale.

2.4 Schimbarea ordinii termenilor unei serii numerice

Este bine cunoscută proprietatea de comutativitate a termenilor unei sume finite de numere complexe. Prin urmare, este firesc să ne întrebăm dacă această proprietate rămâne valabilă și în cazul seriilor, cu alte cuvinte dacă schimbând ordinea de sumare într-o serie convergentă se modifică natura seriei. În continuare ne propunem să analizăm situația în care se permute o infinitate de termeni ai unei serii. Vom arăta că dacă seria este absolut convergentă, prin orice schimbare a ordinii termenilor se obține o serie convergentă și cu aceeași

sumă, în timp ce dacă schimbăm ordinea unei infinități de termeni ai unei serii semiconvergente, putem obține atât serii convergente, cât și serii divergente.

Teoremă. O serie $\sum_{n \geq 1} x_n$ este absolut convergentă dacă și numai dacă este necondiționat convergentă.

Consecință. O serie $\sum_{n \geq 1} x_n$ cu termeni pozitivi este convergentă cu suma S dacă și numai dacă este necondiționat convergentă. Mai mult, seria obținută prin permutarea termenilor are aceeași sumă cu seria inițială.

Teoremă (Riemann). Fie seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ condiționat convergentă. Atunci

există o permutare a termenilor săi astfel încât să se obțină:

- o serie convergentă cu suma un număr dat,
- o serie divergentă cu suma $\pm\infty$,
- o serie divergentă cu sirul sumelor parțiale oscilant.

Observație. Teorema lui **Riemann** arată că seriile semiconvergente sunt condiționat convergente, adică natura acestora este condiționată de schimbarea ordinii termenilor seriei.

Teoremă. Dacă seria $\sum_{n \geq 1} x_n$ este absolut convergentă, atunci pentru orice

permutare a termenilor săi se obține o serie convergentă convergentă către aceeași sumă.

Exemplu:

1. (distribuția **Poisson**) Se dă sirul $p_n = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!}$, $\lambda > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Arătați că

- $\sum_{n \geq 0} p_n = 1$;
- $\sum_{n \geq 0} n \cdot p_n = \lambda$.

2. (sumabilitate **Borel**) Fie seria numerică $\sum_{n \geq 0} x_n$ cu sirul sumelor parțiale

$s_n = \sum_{k=0}^n x_k$, $n \in \mathbb{N}$. Vom spune că seria este **Borel sumabilă** dacă

$$\exists \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{n \geq 0} s_n \cdot p_n ,$$

unde sirul $(p_n)_n$ este sirul probabilităților **Poisson** definit în exercițiul anterior. Pentru care valori ale lui $z \in \mathbb{C}$ seria geometrică $\sum_{n \geq 0} z^n$ este **Borel sumabilă**?

2.5 Produsul a două serii numerice

Definiție 2.26. Fie două serii convergente $\sum_{n \geq 1} a_n$ și $\sum_{n \geq 1} b_n$. Numim *produsul Cauchy* al celor două serii, seria $\sum_{n \geq 1} c_n$ cu termenul general

$$c_m = \sum_{i+j=m+1} a_i \cdot b_j = \sum_{k=1}^m a_k \cdot b_{m-k+1}, \quad m \in \mathbb{N}^*.$$

Observație. Produsul **Cauchy** a două serii convergente nu este întotdeauna o serie convergentă, după cum se poate vedea din următorul

Exemplu: Fie $a_n = b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$. Conform criteriului lui **Leibniz** cele

două serii sunt convergente. Observăm că

$$c_n = \sum_{k=1}^n a_k \cdot b_{n-k+1} = (-1)^{n-1} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{n-k+1}}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Prin urmare

$$|c_n| = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{n-k+1}} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} = 1, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

adică $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n \neq 0$, ceea ce arată că seria produs $\sum_{n \geq 1} c_n$ nu este convergentă.

Vom arăta în continuare că dacă seriile $\sum_{n \geq 1} a_n$ și $\sum_{n \geq 1} b_n$ sunt convergente

și cel puțin una din ele este absolut convergentă, atunci și seria produs este convergentă.

Teoremă 2.27 (Toeplitz¹⁴). Fie matricea $T = (t_{nm})_{m,n \in \mathbb{N}}$, $(1 \leq m \leq n)$

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & & & & \\ t_{21} & t_{22} & & & \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & & \\ \dots & & & & \\ t_{n1} & t_{n2} & t_{n3} & \cdots & t_{nn} \\ \dots & & & & \end{pmatrix}$$

unde elementele matricei triunghiulare infinite T au următoarele proprietăți:

(i) elementele care se găsesc în fiecare coloană tind către zero, adică

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_{nm} = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N};$$

¹⁴ Otto Toeplitz, 1881-1940, matematician german

(ii) suma valorilor absolute ale elementelor din fiecare linie este mărginită de aceeași constantă adică

$$\exists M > 0 \text{ astfel încât } |t_{n1}| + |t_{n2}| + \dots + |t_{nn}| < M, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Dacă sirul $(x_n)_n \subset \mathbb{C}$ este convergent la zero, atunci sirul $(y_n)_n$ definit de

$$y_n = t_{n1} \cdot x_1 + t_{n2} \cdot x_2 + \dots + t_{nn} \cdot x_n$$

este convergent la zero.

Demonstrație

Explicitând ipotezele teoremei, deducem că

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } \forall n \geq n_1 \Rightarrow |x_n| < \varepsilon \text{ și}$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } \forall n \geq n_2, \forall m \leq n \Rightarrow |t_{nm}| < \varepsilon$$

Folosind acest lucru și (ii) avem că pentru orice $n \geq \tilde{n} = n_1 \wedge n_2$

$$\begin{aligned} |y_n| &= |t_{n1} \cdot x_1 + t_{n2} \cdot x_2 + \dots + t_{nn} \cdot x_n| \leq |t_{n1} \cdot x_1 + t_{n2} \cdot x_2 + \dots + t_{nn_1} \cdot x_{n_1}| + \\ &+ |t_{nn_1+1} \cdot x_{n_1+1} + \dots + t_{nn} \cdot x_n| \leq (|t_{n1}| \cdot |x_1| + |t_{n2}| \cdot |x_2| + \dots + |t_{nn_1}| \cdot |x_{n_1}|) + \\ &+ (|t_{nn_1+1}| \cdot |x_{n_1+1}| + |t_{nn_1+2}| \cdot |x_{n_1+2}| + \dots + |t_{nn}| \cdot |x_n|) < (n_1 \cdot L + M) \cdot \varepsilon, \end{aligned}$$

unde $L > 0$ astfel încât $|x_n| < L, \forall n \in \mathbb{N}$.

Consecință 2.28

Să presupunem că elementele (t_{nm}) în afara condițiilor **(i)** și **(ii)** verifică și condiția

$$\text{(iii)} T_n = t_{n1} + t_{n2} + \dots + t_{nn}, n \in \mathbb{N} \text{ și } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = 1.$$

Dacă sirul $(x_n)_n \subset \mathbb{C}$ este convergent la a ($\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$), atunci sirul $(y_n)_n$ definit de

$$y_n = t_{n1} \cdot x_1 + t_{n2} \cdot x_2 + \dots + t_{nn} \cdot x_n$$

este convergent la a , adică $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (t_{n1} \cdot x_1 + t_{n2} \cdot x_2 + \dots + t_{nn} \cdot x_n) = a$.

Demonstrație

Rescriem sirul $(y_n)_n$ sub forma:

$$y_n = t_{n1} \cdot (x_1 - a) + t_{n2} \cdot (x_2 - a) + \dots + t_{nn} \cdot (x_n - a) + T_n \cdot a,$$

folosim teorema anterioară și proprietatea sirului $(T_n)_n$.

Consecință 2.29 (Stolz¹⁵)

Dacă sirul $(z_n)_n$ este monoton crescător, pozitiv și nemărginit, iar sirul

$$\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{z_n - z_{n-1}} \right)_n \text{ converge la } a, \text{ atunci sirul } y_n = \frac{x_n - x_0}{z_n} = \sum_{m=1}^n t_{nm} \cdot \left(\frac{x_m - x_{m-1}}{z_m - z_{m-1}} \right)$$

¹⁵ Otto Stolz, 1842-1905, matematician austriac

converge la a , unde $t_{nm} = \frac{z_m - z_{m-1}}{z_n}$.

Demonstrație

Se verifică condițiile **(i)**, **(ii)** și **(iii)** pentru sirul (t_{nm}) și cum sirul $\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{z_n - z_{n-1}}\right)_n$ este convergent la a , putem folosi consecința 2.28 de mai sus.

Consecință 2.30

Fie $(x_n)_n, (y_n)_n \subset \mathbb{R}$ convergent la zero, iar $(y_n)_n$ satisfac condiția $\exists M > 0, |y_1| + |y_2| + \dots + |y_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. Atunci sirul $(z_n)_n \subset \mathbb{R}$, definit prin

$$z_n = x_1 \cdot y_n + x_2 \cdot y_{n-1} + \dots + x_n \cdot y_1$$

converge la zero.

Demonstrația se bazează pe teorema 2.27, punând $t_{nm} = y_{n-m+1}$.

Consecință 2.31

Dacă sirurile $(x_n)_n, (y_n)_n \subset \mathbb{R}$ cu $\lim_n x_n = a, \lim_n y_n = b$, atunci sirul

$$z_n = \frac{x_1 \cdot y_n + x_2 \cdot y_{n-1} + \dots + x_n \cdot y_1}{n}$$

converge la $a \cdot b$, adică $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a \cdot b$.

Demonstrație. Vom rescrie sirul $(z_n)_n$ sub forma

$$z_n = \frac{(x_1 - a) \cdot y_n + (x_2 - a) \cdot y_{n-1} + \dots + (x_n - a) \cdot y_1}{n} + a \cdot \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}$$

în care primul termen tinde la zero prin teorema 2.27, iar al doilea termen la $a \cdot b$ prin consecința 2.29.

Consecință 2.32

Dacă sirul $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ converge la a și $z > 0$, atunci sirul $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$,

$$y_n = \frac{C_n^0 \cdot x_0 + C_n^1 \cdot z \cdot x_1 + C_n^2 \cdot z^2 \cdot x_2 + \dots + C_n^n \cdot z^n \cdot x_n}{(1+z)^n}$$

converge la a .

Teoremă 2.33 (Mertens¹⁶)

Dacă seriile $\sum_{n \geq 1} a_n = A$ și $\sum_{n \geq 1} b_n = B$ sunt convergente și cel puțin una este

absolut convergentă, atunci seria produs $\sum_{n \geq 1} c_n$ cu $c_m = \sum_{i+j=m+1} a_i \cdot b_j$ este

convergentă și are suma $C = A \cdot B$.

¹⁶ Franz Carl Joseph Mertens, 1840-1927, matematician austriac

Demonstrație

Admitem că seria $\sum_{n \geq 1} a_n$ este absolut convergentă, adică seria $\sum_{n \geq 1} |a_n|$ este convergentă. Notăm cu $C_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n$ sirul sumelor parțiale ale seriei produs, de termen general

$$c_n = a_1 \cdot b_n + a_2 \cdot b_{n-1} + \dots + a_n \cdot b_1.$$

Vom demonstra că $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = A \cdot B$. Notând $\beta_n = B - B_n$, avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$.

Rescriem C_n în forma

$$\begin{aligned} C_n &= a_1 \cdot b_1 + (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2) + (a_1 \cdot b_3 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_1) + \dots + \\ &\quad + (a_1 \cdot b_n + a_2 \cdot b_{n-1} + \dots + a_n \cdot b_1) = \\ &= a_1 \cdot (b_1 + b_2 + \dots + b_n) + a_2 \cdot (b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}) + \dots + a_n \cdot b_1 = \\ &= a_1 \cdot B_n + a_2 \cdot B_{n-1} + \dots + a_n \cdot B_1 = A_n \cdot B_n - (a_1 \cdot \beta_n + a_2 \cdot \beta_{n-1} + \dots + a_n \cdot \beta_1) \end{aligned}$$

și prin consecința 2.30 a teoremei lui **Toeplitz** deducem că $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = A \cdot B$.

Exemplu: Să calculăm pătratul seriei geometrice $\sum_{n \geq 0} q^n$, $q \in (-1, 1)$.

Produsul **Cauchy** al seriei date cu ea însuși are termenul general

$$c_n = \sum_{k=0}^n q^k \cdot q^{n-k} = (n+1) \cdot q^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Fiind verificate ipotezele teoremei lui **Mertens**, conchidem

$$\sum_{n \geq 0} c_n = \sum_{n \geq 0} (n+1) \cdot q^n = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Consecință. Produsul **Cauchy** a două serii absolut convergente este o serie absolut convergentă cu suma egală cu produsul sumelor celor două serii.

Observație. Este natural să ne întrebăm dacă putem să relaxăm ipotezele teoremei **Mertens**. Astfel ne punem întrebarea dacă seria produs **Cauchy** $\sum_{n \geq 1} c_n$ este convergentă, ce ipoteze verifică seriile $\sum_{n \geq 1} a_n$ și $\sum_{n \geq 1} b_n$ pentru ca suma seriei produs să fie $C = A \cdot B$.

Teoremă (Abel). Dacă seriile $\sum_{n \geq 1} a_n$, $\sum_{n \geq 1} b_n$ și $\sum_{n \geq 1} c_n$, unde

$c_m = \sum_{k=1}^m a_k \cdot b_{m-k+1}$, $m \in \mathbb{N}^*$, sunt convergente și au sumele A , B și, respectiv, C , atunci $C = A \cdot B$.

Exemplu: Fie $a_n = b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Conform criteriului lui **Leibniz** seriile $\sum_{n \geq 1} a_n$, $\sum_{n \geq 1} b_n$ sunt convergente, fără a fi însă absolut convergente. Mai mult, ele au suma $A = B = \ln 2$. Termenul general al seriei produs este

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=1}^n a_k \cdot b_{n-k+1} = (-1)^n \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{n-k+1} = \\ &= (-1)^n \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1} \right) = \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Se constată cu ușurință că seria produs este o serie alternată și verifică ipotezele criteriului **Leibniz**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Suntem în condițiile teoremei lui **Abel**, prin urmare seria produs are suma

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) = (\ln 2)^2.$$

2.6 Exerciții

1. Să se determine natura seriei de termen general u_n și în caz de convergență să se determine suma sa dacă

$$\triangleright u_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2};$$

$$\triangleright u_n = \frac{3^n + 2^n}{6^n};$$

$$\triangleright u_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n \cdot (n+3)} \right);$$

$$\triangleright u_n = \sqrt{n+2+\alpha} - 2\sqrt{n+1+\alpha} + \sqrt{n+\alpha} \quad \alpha \in \mathbb{R}_+;$$

$$\triangleright u_n = \ln \cos \frac{\alpha}{2^n} \quad \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right).$$

2. Să se discute, în raport cu valorile parametrilor (acolo unde este cazul), natura seriei numerice termen general u_n , unde

$$\triangleright u_n = \frac{\cos(n\alpha)}{n^p} \quad \alpha \in (0, \pi), p > 0;$$

- $u_n = \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \right]^2 \cdot \frac{1}{n};$
- $u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2 \cdot n + 1}{3^n};$
- $u_n = n^2 \cdot \sin \frac{\pi}{2^n};$
- $u_n = a^n \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega}{2^n} \quad a > 0, \omega \in (0, \pi);$
- $u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{n};$
- $u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n};$
- $u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}, \quad n \geq 2;$
- $u_n = a^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad a \geq 0, n \geq 1;$
- $u_n = (2n+1) \left[\frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{(a+1)(a+2)\dots(a+n+1)} \right]^2;$
- $u_n = \sin \frac{n^2 + n + 1}{n + 1} \pi;$
- $u_n = \frac{\alpha^n}{n^\beta \cdot \sin \frac{1}{n}}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

3. Să se stabilească dacă se poate aplica criteriul lui **Leibniz** pentru seriile:

- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 + \cos(n \cdot \pi)}{n};$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n \cdot \pi)}{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} n)}.$

CAPITOLUL 3

APLICAȚII ÎNTRE SPAȚII METRICE

3.1 Limita unei aplicații într-un punct

Fie (X, d_1) și (Y, d_2) două spații metrice, τ_X topologia metrică pe spațiul X și τ_Y topologia metrică pe spațiul Y . Convenim să notăm cu $S_X(a, r), a \in X, r > 0$ și $S_Y(b, r), b \in Y$ bilele deschise din X și, respectiv, Y .

Fie aplicația $f : E \subset X \rightarrow F \subset Y$ și să presupunem că punctul $a \in E'$ este un *punct de acumulare* pentru mulțimea E ; în această situație ne putem apropiă cu ajutorul altor puncte din mulțimea E oricât de mult de punctul a .

Noțiunea de *limită* a aplicației f în punctul a va exprima intuitiv faptul că dacă ne apropiem de punctul a prin puncte din mulțimea E , atunci valorile aplicației f în aceste puncte se apropiă oricât de mult de punctul l din mulțimea Y .

Prin urmare, oricare ar fi vecinătatea punctului l din Y , în această vecinătate se vor găsi toate valorile lui f calculate în puncte din E suficient de apropiate de punctul $a \in E'$.

Definiția 3.1

Fie aplicația $f : E \subset X \rightarrow F \subset Y$ și punctul $a \in E'$. Un element $l \in Y$ se numește *limită aplicației f în punctul a* și se notează $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}_Y(l)$ a lui l , în spațiul (Y, d_2) există o vecinătate $U_V \in \mathcal{V}_X(a)$ a lui a în spațiul (X, d_1) , astfel încât pentru orice $x \in E$, $x \in U_V, x \neq a$, să rezulte $f(x) \in V$ sau echivalent

$$f([U - \{a\}] \cap D) \subset V.$$

Observații

- Definiția limitei unei aplicații se dă într-un punct de acumulare al mulțimii de definiție E , adică într-un punct pentru care avem asigurată posibilitatea de a ne apropiă de acesta prin puncte diferite din mulțimea pe care este definită aplicația f .
- Remarcăm că, în general, punctul $a \in E'$ nu aparține mulțimii de definiție a aplicației f , dar chiar dacă aplicația f este definită în punctul

a valoarea $f(a)$ nu este neapărat egală cu valoarea limitei $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Consecință. Elementul $l \in Y$ nu este limita funcției f în punctul a dacă și numai dacă există o vecinătate U a punctului l astfel încât pentru orice vecinătate V a lui a există un punct $x_V \in E \cap V - \{x_0\}$ cu proprietatea că $f(x_V) \notin U$.

Particularizând spațiile X și Y , spunem că o aplicație $f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}, p \geq 1$, este funcție reală de argument vectorial, iar o aplicație $h : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow F \subset \mathbb{R}^q, q \geq 1$, este funcție vectorială de argument vectorial.

Definiție 3.2

Spunem că funcția $f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow F \subset \mathbb{R}$ are limita $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ în punctul $\bar{x}_0 \in E'$ dacă $\forall V \in \mathcal{V}(\ell), \exists U_V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât

$$\forall \bar{x} \in U \cap E - \{x_0\} \Rightarrow f(\bar{x}) \in V \text{ și scriem } \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) = \ell.$$

Evident că $\mathcal{V}(\ell)$ este considerată în topologia lui $\bar{\mathbb{R}}$, iar $\mathcal{V}(x_0)$ este considerată în topologia lui \mathbb{R}^p .

Definiție 3.3

Mai mult, dacă pe spațiile \mathbb{R}^p și \mathbb{R} definim normele $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^p x_i^2}$ și, respectiv, $|x|$, vom spune că $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) = \ell$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$, astfel încât pentru orice $\bar{x} \in E, \bar{x} \neq \bar{x}_0$ cu $\|\bar{x} - \bar{x}_0\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(\bar{x}) - \ell| < \varepsilon$.

Următoarea teoremă de caracterizare a noțiunii de limită se datorează matematicianului german Heinrich Eduard Heine¹.

Teoremă (caracterizarea noțiunii de limită)

Fie aplicația $f : E \subset X \rightarrow (Y, d_2)$, unde E este o submulțime a spațiului metric (X, d_1) și punctul de acumulare $a \in E'$.

Următoarele afirmații sunt echivalente.

(i) Punctul $l \in Y$ este limita aplicației f în punctul a , adică pentru orice vecinătate V a lui l , în spațiul (Y, d_2) , există o vecinătate U_V a lui a în spațiul (X, d_1) , astfel încât pentru orice $x \in E, x \in U_V, x \neq a$ să rezulte $f(x) \in V$, (definiția cu vecinătăți).

¹ Heinrich Eduard Heine, matematician german, 1821-1881

(ii) Pentru orice bilă deschisă $S_Y(l, \varepsilon), \varepsilon > 0$ există o bilă deschisă $S_X(a, \delta_\varepsilon), \delta_\varepsilon > 0$ aşa încât $f([S_X(a, \delta) - \{a\}] \cap E) \subset S_Y(l, \varepsilon)$, adică pentru orice $x \in S_X(a, \delta)$ cu $x \in E, x \neq a$ să rezulte $f(x) \in S_Y(l, \varepsilon)$, (definiția cu bile).

(iii) Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x \in E, x \neq a$ are loc $d_1(x, a) < \varepsilon \Rightarrow d_2(f(x), l) < \delta$, (definiția cu $\varepsilon - \delta$).

(iv) Pentru orice sir $(x_n)_n$ de puncte din $E - \{a\}$ convergent în X la punctul a , sirul $(f(x_n))_n \subset Y$ este convergent în Y la l . (definiția cu siruri).

Demonstrație. Evident afirmația (ii) este echivalentă cu (iii), întrucât (iii) exprimă prin inegalități tocmai (ii). Vom arăta următoarele implicații:

$$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$$

Să arătăm mai întâi $(i) \Rightarrow (ii)$. Fie $V = S_Y(l, \varepsilon)$, unde $\varepsilon > 0$ este arbitrar. Conform afirmației (i), există o vecinătate U a punctului a aşa încât

$$f([U - \{a\}] \cap E) \subset S_Y(l, \varepsilon). \quad (1)$$

U fiind vecinătate pentru a există o sferă deschisă $S_X(a, \delta)$ aşa ca

$$S_X(a, \delta) \subset U. \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă că

$$f([S_X(a, \delta) - \{a\}] \cap E) \subset S_Y(l, \varepsilon),$$

adică afirmația (ii).

Să demonstrăm implicația $(ii) \Rightarrow (iv)$.

Fie sirul $(x_n)_n \subset E, x_n \neq a$ convergent în spațiul X la punctul a . Va trebui să demonstrăm că sirul $(f(x_n))_n \subset Y$ este convergent la punctul $l \in Y$.

Fie $\varepsilon > 0$, conform afirmației (iii), care este echivalentă cu (ii), există $\delta > 0$ aşa încât pentru orice $x \in E - \{a\}$ are loc

$$d_1(x, a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), l) < \varepsilon. \quad (3)$$

Cum sirul $(x_n)_n \subset E, x_n \neq a$ este convergent în X la punctul a , pentru δ din (3) există $n_\delta \in \mathbb{N}$ aşa ca pentru orice $n \geq n_\delta$ să rezulte $d_2(f(x_n), l) < \varepsilon$.

Conform relației (3) obținem $d_2(f(x_n), l) < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\delta = n_{\delta(\varepsilon)} = n_\varepsilon$.

Prin urmare, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ aşa ca pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ să rezulte $d_2(f(x_n), l) < \varepsilon$, adică sirul $(f(x_n))_n \subset Y$ este convergent la punctul $l \in Y$.

Să demonstrăm acum că $(iv) \Rightarrow (i)$.

Raționăm prin reducere la absurd. Să presupunem că există o vecinătate V a punctului l aşa ca pentru orice vecinătate $U \in \mathcal{V}(a)$ să avem

$$f\left(\left[U - \{a\}\right] \cap E\right) \subset V. \quad (4)$$

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ să luăm drept U sfera deschisă $S\left(a, \frac{1}{n}\right)$. Din (4)

obținem că

$$f\left(\left[S\left(a, \frac{1}{n}\right) - \{a\}\right] \cap E\right) \subset V.$$

Putem construi un sir de elemente $x_n \in S\left(a, \frac{1}{n}\right) \cap E - \{a\}$ cu proprietatea

că

$$f(x_n) \notin V. \quad (5)$$

Pe de altă parte, cum $x_n \in S\left(a, \frac{1}{n}\right) \cap E - \{a\}$ rezultă că

$$d_1(x_n, a) < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

fapt ce arată că sirul $(x_n)_n$ astfel construit este convergent, în spațiul X , la a .

Conform afirmației (iv) rezultă că sirul $(f(x_n))_n$ este convergent în spațiul Y la l , prin urmare $\exists n_V \in \mathbb{N}$ aşa ca pentru orice $n \geq n_V$ să avem $f(x_n) \in V$, fapt ce contrazice (5). În concluzie, presupunerea făcută este falsă și $(iv) \Rightarrow (i)$. \square

Afirmațiile (i)-(iv) fiind logic echivalente, oricare din ele poate fi luată ca definiție a limitei unei aplicații într-un punct.

Exemplu: Vom arăta, utilizând definiția cu $\varepsilon - \delta$, că $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0$, adică vom arăta că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ cu proprietatea $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ să rezulte $\left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right| < \varepsilon$.

Să admitem că $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, atunci din $\left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x| \cdot x^2 + |y| \cdot y^2}{x^2 + y^2} < \delta$.

Prin urmare, dacă $\delta = \varepsilon$, atunci și $\left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right| < \varepsilon$.

Observație

Adeseori vom utiliza definiția cu șiruri a limitei unei aplicații în punct pentru a dovedi că aplicația *nu are limită* în punct. Pentru aceasta este suficient să se arate că există două șiruri $(x_n)_n, (z_n)_n \subset E - \{a\}$, ambele convergente în X la a , pentru care șirurile imaginilor $(f(x_n))_n, (f(z_n))_n$ să aibă limite diferite în Y .

Exemplu: Vom arăta că funcția $f: \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x, y) = \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} \text{ nu are limită în origine.}$$

Considerând șirul de puncte $(x_n, \lambda \cdot x_n)_n, \lambda \in \mathbb{R}^*$, cu proprietatea că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, avem

$$f(x_n, \lambda \cdot x_n) = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}, \forall n \in \mathbb{N},$$

adică limita șirului $(f(x_n, \lambda \cdot x_n))_n$ depinde de parametrul λ . Prin urmare, funcția f nu are limită în origine.

Propoziție. Fie spațiile metrice (X, d_1) și (Y, d_2) , $E \subset X$, $f: E \rightarrow Y$ și punctul de acumulare $a \in E'$. Dacă aplicația f are limită în punctul a , atunci această limită este unică.

Demonstrație. Afirmația rezultă imediat din definiția cu șiruri a limitei unei aplicații într-un punct, ținând seama totodată că limita unui șir de puncte într-un spațiu metric este unică.

Teoremă (Cauchy)²

Fie (X, d_1) și (Y, d_2) două spații metrice din care (Y, d_2) este complet, aplicația $f: E \subset X \rightarrow Y$ și punctul de acumulare $a \in E'$. Atunci f are limită în punctul a dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ așa încât pentru orice $x', x'' \in S_X(a, \delta) \cap E - \{a\}$ rezultă $d_2(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$, adică pentru orice $x', x'' \in E$ cu $x' \neq a, x'' \neq a$ are loc

$$\begin{cases} d_1(x', a) < \delta \\ d_1(x'', a) < \delta \end{cases} \Rightarrow d_2(f(x'), f(x'')) < \varepsilon \quad (6)$$

Demonstrație

Să presupunem că există $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ așa încât

² Augustin Louis Cauchy, matematician francez, 1789-1857

$$\forall x \in S_X(a, \delta) \cap E - \{a\} \Rightarrow f(x) \in S_Y\left(l, \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad (7)$$

Fie două puncte arbitrară $x', x'' \in S_X(a, \delta) \cap E - \{a\}$. Din (7) obținem

$$d_2(f(x'), l) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad d_2(f(x''), l) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De aici, utilizând inegalitatea triunghiului, avem

$$d_2(f(x'), f(x'')) < d_2(f(x'), l) + d_2(l, f(x'')) < \varepsilon.$$

Reciproc, să presupunem că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ și să arătăm existența limitei aplicației f în punctul a .

Vom utiliza definiția cu siruri a limitei în punct pentru aplicația f .

Fie sirul $(x_n)_n \subset E$, $x_n \neq a$ convergent în X la a . Vom arăta că sirul $(f(x_n))_n$ este convergent în Y .

Cum sirul $(x_n)_n$ este convergent în X la a , pentru $\delta(\varepsilon)$ ce apare în relația (6) există $n_{\delta(\varepsilon)} \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\forall n \geq n_{\delta(\varepsilon)} \Rightarrow d_1(x_n, a) < \delta(\varepsilon)$$

Dacă $n, m \geq n_{\delta}$, interpretând pe x_n, x_m ca fiind x', x'' în relația (6), avem

$$\begin{cases} d_1(x_n, a) < \delta(\varepsilon) \\ d_1(x_m, a) < \delta(\varepsilon) \end{cases} \Rightarrow d_2(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon.$$

Întrucât pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_{\varepsilon} = n_{\delta(\varepsilon)} \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru orice $m, n \geq n_{\varepsilon}$ să rezulte $d_2(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$, deducem că sirul $(f(x_n))_n$ este un sir fundamental în spațiul Y . Spațiul Y fiind complet rezultă că există un element $l \in Y$ astfel ca $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$.

Pentru a încheia demonstrația mai rămâne să arătăm că pentru orice sir $(x_n)_n \subset E$, $x_n \neq a$ convergent în X la a , sirul imaginilor $(f(x_n))_n$ are aceeași limită.

În adevăr, să considerăm două siruri $(x_n)_n, (z_n)_n \subset E$, $x_n \neq a$, $z_n \neq a$ convergente în X la a . Conform celor de mai sus sirurile imaginilor sunt convergente în Y , dar să presupunem prin absurd că limitele sunt diferite, adică

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l_1 \neq l_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n).$$

Să formăm sirul $x_1, z_1, x_2, z_2, \dots, x_n, z_n, \dots$. Evident acest sir converge în X la a . Aplicând din nou cele demonstrează mai sus, rezultă că există $l \in Y$ astfel ca sirul $f(x_1), f(z_1), f(x_2), f(z_2), \dots, f(x_n), f(z_n), \dots$ (8)

este convergent la l . Întrucât şirurile $(f(x_n))_n, (f(z_n))_n$ sunt subşiruri ale şirului (8), rezultă că $l_1 = l = l_2$, contradicţie. Astfel am arătat că pentru orice şir $(x_n)_n \subset E$, $x_n \neq a$ convergent în X la a , şirul imaginilor $(f(x_n))_n$ are aceeaşi limită.

Observaţie. Teorema lui **Cauchy** spune că o aplicaţie f are limită în punctul de acumulare a dacă şi numai dacă pentru oricare perechi de puncte x', x'' din ce în ce mai apropiate de punctul a , distanţa dintre valorile aplicaţiei în aceste puncte este din ce în ce mai mică.

Teorema lui **Cauchy** este importantă, deoarece permite demonstrarea existenţei limitei unei aplicaţii într-un punct fără a cunoaşte efectiv limita, ceea ce în multe probleme, în special cu caracter teoretic, este deosebit de util.

Pe de altă parte, teorema lui **Cauchy** nu permite stabilirea efectivă a valorii limitei, ci numai existenţa acestora.

Exemplu: Folosind teorema lui **Cauchy**, vom arăta că aplicaţia $f: \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2}$ are limită în origine, adică vom arăta că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice perechi de puncte $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ cu proprietatea $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} < \delta, \sqrt{y_1^2 + y_2^2} < \delta$ şi $(x_1, x_2) \neq (0, 0), (y_1, y_2) \neq (0, 0)$ să rezulte

$$|f(x_1, x_2) - f(y_1, y_2)| = \left| \frac{x_1^2 \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{y_1^2 \cdot y_2}{y_1^2 + y_2^2} \right| < \varepsilon.$$

Din

$$\left| \frac{x_1^2 \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{y_1^2 \cdot y_2}{y_1^2 + y_2^2} \right| \leq \frac{x_1^2 \cdot |x_2|}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{y_1^2 \cdot |y_2|}{y_1^2 + y_2^2} \leq \frac{|x_1|}{2} + \frac{|y_1|}{2} < \delta.$$

Prin urmare, dacă $\delta = \varepsilon$, atunci și $|f(x_1, x_2) - f(y_1, y_2)| < \varepsilon$.

Teoremă. Fie $f: E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, $p, q \geq 1$ și punctul de acumulare $a \in E'$. Aplicaţia f are limită în punctul $a \in E'$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ aşa încât pentru orice $x', x'' \in E - \{a\}$ sunt loc

$$\begin{cases} \|x' - a\|_p < \delta \\ \|x'' - a\|_p < \delta \end{cases} \Rightarrow \|f(x') - f(x'')\|_q < \varepsilon \quad (9)$$

Demonstraţie. Rezultatul se obține imediat din teorema lui **Cauchy** dacă se ține seama că în acest caz distanţa dintre două puncte din \mathbb{R}^k , $k \geq 1$, este dată de

$$d_{\mathbb{R}^k}(x, y) = \|x - y\|_k, k \geq 1.$$

În continuare vom pune în evidență un rezultat important, cunoscut și sub numele de *principiul substituției*, care permite calculul limitelor unor aplicații compuse.

Teoremă (principiul substituției). Fie spațiile metrice (X, d_1) , (Y, d_2) și (Z, d_3) și aplicațiile $f : B \subset Y \rightarrow Z$, $g : A \subset X \rightarrow B - \{b\}$. Dacă există limitele $\lim_{y \rightarrow b} f(y) = l$ și $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$, unde $a \in A'$, $b \in B'$, atunci există limita $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = l$.

Demonstrație. Cum $\lim_{y \rightarrow b} f(y) = l$ rezultă că pentru orice vecinătate $W \in \mathcal{V}(l)$ există vecinătatea $U \in \mathcal{V}(b)$ așa încât pentru orice

$$y \in U \cap B - \{b\} \Rightarrow f(y) \in W.$$

Pe de altă parte, întrucât $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ și g ia valori în mulțimea $B - \{b\}$, avem că există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(a)$ așa ca pentru orice

$$x \in V \cap A - \{a\} \Rightarrow g(x) \in U \cap B - \{b\},$$

de unde pentru orice vecinătate $W \in \mathcal{V}(l)$ există vecinătatea $V \in \mathcal{V}(a)$ așa ca pentru orice

$$x \in V \cap A - \{a\} \Rightarrow f(g(x)) \in W,$$

adică tocmai $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = l$.

Exemplu: Vom arăta că funcția

$$h : (\mathbb{R}^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2) \cdot \ln(x_1^2 + x_2^2)$$

are limita nulă în origine. Se constată cu ușurință că $h(x_1, x_2) = (f \circ \rho)(x_1, x_2)$, unde $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \cdot \ln x^2$ și $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\rho(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Deoarece $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \ln x^2 = 0$, iar $\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)} \rho(x_1, x_2) = 0$

deducem prin principiul substituției că

$$\exists \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)} h(x_1, x_2) = \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)} (f \circ \rho)(x_1, x_2) = 0.$$

Observație. Condiția ca funcția g să ia valori în mulțimea $B - \{b\}$ este esențială, după cum se poate vedea din următorul exemplu

Exemplu

Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \quad g(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Este clar că $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = 0 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, adică concluzia teoremei anterioare nu mai este adevărată.

Teoremă (criteriul sandwich). Fie spațiile metrice $(X, d_1), (Y, d_2), (T, d_3)$, funcțiile $f : E \subset X \rightarrow Y, h : E \rightarrow T$, și punctul de acumulare $a \in E'$. Dacă există

- numărul real $\ell \in \mathbb{R}$ și vecinătatea $V \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice

$$x \in V \cap E - \{a\} \Rightarrow d_2(f(x), \ell) \leq d_3(h(x), \ell_1),$$

- $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell_1$,

atunci există $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

Demonstrație. Folosind definiția cu $\varepsilon - \delta$ a limitei unei aplicații în punctul de acumulare $a \in E'$, din a doua ipoteză a teoremei putem scrie că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel că pentru orice

$$x \in E - \{a\} \text{ cu } d_1(x, a) < \delta \Rightarrow d_3(h(x), \ell_1) < \varepsilon.$$

Din prima ipoteză a teoremei deducem imediat că pentru orice

$$x \in E - \{a\} \text{ cu } d_1(x, a) < \delta \Rightarrow 0 \leq d_2(f(x), \ell) \leq d_3(h(x), \ell_1) < \varepsilon,$$

adică pentru orice

$$x \in E - \{a\} \text{ cu } d_1(x, a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), \ell) < \varepsilon,$$

echivalent cu concluzia teoremei $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

Exemplu: Folosind criteriul *sandwich* vom demonstra că

$$\exists \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sqrt{x_1^2 \cdot |x_2| + 1} - 1}{x_1^2 + x_2^2} = 0.$$

În exemplul anterior am demonstrat că $\exists \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{x_1^2 \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2}$. Mai mult, se

poate constata că pentru orice $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$

$$\left| \frac{x_1^2 \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right| \leq \frac{1}{2} \cdot |x_1|.$$

Deoarece $\exists \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)} |x_1| = 0$ rezultă că $\exists \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{x_1^2 \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2} = 0$.

Revenind la problema inițială, constatăm că

$$\left| \frac{\sqrt{x_1^2 \cdot |x_2| + 1} - 1}{x_1^2 + x_2^2} \right| = \frac{x_1^2 \cdot |x_2|}{x_1^2 + x_2^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_1^2 \cdot |x_2| + 1} + 1} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{x_1^2 \cdot |x_2|}{x_1^2 + x_2^2}$$

și prin criteriul sandwich deducem că $\exists \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x_1^2 \cdot |x_2| + 1} - 1}{x_1^2 + x_2^2} = 0$.

Criteriul *sandwich* se poate reformula sub forma criteriului următor.

Propoziție (*criteriu de existență a limitei*). Fie spațiile metrice (X, d_1) , (Y, d_2) , aplicațiile $f : E \subset X \rightarrow F \subset Y$, $h : E \rightarrow \mathbb{R}$, și punctul de acumulare $a \in E'$. Dacă există:

- numărul real $\ell \in \mathbb{R}$ și vecinătatea $V \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x \in V \cap E - \{a\} \Rightarrow d_2(f(x), \ell) \leq |h(x)|$,
- $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0$,

atunci există $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

3.2 Funcții reale de argument vectorial

Un caz important al teoriei prezentate în secțiunea anterioară îl reprezintă cazul funcțiilor reale. Este de așteptat ca în acest caz să apară o serie de proprietăți noi care nu au sens în cadrul general.

Fie funcția $F : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, $p, q \geq 1$. Se observă că F este echivalentă cu un sistem de q funcții $f_i : E \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, q$.

În adevăr, dacă $x \in E$, atunci $y = F(x) \in \mathbb{R}^q$, adică $y = (y_1, \dots, y_q)$. Dacă pentru orice $i = 1, \dots, q$ atașăm fiecărui $x \in E$ coordonata de rang i a elementului $y = F(x)$, atunci $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_q(x))$ pentru orice $x \in E$, unde funcțiile $f_i : E \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, q$, sunt *funcții reale*.

Reciproc, dacă avem un sistem de q funcții reale $f_i : E \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, q$, putem defini funcția $F : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, $p, q \geq 1$ așa încât $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_q(x))$ pentru orice $x \in E$. Funcțiile de tip $F : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, $p, q \geq 1$ vor fi numite *funcții vectoriale*.

Teoremă. Fie $F : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, $p, q \geq 1$, adică

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_q(x))$$

pentru orice $x \in E$, unde $f_i : E \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, q$, și punctul de acumulare $a \in E'$.

Funcția F are limita $\underline{l} = (l_1, \dots, l_q)$ în punctul a dacă și numai dacă există simultan $\lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = l_i$, $i = 1, \dots, q$.

Demonstrație. Rezultatul se obține imediat din definiția limitei cu siruri a unei funcții și din faptul că în \mathbb{R}^p , $p \geq 1$, convergența unui sir de elemente este echivalentă cu convergența pe coordonate sau folosind dubla inegalitate:

$$\sum_{i=1}^p d(f_i(x), \ell_i) \leq d_{\mathbb{R}^q}(F(x), \underline{\ell}) \leq d(f_i(x), \ell_i), \quad i = 1 : p, \quad x \in E.$$

Observație. Din această teoremă rezultă că studiul limitei unei funcții vectoriale (ce acționează de la un spațiu \mathbb{R}^p la un spațiu \mathbb{R}^q) poate fi redus la studiul unui sistem de q funcții reale, adică de tipul $f_i : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, q$.

Teoremă. Fie funcțiile $f, g : E \subset X \rightarrow \mathbb{R}$, unde (X, d) este spațiu metric, și punctul de acumulare $a \in E'$. Dacă există următoarele limite

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l_2 \in \mathbb{R},$$

atunci

- există $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$,
- există $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$,
- dacă în plus $l_2 \neq 0$ și $g(x) \neq 0$, $\forall x \in V \in \mathcal{V}(a)$,

$$\text{există } \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

Demonstrație. Vom aplica definiția cu siruri a limitei unei funcții în punct.

Fie sirul $(x_n)_n \subset E - \{a\}$ convergent în X la a . Conform ipotezei

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l_2 \in \mathbb{R}.$$

Tinând seama de proprietățile cunoscute de la siruri, rezultă

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (f + g)(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = l_1 + l_2$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (f \cdot g)(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) \lim_{n \rightarrow \infty} (f + g)(x_n) = l_1 \cdot l_2$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f}{g} \right)(x_n) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n)} = \frac{l_1}{l_2}$,

ceea ce asigură îndeplinirea proprietăților din enunțul teoremei.

Teoremă (*proprietatea locală a semnului*). Fie funcția $f : E \subset X \rightarrow \mathbb{R}$, unde (X, d) este spațiu metric, și punctul de acumulare $a \in E'$. Dacă există

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \neq 0,$$

atunci există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât funcția f să ia valori de același semn cu numărul l pentru toate punctele $x \in U \cap E - \{a\}$.

Demonstrație. Pentru fixarea ideilor să presupunem că $l > 0$. Folosind definiția cu $\varepsilon - \delta$ a limitei funcției f în punctul de acumulare a și luând $\varepsilon = \frac{l}{2}$, rezultă că există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel ca pentru orice

$$x \in E - \{a\} \text{ cu } d(x, a) < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

De aici obținem că pentru orice

$$x \in E - \{a\} \text{ cu } d(x, a) < \delta \Rightarrow 0 < \frac{l}{2} < f(x) < \frac{3 \cdot l}{2},$$

de unde rezultă imediat că pentru orice

$$x \in E - \{a\} \text{ cu } d(x, a) < \delta \Rightarrow f(x) > 0.$$

Teoremă (*proprietatea locală de mărginire*). Fie funcția $f : E \subset X \rightarrow \mathbb{R}$, unde (X, d) este spațiu metric, și punctul de acumulare $a \in E'$. Dacă există

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R},$$

atunci există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(a)$ și numărul $M > 0$ astfel încât pentru orice

$$x \in U \cap E \Rightarrow |f(x)| \leq M.$$

Demonstrație. Din ipoteză cunoaștem că există $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}$, ceea ce arată că pentru $\varepsilon = 1$ există vecinătatea $U \in \mathcal{V}(a)$ așa că pentru orice

$$x \in U \cap E - \{a\} \Rightarrow |f(x) - l| < 1.$$

De aici obținem că pentru orice

$$x \in U \cap E - \{a\} \Rightarrow |f(x)| \leq |f(x) - l| + |l| < 1 + |l|.$$

Dacă, eventual $a \in E$, atunci luând $M = \max\{f(a), 1 + |l|\}$, rezultă

$$x \in U \cap E - \{a\} \Rightarrow |f(x)| \leq M.$$

Definiție. Fie funcția reală $f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow F \subset \mathbb{R}$, $p \geq 1$, și punctul de acumulare $a = (a_1, \dots, a_p) \in E'$. Funcțiile reale de variabilă reală

$$f_k : x_k \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, \underline{x}_k, \dots, x_p), \quad k = \overline{1, p},$$

unde variabilele nesUBLINiate sunt considerate constante, se numesc *funcțiile parțiale* ale lui f . Considerăm limitele acestor funcții de o singură variabilă reală

$$\lim_{x_k \rightarrow a_k} f_k(x_k) = \lim_{x_k \rightarrow a_k} f(x_1, x_2, \dots, \underline{x}_k, \dots, x_p), \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

care depind de $(p - 1)$ variabile $x_j, j \neq k, j = \overline{1, p}$.

Numim *limită iterată* a funcției $f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow F \subset \mathbb{R}$ în raport cu toate variabilele, numărul real

$$\ell_\sigma = \lim_{x_{\sigma(1)} \rightarrow a_{\sigma(1)}} \lim_{x_{\sigma(2)} \rightarrow a_{\sigma(2)}} \dots \lim_{x_{\sigma(p)} \rightarrow a_{\sigma(p)}} f(x_1, x_2, \dots, x_p)$$

care nu depinde de niciuna din variabile, unde $\sigma \in S(p)$ este o permutare a mulțimii $\{1, 2, \dots, p\}$.

Observație

Despre limita funcției f în punctul $a \in E'$ se spune că se obține făcând variabilele $x_j, j = \overline{1, p}$, să tindă independent, dar simultan către $a_j, j = \overline{1, p}$; iar despre limită iterată se spune că se obține făcând variabilele $x_j, j = \overline{1, p}$, să tindă succesiv către $a_j, j = \overline{1, p}$.

Exemplu

Pentru funcția $f : \mathbb{R}^2 - \{xy - x + 2y \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{xy + 2x + 2y}{xy - x + 2y}$ are

loc

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 1 \text{ și } \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = -2.$$

În exemplul următor constatăm că funcția f poate avea limită într-un punct de acumulare chiar dacă limitele iterate în acest punct nu există.

Exemplu: Fie funcția $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin relația

$$f(x, y) = (x + y) \cdot \left(\sin \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{y} \right).$$

Funcția f are limită în origine fără ca să aibă limite iterate în origine.

Într-adevăr din inegalitatea

$$|f(x, y)| \leq 2 \cdot (|x| + |y|), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$$

deducem că $\exists \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$. Pe de altă parte, cum $\not\exists \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ deducem că

$$\not\exists \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} (x + y) \cdot \left(\sin \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{y} \right).$$

Schimbând rolul variabilelor, putem afirma că nu există nici cealaltă limită iterată. Totuși există o legătură între aceste două noțiuni, astfel legătura dintre limitele iterate și limita funcției în $a \in \mathbb{R}^n$ este dată de

Teoremă. Dacă $f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow F \subset \mathbb{R}$, $p \geq 1$ are limita ℓ_1 în punctul de acumulare $a \in E'$ și dacă ea admite o limită iterată ℓ_2 în acest punct, atunci aceste limite sunt egale $\ell_1 = \ell_2$.

Demonstrație. Să admitem că există $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell_1$ și limita iterată

$$\lim_{x_n \rightarrow a_n} \lim_{x_{n-1} \rightarrow a_{n-1}} \dots \lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x) = \ell_2.$$

Din prima limită deducem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice $x \neq a$ cu $\|x - a\|_p < \delta(\varepsilon)$ rezultă $|f(x) - \ell_1| < \varepsilon$.

În relația precedentă fixăm pe x_2, \dots, x_p astfel ca să avem $\|x - a\| < \delta(\varepsilon)$ și trecem la limită în inegalitate după x_1 ; în rezultatul obținut fixăm pe x_3, \dots, x_p și trecem la limită după x_2 s.a.m.d.

Cum limita iterată există se obține $|\ell_2 - \ell_1| \leq \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \ell_1 = \ell_2$.

Exemplu: Teorema anterioară afirmă egalitatea celor două limite în ipoteza că ele există. Este posibil însă ca una din limitele iterate să nu existe, deși limita funcției în punct să existe, ca în exemplul de mai jos.

Fie funcția $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin relația

$$f(x, y) = x \cdot \sin \frac{1}{y}.$$

Funcția f are limită în origine și una din limitele iterate există însă cealaltă nu există. Într-adevăr din inegalitatea

$$|f(x, y)| \leq |x|, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$$

deducem că $\exists \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$ și $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{y} = 0$.

Pe de altă parte, cum $\not\exists \lim_{y \rightarrow 0} \sin \frac{1}{y}$ deducem că

$$\not\exists \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{y}.$$

Consecință. Dacă funcția reală $f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ are în punctul de acumulare $a \in E'$ două limite iterate **inegale**, atunci f nu poate avea limită în acest punct.

3.3 Aplicații continue

Fie (X, d_1) și (Y, d_2) două spații metrice, τ_X topologia metrică pe spațiul X și τ_Y topologia metrică pe spațiul Y .

Definiție. Spunem că aplicația $f : E \subset X \rightarrow Y$ este *continuă în punctul $a \in E$* dacă și numai dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(f(a))$ există vecinătatea $U \in \mathcal{V}(a)$, astfel încât pentru orice $x \in U \cap E$ să rezulte $f(x) \in V$ sau echivalent $f(U \cap E) \subset V$.

Dacă aplicația f nu este continuă în punctul a , atunci spunem că f este *discontinuă în punctul a* sau că punctul a este *punct de discontinuitate* pentru f .

Observație. Dacă admitem că noțiunea matematică de vecinătate traduce ideea intuitivă de *apropiere*, atunci definiția precedentă a continuității în punct ne spune că valorile $f(x)$ ale aplicației f sunt oricără de aproape de $f(a)$ de îndată ce x este suficient de aproape de a .

Noțiunea de continuitate nu are sens decât în punctele mulțimii de definiție a aplicației f .

Astfel, dacă am considera funcția $f(x) = \ln|x|$, $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, atunci nu putem vorbi de continuitatea lui f în punctul $a = 0$, deoarece acest punct nu este punct al mulțimii de definiție.

Observăm că noțiunea de continuitate în punct are *caracter local*, depinzând numai de valorile dintr-o vecinătate a punctului. O funcție poate fi astfel continuă într-un punct $a \in E$, dar să nu fie continuă într-un alt punct *apropiat* de a . Totodată dacă f este continuă în punctul a și funcția g este o altă funcție ce coincide într-o vecinătate a punctului a cu funcția f , atunci g este continuă în punctul a .

Remarcăm că dacă $a \in E$ este un punct izolat, atunci f este continuă în a . În adevăr, a fiind punct izolat există o vecinătate U a sa, așa încât $U \cap E = \{a\}$ și atunci pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(f(a))$ are loc

$$f(U \cap E) = f(\{a\}) \subset V,$$

ceea ce antrenează continuitatea funcției f în punctul a .

Din definiție rezultă imediat

Teoremă. Fie funcția $f : E \subset X \rightarrow Y$, și punctul de acumulare $a \in E'$. Funcția f este continuă în punctul a dacă și numai dacă există $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ și este egală cu $f(a)$.

Demonstrație. Să presupunem că funcția f este continuă în punctul a . Atunci pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(f(a))$ există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(a)$ așa ca $f(U \cap E) \subset V$, de unde cu atât mai mult are loc

$$f(U \cap E - \{a\}) \subset V,$$

ceea ce înseamnă că există $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Reciproc, dacă $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, atunci pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(f(a))$ există vecinătatea $U \in \mathcal{V}(a)$ aşa că

$$f(U \cap E - \{a\}) \subset V.$$

Cum și pentru $x = a \in E$ are loc $f(a) \in V$ rezultă că $f(U \cap E) \subset V$, adică funcția f este continuă în punctul a .

Înând seama de observația de mai sus și teorema precedentă, rezultă

Teoremă. Fie funcția $f : E \subset X \rightarrow Y$ și punctul $a \in E$. Funcția f este continuă în punctul a dacă și numai dacă are loc una din următoarele situații:

- punctul $a \in E$ este punct de acumulare și există $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$,
- punctul $a \in E$ este punct izolat.

Observație. Dacă $a \in E \cap E'$, iar funcția f este continuă în punctul a , definiția continuității lui f în punctul a se mai scrie

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} x\right),$$

adică operația de trecere la limită este permutabilă cu funcția f .

Înând seama de teorema anterioară și de teorema de caracterizare a limitei unei funcții într-un punct (**Heine**), rezultă

Teoremă (de caracterizare a continuității în punct)

Fie (X, d_1) și (Y, d_2) două spații metrice, funcția $f : E \subset X \rightarrow Y$ și punctul $a \in E$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) funcția f este continuă în punctul a (definiția cu vecinătăți);
- (ii) pentru orice bilă deschisă $S_Y(f(a), \varepsilon)$, există o sferă $S_X(a, \delta)$ aşa încât

$$f(S_X(a, \delta) \cap E) \subset S_Y(f(a), \varepsilon) \text{ (definiția cu bile);}$$

- (iii) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ aşa că pentru orice $x \in E$ cu

$$d_1(x, a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon \text{ (definiția cu } \varepsilon - \delta\text{);}$$

- (iv) pentru orice sir $(x_n)_n \subset E$ convergent în X la a rezultă că sirul $(f(x_n))_n$ este convergent în Y la $f(a)$. (definiția cu siruri).

Definiție. Fie funcția $f : E \subset X \rightarrow Y$. Spunem că funcția f este *continuă pe mulțimea E* dacă f este continuă în orice punct $x \in E$.

Exemplu: Funcțiile $pr_i : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, $p \geq 1, i = 1, \dots, p$, definite prin

$$pr_i(x) = x_i, \quad i = 1, \dots, p, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$$

și numite *aplicații de proiecție*, sunt continue pe \mathbb{R}^p .

În adevăr, fie punctul $a = (a_1, a_2, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ și să considerăm sirul $(x^{(k)})_k \subset \mathbb{R}^p$ convergent în \mathbb{R}^p la punctul a . Însă convergența unui sir în \mathbb{R}^p este echivalentă cu convergența componentelor sale în \mathbb{R} , adică toate sirurile $(x_i^{(k)})_k \subset \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, p$, sunt convergente în \mathbb{R} la a_i . Prin urmare, există

$$\lim_{k \rightarrow \infty} pr_i(x^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = a_i = pr_i(a) = pr_i\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}\right),$$

ceea ce arată că funcția pr_i este continuă în punctul a pentru orice $i = 1, \dots, p$.

Teoremă. Fie spațiile \mathbb{R}^p și \mathbb{R}^q ($p, q \geq 1$) înzestrare cu metricile euclidiene corespunzătoare și aplicația $F : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, $F = (f_1, f_2, \dots, f_q)$. Aplicația F este continuă în punctul $a \in E$ dacă și numai dacă toate funcțiile componente $f_i : E \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, q$, sunt continue în punctul a .

Demonstrație. Aplicația F este continuă în punctul a dacă și numai dacă pentru orice sir $(x^{(k)})_k \subset \mathbb{R}^p$ convergent în \mathbb{R}^p la punctul a , sirul $(F(x^{(k)}))_k \subset \mathbb{R}^q$ este convergent în \mathbb{R}^q la $F(a)$. Dar sirul $(F(x^{(k)}))_k \subset \mathbb{R}^q$ este convergent în \mathbb{R}^q la $F(a)$ dacă și numai dacă toate componente sale $(f_i(x^{(k)}))_k$, $i = 1, \dots, q$, sunt convergente în \mathbb{R} la $f_i(a)$.

Prin urmare, condiția de continuitate a lui F în punctul a este echivalentă cu faptul că pentru orice sir $(x^{(k)})_k \subset \mathbb{R}^p$ convergent în \mathbb{R}^p la punctul a , sirurile $(f_i(x^{(k)}))_k$, $i = 1, \dots, q$, sunt convergente în \mathbb{R} la $f_i(a)$, adică este echivalentă cu condiția de continuitate a funcțiilor componente f_i , $i = 1, \dots, q$, în punctul a .

Propoziție. Fie $(X, d_1), (Y, d_2), (Z, d_3)$ trei spații metrice, mulțimile $E \subset X, F \subset Y$, aplicațiile $f : F \rightarrow G, g : E \rightarrow F$ și punctele $a \in E, b = g(a) \in F$. Dacă funcția g este continuă în $a \in E$, iar f este continuă în $b = g(a)$, atunci funcția compusă $f \circ g : E \rightarrow G$ este continuă în a .

Demonstrație. Se aplică principiul *substituției* de la limita unei funcții compuse într-un punct, combinat cu teorema de caracterizare a continuității.

Propoziție. Fie (X, d_1) un spațiu metric, $(Y, \|\cdot\|)$ un K -spațiu normat, mulțimea $E \subset X$, aplicațiile $f, g : E \rightarrow Y$, punctul $a \in E$ și constantele

$\alpha, \beta \in K$. Dacă aplicațiile f și g sunt continue în punctul $a \in E$, atunci aplicația $\alpha \cdot f + \beta \cdot g : E \rightarrow Y$ este continuă în punctul $a \in E$.

Propoziție. Fie (X, d_1) un spațiu metric, mulțimea $E \subset X$, aplicația complexă $f = f_1 + i \cdot f_2 : E \rightarrow \mathbb{C}$ și punctul $a \in E$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) funcția complexă f este continuă în punctul $a \in E$,
- (ii) funcțiile reale $f_1, f_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$ sunt continue în punctul $a \in E$.

Definiție. Fie $(\mathbb{R}^p, d_1), (Y, d_2)$, $p \geq 1$ două spații metrice, $E \subset \mathbb{R}^p$, $a \in E$ și aplicația $f : E \rightarrow Y$. Asociem punctului $a \in E$ mulțimile

$$E_k(a) = \left\{ x_k \in \mathbb{R} \mid (a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_p) \in E \right\}, \quad k = 1, \dots, p.$$

Aplicațiile $f^k : E_k(a) \rightarrow Y$, $k = 1, \dots, p$, $f^k(x_k) = f(a_1, a_2, \dots, x_k, \dots, a_p)$ se numesc *aplicațiile parțiale* ale aplicației f în punctul $a \in E$.

Aplicația f se numește *continuă parțial în raport cu variabila x_k* în punctul $a \in E$ dacă și numai dacă aplicația parțială $f^k : E_k(a) \rightarrow Y$ este continuă în punctul $a \in E$.

Altfel spus, aplicația f este *continuă parțial în raport cu variabila x_k* în punctul $a \in E$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x_k \in E_k(a)$ cu $|x_k - a_k| < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_2(f^k(x_k), f^k(a_k)) < \varepsilon$.

Dacă f este continuă în $a \in E$, vom spune că ea *continuă în raport cu ansamblul variabilelor*.

Propoziție. Fie $(\mathbb{R}^p, d_1), (Y, d_2)$, $p \geq 1$ două spații metrice și aplicația $f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow Y$. Dacă aplicația f este continuă în punctul $a \in E$ în raport cu ansamblul variabilelor, atunci ea este continuă în $a \in E$ în raport cu fiecare variabilă.

Demonstrație

Deoarece f este continuă în $a \in E$, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x \in E$ cu $d_1(x, a) < \delta_\varepsilon$ rezultă $d_2(f(x) - f(a)) < \varepsilon$.

În inegalitatea anterioară aleg constante $x_j = a_j$, $j = \overline{1, n}$, $j \neq k$, și cunoscând că $|x_k - a_k| < d_1(x, a) < \delta_\varepsilon$, $k = 1, \dots, p$, se obține

$$d_2(f(x) - f(a)) = d_2(f^k(x_k), f^k(a_k)) < \varepsilon, \quad k = 1 : p,$$

adică continuitatea parțială a aplicației f în raport cu variabila x_k în punctul $a \in E$, pentru orice $k = 1, \dots, p$.

Observație. Reciproca nu este adevărată după cum se poate vedea din următorul exemplu.

Exemplu: Fie funcția reală $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 1, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Cum $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) = 1 \neq -1 = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y)$, f nu are limită în origine.

Prin urmare, funcția f nu este continuă în origine, deși funcția parțială $f^1(x) = f(x,0) = 1$, $x \in \mathbb{R}$, fiind funcție constantă, este continuă în origine.

Constatăm că funcția parțială $f^2(y) = f(0,y) = \begin{cases} -1, & y \neq 0 \\ 1, & y = 0 \end{cases}$ este discontinuă în punctul $y = 0$. Acest exemplu ar putea crea impresia greșită că dacă funcția f este discontinuă într-un punct, atunci există cel puțin o funcție parțială în acel punct care să fie discontinuă. Pentru a corecta această impresie dăm următorul exemplu.

Exemplu: Fie funcția reală $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow F \subset \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \cdot y}{x^4 + y^4}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Constatăm că funcția f este discontinuă în origine, deoarece

$$|f(x,y)| = \frac{|x \cdot y|}{x^4 + y^4} \geq \frac{|x \cdot y|}{(x^2 + y^2)^2}$$

și există un sir de puncte $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$, $y_n = \lambda \cdot x_n$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ astfel ca

$$|f(x_n, y_n)| = \frac{|x_n \cdot y_n|}{x_n^4 + y_n^4} \geq \frac{|\lambda|}{x_n^2 \cdot (1 + \lambda^2)^2}$$

de unde $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n, y_n)| = \infty$, adică f este nemărginită în origine. Pe de altă parte, funcțiile parțiale $f^1(x) = f(x,0) = 0 = f(0,y) = f^2(y)$ fiind constante sunt continue pe \mathbb{R} .

Definiție. Fie $(X, d_1), (Y, d_2)$ două spații metrice, $E \subset X$, $a \in E' - E$ și aplicația $f : E \rightarrow Y$. Dacă există $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, atunci aplicația $g : E \cup \{a\} \rightarrow Y$ definită prin

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E \\ l, & x = a \end{cases}$$

se numește *prelungirea prin continuitate* a aplicației f la multimea $E \cup \{a\}$.

Definiție. Fie $(X, d_1), (Y, d_2)$ două spații metrice, $E \subset X$ și aplicația $f : E \rightarrow Y$. Dacă există $E_1, E_2, \dots, E_n \in \tau_X$ astfel încât $\overline{E} = \overline{E_1} \cup \overline{E_2} \cup \dots \cup \overline{E_n}$, cu $E_i \cap E_j, i \neq j$, și există aplicațiile $f_1, f_2, \dots, f_n : X \rightarrow Y$ continue, atunci aplicația $f : E \rightarrow Y$ definită prin

$$f(x) = f_k(x), \quad \forall x \in E_k, k = 1, \dots, n,$$

se numește *aplicație continuă pe porțiuni*.

Definiție. Fie $(X, d_1), (Y, d_2)$ două spații metrice, $E \subset X$ și aplicația $f : E \rightarrow Y$. Aplicația f se numește *uniform continuă* pe mulțimea E dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$, astfel încât pentru orice $x', x'' \in E, x' \neq x''$ cu $d_1(x', x'') < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_2(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$.

În cazul particular al funcțiilor reale $f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow F \subset \mathbb{R}$ spunem că funcția f este *uniform continuă* pe mulțimea E dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x', x'' \in E, x' \neq x''$ cu $\|x' - x''\|_p < \delta_\varepsilon$ să rezulte $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Spunem că aplicația f nu este *uniform continuă pe mulțimea E* , dacă există $\varepsilon_0 > 0$ cu proprietatea că pentru orice $\delta > 0$ există cel puțin două puncte $x', x'' \in E, x' \neq x''$ cu $d_1(x', x'') < \delta$ astfel ca $d_2(f(x'), f(x'')) > \varepsilon_0$.

Exemplu: Fie funcția reală $f : (-1, 1) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x, y) = x \cdot \operatorname{arctg} y.$$

Vom arăta, folosind definiția, că funcția f este uniform continuă pe mulțimea de definiție, adică pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta_\varepsilon > 0$, astfel încât pentru orice perechi de puncte $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in (-1, 1) \times \mathbb{R}$ cu proprietatea $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta$ și $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ să rezulte

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| = |x_1 \cdot \operatorname{arctg} y_1 - x_2 \cdot \operatorname{arctg} y_2| < \varepsilon.$$

Studiind membrul stâng, avem următorul sir de inegalități

$$\begin{aligned} |x_1 \cdot \operatorname{arctg} y_1 - x_2 \cdot \operatorname{arctg} y_2| &\leq |x_1 \cdot \operatorname{arctg} y_1 - x_2 \cdot \operatorname{arctg} y_1| + |x_2 \cdot \operatorname{arctg} y_1 - x_2 \cdot \operatorname{arctg} y_2| < \\ &< \frac{\pi}{2} \cdot |x_1 - x_2| + |x_2| \cdot |\operatorname{arctg} y_1 - \operatorname{arctg} y_2| = \frac{\pi}{2} \cdot |x_1 - x_2| + |x_2| \cdot |y_1 - y_2| \cdot \frac{1}{1 + c^2} < \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) \cdot \delta \end{aligned}$$

Prin urmare, dacă $\delta = \frac{2}{\pi + 2} \cdot \varepsilon$, atunci și $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$.

Exemplu: Fie funcția $f : (0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1} + x_2$ nu este uniform continuă pe mulțimea de definiție, deoarece

pentru două perechi de puncte $x^{(1)} = \left(\frac{1}{k}, 0\right)$, $x^{(2)} = \left(\frac{1}{k+1}, 0\right)$, $k > 0$, astfel ca

$$\|x^{(1)} - x^{(2)}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)^2} = \frac{1}{k \cdot (k+1)} < \frac{1}{k} \Rightarrow$$

$$|f(x^{(1)}) - f(x^{(2)})| = |k - (k+1)| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Propoziție. Fie spațiile \mathbb{R}^p și \mathbb{R}^q , ($p, q \geq 1$), înzestrate cu metricile euclidiene corespunzătoare și aplicația $F : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, $F = (f_1, f_2, \dots, f_q)$. Aplicația F este uniform continuă pe E dacă și numai dacă toate funcțiile componente $f_i : E \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, q$, sunt uniform continue pe E .

Demonstrație

Propoziția rezultă imediat din dubla inegalitate

$$|f_j(x') - f_j(x'')| \leq \|F(x') - F(x'')\|_q \leq \sum_{j=1}^q |f_j(x') - f_j(x'')|, \quad j = 1 : q,$$

fapt ce ne permite să reducem studiul funcțiilor vectoriale uniform continue la studiul uniform continuității componentelor lor reale.

Propoziție. Fie $(X, d_1), (Y, d_2)$ două spații metrice, $E \subset X$ și aplicația $f : E \rightarrow Y$. Dacă aplicația f este *uniform continuă* pe mulțimea E , atunci f este continuă pe mulțimea E .

Demonstrație. Aplicația f fiind uniform continuă pe mulțimea E avem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$, astfel încât pentru orice $x', x'' \in E$, $x' \neq x''$ cu $d_1(x', x'') < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_2(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$. Fie punctul arbitrar $a \in E$. Luând în afirmația precedentă $x'' = a$, se obține afirmația din propoziție.

Observație. Reciproca propoziției anterioare nu este adevărată, după cum se poate vedea din următorul

Exemplu: Funcția reală $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow F \subset \mathbb{R}_+$, $p \geq 1$, definită prin

$$f(x, y) = \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^p x_k \cdot y_k$$

este continuă, dar nu este uniform continuă pe mulțimea de definiție.

$$\begin{aligned}
\text{În adevăr, folosind inegalitatea lui Schwartz, obținem} \\
d(f(x, y) - f(x_0, y_0)) &= |f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |\langle x, y \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle| = \\
&= |\langle x - x_0, y \rangle + \langle x_0, y - y_0 \rangle| \leq |\langle x - x_0, y \rangle| + |\langle x_0, y - y_0 \rangle| \leq \\
&\leq \|x - x_0\| \cdot \|y\| + \|x_0\| \cdot \|y - y_0\| \leq \delta \cdot (\|y\| + \|x_0\|) \leq \delta \cdot (\|y_0\| + \delta + \|x_0\|) \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

pentru

$$0 < \delta_\varepsilon \leq \frac{-(\|y_0\| + \|x_0\|) + \sqrt{(\|y_0\| + \|x_0\|)^2 + 4\varepsilon}}{2},$$

ceea ce arată că aplicația produs scalar este o funcție continuă. Ca o consecință imediată deducem că și norma $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ este o funcție continuă ca fiind compunere de funcții continue.

În continuare vom arăta că în raport cu metrica

$$d((x', y'), (x'', y'')) = \|x' - x''\| + \|y' - y''\|, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

funcția f nu este uniform continuă pe mulțimea de definiție.

Fie punctul $a \in \mathbb{R}^p$ cu $\|a\| = 1$.

Construim sirul $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^p$, $x_n = a \cdot \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Este clar că

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a\| \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0.$$

Prin urmare, pentru orice $\delta > 0$ există $n_\delta = \left[\frac{1}{2 \cdot \delta} \right] + 1 \in \mathbb{N}$, astfel încât

$$\|x_{n_\delta+1} - x_{n_\delta}\| = \frac{1}{\sqrt{n_\delta+1} + \sqrt{n_\delta}} < \frac{1}{2 \cdot \sqrt{n_\delta}} < \delta.$$

Prin urmare

$$d((x_{n_\delta+1}, x_{n_\delta+1}), (x_{n_\delta}, x_{n_\delta})) = 2 \cdot \|x_{n_\delta+1} - x_{n_\delta}\| < 2 \cdot \delta$$

și

$$|f(x_{n_\delta+1}, x_{n_\delta+1}) - f(x_{n_\delta}, x_{n_\delta})| = |\langle x_{n_\delta+1}, x_{n_\delta+1} \rangle - \langle x_{n_\delta}, x_{n_\delta} \rangle| = (n_\delta + 1) - n_\delta = 1 = \varepsilon_0.$$

Definiție. Fie $(X, d_1), (Y, d_2)$ două spații metrice, mulțimea $E \subset X$ și aplicația $f : E \rightarrow Y$. Aplicația f se numește lipschiziană pe mulțimea E dacă există constanta $L > 0$ astfel încât pentru orice $x', x'' \in E$ are loc

$$d_2(f(x'), f(x'')) < L \cdot d_1(x', x'').$$

Propoziție. Fie $(X, d_1), (Y, d_2)$ două spații metrice, mulțimea $E \subset X$. Dacă aplicația $f : E \rightarrow Y$ este lipschiziană pe mulțimea E , atunci f este uniform continuă pe mulțimea E .

Demonstrație. Aplicația f fiind lipschiziană pe mulțimea E , există constanta $L > 0$ astfel încât pentru orice $x', x'' \in E$ are loc

$$d_2(f(x'), f(x'')) < L \cdot d_1(x', x'').$$

Prin urmare, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{L} > 0$ astfel încât pentru orice $x', x'' \in E$, $x' \neq x''$ cu $d_1(x', x'') < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_2(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$.

Funcția poate fi uniform continuă pe mulțimea E fără a fi lipschitziană pe această mulțime, aşa cum se poate constata din exemplul următor.

Exemplu: Funcția reală $f : [0,1] \times [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x,y) = \sqrt{x}$ nu este lipschitziană pe domeniul de definiție, însă este uniform continuă.

În adevăr, funcția f fiind continuă pe compactul $[0,1] \times [-1,1]$ prin teorema lui **Cantor** (vezi teorema următoare) este uniform continuă.

Pentru a arăta că funcția f nu este lipschitziană pe domeniul de definiție vom arăta că pentru orice $L > 0$ există cel puțin două perechi de puncte astfel ca

$$|f(x_{1L}, y_{1L}) - f(x_{2L}, y_{2L})| > L \cdot \sqrt{(x_{1L} - x_{2L})^2 + (y_{1L} - y_{2L})^2}.$$

Considerând $(x_{1n}, y_{1n}) = \left(\frac{1}{n^2}, 0\right)$, $(x_{2n}, y_{2n}) = \left(\frac{1}{4 \cdot n^2}, 0\right)$, obținem

$$\begin{aligned} |f(x_{1n}, y_{1n}) - f(x_{2n}, y_{2n})| &= \frac{|x_{1n} - x_{2n}|}{\sqrt{x_{1n}} + \sqrt{x_{2n}}} = \\ &= |x_{1n} - x_{2n}| \cdot \frac{2n}{3} > L \cdot \sqrt{(x_{1n} - x_{2n})^2 + (y_{1n} - y_{2n})^2} \end{aligned}$$

pentru $n > \left[\frac{3}{2} \cdot L\right] + 1$.

Teoremă (Cantor³). Fie $(X, d_1), (Y, d_2)$ două spații metrice, mulțimea $E \subset X$ compactă. Dacă aplicația $f : E \rightarrow Y$ este continuă pe mulțimea E , atunci f este uniform continuă pe mulțimea E .

Demonstrație

Să presupunem prin absurd că aplicația f nu este uniform continuă pe mulțimea E , adică există $\varepsilon_0 > 0$ și pentru orice $\delta = \frac{1}{n} > 0$ există punctele $x'_n, x''_n \in E$ astfel că din condiția $d_1(x'_n, x''_n) < \delta = \frac{1}{n} \Rightarrow d_2(f(x'_n), f(x''_n)) > \varepsilon_0$.

Șirul $(x''_n)_n \subset E$ fiind mărginit, prin lema **Cesaro** are un subșir $(x''_{n_p})_{n_p}$ convergent și fie $\bar{x} = \lim_{n_p \rightarrow \infty} x''_{n_p}$. Mulțimea E fiind compactă $\bar{x} \in E$, reformulăm condiția de mai sus pentru $n = n_p$, și anume:

³ Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, matematician german, 1845-1918

$$d_1(x'_{n_p}, x''_{n_p}) < \delta = \frac{1}{n_p} \Rightarrow d_2(f(x'_{n_p}), f(x''_{n_p})) > \varepsilon_0, \quad \forall n_p \in \mathbb{N}.$$

Trecând la limită după $n_p \rightarrow \infty$ în relația de mai sus, deducem că și subșirul $(x'_{n_p})_{n_p}$ este convergent și $\bar{x} = \lim_{n_p \rightarrow \infty} x'_{n_p}$.

Mai mult, folosind continuitatea aplicației f deducem

$$\begin{aligned} \lim_{n_p \rightarrow \infty} d_2(f(x'_{n_p}), f(x''_{n_p})) &= d_2\left(f\left(\lim_{n_p \rightarrow \infty} x'_{n_p}\right), f\left(\lim_{n_p \rightarrow \infty} x''_{n_p}\right)\right) = \\ &= d_2(f(\bar{x}), f(\bar{x})) = 0 \geq \varepsilon_0 > 0 \end{aligned}$$

Contradicție. \square

Teoremă (Weierstrass). Fie $(X, d_1), (Y, d_2)$ două spații metrice, mulțimea $E \subset X$ compactă. Dacă aplicația $f: E \rightarrow Y$ este continuă pe mulțimea E , atunci f este mărginită.

Demonstrație

Presupunem prin absurd că f nu este continuă, adică pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există un punct $x_n \in E$ astfel ca $d_2(f(x_n), 0) > n$. Cum E este mărginită și sirul $(x_n)_n \subset E$ este mărginit, din lema lui Cesaro deducem că există subșirul $(x_{n_p})_{n_p} \subset E$ convergent și fie $\bar{x} = \lim_{n_p \rightarrow \infty} x_{n_p}$. Mulțimea E fiind și închisă își

conține toate punctele de acumulare, prin urmare $\bar{x} \in E$. Folosind continuitatea aplicației f , trecem la limită după $n_p \rightarrow \infty$ în inegalitatea

$$d_2(f(x_{n_p}), 0) > n_p, \quad \forall n_p \in \mathbb{N}.$$

Dedecem $d_2(f(\bar{x}), 0) = \infty$, contradicție.

Teorema (Darboux). Fie $(X, d_1), (Y, d_2)$ două spații metrice, mulțimea $E \subset X$ compactă. Dacă aplicația $f: E \rightarrow Y$ este continuă pe mulțimea E , atunci $f(E)$ este compactă.

Demonstrație

Din teorema lui Weierstrass $f(E)$ este mărginită. Mai rămâne să demonstrăm că $f(E)$ este și închisă. Considerăm sirul $(y_n)_n \subset f(E)$ convergent în spațiul metric (Y, d_2) și fie $\bar{y} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Ne propunem să demonstrăm că $\bar{y} \in f(E)$, adică tocmai faptul că $f(E)$ este închisă.

Deoarece $(y_n)_n \subset f(E)$, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ există punctul $x_n \in E$ astfel ca $f(x_n) = y_n$. Prin urmare, sirul obținut $(x_n)_n \subset E$ este mărginit, iar prin lema **Cesaro** există un subșir $(x_{n_p})_{n_p} \subset E$ convergent și fie $\bar{x} = \lim_{n_p \rightarrow \infty} x_{n_p}$. Însă $y_{n_p} = f(x_{n_p})$, $\forall n_p \in \mathbb{N}$. Trecând la limită după $n_p \rightarrow \infty$ în ultima relație și cum limita într-un spațiu metric este unică, obținem că

$$\bar{y} = \lim_{n_p \rightarrow \infty} y_{n_p} = \lim_{n_p \rightarrow \infty} f(x_{n_p}) = f\left(\lim_{n_p \rightarrow \infty} x_{n_p}\right) = f(\bar{x}) \in f(E). \square$$

Teoremă (Darboux⁴). Fie $(X, d_1), (Y, d_2)$ două spații metrice, mulțimea $E \subset X$ conexă. Dacă aplicația $f : E \rightarrow Y$ este continuă pe mulțimea E , atunci $f(E)$ este conexă în Y .

Demonstrație. Dacă prin absurd $f(A)$ nu este conexă, atunci există deschisele $D_1, D_2 \in \tau_Y$ astfel ca

- a) $f(A) \subset D_1 \cup D_2$,
- b) $f(A) \cap D_1 \cap D_2 = \emptyset$,
- c) $f(A) \cap D_1 \neq \emptyset$, $f(A) \cap D_2 \neq \emptyset$.

Deoarece funcția f este continuă, rezultă că $f^{-1}(D_1) \in \tau_X$, $f^{-1}(D_2) \in \tau_X$.

Din a) obținem

$$A \subset f^{-1}(D_1 \cup D_2) = f^{-1}(D_1) \cup f^{-1}(D_2). \quad (1)$$

Să arătăm că

$$A \cap f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2) = \emptyset. \quad (2)$$

Dacă prin absurd există elementul

$$x \in A \cap f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2) \neq \emptyset,$$

atunci

$$f(x) \in f(A) \cap D_1 \cap D_2 = \emptyset,$$

contradicție.

Acum să arătăm că

$$f^{-1}(D_1) \cap A \neq \emptyset, \quad f^{-1}(D_2) \cap A \neq \emptyset. \quad (3)$$

Din c) rezultă că există elementele $y_1 \in f(A) \cap D_1$ și $y_2 \in f(A) \cap D_2$, ceea ce arată că există elementele $x_1, x_2 \in A$ astfel ca $f(x_1) = y_1$ și $f(x_2) = y_2$.

Pe de altă parte, $f(x_1) \in D_1$ și $f(x_2) \in D_2$, adică $x_1 \in f^{-1}(D_1)$ și $x_2 \in f^{-1}(D_2)$ de unde rezultă imediat (3). Din (1), (2) și (3) rezultă că mulțimea

⁴ Jean Gaston Darboux, matematician francez, 1842-1917

A nu este conexă, fapt ce contrazice ipoteza. Rezultă că presupunerea făcută este falsă, deci $f(A)$ este conexă. \square

Consecință (Weierstrass). Fie (X, d_1) spațiu metric, mulțimea $E \subset X$ convexă și compactă. Dacă aplicația $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă pe mulțimea E , atunci $f(E)$ este un interval închis și mărginit.

În plus, pentru orice $\xi \in \left[\min_{x \in E} f(x), \max_{x \in E} f(x) \right]$ există $x_\xi \in E$ astfel încât $f(x_\xi) = \xi$.

Exemplu: În spațiul topologic $(\mathbb{R}, \mathcal{D}_{\mathbb{R}})$ funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuă are proprietatea că pentru orice interval $I \subset \mathbb{R}$ (mulțime conexă), mulțimea $f(I)$ este un interval (mulțime conexă).

Definiție. Fie (X, d_1) spațiu metric. Funcția reală $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ se numește *inferior semicontinuă* în punctul $a \in E$ dacă și numai dacă pentru orice punct $b < f(a)$ există o vecinătate $V_b \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x \in V_b \Rightarrow f(x) > b$.

Spunem că funcția f este *superior semicontinuă* în punctul $a \in E$ dacă funcția $-f$ este inferior semicontinuă în punctul $a \in E$.

Funcția f se numește *inferior (superior) semicontinuă pe mulțimea E* dacă și numai dacă este inferior (superior) semicontinuă în fiecare punct al mulțimii E .

Teoremă. Fie (X, d_1) spațiu metric, funcția reală $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ și punctul $a \in E$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) funcția f este inferior semicontinuă în punctul $a \in E$,
- (ii) pentru orice sir $(x_n)_n \subset E$ convergent la a există $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq f(a)$.

Definiție. Fie $(Y, \|\cdot\|)$ spațiu **Banach**. Aplicația $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow F \subset Y$ se numește *absolut continuă pe intervalul $[a, b]$* dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice familie finită de intervale deschise $\{(a_i, b_i)\}_{i=1,2,\dots,n}$, $n > 1$ cu

$$(a_i, b_i) \subset [a, b], \quad (a_i, b_i) \cap (a_j, b_j) = \emptyset, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

și $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta(\varepsilon)$ să rezulte $\sum_{k=1}^n \|f(b_k) - f(a_k)\| < \varepsilon$.

Exemplu:

1. Considerăm sirul $\{G_n\}_n$ de subintervale deschise ale intervalului compact $[0,1]$ cu proprietățile:

➤ $G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_n \supset \dots$;

➤ $|G_n| \leq \frac{1}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

și funcția $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n \geq 1} |G_n \cap [0, x]|$. Vom arăta că

➤ f este absolut continuă pe compactul $[0,1]$, adică $f \in AC([0,1])$,

➤ $\exists M > 0, \quad \forall x_1, x_2 \in [0,1], \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leq M \cdot |x_1 - x_2|$ dacă și numai dacă nu există un număr natural $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca $G_n = \emptyset, \quad \forall n \geq n_0$.

Soluție

➤ Pentru orice $\varepsilon > 0$ considerăm $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel ca $\sum_{k=n(\varepsilon)+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Fie $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2n(\varepsilon)}$. Dacă considerăm un sir $\{(a_k, b_k)\}_k$ de intervale deschise disjuncte ale compactului $[0,1]$ cu proprietatea că $\sum_{k \geq 1} (b_k - a_k) < \delta(\varepsilon)$, atunci

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} |f(b_k) - f(a_k)| &= \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{k \geq 1} |G_n \cap [a_k, b_k]| \right) \leq \\ &\leq \sum_{j=n(\varepsilon)+1}^{\infty} |G_j| + \sum_{j=1}^{n(\varepsilon)} \left(\sum_{k \geq 1} |G_j \cap [a_k, b_k]| \right) \leq \frac{\varepsilon}{2} + n(\varepsilon) \cdot \sum_{k \geq 1} (b_k - a_k) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

ceea ce înseamnă că f este absolut continuă pe compactul $[0,1]$.

➤ Să presupunem că există un număr natural $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca $G_n = \emptyset, \quad \forall n \geq n_0$, atunci pentru $x_1, x_2 \in [0,1], \quad x_2 \geq x_1$

$$|f(x_2) - f(x_1)| = \sum_{n=1}^{n_0} |G_n \cap [x_1, x_2]| \leq n_0 \cdot |x_2 - x_1|.$$

Reciproc, să presupunem că pentru orice număr natural $k \in \mathbb{N}$ există $k' \in \mathbb{N}, \quad k' \geq k$ și $G_{k'} \neq \emptyset$, prin urmare și $G_k \neq \emptyset$. Fie $x \in G_k, \quad \delta > 0$ astfel ca

$(x - \delta, x + \delta) \subset G_k$. Luăm $a, b \in (x - \delta, x + \delta) \subset G_k = \bigcap_{j=1}^k G_j, \quad a < b$.

Atunci

$$|f(b) - f(a)| = \sum_{n \geq 1} |G_n \cap [a, b]| \geq \sum_{n=1}^k |G_n \cap [a, b]| = \sum_{n=1}^k |[a, b]| = k \cdot (b - a).$$

2. O funcție $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}^*$ este **convexă** pe mulțimea A dacă pentru orice două puncte $x, y \in A$ și oricare constante reale pozitive $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $\alpha + \beta = 1$ rezultă $f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) \leq \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y)$.

Transformata **Legendre** a funcției convexe f este funcția

$$g : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(y) = \max_{x \in A} (x \cdot y - f(x)), \quad y \in A.$$

Arătați că funcția g este convexă pe mulțimea A și că

$$f(x) = \max_{y \in A} (x \cdot y - g(y)), \quad x \in A.$$

3.4 Exerciții

1. Fie aplicațiile continue $f, g : A \subset R \rightarrow R$ și mulțimile:

$$E = \{x \in A / f(x) = g(x)\}$$

$$F = \{x \in A / f(x) \leq g(x)\}$$

$$G = \{x \in A / f(x) < g(x)\}$$

Să se arate că mulțimile E și F sunt închise, iar G este deschisă.

Indicație

Funcția $f - g : A \rightarrow R$, definită prin

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), (\forall) x \in A$$

este continuă și

$$E = (f - g)^{-1}(0), \quad F = (f - g)^{-1}(-\infty, 0], \quad G = (f - g)^{-1}(-\infty, 0).$$

2. Să se studieze continuitatea uniformă a funcțiilor:

a) $f(x) = \frac{x+2}{x+1} \cdot \sin^2 x^2$, $x \in [0, \infty)$;

b) $f(x) = \ln x$, $x \in [\varepsilon, e]$, $\varepsilon > 0$; c) $f(x) = \ln x$, $x \in (0, e]$;

d) $f(x) = \sin x^2$, $x \in \mathbb{R}$; e) $f(x) = \frac{x}{x+1} + x$, $x \in (0, \infty)$;

f) $f(x) = \frac{x}{x+1} + x$, $x \in (-1, \infty)$.

Indicații

a) Pentru $x_1 = \sqrt{2n\pi}$, $x_2 = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ ⇒ $|x_1 - x_2| \rightarrow 0$,

dar $|f(x_1) - f(x_2)| > 1$, deci funcția nu este uniform continuă.

b) Funcția este continuă pe interval compact, deci este uniform continuă.

c) Pentru $x_1 = \frac{1}{n}$, $x_2 = \frac{1}{2n+1}$ ⇒ $|x_1 - x_2| \rightarrow 0$, dar

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right) \geq \ln 2,$$

deci funcția nu este uniform continuă.

d) Nu este uniform continuă.

e) Pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar și pentru $x_1, x_2 \in (0, \infty)$, pentru care $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon \Leftrightarrow |x_1| < \delta_\varepsilon, |x_2| < \delta_\varepsilon$, se va obține:

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= \left| \frac{x_1}{x_1 + 1} + x_1 - \frac{x_2}{x_2 + 1} - x_2 \right| \leq \\ &\leq |x_1 - x_2| + \left| \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} \right| < 2 \cdot |x_1 - x_2| < 2\delta_\varepsilon \end{aligned}$$

și impunând condiția $2\delta_\varepsilon < \varepsilon$, rezultă că funcția este uniform continuă.

f) Pentru $x_1 = -1 + \frac{1}{n}$, $x_2 = -1 + \frac{2}{n}$ ⇒ $|x_1 - x_2| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, dar

$|f(x_1) - f(x_2)| \rightarrow \infty$, deci funcția nu este uniform continuă.

3. Să se studieze continuitatea uniformă a funcțiilor $f_1, f_2, f_1 + f_2, f_1 \cdot f_2$ definite pe \mathbb{R} prin

$$f_1(x) = x \cdot \sin^2 x^2; \quad f_2(x) = x \cdot \cos^2 x^2.$$

Indicație.

Pentru

$$x_1 = \sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{2}}, \quad x_2 = \sqrt{n\pi} \Rightarrow |x_1 - x_2| \rightarrow 0,$$

dar $|f_1(x_1) - f_1(x_2)| \rightarrow \infty$ deci funcția f_1 nu este uniform continuă.

În mod asemănător se arată că nici funcția f_2 nu este uniform continuă pe \mathbb{R} .

Funcția $(f_1 + f_2)(x) = x$ și este uniform continuă pe \mathbb{R} .

Se arată că funcția $f_1 \cdot f_2$ nu este uniform continuă pe \mathbb{R} , considerând

$$x_1 = \sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{4}}, \quad x_2 = \sqrt{\frac{n\pi}{2}}.$$

CAPITOLUL 4

ŞIRURI DE FUNCȚII

4.1 Tipuri de convergență

Observație 4.1. Șirurile de funcții constituie o extensie naturală a șirurilor numerice. Importanța lor rezidă în faptul că ele constituie un mijloc eficient de a defini noi funcții.

Fie familia de funcții complexe $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ definite pe aceeași submulțime liniară A , a spațiului metric (X, d) . Dacă mulțimea indicilor I este mulțimea numerelor naturale, atunci avem un șir de funcții pe care-l notăm $(f_n)_n$.

Definiție 4.2. Spunem că $a \in A$ este un *punct de convergență* al șirului $(f_n)_n$ dacă șirul de numere $(f_n(a))_n$ este convergent. Mulțimea punctelor de convergență $B \subseteq A$ o numim *mulțimea de convergență* a șirului $(f_n)_n$.

Exemple:

1) Șirul de funcții $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, $n \in N$, are mulțimea de convergență intervalul $[-1, 1]$.

2) Șirul de funcții $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt[n]{|x|}$, $n \in N^*$ are mulțimea de convergență \mathbb{R} .

Definiție. Fie $(f_n)_n$ un șir de funcții definite pe mulțimea A și având mulțimea de convergență B . Dacă pentru orice $x \in B$ notăm limita șirului numeric $(f_n(x))_n$ cu $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, atunci s-a stabilit o corespondență $x \rightarrow f(x)$ a mulțimii B în mulțimea numerelor complexe. Funcția $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ definită prin $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $x \in B$, se numește *funcția limită* a șirului de funcții $(f_n)_n$ pe mulțimea B .

Exemple:

1) Șirul de funcții $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ are mulțimea de convergență \mathbb{R} și pentru orice x real $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

2) Sirul de funcții $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{n \cdot x + 2}{n + 1}$, $n \in \mathbb{N}$, este convergent pentru orice x real și are funcția limită $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

Definiție 4.3. Spunem că sirul $(f_n)_n$ este *punctual convergent* sau *simplu convergent* pe B către f , dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ și orice $x \in B$ există un număr $n(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\forall n \geq n(\varepsilon, x) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

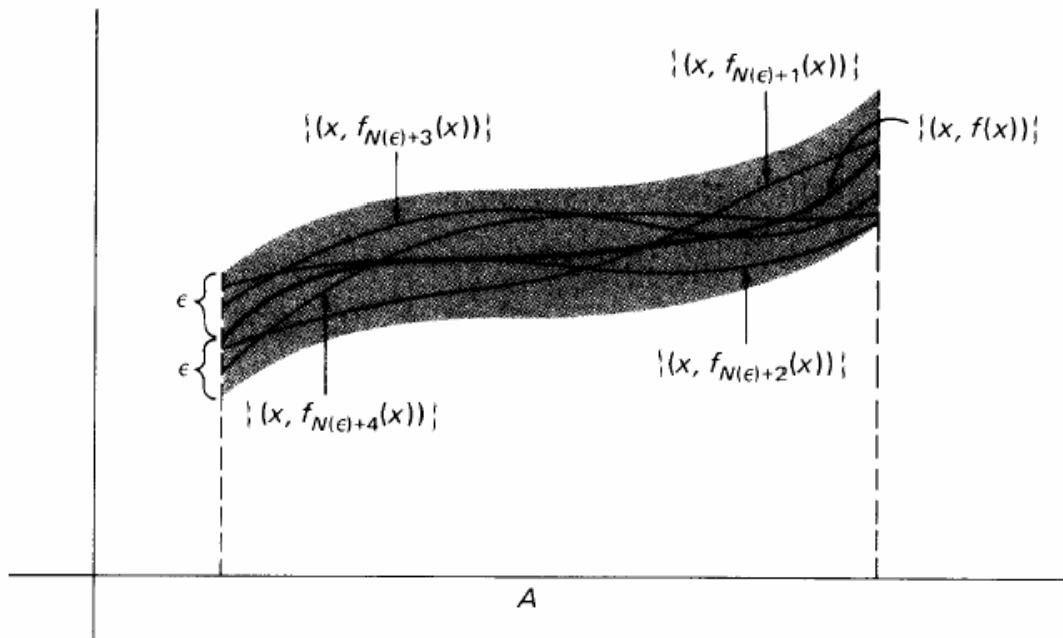
Exemplu: Vom arăta că sirul de funcții $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+n^2}}$, $n \in \mathbb{N}$, definit pe \mathbb{R} este convergent pe \mathbb{R} către funcția $f(x) = 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$. Pentru aceasta vom căuta un număr natural $n(\varepsilon, x)$, astfel încât pentru orice $n > n(\varepsilon, x)$ să avem

$$\frac{x}{\sqrt{1+n^2}} < \varepsilon. \text{ Din}$$

$$1+n^2 > n^2 > \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2 \Rightarrow n(\varepsilon, x) = \left\lceil \frac{|x|}{\varepsilon} \right\rceil + 1.$$

Definiție 4.4. Spunem că sirul $(f_n)_n$ este *uniform convergent* pe A către f dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, astfel încât pentru orice $x \in A$ și

$$\forall n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$



Observație. Un sir de funcții uniform convergent este și simplu convergent. Reciproca nu este adevărată, după cum se poate constata din următorul

Exemplu: Sirul de funcții $(f_n)_n$, $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ este definit prin $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$. Constatăm că

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Pentru a arăta că sirul $(f_n)_n$ nu este uniform convergent pe mulțimea $[0,1]$ va trebui să arătăm că există $\varepsilon_0 > 0$ astfel ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$ să existe $x_n \in [0,1]$ cu proprietatea $|f_n(x_n) - f(x_n)| > \varepsilon_0$.

În adevăr pentru $\varepsilon_0 = \frac{1}{3} > 0$ și pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există $x_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \in [0,1]$ astfel ca $|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left| \frac{1}{2} - 0 \right| > \varepsilon_0$.

Totuși restricția sirului de funcții $(f_n)_n$ la intervalul $[0, \rho]$, $\rho \in (0,1)$ este un sir uniform convergent pe $[0, \rho]$ către funcția constantă $f(x) = 0$. În adevăr, deoarece $|f_n(x) - f(x)| = x^n \leq \rho^n = \varepsilon \Rightarrow n(\varepsilon) = \lceil \log_\rho \varepsilon \rceil + 1$, deducem că sirul $(f_n)_n$ este uniform convergent pe $[0, \rho]$ către funcția constantă $f(x) = 0$.

Din punct de vedere logic avem două situații:

(i) mulțimea numerelor $n(\varepsilon, x)$ este majorată pe B , adică $\exists \sup_{x \in B} n(\varepsilon, x) < \infty$. Atunci sirul $(f_n)_n$ este uniform convergent pe B și $n(\varepsilon) = \sup_{x \in B} n(\varepsilon, x)$;

(ii) mulțimea numerelor $n(\varepsilon, x)$ nu este majorată pe B , adică $\sup_{x \in B} n(\varepsilon, x) = +\infty$. Atunci sirul $(f_n)_n$ nu converge uniform pe B către f .

Observație. Convergența unui sir de funcții poate fi analizată, pentru $x \in A$ fixat, cu ajutorul tehniciilor de analiză de la siruri de numere. Totuși convergența uniformă se poate stabili numai cu ajutorul unor metode speciale.

Următoarea propoziție este importantă în practică, deoarece după determinarea funcției limită a unui sir de funcții în sensul convergenței simple, cu ajutorul ei se poate preciza dacă această convergență are sau nu caracter uniform.

Propoziție. Fie $A \subset (X, d)$ și $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ un sir de funcții. Sirul $(f_n)_n$ converge uniform pe A la funcția f dacă și numai dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \right] = 0.$$

Demonstrație. Dacă sirul de funcții $(f_n)_n$ converge uniform la f pe mulțimea A , rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există numărul natural $n(\varepsilon)$ astfel încât

$$\forall n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in A,$$

de unde, trecând la suprem, obținem

$$\forall n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

adică $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \right] = 0$.

Reciproc, dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \right] = 0$, deducem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există numărul natural $n(\varepsilon)$ astfel ca

$$\forall n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

de unde cu atât mai mult are loc

$$\forall n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in A,$$

adică sirul $(f_n)_n$ converge uniform la f pe mulțimea A .

Exemplu: Fie sirul de funcții $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{n \cdot x^2}{1 + n \cdot x}$.

Observăm că sirul $(f_n)_n$ converge simplu către funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Cum

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x}{1 + n \cdot x} < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \geq 0,$$

deducem că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{x \geq 0} |f_n(x) - f(x)| \right] = 0$, prin urmare sirul $(f_n)_n$ converge uniform la f pe mulțimea $[0, \infty)$.

4.2 Criterii de convergență uniformă

Teoremă 4.5 (criteriul Cauchy)

Sirul $(f_n)_n$ converge uniform pe A dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există numărul $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru oricare $n, m \geq n(\varepsilon)$ și oricare $x \in A$ rezultă $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Demonstrație

„ \Rightarrow ”. Dacă $(f_n)_n$ converge uniform pe A către $f \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n, m \geq n(\varepsilon)$ și $\forall x \in A \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Prin urmare:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < 2\varepsilon \quad (\#)$$

„ \Leftarrow ” Cunoaștem că $\forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n, m \geq n(\varepsilon)$ și

$$\forall x \in A \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \text{ Vom arăta că } \exists f: A \rightarrow \mathbb{R} \text{ astfel încât } f_n \xrightarrow{cu} f.$$

Pentru fiecare $x \in A$ sirul numeric $(f_n(x))_n$ este fundamental și prin urmare convergent către $f(x)$. Să fixăm pe $n \geq n(\varepsilon)$ și trecem la limită în inegalitatea (#) pentru $m \rightarrow \infty$. Obținem $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon < 2 \cdot \varepsilon \Rightarrow f_n \xrightarrow{cu} f$.

Exemplu: Vom arăta, folosind criteriul **Cauchy**, că sirul de funcții $f_n: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ definit prin $f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 \cdot x^2}$ este uniform convergent.

Pentru a arăta că sirul $(f_n)_n$ este uniform convergent pe mulțimea $[1, \infty)$ va trebui să arătăm că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru orice $n \geq n(\varepsilon), p \in \mathbb{N}^*$ și orice $x \in [1, \infty)$ să aibă loc inegalitatea

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Din sirul de inegalități

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < x^3 \cdot \frac{2 \cdot n \cdot p + p^2}{(1 + n^2 \cdot x^2) \cdot [1 + (n + p)^2 \cdot x^2]} < \frac{2 \cdot n \cdot p + p^2}{n^2 \cdot (n + p)^2 \cdot x} < \frac{1}{n^2}$$

deducem că $n(\varepsilon) = \left\lceil \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \right\rceil + 1$.

Observație. În cazul convergenței uniforme, criteriul lui **Cauchy** deși este general nu precizează care este limita sirului de funcții. Din acest motiv este mai puțin folosit în aplicațiile practice, având însă o deosebită utilitate în rationamentele teoretice.

Propoziție (criteriul majorării). Dacă sirurile $(f_n)_n$ și $(\varphi_n)_n$, $f_n, \varphi_n: A \rightarrow \mathbb{C}$ au proprietățile

(i) $\exists f: A \rightarrow \mathbb{C}$ și $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $x \in A$ și orice

$$|f'_n(x) - f'_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot \ell}$$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varphi_n(x),$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) \stackrel{cu}{=} 0, \forall x \in A,$$

$$\text{atunci } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{cu}{=} f(x), \forall x \in A.$$

Corolar. Dacă pentru şirul de funcții $(f_n)_n, f_n : A \rightarrow \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$, există o funcție $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ și un şir de numere reale $(a_n)_n \subset \mathbb{R}$, cu proprietățile

- $\exists n_0 \in \mathbb{N}, |f_n(x) - f(x)| < a_n, (\forall) x \in A, (\forall) n \geq n_0,$
- $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$

atunci şirul de funcții $(f_n)_n$ converge uniform către funcția f .

Corolar. Dacă şirul de funcții $(f_n)_n, f_n : A \rightarrow \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$, satisfac condițiile

- $\exists n_0 \in \mathbb{N}, |f_n(x)| < a_n, (\forall) x \in A, (\forall) n \geq n_0,$
- $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$

atunci şirul $(f_n)_n$ converge uniform către funcția constantă zero.

Exemplu: Vom arăta, folosind propoziția anterioară, că şirul de funcții $f_n : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ definit prin $f_n(x) = \frac{x^n}{(1+x^{2n})^n}$ este uniform convergent.

Deoarece $1+x^{2n} \geq 2 \cdot x^n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq 1$ are loc

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq 1,$$

adică şirul $(f_n)_n$ este uniform convergent pe $[1, \infty)$.

Teoremă 4.6 (Dini¹). Fie şirul de funcții $(f_n)_n, f_n : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subset X$. Dacă:

- (i) A mulțime compactă,
- (ii) şirul $(f_n)_n$ este monoton în fiecare punct $x \in A$,
- (iii) şirul $(f_n)_n$ este simplu convergent către funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$,
- (iv) funcțiile $(f_n)_n$ și f sunt continue pe A ,

atunci convergența este uniformă pe mulțimea A .

¹ Ulisse Dini, 1845-1918, matematician italian

Demonstrație

Vom presupune că $f(x) = 0$ pe A , în caz contrar vom considera sirul $(f_n - f)_n$. De asemenea, vom presupune că $(f_n)_n$ este descrescător pe A , în caz contrar se poate considera sirul $(-f_n)_n$.

Din $\lim_n f_n(x) \stackrel{cs}{=} f(x) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n(\varepsilon, x)$, să avem $0 \leq f_n(x) < f_{n_0}(x) < \varepsilon$, deoarece $(f_n)_n$ este descrescător $\forall x \in A$.

Dintre toate funcțiile $(f_n)_n$ cu $n \geq n(\varepsilon, x) = n_0$ alegem f_{n_0} . Din cauza continuității lui f_{n_0} în $x \in A$ arbitrar deducem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $V_\varepsilon \in \mathcal{V}(x)$ astfel încât pentru orice $x \in V_\varepsilon \cap A \Rightarrow 0 \leq f_{n_0}(x) < \varepsilon$.

Sirul $(f_n)_n$ fiind descrescător în fiecare $x \in A$ vom avea, de asemenea,

$$0 \leq f_n(x) < f_{n_0}(x) < \varepsilon, \forall n \geq n_0 \text{ și } \forall x \in V_\varepsilon \cap A,$$

adică sirul $(f_n)_n$ este uniform convergent la zero pe mulțimea $V_\varepsilon \cap A$.

Când $x \in A$ parurge intervalul A , mulțimea vecinătăților V_ε acoperă A interval compact și în virtutea teoremei **Borel-Lebesgue** vom putea extrage din această acoperire a lui A cu intervale deschise o acoperire finită U_1, U_2, \dots, U_p .

Sirul $(f_n)_n$ este uniform convergent pe $U_k \cap A$, $\forall k = \overline{1, p}$ și deci el va fi

uniform convergent pe $\bigcup_{k=1}^p (U_k \cap A) = A$.

Exemplu (Stone²): Fie sirul de polinoame $p_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ cu coeficienți reali, definit prin recurență

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2} \cdot (x - p_n^2(x)), \forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}, \quad p_0(x) = 0.$$

Vom arăta, folosind teorema lui **Dini**, că sirul de polinoame $(p_n)_n$ converge uniform la funcția nepolinomială $f(x) = \sqrt{x}$ pe mulțimea $[0,1]$.

Observăm că toate polinoamele p_n nu au termen liber și că $p_n(x) \leq \sqrt{x}, \forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}$. Prin inducție matematică se poate demonstra că sirul de polinoame $(p_n)_n$ este crescător în fiecare punct al mulțimii $[0,1]$.

Fiind în condițiile teoremei lui **Dini** deducem că sirul de polinoame $(p_n)_n$ este uniform convergent către funcția $f(x) = \sqrt{x}$ pe mulțimea $[0,1]$.

² Marshall Harvey Stone, 1903-1989, matematician american

Exemplu (Euler³): Fie sirul de functii $f_n : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, definit prin recurență

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) \cdot \cos \frac{x}{2^{n+1}}, \quad \forall x \in [0, \pi], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_0(x) = 1.$$

Vom arăta, folosind teorema lui **Dini**, că sirul de functii $(f_n)_n$ converge

uniform la functia $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \in (0, \pi] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ pe multimea $[0, \pi]$.

Observăm că functiile f_n sunt continue, pozitive și au expresia

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2^n}}, & x \in (0, \pi] \\ 1, & x = 0 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Este evident că sirul $(f_n)_n$ converge simplu către functia continuă

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \in (0, \pi] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Din următorul sir de egalități

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = f_n(x) \cdot \left(\cos \frac{x}{2^{n+1}} - 1 \right) = -2 \cdot f_n(x) \cdot \sin^2 \frac{x}{2^{n+2}} \leq 0,$$

$$\forall x \in [0, \pi], \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

deducem că sirul de functii $(f_n)_n$ este monoton descrescător pe $[0, \pi]$.

Fiind în condițiile teoremei lui **Dini** deducem că sirul de functii $(f_n)_n$ este uniform convergent către functia f pe multimea $[0, \pi]$.

Definiție. Spunem că functiile $f_n : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ sunt **uniform echicontinuе** pe A dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0, \quad \forall x, y \in A, \quad |x - y| < \delta, \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

Mai supunem că familia $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ este **uniform echicontinuă** pe A

Propoziție. Fie functia f continuă pe multimea A și sirul $(f_n)_n$ de functii reale, $f_n : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietățile:

- familia $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ este uniform echicontinuă pe A ,

³ **Leonhard Euler**, 1707-1783, matematician elvețian

► sirul $(f_n)_n$ este punctual convergent pe A către funcția f .

Atunci

- a) funcția f este continuă pe A ,
- b) dacă A este o mulțime compactă, atunci sirul $(f_n)_n$ este uniform convergent către f pe A .

Demonstrație

- a) Fie $\varepsilon > 0, a \in A$ și $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel ca pentru orice $x \in A$ cu $|x - a| < \delta$ și pentru orice $n \in \mathbb{N}$ să rezulte $|f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon$. Trecând la limită după $n \rightarrow \infty$, în ultima inegalitate obținem

$$x \in A, |x - a| < \delta, |f(x) - f(a)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_n(a)| \leq \varepsilon,$$

așadar funcția f este continuă în punctul a , $\forall a \in A$.

- b) Pentru orice $\varepsilon > 0$ considerăm submulțimea

$$B(a, \delta) = \{x \in A \mid |x - a| < \delta\} \subset A.$$

Vom arăta că sirul $(f_n)_n$ converge uniform pe $B(a, \delta)$ către funcția f .

În adevăr, pentru fiecare $\varepsilon > 0$ și $a \in A$ există $n_{\varepsilon, a} \in \mathbb{N}$ și $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ astfel ca

► $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in B(a, \delta) \Rightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$, (echicontinuitatea);

► $\forall n \geq n_{\varepsilon, a}, \forall x \in B(a, \delta) \Rightarrow |f_n(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$. (convergență punctuală).

Prin urmare, pentru orice $n \geq n_{\varepsilon, a}$ și orice $x \in B(a, \delta)$ obținem

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| + |f(a) - f(x)| < \varepsilon,$$

ceea ce arată că sirul $(f_n)_n$ converge uniform pe $B(a, \delta)$ către funcția f .

Cum mulțimea A este compactă, pentru orice $\varepsilon > 0$ din acoperirea sa $A = \bigcup_{a \in A} B(a, \delta_{\varepsilon, a})$ cu mulțimi deschise se poate extrage o acoperire finită, adică

există $s \in \mathbb{N}^*$ și punctele $a_1, a_2, \dots, a_s \in A$ astfel încât $A = \bigcup_{i=1}^s B(a_i, \delta_{\varepsilon, a_i})$.

Pentru orice $\varepsilon > 0$ și orice $x \in A$ există o submulțime $B(a_i, \delta_{\varepsilon, a_i}) \subset A$, $i = 1 : s$, astfel ca $x \in B(a_i, \delta_{\varepsilon, a_i})$ și din uniform convergența sirului $(f_n)_n$ către funcția f pe această submulțime $B(a_i, \delta_{\varepsilon, a_i})$ obținem că există un rang $n_{\varepsilon, i} \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru orice $n \geq n_{\varepsilon, i}$ să rezulte $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Am obținut că pentru orice $\varepsilon > 0$ și orice $x \in A$ există rangul $n_\varepsilon = \max_{i=1:s} n_{\varepsilon, i}$ astfel ca pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ să rezulte $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, deci sirul $(f_n)_n$ este uniform convergent către f pe A . \square

Propoziție. Fie o submulțime $E \subset A$ densă a mulțimii A (adică $\overline{E} = A$, de exemplu toate numerele raționale din intervalul A) și sirul $(f_n)_n$ de funcții reale, $f_n : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietățile:

- familia $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ este **uniform echicontinuă** pe A ,
- pentru orice $a \in E$ sirul numeric $(f_n(a))_n$ este **convergent**.

Atunci există funcția f continuă pe A cu proprietatea că sirul $(f_n)_n$ este punctual convergent către f pe A .

Demonstrație

Din uniform echicontinuitate deducem că pentru un punct $x \in A$ fixat și pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $y \in A$, $y \in B(x, \delta_\varepsilon)$ și pentru orice $n \in \mathbb{N}$ să rezulte $|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Din densitatea lui E în A există cel puțin un punct $a \in E \cap B(x, \delta_\varepsilon)$. Din convergența sirului numeric $(f_n(a))_n$ deducem că există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ și orice $p \in \mathbb{N}^*$ rezultă $|f_{n+p}(a) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

În final se obține

$|f_{n+p}(x) - f(x)| \leq |f_{n+p}(x) - f_{n+p}(a)| + |f_{n+p}(a) - f_n(a)| + |f_n(a) - f_n(x)| < \varepsilon$
prin urmare, pentru orice punct $x \in A$ sirul numeric $(f_n(x))_n$ este un sir fundamental, deci convergent.

Așadar se poate defini funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $x \in A$, pentru care aplicăm propoziția anterioară găsind că funcția f este continuă pe A . \square

Teoremă (Arzelà⁴-Ascoli⁵). Fie o submulțime $E \subset A$ și sirul $(f_n)_n$ de funcții reale, $f_n : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietățile:

- familia $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ este **uniform echicontinuă** pe A ,
- E este o submulțime **densă** a mulțimii A ,
- pentru orice $a \in E$ sirul numeric $(f_n(a))_n$ este **mărginit**.

Atunci există o funcție continuă $f \in \mathcal{C}(A; \mathbb{R})$ și un subșir $(f_{n_p})_{n_p}$ punctual convergent pe A către funcția f , adică $\lim_{n_p \rightarrow \infty} f_{n_p}(x) = f(x)$, $x \in A$.

⁴ Arzelà Cesare, 1847-1912, mathematician italian

⁵ Ascoli Giulio, 1843-1896, mathematician italian

Demonstrație. Vom arăta că ultima ipoteză este echivalentă cu ultima ipoteză din propoziția anterioară.

Fie submulțimea densă $E = \{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ a mulțimii A . Deoarece sirul numeric $(f_n(a_1))_n$ este un sir mărginit putem, conform teoremei **Weierstrass**, extrage un subșir $(f_{s_{1,n}}(a_1))_n$, $\{s_{1,n}\} \subseteq \mathbb{N}$ convergent.

În mod similar din sirul numeric $(f_{s_{1,n}}(a_2))_n$ mărginit se poate extrage un subșir $(f_{s_{2,n}}(a_2))_n$, $\{s_{2,n}\} \subseteq \{s_{1,n}\}$ convergent. În particular, sirurile numerice $(f_{s_{2,n}}(a_2))_n$, $(f_{s_{2,n}}(a_1))_n$ sunt convergente.

Se pot construi prin inducție matematică sirurile numerice $(f_{s_{j,n}}(a_j))_n$, $j \in \mathbb{N}$, cu proprietățile:

- $\{s_{j,n}\} \subseteq \{s_{j-1,n}\} \subseteq \dots \subseteq \{s_{1,n}\}$, $j \in \mathbb{N}^*$,
- pentru orice $j \in \mathbb{N}^*$ sirul numeric $(f_{s_{j,n}}(a_j))_n$ este convergent.

Dacă reprezentăm sirurile $(s_{j,n})_n$, $j \in \mathbb{N}^*$, ca o matrice infinită, obținem

$$\begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \dots & s_{1,n} & \dots \\ s_{2,1} & s_{2,2} & \dots & s_{2,n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k,1} & s_{k,2} & \dots & s_{k,n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n,1} & s_{n,2} & \dots & s_{n,n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Sirul $(s_{n,n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ format din elementele diagonale ale matricei infinite are proprietatea că sirul $(s_{n,n})_{n \geq k}$, $k \in \mathbb{N}^*$, este subșir al sirului $(s_{k,n})_n$, $k \leq n$, adică toate elementele sirului $(s_{n,n})_{n \geq k}$ se regăsesc toate pe linia k a submatricei superioare.

Considerăm subșirul de funcții $(f_{s_{n,n}})_n$. Deoarece sirul $(f_{s_{n,n}})_{n \geq k}$ este subșir al lui $(f_{s_{k,n}})_n$, putem afirma că pentru orice punct $a_k \in E$, $k \in \mathbb{N}^*$, sirul

numeric $\left(f_{s_{n,n}}(a_k)\right)_{n \geq k}$ este convergent pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$. În definitiv, sirul numeric $\left(f_{s_{n,n}}(a_k)\right)_n$ este convergent pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$. Conform propoziției anterioare, există funcția f continuă pe mulțimea A astfel încât sirul de funcții $\left(f_{s_{n,n}}\right)_n$ să conveargă punctual către f pe mulțimea A . \square

Din rezultatele anterioare deducem cu ușurință următorul

Corolar (Arzelà-Ascoli). Fie o submulțime $E \subset A$ și sirul $(f_n)_n$ de funcții reale, $f_n : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietățile

- familia $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ este **uniform echicontinuă** pe A ,
- A este o mulțime **compactă**,
- E este o submulțime **densă** a mulțimii A ,
- pentru orice $a \in E$ sirul numeric $(f_n(a))_n$ este **mărginit**.

Atunci există o funcție continuă $f \in \mathcal{C}(A; \mathbb{R})$ și un subșir $(f_{n_p})_{n_p}$ uniform convergent pe A către funcția f .

Exemplu: Fie sirul de funcții $f_n(x) = \sin(n \cdot x)$, $x \in [0,1]$. Se poate arăta cu ușurință că sirul este mărginit și uniform echicontinuu pe mulțimea $[0,1]$. Mai mult pentru orice $x \in (0,1]$ nu există $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Prin teorema **Arzelà-Ascoli** deducem că există un sir $(k_n)_n \subset \mathbb{N}$ și o funcție $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel ca sirul $\{\sin(k_n \cdot x)\}_n$ să conveargă uniform către funcția f sau echivalent

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} |\sin(k_n x) - f(x)| = 0.$$

Remarcă. În *analiza funcțională* teorema lui **Arzela-Ascoli** dă condițiile necesare și suficiente pentru ca o mulțime de funcții continue dintr-un spațiu metric compact să fie compactă în topologia uniform convergenței.

Exemplu: Submulțimea $A \subset C([0,1])$ este compactă dacă și numai dacă A este închisă, mărginită și uniform echicontinuă.

Teoremă (Weierstrass). Mulțimea polinoamelor $\mathbb{R}[x]$ este **completă** în spațiul $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ sau echivalent sistemul de funcții $\{x^n\}_n$ este **complet** în $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.

Teoremă (Müntz⁶-Szász⁷). Sistemul de funcții $\{x^{\lambda_n}\}_n$, $\lambda_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, este **complet** în $\mathcal{L}([0,1], \mathbb{R})$ dacă și numai dacă seria numerică $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda_n}$ este divergentă.

4.3 Proprietăți

În continuare vom examina în ce condiții proprietățile termenilor unui sir de funcții uniform convergente pe mulțimea A se transmit și funcției limită.

Propoziție 4.7 (transferul limitei)

Fie sirul $(f_n)_n$, $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) =^{cu} f(x)$, $x \in A$ și există $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și $x_0 \in A'$, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Teoremă 4.8 (transferul continuității)

Fie $A \subset X$ o mulțime nevidă și sirul $(f_n)_n$, $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$ cu proprietățile:

(i) f_n continuă în punctul $a \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

(ii) $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) =^{cu} f(x)$, $\forall x \in A$,

atunci f este continuă în punctul a .

Demonstrație

Din (i) deducem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $x \in A$ cu $d(x, a) < \delta$ avem că $|f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon$.

Din (ii) deducem că pentru orice $\varepsilon > 0$ și orice $x \in A$ există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n(\varepsilon)$ rezultă $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

În concluzie, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ și $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n(\varepsilon)$ și orice $x \in A$ cu $d(x, a) < \delta$ avem:

$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < 3 \cdot \varepsilon$, adică f este continuă în punctul $a \in A$.

Observații:

1) În cazul în care $a \in A \cap A'$, teorema transferului continuității este valabilă sub forma mai generală: Dacă sirul de funcții $(f_n)_n$ este uniform

⁶ Herman Müntz, 1884-1956, matematician german

⁷ Otto Szász, 1884-1952, matematician german

convergent pe $A \setminus \{a\}$, unde $a \in A \cap A'$ și dacă toate funcțiile f_n sunt continue în punctul a , atunci sirul de funcții $(f_n)_n$ este uniform convergent pe A și limita sa este continuă în a .

2) Teorema transferului continuității rămâne valabilă dacă funcțiile f_n sunt continue la stânga (la dreapta) în punctul a , atunci funcția f va fi continuă la stânga (la dreapta) în punctul a .

Consecință 4.9. Un sir $(f_n)_n$ de funcții continue pe A , uniform convergent pe A , are limita o funcție continuă pe A .

Consecință 4.10. Dacă limita unui sir de funcții continue pe A nu este o funcție continuă pe A , atunci convergența nu este uniformă.

Observație. Este posibil ca sirul de funcții $(f_n)_n$ să nu fie continuu pe A sau convergența să nu fie uniformă și totuși limita să fie continuă. Cu alte cuvinte, uniform convergența oferă o condiție **suficientă**, nu însă și necesară pentru transferul proprietății de continuitate. Există siruri de funcții continue care converg simplu la funcții cu aceeași proprietate.

Exemplu: Fie sirul de funcții $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definit de $f_n(x) = \frac{n \cdot x}{1 + n^2 \cdot x^2}$.

Se observă că $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Mai mult, atât funcțiile f_n , cât și funcția limită f sunt funcții continue pe \mathbb{R} . Totuși, convergența nu este uniformă.

În adevăr, $f'_n(x) = \frac{n \cdot (1 - n^2 \cdot x^2)}{(1 + n^2 \cdot x^2)^2}$ și punctele critice ale funcției f_n sunt

$x = \pm \frac{1}{n}$. Analizând monotonia funcției f_n , se constată că $x = -\frac{1}{n}$ este punct de

minim, iar $x = \frac{1}{n}$ este punct de maxim pentru f_n . Mai mult, aceste puncte sunt

de extrem absolut și $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. De aici rezultă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \max \left(\left| f_n \left(-\frac{1}{n} \right) \right|, \left| f_n \left(\frac{1}{n} \right) \right| \right) = \frac{1}{2} \neq 0$$

și conform criteriului de uniform convergență sirul $(f_n)_n$ nu converge uniform către f pe \mathbb{R} .

Propoziția 4.11 (transferul proprietății de mărginire)

Dacă $(f_n)_n$ este un sir de funcții egal mărginite pe A și uniform convergent către f pe A , atunci funcția limită f este mărginită pe A .

Demonstrație

Cum $\lim_n f_n(x) \stackrel{cu}{=} f(x)$ deducem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n(\varepsilon)$ și orice $x \in A$ avem $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Prin urmare, pentru orice $\varepsilon > 0$ avem că $|f(x)| \leq |f_{n_\varepsilon}(x)| + \varepsilon < M + \varepsilon$, deci $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in A$.

Teorema 4.12 (transferul de integrabilitate)

Fie șirul $(f_n)_n$, $f_n : A = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Dacă

(i) șirul $(f_n)_n$ converge uniform pe mulțimea A către funcția f ;

(ii) funcțiile f_n , $n \in \mathbb{N}$, sunt **Riemann** integrabile pe mulțimea A , atunci

(a) funcția limită f este **Riemann** – integrabilă pe $A = [a, b]$,

(b) șirul $\left(\int_a^b f_n(x) dx \right)_n$ este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

Demonstrație. Deoarece funcțiile f_n sunt integrabile, ele sunt mărginite și prin teorema de transfer a proprietății de mărginire deducem că și funcția limită este mărginită. Cum f_n sunt integrabile, mulțimea A_n a punctelor sale de continuitate este neglijabilă și $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ este neglijabilă. Din teorema transferului

de continuitate mulțimea punctelor de discontinuitate a lui f $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, adică

mulțimea A este neglijabilă și prin criteriul de integrabilitate **Lebesgue** funcția f este integrabilă pe $[a, b]$.

Cum pentru orice $x \in [a, b]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{cu}{=} f(x)$, deducem că pentru orice $\varepsilon > 0$, există numărul $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $x \in [a, b]$ și orice $n \geq n_\varepsilon$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Folosind proprietatea modulului, obținem

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| < \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx < \varepsilon.$$

Exemplu: Se consideră funcția $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = a_1 \cdot 3^{-1} + a_2 \cdot 3^{-2} + \dots \text{ dacă}$$

$$x = a_1 \cdot 2^{-1} + a_2 \cdot 2^{-2} + \dots, \quad a_k \in \{0,1\}, k \in \mathbb{N}^*,$$

adică valoarea funcției f în punctul x este rescrierea în baza 3 a reprezentării binare a lui x .

Vom arăta că f este integrabilă pe $[0,1]$ și vom calcula $\int_0^1 f(x) dx$.

Pentru aceasta, vom defini sirul de funcții $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = a_n \cdot 3^{-n} + a_{n+1} \cdot 3^{-(n+1)} + \dots, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

care are următoarele proprietăți:

- $0 \leq f_n(x) \leq 3^{-n} + 3^{-(n+1)} + \dots < \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}}, \forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*$;
- $f_n(x) = a_n \cdot 3^{-n} + f_{n+1}(x), \forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*$;
- $\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^{2^{-n}} f_n(x) dx + \int_{2^{-n}}^1 f_n(x) dx = \int_0^{2^{-n}} f_{n+1}(x) dx +$
 $+ \int_{2^{-n}}^1 (3^{-n} + f_{n+1}(x)) dx = 3^{-n} \cdot (1 - 2^{-n}) + \int_0^1 f_{n+1}(x) dx.$

Din prima proprietate deducem că sirul de funcții $(f_n)_n$ este convergent uniform către funcția identic nulă pe compactul $[0,1]$. Din ultima proprietate deducem egalitatea

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} \cdot (1 - 2^{-k}) + \int_0^1 f_{n+1}(x) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Pentru ultimul termen din partea dreaptă aplicăm teorema transferului de integrabilitate

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_{n+1}(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n+1}(x) dx = 0.$$

Prin trecere la limită, după n , în penultima egalitate deducem

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} \cdot (1 - 2^{-k}) = \frac{7}{10}.$$

Exemplu: Sirul de funcții $f_n : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definit de $f_n(x) = \frac{\cos(n \cdot x)}{n}$

este un sir de funcții integrabile și uniform convergent pe $[0, \pi]$ către funcția $f(x) \equiv 0$. Pentru orice $\alpha \in [0, \pi]$ se verifică transferul integrabilității

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^\alpha \frac{\cos(n \cdot x)}{n} dx \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \cdot \sin(n \cdot x) \Big|_0^\alpha \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \cdot \sin(n \cdot \alpha) \right) = 0.$$

Exemplu: Sirul de funcții $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definit de $f_n(x) = \frac{n \cdot e^{-x}}{n+x}$ este

uniform convergent pe $[0, \infty)$ către funcția $f(x) \equiv e^{-x}$. Studiem în continuare

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x}{x+n} \cdot e^{-x} = g(x).$$

Studiul variației funcției $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ne permite să afirmăm că funcția este crescătoare pe intervalul $[0, x_n]$ și descrescătoare pe intervalul (x_n, ∞) , unde $x_n = \frac{\sqrt{n^2 + 4 \cdot n} - n}{2}$. Prin urmare,

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x}{x+n} \cdot e^{-x} = g(x) \leq g(x_n).$$

Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = 0$ deducem că $\limsup_{n \rightarrow \infty} \limsup_{x \geq 0} |f_n(x) - f(x)| = 0$, adică sirul de funcții $(f_n)_n$ converge uniform către funcția f pe \mathbb{R}_+ . Din teorema transferului de integrabilitate aplicată sirului de funcții $(f_n)_n$ pe intervalul $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$ avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{n \cdot e^{-x}}{n+x} dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot e^{-x}}{n+x} dx = \int_a^b e^{-x} dx = e^{-a} - e^{-b}.$$

Observație. Convergența uniformă a sirului $(f_n)_n$ este *esențială*, fapt ilustrat de următorul

Exemplu: Fie $A = \{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\} \subset \mathbb{Q}$ mulțimea punctelor raționale din intervalul $[0, 1]$ și sirul de funcții $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definit prin

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{r_1, r_2, \dots, r_n\} \\ 0, & x \in [0, 1] - \{r_1, r_2, \dots, r_n\} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Este clar că fiecare funcție f_n este discontinuă în orice punct rațional $r_i \in A$, $i = 1, 2, \dots, n$, în rest fiind continuă. Având un număr finit de puncte de discontinuitate, rezultă că f_n este integrabilă **Riemann** pe $[0, 1]$.

Pe de altă parte, şirul $(f_n)_n$ converge simplu pe $[0,1]$ la funcția

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in [0,1] - A. \end{cases}$$

Se vede că funcția limită f nu este **Riemann** integrabilă pe $[0,1]$, deoarece dacă considerăm o diviziune

$$\Delta \in \mathcal{D}[0,1], \quad 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_k = 1, \quad k \in \mathbb{N},$$

atunci

$$\sigma_\Delta(f; \xi_i) = \sum_{i=0}^{k-1} f(\xi_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) = \begin{cases} 1, & \xi_i \in A, \forall i \in \{0, 1, \dots, k-1\} \\ 0, & \xi_i \notin A, \forall i \in \{0, 1, \dots, k-1\} \end{cases}$$

ceea ce arată că nu există $\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sigma_\Delta(f; \xi_i)$, prin urmare funcția limită nu este **Riemann** integrabilă pe $[0,1]$.

Observație. Este posibil ca şirul de funcții $(f_n)_n$ să nu fie uniform convergent pe A către f , totuși funcția limită să fie **Riemann** integrabilă pe mulțimea A și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

Acest lucru este ilustrat de următorul

Exemplu: Şirul de funcții $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ este **Riemann** integrabil pe $[0,1]$, converge simplu, dar nu uniform către funcția $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$. Cu toate acestea funcția limită f este **Riemann** integrabilă pe $[0,1]$ și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

Teorema 4.13 (transferul derivabilității)

Dacă şirul $(f_n)_n$ de funcții reale, $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ are proprietățile:

(i) f_n sunt derivabile pe A pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{cu}{=} f(x), \forall x \in A$,

(iii) $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \stackrel{cu}{=} g(x), \forall x \in A$,

atunci

(a) f este derivabilă pe A ,

(b) $f'(x) = g(x)$, $\forall x \in A$, sau echivalent

$$\frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x), \quad \forall x \in A.$$

Demonstrație

Fie $a \in A$ arbitrar, să arătăm că f este derivabilă în a și că $f'(a) = g(a)$.

- Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \stackrel{cu}{=} g(x)$ deducem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există numărul $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_1(\varepsilon)$ și orice $x \in A$

$$|f'_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

- Cum f_n este derivabilă în a obținem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există vecinătatea $U_\varepsilon \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x \in U_\varepsilon \cap A - \{a\}$ are loc

$$\left| \frac{f_n(x) - f_n(a)}{x - a} - f'_n(a) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

- Din criteriul lui **Cauchy** de convergență uniformă deducem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există numărul $n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n, m \geq n_2(\varepsilon)$ și orice $x \in A$ are loc

$$|f'_n(x) - f'_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

- Aplicând teorema lui **Lagrange** funcției $f_n - f_m$ pe intervalul (a, x) , deducem că există punctul $c \in (a, x)$ astfel ca:

$$\left| \frac{f_n(x) - f_n(a)}{x - a} - \frac{f_m(x) - f_m(a)}{x - a} \right| = |f'_n(c) - f'_m(c)|.$$

Combinând ultimele două inegalități, pentru $n, m \geq n_2(\varepsilon)$ și pentru orice $x \in A$, obținem

$$\left| \frac{f_n(x) - f_n(a)}{x - a} - \frac{f_m(x) - f_m(a)}{x - a} \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

În ultima inegalitate trecem la limită după $m \rightarrow \infty$, ținând seama că $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) \stackrel{cu}{=} f(x)$. Astfel obținem că pentru orice $n \geq n_2(\varepsilon)$ și orice $x \in A - \{a\}$ are loc

$$\left| \frac{f_n(x) - f_n(a)}{x - a} - \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Reunim inegalitățile de mai sus, obținem că pentru orice $\varepsilon > 0$ și orice $n \geq \max(n_2(\varepsilon), n_1(\varepsilon))$ există vecinătatea $U_\varepsilon \in \mathcal{V}(a)$ astfel că pentru orice $x \in U_\varepsilon \cap A - \{a\}$ are loc inegalitatea

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - g(a) \right| &\leq \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \frac{f_n(x) - f_n(a)}{x - a} \right| + \\ &+ \left| \frac{f_n(x) - f_n(a)}{x - a} - f'_n(a) \right| + |f'_n(a) - g(a)| < \varepsilon \end{aligned}$$

de unde concluzia teoremei.

Observație. Reciproca acestei teoreme nu este adevărată. Un sir de funcții $(f_n)_n$ poate fi uniform convergent către funcția f , cu f_n derivabile și f derivabilă, fără ca sirul derivatelor $(f'_n)_n$ să fie uniform convergent.

Exemplu: Sirul $f_n(x) = \frac{\sin(n \cdot x)}{n}$, $x \in [0, 2 \cdot \pi]$ este uniform convergent pe $[0, 2 \cdot \pi]$ către funcția $f(x) \equiv 0$, termenii sirului și funcția limită sunt derivabile pe $[0, 2 \cdot \pi]$, dar sirul derivatelor $f'_n(x) = \cos(n \cdot x)$ nu este convergent pe $[0, 2 \cdot \pi]$.

Observație. Convergența uniformă a sirului $(f_n)_n$ nu atrage convergența uniformă a sirului $(f'_n)_n$. Acest fapt este ilustrat de următorul

Exemplu: Sirul de funcții $f_n : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{\cos(n \cdot x)}{n} \xrightarrow{cu} f(x) = 0$

dar $f'_n(x) = -\sin(n \cdot x)$ nu este convergent pe $[0, \pi]$.

Observație. Convergența uniformă a lui sirului $(f'_n)_n$ este *esențială*, fapt ilustrat de următorul

Exemplu: Sirul de funcții $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definit prin $f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg}(n \cdot x)}{n}$

converge uniform către funcția $f(x) = 0$ pe axa reală. Însă sirul derivatelor

$f'_n(x) = \frac{1}{1 + n^2 x}$ este convergent către $g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ o funcție discontinuă,

deci sirul derivatelor este simplu convergent către funcția g . Se poate constata cu ușurință că $f'(0) \neq g(0)$.

Exemplu (G.H. Hardy, Proc.London Math. Soc. 2, 9, 1909, pp.126-144):
Fie sirul de funcții reale $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ definit prin

$$f_n(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cdot \cos 3x + \dots + \frac{1}{2^n} \cdot \cos 3^n x, \quad n \in \mathbb{N},$$

care deși sunt derivabile pe \mathbb{R} și converge uniform pe \mathbb{R} limita sa nu este derivabilă în niciun punct $x_n = 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$ al axei reale.

În adevăr pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și orice $n > p \geq 1$

$$\begin{aligned} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| &= \left| \frac{1}{2^{n+1}} \cos 3^{n+1} x + \dots + \frac{1}{2^{n+p}} \cos 3^{n+p} x \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+p}} < \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

ceea ce arată că sirul de funcții este uniform convergent pe \mathbb{R} .

Pentru partea a doua a concluziei este suficient să demonstrăm că funcția limită f nu este derivabilă în punctul 0 și prin periodicitate în toate punctele $x_n = 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$. Vom considera sirul $x_k = \frac{\pi}{3^k}$, $k \in \mathbb{N}$ care este convergent la zero.

Mai mult, $\cos 3^j x_k = \cos 3^{j-k} \pi = -1$, $j \geq k$. Prin urmare,

$$\begin{aligned} \frac{f_n(x_k) - f_n(0)}{x_k - 0} &= \frac{\cos \frac{\pi}{3^k} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{3^{k-1}} + \dots + \frac{1}{2^n} \cos \frac{\pi}{3^{k-n}} - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{2^n}}{\frac{\pi}{3^k}} = \\ &= \frac{\cos \frac{\pi}{3^k} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{3^{k-1}} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} \cos \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2^k} - \dots - \frac{1}{2^n} - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{2^n}}{\frac{\pi}{3^k}} \end{aligned}$$

Deoarece $\frac{f(x_k) - f(0)}{x_k - 0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x_k) - f_n(0)}{x_k - 0}$, vom obține

$$\begin{aligned} \frac{f(x_k) - f(0)}{x_k - 0} &= \frac{3^k}{\pi} \left(\cos \frac{\pi}{3^k} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{3^{k-1}} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} \cos \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2^k} - \dots - \frac{1}{2^n} - 2 \right) \leq \\ &\leq \frac{3^k}{\pi} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^k} - 2 \right) = -\frac{3^k}{\pi 2^{k-2}} = -\frac{9}{\pi} \left(\frac{3}{2} \right)^{k-2}. \end{aligned}$$

Ceea ce arată că $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x_k) - f(0)}{x_k - 0} = -\infty$, adică funcția limită nu este

derivabilă în punctul zero.

Observație. Chiar dacă sirul de funcții derivabile $(f_n)_n$ este uniform convergent pe A către funcția limită f și aceasta este derivabilă se poate întâmpla ca sirul derivatelor $(f'_n)_n$ să nu conveargă la f' . Putem ilustra acest fapt prin următorul

Exemplu: Sirul de functii $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, definit prin $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ converge uniform catre functia $f(x) = 0$ pe $[0,1]$. Observam insa ca sirul derivatelor $f'_n(x) = x^{n-1}$ este convergent catre $g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x=1 \end{cases}$ o functie discontinua, deci sirul derivatelor este simplu convergent catre functia g . Se poate constata cu usurinta ca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{d}{dx} f_n \right)(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(1) = 1 \neq 0 = \frac{d}{dx} f(1) = \left(\frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)(1).$$

Observatie. Daca A este un interval **mărginit**, concluzia teoremei precedente ramane adevarata chiar daca despre sirul $(f_n)_n$ se stie ca este convergent intr-un singur punct al multimii A .

Teoremă 4.14 (transferul derivabilității). Fie sirul $(f_n)_n$ de functii reale, $f_n : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatile:

- (i) A un interval **mărginit**;
- (ii) functiile $f_n, n \in \mathbb{N}$ sunt derivabile pe A ;
- (iii) sirul numeric $(f_n(x_0))_n$, $x_0 \in A$ este convergent;
- (iv) $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = g(x)$ pentru orice $x \in A$,

atunci

(a) $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ pentru orice $x \in A$,

(b) f este derivabila pe A si pentru orice $x \in A$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x) = \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Demonstratie

Din (iii) deducem ca pentru orice $\varepsilon > 0$ exista numarul $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, astfel incat pentru orice $n, m \geq n_1(\varepsilon)$ are loc

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Din (iv) si criteriul lui **Cauchy** de convergenta uniforma deducem ca pentru orice $\varepsilon > 0$ exista numarul $n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, astfel incat pentru orice $n, m \geq n_2(\varepsilon)$ are loc

$$|f'_n(x) - f'_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot \ell}, \quad \forall x \in A,$$

unde $\ell = \text{lung}(A)$. Folosind inegalitatea triunghiului și teorema lui **Lagrange** aplicată funcției $f_n - f_m$ pe intervalul $[x, x_0] \subseteq A$ se obține

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + |f_n(x) - f_n(x_0) + f_m(x_0) - f_m(x)| = \\ &= |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + |x - x_0| \cdot |f'_n(c) - f'_m(c)| < \frac{\varepsilon}{2} + \ell \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot \ell} = \varepsilon, \end{aligned}$$

cu $c \in (x, a)$ și $m, n \geq \max(n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon))$.

Așadar, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{cu}{=} f(x)$ pe A și din teorema anterioară de transfer de derivabilitate obținem concluzia. \square

Observație. Condițiile pe care le îndeplinesc funcțiile f_n în această teoremă au caracter de suficiență. Există siruri de funcții care pot fi derivate termen cu termen fără ca sirul derivatelor să conveargă uniform.

În acest sens să considerăm sirul de funcții $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin

$$f_n(x) = \frac{\ln(1 + n^4 \cdot x^2)}{2 \cdot n}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Observăm că $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + n^4 \cdot x^2)}{2 \cdot n} = 0$. Deci, sirul $(f_n)_n$ converge simplu pe intervalul $[0,1]$ către funcția limită $f(x) = 0$. Observăm, însă că sirul $f'_n(x) = \frac{x \cdot n^3}{1 + n^4 \cdot x^2}, x \in [0,1], n \in \mathbb{N}^*$ converge simplu pe $[0,1]$ către funcția limită $g(x) = 0$. Cum $f' = g$ deducem că sirul $(f'_n)_n$ converge simplu pe $[0,1]$ către f' . Prin urmare, sirul $(f_n)_n$ verifică relația

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x) = \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad \forall x \in [0,1],$$

deși sirul derivatelor $(f'_n)_n$ nu converge uniform pe $[0,1]$.

4.4 Exerciții

- Să se arate că sirul de funcții $f_n : (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0(x) = 1$, $f_{n+1}(x) = f_n(x) \cdot (1 + x^{n+1})$, $n \in \mathbb{N}$ este convergent pe $(-1,1)$ și

$$\exp\left(\frac{x}{2} \cdot \frac{x+2}{1-x^2}\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \leq \exp\left(\frac{x}{1-x}\right), \quad x \in (-1,1).$$

2. Să se arate că sirul de funcții $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg}(x^n)}{n}$ converge

uniform pe \mathbb{R} și totuși $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(1) \neq \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1)$. Să se explică rezultatul.

3. Să se arate că sirul de funcții $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{n \cdot x}{1 + n^2 \cdot x^2}$,

converge neuniform pe $[0,1]$ și totuși $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$.

Explicați rezultatul.

4. Să se arate că sirul de funcții $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n \cdot (1 - x^n)$ nu este uniform convergent pe $[0,1]$ și totuși

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

Explicați rezultatul.

5. Să se arate că sirul de funcții $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k \cdot x)}{(k+1)^2}$, este

uniform convergent și limita sa este o funcție continuă pe \mathbb{R} .

Indicație de rezolvare. Se aplică criteriul lui **Cauchy**.

$$\begin{aligned} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| &= \left| \frac{\sin[(n+1) \cdot x]}{(n+2)^2} + \frac{\sin[(n+2) \cdot x]}{(n+3)^2} + \dots + \frac{\sin[(n+p) \cdot x]}{(n+p+1)^2} \right| < \\ &< \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} + \frac{1}{(n+2) \cdot (n+3)} + \dots + \frac{1}{(n+p) \cdot (n+p+1)} < \\ &< \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} \right) = \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Deci sirul de funcții $(f_n)_n$ este uniform convergent pe \mathbb{R} . Funcțiile f_n fiind continue pe \mathbb{R} , rezultă că limita sirului va fi o funcție continuă pe \mathbb{R} .

6. Să se arate că sirul de funcții $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = n \cdot x^n \cdot (1-x)$ nu converge uniform pe $[0,1]$ și totuși $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$. Explicați rezultatul.

7. Fie funcția continuă $g : [a,b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $(f_n)_n$ un sir de funcții continue, uniform convergent pe intervalul $[a,b]$ către f . Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) \cdot g(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \cdot g(x) dx$.

8. Fie mulțimea

$C^{0,\alpha}([0,1]; \mathbb{R}) = \{f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ este Holder continuă de exponent } \alpha \in (0,1]\}$ pe care definim norma

$$\|f\|_\alpha = \max_{x \in [0,1]} |f(x)| + \sup_{x,y \in [0,1]} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}, \quad f \in C^{0,\alpha}([0,1]).$$

Folosind teorema lui **Arzela-Ascoli**, arătați că submulțimea $\{f \in C^{0,\alpha}([0,1]) \mid \|f\|_\alpha \leq 1\} \subset C^{0,\alpha}([0,1])$ este compactă în spațiul $C^{0,\alpha}([0,1]; \mathbb{R})$.

9. Fie funcția derivabilă $g : [a,b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $(f_n)_n$ un sir de funcții derivabile cu proprietatea că sirul derivatelor este uniform convergent pe intervalul $[a,b]$ către f' , iar sirul $(f_n)_n$ converge pe $[a,b]$ către f .

Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} (f_n \cdot g)(x) = \frac{d}{dx} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n \cdot g) \right] (x)$.

10. Să se arate că polinoamele **Bernstein**⁸ de gradul n , $B_{k,n} : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin

$$B_{k,n}(x) = C_n^k \cdot x^k \cdot (1-x)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N}:$$

- formează o bază în mulțimea polinoamelor de gradul n ;
- au proprietatea de simetrie și sunt pozitive, adică $0 \leq B_{k,n}(x) = B_{n-k,n}(1-x), \quad \forall x \in [0,1], k = 0, 1, \dots, n, n \in \mathbb{N}$;

⁸ Sergei Natanovich Bernstein, 1880-1968, matematician ucrainian

- realizează partitia unității, adică au *proprietatea de normalizare*

$$\sum_{k=0}^n B_{k,n}(x) = 1, \quad \forall x \in [0,1], \quad n \in \mathbb{N};$$

- satisfac relațiile de recurență

$$\begin{cases} B_{k,n}(x) = (1-x) \cdot B_{k,n-1}(x) + x \cdot B_{k-1,n-1}(x) \\ \frac{d}{dx} B_{k,n}(x) = n \cdot (B_{k-1,n-1}(x) - B_{k,n-1}(x)) \end{cases}, \quad \forall x \in [0,1], \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N};$$

- dezvoltarea **Bernstein** de ordinul n a funcției continue $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{B}_n(x) = \sum_{k=0}^n B_{k,n}(x) \cdot f\left(\frac{k}{n}\right), \quad \forall x \in [0,1], \quad n \in \mathbb{N}^*$$

formează un sir de funcții uniform convergent către funcția f continuă pe intervalul $[0,1]$, adică

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{B}_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n B_{k,n}(x) \cdot f\left(\frac{k}{n}\right) = f(x), \quad \forall x \in [0,1]$$

(teorema lui **Weierstrass**)

11. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uniform continuă pe \mathbb{R} . Să se arate că sirul de funcții $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ este uniform convergent pe \mathbb{R} către funcția f .

12. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuă pe \mathbb{R} . Să se arate că sirul de funcții $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ este uniform convergent pe orice interval compact din \mathbb{R} .

13. Să se arate că sirul de funcții $f_n : [-2,2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0(x) = x$, $f_{n+1}(x) = \sqrt{2 + f_n(x)}$, $n \in \mathbb{N}$ se poate exprima sub forma

$$f_n(x) = 2 \cdot \cos \left(\frac{\arccos \frac{x}{2}}{2^n} \right)$$

și este uniform convergent pe $[-2,2]$.

14. Studiați convergența uniformă a sirului de funcții $(f_n)_n$ definit recurrent prin

$$f_n : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_{n+1}(x) = \sqrt{2 + f_n(x)}, \quad f_0(x) = x.$$

Indicație. $x = 2 \cdot \cos t$, $t \in [0, \pi] \Rightarrow f_n(2 \cdot \cos t) = 2 \cdot \cos \frac{t}{2^n}$ și

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(2 \cdot \cos t) - 1| \leq \frac{\pi}{4^n}$$

de unde convergența uniformă.

15. (Stone⁹) Studiați convergența uniformă a sirului de funcții $(f_n)_n$ definit de recurență

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2} \cdot (x - f_n^2(x)), \quad n \in \mathbb{N}, \quad f_0(x) = x, \quad x \in [0, 1],$$

sir care definește un sir de polinoame, însă limita sa nu este un polinom.

16. Să se arate că sirul $f_n(x) = n \cdot x^n \cdot (1-x)$, $x \in [0, 1]$, nu este uniform

$$\text{convergent, însă } \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

17. Fie funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă, mărginită, monoton crescătoare și $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$. Studiați convergența uniformă a sirului

$$f_n(x) = \frac{n \cdot g(-x) + x \cdot g(-n)}{x + n}, \quad x \geq 0.$$

18. (Arzelà) Fie sirul $f_n : A = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ cu proprietățile:

- i) sirul $(f_n)_n$ converge punctual pe mulțimea A către funcția f ;
- ii) funcțiile f_n , $n \in \mathbb{N}$ sunt **Riemann** integrabile pe mulțimea A ,
- iii) sirul $(f_n)_n$ este uniform mărginit;
- iv) funcția limită f este **Riemann** integrabilă pe A .

Demonstrați că sirul $\left(\int_a^b f_n(x) dx \right)_n$ este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

⁹ Marshall Harvey Stone, 1903-1989, matematician american

19. Fie sirul de functii $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ definit prin

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^n} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

➤ Arătați că funcțiile f_n , $n \in \mathbb{N}$ sunt continue pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

➤ Stabiliți egalitatea

$$\frac{df_n}{dx}(x) = -n \cdot f_{n+1}(x) + 2 \cdot f_{n+3}(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

➤ Arătați că $f_n \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$ și totuși nicio funcție f_n nu este **analitică** în vecinătatea originii; *adică niciun termen al sirului de funcții nu se poate scrie ca suma unei serii de puteri pe un interval ce conține originea*.

CAPITOLUL 5

SERII DE FUNCȚII

Definiție. Fie sirul de funcții $(f_n)_n$, $f_n : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Funcția $f_1(x) + f_2(x) + f_n(x) + \dots$, $x \in A$ formată din termenii sirului de funcții $(f_n)_n$ despărțite între ele de semnul „+” se numește *serie de funcții* pe care o notăm în continuare prin $\sum_{k \geq 1} f_k$, $x \in A$.

Observație. Pentru fiecare $a \in A$ se consideră seria de numere $\sum_{k \geq 1} f_n(a)$, putând astfel aplica seriilor de funcții considerațiile făcute asupra seriilor de numere; seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ poate fi convergentă sau divergentă. De asemenea, analizând seria de funcții prin intermediul sirului sumelor parțiale $(S_n(x))_n$ definit prin $S_n(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in A$, putem aplica seriilor de funcții considerațiile făcute asupra sirurilor de funcții.

Definiție. Vom spune că seria $\sum_{k \geq 1} f_k(x)$ este *convergentă* într-un punct $a \in A$, dacă sirul sumelor parțiale $(S_n(x))_n$ este un sir de funcții convergent în punctul a , punct numit și *punct de convergență* al seriei.

De asemenea, seria de funcții $\sum_n f_n(x)$ este convergentă într-un punct $a \in A$ dacă și numai dacă seria de numere $\sum_{k \geq 1} f_n(a)$ este convergentă (similar pentru absolut convergență).

Mulțimea $B \subseteq A$ a punctelor de convergență se numește *mulțimea de convergență* a seriei de funcții. Funcția $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ definită prin $f(x) = \sum_{n \geq 0} f_n(x)$, $x \in B$ se numește *suma seriei*.

Exemplu: Cu sirul de funcții $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ se formează seria

de funcții $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$, care are mulțimea de convergență $(-\infty, \infty)$.

Definiție. Vom spune că seria $\sum_{k \geq 1} f_k$ este *simplu sau punctual convergentă* pe B către funcția f dacă sirul sumelor parțiale $(S_n)_n$ este simplu convergent către f . De asemenea, vom spune că seria $\sum_{k \geq 1} f_k$ este *uniform convergentă* pe B către f dacă sirul de funcții $(S_n)_n$ este uniform convergent pe B către f . Echivalent:

- seria de funcții $\sum_{k \geq 1} f_k(x)$ este *simplu convergentă* pe B către f dacă

pentru orice $\varepsilon > 0$ și orice $x \in B$ există numărul $n(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n(\varepsilon, x) \Rightarrow |f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$;

- seria de funcții $\sum_{k \geq 1} f_k$ este *uniform convergentă* pe B către f dacă

pentru orice $\varepsilon > 0$ există numărul $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $x \in B$ și orice $n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Exemplu: Fie sirul $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$. Seria $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ este

simplu convergentă pe \mathbb{R} către funcția $f(x) = 1 + x^2$. În adevăr, există $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există $x_n = \sqrt[n]{\sqrt{2} - 1} \in \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$|S_n(x_n) - f(x_n)| = |f_1(x_n) + f_2(x_n) + \dots + f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{(1+x_n^2)^n} = \varepsilon_0 > \frac{1}{3}.$$

Exemplu: Fie seria de funcții $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$, $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, \rho]$, $\rho \in (0, 1)$.

Pentru aceasta, sirul sumelor parțiale $|\sigma_p| < \frac{\varepsilon}{2}$ converge uniform către funcția $f(x) = \frac{1}{1-x}$. În adevăr, pentru orice $\varepsilon > 0$ există numărul $n(\varepsilon) = [\log_\rho(\varepsilon \cdot (1-\rho))] \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $x \in [0, \rho]$ și orice $n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |S_n(x) - f(x)| = |f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, deci seria este uniform convergentă pe $[0, \rho]$.

5.1 Criterii de uniform convergență

Teoremă 5.1 (criteriul general de convergență uniformă - Cauchy)

O serie de funcții $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$, ($f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$) este uniform convergentă pe

mulțimea $B \subseteq A$ dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există numărul $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice numere naturale $n \geq n(\varepsilon)$, $p \geq 1$, și pentru orice $x \in A$, avem:

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

Demonstrație

Seria de funcții este uniform convergentă pe mulțimea B dacă și numai dacă sirul sumelor parțiale $(S_n(\cdot))_n$ este uniform convergent pe mulțimea B . Prin urmare, pentru orice $\varepsilon > 0$ există rangul $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru orice $x \in B$ și orice numere naturale $n \geq n(\varepsilon)$, $p \geq 1$ să rezulte

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

Exemplu: Fie sirul de funcții $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_n(x) = \frac{1}{n^2} \cdot \sin^n x$. Seria

$\sum_{n \geq 1} g_n(x)$ este uniform convergentă pe \mathbb{R} . În adevăr, pentru orice $\varepsilon > 0$ există

numărul $n(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și orice $n \geq n(\varepsilon)$

rezultă

$$\begin{aligned} |g_{n+1}(x) + g_{n+2}(x) + \dots + g_{n+p}(x)| &= \left| \frac{\sin^{n+1} x}{(n+1)^2} + \frac{\sin^{n+2} x}{(n+2)^2} + \dots + \frac{\sin^{n+p} x}{(n+p)^2} \right| < \\ &< \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+p-1) \cdot (n+p)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon \end{aligned}$$

deci seria este uniform convergentă pe \mathbb{R} .

Propoziție 5.2 (Weierstrass)

Fie două siruri de funcții $f_n, \varphi_n : A \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Dacă

(i) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $x \in A$ și orice $n \geq n_0$ avem

$$|f_n(x)| \leq \varphi_n(x),$$

(ii) seria $\sum_{n \geq 1} \varphi_n(x)$ este uniform convergentă pe mulțimea A ,

atunci seria de funcții $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ este uniform convergentă pe A .

Schiță de demonstrație

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| &\leq |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \dots + |f_{n+p}(x)| \leq \\ &\leq \varphi_{n+1}(x) + \varphi_{n+2}(x) + \dots + \varphi_{n+p}(x), \quad \forall n \geq n_\varepsilon, \quad \forall p \geq 1, \quad \forall x \in A \end{aligned}$$

Consecință

Fie șirul de funcții $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ și șirul numeric $(a_n)_n \subset \mathbb{C}$. Dacă

(i) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $x \in A$ și orice $n \geq n_0$ avem

$$|f_n(x)| \leq |a_n|,$$

(ii) seria numerică $\sum_{n \geq 1} a_n$ este convergentă,

atunci seria de funcții $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ este uniform convergentă pe A .

Exemplu: Fie seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, $x \in (1, \infty)$. Aceasta este uniform convergentă pentru orice $x \in (1, \infty)$, deoarece pentru $(\forall) x \in (1, \infty)$, $(\exists) a \in (1, \infty)$, cu $1 < a < x$ și $\frac{1}{n^x} < \frac{1}{n^a}$, iar seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ este convergentă.

5.2 Proprietăți

Datorită analogiei prin intermediul șirului $(S_n)_n$ de funcții, multe rezultate de la șiruri de funcții le regăsim și aici.

Teoremă 5.3 (transfer de continuitate)

Fie seria $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ de funcții definite pe mulțimea $A \subset \mathbb{C}$.

(i) seria este uniform convergentă pe A către funcția f ,

(ii) funcțiile f_n , $n \in \mathbb{N}$ sunt continue în punctul $a \in A$,

atunci funcția f este continuă în a și

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n \geq 1} f_n(x) = \sum_{n \geq 1} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x).$$

Teoremă 5.4 (transfer de derivabilitate)

Fie seria $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ de funcții definite pe A .

(i) seria $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ este uniform convergentă pe A către f ,

(ii) seria derivatelor $\sum_{n \geq 1} f'_n(x)$ este uniform convergentă pe A către g ,

atunci f este derivabilă pe A și $f'(x) = g(x)$, $\forall x \in A$ sau echivalent

$$\frac{d}{dx} \sum_{n \geq 1} f_n = \sum_{n \geq 1} \frac{d}{dx} f_n \text{ pe } A.$$

Exemplu

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$, $x \in [0, 2\pi]$ este uniform convergentă pe $[0, 2\pi]$

deoarece $\left| \frac{\cos nx}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$. Seria derivatelor este $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ care este uniform convergentă pe $[0, 2\pi]$ deoarece $\left| -\frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$. Notând cu $f(x)$ suma seriei considerată, vom avea $f'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$, $x \in [0, 2\pi]$.

Teoremă 5.5 (transfer de derivabilitate)

Fie seria $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ de funcții definite pe compactul $A = [a, b]$.

(i) seria $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ este convergentă în punctul $x_0 \in A$,

(ii) seria derivatelor $\sum_{n \geq 1} f'_n(x)$ este uniform convergentă pe A către funcția

g , atunci

(a) seria $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ este uniform convergentă pe A către f ;

$$(b) \frac{d}{dx} \sum_n f_n = \sum_n \frac{d}{dx} f_n \text{ pe } A.$$

Teoremă 5.6 (transfer de integrabilitate)

Fie $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ de funcții definite pe $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

(i) $(f_n)_n$ integrabile pe $[a, b]$,

(ii) seria $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ este uniform convergentă pe $[a, b]$ către f ,

atunci: (a) f este integrabilă pe $[a, b]$;

$$(b) \sum_{n \geq 1} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \sum_{n \geq 1} f_n(x) dx.$$

Observație

Teorema servește nu numai pentru calculul integralei definite a unei serii de funcții, ci și a primitivelor pe orice interval conținut în mulțimea de convergență uniformă a seriei considerată.

Exemple:

1) Seria trigonometrică $f(x) = 1 + \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \dots + \frac{\cos nx}{n^2} + \dots$ este

uniform convergentă pentru orice x real.

$$\text{Rezultă că } \int f(x) dx = C + x + \frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 2x}{2^3} + \dots + \frac{\sin nx}{n^3} + \dots$$

2) Seria de funcții polinomiale $1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$ este uniform convergentă pentru orice $x \in [a, b] \subset (-1, 1)$ și are suma $\frac{1}{1-x}$.

Din teorema de transfer de integrabilitate rezultă că pentru orice $x \in (-1, 1)$ avem

$$\int \frac{1}{1-x} dx = \int \sum_{k \geq 0} x^k dx = \sum_{k \geq 0} \int x^k dx = C_1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots = -\ln(1-x) + C_2.$$

$$\text{Pentru } x=0 \Rightarrow C_1 = C_2 \Rightarrow \ln(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots, |x| < 1.$$

5.3 Serii de puteri

Seriile de puteri sunt un caz particular al seriilor de funcții.

Definiție. Fie șirul de funcții $(f_n)_n$, $f_n : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Numim *serie de puteri* o serie de funcții $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ cu termenul general

$$f_n(x) = a_n \cdot x^n, a_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}.$$

Observație

Toate rezultatele privind seriile de funcții sunt valabile și pentru seriile de puteri. În studiul seriilor de puteri interesează mulțimea de convergență.

Lemă 5.7

Dacă o serie de puteri $\sum_{n \geq 1} a_n \cdot x^n$ este convergentă în $x_0 \in \mathbb{C}^*$, atunci ea

este absolut convergentă pentru $\forall x \in \mathbb{C}$ cu $|x| < |x_0|$.

Demonstrație

Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n \cdot x_0^n| = 0 \Rightarrow \exists M > 0$ astfel încât $|a_n \cdot x_0^n| < M, \forall n \in \mathbb{N}$.

Prin urmare, $|a_n \cdot x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n < M \cdot r^n$. Concluzia lemei rezultă imediat, dacă se utilizează în continuare criteriul comparației.

Consecință 5.8

Dacă seria de putere $\sum_{n \geq 1} a_n \cdot x^n$ este divergentă în punctul $x_0 \in \mathbb{C}^*$, atunci

pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $|x| > |x_0|$ seria este divergentă.

Teoremă 5.9 (Abel¹)

Pentru orice serie de puteri $\sum_{n \geq 1} a_n \cdot x^n, a_n \in \mathbb{C}$ există $R \geq 0$, numit *rază de convergență*, astfel încât,

- (i) pentru orice $x \in \mathbb{C}, |x| < R$ seria este absolut convergentă,
- (ii) pentru orice $x \in \mathbb{C}, |x| > R$ seria este divergentă
- (iii) pentru orice $x \in \mathbb{C}, |x| \leq r < R$ seria este uniform convergentă.

Demonstrație

Fie B mulțimea de convergență a seriei. Evident $\{0\} \in B \neq \emptyset$.

Dacă $B - \{0\} \neq \emptyset$, vom nota cu $R = \sup B > 0$.

- Să presupunem că $R < \infty$. Atunci $\forall x \in \mathbb{C}, |x| < R, \exists x_0 \in B$ astfel ca $|x| < x_0 < R$ și cum seria este convergentă în x_0 , prin lema 5.7, ea este absolut convergentă în x .

De asemenea, pentru $\forall x \in \mathbb{C}$ cu $|x| > R$ seria este divergentă, deoarece în caz contrar $\exists x_0 \in \mathbb{C}$ astfel încât $R < |x_0| < |x|$ și seria este convergentă în x_0 , ceea ce este absurd, căci $R = \sup B$.

- Să presupunem că $R = +\infty$. În acest caz $\forall x \in \mathbb{C}, \exists x_0 \in \mathbb{C}, |x| < |x_0|$ în care seria este convergentă. Cum în x_0 seria este convergentă deducem că ea este absolut convergentă în x , prin urmare $B = \mathbb{R}$.

- Fie $r \in \mathbb{R}$ cu $0 < r < R \Rightarrow \sum_{n \geq 1} |a_n| \cdot r^n$ este convergentă și $\forall x \in \mathbb{C},$

$(|x| \leq r) \Rightarrow |a_n \cdot x^n| < |a_n| \cdot r^n$. Prin criteriul **Weierstrass** deducem că seria $\sum_{n \geq 1} a_n \cdot x^n$ este uniform convergentă pentru orice $x \in \mathbb{C}, |x| \leq r < R$.

¹ Niels Henrik Abel, 1802-1829, matematician norvegian

Observație

Pentru $|x| = R$ teorema nu afirmă nimic și pentru a stabili natura seriei de puteri în acest caz trebuie studiate seriile numerice corespunzătoare.

Consecință 5.10

Cum termenul general al unei serii de puteri este o funcție polinomială deducem că suma S a unei serii de puteri este continuă, derivabilă și integrabilă pe mulțimea de uniform convergență.

Teoremă 5.11 (Cauchy-Hadamard)²

Fie seria $\sum_n a_n x^n$ o serie de puteri și R raza sa de convergență.

$$\text{Dacă } \exists \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \omega, \text{ atunci } R = \begin{cases} \frac{1}{\omega}, & 0 < \omega \leq \infty (\omega \neq 0) \\ \infty, & \omega = 0. \end{cases}$$

Demonstrație

Fie $x_0 \in \mathbb{C}$ arbitrar și seria numerică $\sum_{n \geq 1} |a_n| \cdot |x_0|^n$ pentru care aplic

criteriul **Cauchy** (radicalului) $\Rightarrow \exists \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n \cdot x_0^n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x_0| = \omega \cdot |x_0|$.

- Dacă $\omega = 0 \Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n \cdot x_0^n|} = 0 < 1$ și seria numerică $\sum_{n \geq 1} |a_n| \cdot |x_0|^n$ este

absolut convergentă pentru $\forall x \in \mathbb{C} \Rightarrow R = 0$.

- Dacă $0 < \omega < \infty$, atunci pentru $|x_0| \cdot \omega < 1$ seria numerică $\sum_{n \geq 1} |a_n| \cdot |x_0|^n$

este absolut convergentă. Mai mult, pentru $|x_0| \cdot \omega > 1$ seria numerică este divergentă. Prin urmare, $R = \frac{1}{\omega}$.

Propoziție (criteriul raportului)

Fie seria $\sum_{n \geq 1} a_n \cdot x^n$ de puteri. Dacă $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \omega$, atunci raza de

convergență a seriei de puteri este $R = \begin{cases} \frac{1}{\omega}, & 0 < \omega \leq \infty; \\ \infty, & \omega = 0. \end{cases}$

Teorema 5.12 (teorema la limită a lui Abel)

Fie seria $\sum_{n \geq 1} a_n \cdot x^n$ de puteri reală ($a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$) și R raza sa de

convergență. Dacă seria este convergentă în R (sau $-R$), atunci suma S a seriei

² Jacques Salomon Hadamard, 1865-1963, matematician francez

este continuă în R (sau $-R$), adică

$$\lim_{x \nearrow R} S(x) = \lim_{x \nearrow R} \sum_{n \geq 1} a_n \cdot x^n = \sum_{n \geq 1} \lim_{x \nearrow R} (a_n \cdot x^n) = \sum_{n \geq 1} a_n \cdot R^n.$$

Demonstrație. Deoarece seria este convergentă în R , prin criteriul **Cauchy** avem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice numere naturale $n \geq n(\varepsilon)$ și $p \geq 1$:

$$\left| a_{n+1} \cdot R^{n+1} + a_{n+2} \cdot R^{n+2} + \dots + a_{n+p} \cdot R^{n+p} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

și dacă notăm prin $\sigma_p = S_{n+p} - S_n$, unde $(S_n)_n$ este sirul sumelor parțiale ale seriei numerice $\sum_{n \geq 1} a_n \cdot R^n$, deducem că pentru orice $p \geq 1$, $|\sigma_p| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Dar

$$\begin{cases} a_{n+1} \cdot R^{n+1} = S_{n+1} - S_n = \sigma_1 \\ a_{n+2} \cdot R^{n+2} = S_{n+2} - S_{n+1} = \sigma_2 - \sigma_1 \\ \dots \\ a_{n+p} \cdot R^{n+p} = S_{n+p} - S_{n+p-1} = \sigma_p - \sigma_{p-1} \end{cases}$$

Pentru $x \in [0, R]$ notăm $0 < y = \frac{x}{R} \leq 1$. Atunci pentru orice $n \geq n(\varepsilon)$ și

$p \geq 1$ avem:

$$\begin{aligned} & \left| a_{n+1} \cdot x^{n+1} + a_{n+2} \cdot x^{n+2} + \dots + a_{n+p} \cdot x^{n+p} \right| = \\ &= \left| a_{n+1} \cdot R^{n+1} \cdot y^{n+1} + a_{n+2} \cdot R^{n+2} \cdot y^{n+2} + \dots + a_{n+p} \cdot R^{n+p} \cdot y^{n+p} \right| = \\ &= \left| \sigma_1 \cdot y^{n+1} + (\sigma_2 - \sigma_1) \cdot y^{n+2} + \dots + (\sigma_p - \sigma_{p-1}) \cdot y^{n+p} \right| = \\ &= \left| \sigma_1 y^{n+1} (1-y) + \sigma_2 y^{n+2} (1-y) + \dots + \sigma_{p-1} y^{n+p-1} (1-y) + \sigma_p y^{n+p} \right| = \\ &= \left| y^{n+1} \cdot (1-y) \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 \cdot y + \dots + \sigma_{p-1} \cdot y^{p-2}) + \sigma_{p-1} \cdot y^{n+p-1} \right| \leq \\ &\leq (1-y) \cdot (\left| \sigma_1 \right| + \left| \sigma_2 \right| \cdot y + \dots + \left| \sigma_{p-1} \right| \cdot y^{p-2}) + \left| \sigma_p \right| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot (1-y) \cdot \left(\frac{1-y^{p-1}}{1-y} \right) + \frac{\varepsilon}{2} = \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \cdot (2 - y^{p-1}) < \varepsilon \end{aligned}$$

și conform criteriului **Cauchy** seria este uniform convergentă pe $[0, R]$.

Cum termenii seriei de puteri sunt funcții continue, deducem că suma seriei S este continuă pe $[0, R]$.

Propoziție

Dacă seria $\sum_{n \geq 1} a_n \cdot x^n$ de puteri are raza de convergență R , atunci

(i) seria derivatelor $\sum_{n \geq 1} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$ are aceeași rază de convergență;

(ii) suma seriei de puteri S este derivabilă și

$$S'(x) = \sum_{n \geq 1} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}, |x| < R.$$

Exemplu:

Fie seria $\sum_{n \geq 0} \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - n + 1)}{n!} \cdot x^n = \sum_{n \geq 0} C_n^\alpha \cdot x^n$ numită și *seria binomială*. Din criteriul raportului deducem raza de convergență $R = 1$.

Notând cu f suma seriei și folosind propoziția de mai sus pentru $|x| \leq r < 1$, obținem:

$$f'(x) + x \cdot f'(x) = \alpha \cdot f(x), |x| \leq r < 1 \Rightarrow f(x) = C \cdot (1 + x)^\alpha, C \in \mathbb{R}.$$

Cum $f(0) = 1 \Rightarrow f(x) = (1 + x)^\alpha$. Cele mai cunoscute aplicații sunt

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, |x| < 1;$

- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n \cdot x^n + \dots, |x| < 1.$

5.4 Seria Taylor reală

Observație 5.13

Se cunoaște că dacă $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^{n+1}(E; \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci pentru $a \in \overset{\circ}{E}$ are loc

$$\begin{aligned} f(x) &= T_n(x; a) + R_n(x; a) = \\ &= f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x; a), x \in E \end{aligned}$$

unde restul formulei **Taylor**

$$R_n(x; a) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)], (0 < \theta < 1).$$

Vom presupune $f \in C^\infty(E)$, în acest caz numărul $n \in \mathbb{N}$ poate fi oricât de mare și fie $T(x)$ suma acestei serii

$$T(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots, x \in E \cap A.$$

Seria de puteri din partea dreaptă se numește seria **Taylor** a funcției f în punctul $a \in \overset{\circ}{E}$.

Observație

Fiind o serie de puteri se mențin toate proprietățile seriilor de puteri referitoare la raza de convergență, teoreme de transfer etc.

Sumele parțiale ale acestei serii sunt polinoamele **Taylor** asociate funcției f în punctul a . Avem deci

$$\begin{aligned} T(x) &= T_n(x) + \rho_n(x), \quad x \in A \cap E \text{ și} \\ f(x) &= T_n(x; a) + R_n(x; a), \quad x \in E, \end{aligned}$$

aici A este mulțimea de convergență a seriei **Taylor**.

Se pune întrebarea: în ce condiții $f(x) \equiv T(x)$, $x \in A \cap E$?

Teoremă 5.14 (Taylor)

O funcție $f \in C^\infty(E; \mathbb{R})$, E interval mărginit este dezvoltabilă în serie Taylor în $a \in \overset{\circ}{E}$ dacă derivatele sale sunt uniform mărginite pe E , adică:

$$\exists M > 0, \forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}, |f^{(n)}(x)| \leq M.$$

Demonstrație

Restul sub formă **Lagrange** este:

$$|R_n(x; a)| = \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(a + \theta \cdot (x-a)) \right| \leq \frac{M \cdot |x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{M \cdot \ell^{n+1}}{(n+1)!} = u_n.$$

Cum există $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, rezultă că există și $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x; a) = 0$ și prin urmare, seria **Taylor** a lui f în $a \in \overset{\circ}{E}$ este uniform convergentă pe E .

Teoremă 5.15 (Taylor)

Seria **Taylor** a funcției $f \in C^\infty(E; \mathbb{R})$ în punctul $a \in \overset{\circ}{E}$ este convergentă pe mulțimea $A \cap E$ către f dacă și numai dacă sirul resturilor $(R_n(x; a))_n$ este convergent către zero.

Demonstrație

„ \Leftarrow ” este imediată.

\Rightarrow Cum $f(x) = T_n(x; a) + R_n(x; a)$, $\forall x \in A \cap E$, $n \in \mathbb{N}$ rezultă

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x; a) = f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x; a) = 0.$$

Cum în acest caz $\lim_{n \rightarrow a} T_n(x; a) = T(x)$, $x \in A \cap E$ și limita este unică
 $\Rightarrow f(x) = T(x)$, $x \in A \cap E$.

5.5 Exerciții

1. Fie $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Să se arate că

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{a + n \cdot b} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt$$

și folosind eventual acest rezultat demonstrați egalitatea

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{3 \cdot n - 1} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2 \right).$$

2. Fie seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n \cdot x^{n+1}}{(n+1) \cdot (n+2)}$, $x \in \mathbb{R}$. Să se determine:

- mulțimea de convergență;
- suma seriei de funcții pe intervalul de convergență;

- $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2^2} - \frac{2}{3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{n}{(n+1) \cdot (n+2)} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \right]$.

3. Fie seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^{n+1}}{(n+1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Să se determine:

- mulțimea de uniform convergență a seriei de funcții,
- suma f a seriei de puteri pe mulțimea de convergență.

4. Demonstrați convergența seriei numerice

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(2 \cdot n - 1)!!}{(2 \cdot n + 1)^2 \cdot (2 \cdot n)!!}$$

Folosind dezvoltarea în serie de puteri a funcției $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, să se arate că suma seriei numerice este $\frac{\pi}{2} \cdot \ln 2 - 1$.

5. Funcția $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *funcție în scară* dacă există o diviziune a intervalului $[a,b]$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $n \in \mathbb{N}^*$ astfel ca pe orice interval $[x_{k-1}, x_k)$, $k = 1, \dots, n$ funcția f să fie constantă. Să se arate că sirul de funcții în scară $f_n : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ definite prin

$$f_n(x) = f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right), \quad x \in \left[a + k \cdot \frac{b-a}{n}, a + (k+1) \cdot \frac{b-a}{n}\right), \quad k = 0, \dots, n-1,$$

unde $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt uniform convergente către funcția f pe intervalul

$[a,b]$. Studiați convergența sirului numeric $\left(\int_a^b f_n(x) dx\right)_n$.

6. Să se dezvolte perioada pendulului matematic T dat de expresia

$$T(t) = 4 \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2 \cdot \sin^2 x}} dx, \quad t \in (-1,1), \quad L, g \in \mathbb{R}_+^*,$$

după puterile lui t , precizând mulțimea de convergență a seriei obținute.

7. Fie seria de funcții $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \cdot x^{n+1}}{n^2 - 1}$, $x \in \mathbb{R}$. Să se determine:

- mulțimea de uniform convergență a seriei de funcții,
- suma f a seriei de puteri pe mulțimea de convergență.

8. Se consideră sirul de funcții $f_n : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ definit prin recurență

$$f_{n+1}(x) = x + \frac{1}{f_n(x)}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad x > 0, \quad f_1(x) = x.$$

➤ Să se arate că sirul este convergent pe domeniul de definiție și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}, \quad x > 0.$$

➤ Dacă se prelungește funcția f prin continuitate pe \mathbb{R} , să se dezvolte f în serie de puteri în punctul $x = 0$, precizându-se mulțimea de convergență.

9. Să se demonstreze că are loc următoarea dezvoltare în serie de puteri

$$(\arcsin x)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{x^{2n}}{n}, \quad x \in (-1,1).$$

CAPITOLUL 6

CALCUL DIFERENȚIAL ÎN \mathbb{R}^p

În calculul diferențial al funcțiilor reale de variabilă reală se definesc noțiunile echivalente de funcție derivabilă și, respectiv, funcție diferențială. În acest capitol vom extinde aceste definiții la cazul funcțiilor vectoriale de variabilă vectorială.

Astfel sunt introduse și studiate conceptele de diferențialitate parțială, globală, Gâteaux¹ și Fréchet² de ordinul întâi și de ordin superior. Sunt generalizate teoremele de medie Fermat, Rolle, Lagrange, Cauchy, Taylor și se demonstrează rezultate fundamentale ale diferențialității, teorema de inversare locală și teorema funcțiilor implice.

6.1 Diferențialitate de ordinul întâi

6.1.1 Derivabilitate parțială de ordinul întâi

Fie mulțimea $A \subset \mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}^*$ o mulțime deschisă nevidă, punctul interior $a = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p) \in A$ și funcția

$$f = (f_1 \ f_2 \ \dots \ f_q) : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q, q \in \mathbb{N}^*,$$

vectorială de argument vectorial definită pe mulțimea A .

Pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ vom nota prin

$$A_i = \{t \in \mathbb{R} \mid a + t \cdot e_i \in A\}$$

proiecția mulțimii A pe axa reală, unde $e_i = (0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0)$ este vectorul de ordin i al bazei *canonice* din \mathbb{R}^p .

Considerăm funcția reală de variabilă reală $\varphi_i : A_i \rightarrow \mathbb{R}^q$, definită prin $\varphi_i(t) = f(a + t \cdot e_i)$ numită și *funcție parțială în raport cu variabila de indice i* a funcției f în punctul a .

Să remarcăm că datorită faptului că punctul a este punct interior pentru mulțimea A , rezultă imediat că punctul 0 este punct interior pentru mulțimea A_i .

¹ René Gâteaux, 1889-1914, matematician francez

² Maurice Réne Fréchet, 1878-1973, matematician francez

și deci are sens să punem problema derivabilității funcțiilor φ_k , $k=1,2,\dots,p$ în origine.

Definiție 6.1. Spunem că funcția $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este *derivabilă parțial* în raport cu variabila de indice i în punctul $a = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p) \in A$ dacă funcția φ_i este derivabilă în punctul $t_0 = 0$.

Cu alte cuvinte, funcția f este derivabilă parțial în raport cu variabila de indice i în punctul interior $a = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p) \in A$, dacă și numai dacă există (și este finită pentru $q=1$) limita

$$\varphi_i^{(1)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_i(t) - \varphi_i(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t \cdot e_i) - f(a)}{t} \in \mathbb{R}^q.$$

Definiție 6.2. Vectorul $\varphi_i^{(1)}(0)$ se numește *derivata parțială în raport cu variabila de indice i* a funcției f în punctul interior $a = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p) \in A$ și se notează prin $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ori $f_{x_i}^{(1)}(a)$ sau chiar $D_i f(a)$.

Deci, dacă funcția f este derivabilă parțial în raport cu variabila de indice i în punctul interior $a = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p) \in A$, atunci

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1 \ \dots \ a_{i-1} \ a_i + t \ a_{i+1} \ \dots \ a_p) - f(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p)}{t} \in \mathbb{R}^q.$$

Definiție 6.3. Spunem că funcția $f = (f_1 \ f_2 \ \dots \ f_q): A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este *derivabilă parțial* în punctul interior $a = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p) \in A$, dacă pentru orice indice $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ funcția f este derivabilă parțial în raport cu variabila de indice i în punctul a .

De aici rezultă că derivabilitatea parțială a unei funcții vectoriale de argument vectorial $f = (f_1 \ f_2 \ \dots \ f_q): A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ în punctul interior $a = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p) \in A$ este echivalentă cu proprietatea ca pentru orice indice $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ aplicațiile $R_i = (R_i^1 \ R_i^2 \ \dots \ R_i^q)$ definite prin

$$R_i^j(t) = \frac{f_j(a + t \cdot e_i) - f_j(a)}{t}, \quad t \neq 0, \quad j = 1, 2, \dots, q,$$

să aibă limită (finită în cazul $q=1$) în punctul $t_0 = 0$.

Tinând seama că o aplicație vectorială are limită într-un punct interior a dacă și numai dacă toate componentele sale au limită finită, se obține

Propoziție 6.4. Aplicația $f = (f_1 \ f_2 \ \dots \ f_q) : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este derivabilă parțial în punctul interior $a = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p) \in A$ dacă și numai dacă toate componentele sale $f_k : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, $k = 1, \dots, p$ sunt derivabile parțial în punctul a . În plus, deoarece limita unei aplicații vectoriale este limita pe componente, avem că

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} R_i(t) = \left(\lim_{t \rightarrow 0} R_i^1(t) \quad \lim_{t \rightarrow 0} R_i^2(t) \quad \dots \quad \lim_{t \rightarrow 0} R_i^q(t) \right) = \\ &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a) \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(a) \quad \dots \quad \frac{\partial f_q}{\partial x_i}(a) \right),\end{aligned}$$

adică componentele derivatei parțiale în raport cu variabila de indice i a funcției f în punctul a sunt derivatele parțiale în raport cu variabila de indice i ale componentelor funcției f în punctul a .

De aici rezultă că oricărei aplicații $f = (f_1 \ f_2 \ \dots \ f_q) : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ derivabilă parțial în punctul interior $a = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p) \in A$ î se poate asocia matricea reală cu q linii și p coloane

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_q}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix} \in M_{q \times p}(\mathbb{R})$$

numită *matricea lui Jacobi asociată aplicației f în punctul a* și notată cu $f'(a)$. Pentru matricea $f'(a)$ se mai utilizează și denumirea de *derivata de ordinul întâi a aplicației f în punctul a* .

În cazul particular $p = q$, matricea $f'(a)$ este o matrice pătratică al cărei determinant se notează cu

$$J_f(a) = \det f'(a)$$

și se numește **Jacobianul** aplicației f (derivabile parțial) în punctul a .

Dacă $f = (f_1 \ f_2 \ \dots \ f_q) : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este derivabilă parțial în punctul $a = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p) \in A$, atunci determinantul $J_f(a) = \det f'(a)$ se mai notează prin

$$J_f(a) = \frac{D(f_1 \ f_2 \ \dots \ f_p)}{D(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_p)}(a)$$

și se numește *determinantul funcțional* al funcțiilor reale f_1, f_2, \dots, f_p în raport cu variabilele x_1, x_2, \dots, x_p în punctul a .

Exemplu 6.5: Aplicația $f : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(\rho, \alpha) = (\rho \cdot \cos \alpha \quad \rho \cdot \sin \alpha)$$

este derivabilă parțial în orice punct $a = (\rho, \alpha) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$ și

$$f^{(1)}(a) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\rho \cdot \sin \alpha \\ \sin \alpha & \rho \cdot \cos \alpha \end{pmatrix}$$

de unde rezultă că

$$J_f(a) = \det f^{(1)}(a) = \rho.$$

Remarcă 6.6. Din calculul diferențial al funcțiilor reale de variabilă reală se știe că orice funcție derivabilă într-un punct este continuă în acel punct. Aplicând acest rezultat pentru funcțiile $\varphi_k, k = 1, \dots, p$, parțiale în raport cu variabila de indice k a funcției f în punctul a , se obține imediat că dacă funcția $f = (f_1 \ f_2 \ \dots \ f_q) : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este derivabilă parțial în punctul $a \in A$, atunci f este continuă parțial în punctul $a \in A$.

Exemplul care urmează arată că implicația reciprocă nu este adevărată.

Exemplu 6.7 (funcție continuă care nu este derivabilă parțial): Funcția $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|$ este continuă în punctul $a = 0_p = (0 \ 0 \ \dots \ 0)$, dar nu este derivabilă parțial în acest punct, deoarece pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ funcția

$$\varphi_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_i(t) = f(a + t \cdot e_i) = |t|$$

nu este derivabilă în origine.

Se pune problema dacă o funcție derivabilă parțial este continuă. Răspunsul este *negativ*, aşa cum arată următorul

Exemplu 6.8 (funcție discontinuă derivabilă parțial): Funcția

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & x_1^2 + x_2^2 > 0 \\ 0, & x_1^2 + x_2^2 = 0 \end{cases}$$

este discontinuă în origine, deoarece există sirul $(x_{1n}, x_{2n}) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$ convergent la origine $(0,0)$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{1n}, x_{2n}) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$.

Funcțiile parțiale $\varphi_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_i(t) = f(a + t \cdot e_i) = 0$, $i = 1, 2$ fiind constante sunt derivabile în origine și $\varphi_i^{(1)}(0) = 0$, $i = 1, 2$. În consecință, funcția f este derivabilă parțial în origine și

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \varphi_i^{(1)}(0) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Regulile de derivare cunoscute în cazul funcțiilor reale de variabilă reală rămân adevărate și în cazul derivatelor parțiale ale funcțiilor vectoriale de variabilă vectorială. Astfel

Propoziție 6.9. Dacă funcțiile $f, g : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ sunt derivabile parțial în punctul interior $a \in A$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ și $\langle f, g \rangle$ sunt derivabile parțial în punctul $a \in A$ și au loc relațiile

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(a) &= \alpha \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}f(a) + \beta \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}g(a) \\ \frac{\partial}{\partial x_i}\langle f, g \rangle(a) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}f(a), g(a) \right\rangle + \left\langle f(a), \frac{\partial}{\partial x_i}g(a) \right\rangle \end{aligned}$$

Dacă $q = 1$ și $g(x) \neq 0, \forall x \in A$, atunci $\frac{f}{g}$ este derivabilă parțial în punctul a și

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(f)(a) - f(a) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(g)(a)}{g^2(a)}, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Demonstrație. Dacă $f = (f_1 \ f_2 \ \dots \ f_q)$, $g = (g_1 \ g_2 \ \dots \ g_q)$, iar $\varphi_i = (\varphi_i^1 \ \varphi_i^2 \ \dots \ \varphi_i^q)$ și, respectiv, $\psi_i = (\psi_i^1 \ \psi_i^2 \ \dots \ \psi_i^q)$ sunt funcțiile parțiale în raport cu variabila de indice i a funcțiilor f și, respectiv, g în punctul a , atunci funcția parțială în raport cu variabila de indice i a funcției

$$\langle f, g \rangle = f_1 \cdot g_1 + f_2 \cdot g_2 + \dots + f_q \cdot g_q$$

în punctul a este

$$\begin{aligned} P_i(t) &= \langle f(a + t \cdot e_i), g(a + t \cdot e_i) \rangle = \langle \varphi_i(t), \psi_i(t) \rangle = \\ &= \varphi_i^1(t) \cdot \psi_i^1(t) + \varphi_i^2(t) \cdot \psi_i^2(t) + \dots + \varphi_i^q(t) \cdot \psi_i^q(t), \quad t \in V(0) \end{aligned}$$

Tinând seama că o sumă finită de produse de funcții reale derivabile este o funcție derivabilă, obținem că funcția $\langle f, g \rangle$ este derivabilă parțial în punctul a și

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \langle f, g \rangle(a) &= P_i^{(1)}(0) = (\varphi_i^1)^{(1)}(0) \cdot \psi_i^1(0) + \varphi_i^1(0) \cdot (\psi_i^1)^{(1)}(0) + \\ &+ (\varphi_i^2)^{(1)}(0) \cdot \psi_i^2(0) + \varphi_i^2(0) \cdot (\psi_i^2)^{(1)}(0) + \dots + (\varphi_i^q)^{(1)}(0) \cdot \psi_i^q(0) + \varphi_i^q(0) \cdot (\psi_i^q)^{(1)}(0) = \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} f(a), g(a) \right\rangle + \left\langle f(a), \frac{\partial}{\partial x_i} g(a) \right\rangle, \quad i = 1, 2, \dots, p \end{aligned}$$

Analog se demonstrează derivabilitatea parțială în punctul a a funcțiilor $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ și $\frac{f}{g}$ (în cazul $q = 1$) și se verifică regulile de derivare date în enunț. \square

Spre deosebire de cazul funcțiilor reale de argument real unde compusa a două funcții derivabile era derivabilă, în cazul funcțiilor vectoriale de argument vectorial compusa a două funcții derivabile parțial **nu** mai este neapărat derivabilă parțial, după cum se poate constata din următorul exemplu

Exemplu 6.10 (Funcții derivabile parțial, a căror compusă nu este derivabilă parțial): Funcțiile

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2) = (x_1 \cdot x_2, x_1 \cdot x_2) \\ g: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & x_1^2 + x_2^2 > 0 \\ 0, & x_1^2 + x_2^2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

sunt derivabile parțial în punctul $a = (0, 0)$ și, respectiv, în punctul $b = f(a) = (0, 0)$, dar compusa lor

$$g \circ f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (g \circ f)(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x_1^2 + x_2^2 > 0 \\ 0, & x_1^2 + x_2^2 = 0 \end{cases}$$

nu este derivabilă parțial în punctul $a = (0, 0)$, deoarece nu este continuă parțial în acest punct.

Definiție 6.11. Spunem că aplicația $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este *derivabilă parțial pe mulțimea A* , dacă f este derivabilă parțial în orice punct $a \in A$.

În acest caz, aplicațiile $\frac{\partial f}{\partial x_i} : A \rightarrow \mathbb{R}^q$, $i = 1, 2, \dots, p$, se numesc *derivatele parțiale ale aplicației f pe mulțimea A*.

În cazul particular $q = 1$, pentru orice funcție $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă parțial pe mulțimea A se definește aplicația

$$\nabla f : A \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad (\nabla f)(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}, \quad a \in \overset{\circ}{A}$$

numită *gradientul funcției f*.

Cu alte cuvinte, gradientul unei funcții reale derivabilă parțial pe o mulțime este o aplicație vectorială care are drept componente derivatele parțiale ale funcției f . În teoria câmpului, ∇ se mai numește și *operatorul nabla* al lui **Hamilton**³. Se mai utilizează notația

$$\nabla f = \text{grad } f.$$

Am remarcat deja că existența derivatelor parțiale ale unei funcții într-un punct nu asigură continuitatea funcției în acel punct. O condiție suficientă de continuitate într-un punct al unei funcții derivabile parțial este dată de

Propoziție 6.12. Dacă funcția $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este derivabilă parțial pe mulțimea deschisă A și $\nabla f : A \rightarrow \mathbb{R}^p$ este mărginită pe o vecinătate V a punctului $a \in \overset{\circ}{A}$, atunci funcția f este continuă în a .

Demonstrație. Dacă funcția f este derivabilă parțial pe mulțimea A și există o vecinătate $V \subset A$ a punctului a astfel ca ∇f este mărginită pe V , atunci există constanta $M > 0$ astfel ca

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| < M, \quad \forall x \in V, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Prin aplicarea teoremei lui **Lagrange**⁴, din calculul diferențial al funcțiilor reale de variabilă reală rezultă că pentru orice punct $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_p) \in V$ există punctul $c = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_p) \in V$ cu coordonatele având proprietatea că $c_i \in (a_i, x_i)$, $i = 1, 2, \dots, p$, astfel ca

³ Sir **William Rowan Hamilton**, matematician irlandez, 1805-1865

⁴ Joseph-Louis Lagrange, matematician italian, 1736-1813

$$\begin{aligned}
f(x) - f(a) &= f(x_1, \dots, x_{p-1}, x_p) - f(x_1, \dots, x_{p-1}, a_p) + \\
&\quad + f(x_1, \dots, x_{p-1}, a_p) - f(x_1, \dots, x_{p-2}, a_{p-1}, a_p) + \dots + \\
&\quad + f(x_1, x_2, a_3, \dots, a_{p-1}, a_p) - f(x_1, a_2, a_3, \dots, a_{p-1}, a_p) + \\
&\quad + f(x_1, a_2, a_3, \dots, a_{p-1}, a_p) - f(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{p-1}, a_p) = \\
&= \sum_{i=1}^p (x_i - a_i) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, c_i, a_{i+1}, \dots, a_p),
\end{aligned}$$

unde în cazul când există $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ cu $x_j = a_j$ se ia $c_j = x_j$.

Deci

$$|f(x) - f(a)| \leq M \cdot \sum_{i=1}^p |x_i - a_i| \leq M \cdot p \cdot \|x - a\|, \quad \forall x \in V.$$

De aici rezultă imediat că

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

și deci funcția f este continuă în punctul a . \square

Propoziția precedentă arată că dacă funcția f are derivate parțiale mărginite pe o vecinătate $V \subset A$ a punctului $a \in \overset{\circ}{A}$, atunci f este continuă în a .

Această condiție suficientă de continuitate nu este și necesară, fapt motivat de următorul exemplu.

Exemplu 6.13 (Funcție continuă cu derivate parțiale nemărginite):
Funcția

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \begin{cases} (x_1^2 + x_2^2) \cdot \cos \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & x_1^2 + x_2^2 > 0 \\ 0, & x_1^2 + x_2^2 = 0 \end{cases}$$

este continuă pe $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ și din

$$|f(x_1, x_2)| \leq x_1^2 + x_2^2$$

rezultă că

$$\exists \lim_{\delta x \rightarrow 0} f(x_1, x_2) = 0 = f(0,0)$$

și deci f este continuă și în origine. În concluzie, f este continuă pe \mathbb{R}^2 . Se observă că f este derivabilă parțial pe $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ (ca produs de funcții derivabile parțial) și

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2) = 2 \cdot x_i \cdot \cos \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad x_1^2 + x_2^2 > 0, i = 1, 2$$

Deoarece funcția parțială

$$\varphi_i(t) = f(t \cdot e_i) = \begin{cases} x_i \cdot \cos \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & x_1^2 + x_2^2 > 0 \\ 0, & x_1^2 + x_2^2 = 0 \end{cases}, i = 1, 2$$

este derivabilă și cu derivata nulă în punctul $t_0 = 0$, rezultă că f este derivabilă parțial în punctul $a = (0, 0)$ și

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(0, 0) = \varphi_i^{(1)}(0) = 0, i = 1, 2.$$

Mai mult, notând cu $a_n = \left(\frac{1}{2 \cdot n \cdot \pi}, 0\right)$ un sir convergent la origine, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \pi = \infty,$$

deci $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, în consecință nici ∇f nu este mărginită pe nicio vecinătate a punctului $a = (0, 0)$.

6.1.2 Diferențabilitate în sens Gâteaux de ordinul întâi

Fie mulțimea $A \subset \mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}^*$ o mulțime deschisă nevidă, punctul interior $a = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_q) \in A$ și funcția

$$f = (f_1 \ f_2 \ \dots \ f_p) : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q, q \in \mathbb{N}^*$$

vectorială de argument vectorial definită pe mulțimea A .

Vom nota prin

$$V_a = \{t \in \mathbb{R} \mid a + t \cdot v \in A\}, \quad v \in \mathbb{R}^p$$

și cum punctul a este punct interior pentru mulțimea A , deducem că $\mathbf{0}$ este punct interior pentru mulțimea $V_a \subset \mathbb{R}$. Are deci sens să ne punem problema derivabilității aplicației:

$$F_v : V_a \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q, \quad F_v(t) = f(a + t \cdot v).$$

Definiție 6.14. Spunem că aplicația $f = (f_1 \ f_2 \ \dots \ f_p) : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este *derivabilă după direcția v în punctul $a \in A$* , dacă aplicația F_v este derivabilă în punctul $t_0 = 0$.

Vectorul (numărul real în cazul $q = 1$) $F_v^{(1)}(0)$ se notează cu $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ sau

$D_v f(a)$ și se numește *derivata după direcția v a funcției f în punctul a* .

Prin urmare dacă f este derivabilă după direcția v în punctul a , atunci există:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t \cdot v) - f(a)}{t} \in \mathbb{R}^q.$$

Remarcă 6.15. Pentru cazul particular $v = e_i$ se obține imediat că funcția f este derivabilă parțial în raport cu variabila de indice i în punctul a dacă și numai dacă f este derivabilă după direcția e_i în punctul a .

În plus, avem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(a).$$

Remarcă 6.16. Dacă $p = 1$, atunci derivabilitatea unei aplicații $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$ după o direcție $v \in \mathbb{R}^*$ într-un punct $a \in A$ este echivalentă cu derivabilitatea funcției f în punctul a .

În adevăr este suficient să observăm că în acest caz

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t \cdot v) - f(a)}{t} = v \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t \cdot v) - f(a)}{t \cdot v} = v \cdot f^{(1)}(a)$$

și deci

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = v \cdot f^{(1)}(a).$$

Remarcă 6.17. Înănd seama că derivabilitatea aplicației F_v implică continuitatea sa, din Definiția 6.14 rezultă că *dacă f este derivabilă după direcția v în punctul a , atunci f este continuă după direcția v în a* .

Remarcă 6.18. Aplicația $f = (f_1 \ f_2 \ \dots \ f_p) : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este derivabilă după direcția v în punctul $a \in A$ dacă și numai dacă toate componente sale $f_k, k = 1, \dots, q$ sunt derivabile după direcția v în punctul a .

În plus, are loc egalitatea

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}(a) \ \frac{\partial f_2}{\partial v}(a) \ \dots \ \frac{\partial f_q}{\partial v}(a) \right)$$

Pentru justificare este suficient să observăm că

$$\frac{f(a + t \cdot v) - f(a)}{t} = \left(\frac{f_1(a + t \cdot v) - f_1(a)}{t} \ \dots \ \frac{f_q(a + t \cdot v) - f_q(a)}{t} \right)$$

și apoi se trece la limită pentru $t \rightarrow 0$, înănd seama că limita unei aplicații vectoriale este vectorul care are drept componente limitele componentelor aplicației respective.

Definiție 6.19. Spunem că o aplicație

$$f = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_p \end{pmatrix}: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$$

este *diferențiabilă în sens Gâteaux* în punctul $a \in A$ dacă f este derivabilă după orice direcție $v \in \mathbb{R}^p$ în punctul a . Aplicația $\delta_a f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, $\delta_a f(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(a)$, care asociază fiecărui vector $v \in \mathbb{R}^p$ derivata după direcția v a funcției f în punctul a se numește *diferențiala Gâteaux a funcției f în punctul a* .

Să remarcăm că derivata după o direcție $v \in \mathbb{R}^p$ a unei aplicații $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ într-un punct $a \in A$ este un vector din \mathbb{R}^q , pentru $q=1$ fiind un număr real, în timp ce diferențiala *Gâteaux* a aplicației f în punctul a este o *aplicație* definită pe \mathbb{R}^p cu valori în \mathbb{R}^q , deși aplicația f este definită doar pe mulțimea A .

Remarcă 6.20. Din definiția precedentă și Remarca 6.15 rezultă imediat că dacă funcția f este diferențiabilă în sens *Gâteaux* în punctul a , atunci f este derivabilă parțial în punctul a și are loc relația

$$\delta_a f(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a), \quad i=1, \dots, p.$$

Prin urmare, dacă notăm cu \mathcal{G}_a respectiv \mathcal{D}_a mulțimea aplicațiilor diferențiabile în sens *Gâteaux*, respectiv derivabile parțial în punctul a , atunci

$$\mathcal{G}_a \subset \mathcal{D}_a$$

inclusiunea reciprocă nefiind adevărată, fapt subliniat de următorul

Exemplu 6.21 (Funcție derivabilă parțial, dar care nu este diferențiabilă în sens Gâteaux): Funcția

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & x_1^2 + x_2^2 > 0 \\ 0, & x_1^2 + x_2^2 = 0 \end{cases}$$

este derivabilă parțial în punctul $a=(0,0)$ (vezi exemplul 6.8). Se observă că dacă $v=(v_1, v_2) \neq (0,0)$, atunci

$$\frac{f(a+t \cdot v) - f(a)}{t} = \frac{f(t \cdot v_1, t \cdot v_2)}{t} = \frac{f(t \cdot v)}{t}, \quad t \neq 0,$$

care nu are limită pentru $t \rightarrow 0$ și deci funcția f nu este derivabilă după direcția v în punctul a . În concluzie, f nu este diferențiabilă în sens *Gâteaux* în origine deși este derivabilă parțial în acest punct.

Remarcă 6.22. Dacă $p=1$, atunci din Remarca 6.16 obținem că diferențiabilitatea în sens *Gâteaux* a unei aplicații $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$ într-un punct

$a \in A$ este echivalentă cu derivabilitatea aplicației f în punctul a . În plus, avem că

$$(\delta_a f)(v) = v \cdot f^{(1)}(a), \quad \forall v \in \mathbb{R}.$$

Remarca 6.23. Din Remarca 6.17 rezultă imediat că dacă $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este diferențiabilă în sens **Gâteaux** în punctul a , atunci f este continuă în sens **Gâteaux** în punctul a . În consecință, dacă notăm cu \mathcal{C}_a mulțimea aplicațiilor continue în sens **Gâteaux** în punctul a , atunci

$$\mathcal{G}_a \subset \mathcal{C}_a.$$

Ne punem întrebarea dacă diferențiabilitatea în sens **Gâteaux** a unei aplicații f într-un punct a implică continuitatea lui f în a . Răspunsul este negativ (în cazul $p > 1$) aşa cum este ilustrat în următorul

Exemplu 6.24 (Funcție discontinuă și diferențiabilă în sens **Gâteaux**):
Funcția

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2}{x_2}, & x_2 \neq 0 \\ 0, & x_2 = 0 \end{cases}$$

este discontinuă în punctul $a = (0, 0)$, deoarece există un sir $x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \in \mathbb{R}^2$

convergent la a astfel încât sirul $f(x_n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nu converge către valoarea funcției în punctul $a = (0, 0)$. Mai mult, se poate demonstra că funcția f nu are limită în origine. În schimb, se observă că pentru orice punct $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ avem că

$$\frac{f(a + t \cdot v) - f(a)}{t} = \frac{f(t \cdot v_1, t \cdot v_2)}{t} = f(v_1, v_2),$$

deci f este diferențiabilă în sens **Gâteaux** în punctul $a = (0, 0)$, iar $\delta_{(0,0)} f = f$.

Se pune întrebarea dacă proprietatea de continuitate în punctul a nu implică diferențiabilitatea în sens **Gâteaux** în punctul a . Răspunsul este negativ, fapt ilustrat de următorul exemplu

Exemplu 6.25 (Funcție continuă care nu este diferențiabilă în sens **Gâteaux**):

Funcția

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

este continuă în punctul $a = (0, 0)$, dar nu este diferențiabilă în sens **Gâteaux** în punctul a căci f nu este derivabilă parțial în punctul a , fapt arătat în Exemplul 6.7.

Remarcă 6.26. Din Remarca 6.18 rezultă imediat că funcția $f = (f_1 \ f_2 \ \dots \ f_p) : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este diferențiabilă în sens **Gâteaux** în punctul a dacă și numai dacă toate componentele sale sunt diferențiabile în sens **Gâteaux** în punctul a . În plus, avem că:

$$\delta_a f(v) = (\delta_a f_1(v) \ \delta_a f_2(v) \ \dots \ \delta_a f_q(v)), \quad \forall v \in \mathbb{R}^p.$$

Operațiile aritmetice cu funcții diferențiabile în sens **Gâteaux** în punctul a au drept rezultat funcții cu aceeași proprietate.

Propoziție 6.27. Dacă funcțiile $f, g : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ sunt diferențiabile în sens **Gâteaux** în punctul interior $a \in A$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ și $\langle f, g \rangle$ sunt diferențiabile în sens **Gâteaux** în punctul $a \in A$ și au loc relațiile

$$\begin{aligned}\delta_a(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) &= \alpha \cdot \delta_a f + \beta \cdot \delta_a g \\ \delta_a \langle f, g \rangle &= \langle \delta_a f, g(a) \rangle + \langle f(a), \delta_a g \rangle.\end{aligned}$$

Dacă $q = 1$ și $g(x) \neq 0, \forall x \in A$, atunci $\frac{f}{g}$ este diferențiabilă în sens **Gâteaux** în punctul a și

$$\delta_a \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{g(a) \cdot \delta_a f - f(a) \cdot \delta_a g}{g^2(a)}.$$

Demonstrație. Prin trecere la limită în egalitățile

$$\begin{aligned}\frac{(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(a + t \cdot v) - (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(a)}{t} &= \\ &= \alpha \cdot \frac{f(a + t \cdot v) - f(a)}{t} + \beta \cdot \frac{g(a + t \cdot v) - g(a)}{t} \\ \frac{\langle f, g \rangle(a + t \cdot v) - \langle f, g \rangle(a)}{t} &= \left\langle \frac{f(a + t \cdot v) - f(a)}{t}, g(a + t \cdot v) \right\rangle + \\ &\quad + \left\langle f(a + t \cdot v), \frac{g(a + t \cdot v) - g(a)}{t} \right\rangle\end{aligned}$$

și respectiv

$$\frac{\left(\frac{f}{g} \right)(a + t \cdot v) - \left(\frac{f}{g} \right)(a)}{t} = \frac{(f(a + t \cdot v) - f(a)) \cdot g(a) - f(a) \cdot (g(a + t \cdot v) - g(a))}{t \cdot g(a) \cdot g(a + t \cdot v)}$$

ținându-se seama că f și g sunt continue după direcția v în punctul a . \square

Se pune problema dacă compusa a două aplicații diferențiabile în sens **Gâteaux** este diferențiabilă în sens **Gâteaux**. Răspunsul este negativ, fapt ilustrat de următorul exemplu

Exemplu 6.28 (Funcții diferențiabile în sens **Gâteaux** a căror compusă nu este diferențiabilă în sens **Gâteaux**):

Funcțiile

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2}{x_2}, & x_2 \neq 0 \\ 0, & x_2 = 0 \end{cases}$$

și

$$g : \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) = \frac{1}{1+t}$$

sunt diferențiabile în sens **Gâteaux** în punctul $a = (0, 0)$ și, respectiv, $b = f(a) = 0$. (vezi Exemplul 6.24 și Remarca 6.22) Să observăm că compusa lor

$$g \circ f : \mathbb{R}^2 - \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = -1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

definită prin

$$g \circ f(x_1, x_2) = \frac{1}{1 + f(x_1, x_2)} = \begin{cases} \frac{x_2}{x_2 + x_1^2}, & x_2 \neq 0 \\ 1, & x_2 = 0 \end{cases}$$

nu este diferențiabilă în sens **Gâteaux** în punctul $a = (0, 0)$, deoarece dacă considerăm vectorul $v = (1, 0)$, atunci

$$\frac{(g \circ f)(a + t \cdot v) - (g \circ f)(a)}{t} = \frac{g(f(t \cdot v)) - 1}{t} = -\frac{1}{t},$$

care nu are limită în punctul $t_0 = 0$.

6.1.3 Diferențiabilitate în sens Fréchet de ordinul întâi

Se știe că dacă o funcție reală de variabilă reală $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă într-un punct interior $a \in A$, atunci graficul lui f admite tangentă în punctul $(a, f(a))$, iar ecuația tangentei este

$$y - f(a) = f^{(1)}(a) \cdot (x - a).$$

Dacă f este derivabilă în punctul $a \in A$ și notăm prin

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = f(a) + f^{(1)}(a) \cdot (x - a),$$

atunci

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - f(x)}{x - a} = 0,$$

caz în care mai spunem că *funcțiile F și f sunt tangente în punctul $a \in A$* .

Reciproc, dacă există o funcție de forma

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = b_0 + b_1 \cdot x, \quad b_0, b_1 \in \mathbb{R}$$

numită și *funcțională afină* pe \mathbb{R} , încât f și F sunt tangente în punctul $a \in A$, atunci funcția f este derivabilă în punctul $a \in A$ și

$$b_0 = f(a) - a \cdot f^{(1)}(a), \quad b_1 = f^{(1)}(a).$$

În continuare ne propunem să generalizăm noțiunea de tangentă pentru cazul aplicațiilor de mai multe variabile reale.

Definiție 6.29. Aplicațiile $f, F : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ se numesc tangente în punctul interior $a \in A$, dacă

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - f(x)}{\|x - a\|_p} = 0 \in \mathbb{R}^q.$$

Remarcă 6.30. Dacă f și F sunt tangente în punctul interior $a \in A$, atunci $F(a) = f(a)$.

Remarcă 6.31. Fie $f, F_1, F_2 : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ cu proprietatea că perechile (f, F_1) și (f, F_2) sunt tangente în punctul interior $a \in A$, atunci (F_1, F_2) sunt tangente în punctul $a \in A$. În adevăr, din faptul că perechile (f, F_1) și (f, F_2) sunt tangente în punctul interior $a \in A$ și din inegalitatea

$$\frac{\|F_1(x) - F_2(x)\|_q}{\|x - a\|_p} \leq \frac{\|F_1(x) - f(x)\|_q}{\|x - a\|_p} + \frac{\|F_2(x) - f(x)\|_q}{\|x - a\|_p}$$

rezultă imediat, prin trecere la limită pentru $x \rightarrow a$, că (F_1, F_2) sunt tangente în punctul $a \in A$.

Problema centrală a acestei secțiuni este studiul mulțimii aplicațiilor $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ numite și aplicații affine, cu proprietatea că F și f sunt tangente în punctul interior $a \in A$.

Remarcă 6.32. Dacă $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ are proprietatea că există o aplicație afină

$$F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q, \quad F(x) = b_0 + L(x), \quad b_0 \in \mathbb{R}^q,$$

unde $L : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este o aplicație liniară, încât f și F sunt tangente în punctul $a \in A$, atunci F este unică.

Pentru justificarea acestei afirmații să observăm mai întâi că $F(a) = f(a)$ (vezi Remarcă 6.30) și deci

$$b_0 = f(a) - L(a)$$

de unde rezultă că orice aplicație afină proprietatea că f și F sunt tangente în punctul $a \in A$ este de forma

$$F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q, \quad F(x) = f(a) + L(x - a),$$

unde $L : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este o aplicație liniară.

Să presupunem, prin absurd, că ar exista două aplicații affine $F_1, F_2 : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ definite prin

$$F_k : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q, \quad F_k(x) = f(a) + L_k(x - a), \quad k = 1, 2,$$

cu $L_k : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, $k = 1, 2$, aplicații liniare, astfel că perechile (f, F_1) și (f, F_2) sunt tangente în punctul interior $a \in A$. Din **Remarca 6.31** deducem că aplicațiile $F_1, F_2 : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ sunt tangente în punctul $a \in A$ și deci

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{\|F_1(x) - F_2(x)\|_q}{\|x - a\|_p} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\|(L_1 - L_2)(x - a)\|_q}{\|x - a\|_p} = 0,$$

ceea ce este echivalent cu faptul că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice $x \in A$, $\|x - a\|_p < \delta$ să avem

$$\|(L_1 - L_2)(x - a)\|_q < \varepsilon \cdot \|x - a\|_p.$$

În particular, pentru $t \in (0, \delta)$ și pentru orice $v \in \mathbb{R}^p$, $\|v\| = 1$, iar $x = a + t \cdot v \in A$ obținem că

$$\|(L_1 - L_2)v\|_q < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$$

și deci $L_1(v) = L_2(v)$, $\forall v \in \mathbb{R}^p$, $\|v\| = 1$.

Mai mult, pentru orice $v \in \mathbb{R}^p$, $v \neq 0$ avem

$$L_1(v) = \|v\| \cdot L_1\left(\frac{v}{\|v\|}\right) = \|v\| \cdot L_2\left(\frac{v}{\|v\|}\right) = L_2(v)$$

de unde se obține $L_1 \equiv L_2$ și de aici $F_1 \equiv F_2$.

Definiție 6.33. O aplicație $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ se numește *diferențialabilă în sens Fréchet*, pe scurt diferențialabilă, în punctul interior $a \in A$, dacă există o aplicație liniară $L : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ astfel ca f și

$$F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q, \quad F(x) = f(a) + L(x - a)$$

să fie tangente în punctul $a \in A$. Aplicația liniară L (a cărei unicitate rezultă din **Remarca 6.32**) se numește diferențiala **Fréchet** a funcției f în punctul a și notăm cu $d_a f$.

Cu alte cuvinte, o aplicație $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este diferențialabilă **Fréchet** în punctul interior $a \in A$ dacă și numai dacă există o aplicație liniară $L : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ cu proprietatea

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x-a\|_p} = 0 \in \mathbb{R}^q.$$

Remarcă 6.34. Definiția dată noțiunii de aplicație diferențiabilă într-un punct este în mod evident generalizabilă pentru cazul $f: A \subset X_1 \rightarrow X_2$, unde X_1, X_2 sunt spații vectoriale normate.

Mai există o altă noțiune de diferențiabilitate, pe care o menționăm fără a da mai multe amănunte.

Definiție. O funcție $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este diferențiabilă în sens **Carathéodory**⁵ în punctul $a \in A$ dacă există o funcție $\varphi: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ continuă în punctul $a \in A$ astfel încât

$$f(x) - f(a) = \varphi(x) \cdot (x-a), \quad x \in A.$$

Se poate demonstra că orice funcție diferențiabilă **Carathéodory** este diferențiabilă **Fréchet**, reciproc nu.

Exemplu 6.35 (Diferențiabilitatea aplicațiilor liniare): Fie $L: X_1 \rightarrow X_2$ o aplicație liniară de la spațiul vectorial normat X_1 la spațiul vectorial normat X_2 . Atunci L este diferențiabilă în orice punct interior $a \in X_1$ și $d_a L = L$, $\forall a \in X_1$.

În adevăr, este suficient să observăm că

$$\frac{L(x) - L(a) - L(x-a)}{\|x-a\|} = 0 \in X_2.$$

Ca un caz particular, considerăm cazul funcțiionalelor liniare $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ care, conform teoremei de reprezentare a funcțiionalelor liniare a lui **Riesz**⁶ în \mathbb{R}^p , sunt de forma

$$f(x_1, x_2, \dots, x_p) = \langle b, x \rangle = b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \dots + b_p \cdot x_p,$$

unde $b = (b_1, b_2, \dots, b_p) \in \mathbb{R}^p$. Deci, funcția f este diferențiabilă în orice punct $a \in \mathbb{R}^p$ și $d_a f = f$, $\forall a \in \mathbb{R}^p$.

Remarcă 6.36. Ca și în cazul diferențiabilității parțiale și, respectiv, diferențiabilitatea în sens **Gâteaux** a unei aplicații vectoriale și diferențiabilitatea în sens **Fréchet** a unei aplicații vectoriale se reduce la diferențiabilitatea funcțiilor reale. Mai exact, avem că o aplicație $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este diferențiabilă în punctul interior $a \in A$ dacă și numai

⁵ Constantin Carathéodory, matematician grec, 1873-1950

⁶ Frigyes Riesz, matematician maghiar, 1880-1956

dacă toate componentele sale $f = (f_1, f_2, \dots, f_q)$ sunt diferențiabile în punctul $a \in A$. În plus, are loc egalitatea

$$d_a f = (d_a f_1, d_a f_2, \dots, d_a f_q).$$

În adevăr, dacă f este diferențiabilă în punctul interior a și $d_a f = L = (L_1, L_2, \dots, L_q)$, unde $L_k : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, q$ sunt funcționale liniare pe \mathbb{R}^p , atunci din

$$\begin{aligned} & \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x-a\|} = \\ & = \left(\frac{f_1(x) - f_1(a) - L_1(x-a)}{\|x-a\|}, \dots, \frac{f_q(x) - f_q(a) - L_q(x-a)}{\|x-a\|} \right) \end{aligned} \quad (*)$$

prin trecere la limită pentru $x \rightarrow a$ se obține că f_1, f_2, \dots, f_q sunt diferențiabile în punctul a și

$$d_a f_k = L_k, \forall k = 1, 2, \dots, q.$$

Reciproc, dacă f_1, f_2, \dots, f_q sunt diferențiabile în punctul a și notăm $L_k = d_a f_k$, atunci $L = (L_1, L_2, \dots, L_q)$ este o aplicație liniară de la \mathbb{R}^p la \mathbb{R}^q care verifică egalitatea (*). Prin trecere la limită pentru $x \rightarrow a$ se obține că f este diferențiabilă în punctul $a \in A$ și $d_a f = L$. \square

Caracterizări ale noțiunii de aplicație diferențiabilă ne furnizează următoarea teoremă.

Teoremă 6.37. Pentru orice aplicație $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ sunt echivalente următoarele afirmații:

- (1) f este diferențiabilă în punctul $a \in A$;
- (2) există aplicația liniară $L : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel ca pentru orice $x \in A$, $\|x-a\| < \delta$ să avem

$$\|f(x) - f(a) - L(x-a)\| < \varepsilon \cdot \|x-a\|;$$

- (3) există aplicația liniară $L : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ și aplicația $\omega : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ continuă și nulă în punctul a ($\omega(a) = 0$) astfel că pentru orice $x \in A$ are loc

$$f(x) = f(a) + L(x-a) + \|x-a\| \cdot \omega(x);$$

- (4) există constantele $b_1, b_2, \dots, b_p \in \mathbb{R}^q$ și aplicațiile $\omega_1, \dots, \omega_p : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ continue și nule în punctul a astfel că pentru orice $x \in A$ are loc

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^p (x_k - a_k) \cdot (b_k + \omega_k(x)).$$

Demonstrație. Implicația $(1) \Rightarrow (2)$ rezultă imediat din transcrierea în limbaj $(\varepsilon - \delta)$ a egalității

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$$

$(2) \Rightarrow (3)$. Se verifică imediat că în ipoteza (2) funcția $\omega: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ definită prin

$$\omega(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x-a\|}, & x \neq a \\ 0, & x = a \end{cases}$$

are proprietățile cerute de (3) .

$(3) \Rightarrow (4)$. Pentru $k = 1, 2, \dots, p$ notăm cu $b_k = L(e_k)$ și $\omega_k: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ aplicația definită prin

$$\omega_k(x) = \begin{cases} \frac{x_k - a_k}{\|x-a\|} \cdot \omega(x), & x \neq a \\ 0, & x = a \end{cases}$$

unde $B = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ este baza canonica din \mathbb{R}^p .

Din inegalitatea $\|\omega_k(x)\| \leq \|\omega(x)\|, \forall x \in A, k = 1, 2, \dots, p$ rezultă prin trecere la limită pentru $x \rightarrow a$ că aplicația ω_k este continuă și nulă în punctul a .

Din egalitatea de la (3) și din definițiile constantelor b_k și a aplicațiilor ω_k se obține imediat egalitatea de la (4) .

$(4) \Rightarrow (1)$. Fie aplicația $L: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ definită prin

$$L(x_1, x_2, \dots, x_p) = b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \dots + b_p \cdot x_p.$$

Se verifică imediat că L este liniară și din (4) rezultă

$$\frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x-a\|} \leq \sum_{k=1}^p \frac{|x_k - a_k|}{\|x-a\|} \cdot \|\omega_k(x)\| \leq \sum_{k=1}^p \|\omega_k(x)\|$$

de unde prin trecere la limită pentru $x \rightarrow a$ se obține că

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x-a\|} = 0,$$

deci f este diferențiabilă în punctul a și $d_a f = L$. \square

Din teorema precedentă obținem conexiuni între concepțele de diferențiabilitate, diferențiabilitate în sens **Gâteaux**, derivabilitate parțială și continuitate puse în evidență de

Corolar 6.38. Dacă $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este diferențiabilă în punctul $a \in A$, atunci

- (i) f este continuă în punctul a ;
- (ii) f este diferențiabilă în sens **Gâteaux** în punctul a și $\delta_a f = d_a f$;
- (iii) f este derivabilă parțial în punctul a și
 - a) $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = d_a f(e_k)$, $k = 1, 2, \dots, p$;
 - b) $d_a f(v) = \sum_{k=1}^p v_k \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$, $\forall v \in \mathbb{R}^p$.

Demonstrație. (i) Dacă f este diferențiabilă în punctul interior a , atunci prin trecere la limită pentru $x \rightarrow a$ în egalitatea dată de proprietatea (3) a **Teoremei 6.37**, ținând seama că o aplicație liniară L este continuă și $L(0) = 0$ se obține că

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

deci f este continuă în punctul a .

(ii) Fie $v \in \mathbb{R}^p$, $t \in \mathbb{R}^*$ și $L = d_a f$. Atunci din egalitatea de la (3) a **Teoremei 6.37** obținem că

$$\frac{f(a + t \cdot v) - f(a)}{t} = \frac{L(t \cdot v) + \omega(a + t \cdot v) \cdot \|t \cdot v\|}{t} = L(v) + \frac{|t|}{t} \cdot \omega(a + t \cdot v) \cdot \|v\|$$

de unde prin trecere la limită pentru $t \rightarrow 0$ rezultă că există

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t \cdot v) - f(a)}{t} = L(v),$$

adică f este diferențiabilă în sens **Gâteaux** în punctul a și $\delta_a f = d_a f$.

(iii) Derivabilitatea parțială a funcției f în punctul a rezultă imediat din (ii), ținând seama că orice aplicație diferențiabilă în sens **Gâteaux** în punctul a este derivabilă parțial în punctul a (vezi **Remarca 6.20**) și

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \delta_a f(e_k), \quad k = 1, 2, \dots, p.$$

Ținând seama de (ii), deducem că

$$d_a f(e_k) = \delta_a f(e_k) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a), \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

de unde în baza liniarității lui $d_a f$ obținem

$$d_a f(v) = d_a f\left(\sum_{k=1}^p v_k \cdot e_k\right) = \sum_{k=1}^p v_k \cdot d_a f(e_k) = \sum_{k=1}^p v_k \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}(a), \quad \forall v \in \mathbb{R}^p. \quad \square$$

Remarcă 6.39. Amintim că dacă $L: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este o aplicație liniară cu componente $L_k: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, q$, atunci matricea asociată aplicației liniare L este matricea $[L] \in M_{q \times p}(\mathbb{R})$ definită prin

$$[L] = (L_j(e_i))_{i=1, \dots, p; j=1, \dots, q}.$$

În particular, dacă $f = (f_1, f_2, \dots, f_q): A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este diferențiabilă în punctul interior $a \in A$, atunci matricea asociată aplicației liniare

$$d_a f = (d_a f_1, d_a f_2, \dots, d_a f_q)$$

este

$$\begin{aligned} [d_a f] &= \begin{pmatrix} d_a f_1(e_1) & d_a f_1(e_2) & \dots & d_a f_1(e_p) \\ d_a f_2(e_1) & d_a f_2(e_2) & \dots & d_a f_2(e_p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_a f_q(e_1) & d_a f_q(e_2) & \dots & d_a f_q(e_p) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_q}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix} = f^{(1)}(a) \end{aligned}$$

adică matricea asociată diferențialei funcției f în punctul a este tocmai derivata funcției f în punctul a .

Remarcă 6.40. Se știe că orice aplicație liniară $L: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este continuă pe \mathbb{R}^p . Din continuitatea aplicației liniare L pe mulțimea compactă

$$K_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^p \mid \|x\| \leq 1 \right\}$$

obținem că numărul

$$\|L\| := \sup_{x \in K_1} \|L(x)\| < \infty$$

număr numit și normă aplicației liniare L .

Din definiția normei $\|L\|$ rezultă că pentru orice $x \neq 0$ avem că

$$\|L(x)\| = \|x\| \cdot \left\| L\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \|L\| \cdot \|x\|$$

și deci

$$\|L(x)\| \leq \|L\| \cdot \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^p.$$

În cazul particular când $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este diferențiabilă în punctul a , obținem

$$\|d_a f(v)\| \leq \|d_a f\| \cdot \|v\|, \quad \forall v \in \mathbb{R}^p.$$

Remarcă 6.41. Reținem că diferențiala unei aplicații $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, diferențiabile în punctul a , este o aplicație liniară de la \mathbb{R}^p la \mathbb{R}^q . În cazul mai general al aplicațiilor $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ diferențiabile în sens **Gâteaux** în punctul a , avem că diferențiala **Gâteaux** $\delta_a f$ nu este neapărat liniară. Se pune întrebarea dacă liniaritatea diferențialei **Gâteaux** $\delta_a f$ a unei aplicații $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, diferențiabilă în sens **Gâteaux** în punctul a , este suficientă nu numai necesară pentru diferențiabilitatea lui f în punctul a .

Răspunsul este negativ și este ilustrat de

Exemplu 6.42 (Funcție nediferențiabilă în punctul a , care este diferențiabilă în sens **Gâteaux** în punctul a cu diferențiala $\delta_a f$ liniară): Funcția

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2}{x_2}, & x_2 \neq 0 \\ 0, & x_2 = 0 \end{cases}$$

este diferențiabilă în sens **Gâteaux** în punctul $a = (0, 0)$, deoarece

$$\exists \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t \cdot v) - f(a)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t \cdot v)}{t} = 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^2,$$

adică $\delta_a f = 0$ este liniară.

Cu toate acestea f nu este diferențiabilă în punctul a , căci f este discontinuă în punctul a (vezi Corolarul 6.38). Pentru justificarea discontinuității în punctul a este suficient să observăm că există sirul $x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^3} \right) \rightarrow (0, 0)$ astfel încât $f(x_n) = 1 \rightarrow 1 \neq 0 = f(a)$.

Remarcă 6.43. Dacă notăm cu \mathcal{F}_a , respectiv \mathcal{G}_a și \mathcal{D}_a mulțimea aplicațiilor $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ diferențiabile, respectiv diferențiabile în sens **Gâteaux** și derivabile parțial în punctul a , iar cu \mathcal{C}_a , respectiv cu \mathcal{CG}_a și \mathcal{CP}_a mulțimea aplicațiilor $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ continue, respectiv continue în sens **Gâteaux** și continue parțial în punctul a , atunci din Corolarul 6.38 și Remarcile 6.26 și 6.6 rezultă că au loc incluziunile

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{F}_a & \subset & \mathcal{G}_a & \subset & \mathcal{D}_a \\ \cap & & \cap & & \cap \\ \mathcal{C}_a & \subset & \mathcal{CG}_a & \subset & \mathcal{CP}_a \end{array}$$

Incluziunile reciproce nu au loc. Din exemplele prezentate până aici rezultă că justificarea acestei afirmații este suficientă.

Exemplu 6.44 (Funcție continuă care nu este diferențiabilă): Funcția

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

este continuă în punctul $a = (0, 0)$, dar nu este diferențiabilă în punctul a , deoarece f nu este derivabilă parțial în punctul a , fapt arătat în exemplul 6.7.

Am văzut că proprietățile de continuitate și, respectiv, de diferențiabilitate în sens **Gâteaux** a unei aplicații în punctul a (luate separat) nu implică diferențiabilitatea în punctul a a aplicației respective. Ne punem problema dacă continuitatea și diferențiabilitatea în sens **Gâteaux** (luate împreună) a unei aplicații f în punctul a implică diferențiabilitatea lui f în punctul a . Răspunsul este și de data aceasta negativ, fapt ilustrat de

Exemplu 6.45. Funcție continuă și diferențiabilă în sens **Gâteaux** care nu este diferențiabilă. Funcția

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^3}{x_1^2 + x_2^2}, & x_1^2 + x_2^2 > 0 \\ 0, & x_1^2 + x_2^2 = 0 \end{cases}$$

are proprietatea că

$$|f(x_1, x_2)| \leq |x_1|, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

de unde pentru $x \rightarrow a = (0, 0)$ se obține că

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = f(a),$$

adică f este continuă în punctul a . Din

$$\frac{f(a + t \cdot v) - f(a)}{t} = \frac{f(t \cdot v)}{t} = f(v), \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$$

prin trecere la limită pentru $t \rightarrow 0$ se obține că f este diferențiabilă în sens **Gâteaux** în punctul a și $\delta_a f = f$.

Se observă că

$$f(1, 1) = \frac{1}{2} \neq 1 = f(1, 0) + f(0, 1),$$

ceea ce arată că $\delta_a f = f$ nu este liniară. De aici, via Corolarul 6.38, rezultă că f nu este diferențiabilă în punctul a .

Corolarul 6.38 arată că o condiție necesară pentru diferențiabilitatea unei aplicații $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ într-un punct interior $a \in A$ este derivabilitatea parțială a lui f în punctul a . Se pune întrebarea ce condiții suplimentare trebuie să îndeplinească o aplicație derivabilă parțial f pentru ca să fie diferențiabilă în punctul a . Răspunsul este dat de

Corolar 6.46. Fie aplicația $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ derivabilă parțial în punctul $a \in A$. Atunci f este derivabilă în punctul a dacă și numai dacă

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^p (x_k - a_k) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)}{\|x - a\|} = 0.$$

Demonstrație \Rightarrow Dacă f este diferențiabilă în punctul a și $L = d_a f$, atunci prin Corolarul 6.38 deducem

$$L(v) = \sum_{k=1}^p v_k \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}(a), \quad \forall v \in \mathbb{R}^p$$

de unde ținând seama de definiția diferențiabilității lui f în punctul a rezultă imediat egalitatea din enunț.

\Leftarrow Se verifică imediat că aplicația

$$L: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q, \quad L(v) = \sum_{k=1}^p v_k \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$$

este liniară, iar din egalitatea din enunț rezultă că aplicația

$$\omega: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q, \quad \omega(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(a) - L(x - a)}{\|x - a\|}, & x \neq a \\ 0, & x = a \end{cases}$$

este continuă și nulă în punctul a .

Din modul de definire a aplicațiilor L și ω rezultă imediat că are loc egalitatea de la proprietatea (3) a Teoremei 6.37, ceea ce demonstrează că f este diferențiabilă în punctul a .

Remarcă 6.47. Corolarele 6.38 și 6.46 furnizează următorul algoritm de studiu al diferențiabilității unei aplicații $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ într-un punct $a \in A$.

1. Se studiază dacă f este derivabilă parțial în punctul a .
 - a. Dacă f nu este derivabilă parțial în punctul a , atunci f nu este diferențiabilă în punctul a .
 - b. Dacă f este derivabilă parțial în punctul a , atunci se calculează $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $i = 1, \dots, p$ și se trece la etapa

2. Se studiază dacă aplicația

$$\omega: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q, \quad \omega(x) = \begin{cases} f(x) - f(a) - \sum_{i=1}^p (x_i - a_i) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \\ \frac{\|x - a\|}{\|x - a\|}, \\ 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} x \neq a \\ x = a \end{matrix}$$

este continuă în punctul a .

- a. Dacă aplicația ω este continuă în punctul a , atunci f este diferențiabilă în punctul a și

$$d_a f(v) = \sum_{k=1}^p v_k \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}(a), \quad \forall v = (v_1, \dots, v_p) \in \mathbb{R}^p.$$

- b. Dacă aplicația ω nu este continuă în punctul a , atunci f nu este diferențiabilă în punctul a .

Ca o aplicație a acestui algoritm prezentăm

Exemplu 6.48 (Diferențiabilitatea aplicațiilor biliniare):

Fie $B: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ o aplicație biliniară pe $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$. Din continuitatea lui B pe mulțimea compactă

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \mid \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}$$

rezultă că B este mărginită pe K și deci numărul

$$\|B\| := \sup_{(x, y) \in K} \|B(x, y)\|$$

numit și norma aplicației biliniare B , este finit.

Din definiția lui $\|B\|$ rezultă imediat că pentru orice $x, y \neq 0$ avem că

$$\|B(x, y)\| = \left\| B\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right) \right\| \cdot \|x\| \cdot \|y\| \leq \|B\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$$

și deci

$$\|B(x, y)\| \leq \|B\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p.$$

Folosind definiția se verifică, că orice aplicație biliniară $B: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este derivabilă parțial pe $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ și

$$\frac{\partial B}{\partial x_i}(a, b) = \begin{cases} B(e_i, b), & i = 1, \dots, p \\ B(a, e_{i-p}), & i = p + 1, \dots, 2 \cdot p. \end{cases}$$

Conform algoritmului precedent, pentru studiul diferențiabilității lui B în punctul (a, b) rămâne să studiem continuitatea în punctul (a, b) a aplicației $\omega: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$,

$$\omega(x, y) = \begin{cases} \frac{B(x, y) - B(a, b) - \sum_{i=1}^p \left((x_i - a_i) \cdot \frac{\partial B}{\partial x_i} + (y_i - b_i) \cdot \frac{\partial B}{\partial y_i} \right)(a, b)}{\|(x, y) - (a, b)\|}, & (x, y) \neq (a, b) \\ 0, & (x, y) = (a, b) \end{cases}$$

Se constată că

$$\omega(x, y) = \frac{B(x, y) - B(a, b) - (B(x-a, b) + B(a, y-b))}{\|(x-a, y-b)\|} = \frac{B(x-a, y-b)}{\|(x-a, y-b)\|}$$

și deci

$$\|\omega(x, y)\| \leq \frac{\|B\| \cdot \|x-a\| \cdot \|y-b\|}{\|(x-a, y-b)\|} \leq \|B\| \cdot \|x-a\|$$

de unde prin trecere la limită pentru $(x, y) \rightarrow (a, b)$ se obține că

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \omega(x, y) = 0 = \omega(a, b)$$

și deci B este diferențiabilă în punctul (a, b) și

$$d_{(a, b)} B(x, y) = B(x, b) + B(a, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p.$$

În particular, funcționala biliniară (produsul scalar)

$$P: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}, \quad P(x, y) = \langle x, y \rangle$$

este diferențiabilă în orice punct $(a, b) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ și

$$d_{(a, b)} P(x, y) = \langle x, b \rangle + \langle a, y \rangle, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p.$$

Dacă $p = 1$, atunci forma biliniară

$$P: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad P(x, y) = x \cdot y$$

este diferențiabilă în orice punct $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ și

$$d_{(a, b)} P(x, y) = b \cdot x + a \cdot y, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Am văzut că o **condiție necesară** pentru diferențiabilitatea unei aplicații $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ în punctul interior $a \in A$ este derivabilitatea parțială a lui f în punctul a . O **condiție suficientă** pentru diferențiabilitatea unei funcții f într-un punct a este dată de

Corolar 6.49. Dacă funcția $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă parțial pe mulțimea A și gradientul său ∇f este continuu în punctul a , atunci f este diferențiabilă în punctul a .

Demonstrație. Trebuie să demonstrăm că dacă o funcție f are derivate parțiale continue în punctul a , atunci f este diferențiabilă în a . Din demonstrația

Propoziției 6.12 rezultă că pentru orice $x, a \in A$, există punctul $c = (c_1, c_2, \dots, c_p)$ cu c_k aflat între a_k și x_k astfel ca

$$f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^p (x_i - a_i) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(b_i),$$

unde $b_i = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, c_i, a_{i+1}, \dots, a_p)$, $i = 1, \dots, p$. Atunci

$$\omega(x) = \frac{f(x) - f(a) - \sum_{i=1}^p (x_i - a_i) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)}{\|x - a\|} = \frac{\sum_{i=1}^p (x_i - a_i) \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(b_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right]}{\|x - a\|}.$$

Prin urmare,

$$|\omega(x)| \leq \sum_{i=1}^p \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(b_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right|, \quad x \neq a,$$

de unde prin trecere la limită pentru $x \rightarrow a$, ținând seama de continuitatea în punctul a a derivatelor parțiale ale funcției f , deducem

$$\lim_{x \rightarrow a} \omega(x) = 0 = \omega(a)$$

și deci, via **Corolarul 6.46**, funcția f este diferențiabilă în punctul a .

Pentru cazul aplicațiilor vectoriale are loc

Corolar 6.50. Dacă funcția $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este derivabilă parțial pe mulțimea A și toate derivatele parțiale ale funcției f sunt continue în a , atunci f este diferențiabilă în punctul a .

Demonstrație. Ținând seama că proprietățile de continuitate și, respectiv, diferențiabilitate ale unei aplicații vectoriale sunt echivalente cu proprietățile de continuitate și, respectiv, de diferențiabilitate a tuturor componentelor sale, din Corolarul 6.49 se obține imediat afirmația din enunț. \square

Continuitatea gradientului unei funcții $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă parțial pe mulțimea A este o **condiție suficientă** pentru diferențiabilitatea lui f în punctul a . Această condiție **nu este și necesară**, fapt ilustrat de

Exemplu 6.51. Funcție diferențiabilă cu derive parțiale discontinue. Funcția

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \begin{cases} (x_1^2 + x_2^2) \cdot \cos \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & x_1^2 + x_2^2 > 0 \\ 0, & x_1^2 + x_2^2 = 0 \end{cases}$$

considerată și în Exemplul 6.13 este derivabilă parțial pe \mathbb{R}^2 cu

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = 0$$

și are proprietatea că ∇f nu este continuă în punctul $a = (0,0)$, vezi Exemplul 6.13. Să observăm că funcția $\omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\omega(x) = \frac{f(x) - f(a) - x_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) - x_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)}{\|x - a\|} = \|x\| \cdot \cos \frac{1}{\|x\|}, \quad x \neq a$$

are limita 0 în punctul $a = (0,0)$, deci prin Corolarul 6.46 funcția f este diferențiabilă în punctul a .

Exemplu 6.52. Fie funcția de clasă C^2 , $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I interval și funcția $f : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y}, & x \neq y \\ \varphi'(x), & x = y \end{cases}$$

- (i) Să se arate că f este continuă pe $I \times I$.
- (ii) Să se arate că f are derivele parțiale în orice punct al mulțimii $I \times I$.
- (iii) Dacă $a \in I$ este un punct interior și $\varphi''(a) = 0$, să se demonstreze că f este diferențiabilă în punctul $(a,a) \in I \times I$.

Soluție

(i) Vom demonstra că f este continuă în punctele $(a,a) \in I \times I$. Prin teorema creșterilor finite deducem că există un punct $\xi_{(x,y)}$ aflat între x și y astfel încât

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,a)} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,a)} \varphi'(\xi_{(x,y)}),$$

iar din continuitatea derivatei funcției $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deducem

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,a)} \varphi'(\xi_{(x,y)}) = \varphi'(a) = f(a,a).$$

(ii) Deoarece

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x,a) - f(a,a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} - \varphi'(a)}{x - a} = \frac{1}{2} \cdot \varphi''(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,a)$$

deducem că f are derivată parțială în raport cu x în punctul $(a,a) \in I \times I$. Datorită relației $f(x,y) = f(y,x)$ deducem că f are și derivele parțiale în raport cu y în punctul $(a,a) \in I \times I$ și $\frac{1}{2} \cdot \varphi''(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,a)$.

(iii) Să considerăm funcția $\omega: I \times I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\omega(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x, y) - f(a, a) - (x-a) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a, a) - (y-a) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a, a)}{\|(x, y) - (a, a)\|}, & (x, y) \neq (a, a) \\ 0 & x = y = a \end{cases}$$

Tinând seama că $\frac{\partial f}{\partial x}(a, a) = \frac{1}{2} \cdot \varphi''(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, a)$, deducem

$$\omega(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x, y) - f(a, a) - \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot a - x - y) \cdot \varphi''(a)}{\|(x, y) - (a, a)\|}, & (x, y) \neq (a, a) \\ 0 & x = y = a. \end{cases}$$

Scriind formula lui **Taylor** de ordinul doi, pentru funcția φ , în punctul $y \in I$, deducem că există un punct ξ , aflat între x și y , astfel încât

$$\begin{aligned} |\omega(x, y)| &= \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(y) - (x-y) \cdot \left[\varphi'(a) + \frac{1}{2} \cdot \varphi''(a) \cdot (2 \cdot a - x - y) \right]}{(x-y) \cdot \sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2}} \right| = \\ &= \left| \frac{\varphi'(y) - \varphi'(a) + \frac{1}{2} \cdot \varphi''(\xi) \cdot (x-y) - \frac{1}{2} \cdot \varphi''(a) \cdot (2 \cdot a - x - y)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2}} \right| \end{aligned}$$

În ultima expresie, scriind din nou formula lui **Taylor** de ordinul întâi, pentru funcția φ' , în punctul $a \in I$, deducem că există un punct η , aflat între y și a , astfel încât

$$\begin{aligned} |\omega(x, y)| &= \left| \frac{\varphi''(\eta) \cdot (y-a) + \frac{1}{2} \cdot \varphi''(\xi) \cdot (x-a+a-y) - \frac{1}{2} \cdot \varphi''(a) \cdot (2 \cdot a - x - y)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2}} \right| \leq \\ &\leq |\varphi''(\eta)| + |\varphi''(\xi)| + |\varphi''(a)| \end{aligned}$$

Cum funcția φ este de clasă C^2 și $\varphi''(a) = 0$, rezultă $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (a,a)} \omega(x, y) = 0$, adică ω este continuă și nulă în punctul $(a, a) \in I \times I$.

Prin urmare, conform Corolarului 6.46 funcția f este diferențiabilă în punctul $(a, a) \in I \times I$. \square

În cadrul acestui paragraf, în considerațiile de până aici, pentru aplicațiile $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ au fost introduse trei concepte de diferențialitate într-un punct, anume:

- (i) derivabilitate parțială,
- (ii) diferențialitate în sens **Gâteaux**,
- (iii) diferențialitate în sens **Fréchet**

între care, în general, au loc implicațiile

$$(iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i).$$

Ne punem problema determinării unor clase de funcții pentru care cele trei concepte de diferențialitate sunt echivalente. Corolarul care urmează arată că acest fapt are loc în cazul $p=1$.

Corolar 6.53. Pentru orice funcție $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) f este diferențială în punctul interior $a \in A$;
- (ii) f este diferențială în sens **Gâteaux** în a ;
- (iii) f este derivabilă parțial în a ;
- (iv) f este derivabilă în a , adică există $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}^q$.

Demonstrație. Implicațiile $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ au fost deja stabilite și sunt adevărate în general, nu numai pentru $p=1$. Echivalența $(iii) \Rightarrow (iv)$ este evidentă. Rămâne să demonstrăm implicația $(iv) \Rightarrow (i)$. Fie

$$b = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}^q,$$

atunci aplicația $\omega : A \rightarrow \mathbb{R}^q$,

$$\omega(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(a) - (x - a) \cdot b}{|x - a|}, & x \neq a \\ 0, & x = a \end{cases}$$

este continuă în punctul a . Din **Corolarul 6.46** obținem că este diferențială în punctul a . \square

În vederea evidențierii unei clase de funcții pentru care cele trei concepte de diferențialitate coincid, introducem

Definiție 6.54. Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime convexă și deschisă. O funcție $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *convexă* pe mulțimea A dacă pentru orice $\alpha \in (0,1)$ are loc inegalitatea

$$f[\alpha \cdot x + (1 - \alpha) \cdot y] \leq \alpha \cdot f(x) + (1 - \alpha) \cdot f(y), \quad \forall x, y \in A.$$

Spunem că f este *concavă* pe mulțimea A dacă $(-f)$ este convexă pe mulțimea A .

Remarcă 6.55. Se poate verifica imediat prin inducție matematică că f este convexă pe mulțimea A dacă și numai dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$, orice $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ și orice $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ cu $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ avem că

$$f(\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \dots + \alpha_n \cdot x_n) \leq \alpha_1 \cdot f(x_1) + \alpha_2 \cdot f(x_2) + \dots + \alpha_n \cdot f(x_n),$$

adică imaginea unei *combinații convexe* este mai mică decât *combinația convexă* a imaginilor.

Corolar 6.56. Fie $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție convexă sau concavă. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) f este diferențiabilă în punctul interior $a \in A$;
- (ii) f este diferențiabilă în sens **Gâteaux** în a ;
- (iii) f este derivabilă parțial în a .

Demonstrație. Procedând analog ca în demonstrația corolarului precedent, este suficient să demonstrăm că pentru orice funcție convexă este adevărată implicația $(iii) \Rightarrow (i)$. Presupunem deci că funcția convexă f este derivabilă parțial în punctul $a \in A$ și fie $r > 0$ astfel încât $D(a, r) \subset A$. Se vede imediat că funcția $g : D(a, r) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = f(x) - f(a) - \sum_{i=1}^p (x_i - a_i) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

este convexă pe $D(a, r)$.

Se observă că orice punct $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ se poate reprezenta prin relația

$$x = \frac{1}{p} \cdot (y_1 + y_2 + \dots + y_p),$$

unde $y_k = p \cdot x_k \cdot e_k$, $k = 1, 2, \dots, p$, iar $B = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ este baza canonica din \mathbb{R}^p . Din convexitatea funcției g obținem

$$g(x) \leq \frac{1}{p} \cdot \sum_{i=1}^p g(y_i) = \frac{1}{p} \cdot \sum_{i=1}^p \left[\varphi_i(p \cdot x_i) - \varphi_i(a_i) - p \cdot (x_i - a_i) \cdot \frac{d\varphi_i}{dx_i}(a_i) \right],$$

unde φ_i este funcția parțială în raport cu variabila de indice i a funcției f în punctul a . Deci,

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leq \frac{1}{p} \cdot \sum_{i=1}^p |x_i - a_i| \cdot \left| \frac{\varphi_i(p \cdot x_i) - \varphi_i(a_i)}{p \cdot (x_i - a_i)} - \frac{d\varphi_i}{dx_i}(a_i) \right| \leq \\ &\leq \|x - a\| \cdot \sum_{i=1}^p \left| \frac{\varphi_i(p \cdot x_i) - \varphi_i(a_i)}{p \cdot (x_i - a_i)} - \frac{d\varphi_i}{dx_i}(a_i) \right| \end{aligned}$$

de unde prin trecere la limită pentru $x \rightarrow a$ se obține că funcția $\omega: A \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\omega(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{\|x-a\|}, & x \neq a \\ 0, & x = a \end{cases}$$

este continuă în punctul a . Prin aplicarea **Corolarului 6.46** se obține în final că f este diferențiabilă în punctul a . \square

Ca o aplicație la corolarul precedent prezentăm

Exemplu 6.57 Determinarea punctelor în care norma euclidiană este diferențiabilă: Funcția $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|$ este convexă și din corolarul precedent rezultă că funcția f este diferențiabilă în punctul a dacă și numai dacă f este derivabilă parțial în punctul a . Se poate constata ușor că f este derivabilă parțial în punctul a dacă și numai dacă $a \neq (0, 0, \dots, 0)$. Deci, mulțimea punctelor în care f este diferențiabilă este $\mathbb{R}^p - \{0\}$. Se poate arăta că pentru orice $a \neq (0, 0, \dots, 0)$ are loc egalitatea

$$d_a f(v) = \frac{\langle a, v \rangle}{\|a\|}, \quad \forall v \in \mathbb{R}^p.$$

O altă caracterizare a diferențiabilității unei aplicații într-un punct este

Teoremă 6.58 (Carathéodory). O aplicație $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este diferențiabilă în punctul interior $a \in A$ dacă și numai dacă există o aplicație $C: A \rightarrow L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ continuă în punctul $a \in A$ astfel încât

$$f(x) = f(a) + C(x) \cdot (x - a), \quad \forall x \in A.$$

Demonstrație. Necesitatea. Fie $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ diferențiabilă în punctul interior $a \in A$ și aplicația $C: A \rightarrow L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ definită prin

$$C(x)(v) = \begin{cases} d_a f(v) + \frac{\langle x - a, v \rangle}{\|x - a\|} \cdot [f(x) - f(a) - d_a f(x - a)], & x \neq a \\ d_a f(v), & x = a \end{cases}, \quad v \in \mathbb{R}^p.$$

Se constată imediat că aplicația C verifică egalitatea din enunț. Rămâne să demonstrăm continuitatea lui C în punctul a .

Din egalitatea (3) a Teoremei 6.37 deducem că există funcția $\omega: A \rightarrow \mathbb{R}^q$ continuă și nulă în punctul a , astfel ca

$$\|C(x)(v) - C(a)(v)\| \leq \frac{\|v\| \cdot \|f(x) - f(a) - d_a f(x - a)\|}{\|x - a\|} \leq \|\omega(x)\| \|v\|$$

pentru orice $x \in A$ și orice $v \in \mathbb{R}^p$.

De aici rezultă că

$$\|C(x) - C(a)\| \leq \|\omega(x)\|, \quad \forall x \in A.$$

Din criteriul majorării rezultă imediat că

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} C(x) = C(a),$$

adică C este continuă în punctul a .

Suficiența. Dacă f satisfacă egalitatea din enunț, atunci

$$\frac{\|f(x) - f(a) - C(a) \cdot (x - a)\|}{\|x - a\|} = \frac{\|(C(x) - C(a)) \cdot (x - a)\|}{\|x - a\|} \leq \|C(x) - C(a)\|$$

pentru orice $x \in A$. Prin trecere la limită pentru $x \rightarrow a$ se obține că f este diferențiabilă în punctul a și $d_a f = C(a)$. \square

Am văzut, în exemplul 6.28, că compusa a două aplicații diferențiabile în sens **Gâteaux** nu este neapărat diferențiabilă în sens **Gâteaux**. În contrast cu acest fapt la diferențiabilitatea **Fréchet** are loc

Propoziție 6.59. Fie $A \subset \mathbb{R}^p$, $B \subset \mathbb{R}^q$ două mulțimi deschise și aplicațiile $f = (f_1, f_2, \dots, f_q) : A \rightarrow B$, $g = (g_1, g_2, \dots, g_s) : B \rightarrow \mathbb{R}^s$. Considerăm compusa celor două aplicații $h = (h_1, h_2, \dots, h_s) : A \rightarrow \mathbb{R}^s$, $h = g \circ f$. Dacă f este diferențiabilă în punctul $b = f(a)$, atunci

- (i) h este diferențiabilă în punctul a și $d_a h = d_b g \circ d_a f$;
- (ii) $h'(a) = g'(a) \cdot f'(a)$;
- (iii) dacă în plus $p = q = s$, atunci $J_h(a) = J_g(b) \cdot J_f(a)$, adică Jacobianul aplicației h în punctul a este egal cu produsul Jacobienilor funcțiilor g și f în punctul b și, respectiv, a ;
- (iv) h este derivabilă parțial în punctul a și

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^q \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \cdot \frac{\partial g}{\partial y_j}(b), \quad \forall i = 1, 2, \dots, p.$$

Demonstrație.

(i) Fie $L_1 = d_a f$ și $L_2 = d_b f$. Din diferențiabilitatea funcțiilor f și g în punctul a , respectiv, b (via Teorema 6.37) se obține că există funcțiile $\omega_1 : A \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\omega_2 : B \rightarrow \mathbb{R}^s$ continue în a , respectiv, în b cu $\omega_1(a) = 0$, $\omega_2(b) = 0$ și

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + L_1(x - a) + \|x - a\| \cdot \omega_1(x), \\ g(y) &= g(b) + L_2(y - b) + \|y - b\| \cdot \omega_2(y) \end{aligned}$$

pentru orice $x \in A$ și orice $y \in B$.

De aici rezultă că

$$\begin{aligned}
 h(x) - h(a) &= g \circ f(x) - g \circ f(a) = \\
 &= L_2(f(x) - f(a)) + \|f(x) - f(a)\| \cdot \omega_2(f(x)) = \\
 &= L_2(L_1(x - a)) + \|x - a\| \cdot L_2(\omega_1(x)) + \|f(x) - f(a)\| \cdot \omega_2(f(x)) = \\
 &= (L_2 \circ L_1)(x - a) + \|x - a\| \cdot \omega(x)
 \end{aligned}$$

unde funcția $\omega: A \rightarrow \mathbb{R}^s$ este definită prin

$$\omega(x) = \begin{cases} L_2(\omega_1(x)) + \frac{\|f(x) - f(a)\|}{\|x - a\|} \cdot \omega_2(f(x)), & x \neq a \\ 0, & x = a \end{cases}$$

are proprietatea că

$$\|\omega(x)\| \leq \|L_2\| \cdot \|\omega_1(x)\| + \|\omega_2(f(x))\| \cdot (\|L_1\| + \|\omega_1(x)\|)$$

de unde, ținând seama de continuitatea aplicațiilor ω_1, ω_2 , prin trecere la limită pentru $x \rightarrow a$ se obține că ω este continuă în punctul a . Din Teorema 6.37 obținem în final că h este diferențiabilă în punctul a și

$$d_a h = d_b g \circ d_a f.$$

(ii) Din (i) rezultă

$$h'(a) = [d_a h] = [d_b g] \cdot [d_a f] = g'(b) \cdot f'(a).$$

- (iii) Este imediată din (ii) ținând seama că determinantul produsului a două matrice este egal cu produsul determinantelor celor două matrice.
- (iv) Din diferențiabilitatea lui h în a , prin Corolarul 6.38, rezultă că h este derivabilă parțial în punctul a și

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial h}{\partial x_i}(a) &= d_a h(e_i) = d_b g(d_a f(e_i)) = d_b g\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right) = \\
 &= d_b g\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(a), \dots, \frac{\partial f_q}{\partial x_i}(a)\right) = \sum_{j=1}^q \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \cdot \frac{\partial g}{\partial y_j}(b)
 \end{aligned}$$

pentru orice $i = 1, 2, \dots, p$.

Reguli de calcul pentru diferențiabilitate **Fréchet** sunt date de

Corolar 6.60. Dacă aplicațiile $f, g: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ diferențiabile în punctul interior $a \in A$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci

- (i) $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ și $\langle f, g \rangle$ sunt diferențiabile în punctul a și

$$\begin{aligned}
 d_a(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) &= \alpha \cdot d_a f + \beta \cdot d_a g \\
 d_a \langle f, g \rangle(v) &= \langle d_a f(v), g(a) \rangle + \langle f(a), d_a g(v) \rangle, \quad \forall v \in \mathbb{R}^p;
 \end{aligned}$$

(ii) dacă în plus $q=1$, atunci $f \cdot g$ este diferențiabilă în punctul a și

$$d_a(f \cdot g) = g(a) \cdot d_a f + f(a) \cdot d_a g;$$

(iii) dacă $q=1$ și $g(x) \neq 0$, $\forall x \in V(a)$, atunci $\frac{f}{g}$ este diferențiabilă în punctul a și

$$d_a\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g(a) \cdot d_a f - f(a) \cdot d_a g}{g^2(a)}.$$

Demonstrație. Fie aplicația $F: A \rightarrow \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$, definită prin

$$F(x) = (f(x), g(x)).$$

Din Remarca 6.36 deducem că F este diferențiabilă în punctul a și $d_a F = (d_a f, d_a g)$.

(i) Dacă $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci $S: \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$, $S(x, y) = \alpha \cdot x + \beta \cdot y$ este liniară și via Exemplul 6.42, este diferențiabilă cu $d_{(u,v)} S = S$, $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$.

Să observăm că aplicația $S \circ F: A \rightarrow \mathbb{R}^q$ este definită prin

$$S \circ F(x) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x).$$

Aplicând Propoziția 6.59, obținem că $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ este diferențiabilă în punctul a și

$$d_a(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = d_{F(a)} S \circ d_a F = d_{F(a)} S(d_a f, d_a g) = S(d_a f, d_a g) = \alpha \cdot d_a f + \beta \cdot d_a g$$

Pentru cazul funcției $\langle f, g \rangle$ se procedează similar, considerându-se aplicația biliniară $P: \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$, $P(x, y) = \langle x, y \rangle$, care în virtutea Exemplului 6.48 este diferențiabilă în orice punct $(x, y) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$ și

$$\begin{aligned} d_a \langle f, g \rangle(v) &= d_{F(a)} P(d_a F(v)) = d_{F(a)} P(d_a f(v), d_a g(v)) = \\ &= \langle d_a f(v), g(a) \rangle + \langle f(a), d_a g(v) \rangle, \quad \forall v \in \mathbb{R}^p. \end{aligned}$$

(ii) Este evident un caz particular de la (i), pentru $q=1$.

(iii) Funcția $G: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $G(t) = \frac{1}{t}$ este derivabilă în orice punct $t \in \mathbb{R}^*$ și

deci prin Corolarul 6.53 este diferențiabilă în orice punct $t \in \mathbb{R}^*$. Prin aplicarea Propoziției 6.59 obținem că $\frac{1}{g} = G \circ g$ este diferențiabilă în punctul a și

$$d_a\left(\frac{1}{g}\right)(v) = d_{g(a)} G(d_a g(v)) = -\frac{d_a g(v)}{g^2(a)}, \quad \forall v \in \mathbb{R}^p.$$

Folosind acum (ii), obținem în final că funcția $\frac{f}{g}$ este diferențiabilă în punctul a și

$$\begin{aligned} d_a \left(\frac{f}{g} \right)(v) &= \frac{1}{g(a)} \cdot d_a f(v) + f(a) \cdot d_a \left(\frac{1}{g} \right)(v) = \\ &= \frac{1}{g(a)} \cdot d_a f(v) - f(a) \cdot \frac{d_a g(v)}{g^2(a)} = \frac{g(a) \cdot d_a f(v) - f(a) \cdot d_a g(v)}{g^2(a)} \end{aligned}$$

pentru orice $v \in \mathbb{R}^p$. \square

În cazul $p=q=1$ se cunoaște că inversa unei aplicații bijective diferențiabile nu este neapărat diferențiabilă. Dacă totuși f^{-1} este diferențiabilă în punctul $b=f(a)$, atunci

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Generalizarea acestui rezultat la cazul aplicațiilor de mai multe variabile reale este dată de

Corolar 6.61. Fie $A \subset \mathbb{R}^p$, $B \subset \mathbb{R}^q$ două mulțimi deschise și $f: A \rightarrow B$ o funcție diferențiabilă în punctul $a \in A$ cu proprietatea că și f^{-1} este diferențiabilă în punctul $b=f(a)$. Atunci

- (i) $p=q$;
- (ii) $d_a f$ este o aplicație bijectivă cu $(d_a f)^{-1} = d_b f^{-1}$;
- (iii) matricea $f'(a)$ este inversabilă și

$$(f'(a))^{-1} = (f^{-1})'(b);$$

- (iv) $J_{f^{-1}}(b) = \frac{1}{J_f(a)}$, adică Jacobianul inversei funcției f în punctul $f(a)$ este inversul Jacobianului lui f în punctul a .

Demonstrație. Din

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x, \quad \forall x \in A$$

și din Propoziția 6.59 obținem

$$d_b f^{-1} \circ d_a f = I_p,$$

unde $I_p: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ este aplicația identică pe \mathbb{R}^p , de unde rezultă că $d_a f$ este injectivă. Similar, din

$$(f \circ f^{-1})(y) = y, \quad \forall y \in B$$

obținem

$$d_a f \circ d_b f^{-1} = I_q$$

și deci $d_a f$ este surjectivă.

În concluzie, $d_a f$ este o aplicație liniar bijectivă de la \mathbb{R}^p la \mathbb{R}^q . Am demonstrat că $d_a f$ este un izomorfism între spațiile vectoriale \mathbb{R}^p și \mathbb{R}^q , iar două spații finit dimensionale sunt izomorfe dacă și numai dacă au aceeași dimensiune, adică $p = q$. Mai mult, din cele de mai sus rezultă și $(d_a f)^{-1} = d_b f^{-1}$. De aici deducem imediat și egalitățile de la (iii) și (iv). \square

Din Corolarul precedent rezultă că o condiție necesară pentru ca o bijecție $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow B \subset \mathbb{R}^q$ diferențiabilă în punctul interior $a \in A$ să aibă o inversă diferențiabilă în punctul $b = f(a)$ este ca Jacobianul lui f în punctul a să fie nenul. Această condiție este și suficientă, adică are loc

Propoziție 6.62. Fie $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow B \subset \mathbb{R}^q$ o bijecție diferențiabilă în punctul interior $a \in A$ și cu inversă continuă în punctul $b = f(a)$. Dacă $J_f(a) \neq 0$, atunci

- (i) $d_a f$ este un operator liniar inversabil;
- (ii) f^{-1} este diferențiabil în punctul $b = f(a)$ și $d_b f^{-1} = (d_a f)^{-1}$.

Demonstrație.

(i) Fie $L = d_a f$. Deoarece $J_f(a) = \det[L] \neq 0$ rezultă că L este o aplicație liniară inversabilă.

(ii) Din diferențiabilitatea funcției f în punctul a rezultă, via Teorema 6.37, că există o funcție $\omega: A \rightarrow \mathbb{R}^p$ continuă și nulă în a astfel încât

$$f(x) = f(a) + L(x-a) + \|x-a\| \cdot \omega(x), \quad \forall x \in A.$$

De aici rezultă că

$$x-a = L^{-1}(f(x)-f(a)) - L^{-1}(\omega(x)) \cdot \|x-a\|.$$

Din continuitatea lui ω în punctul a deducem că există o vecinătate V a lui a astfel că

$$1 > \|L^{-1}\| \cdot \|\omega(x)\|, \quad \forall x \in V.$$

Prin urmare

$$\frac{\|x-a\|}{\|f(x)-f(a)\|} \leq \frac{\|L^{-1}\|}{1 - \|L^{-1}\| \cdot \|\omega(x)\|} := h(x), \quad \forall x \in V \quad (**)$$

Pentru a demonstra diferențiabilitatea lui f^{-1} în punctul b și a formulei de calcul a diferențialei lui f^{-1} în b este suficient să arătăm că funcția

$$\omega: B \rightarrow \mathbb{R}^q, \quad \omega(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(b) - L^{-1}(y-b)}{\|y-b\|}, & y \neq b \\ 0, & y = b \end{cases}$$

este continuă în punctul b.

Fie $y \in B$ și $x \in A$ cu $y = f(x)$. Înținând seama de (**), obținem

$$\begin{aligned}\|\omega(x)\| &= \frac{\|x - a - L^{-1}(f(x) - f(a))\|}{\|f(x) - f(a)\|} = \frac{\|x - a\| \cdot \|L^{-1}(\omega(x))\|}{\|f(x) - f(a)\|} \leq \\ &\leq \|L^{-1}\| \cdot \|\omega(x)\| \cdot h(x) = \|L^{-1}\| \cdot \|\omega(g(y))\| \cdot h(g(y)), \quad \forall y \in V(b)\end{aligned}$$

de unde prin trecere la limită pentru $y \rightarrow b$, utilizând și continuitatea aplicației $g = f^{-1}$ în punctul b , se obține că funcția ω este continuă în punctul b , ceea ce trebuia demonstrat. \square

Din cele de mai sus se obține teorema de diferențiabilitate a inversei unei bijecții diferențiabile dată de

Teoremă 6.63. Fie $A \subset \mathbb{R}^p$, $B \subset \mathbb{R}^q$ două mulțimi deschise și $f : A \rightarrow B$ o bijecție diferențiabilă în punctul $a \in A$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) f^{-1} este diferențiabilă în punctul $b = f(a)$;
- (ii) f^{-1} este continuă în punctul b și $J_f(a) \neq 0$.

Demonstrația este imediată din Corolarul 6.61 și Propoziția 6.62. \square

6.1.4 Diferențiabilitate globală

Fie aplicația $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, A fiind presupusă o mulțime deschisă.

Definiție 6.64. Aplicația $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ se numește diferențiabilă pe mulțimea A dacă f este diferențiabilă în orice punct a al mulțimii A .

Dacă f este diferențiabilă pe mulțimea A , atunci aplicația

$$df : A \rightarrow L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q), \quad df(x) = d_x f$$

se numește diferențiala aplicației f .

Exemplu 6.65. Din definiția precedentă și Exemplul 6.42 rezultă că orice aplicație liniară $L : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este diferențiabilă pe \mathbb{R}^p și

$$(dL)(x) = L, \quad \forall x \in \mathbb{R}^p,$$

adică diferențiala unei aplicații liniare $L : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este o aplicație constantă.

Similar din Exemplul 6.48 și definiția precedentă rezultă că orice aplicație biliniară $B : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este diferențiabilă pe $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ și

$$(dB)(x, y)(u, v) = B(u, y) + B(x, v), \quad x, y, u, v \in \mathbb{R}^p.$$

Remarcă 6.66. Din definiția diferențiabilității pe o mulțime rezultă imediat că Corolarele 6.38, 6.53, 6.56, precum și rezultatele referitoare la

operații cu funcții diferențiabile rămân adevărate și în cazul aplicațiilor diferențiabile pe o mulțime.

Definiție 6.67. Aplicația $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ se zice că este de clasă C^1 pe mulțimea A , dacă f este diferențiabilă pe A și aplicația $df: A \rightarrow L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ este continuă pe mulțimea A .

Caracterizarea aplicațiilor de clasă C^1 în limbaj de derivate parțiale este dată de

Propoziție 6.68. O aplicație $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este de clasă C^1 pe mulțimea A dacă și numai dacă f este derivabilă parțial pe mulțimea A și pentru orice $i = 1, \dots, p$ funcțiile $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sunt continue pe mulțimea A .

Demonstrație. Necesitatea. Dacă f este de clasă C^1 pe mulțimea A , atunci din

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right\| = \left\| (d_x f - d_a f)(e_i) \right\| \leq \|d_x f - d_a f\|$$

rezultă că $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ este continuă în orice punct interior $a \in A$, pentru orice $i = 1, \dots, p$.

Suficiența. Dacă f are derivate parțiale continue pe mulțimea A , atunci din

$$\begin{aligned} \left\| (d_x f - d_a f)(v) \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^p v_i \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right] \right\| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^p |v_i| \cdot \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right\| \leq \sum_{i=1}^p \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right\| \cdot \|v\| \end{aligned}$$

rezultă imediat continuitatea lui df în orice punct interior $a \in A$ și deci f este de clasă C^1 pe mulțimea A . \square

Corolar 6.69. Orice aplicație $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ de clasă C^1 pe mulțimea A este diferențiabilă pe mulțimea A .

Demonstrația rezultă imediat din propoziția precedentă și Corolarul 6.50.

Remarcă 6.70. Dacă notăm cu C_A^1 mulțimea aplicațiilor de clasă C^1 pe mulțimea A , atunci din corolarul precedent și Remarca 6.43 rezultă că

$$C_A^1 \subset \mathcal{F}_A \subset \mathcal{G}_A \subset \mathcal{D}_A$$

unde $\mathcal{F}_A, \mathcal{G}_A$ și, respectiv, \mathcal{D}_A reprezintă mulțimea aplicațiilor diferențiabile, diferențiabile în sens **Gâteaux** și, respectiv, derivabile parțial pe mulțimea A .

Corolar 6.71. Dacă $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow B \subset \mathbb{R}^q$ este de clasă C^1 pe mulțimea A și $g : B \subset \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^s$ este de clasă C^1 pe mulțimea B , atunci $f \circ g$ este de clasă C^1 pe mulțimea A .

Demonstrația rezultă imediat din Propoziția 6.59 și 6.68. \square

Teoremă 6.72. Fie $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ diferențiabilă pe mulțimea convexă și deschisă A . Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) f este convexă pe mulțimea A ;
- (ii) $f(x) \geq f(a) + d_a f(x-a)$, $\forall x, a \in A$.

Demonstrație. $(i) \Rightarrow (ii)$. Presupunem că funcția convexă f este diferențiabilă pe mulțimea A . Din convexitatea lui f pe mulțimea A rezultă $f(\alpha \cdot x + (1-\alpha) \cdot a) \leq \alpha \cdot f(x) + (1-\alpha) \cdot f(a)$, $\forall x, a \in A, \forall \alpha \in (0,1)$ de unde rezultă că

$$f(x) - f(a) - \frac{f(a + \alpha \cdot (x-a)) - f(a)}{\alpha} \geq 0, \quad \forall x, a \in A, \forall \alpha \in (0,1),$$

care împreună cu diferențiabilitatea în sens **Gâteaux** a lui f pe mulțimea A , consecință a diferențiabilității lui f pe mulțimea A , implică inegalitatea din (ii).

$(ii) \Rightarrow (i)$. Înținând seama că inegalitatea din (ii) este adevărată pentru orice $x, a \in A$, obținem că pentru orice $\alpha \in (0,1)$ avem $d_{\alpha \cdot x + (1-\alpha) \cdot a} f((1-\alpha) \cdot (x-a)) \leq f(x) - f(\alpha \cdot x + (1-\alpha) \cdot a)$, $\forall x, a \in A, \forall \alpha \in (0,1)$ și

$d_{\alpha \cdot x + (1-\alpha) \cdot a} f((1-\alpha) \cdot (x-a)) \leq f(a) - f(\alpha \cdot x + (1-\alpha) \cdot a)$, $\forall x, a \in A, \forall \alpha \in (0,1)$ de unde prin înmulțirea primei inegalități cu α și a celei de-a doua cu $1-\alpha$ și apoi adunarea inegalităților obținute, rezultă că

$0 \leq \alpha \cdot f(x) + (1-\alpha) \cdot f(a) - f(\alpha \cdot x + (1-\alpha) \cdot a)$, $\forall x, a \in A, \forall \alpha \in (0,1)$ adică f este convexă pe mulțimea A . \square

6.1.5 Exerciții

1. Să se arate că funcția

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & x_1 \cdot x_2 \neq 0 \\ 0, & x_1 \cdot x_2 = 0 \end{cases}$$

este derivabilă parțial în origine deși nu are limită în acest punct.

2. Să se studieze continuitatea, continuitatea parțială, continuitatea în sens **Gâteaux**, derivabilitatea parțială, diferențiabilitatea în sens **Gâteaux** și diferențiabilitatea funcției $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^3 \cdot x_2}{x_1^4 + x_2^4}, & x_1^2 + x_2^2 \neq 0 \\ 0, & x_1^2 + x_2^2 = 0 \end{cases}$$

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2 \cdot x_2}{x_1^6 + x_2^2}, & x_1^2 + x_2^2 \neq 0 \\ 0, & x_1^2 + x_2^2 = 0 \end{cases}$$

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^3}{x_2^2}, & x_2 \neq 0 \\ 0, & x_2 = 0 \end{cases}$$

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 \cdot x_2^4}{x_1^2 + x_2^8}, & x_1^2 + x_2^2 \neq 0 \\ 0, & x_1^2 + x_2^2 = 0 \end{cases}$$

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1^2 \cdot \sin \frac{1}{x_1} + x_2^2 \cdot \sin \frac{1}{x_2}, & x_1 \cdot x_2 \neq 0 \\ x_1^2 \cdot \sin \frac{1}{x_1}, & x_2 = 0, x_1 \neq 0 \\ x_2^2 \cdot \sin \frac{1}{x_2}, & x_1 = 0, x_2 \neq 0 \\ 0 & x_1 = 0, x_2 = 0 \end{cases}$$

3. Fie $A \subset \mathbb{R}^3$ o mulțime deschisă. Să se arate că dacă funcția $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ are proprietățile:

- (i) f este continuă parțial în raport cu prima variabilă;
 - (ii) f este derivabilă parțial în raport cu variabila de indice doi pe mulțimea A și $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ este mărginită pe A ,
- atunci f este continuă pe A .

4. Fie $f, g: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile parțial pe A și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Să se arate că:

$$(i) \quad \nabla(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = \alpha \cdot \nabla f + \beta \cdot \nabla g;$$

- (ii) $\nabla(f \cdot g) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$;
- (iii) $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot \nabla f - f \cdot \nabla g}{g^2}$, în ipoteza $g \neq 0$ pe mulțimea A .

5. Fie $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$. Să se arate că:

- (i) dacă există $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{\|x - a\|} = 0$, atunci f este diferențiabilă în punctul interior $a \in A$ și $d_a f = 0$;
- (ii) dacă f are derivate parțiale nule în punctul a , atunci f este diferențiabilă în a dacă și numai dacă există $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{\|x - a\|} = 0$;
- (iii) dacă există numărul natural $n \geq 1$ astfel ca

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|^n, \quad \forall x, y \in A,$$

atunci f este constantă.

6. (teorema lui Euler) O funcție $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *omogenă de gradul* $n \in \mathbb{N}^*$ dacă

$$f(\alpha \cdot x) = \alpha^n \cdot f(x), \quad \forall x \in A, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*.$$

Să se arate că o funcție diferențiabilă $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este omogenă de gradul n dacă și numai dacă $f(0) = 0$ și

$$\langle x, \nabla f(x) \rangle = n \cdot f(x), \quad \forall x \in A$$

7. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Să se arate că

funcția $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x_1, x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ este diferențiabilă în punctul $a = (0, 0)$ deși derivatele sale parțiale sunt discontinue în a .

8. Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ și $B \subset \mathbb{R}^q$ două mulțimi deschise. O bijecție $f: A \rightarrow B$ se numește *difeomorfism* dacă f este diferențiabilă pe A și f^{-1} este diferențiabilă pe B .

Un difeomorfism $f: A \rightarrow B$ cu proprietatea că f este de clasă C^1 pe A și f^{-1} este de clasă C^1 pe B se numește C^1 -difeomorfism.

Să se arate că:

- (i) există homeomorfisme de clasă C^1 care nu sunt difeomorfisme;

- (ii) un C^1 -homeomorfism pe mulțimea A este un C^1 -difeomorfism dacă și numai dacă $J_f(x) \neq 0, \forall x \in A$.

9. Să se determine mulțimea $B \subset \mathbb{R}^q$ astfel încât aplicația $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow B$ diferențiabilă în punctul $a \in A$ să fie bijectivă cu f^{-1} diferențiabilă în punctul $b = f(a)$, calculând $d_b f^{-1}$ și $J_{f^{-1}}(b)$, pentru

- (i) $f : A = \mathbb{R}^2 \rightarrow B \subset \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$;
- (ii) $f : A = \mathbb{R}^* \times (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow B \subset \mathbb{R}^2, f(r, \alpha) = (r \cdot \cos \alpha, r \cdot \sin \alpha)$;
- (iii) $f : A = \mathbb{R}^* \times (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow B \subset \mathbb{R}^3,$
 $f(r, \theta, \varphi) = (r \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi, r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi, r \cdot \cos \varphi)$.

10. O aplicație $f = (f_1, f_2) : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ se numește *complex diferențiabilă* în punctul $a \in A$, dacă există un operator complex liniar $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (adică

$$L(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot L(x) + \beta \cdot L(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

astfel ca

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$$

Să se arate că:

- (i) orice operator complex liniar este liniar;
- (ii) orice aplicație complex diferențiabilă în punctul $a \in A$ este diferențiabilă în a ;
- (iii) o aplicație $f = (f_1, f_2) : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ este *complex diferențiabilă* în punctul $a \in A$ dacă și numai dacă au loc condițiile **Cauchy Riemann**

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a), \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a); \end{cases}$$

- (iv) aplicația $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ este diferențiabilă în orice punct $a \in \mathbb{R}^2$, dar nu este complex diferențiabilă în niciun punct din \mathbb{R}^2 .

11. Fie funcția de clasă C^2 , $\varphi: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I interval și funcția $f: I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_2 \cdot \varphi(x_1) - x_1 \cdot \varphi(x_2)}{x_1 - x_2}, & x_1 \neq x_2 \\ x_1 \cdot \varphi'(x_1) - \varphi(x_1), & x_1 = x_2 \end{cases}$$

- (i) Să se arate că f este continuă pe $I \times I$.
- (ii) Să se arate că f are derivate parțiale în orice punct al mulțimii $I \times I$.
- (iii) Dacă $a \in I$ este un punct interior și $\varphi''(a) = 0$, să se demonstreze că f este diferențiabilă în punctul $(a, a) \in I \times I$.

6.2 Teorema de medie în \mathbb{R}^p

6.2.1 Teorema lui Fermat

Fie funcția $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, unde A este o mulțime deschisă și $a \in A$.

Definiție 6.73. Punctul a se numește punct de extrem local, și anume: de minim local (respectiv de maxim local) pentru funcția f , dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât pentru orice $x \in V \cap A$ are loc inegalitatea

$$\langle f(b) - f(a), b - a \rangle \leq 0 \text{ (respectiv } f(x) - f(a) \leq 0\text{).}$$

Dacă inegalitatea este strictă, atunci a se numește punct de minim (respectiv maxim) local în sens strict pentru f .

Dacă inegalitatea este adevărată pentru orice $x \in A$, atunci a se numește punct de minim (respectiv maxim) global pentru funcția f .

Remarcă 6.74. Dacă $A \subset \mathbb{R}^p$ este o mulțime convexă și deschisă, iar $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ este convexă (respectiv concavă), atunci:

- (i) orice punct de minim (respectiv de maxim) local pentru f este un punct de minim (respectiv de maxim) global;
- (ii) Dacă f are un punct de maxim (respectiv de minim) global, atunci f este constantă.

Demonstrație

(i) În adevăr, dacă $a \in A$ este un punct de minim local al funcției convexe f , atunci există $r > 0$ cu proprietatea

$$D(x, r) \subset A \text{ și } f(x) - f(a) \geq 0, \quad \forall x \in D(a, r).$$

Fie $x \in A$. Atunci $\exists \delta \in (0, 1)$ astfel încât $\delta > 0$.

Din convexitatea mulțimii A rezultă că $y \in A$, iar din convexitatea funcției f obținem

$$f(a) \leq f(a + \alpha \cdot (x - a)) = f(\alpha \cdot x + (1 - \alpha) \cdot a) \leq \alpha \cdot f(x) + (1 - \alpha) \cdot f(a) \leq f(x)$$

ceea ce arată că a este punct de minim global pentru funcția f .

(ii) Dacă a este un punct de maxim global al funcției convexe f , atunci

$$f(x) \leq f(a), \quad \forall x \in A.$$

$$\text{Să arătăm că } f(x) = f(a), \quad \forall x \in A.$$

Presupunem că există $x_0 \in A$ cu $df = dg$. Deoarece A este deschisă, rezultă că există $y_0 \in A$ cu $a \in (y_0, x_0)$, adică există $\alpha_0 \in (0,1)$ astfel ca $a = \alpha_0 \cdot x_0 + (1 - \alpha_0) \cdot y_0$, de unde obținem

$$p = q,$$

ceea ce conduce la contradicție.

Afirmațiile pentru cazul funcțiilor concave rezultă imediat din rezultatele demonstrează pentru funcțiile convexe, ținându-se seama că o funcție f este concavă dacă și numai dacă $-f$ este convexă. \square

Varianta teoremei lui **Fermat**⁷ pentru funcții de mai multe variabile reale este

Teoremă 6.75 (Fermat). Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime deschisă și $a \in A$ un punct de extrem local pentru funcția $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă f este derivabilă parțial în punctul a , atunci

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Demonstrație. Să presupunem că a este punct de minim local pentru f (analog procedându-se în cazul în care a este punct de maxim local pentru f). De aici și din faptul că A este deschisă, rezultă că există $r > 0$ cu $D(a, r) \subset A$ încât

$$f(x) - f(a) \geq 0, \quad \forall x \in D(a, r).$$

Atunci pentru orice $i = 1, \dots, p$ avem că

$$\frac{f(a + t \cdot e_i) - f(a)}{t} = \begin{cases} \geq 0, & t \in (0, r) \\ \leq 0, & t \in (-r, 0) \end{cases}$$

de unde prin trecere la limită pentru $t \rightarrow 0$ (ținând seama că f este derivabilă parțial în punctul a) se obține că

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \geq 0 \quad \text{și} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

de unde concluzia. \square

⁷ Pierre de Fermat, matematician francez, 1601-1665

Remarcă 6.76. Demonstrația dată Teoremei 6.75 se poate adapta (înlocuind vîsorul e_i cu un vector arbitrar $v \in \mathbb{R}^p$ pentru a justifica o teoremă de tip **Fermat** pentru funcții diferențiabile în sens **Gâteaux**. Mai exact, dacă $a \in \overset{\circ}{A}$ este punct de extrem local pentru funcția $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ diferențiabilă în sens **Gâteaux** în punctul a , atunci $\delta_a f = 0$.

Varianta teoremei **Fermat** pentru funcții diferențiabile este

Corolar 6.77. Fie $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ diferențiabilă în punctul $a \in \overset{\circ}{A}$. Dacă a este punct de extrem local pentru f , atunci $d_a f = 0$.

Demonstrație. Dacă f este diferențiabilă în punctul de extrem local $a \in \overset{\circ}{A}$, atunci conform teoremei lui **Fermat** avem că f are derivate parțiale nule în punctul a , de unde rezultă că

$$d_a f(v) = \sum_{i=1}^p v_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^p.$$

Remarcă 6.78. Dacă o funcție $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă în punctul interior a și $d_a f = 0$, atunci a se numește *punct critic* sau *punct staționar* pentru f . Corolarul precedent arată că punctele interioare de extrem local ale unei funcții diferențiabile se află printre punctele sale critice. În general, un punct critic **nu este neapărat** un punct de extrem local; condiția $d_a f = 0$ este necesară nu și suficientă pentru ca punctul $a \in \overset{\circ}{A}$ să fie punct de extrem local pentru funcția diferențiabilă f . Acest lucru este ilustrat de

Exemplu 6.79 (Punct critic care nu este punct de extrem local). Funcția

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$

este diferențiabilă în punctul $a = (0, 0)$ cu $d_a f = 0$, adică a este punct critic pentru f , dar a nu este punct de extrem local pentru f deoarece

$$f(x_1, x_2) - f(0, 0) = \begin{cases} x_1^2 \geq 0, & x_2 = 0 \\ -x_2^2 \leq 0, & x_1 = 0 \end{cases}$$

și deci diferența $f(x_1, x_2) - f(0, 0) = f(x) - f(a)$ nu păstrează semn constant pe nicio vecinătate a punctului a .

Să remarcăm că graficul lui f în $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ este un paraboloid hiperbolic care în vecinătatea originii arată ca o să. Din acest motiv punctele critice ale lui f care nu sunt puncte de extrem local se mai numesc și *puncte să* pentru f .

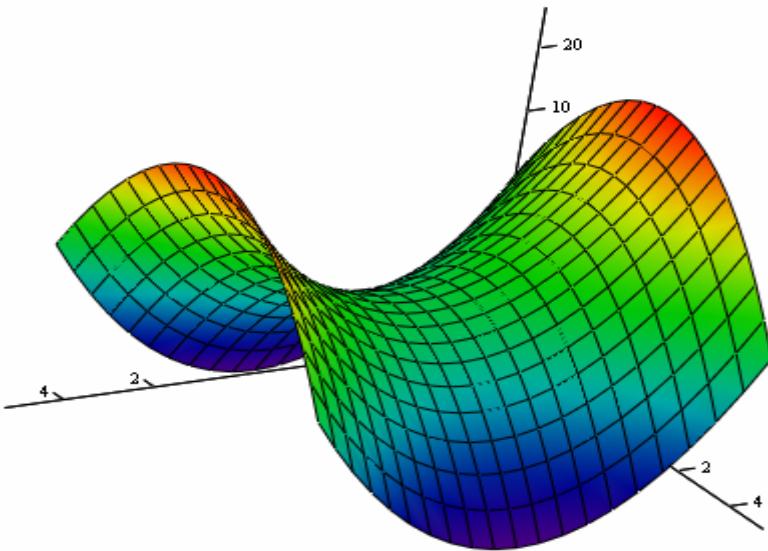


Fig. 6.1

Varianta teoremei lui **Fermat** pentru funcții convexe este

Teoremă 6.80. Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime convexă și deschisă, $a \in A$, iar $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ diferențiabilă și convexă (respectiv concavă). Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) punctul a este punct critic pentru f ,
- (ii) punctul a este punct de minim (respectiv maxim) global pentru f ,
- (iii) punctul a este punct de minim (respectiv maxim) local pentru f .

Demonstratie. Ca și în Remarca 6.74 este suficient să considerăm cazul în care f este convexă.

(i) \Rightarrow (ii). Din convexitatea funcției f rezultă că pentru orice $x \in A$ și orice $\alpha \in (0,1)$ are loc inegalitatea

$$f(x) - f(a) \geq \frac{f(a + \alpha \cdot (x - a)) - f(a)}{\alpha},$$

de unde trecând la limită pentru $\alpha \rightarrow 0$, ținând seama că a este punct critic pentru f , obținem

$$f(x) - f(a) \geq \delta_a f(x - a) = d_a f(x - a) = 0$$

pentru orice $x \in A$. Prin urmare, a este punct de minim global pentru f .

(ii) \Rightarrow (iii) este evidentă.

(iii) \Rightarrow (i) rezultă din teorema lui **Fermat**. \square

Exemplu: Să se determine constantele $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ astfel ca

$$a^b + b^a + a^x + b^y \geq x^b + y^a + a^a + b^b, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*.$$

Fie funcția $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = a^x + b^y - x^b - y^a$ diferențiabilă pe domeniul de definiție. Condiția din enunț se transcrie astfel

$$f(x,y) \geq f(a,b), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,$$

ceea ce înseamnă că punctul $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ este punct de minim global pentru funcția f . Din teorema lui **Fermat** deducem că $d_{(a,b)}f = 0$, condiție echivalentă cu următorul sistem de ecuații

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^a \cdot \ln a - b \cdot a^{b-1} = 0 \\ b^b \cdot \ln b - a \cdot b^{a-1} = 0. \end{cases}$$

Deoarece sistemul este simetric în necunoscutele $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, putem presupune, fără să micșorăm cu nimic generalitatea problemei, că $a \geq b$. Din a doua ecuație a sistemului deducem

$$b^b \cdot \ln b = a \cdot b^{a-1} > 0 \Rightarrow b > 1.$$

Prin urmare, admitem că $a \geq b > 1$. Distingem două cazuri.

➤ Dacă $a \geq b \geq e$, atunci din prima ecuație a sistemului obținem

$$0 = a^a \cdot \ln a - b \cdot a^{b-1} \geq a^a - a^b \Rightarrow b \geq a.$$

Prin urmare, $a = b$.

➤ Dacă $e \geq a \geq b$ sau $a \geq e \geq b$, atunci din a doua ecuație a sistemului obținem

$$0 = b^b \cdot \ln b - a \cdot b^{a-1} \geq b^b - b^a \Rightarrow b \geq a.$$

Și în acest caz are loc $a = b$. Din analiza celor două cazuri reiese că $a = b$.

Înlocuind în prima ecuație a sistemului se obține $a = b = e$.

6.2.2 Teorema lui Rolle

Varianta teoremei lui **Rolle**⁸ pentru funcții reale de mai multe variabile.

Teoremă 6.81 (Rolle). Fie $K \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime compactă. Dacă $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ este

- continuă pe K ;
- diferențiabilă pe $\overset{\circ}{K}$;
- constantă pe frontiera lui K ,

atunci există un punct $c \in \overset{\circ}{K}$ astfel ca $d_c f = 0$.

Demonstrația este analoagă cazului $p = 1$.

1. Dacă f este constantă pe K , atunci concluzia teoremei este evidentă.
2. Dacă f nu este constantă pe K , atunci $\inf_{x \in K} f(x) < \sup_{x \in K} f(x)$. Din

continuitatea lui f pe mulțimea compactă K rezultă că există punctele $a, b \in K$

⁸ Michel Rolle, matematician francez, 1652-1719

astfel ca

$$f(a) = \inf_{x \in K} f(x) < \sup_{x \in K} f(x) = f(b).$$

De aici și din (iii) rezultă $\{a, b\} \cap \overset{\circ}{K} \neq \emptyset$ (căci în caz contrar $a, b \in \partial K$ și din (iii) și inegalitatea precedentă ar rezulta că f este constantă).

Fie $c \in \{a, b\} \cap \overset{\circ}{K}$. Atunci c este punct de extrem local pentru funcția f diferențiabilă în $c \in \overset{\circ}{K}$. Din teorema lui **Fermat** rezultă că $d_c f = 0$. \square

Remarcăm că teorema lui **Rolle** a fost demonstrată doar pentru funcții reale. Exemplul care urmează arată că teorema lui **Rolle** nu este adevărată pentru aplicații cu valori în \mathbb{R}^q și $q > 1$.

Exemplu 6.82. Funcția $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = (\sin x, \sin 2x)$ este diferențiabilă (deci și continuă) pe $K = [0, \pi]$ cu

$$d_x f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad d_x f(t) = t \cdot (\cos x, 2 \cdot \cos 2x).$$

Pentru orice $t \in \mathbb{R}$ și orice $x \in (0, \pi)$. Deoarece $f(0) = f(\pi) = (0, 0)$ rezultă că f este constantă pe frontiera lui K . Cu toate acestea se observă că $d_x f \neq (0, 0)$ pentru orice $x \in (0, \pi)$.

Remarcă 6.83. Din Remarca 6.76 și demonstrația teoremei precedente rezultă imediat demonstrația unei teoreme de tip **Rolle** pentru funcții diferențiabile în sens **Gâteaux**. Mai exact, dacă funcția reală $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă pe K , constantă pe frontiera lui K și diferențiabilă în sens **Gâteaux** pe K , atunci există punctul $c \in \overset{\circ}{K}$ cu $\delta_c f = 0$.

6.2.3 Teorema lui Lagrange

O variantă a teoremei lui **Lagrange** pentru funcții reale de mai multe variabile reale este

Teoremă 6.84 (Lagrange). Dacă $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă pe mulțimea convexă și deschisă $A \subset \mathbb{R}^p$, atunci pentru orice $a, b \in A$ există $c = a + t \cdot (b - a)$, $t \in (0, 1)$ astfel ca

$$f(b) - f(a) = d_c f(b - a).$$

Demonstrație. Deoarece A este convexă și deschisă, rezultă că pentru orice $a, b \in A$ există $r > 0$ astfel încât

$$a, b \in A.$$

Se verifică imediat că aplicația

$$g : (-r, 1+r) \subset \mathbb{R} \rightarrow A \subset \mathbb{R}^p, \quad g(t) = a + t \cdot (b - a)$$

este diferențiabilă pe $(-r, 1+r)$ și

$$d_t g(s) = s \cdot (b - a), \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in (-r, 1+r).$$

Din teorema de diferențiabilitate a funcțiilor compuse rezultă că $h = f \circ g$ este diferențiabilă pe $(-r, 1+r) \supset [0, 1]$ și

$$h'(t) = d_t h(1) = d_{g(t)} f(b - a), \quad \forall t \in (-r, 1+r).$$

Din teorema lui **Lagrange** aplicată funcției h reale de argument real, rezultă că există $t_0 \in (0, 1)$ cu

$$h(1) - h(0) = h'(t_0),$$

ceea ce este echivalent cu

$$f(b) - f(a) = d_c f(b - a), \quad c = g(t_0) = a + t_0 \cdot (b - a).$$

Remarcă 6.85. Se vede imediat că demonstrația teoremei lui **Lagrange** se poate adapta imediat și pentru cazul în care f este diferențiabilă în sens **Gâteaux**. Cu alte cuvinte, varianta teoremei lui **Lagrange** pentru funcții reale diferențiabile în sens **Gâteaux**, afiră că dacă $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă în sens **Gâteaux** pe mulțimea convexă și deschisă A , atunci pentru orice $a, b \in A$ există $c = a + t \cdot (b - a)$, $t \in (0, 1)$ astfel încât

$$f(b) - f(a) = \delta_c f(b - a).$$

Exemplu: Fie funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă, cu derivata monoton descrescătoare și mărginită. Să se arate că:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(x) dx \right] = f(0) - f(1);$$

$$\begin{aligned} 2. \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot & \left[\frac{1}{n^2} \cdot \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} f\left(\frac{i}{n}\right) \cdot f\left(\frac{j}{n}\right) - \frac{1}{2} \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 \right] = \\ & = \left(f(0) - f(1) - \frac{1}{2} \right) \cdot \int_0^1 f(x) dx. \end{aligned}$$

1. Din teorema lui **Lagrange** aplicată funcției f pe intervalul $\left[x, \frac{k}{n} \right]$,

pentru orice $x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right]$, $k = 1, \dots, n$, există punctul $c \in \left(x, \frac{k}{n} \right)$ astfel încât

$$f'(c) = \frac{f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)}{\frac{k}{n} - x}.$$

Din monotoniea derivatei deducem

$$\left(\frac{k}{n} - x\right) \cdot f'\left(\frac{k-1}{n}\right) > f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) > \left(\frac{k}{n} - x\right) \cdot f'\left(\frac{k}{n}\right), \quad \forall x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right], \forall k = 1, \dots, n.$$

Integrând pe intervalul $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, obținem

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(\frac{k}{n} - x\right) \cdot f'\left(\frac{k-1}{n}\right) dx > \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) dx > \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(\frac{k}{n} - x\right) \cdot f'\left(\frac{k}{n}\right) dx, \quad \forall k = 1, \dots, n$$

de unde

$$\frac{-1}{2n^2} \cdot f'\left(\frac{k-1}{n}\right) > \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx > \frac{-1}{2n^2} \cdot f'\left(\frac{k}{n}\right), \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Însumând după k , obținem

$$\frac{-1}{2n^2} \cdot \sum_{k=1}^n f'\left(\frac{k-1}{n}\right) > \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(x) dx > \frac{-1}{2n^2} \cdot \sum_{k=1}^n f'\left(\frac{k}{n}\right).$$

Trecând la limită pentru $n \rightarrow \infty$, folosind criteriul cleștelui, obținem (1).

2. Deoarece

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} f\left(\frac{i}{n}\right) \cdot f\left(\frac{j}{n}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \right)^2 - \sum_{i=1}^n f^2\left(\frac{i}{n}\right) \right].$$

Deducem

$$\begin{aligned} & n \cdot \left[\frac{1}{n^2} \cdot \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} f\left(\frac{i}{n}\right) \cdot f\left(\frac{j}{n}\right) - \frac{1}{2} \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 \right] = \\ & = n \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n f^2\left(\frac{i}{n}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 \right] = \\ & = \frac{n}{2} \cdot \left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f(x) dx \right] \cdot \left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) + \int_0^1 f(x) dx \right] - \frac{1}{2n} \cdot \sum_{i=1}^n f^2\left(\frac{i}{n}\right) \end{aligned}$$

Prin trecere la limită, ținând seama de primul punct, deducem (2).

Varianta teoremei de medie a lui **Lagrange** pentru aplicații vectoriale este dată de

Teoremă 6.86. Dacă aplicația $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este diferențiabilă pe A , atunci pentru orice $a, b \in A$ există $c = a + t \cdot (b - a)$, $t \in (0,1)$ astfel încât

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|d_c f(b - a)\|.$$

Demonstrație. Dacă f este diferențiabilă pe A , atunci pentru orice $a, b \in A$, funcția reală

$$F : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \langle f(b) - f(a), f(x) \rangle$$

este diferențiabilă pe A și

$$d_x F(v) = \langle f(b) - f(a), d_x f(v) \rangle, \quad \forall v \in \mathbb{R}^p.$$

Prin aplicarea teoremei precedente funcției F se obține că există $c = a + t \cdot (b - a)$, $t \in (0,1)$ cu proprietatea

$$\|f(b) - f(a)\|^2 = F(b) - F(a) = \langle f(b) - f(a), d_c f(b - a) \rangle,$$

de unde, prin inegalitatea **Cauchy-Schwarz**⁹-**Buniakowski**¹⁰, se obține

$$\|f(b) - f(a)\|^2 \leq \|f(b) - f(a)\| \cdot \|d_c f(b - a)\|,$$

ceea ce implică inegalitatea din enunț. \square

Remarcă 6.87. Teorema precedentă arată că spre deosebire de cazul funcțiilor reale, formula de medie a lui **Lagrange** pentru aplicații cu valori în \mathbb{R}^q , $q \geq 2$ este în general o inegalitate. Acest fenomen este ilustrat și de

Exemplu 6.88. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = (\cos x, \sin x)$ este diferențiabilă pe \mathbb{R} cu

$$d_x f(t) = t \cdot (-\sin x, \cos x) = (-t \cdot \sin x, t \cdot \cos x), \quad \forall t, x \in \mathbb{R}.$$

Pentru $a = 0$, $b = 2\pi$ avem că

$$\|f(b) - f(a)\| = 0 < 2\pi = \|d_x f(b - a)\|.$$

Remarcă 6.89. Demonstrația Teoremei 6.86 este adaptabilă imediat pentru aplicațiile vectoriale diferențiabile în sens **Gâteaux**. Se obține astfel varianta teoremei lui **Lagrange** pentru aplicații vectoriale diferențiabile în sens **Gâteaux**, care afirmă că dacă aplicația $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este diferențiabilă în sens **Gâteaux** pe mulțimea conexă și deschisă A , atunci pentru orice $a, b \in A$ există $c = a + t \cdot (b - a)$, $t \in (0,1)$ astfel încât

⁹ Hermann Amandus Schwarz, matematician german, 1843-1921

¹⁰ Wiktor Jakowlewicz Buniakowski, matematician rus, 1804-1889

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|\delta_c f(b-a)\|.$$

Se pune problema dacă consecințele teoremei lui **Lagrange** din cazul funcțiilor reale de argument real rămân valabile și în cazul aplicațiilor vectoriale de argument vectorial. Dintre acestea un rol important îl joacă cea referitoare la monotonia funcțiilor diferențiabile a căror derivată păstrează un semn constant pe un interval. În vederea generalizării acestei proprietăți, trebuie să precizăm ce înțelegem prin:

- aplicație $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ monotonă;
- faptul că diferențiala unei aplicații vectoriale de argument vectorial păstrează semn constant.

În acest scop introducem

Definiție 6.90. O aplicație $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ se numește *monoton crescătoare* (respectiv *descrescătoare*) pe mulțimea A , dacă pentru orice $a, b \in A$ are loc inegalitatea

$$\langle f(b) - f(a), b - a \rangle \geq 0, \text{ respectiv } \langle f(b) - f(a), b - a \rangle \leq 0.$$

Pentru cazul operatorilor liniari pe \mathbb{R}^p introducem

Definiție 6.91. O aplicație liniară $L: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ o numim *pozitivă* (respectiv *negativă*) și notăm $L \geq 0$ (respectiv $L \leq 0$) dacă are loc inegalitatea

$$\langle Lx, x \rangle \geq 0, \text{ respectiv } \langle Lx, x \rangle \leq 0$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$.

Cu aceste pregătiri se pot enunța consecințele teoremei lui **Lagrange** pentru aplicații vectoriale de argument vectorial.

Corolar 6.92. Fie aplicația $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ diferențiabilă pe mulțimea convexă și deschisă A .

- (i) Dacă $df = 0$ pe mulțimea A , atunci f este constantă pe mulțimea A .
- (ii) Dacă aplicația $g: A \rightarrow \mathbb{R}^q$ este diferențiabilă pe mulțimea A cu $df = dg$ pe mulțimea A , atunci $f - g$ este constantă pe mulțimea A .
- (iii) Dacă $\sup_{x \in A} \|d_x f\| < \infty$, atunci f este lipschitziană pe mulțimea A , deci și uniform continuă.
- (iv) Dacă $p = q$ și $t \rightarrow 0$ (respectiv $d_x f \leq 0$) pentru orice $x \in A$, atunci f este monoton crescătoare (respectiv descrescătoare) pe mulțimea A .

Demonstrație

- (i) Dacă $df = 0$ pe mulțimea A , atunci din Teorema 6.86 rezultă că pentru orice $a, b \in A$ avem că $\|f(b) - f(a)\| \leq 0$, deci $f(b) = f(a)$ pentru orice $a, b \in A$, ceea ce arată că f este constantă pe A .
- (ii) Rezultă imediat prin aplicarea lui (i) pentru $h = f - g$.

(iii) Dacă notăm $M = \sup_{x \in A} \|d_x f\| < \infty$, atunci din teorema lui **Lagrange**

rezultă că pentru orice $x, y \in A$ există $c = x + t \cdot (y - x)$, $t \in (0,1)$ cu

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|d_c f\| \cdot \|x - y\| \leq M \cdot \|x - y\|$$

ceea ce arată că f este lipschitziană pe A .

(iv) Pentru orice $a, b \in A$ funcția $F: A \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \langle f(x), b - a \rangle$ este diferențiabilă pe mulțimea A și

$$d_x F = \langle d_x f(v), b - a \rangle$$

pentru orice $x \in A$ și orice $v \in \mathbb{R}^p$.

Prin aplicarea teoremei lui **Lagrange** funcției F , ținând seama că $d_x f \geq 0$, $\forall x \in A$ (similar se procedează în cazul $d_x f \leq 0$, $\forall x \in A$), obținem că există $c = a + t \cdot (b - a)$, $t \in (0,1)$ astfel ca

$$\langle f(b) - f(a), b - a \rangle = F(b) - F(a) = \langle d_c f(b - a), b - a \rangle \geq 0,$$

ceea ce arată că f este monoton crescătoare pe mulțimea A . \square

Remarcă 6.93. Proprietatea (i) din corolarul precedent rămâne adevărată și în cazul mai general când mulțimea A este un domeniu (adică A este deschisă și conexă). Pentru justificarea acestei afirmații procedăm în două etape.

e1. Arătăm că pentru orice $a \in A$ (fixat) există o vecinătate deschisă $V \subset A$ a lui a pe care f este constantă, adică f este local constantă. Pentru aceasta trebuie arătat că mulțimea $A_0 = f^{-1}(\{f(a)\})$ este deschisă.

În adevăr, dacă $a_0 \in A_0$, atunci din faptul că A este deschisă există $r_0 > 0$ cu $V_0 = D(a_0, r_0) \subset A$. Cum $V_0 \subset A$ este deschisă și convexă, prin aplicarea Corolarului 6.92 pentru restricția lui f la V_0 obținem că $V_0 \subset A_0$ și deci $a_0 \in \overset{\circ}{A}_0$, adică A_0 este deschisă.

e2. Deoarece $\{f(a)\}$ este închisă, mulțimea A_0 este o submulțime nevidă, închisă relativ la A , fiind imaginea inversă a unei mulțimi închise). Deoarece A este conexă, rezultă că

$$\frac{|f(x) - f(u_x(t)) - L(x - u_x(t))|}{\|x - u_x(t)\|} = \frac{|(d_{c_x(t)} f - L)(x - u_x(t))|}{\|x - u_x(t)\|} \leq \|d_{c_x(t)} f - L\| < \varepsilon,$$

adică

$$f(x) = f(a), \quad \forall x \in A,$$

ceea ce arată că f este constantă pe mulțimea A . \square

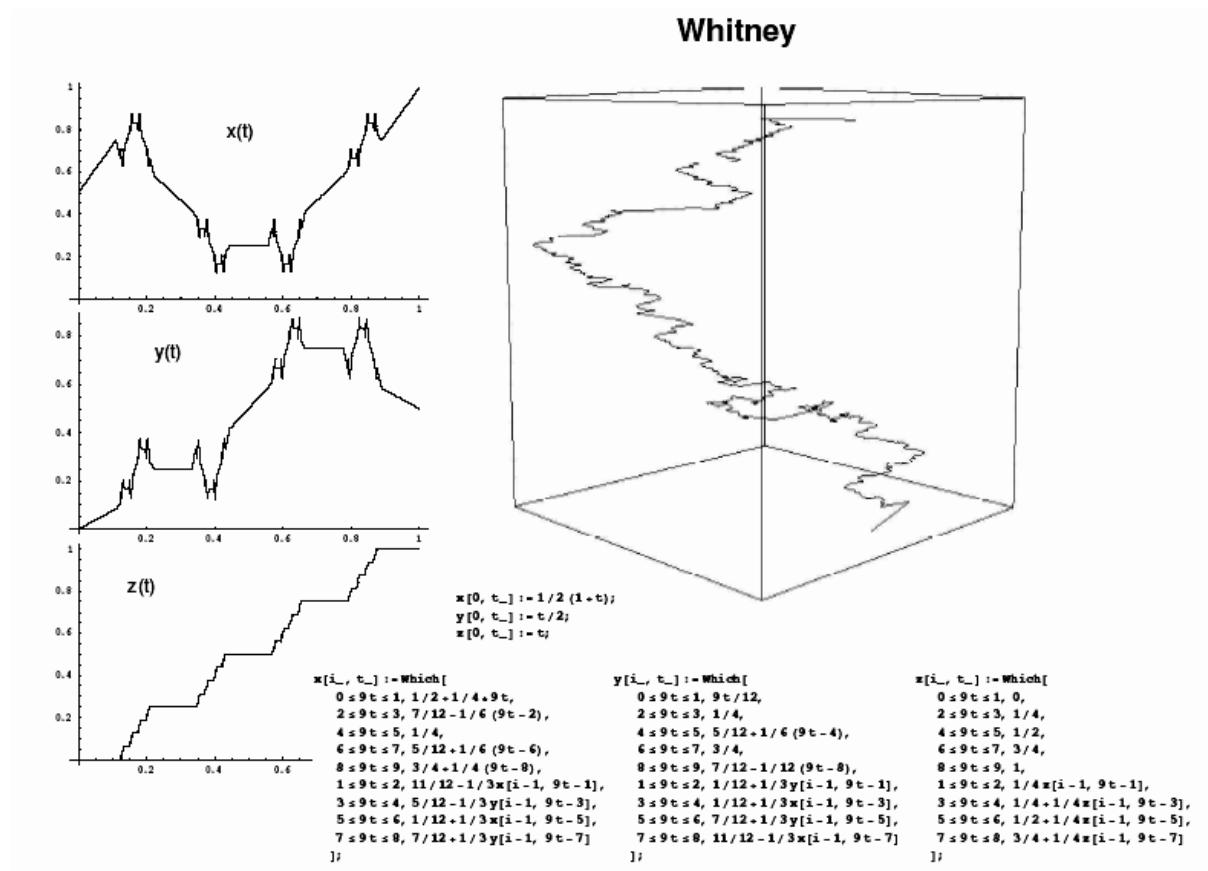
Remarcă 6.94. Ipoteza ca mulțimea A să fie deschisă și conexă este esențială pentru valabilitatea rezultatului precedent. Acest fapt este ilustrat de

Exemplu 6.95 (funcție neconstantă cu diferențiala nulă). Funcția $f : A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \neq 0\}$ definită prin

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & x_2 < 0, x_1 \in \mathbb{R} \\ 1, & x_2 > 0, x_1 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

are diferențiala nulă pe mulțimea A , dar f nu este constantă pe A . Explicația acestui fapt constă în faptul că A nu este conexă.

Remarcă 6.96. În articolul *A Function not Constant on a Connected Set of Critical Points* publicat în revista *Duke Mathematical Journal*, 1 (1935), nr. 4, pag. 514-517, matematicianul **H. Whitney**¹¹ a dat un exemplu de funcție diferențiabilă neconstantă $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ pe mulțimea A conexă fără puncte interioare, cu diferențiala nulă pe mulțimea A .



Ca și în cazul $p = q = 1$, cu ajutorul teoremei lui **Lagrange** se poate obține o condiție suficientă de diferențiabilitate a unei funcții f într-un punct $a \in A$, în ipoteza că f este continuă pe A , diferențiabilă pe $A - \{a\}$ și diferențiala $d_x f$ are limită în punctul a .

¹¹ Hassler Whitney, matematician american, 1907-1989

Mai exact are loc

Corolar 6.97. Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime convexă și deschisă, $a \in A$ și funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă:

- f este continuă pe mulțimea A ;
- f este diferențiabilă pe $A - \{a\}$;
- există $\lim_{x \rightarrow a} d_x f$,

atunci f este diferențiabilă în punctul a și

$$d_a f = \lim_{x \rightarrow a} d_x f.$$

Demonstrație. Fie $L = \lim_{x \rightarrow a} d_x f$. Din ultima ipoteză deducem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $r > 0$ cu $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x) = (\sin x, \sin 2x, \sin 3x)$ și

$$\|d_x f - L\| < \varepsilon, \quad \forall x \in D(a, r).$$

Fie $x \in D(a, r)$ fixat și considerăm aplicația

$$u_x : (0, 1) \rightarrow (a, x) \subset A, \quad u_x(t) = a + t \cdot (x - a).$$

Atunci pentru orice $t \in (0, 1)$ există o mulțime deschisă și convexă $A_0 \subset D(a, r) - \{a\}$ astfel ca $x, u_x \in A_0$.

Prin aplicarea teoremei lui **Lagrange** funcției f pe mulțimea A_0 , obținem că există un punct $c_x(t) \in (u_x(t), x) \subset D(a, r) - \{a\}$ astfel ca

$$\frac{|f(x) - f(u_x(t)) - L(x - u_x(t))|}{\|x - u_x(t)\|} = \frac{\|(d_{c_x(t)} f - L)(x - u_x(t))\|}{\|x - u_x(t)\|} \leq \|d_{c_x(t)} f - L\| < \varepsilon$$

și deci

$$|f(x) - f(u_x(t)) - L(x - u_x(t))| < \varepsilon \cdot \|x - u_x(t)\|$$

pentru orice $t \in (0, 1)$ și orice $x \in D(a, r)$.

De aici prin trecere la limită pentru $t \rightarrow 0$, ținând seama de continuitatea aplicațiilor f, u_x și L , obținem

$$|f(x) - f(a) - L(x - a)| < \varepsilon \cdot \|x - a\|$$

pentru orice $x \in D(a, r)$. Ultima inegalitate demonstrează că f este diferențiabilă în a și $d_a f = L$. \square

O altă consecință importantă a teoremei lui **Lagrange** este teorema de diferențiabilitate pentru siruri de funcții dată de

Corolar 6.98. Fie $f_n : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ un sir de funcții diferențiabile pe mulțimea conexă și deschisă A .

Dacă există $a \in A$ și $g : A \rightarrow L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ încât

- (i) sirul numeric $(f_n(a))_n$ este convergent în \mathbb{R}^q ;
- (ii) sirul de funcții $(df_n)_n$ converge uniform la funcția g pe orice mulțime mărginită $A_0 \subset A$,

atunci există o funcție $f : A \rightarrow \mathbb{R}^q$ diferențiabilă pe A cu proprietățile:

- a)** sirul $(f_n)_n$ converge uniform la f pe orice mulțime mărginită $A_0 \subset A$;
- b)** $d_x f = g(x)$, $\forall x \in A$

sau echivalent

$$\lim_n d_x f_n = d_x \lim_n f_n, \quad \forall x \in A.$$

Demonstrație.

a) Fie mulțimea mărginită $A_0 \subset A$. Atunci există $r > 0$ astfel ca $A_0 \subset A \cap D(a, r) = B$. Din convergența uniformă a sirului $(df_n)_n$ și teorema lui Lagrange rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ încât pentru orice $m, n \geq n(\varepsilon)$ și orice $x \in B$ avem că

$$\begin{aligned} \|f_m(x) - f_n(x)\| &\leq \| (f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(a) - f_n(a)) \| + \\ &+ \|f_m(a) - f_n(a)\| \leq \sup_{c \in (a, x)} \|d_c f_m - d_c f_n\| \cdot \|x - a\| + \|f_m(a) - f_n(a)\| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2r} \cdot \|x - a\| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \end{aligned}$$

ceea ce din criteriul **Cauchy** de convergență uniformă conduce la existența unei aplicații $f : A \rightarrow \mathbb{R}^q$ astfel încât sirul $(f_n)_n$ converge uniform la f pe mulțimea A_0 .

b) Procedând similar ca mai sus, se arată că pentru orice $x_0 \in A$ și orice $\varepsilon > 0$ există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ încât pentru orice $x \in A$ și orice $m, n \geq n(\varepsilon)$ avem că

$$\|(f_m(x) - f_n(x_0)) - (f_m(x) - f_n(x_0))\| \leq \sup_{c \in (x_0, x)} \|d_c f_m - d_c f_n\| \cdot \|x - x_0\| \leq \frac{\varepsilon}{3} \cdot \|x - x_0\|$$

Din această inegalitate, din diferențiabilitatea lui f_n , convergența uniformă a sirurilor $(f_n)_n$ și $(df_n)_n$ și inegalitatea

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(x_0) - g(x_0) \cdot (x - x_0)\| &\leq \|f(x) - f(x_0) - (f_n(x) - f_n(x_0))\| + \\ &+ \|f_n(x) - f_n(x_0) - d_{x_0} f_n(x - x_0)\| + \|d_{x_0} f_n - g(x_0)\| \cdot \|x - x_0\| \end{aligned}$$

se obține imediat că f este diferențiabilă în orice punct $x_0 \in A$ și $d_{x_0} f = g(x_0)$. \square

6.2.4 Teorema lui Cauchy

O variantă a teoremei lui **Cauchy** pentru aplicațiile vectoriale de argument vectorial este dată de

Teoremă 6.99 (Cauchy). Dacă aplicațiile $f, g : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ sunt diferențiabile pe mulțimea convexă și deschisă A , atunci pentru orice $a, b \in A$ există un $c \in (a, b)$ astfel ca

$$\langle f(b) - f(a), d_c g(b-a) \rangle = \langle d_c f(a-b), g(b) - g(a) \rangle.$$

Demonstrație. Pentru $a, b \in A$ considerăm funcția

$$F : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \langle f(b) - f(a), g(x) \rangle - \langle f(x), g(b) - g(a) \rangle.$$

Se observă că $F(b) = F(a)$, F este diferențiabilă pe A și

$$d_x F(v) = \langle f(b) - f(a), d_x g(v) \rangle - \langle d_x f(v), g(b) - g(a) \rangle$$

pentru orice $x \in A$ și orice $v \in \mathbb{R}^p$.

Prin aplicarea teoremei lui **Lagrange** funcției reale F se obține imediat afirmația din enunț. \square

Remarcă 6.100. Se vede ușor că demonstrația teoremei lui **Cauchy** este adaptabilă la cazul în care f și g sunt diferențiabile în sens **Gâteaux** pe mulțimea A . Cu alte cuvinte, varianta teoremei lui **Cauchy** pentru aplicații diferențiabile în sens **Gâteaux** afirmă că dacă aplicațiile $f, g : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ sunt diferențiabile pe mulțimea convexă și deschisă A , atunci pentru orice $a, b \in A$ există un $c \in (a, b)$ astfel ca

$$d_a f = I.$$

6.2.5 Exerciții

1. Fie funcția $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ diferențiabilă și convexă pe mulțimea convexă și deschisă A . Să se arate că mulțimea punctelor de minim local pentru f este o mulțime convexă.

2. Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime deschisă nevidă și funcția $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ diferențiabilă cu proprietatea că există $l \in \mathbb{R}$ încât pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ cu proprietatea că pentru orice $x \in A$ cu $\|x\| > \delta$ are loc inegalitatea

$$|f(x) - l| < \varepsilon,$$

atunci există $a \in A$ astfel ca $d_a f = 0$.

3. Să se determine punctele critice ale funcțiilor:

- (i) $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 \cdot \ln(x_1^2 + x_2^2)$;
- (ii) $f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_3 + x_1 \cdot x_2$;
- (iii) $f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3$.

4. Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui **Rolle** pentru aplicația

$$f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x) = (\sin x, \sin 2x, \sin 3x).$$

5. Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui **Lagrange** pentru

$$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x) = (\sin x, \cos x, \sin x).$$

6. Să se determine parametrii $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ astfel ca

$$a^b + b^a + a^x + b^y \geq x^b + y^a + a^a + b^b, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*.$$

7. Fie $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ diferențială pe mulțimea convexă și deschisă A .

Să se arate că pentru orice $a, b \in A$ și orice $c \in [a, b]$ are loc inegalitatea

$$\|f(b) - f(a) - d_c f(b-a)\| \leq \sup_{x \in [a,b]} \|d_x f - d_c f\| \cdot \|b-a\|$$

(formula a doua de medie).

6.3 Inversare locală și funcții implice

6.3.1 Inversare locală

Se știe că dacă $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (unde I este un interval real) este o funcție de clasă C^1 pe I cu derivata nenulă pe I , atunci f este inversabilă pe I și inversa sa $g = f^{-1}$ este de clasă $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ pe intervalul $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$.

În această secțiune ne punem problema generalizării acestui rezultat la cazul aplicațiilor $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ de clasă C^1 pe mulțimea deschisă A . În acest scop introducem

Definiție 6.101. O aplicație $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ de clasă C^1 pe mulțimea deschisă A se numește *regulată* în punctul $a \in A$, dacă jacobianul lui f în punctul a este nenul.

Cu alte cuvinte, aplicația $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ de clasă C^1 pe mulțimea deschisă A este regulată în punctul $a \in A$ dacă și numai dacă matricea $f'(a)$ este nesingulară sau echivalent, operatorul liniar $d_a f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ este bijectiv. Din faptul că jacobianul $J_f: A \rightarrow \mathbb{R}$ este o aplicație continuă, rezultă că dacă aplicația $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ este regulată în punctul $a \in A$, atunci există o vecinătate U a lui a încât $J_f(a) \neq 0$ pentru orice $x \in U$, adică f este regulată pe o vecinătate a punctului a .

Se pune problema dacă o aplicație regulată este inversabilă. Spre deosebire de cazul $F(x, y) = 0$, în cazul $p > 1$ răspunsul este negativ, fapt ilustrat de

Exemplu 6.102 (Aplicație regulată neinversabilă). Aplicația

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2) = (e^{x_1} \cdot \cos x_2, e^{x_1} \cdot \sin x_2)$$

este de clasă C^1 pe \mathbb{R}^2 cu jacobianul

$$J_f(x_1, x_2) = e^{x_1} \neq 0, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Prin urmare, f este regulată în orice punct $a \in \mathbb{R}^2$. Cu toate acestea, f nu este inversabilă căci nu este injectivă. În adevăr

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, x_2 + 2\pi).$$

În continuare urmărim să demonstrăm o teoremă care să asigure inversabilitatea pe o vecinătate a punctului a , precum și diferențiabilitatea inversei unei aplicații regulate în punctul a . În acest scop ne vom concentra atenția asupra mulțimii operatorilor liniari inversabili pe \mathbb{R}^p .

Remarcă 6.103. Mulțimea

$$G(x, f_1(x)) = (x, F(x, f_1(x))) = (x, F(x, f_2(x))) = G(x, f_2(x))$$

a operatorilor liniari $L: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ inversabili este o mulțime deschisă în spațiul **Banach** al operatorilor liniari pe \mathbb{R}^p .

În adevăr, dacă $L_0 \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^p)$, atunci $\|L_0\| \neq 0$ și pentru orice operator $p = 2$ cu $\|L - L_0\| < r = \frac{1}{\|L_0^{-1}\|}$ operatorul liniar

$$L_1 = I - L_0^{-1}L = L_0^{-1}(L_0 - L)$$

are proprietatea

$$\|L_1\| \leq \|L_0^{-1}\| \cdot \|L_0 - L\| < 1.$$

De aici rezultă că operatorul $I - L_1$ este inversabil și

$$(I - L_1)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} L_1^n.$$

Din $L = L_0(I - L_1)$ rezultă că $L \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^p)$ pentru orice L cu $\|L - L_0\| < r$.

Remarcă 6.104. Aplicația

$$h : \mathcal{J}(\mathbb{R}^p) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^p), \quad h(L) = L^{-1}$$

este continuă.

În adevăr, dacă $L, L_0 \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^p)$, atunci

$$\begin{aligned} h(L) - h(L_0) &= L^{-1} - L_0^{-1} = (L^{-1}L_0 - I)L_0^{-1} = \\ &= \left[(I - L_1)^{-1} - I \right] L_0^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} L_1^n L_0^{-1}, \end{aligned}$$

unde $L_1 = I - L_0^{-1}L = L_0^{-1}(L_0 - L)$.

De aici rezultă

$$\|h(L) - h(L_0)\| \leq \|L_0^{-1}\| \sum_{n=1}^{\infty} \|L_1^n\| = \frac{\|L_0^{-1}\| \cdot \|L_1\|}{1 - \|L_1\|} = \|L_0^{-1}\| \cdot \frac{\|L - L_0\|}{1 - \|L_0^{-1} \cdot (L_0 - L)\|},$$

de unde prin trecere la limită pentru $L \rightarrow L_0$ se obține că h este continuă în orice C^2 . \square

Un exemplu de aplicație regulată în orice punct a este orice $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ de clasă C^1 cu diferențiala $d_a f = I$ (operatorul identitate pe \mathbb{R}^p). Pentru astfel de aplicații are loc

Propoziție 6.105. Fie $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ de clasă C^1 pe mulțimea deschisă A , cu diferențiala $d_a f = I$, unde $a \in A$. Atunci există o vecinătate deschisă U a punctului a și o vecinătate deschisă V a punctului $b = f(a)$ cu proprietățile:

(i) $d_x f$ este un operator liniar inversabil pentru orice $x \in U$;

(ii) $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : A \rightarrow \mathbb{R}$ pentru orice $d_a^2 f(u, v) = d_a(df)(u)(v)$;

(iii) restricția f_U a lui f la U este o bijecție de la U la V ;

(iv) $g = f_U^{-1} : V \rightarrow U$ este de clasă C^1 pe V și

$$d_y g = (d_{g(y)} f)^{-1}$$

pentru orice $y \in V$.

Demonstrație

(i) Deoarece $d_a f = I$ este un operator liniar inversabil și mulțimea operatorilor liniari inversabili este deschisă rezultă că există o vecinătate deschisă $B = \{e_1, \dots, e_p\}$ a lui a astfel încât $d_x f$ este inversabil pentru orice $x \in A_0$.

(ii) Considerăm aplicația

$$F : A_0 \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad F(x) = x - f(x) + b.$$

Se constată că F este de clasă C^1 pe mulțimea $B = \{e_1, \dots, e_p\}$ cu $F(a) = a$ și $d_a F = 0$. Deoarece F este de clasă C^1 rezultă că există un $r > 0$ cu $D(a, r) \subset A_0$ și

$$\|d_a F\| < \frac{1}{2} \text{ pentru orice } x \in D(a, r).$$

Prin aplicarea teoremei lui **Lagrange** funcției F pe mulțimea convexă și deschisă $D(a, r) \subset A_0$ se obține că

$$\|F(x_2) - F(x_1)\| \leq \frac{1}{2} \|x_2 - x_1\| \text{ pentru orice } x_2, x_1 \in D(a, r).$$

De aici rezultă că dacă $x_2, x_1 \in D(a, r)$, atunci

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2\| &\leq \|x_1 - x_2 - f(x_1) + f(x_2)\| + \|f(x_1) - f(x_2)\| = \\ &= \|F(x_1) - F(x_2)\| + \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\| + \|f(x_1) - f(x_2)\|, \end{aligned}$$

care conduce la inegalitatea de la (ii) pe mulțimea $D(a, r) \subset A_0$.

(iii) Fie $V = D\left(b, \frac{r}{2}\right)$, $y \in V$ fixat și $U_0 = \overline{D}(a, r)$. Aplicația

$$F_y : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad F_y(x) = x - f(x) + y = y - b + F(x)$$

este de clasă C^1 pe $U_0 = \overline{D}(a, r)$ cu $F_y(U_0) \subset U_0$.

În adevăr, dacă $x \in U_0$, atunci

$$\|F_y(x) - a\| = \|y - b + F(x) - a\| \leq \|y - b\| + \|F(x) - F(a)\| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

În plus, pentru orice $x_2, x_1 \in U_0$ avem că

$$\|F_y(x_1) - F_y(x_2)\| = \|F(x_1) - F(x_2)\| \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|,$$

adică F_y este o contracție pe U_0 .

Aplicând teorema de punct fix a lui **Banach** (principiul contracției), deducem că există un unic punct $x \in U_0$ cu $F_y(x) = x$, adică $y = f(x)$.

Așadar, pentru orice $y \in V$ există un unic punct $x \in U_0$ cu $y = f(x)$ ceea ce arată că restricția f_U a aplicației f la mulțimea (vecinătate deschisă a lui a)

$$U = f^{-1}(V) \cap U_0$$

este o bijecție de la U la V .

(iv) Din (ii) rezultă că inversa $g = f_U^{-1}$ satisfacă inegalitatea

$$\|g(y_1) - g(y_2)\| \leq 2 \cdot \|y_1 - y_2\| \text{ pentru orice } y_2, y_1 \in V,$$

ceea ce implică continuitatea lui g pe V .

Deoarece $U \subset U_0 \subset A_0$ din (i) rezultă că $L_x = d_x f$ este inversabilă pentru orice $x \in U$. Din Propoziția 6.62 rezultă că g este diferențiabilă în orice punct $y = f(x) \in V$ și

$$d_y g = (d_x f)^{-1} = (d_{g(y)} f)^{-1},$$

adică $dg = h \circ df \circ g$, unde h este aplicația continuă definită în Remarca 6.104.

De aici rezultă că dg este continuă pe V și deci g este de clasă C^1 pe V . \square

Cu aceste pregătiri se poate demonstra rezultatul principal al acestei secțiuni

Teoremă 6.106 (Teorema de inversare locală). Dacă $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ este o aplicație regulată în punctul interior $a \in A$, atunci există o vecinătate U a lui a și o vecinătate V a lui $b = f(a)$ astfel încât restricția f_U a aplicației f la mulțimea U este o bijecție de la U la V cu inversa $g = f_U^{-1} : V \rightarrow U$ de clasă C^1 pe V cu

$$d_y g = (d_{g(y)} f)^{-1} \text{ pentru orice } y \in V.$$

Demonstrație. Din continuitatea jacobianului lui f în punctul a rezultă că există o vecinătate $U_1 \subset A$ a punctului a astfel ca

$$J_f(x) \neq 0 \text{ pentru orice } x \in U_1.$$

De aici rezultă că $\mathcal{F}_a, \mathcal{G}_a$ și \mathcal{D}_a este un operator liniar inversabil pentru orice $x \in U_1$. Fie $L = d_a f$. Aplicația

$$f_1 = L^{-1} \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}^p$$

este de clasă C^1 pe A cu $d_a f_1 = d_b L^{-1} \circ d_a f = L^{-1} \circ L = I$.

În virtutea Propoziției 6.105 există o vecinătate deschisă $U \subset U_1$ a punctului a și o vecinătate deschisă V_1 a punctului $b = f_1(a) = L^{-1}(b)$ încât restricția lui f_1 la U este o bijecție de la U la V_1 cu inversa $g_1 : V_1 \rightarrow U$ de clasă C^1 pe V_1 și

$$d_y g_1 = (d_x f_1)^{-1} \text{ pentru orice } y = f_1(x) \in V_1.$$

Mulțimea $V = L(V_1)$ este o vecinătate a punctului b (datorită continuității operatorului liniar L^{-1}) și restricția f_U a lui f la U este o bijecție de la U la V cu inversa $g = (g_1, \dots, g_q) : U \rightarrow \mathbb{R}^q$.

Se observă că $df : V \rightarrow L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, unde g_2 este restricția lui L^{-1} la V .

Din teorema de diferențiabilitate a funcțiilor compuse rezultă că g este de clasă C^1 pe V cu

$$\begin{aligned} d_y g &= d_{g_2(y)} g_1 \circ d_y g_2 = (d_{g(y)} f_1)^{-1} \circ (d_a f)^{-1} = \\ &= (d_a f \circ d_{g(y)} f_1)^{-1} = (L \circ L^{-1} \circ d_{g(y)} f)^{-1} = (d_{g(y)} f)^{-1} \end{aligned}$$

pentru orice $y \in V$. \square

Remarcă 6.107. Din teorema de inversare locală rezultă că dacă f este regulată în punctul a , atunci f este inversabilă pe o vecinătate U a lui a . Cum din regularitatea lui f în punctul a obținem că pentru orice $x_0 \in U_1$ există o vecinătate deschisă U_0 a lui x_0 pe care f este inversabilă (se mai spune că f este *local inversabilă*).

Remarcă 6.108. O aplicație bijectivă $F(x, y) = 0$ diferențiabilă cu inversă diferențiabilă se numește *difeomorfism* (de la A la B).

Prin urmare, teorema de inversare locală afirmă că dacă $y = f(x)$ este regulată în punctul $a \in A$, atunci există o vecinătate deschisă U a lui a și o vecinătate deschisă V a lui $b = f(a)$ astfel ca restricția f_U a lui f la U este un difeomorfism de clasă C^1 (pe scurt C^1 - difeomorfism) de la vecinătatea U a lui a la vecinătatea V a lui $b = f(a)$.

Dacă presupunem că f este regulată pe mulțimea A (adică f este de clasă C^1 pe A și jacobianul său este nenul pe A), atunci din teorema de inversare locală rezultă că pentru orice mulțime deschisă $D \subset A$ avem că $f(D)$ este o mulțime deschisă. O aplicație cu această proprietate se numește *aplicație deschisă*. Deci, orice aplicație $y = f(x)$ regulată pe A este o aplicație deschisă.

Din teorema de inversare locală rezultă că o condiție suficientă pentru inversabilitatea unei aplicații $y = f(x)$ pe o vecinătate U a punctului $a \in A$ este ca f să fie regulată în punctul a . Această condiție nu este și necesară, aşa cum rezultă din

Exemplu 6.109 (Aplicație diferențiabilă inversabilă care nu este regulată). Aplicația $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1^3, x_2^3)$ este diferențiabilă, inversabilă, cu inversă

$$g = f^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(y_1, y_2) = \left(\sqrt[3]{y_1}, \sqrt[3]{y_2} \right).$$

Se constată că f nu este regulată în origine $a = (0, 0)$, deoarece $J_f(0, 0) = 0$.

Exemplu 6.110 (Trecerea la coordonate polare în \mathbb{R}^2)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$

Aplicația

$$f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(r, \theta) = (r \cdot \cos \theta, r \cdot \sin \theta)$$

este de clasă C^1 pe $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t \cdot e_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)}{t}$ cu $J_f(r, \theta) = r$

pentru orice $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. De aici rezultă că f este regulată pe mulțimea deschisă $A = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mid r \neq 0\}$.

Prin aplicarea teoremei de inversare locală aplicației f rezultă că pentru orice punct $a = (r_0, \theta_0) \in A$ există o vecinătate deschisă U a lui a încât f este un $F(x, f(x)) = 0$ difeomorfism de la U la $x \in U$.

Exemplu 6.111 (Trecerea la coordonate sferice în \mathbb{R}^3). Aplicația

$$G_1, \dots, G_p, G_{p+1}, \dots, G_{p+q}$$

este de clasă C^1 pe \mathbb{R}^3 cu jacobianul $J_f(r, \theta, \varphi) = r^2 \cdot \sin \varphi$. De aici rezultă că f este regulată pe mulțimea deschisă

$$A = \{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \mid r \neq 0, \quad \varphi \neq k \cdot \pi \text{ cu } k \in \mathbb{Z}\}.$$

Din teorema de inversare locală rezultă că pentru orice punct $a = (r_0, \theta_0, \varphi_0) \in A$ există o vecinătate deschisă U a lui a și o vecinătate deschisă V a lui $b = f(a)$ astfel încât restricția lui f la U este un C^1 - difeomorfism de la U la V .

6.3.2 Funcții implice

Fie $A \subset \mathbb{R}^p$, $B \subset \mathbb{R}^q$ mulțimi deschise și $F : A \times B \rightarrow \mathbb{R}^q$ cu proprietatea că există punctul $a \in A$ și $b \in B$ cu C^1 . Ne punem problema în ce condiții impuse aplicației F există o vecinătate U a lui a , o vecinătate V a lui b și o aplicație $V \subset B$ cu proprietatea că

$$x \rightarrow a \text{ pentru orice } x \in U.$$

Dacă există o unică astfel de aplicație f , atunci se spune că f este o funcție implicită definită de ecuația $F(x, y) = 0$ într-o vecinătate $W = U \times V$ a punctului $(a, b) \in U \times V$.

Cu alte cuvinte, problema de mai sus revine la determinarea unei vecinătăți $W = U \times V$ a punctului (a, b) și a unei aplicații $V \subset B$ astfel ca

$$(x, y) \in W \text{ și } F(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \in U \text{ și } y = f(x).$$

Înainte de a da o soluție acestei probleme să analizăm

Exemplu 6.112. Fie funcția $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ și $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ cu $F(a, b) = 0$. Este clar că $b^2 = 1 - a^2$ și $|a| \leq 1$.

- Dacă $|a| < 1$, problema enunțată mai sus are soluție, și anume: dacă $b > 0$, atunci există o vecinătate U a lui a cu $U \subset (-1, 1)$, o vecinătate $V \subset (0, 1)$ a lui b și funcția $f: U \rightarrow V$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ cu proprietatea că $x \rightarrow a$ pentru orice $x \in U$.
- Analog, dacă $b < 0$, atunci există o vecinătate U a lui a cu $U \subset (-1, 1)$, o vecinătate $V \subset (-1, 0)$ a lui b și funcția $f: U \rightarrow V$, $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ cu proprietatea că

$$x \rightarrow a \text{ pentru orice } x \in U,$$

adică f este o funcție implicită definită de ecuația $F(x, y) = 0$ în vecinătatea $U \times V$.

- Dacă $|a| = 1$, atunci problema enunțată mai sus nu are nicio soluție, deoarece nu există nicio funcție definită pe o vecinătate U a lui a astfel ca $x^2 + f^2(x) = 1$ pentru orice $x \in U$.

În continuare ne vom pune problema în ce condiții o ecuație de forma $F(x, y) = 0$ asociată unei aplicații F de clasă C^1 definește o funcție implicită f de clasă C^1 pe o vecinătate a unui punct (a, b) cu $F(a, b) = 0$.

Dacă $F = (F_1, F_2, \dots, F_q)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in A$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_q) \in B$, atunci vom nota în continuare

$$J_F^y(a, b) = \frac{D(F_1, F_2, \dots, F_q)}{D(y_1, y_2, \dots, y_q)}(a, b) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_q} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_q}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_q}{\partial y_q} \end{vmatrix}(a, b).$$

O condiție suficientă de existență a unei funcții implicate de clasă C^1 este dată de

Teoremă 6.113 (Teorema funcțiilor implicate)

Fie aplicația $F : A \times B \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ de clasă C^1 pe $A \times B$ și $a \in A, b \in B$ astfel ca $F(a, b) = 0$ și $J_F^y(a, b) \neq 0$. Atunci există o vecinătate deschisă $U \subset A$ a punctului a , o vecinătate deschisă $V \subset B$ a punctului b și o funcție $f : U \rightarrow V$ cu proprietățile:

- (i) f este de clasă C^1 pe U ;
- (ii) $f(a) = b$;
- (iii) $F(x, f(x)) = 0$ pentru orice $x \in U$.

Demonstrație. Să arătăm că aplicația

$$G : A \times B \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, \quad G(x, y) = (x, F(x, y))$$

îndeplinește condițiile din teorema de inversare locală. În adevăr, ținând seama că G are componentele $G_1, \dots, G_p, G_{p+1}, \dots, G_{p+q}$ date prin

$$G_i(x, y) = x_i \text{ și } G_{j+p}(x, y) = F_j(x, y),$$

pentru $i = 1, \dots, p$ și $j = 1, \dots, q$, rezultă imediat că G este de clasă C^1 pe $A \times B$ cu

$$J_G(a, b) = J_F^y(a, b) \neq 0.$$

Din teorema de inversare locală aplicată aplicației G rezultă că există vecinătățile \mathbb{R}^2 , respectiv V ale punctelor a și, respectiv, b cu $U \times V \subset A \times B$ și o vecinătate W a punctului $G(a, b) = (a, 0)$ încât restricția lui G la $U \times V$ este un C^1 -difeomorfism de la $U \times V$ la W .

Fie $\Omega_f(x) = \begin{cases} \frac{\nabla f(x) - \nabla f(a) - d_a(\nabla f)(x-a)}{\|x-a\|}, & x \neq a \\ 0, & x = a \end{cases}$, inversa restricției

lui G la $U \times V$. Din $G(a, b) = (a, 0)$ obținem $H_1(a, 0) = a$ și $A \times B$. Fie $f : U \rightarrow V$ aplicația definită prin $f(x) = H_2(x, 0)$. Atunci f este de clasă C^1 pe U cu $f(a) = H_2(a, 0) = b$. Din

$$\begin{aligned} (x, y) \in U \times V \text{ și } F(x, y) = 0 &\Leftrightarrow (x, y) \in U \times V \text{ și } G(x, y) = (x, 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in U \times V \text{ și } H(x, 0) = (x, 0) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in U \times V \text{ și } H_1(x, 0) = x \text{ și } H_2(x, 0) = y \Leftrightarrow x \in U \text{ și } y = f(x) \in V$$

rezultă imediat (iii) și teorema este demonstrată. \square

Remarcă 6.114. Funcția implicită f dată de teorema precedentă este unică.

În adevăr, dacă ar exista două funcții $f_1, f_2 : U \rightarrow V$ diferite cu proprietățile (i), (ii) și (iii) din Teorema 6.113, atunci din

$G(x, f_1(x)) = (x, F(x, f_1(x))) = (x, F(x, f_2(x))) = G(x, f_2(x))$
 pentru orice $x \in U$ și din bijectivitatea lui G pe $U \times V$ rezultă
 $f_1(x) = f_2(x)$ pentru orice $x \in U$
 contradicție.

Remarcă 6.115. Dacă aplicația $F: A \times B \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ de clasă C^1 pe $A \times B$ are proprietatea că $J_F^y(a, b) \neq 0$, atunci din continuitatea lui J_F^y în punctul (a, b) se poate presupune fără a micșora generalitatea că $J_F(x, y) \neq 0$ pentru orice $(x, y) \in U \times V$ unde U și V sunt date de Teorema 6.113.

Tinând seama de faptul că ecuația $F(x, f(x)) = 0$ pentru orice $x \in U$ este de fapt sistemul

$$F_j(x_1, \dots, x_p, f_1(x_1, \dots, x_p), \dots, f_q(x_1, \dots, x_p)) = 0,$$

pentru $j = 1, \dots, q$ și orice $x = (x_1, \dots, x_p) \in U$, prin utilizarea formulei de derivare parțială a funcțiilor compuse (Propoziția 6.59) obținem

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x, f(x)) + \frac{\partial F_j}{\partial y_1}(x, f(x)) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) + \dots + \frac{\partial F_j}{\partial y_q}(x, f(x)) \cdot \frac{\partial f_q}{\partial x_i}(x) = 0,$$

pentru orice $x \in U$, $i = 1, \dots, p$ și $j = 1, \dots, q$.

Pentru i fixat, relațiile precedente pot fi privite ca un sistem liniar neomogen cu q ecuații și necunoscutele $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$, $j = 1, \dots, q$, al cărui determinant este tocmai $d_c^2 L_0(v, v) \geq 0$, $\forall v \in \text{Ker } d_c F$.

Din regula lui **Cramer** se obține formula de calcul a derivatelor parțiale ale funcției implicate f , dată de

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{D(F_1, \dots, F_{k-1}, F_k, F_{k+1}, \dots, F_q)}{D(y_1, \dots, y_{k-1}, x_i, y_{k+1}, \dots, y_q)}}{\frac{D(F_1, \dots, F_{k-1}, F_k, F_{k+1}, \dots, F_q)}{D(y_1, \dots, y_{k-1}, y_k, y_{k+1}, \dots, y_q)}}(x, f(x)),$$

pentru $i = 1, \dots, p$, $k = 1, \dots, q$ și orice $x \in U$.

În cazul particular $q = 1$ se obține o teoremă de existență și unicitate a funcțiilor implicate reale dată de

Corolar 6.116. Fie $F: A \times B \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^1 pe $A \times B$ și $a \in A$, $b \in B$ astfel ca $F(a, b) = 0$ și $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$. Atunci există o vecinătate

$U \subset A$ a punctului a , o vecinătate deschisă $V \subset B$ a punctului b și o unică funcție $f : U \subset A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow V \subset B \subset \mathbb{R}$ cu proprietățile:

- (iv) f este de clasă C^1 pe U ;
- (v) $f(a) = b$;
- (vi) $F(x, f(x)) = 0$ pentru orice $x \in U$;
- (vii) $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}}$ pentru orice $x \in U$ și $i = 1, \dots, p$.

Demonstrația rezultă din Teorema 6.113 și Remarca 6.114 și 6.115. \square

6.3.3 Condiții necesare pentru extrem condiționat

Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ și $B \subset \mathbb{R}^q$ mulțimi deschise (nevide) și $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1 pe $A \times B$ și mulțimea $S \subset A \times B$ cu S nevidă.

Definiție 6.117. Un punct $s = (a, b) \in S$ se numește *punct de extrem local relativ la mulțimea S pentru funcția f* , dacă s este un punct de extrem local pentru restricția lui f la S .

Extremele locale relative la submulțimi $S \subset A \times B$ se mai numesc și *extreme locale condiționate* sau *extreme cu legături*. Pentru funcția f (ale cărei extreme cu legături se caută) se utilizează în aplicații și denumirea de *funcție scop* sau *funcție obiectiv*.

În cadrul acestei secțiuni vom considera submulțimi $S \subset A \times B$ de forma

$$S = \{(x, y) \in A \times B \mid F(x, y) = 0\},$$

unde $F = (F_1, \dots, F_q) : A \times B \rightarrow \mathbb{R}^q$ este o aplicație de clasă C^1 pe $A \times B$ cu

$$J_F^y(x, y) = \frac{D(F_1, \dots, F_q)}{D(y_1, \dots, y_q)}(x, y) \neq 0,$$

pentru orice $x = (x_1, \dots, x_p)$, $y = (y_1, \dots, y_q)$ cu $(x, y) \in S$.

În aceste notății și ipoteze are loc

Propoziție 6.118. Fie funcția $f : A \times B \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^1 pe $A \times B$. Dacă pentru orice punct $s = (a, b) \in S$ există o vecinătate U a lui a și o aplicație $g = (g_1, \dots, g_q) : U \rightarrow \mathbb{R}^q$ de clasă C^1 pe U cu proprietățile:

- (i) $g(a) = b$;
- (ii) $(x, g(x)) \in S$ și $u, v \in \mathbb{R}^p$, pentru orice $x \in U$,

atunci

- a)** $s \in S \subset A \times B$ este punct de *extrem local relativ* la S pentru f dacă și numai dacă a este punct de extrem local pentru aplicația

$$G: U \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(x) = f(x, g(x));$$

- b)** dacă $s = (a, b) \in S$ este punct de extrem relativ la S pentru $f: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$, atunci

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a, b) + \sum_{j=1}^q \frac{\partial f}{\partial y_j}(a, b) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a) = 0,$$

pentru orice $i = 1, \dots, p$.

Demonstrație. Prin aplicarea teoremei funcțiilor implicate pentru F rezultă că există o vecinătate U a lui a , o vecinătate V a lui b și o aplicație $g: U \rightarrow V$ de clasă C^1 definită implicit de ecuația $F(x, y) = 0$ cu proprietățile (i) și (ii) din enunț.

Din $G(x) - G(a) = f(x, y) - f(a, b)$ pentru orice $(x, y) \in U \times V \subset S$ rezultă imediat (a).

Pentru (b) se observă că dacă s este un punct de extrem local pentru f relativ la S , atunci din (a), via teorema lui **Fermat**, s este punct critic pentru G și deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n(v)}{\|v\|^n} = 0, \text{ pentru } i = 1, \dots, p,$$

ceea ce, prin utilizarea regulii de derivare parțială a funcțiilor compuse, conduce la egalitatea de la (b). \square

O condiție necesară pentru ca punctul $s = (a, b) \in S$ să fie punct de extrem local relativ la S pentru funcția f este dată de

Teoremă 6.119 (lui **Lagrange** - regula *multiplicatorilor*). Dacă punctul $s = (a, b) \in S \subset A \times B$ este un punct de extrem local relativ la S pentru funcția $f: A \times B \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^1 pe $A \times B$, atunci există punctul $\lambda_0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_q^0) \in \mathbb{R}^q$ astfel încât (s, λ_0) este un punct critic pentru funcția

$$L: A \times B \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \langle \lambda, F(x, y) \rangle,$$

adică

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda_1 \cdot F_1(x, y) + \lambda_2 \cdot F_2(x, y) + \dots + \lambda_q \cdot F_q(x, y).$$

Demonstrație. Din ipoteza făcută asupra aplicației F rezultă că sistemul de q ecuații

$$\sum_{j=1}^q \lambda_j \cdot \frac{\partial F_j}{\partial y_k}(a, b) = -\frac{\partial f}{\partial y_k}(a, b), \quad k = 1, \dots, q,$$

cu necunoscutele $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ este un sistem liniar de neomogen, cu determinantul $\text{rot } G = 0$, deci compatibil unic determinat, adică există un unic punct $\lambda_0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_q^0) \in \mathbb{R}^q$ care să verifice acest sistem.

Rămâne să arătăm că $(s, \lambda_0) = (a, b, \lambda_0)$ este un punct critic pentru L .

Sistemul liniar precedent arată că

$$\frac{\partial L}{\partial y_k}(s, \lambda_0) = 0 \text{ pentru orice } k = 1, \dots, q.$$

Din propoziția precedentă există o aplicație $g: U \rightarrow \mathbb{R}^q$ de clasă C^1 ale cărei derivate parțiale verifică egalitatea

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(s) + \sum_{j=1}^q \frac{\partial F_j}{\partial y_k}(s) \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(a) = 0, \quad j = 1, \dots, q, \quad i = 1, \dots, p.$$

De aici și din Propoziția 6.118 (iv) rezultă că

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(s, \lambda_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(s) + \sum_{j=1}^q \lambda_j^0 \cdot \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(s) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(s), \quad i = 1, \dots, p,$$

$$-\sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^q \lambda_j^0 \cdot \frac{\partial F_j}{\partial y_k}(s) \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(s) + \sum_{k=1}^q \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(a) \cdot \frac{\partial f}{\partial y_k}(s) = \frac{\partial G}{\partial x_i}(a) = 0, \quad i = 1, \dots, p$$

Pe de altă parte

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(s, \lambda_0) = F_j(s) = 0, \quad j = 1, \dots, q,$$

deci în final deducem că (s, λ_0) este punct critic pentru funcția L . \square

Corolar 6.120. Dacă $s = (a, b) \in S$ este un punct de extrem local relativ la mulțimea S pentru funcția $f: A \times B \supset S \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^1 pe $A \times B$, atunci există $\lambda_0 = (\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_q^0) \in \mathbb{R}^q$ cu

$$d_c f = \sum_{i=1}^q \lambda_i^0 \cdot d_c F_i.$$

adică diferențiala lui f în punctul s se exprimă ca o combinație liniară de diferențiale în s ale funcțiilor F_1, \dots, F_q numite și *legături*.

Remarcă 6.121. Teorema precedentă este o condiție necesară pentru ca punctul s să fie punct de extrem local condiționat. Numerele $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_q^0$ date de Teorema 6.119 se numesc *multiplicatori ai lui Lagrange*, iar funcția

$$L: C \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \langle \lambda, F(x, y) \rangle$$

se numește funcția lui **Lagrange** asociată funcției f în raport cu mulțimea S .

Condiția *necesară* pusă în evidență de teorema precedentă nu este și *suficientă*, fapt ilustrat de

Exemplu 6.122. Fie funcția

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z$$

și mulțimea

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^* \mid x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \right\}.$$

Funcția **Lagrange** asociată lui f relativ la mulțimea S este

$$L : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(x, y, z, \lambda) = x^2 - y^2 + z + \lambda \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Se constată imediat că punctul $(s, \lambda_0) = \left(0, 0, 1, \frac{-1}{2}\right)$ este un punct critic

pentru L . Vom arăta că punctul

$$f(a + v) = T_{n-1}(v) + \sum_{|\alpha|=n} \frac{1}{\alpha!} \cdot D^\alpha f(c) \cdot v^\alpha = T_n(v) + \sum_{|\alpha|=n} \frac{1}{\alpha!} \cdot (D^\alpha f(c) - D^\alpha f(a)) \cdot v^\alpha$$

nu este punct de extrem local relativ la mulțimea S pentru funcția f .

În adevăr, în orice vecinătate relativ la mulțimea S a punctului s există, pe de o parte, puncte de forma $(x, 0, z) \in S$, $z \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ pentru care

$$f(x, 0, z) - f(0, 0, 1) = x^2 + z = 1 - z^2 + z > 0, \quad \forall z \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),$$

iar pe de altă parte, există și puncte de forma $(0, y, z) \in S$, $z \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

pentru care

$$f(0, y, z) - f(0, 0, 1) = -y^2 + z = -1 + z^2 + z < 0, \quad \forall z \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Remarcă. Dacă funcția f este *convexă* (*concavă*) și de clasă C^2 pe $A \times B$, atunci condițiile necesare date de teorema 6.119 sunt și suficiente pentru ca punctul critic condiționat s să fie punct de extrem condiționat. Mai mult, acest punct este *unicul* punct de extrem pentru funcția f .

Exemplu 6.123. Fie funcția

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x \cdot y$$

și mulțimea $S \subset \mathbb{R}^2$ definită prin

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y - 1 = 0 \right\}.$$

Considerăm funcția $\|d_x^n f\| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x \in D(a, r) \subset A$ pentru care se observă că

$$J_F^y(x, y) = 1 \text{ pentru orice } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Funcția lui **Lagrange** asociată funcției f relativ la mulțimea S este

$$L : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(x, y, \lambda) = x \cdot y + \lambda \cdot (x + y - 1).$$

Punctele critice ale funcției L sunt date de sistemul

$$\begin{cases} x + \lambda = 0 \\ y + \lambda = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

de unde rezultă că punctul $(s, \lambda_0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ este unicul punct critic pentru L .

Deci unicul *candidat* pentru a fi punct de extrem local relativ la mulțimea C pentru funcția f este punctul $s = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Tinând seama că pentru $(x, y) \in S$ avem $x + y - 1 = 0$ rezultă că

$$f_S(x, y) - f_S\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = x \cdot y - \frac{1}{4} = x \cdot (1 - x) - \frac{1}{4} = -\left(\frac{2 \cdot x - 1}{2}\right)^2 \leq 0$$

pentru orice $(x, y) \in S$, ceea ce arată că punctul $s = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ este un punct de maxim local relativ la mulțimea S pentru funcția f .

Remarcă 6.124. Este clar că dacă se poate *explicita* y din relația $F(x, y) = 0$, adică $y = g(x) \in B$, $x \in A$, atunci problema de extrem condiționat se transformă într-o problemă de extrem pentru funcția $h(x) = f(x, g(x))$, $x \in A$.

Exemplu: Fie funcția

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

și mulțimea $S \subset \mathbb{R}^2$ definită prin

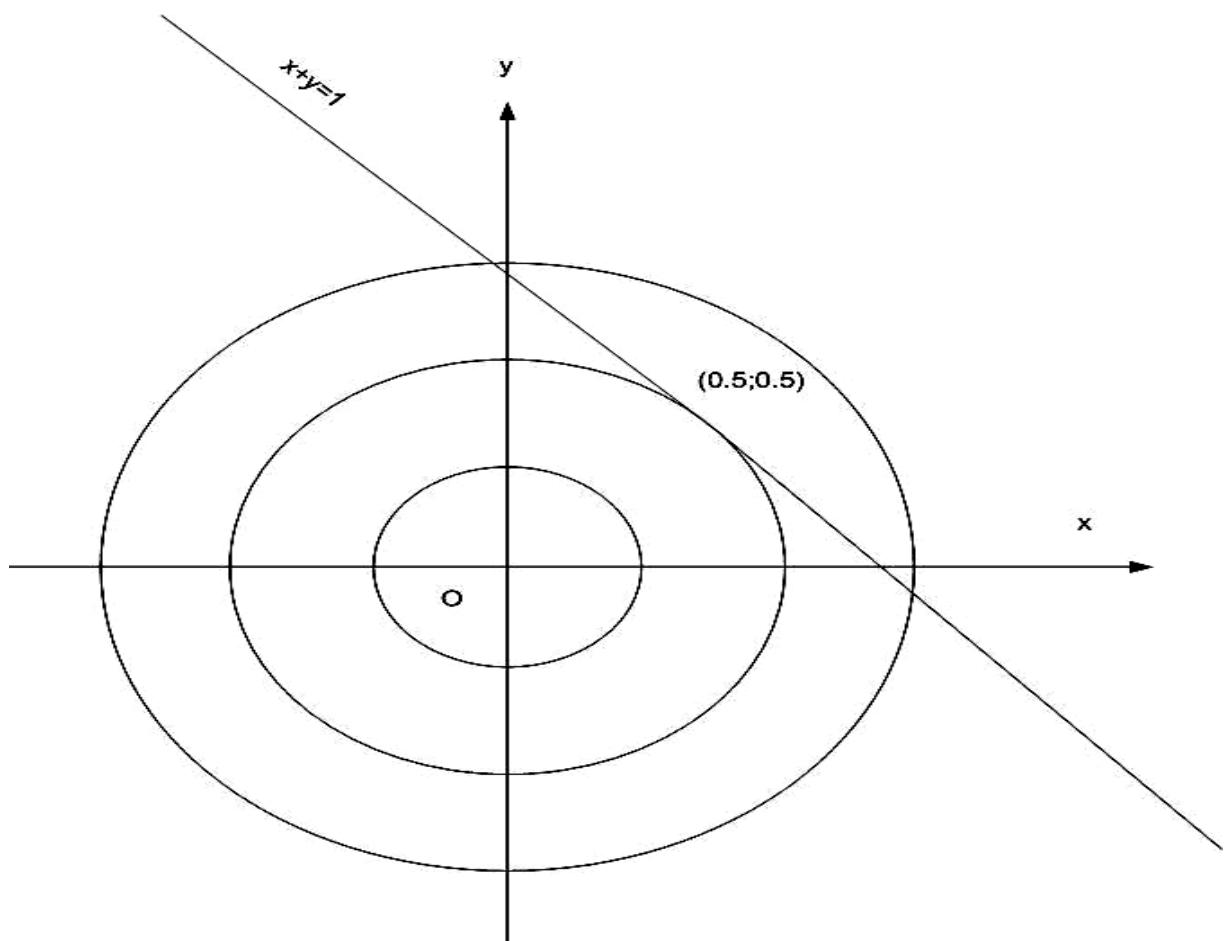
$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y - 1 = 0\}.$$

Explicitând y din relația $F(x, y) = 0$ și înlocuindu-l în expresia funcției f , obținem o problemă de extrem pentru funcția $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(x) = f(x, g(x)) = \sqrt{x^2 + (1-x)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Punctul critic pentru h este $x = \frac{1}{2}$. Deoarece $h''\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{2} > 0$ deducem că $x = \frac{1}{2}$ este punct de minim relativ pentru funcția h , iar punctul $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ este punct de minim local relativ la mulțimea S pentru funcția f , adică $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \leq f(x, y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Atunci când se poate prefera abordarea geometrică a problemei de extrem condiționat. În acest exemplu valoarea funcției f este raza cercului centrat în origine. Cercul de rază minimă care intersectează dreapta de ecuație $x + y - 1 = 0$ este cercul centrat în origine de rază $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Prin urmare, funcția f are un punct de minim global, iar valoarea funcției f în acest punct este valoarea razei minime $f_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Remarcă 6.125. Fie $K \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime compactă a cărei frontieră poate fi definită prin ecuații carteziene, iar $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^1 . Deoarece f este

continuă pe mulțimea K , rezultă că f este mărginită pe K și există punctele $a, b \in K$ cu

$$r > 0.$$

Dacă $a \in \overset{\circ}{K}$ (a este punct interior al mulțimii K), atunci a este punct de extrem local pentru f și deci, conform teoremei lui **Fermat**, avem că

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \text{ pentru orice } i = 1, \dots, p.$$

Dacă $a \notin K$, atunci $a \in \text{Fr } K = \partial K$ (a este punct pe frontieră mulțimii K) și a poate fi un punct de minim local relativ la ∂K , care se determină cu metoda multiplicatorilor lui **Lagrange**.

Analog se procedează și în cazul punctului b .

Deci dacă se cer marginile unei funcții de clasă C^1 pe o mulțime compactă K , atunci

- pentru a determina punctele de extrem local din interiorul mulțimii K se folosește teorema lui **Fermat**, iar
- pentru a determina punctele de extrem local situate pe frontieră ∂K mulțimii K (caracterizată de ecuația $F(x, y) = 0$) se folosește metoda multiplicatorilor lui **Lagrange**.

Ca exemplu prezentăm

Exemplu 6.126. Funcția

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x - y + 2 \cdot z$$

este de clasă C^1 și neconstantă pe mulțimea compactă

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 2 \cdot z^2 \leq 2 \right\}.$$

Se constată că f nu are puncte critice în $\overset{\circ}{K}$ și deci f nu are puncte de extrem local în $\overset{\circ}{K}$. Cu metoda multiplicatorilor lui **Lagrange** se arată că

$$a = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \in \partial K \text{ și } b = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \in \partial K$$

sunt puncte de extrem local relative la ∂K pentru f . Cum f nu este constantă și $f(a) = 2 \cdot \sqrt{2}$, iar $f(b) = -2 \cdot \sqrt{2}$ se obține în final că

$$2 \cdot \sqrt{2} = f(a) = \sup f(K) \geq f(x, y, z) \geq \inf f(K) = f(b) = -2 \cdot \sqrt{2}.$$

Exemplu 6.127 Extremele formelor pătratice pe sferă unitate

Una din cele mai importante aplicații ale metodei multiplicatorilor a lui **Lagrange** este problema extremelor formei pătratice în n variabile

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$$

în condiția

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1.$$

Se poate interpreta ultima condiție ca fiind ecuația sferei în spațiul euclidian \mathbb{R}^n , să că problema noastră este aceea de a căuta extremele funcției f pe sfera unitate. Dacă $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ este matricea coeficienților formei pătratice, iar aceasta este simetrică, atunci $A = A^T$, iar forma pătratică se poate scrie

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T \cdot A \cdot x.$$

Cu metoda multiplicatorilor lui **Lagrange** obținem $n+1$ ecuații

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0, & i = 1 : n \\ g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases}$$

unde $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2$. Deoarece A este matrice simetrică, avem

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \cdot x_i^2 + 2 \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j,$$

iar sistemul anterior se rescrie în forma

$$\begin{cases} 2 \cdot a_{11} \cdot x_1 + 2 \cdot a_{12} \cdot x_2 + \dots + 2 \cdot a_{1n} \cdot x_n - 2 \cdot \lambda \cdot x_1 = 0 \\ 2 \cdot a_{21} \cdot x_1 + 2 \cdot a_{22} \cdot x_2 + \dots + 2 \cdot a_{2n} \cdot x_n - 2 \cdot \lambda \cdot x_2 = 0 \\ \dots \\ 2 \cdot a_{n1} \cdot x_1 + 2 \cdot a_{n2} \cdot x_2 + \dots + 2 \cdot a_{nn} \cdot x_n - 2 \cdot \lambda \cdot x_n = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1 \end{cases}$$

Primele n ecuații rescrise în formă matriceală au forma

$$A \cdot x = \lambda \cdot x,$$

adică x este vectorul propriu matricei A asociat valorii proprii λ . Ultima ecuație afirmă că $\|x\|=1$, adică $x \in \mathbb{R}^n$ este vectorul unitate. Astfel vom căuta vectorii proprii unitate ai matricei A . Astfel dacă $x \in \mathbb{R}^n$ este un astfel de vector, atunci

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T \cdot A \cdot x = x^T \cdot \lambda \cdot x = \lambda \cdot \|x\|^2 = \lambda.$$

Prin urmare, valorile proprii ale matricei A reprezintă valorile lui f în punctele sale critice pe sfera unitate. Cum matricea A este simetrică, ea are numai valori proprii reale. În particular, valoarea maximă absolută a lui f pe sfera unitate este cea mai mare valoare proprie a lui A , iar valoarea minimă absolută a lui f pe sfera unitate este cea mai mică valoare proprie a matricei A .

Vom enunța fără demonstrație

Teorema (Kuhn-Tucker). Fie $A \subset \mathbb{R}^p$, $B \subset \mathbb{R}^q$ și $C \subset \mathbb{R}^r$ mulțimi deschise (nevide), funcția $f: A \times B \times C \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^1 pe $A \times B \times C$ și mulțimea nevidă $S \subset A \times B \times C$ de forma

$$S = \{(x, y, z) \in A \times B \times C \mid F(x, y, z) = 0, G(x, y, z) \geq 0\},$$

unde $F = (F_1, \dots, F_q): A \times B \times C \rightarrow \mathbb{R}^q$ și $G = (G_1, \dots, G_r): A \times B \times C \rightarrow \mathbb{R}^r$ sunt aplicații de clasă C^1 pe $A \times B \times C$ cu

$$J_{F,G}^{y,z}(x, y, z) = \frac{D(F_1, \dots, F_q, G_1, \dots, G_r)}{D(y_1, \dots, y_q, z_1, \dots, z_r)}(x, y, z) \neq 0,$$

pentru orice $x = (x_1, \dots, x_p)$, $y = (y_1, \dots, y_q)$, $z = (z_1, \dots, z_r)$ cu $(x, y, z) \in S$.

Punctele de extrem relativ la mulțimea S ale funcției f sunt puncte critice ale funcției $\Phi: A \times B \times C \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}_+^r \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Phi(x, y, z, \lambda, \mu, \omega) = f(x, y, z) - \langle \lambda, F(x, y, z) \rangle - \langle \mu, G(x, y, z) - \omega \rangle,$$

unde λ sunt *multiplicatorii* lui **Lagrange**, μ sunt *multiplicatorii* lui **Kuhn-Tucker** și constantele pozitive $\omega_i = \eta_i^2$, $i = 1:r$ sunt *variabilele de egalizare*.

Cu alte cuvinte, Φ este o funcție de $p + 2 \cdot q + 3 \cdot r$ variabile independente, iar punctele sale critice sunt date de sistemul

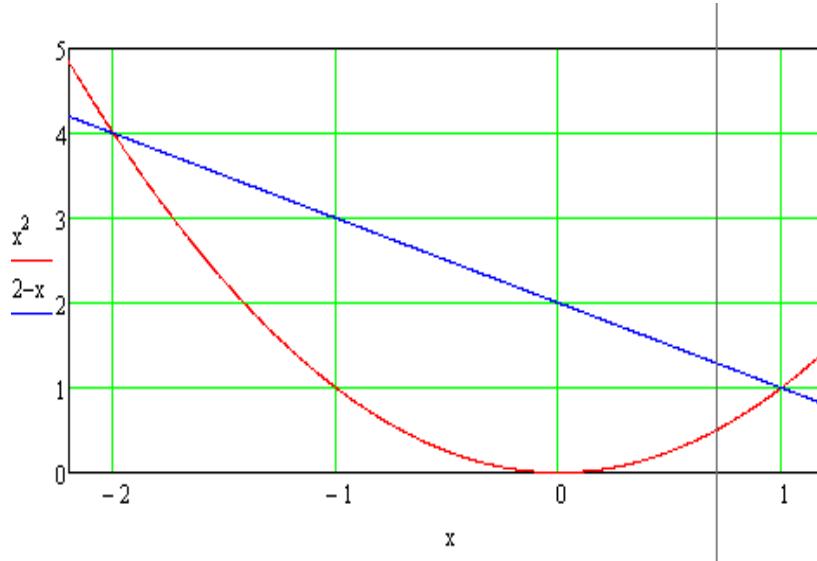
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^q \lambda_k \cdot \frac{\partial F_k}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^r \mu_j \cdot \frac{\partial G_j}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1:p \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} - \sum_{k=1}^q \lambda_k \cdot \frac{\partial F_k}{\partial y_i} - \sum_{j=1}^r \mu_j \cdot \frac{\partial G_j}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1:q \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} - \sum_{k=1}^q \lambda_k \cdot \frac{\partial F_k}{\partial z_i} - \sum_{j=1}^r \mu_j \cdot \frac{\partial G_j}{\partial z_i} = 0, \quad i = 1:r \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i} = -F_i = 0, \quad i = 1:q \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \mu_i} = -(G_i - \eta_i^2) = 0, \quad i = 1:r \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_i} = 2\mu_i \cdot \eta_i = 0, \quad i = 1:r \end{array} \right.$$

Dacă funcția f este *convexă*, iar funcțiile G sunt *concave*, atunci s-a demonstrat (**Kuhn și Tucker**) că punctele critice ale funcției Φ sunt puncte de extrem relativ la mulțimea S pentru funcția f .

Exemplu: Să se determine punctele de extrem ale funcției $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin $f(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 1)^2$ condiționată de următoarele restricții inegalități

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 \geq 0, \quad -x - y + 2 \geq 0 \right\}.$$

Reprezentând în plan parabola $y = x^2$ și dreapta de ecuație $x + y = 2$, constatăm că mulțimea S este mulțimea punctelor M din interiorul și de pe laturile triunghiului *curbiliniu* format.



Funcția f reprezintă pătratul distanței de la punctul $C(2,1)$ la punctul $M(x, y) \in S$. Din punct de vedere geometric extremele globale ale funcției f sunt atinse în punctele de coordonate $M_1(1,1)$ și $M_2(-2,4)$ pentru minim și respectiv maximul condiționat al funcției f , adică

$$f(-2, 4) = 25 \geq f(x, y) \geq 1 = f(1, 1), \quad \forall (x, y) \in S.$$

Se observă că aceste puncte de extrem sunt atinse pe frontiera mulțimii S . Pe de altă parte, dacă se scrie funcția $\Phi: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Phi(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \eta_1, \eta_2) = f(x, y) - \lambda_1 \cdot (y - x^2 - \eta_1^2) - \lambda_2 \cdot (-x - y + 2 - \eta_2^2)$$

pentru care sistemul punctelor sale critice este

$$\begin{cases} 2(x - 2) + 2x\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2(y - 1) - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ y - x^2 - \eta_1^2 = 0 \\ -x - y + 2 - \eta_2^2 = 0 \\ 2\lambda_1\eta_1 = 0 \\ 2\lambda_2\eta_2 = 0 \end{cases}$$

se constată că singurele soluții admisibile ale acestuia sunt $\left(1, 1, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0\right)$ și $(-2, 4, -2, -8, 0, 0)$. Funcția f fiind *convexă* rezultă că aceste puncte sunt puncte de extrem condiționat pentru f .

6.3.4 Dependență funcțională

Fie mulțimea deschisă $D \subset \mathbb{R}^p$, $p \geq 1$ și funcțiile $f_k : D \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1 : p + 1$.

Definiție. Spunem că funcția f_{p+1} este *dependentă funcțional* de funcțiile $\{f_1, f_2, \dots, f_p\}$ pe mulțimea $D_1 \subset D$ dacă există o funcție $\Phi : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$f_{p+1}(x) = \Phi(f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)), \quad x \in D_1,$$

unde $U \supset f(D_1)$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$.

Definiție.

- Spunem că funcțiile $f_k : D \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1 : p$ sunt *dependente funcțional* pe mulțimea $D_1 \subset D$ dacă cel puțin una dintre ele depinde funcțional de celelalte pe $D_1 \subset D$.
- Spunem că funcțiile $f_k : D \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1 : p$ sunt *independente funcțional* în punctul $x \in D$ dacă nu există nicio vecinătate a acestui punct pe care funcțiile să fie dependente funcțional.
- Spunem că funcțiile $f_k : D \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1 : p$ sunt *independente funcțional* pe mulțimea $D_1 \subset D$ dacă sunt independente funcțional în fiecare punct al mulțimii.

Teoremă. Fie aplicația $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_q)$, $1 < q \leq p$ de clasă C^1 pe mulțimea deschisă $D \subset \mathbb{R}^p$. Dacă rangul matricei $f'(x)$ este egal cu q pentru orice punct $x \in D$, adică $\text{rang}(f'(x)) = q$, $\forall x \in D$, atunci funcțiile $\{f_1, f_2, \dots, f_q\}$ sunt independente funcțional pe mulțimea D .

Teoremă. Fie aplicația $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_q)$, $1 < q \leq p$ de clasă C^1 pe mulțimea deschisă $D \subset \mathbb{R}^p$. Dacă rangul matricei $f'(x)$ este egal cu s ($1 < s < q \leq p$) pentru orice punct $x \in D$, adică $\text{rang}(f'(x)) = s$, $\forall x \in D$, atunci s dintre funcțiile $\{f_1, f_2, \dots, f_p\}$ sunt independente funcțional pe mulțimea D , iar celelalte $q - s$ funcții depind funcțional de acestea pe mulțimea D .

6.3.5 Schimbări de variabile

Schimbările de variabile dă posibilitatea studiului problemelor în care apar funcții diferențiabile într-un sistem de coordonate să fie simplificat prin trecerea la alt sistem de coordonate. Nu există o metodă generală pentru schimbarea de variabile sau de funcții. Cele mai utilizate schimbări de variabilă vor fi prezentate în cele ce urmează. Accentul nu va fi pus pe prezentarea unor condiții generale în care au loc schimbările de variabile ci pe metodele de calcul.

6.3.5.1 Schimbări de variabilă în cazul funcțiilor de o singură variabilă independentă

Fie funcțiile $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ și $\varphi: I \subset \mathbb{R} \rightarrow A \subset \mathbb{R}$ derivabile. Presupunem că mulțimile A, I sunt mulțimi deschise și $\varphi'(t) \neq 0, t \in I$. Derivabilitatea lui f pe mulțimea A este echivalentă cu diferențiabilitatea lui f pe A și are loc relația $df = f'dx$ în punctul curent. Această ultimă relație poate fi scrisă simbolic $f' = \frac{df}{dx}$.

Funcția compusă $y = f \circ \varphi$ realizează o corespondență între mulțimea I și mulțimea B . Presupunem că funcțiile f și φ sunt de clasă $C^k, k \in \mathbb{N}$, unde k este ordinul cel mai mare al derivatelor pe care dorim să le calculăm.

Aplicând regula de derivare a funcțiilor compuse, obținem

$$\frac{d}{dt} f \circ \varphi = \frac{df}{dx} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

de unde rezultă

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)} \cdot \frac{d}{dt}(f \circ \varphi) = \frac{1}{\varphi'(t)} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

În felul acesta de poate observa că regula după care se calculează derivele de ordin superior este

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)} \cdot \frac{d}{dt}.$$

Prin urmare

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) = \frac{1}{\varphi'(t)} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\varphi'(t)} \cdot \frac{dy}{dt} \right) = \frac{1}{(\varphi'(t))^3} \cdot \left(\varphi''(t) \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)} \cdot \frac{dy}{dt} \right) \\ \frac{d^3 f}{dx^3} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right) = \frac{1}{\varphi'(t)} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{(\varphi'(t))^3} \cdot \left(\varphi''(t) \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)} \cdot \frac{dy}{dt} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{(\varphi''(t))^5} \cdot \left((\varphi'(t))^2 \cdot \frac{d^3 y}{dt^3} - 3\varphi'(t)\varphi''(t) \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + \left(3(\varphi''(t))^2 - \varphi'(t)\varphi'''(t) \right) \cdot \frac{dy}{dt} \right) \end{aligned}$$

Aceste relații exprimă dependența derivatelor $\frac{d^p f}{dx^p}$ cu ajutorul derivatelor funcției compuse $\frac{d^q y}{dt^q}$, $p, q = 1 : r$.

Exemplu: Să transformăm ecuația

$$(1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2) y' + y = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

folosind schimbarea de variabilă independentă $x = \operatorname{tg} t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Se obține succesiv

$$y' = \frac{1}{dx} \cdot \frac{dy}{dt} = \cos^2 t \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$y'' = \frac{1}{dx} \cdot \frac{d}{dt} \left(\cos^2 t \cdot \frac{dy}{dt} \right) = \cos^3 t \cdot \left(-2 \sin t \cdot \frac{dy}{dt} + \cos t \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} \right)$$

După înlocuire ecuația inițială se transformă în

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0.$$

6.3.5.2 Intervertirea variabilelor cu funcția în cazul unidimensional

În condițiile din subcapitolul precedent, în cazul când se dorește să se intervertească funcția cu variabila independentă, se procedează astfel

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}} \right) = -\frac{\frac{d^2 x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy} \right)^3}$$

Exemplu: Să transformăm ecuația diferențială $y' \cdot y''' - 3(y'')^2 = 0$, considerând variabila independentă ca funcție de y .

Primele două derive sunt date în expresiile anterioare, iar pentru derivata de ordinul trei se obține expresia

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \cdot \frac{d}{dy} \left(-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy} \right)^3} \right) = \frac{3 \frac{d^2x}{dy^2} - \frac{dx}{dy} \cdot \frac{d^3x}{dy^3}}{\left(\frac{dx}{dy} \right)^5}.$$

După înlocuire ecuația inițială se transformă în $\frac{d^2x}{dy^2} = 0$.

6.3.5.3 Schimbarea de variabilă independentă și de funcție

Fie funcția $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă $C^k, k \geq 2$, unde I este un interval deschis. Considerăm curba plană definită de funcția f

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x), x \in I\}.$$

Fie A, B două mulțimi deschise în \mathbb{R}^2 și $F: A \rightarrow B \subset C$, o aplicație bijectivă de clasă C^k . Convenim să notăm cu u, v variabilele independente în A și cu x, y variabilele independente în B , adică $F(u, v) = (x, y)$.

Așadar, există funcțiile $\varphi, \psi: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^2 astfel încât

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v) \quad \text{și} \quad \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \neq 0 \quad \text{pe mulțimea } A.$$

Ne propunem să calculăm derivatele lui $y = f(x)$ în noile variabile independente u, v . Avem $y = \psi(u, v) = f(\varphi(u, v)) = f(x)$.

Dacă pentru orice $(u, v) \in A$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{dv}{du} \neq 0,$$

atunci

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}} = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \cdot \frac{dv}{du}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{dv}{du}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{1}{\frac{dx}{du}} \cdot \frac{d}{du} \left(\frac{\frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \cdot \frac{dv}{du}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{dv}{du}} \right) = \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{dv}{du}} \cdot \frac{d}{du} \left(\frac{\frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \cdot \frac{dv}{du}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{dv}{du}} \right)$$

Exemplu:

Să transformăm ecuația diferențială $(1-x^2)^2 \cdot (a-y'') = y$, $x \notin \{\pm 1\}$ cu ajutorul schimbării de variabilă independentă și de funcție conform relațiilor

$$x = \operatorname{th} u, \quad y = \frac{a \cdot v}{\operatorname{ch} u},$$

unde $v = v(u)$.

Se obține succesiv

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}} = a \cdot (v' \cdot \operatorname{ch} u - v \cdot \operatorname{sh} u),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{1}{\frac{du}{dx}} \cdot \frac{d}{du} [a \cdot (v' \cdot \operatorname{ch} u - v \cdot \operatorname{sh} u)] = (v'' - v) \cdot \operatorname{ch}^3 u$$

După înlocuire ecuația inițială se transformă în

$$1 - v'' \cdot \operatorname{ch}^3 u = 0.$$

Exemplu:

Să transformăm ecuația diferențială $x \cdot y'' + y' - y = 0$, $x \neq 0$ cu ajutorul schimbării de variabilă independentă și de funcție conform relațiilor

$$y' = u, \quad x \cdot u - y = v,$$

unde $v = v(u)$.

Se obține succesiv

$$\frac{dv}{du} = \frac{\frac{dv}{dx}}{\frac{du}{dx}} = x,$$

$$u \cdot \frac{dv}{du} - v = y' \cdot x - (x \cdot y' - y) = y$$

$$\text{și } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{1}{\frac{du}{dx}} = \frac{1}{\frac{d^2v}{du^2}}.$$

După înlocuire ecuația inițială se transformă în

$$\frac{v'}{v''} + u - u \cdot v' + v = 0.$$

6.3.5.4 Schimbări de variabilă în expresiile care conțin deriveate parțiale

Fie funcția $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow B \subset \mathbb{R}$, $z = f(x, y)$ și aplicația $T : D \subset \mathbb{R}^2 \subset A \subset \mathbb{R}^2$, $T(u, v) = (x, y)$.

Atunci există funcțiile $\varphi, \psi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v). \quad (1)$$

Presupunem că mulțimile A , D sunt deschise, că funcțiile $f, \varphi, \psi \in C^k$, unde k este ordinul cel mai mare al derivatelor parțiale pe care vrem să le calculăm și că jacobianul $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \neq 0$ pe mulțimea D (adică transformarea (1) este regulată pe mulțimea D).

Funcția compusă

$$z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \quad (2)$$

realizează o corespondență între mulțimea D și mulțimea B . Pentru a studia funcția f în noile variabile u, v urmărим să exprimăm derivelele parțiale

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dots$$

cu ajutorul derivelelor parțiale $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}, \dots$

Aplicând teorema lanțului de derivare a funcțiilor compuse pentru funcția (2), obținem

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{aligned}$$

Considerând pe $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ drept necunoscute în sistemul liniar de mai sus,

obținem

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{D(\varphi, \psi)} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{D(\varphi, \psi)} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \end{aligned}$$

Prin urmare, formal se poate scrie că derivata de ordinul întâi este

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{D(\varphi, \psi)} \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{1}{D(\varphi, \psi)} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} \right) \end{aligned}$$

Exemplu:

Considerând pe u și v noile variabile independente, să transformăm ecuația cu derivate parțiale

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + m^2 z = 0, \quad m \in \mathbb{R},$$

dacă $2x = u^2 - v^2$, $y = u \cdot v$.

Folosind considerațiile de mai sus obținem succesiv

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2(u^2 + v^2)} \cdot \left(u \frac{\partial z}{\partial u} - v \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2(u^2 + v^2)} \cdot \left(v \frac{\partial z}{\partial u} + u \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

și respectiv

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2(u^2 + v^2)} \cdot \left(u \frac{\partial z}{\partial u} - v \frac{\partial z}{\partial v} \right) \right] = \\ &= \frac{u}{2(u^2 + v^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{1}{2(u^2 + v^2)} \cdot \left(u \frac{\partial z}{\partial u} - v \frac{\partial z}{\partial v} \right) \right] - \frac{v}{2(u^2 + v^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{1}{2(u^2 + v^2)} \cdot \left(u \frac{\partial z}{\partial u} - v \frac{\partial z}{\partial v} \right) \right] \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2(u^2 + v^2)} \cdot \left(v \frac{\partial z}{\partial u} + u \frac{\partial z}{\partial v} \right) \right] = \\ &= \frac{v}{2(u^2 + v^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{1}{2(u^2 + v^2)} \cdot \left(v \frac{\partial z}{\partial u} + u \frac{\partial z}{\partial v} \right) \right] + \frac{u}{2(u^2 + v^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{1}{2(u^2 + v^2)} \cdot \left(v \frac{\partial z}{\partial u} + u \frac{\partial z}{\partial v} \right) \right] \end{aligned}$$

După înlocuire ecuația inițială se transformă în

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + m^2 (u^2 + v^2) \cdot z = 0.$$

6.3.5.5 Schimbări de variabilă și de funcție în expresiile care conțin derivate parțiale

Fie funcția $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^1 , unde D este o mulțime deschisă.

Considerăm suprafața definită de această funcție

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}.$$

Fie aplicația $F : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow B \subset \mathbb{R}^3$ bijectivă de clasă C^1 , definită pe mulțimea deschisă $A \supset S$, având inversă de clasă C^1 . Convenim să notăm cu

(x, y, z) coordonatele unui punct în mulțimea A și cu (u, v, w) coordonatele punctului $F(x, y, z) = (u, v, w) \in B$. Așadar există funcțiile

$$u = \varphi(x, y, z), \quad v = \psi(x, y, z), \quad w = \chi(x, y, z)$$

astfel ca jacobianul $\frac{D(\varphi, \psi, \chi)}{D(x, y, z)} \neq 0$ pe mulțimea A .

Aplicația F transformă ecuația $z = f(x, y)$ într-o ecuație de forma $w = \Phi(u, v)$.

Ne propunem să exprimăm derivatele parțiale $\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}$ cu ajutorul

derivativelor parțiale $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$. Diferențiind relațiile de mai sus, obținem

$$du = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot dz,$$

$$dv = \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot dz,$$

$$dw = \frac{\partial \chi}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \chi}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial \chi}{\partial z} \cdot dz,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy,$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot dv.$$

Eliminăm du și dv între aceste relații, ținând seama de cele două expresii ale lui dw . Deducem

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy \right) \right] + \\ & + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy \right) \right] = \\ & = \frac{\partial \chi}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \chi}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial \chi}{\partial z} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy \right) \end{aligned}$$

Egalând coeficienții lui dx și dy , obținem

$$\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

ce este un sistem liniar cu necunoscutele $\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}$. Presupunem determinantul sistemului

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

pe mulțimea A . Rezultă

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Din relațiile anterioare, obținute prin egalarea coeficienților dx și dy , putem exprima invers derivatele parțiale $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ cu ajutorul derivatelor parțiale

$\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}$. Obținem

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \chi}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial z}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial y}}{\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial z}}$$

Exemplu:

Considerând pe u și v noile variabile independente și noua funcție fiind $w = w(u, v)$, să transformăm ecuația cu derivate parțiale

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} - z^2 = 0, \quad z = z(x, y),$$

$$\text{dacă } u = x, \quad v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}, \quad w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}.$$

Folosind considerațiile de mai sus obținem succesiv

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z^2 \cdot \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial v} \right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^2}{y^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial v}$$

După înlocuire ecuația inițială se transformă în $\frac{\partial w}{\partial u} = 0$.

Exerciții

1. Să se transforme ecuația $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, luând ca noi variabile independente

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{x}{y} \end{cases}$$

2. Fie transformarea $\begin{cases} u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \\ v = xy \end{cases}$. Să se determine mulțimea deschisă

$D \subset \mathbb{R}^2$ pe care funcțiile u și v sunt independente. Să se transforme ecuația $(1+y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1+x^2) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, luând u și v ca noi variabile independente.

3. Să se transforme ecuația $(1+x^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1+y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, luând

$$\begin{cases} u = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \\ v = \ln(y + \sqrt{1+y^2}) \end{cases}$$

ca noi variabile independente.

Răspuns: $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$

4. Să se transforme ecuația $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, luând ca noi variabile

independente $\begin{cases} u = x + y \\ v = y - 3x \end{cases}$.

5. Luând pe u, v ca noi variabile independente $\begin{cases} u = \frac{x+y}{2} \\ v = \frac{x-y}{2} \end{cases}$ și pe w ca nouă

funcție $w = z \cdot e^y$, să se transforme ecuația $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} = z$.

6. Luând pe u, v ca noi variabile independente $\begin{cases} u = x + y \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}$ și pe w ca nouă

funcție $w = \frac{z}{x}$, să se transforme ecuația $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

7. Luând pe u și v ca noi variabile independente și pe w ca nouă funcție, să se scrie ecuația $\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot y \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{x}$, unde $\begin{cases} y \cdot u = x \\ v = x \\ w = x \cdot z - y \end{cases}$.

8. Să se transforme ecuația $(1-x^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1-y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$, luând ca noi variabile independente $\begin{cases} x = \sin u \\ y = \sin v \end{cases}$ și ca nouă funcție $z = e^w$.

Răspuns: $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial v} \right)^2 = 0$

6.3.6 Exerciții

1. Fie aplicația $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, x \cdot y)$ și mulțimea deschisă $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < |y|\}$.

Să se arate că:

- restricția f_A lui f la A este o bijecție a lui A pe o mulțime deschisă $B \subset \mathbb{R}^2$ care se cere a fi determinată;
- inversa lui f_A este diferențiabilă pe B și să i se calculeze diferențiala.

2. Să se arate că aplicația

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x^2 - y^2, 2 \cdot x \cdot y)$$

are proprietățile:

- f este regulată în orice punct $a \neq (0, 0)$;

- nu există nicio vecinătate U a lui $(0,0)$ încât f să fie inversabilă pe U .

Să se determine mulțimea punctelor $a \in \mathbb{R}^2$ cu proprietatea că există o vecinătate U a lui a astfel încât f să fie injectivă pe U .

3. Să se arate că:

- $f : A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$ este regulată și inversabilă pe A ;
- $f : A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (y \cdot \cos x, y \cdot \sin x)$ este regulată și neinversabilă pe A ;
- $f : A = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| < 1\} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x) = \frac{x}{1 - \|x\|^2}$ este inversabilă cu inversa de clasă C^1 pe A ;
- $f : A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y > 0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x, x \cdot y, x \cdot y \cdot z)$ este un difeomorfism de la A la $f(A)$;
- nu există funcție $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ injectivă de clasă C^1 .

4. Să se studieze aplicabilitatea teoremei de inversare locală pentru aplicațiile:

- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (\sin(x + y - z), \cos(x - y + z), e^{x+y-z})$ și punctul $a = \left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, 0\right)$;
- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (e^{2y+2z}, e^{2x-2z}, x - y)$ și punctul $a = (0, 0, 0)$.

5. Să se arate că ecuația

$$x^2 + 2 \cdot y^2 + x \cdot y + 3 \cdot z^2 - z - 9 = 0$$

definește o funcție implicită $z = z(x, y)$ de clasă C^1 cu $f(1, -2) = 1$ și să se calculeze derivatele parțiale ale funcției z în punctul $a = (1, -2)$.

6. Să se arate că sistemul

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - \cos v + \sin w = 0, \\ x^2 - y^2 - u^2 + e^v + 4 = 0, \\ z + \ln \frac{u}{2} - \sin v = 0 \end{cases}$$

definește implicit o aplicație $f = (u, v, w) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow V \subset \mathbb{R}^3$ de clasă C^1 cu $f(0, 1, 0) = (2, 0, \pi)$. Să se calculeze derivatele parțiale ale funcției f în punctul $a = (0, 1, 0)$.

7. Transformarea Sturm-Liouville pentru ecuații diferențiale. Fie ecuația diferențială

$$p(x) \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{dp}{dx} \cdot \frac{du}{dx} + [\lambda \cdot k(x) - q(x)] \cdot u(x) = 0, \quad x \in [a, b],$$

unde funcțiile $p, k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt strict pozitive, $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ecuația diferențială se modifică prin schimbarea de funcție $v = v(y)$ și variabilă independentă y astfel

$$\begin{cases} u(x) = z(x) \cdot v(y(x)), & h, z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \\ y = h(x) \end{cases}$$

unde funcția h este derivabilă cu derivata nenulă pe intervalul $[a, b]$, iar funcția z este nenulă pe acest interval.

➤ Arătați că noua ecuație are forma

$$\begin{aligned} & pz \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \cdot \frac{d^2v}{dy^2} + \left(pz \frac{d^2h}{dx^2} + 2p \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dh}{dx} + \frac{dp}{dx} zh \right) \frac{dv}{dy} + \\ & + \left[p \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dz}{dx} + z(\lambda k - q) \right] v = 0 \end{aligned}$$

unde toți coeficienții sunt exprimați în funcție de variabila independentă z cu ajutorul funcției inverse $x = \varphi(y)$ a funcției $y = h(x)$ (vom presupune că toate funcțiile și derivatele care apar în ecuația diferențială sunt continue).

➤ Arătați că pentru o alegere potrivită a funcțiilor h și z ecuația diferențială poate fi scrisă prin

$$\frac{d^2v}{dy^2} + (\lambda - Q(y)) v = 0.$$

Indicație. Pentru a obține forma dorită, vom impune ca, coeficientul lui $\frac{dv}{dy}$ să fie nul, iar coeficientul lui v să fie proporțional cu coeficientul lui $\frac{d^2v}{dy^2}$, urmând să împărțim ecuația prin acest divizorul lor comun. Arătați că a doua condiție conduce la $\frac{dh}{dx} = \sqrt{\frac{k}{p}}$, iar prima condiție conduce la $\frac{dh}{dx} \cdot z^2 \cdot p = \mathcal{C}$.

Alegând $\mathcal{C} = 1$ și $z = (k \cdot p)^{-\frac{1}{4}}$, se constată că

$$Q(y) = \frac{1}{f} \cdot \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{q}{k}, \quad f = \frac{1}{z(y)},$$

această schimbare de variabile fiind cunoscută sub numele de substituția lui **Liouville**.

8. Să se determine extremele locale relativ la mulțimea S ale funcției

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z,$$

unde

- $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\};$
- $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad 2 \cdot x + y + 2 \cdot z = 1\};$
- $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$

9. Fie funcția $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x, y) = x \cdot y \cdot (x^2 + y^2)$$

și mulțimea $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\}.$

Să se arate că:

- punctul $(s, \lambda_0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$ este un punct critic pentru funcția L a lui **Lagrange** asociată funcției în raport cu mulțimea S ;
- punctul $s = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ este un punct de maxim local relativ la S pentru funcția f ;
- punctul $(s, \lambda_0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$ nu este punct de extrem local pentru funcția

$$L_0 : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad L_0(x, y) = f(x, y) + \lambda \cdot F(x, y),$$

unde $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

10. Să se arate că sistemul

$$\begin{cases} x^2 + y \cdot z + \cos z = 7 \cdot \sin x, \\ x \cdot z^2 + y \cdot \cos(x \cdot y \cdot z) + 1 = 9 \cdot \sin y, \\ x \cdot \sin z^2 + y^2 \cdot \cos(x \cdot y) = 8 \cdot \sin z \end{cases}$$

are o soluție unică în mulțimea compactă $K = [-1, 1]^3$.

11. Să se determine marginile funcției $f : K \rightarrow \mathbb{R}$, pe mulțimea compactă K , unde

- $f(x, y) = (x + y)^2$, $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$;
 - $f(x, y, z) = 2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 - x \cdot y + z^4 - 2 \cdot z^2$,
- $$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 2 \cdot z^2 \leq 8\}.$$

12. (sesiunea de examene, februarie 2006)

- Să se arate că sistemul de ecuații

$$\begin{cases} u + v = x \cdot y \\ u \cdot v = x + y \end{cases} \quad (1)$$

nu definește implicit o aplicație $f = (u, v) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset \mathbb{R}^2$ în vecinătatea U a punctului $(x, y) = (2, 2)$.

- Să se arate că aplicația $f = (u, v) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset \mathbb{R}^2$ definită implicit de sistemul (1) și de condiția $(u, v)(1, 5) = (3, 2)$ este de clasă C^∞ pe o vecinătate W a punctului $(1, 5)$ și să se calculeze diferențiala aplicației f în punctul $(1, 5)$.

13. (sesiunea de examene, februarie 2006)

- Să se arate că sistemul de ecuații

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{2 \cdot x \cdot y^2}{x^2 + y^2}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases} \quad (2)$$

nu definește implicit o aplicație $f = (u, v, w) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow V \subset \mathbb{R}^3$ în vecinătatea U a punctului $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

- Să se arate că aplicația $f = (u, v, w) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow V \subset \mathbb{R}^3$ definită implicit de sistemul (2) și de condiția $(u, v, w)(1, 2, 3) = (1, 2, 3)$ este de clasă C^∞ pe o vecinătate W a punctului $(1, 2, 3)$ și să se scrie aproximarea liniară a aplicației f în punctul $(1, 2, 3)$.

6.4 Diferențiabilitate de ordinul doi

6.4.1 Derivabilitate parțială de ordinul doi

Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime deschisă nevidă, punctul $a \in A$ și $i, j \in \{1, \dots, p\}$.

Definiție 6.128. O aplicație $f : A \rightarrow \mathbb{R}^q$ se numește *derivabilă parțial de două ori în raport cu variabilele de indici i și j în punctul $a \in A$* , dacă există o

vecinătate $V \subset A$ a punctului $a \in A$ astfel încât f este derivabilă parțial în raport cu variabila de indice i pe V și derivata parțială

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : A \rightarrow \mathbb{R}^q$$

este derivabilă parțial în raport cu variabila de indice j în punctul a .

Vectorul (numărul real în cazul $q=1$)

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (a) \text{ se notează cu } \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (a)$$

și se numește *derivata parțială de ordin doi în raport cu variabilele de indici i și j a funcției f în punctul a* .

În cazul $i = j$ se utilizează și notația

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} (a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} (a) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (a)$$

Tinând seama de definiția noțiunii de derivată parțială de ordinul I, deducem că dacă sunt îndeplinite condițiile din definiția precedentă, atunci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i} (a + t \cdot e_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i} (a)}{t}$$

unde $B = \{e_1, \dots, e_p\}$ este baza canonica în \mathbb{R}^p .

Definiție 6.129. O aplicație $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ se numește *derivabilă parțial de două ori în punctul $a \in A$* , dacă pentru orice indici $i, j \in \{1, \dots, p\}$ aplicația f este derivabilă parțial de două ori în raport cu variabilele de indici i și j în punctul a .

De aici rezultă imediat că oricărei funcții reale $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă parțial de două ori în punctul $a \in A$ i se poate asocia matricea pătratică de ordinul p , numită *derivata de ordinul doi a funcției reale f în punctul a* sau **Hessiană** funcției reale f în punctul a

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_p}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_p}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2}(a) \end{pmatrix}$$

notată și cu $f''(a)$.

Cu alte cuvinte, $f''(a)$ este o matrice pătratică reală de ordinul p care are drept elemente derivatele parțiale de ordinul doi ale funcției f în punctul a .

Definiție 6.130. O aplicație $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ se numește derivabilă parțial de două ori pe mulțimea deschisă A , dacă f este derivabilă parțial de două ori în orice punct $a \in A$.

Dacă f este derivabilă parțial de două ori pe mulțimea A , atunci funcțiile

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} : A \rightarrow \mathbb{R}^q,$$

unde $i, j \in \{1, \dots, p\}$ se numesc derivatele parțiale de ordinul doi ale funcției f pe mulțimea A .

Remarcă 6.131. Înând seama că derivabilitatea parțială a unei aplicații vectoriale într-un punct a (respectiv pe mulțimea A) este echivalentă cu derivabilitatea parțială a tuturor componentelor sale în punctul a (respectiv pe mulțimea A), deducem că o **aplicație vectorială** $f = (f_1, \dots, f_q) : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este derivabilă parțial de două ori în punctul $a \in A$ (respectiv pe mulțimea A) dacă și numai dacă funcțiile reale f_1, \dots, f_q sunt derivabile parțial de două ori în punctul a (respectiv pe mulțimea A).

Din acest motiv în continuare vom considera doar cazul funcțiilor reale ($q = 1$), cazul $q > 1$ reducându-se la acesta.

Remarcă 6.132. O funcție $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă parțial de două ori în punctul $a \in A$, dacă și numai dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât f este derivabilă parțial pe V și **gradientul** său

$$\nabla f : V \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad (\nabla f)(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(x) \right)$$

este derivabil parțial în punctul a .

De aici rezultă că **funcția** $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă parțial de două ori pe mulțimea A dacă și numai dacă f este derivabilă parțial pe A și gradientul său este derivabil parțial pe A .

Are loc

Propoziție 6.133. Dacă funcțiile $f, g : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ sunt derivabile parțial de două ori în punctul $a \in A$ (respectiv pe A), iar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci funcțiile $\alpha \cdot f + \beta \cdot g, f \cdot g$ și $\frac{f}{g}$ (în acest din urmă caz presupunem că $g(x) \neq 0, \forall x \in A$) sunt derivabile parțial de două ori în punctul a (respectiv pe A).

Demonstrația rezultă imediat din Propoziția 6.9 și Remarcile 6.131 și 6.132. \square

Dacă $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă parțial de două ori în punctul $a \in A$, atunci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \text{ și } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \text{ pentru } i \neq j$$

se numesc *derivate parțiale mixte de ordinul doi* ale funcției f în punctul a .

Se pune problema dacă derivatele parțiale mixte de ordinul doi ale unei funcții (derivabile parțial de două ori) sunt egale, adică dacă are importanță ordinea de derivare. Exemplul care urmează arată că există funcții care au derivatele parțiale mixte de ordinul doi diferite.

Exemplu 6.134 (Funcții cu derivate parțiale mixte de ordinul doi diferite)
Funcția

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \cdot y \cdot (x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

este derivabilă parțial pe \mathbb{R}^2 cu

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{y \cdot (x^4 - y^4 + 4 \cdot x^2 \cdot y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

și

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{x \cdot (x^4 - y^4 - 4 \cdot x^2 \cdot y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

pentru orice x_2 .

Evident, gradientul $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ al lui f este derivabil parțial în orice punct $a \neq (0, 0)$ (via operații cu funcții derivabile parțial).

Pentru cazul $a = (0, 0)$ se observă că

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a + t \cdot e_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(a)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t, 0)}{t} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a + t \cdot e_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(a)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, t)}{t} = -1$$

O condiție suficientă pentru egalitatea derivatelor parțiale mixte de ordinul doi este dată de criteriul lui **Schwarz**.

Teoremă 6.135 (Schwarz) Fie funcția $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă parțial de două ori pe mulțimea deschisă A atât în raport cu variabilele de indici i și j , cât și în raport cu variabilele de indici j și i , unde $1 \leq i < j \leq p$.

Dacă funcțiile

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} : A \rightarrow \mathbb{R}^q \text{ și } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : A \rightarrow \mathbb{R}^q$$

sunt **continue** în punctul a , atunci ele sunt egale în punctul a , adică

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

Demonstrație. Să presupunem pentru început că $p=2$. Din faptul că A este deschisă și $a = (a_1, a_2) \in A$ rezultă că există $r > 0$ cu $D(a, r) \subset A$.

Considerăm funcția

$$\Delta f : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}.$$

Prin aplicarea teoremei lui **Lagrange** funcției

$$\varphi : [a_1, x_1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = f(t, x_2) - f(t, a_2)$$

se obține că pentru orice $x = (x_1, x_2) \in D(a, r)$ există punctul c_1 situat între a_1 și x_1 astfel ca

$$F(x_1, x_2) = \varphi(x_1) - \varphi(a_1) = \varphi'(c_1) \cdot (x_1 - a_1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, a_2) \right) \cdot (x_1 - a_1).$$

Prin aplicarea din nou a teoremei lui **Lagrange** funcției

$$\varphi_1 : [a_2, x_2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_1(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, t)$$

se obține că există punctul c_2 situat între a_2 și x_2 astfel ca

$$F(x_1, x_2) = (\varphi_1(x_2) - \varphi_1(a_2))(x_1 - a_1) = \varphi'_1(c_2) \cdot (x_1 - a_1) \cdot (x_2 - a_2).$$

Prin urmare

$$F(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(c_1, c_2) \cdot (x_1 - a_1) \cdot (x_2 - a_2). \quad (1)$$

Analog, prin aplicarea teoremei lui **Lagrange** funcțiilor

$$\psi : [a_2, x_2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(t) = f(x_1, t) - f(a_1, t)$$

și respectiv

$$\psi : [a_1, x_1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi_1(t) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(t, d_2)$$

există punctul $d = (d_1, d_2)$ cu d_1 situat între a_1 și x_1 , d_2 situat între a_2 și x_2 astfel că

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= \psi(x_2) - \psi(a_2) = \psi'(d_2) \cdot (x_2 - a_2) = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, d_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, d_2) \right) \cdot (x_2 - a_2) = \\ &= (\psi_1(x_1) - \psi_1(a_1))(x_2 - a_2) = \psi'_1(d_1) \cdot (x_1 - a_1) \cdot (x_2 - a_2) = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(d_1, d_2) \cdot (x_1 - a_1) \cdot (x_2 - a_2). \end{aligned}$$

Dacă $x = (x_1, x_2) \in D(a, r)$ cu $x_1 \neq a_1$ și $x_2 \neq a_2$, atunci din (1) și ultima relație rezultă că

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(c_1, c_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(d_1, d_2)$$

Tinând seama că dacă

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial x_3 \partial x_2 \partial x_1}(a) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_3 \partial x_1}(a) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_3 \partial x_1 \partial x_2}(a) = \\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_3 \partial x_2}(a) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_3}(a) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}(a), \end{aligned}$$

atunci $c = (c_1, c_2) \rightarrow (a_1, a_2) = a$ și $d = (d_1, d_2) \rightarrow (a_1, a_2) = a$, din egalitatea precedentă și ipoteza de continuitate a derivatelor parțiale mixte de ordinul doi rezultă, prin trecere la limită pentru

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial x_3 \partial x_2 \partial x_1}(a) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_3 \partial x_1}(a) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_3 \partial x_1 \partial x_2}(a) = \\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_3 \partial x_2}(a) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_3}(a) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}(a) \end{aligned}$$

egalitatea din enunț.

Dacă $p > 2$ și $1 \leq i < j \leq p$ (fixați), atunci se consideră o mulțime deschisă $A_0 \subset \mathbb{R}^2$ cu proprietatea că $(a_i, a_j) \in A_0$ și

$$a_{ij}^{xy} = (a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \dots, a_p) \in A$$

pentru orice $(x, y) \in A_0$.

Prin aplicarea rezultatului demonstrat (cazul $p = 2$) funcției

$$f_0 : A_0 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_0(x, y) = f(a_{ij}^{xy})$$

se obține în final că

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f_0}{\partial x \partial y}(a_i, a_j) = \frac{\partial^2 f_0}{\partial y \partial x}(a_i, a_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

ceea ce trebuia demonstrat. \square

6.4.2 Diferențiabilitate în sens Gâteaux de ordinul doi

Vom considera la început cazul funcțiilor reale.

Definiție 6.136. O funcție reală $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ se numește diferențiabilă în sens **Gâteaux** de două ori în punctul $a \in A$, dacă există o vecinătate $V \subset A$ a lui a astfel încât funcția f este diferențiabilă în sens **Gâteaux** pe V și toate derivatele parțiale

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}: V \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, p$$

sunt diferențiabile în sens **Gâteaux** în punctul a .

Caracterizarea diferențiabilității în sens **Gâteaux** de ordinul doi în limbaj de gradient este formulată în

Remarcă 6.137. Funcția reală $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă în sens **Gâteaux** de două ori în punctul $a \in A$ dacă și numai dacă există o vecinătate $V \subset A$ a lui a astfel încât f este diferențiabilă în sens **Gâteaux** pe V și gradientul său

$$\nabla f: V \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p} \right)$$

este diferențiabil în sens **Gâteaux** în punctul a .

Această caracterizare permite

Definiție 6.138. Fie funcția reală $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ diferențiabilă în sens **Gâteaux** de două ori în punctul $a \in A$. Funcția reală

$$\delta_a^2 f: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$$

definită prin

$$\delta_a^2 f(u, v) = \langle \delta_a(\nabla f)(u), v \rangle$$

se numește diferențiala **Gâteaux** de ordinul doi a funcției f în punctul a .

Are loc

Propoziție 6.139. Dacă $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă în sens **Gâteaux** de două ori în punctul $a \in A$, atunci f este derivabilă parțial de două ori în a și

$$\delta_a^2 f(e_j, e_i) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

pentru orice $i, j \in \{1, \dots, p\}$.

Demonstrație. Dacă f este diferențiabilă în sens **Gâteaux** de două ori în punctul a , atunci f este diferențiabilă în sens **Gâteaux** (deci, și derivabilă parțial) pe o vecinătate $V \subset A$ a lui a , iar derivatele parțiale

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, p$$

sunt diferențiabile în sens **Gâteaux** (deci, și derivabile parțial) în punctul a . În consecință, f este derivabilă parțial de două ori în punctul a și din definiția lui $\delta_a^2 f$ obținem

$$\begin{aligned} \delta_a^2 f(e_j, e_i) &= \left\langle \delta_a(\nabla f)(e_j), e_i \right\rangle = \left\langle \left(\delta_a \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)(e_j), \dots, \delta_a \left(\frac{\partial f}{\partial x_p} \right)(e_j) \right), e_i \right\rangle = \\ &= \delta_a \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(e_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a), \end{aligned}$$

ceea ce trebuie demonstrat. \square

Cazul aplicațiilor vectoriale se reduce la cazul funcțiilor reale prin

Definiție 6.140. O aplicație vectorială $f = (f_1, \dots, f_q) : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ se numește diferențiabilă în sens **Gâteaux** de două ori în punctul $a \in A$, dacă toate componente sale f_1, \dots, f_q sunt funcții reale diferențiabile în sens **Gâteaux** de două ori în punctul a .

Prin definiție aplicația

$$\delta_a^2 f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$$

dată prin

$$\delta_a^2 f = (\delta_a^2 f_1, \dots, \delta_a^2 f_q)$$

se numește diferențiala în sens **Gâteaux** de ordinul doi în punctul a a aplicației vectoriale f .

Remarcă 6.141. Din Definiția 6.140 rezultă imediat că Propoziția 6.139 rămâne adevărată și pentru aplicații vectoriale.

6.4.3 Diferențiabilitate în sens Fréchet de ordinul doi

Vom ilustra pentru început cazul funcțiilor reale.

Definiție 6.142. O funcție reală $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ se numește diferențiabilă în sens **Fréchet de două ori** (pe scurt, *diferențiabilă de două ori*) în punctul $a \in A$, dacă există o vecinătate $V \subset A$ a lui a , astfel încât f este diferențiabilă pe V și toate derivatele parțiale

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, p$$

sunt diferențiabile în a .

Ca și în cazul diferențiabilității în sens **Gâteaux** de ordinul doi diferențiabilitatea de ordinul doi se caracterizează cu ajutorul gradientului prin

Remarcă 6.143. O funcție reală $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă de două ori în punctul $a \in A$, dacă și numai dacă există o vecinătate $V \subset A$ a lui a astfel încât f este diferențiabilă pe V și gradientul său

$$\nabla f : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p} \right)$$

este diferențiabil în punctul a .

Definiție 6.144. Dacă $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă de două ori în punctul $a \in A$, atunci funcția

$$d_a^2 f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$$

definită prin

$$d_a^2 f(u, v) = \langle d_a(\nabla f)(u), v \rangle$$

se numește diferențiala **Fréchet** de ordinul doi (pe scurt, diferențiala de ordinul doi) a funcției f în punctul a .

Remarcă 6.145. Ținând seama că diferențiala $d_a(\nabla f)$ este o aplicație liniară și că produsul scalar este o funcție biliniară, din definiția precedentă rezultă că **diferențiala de ordinul doi a funcției f în punctul a** (evident, în ipoteza că f este diferențiabilă de două ori) este o aplicație biliniară. În plus, ținând seama de definiția normei unei aplicații biliniare, avem că

$$\|d_a^2 f(u, v)\| \leq \|d_a^2 f\| \cdot \|u\| \cdot \|v\|$$

pentru orice $u, v \in \mathbb{R}^p$ și orice funcție $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ diferențiabilă de două ori în a .

Relația dintre conceptul de diferențiabilitate de ordinul doi și celelalte concepte de diferențiabilitate de ordinul doi sunt puse în evidență de

Propoziție 6.146. Dacă $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă de două ori în punctul $a \in A$, atunci

1) f este diferențiabilă de două ori în punctul a și $\delta_a^2 f = d_a^2 f$;

2) f este derivabilă parțial de două ori în punctul a și

$$(i) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = d_a^2 f(e_i, e_j), \quad i, j = 1, \dots, p;$$

$$(ii) \quad d_a^2 f(u, v) = \sum_{i,j=1}^p u_i \cdot v_j \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a);$$

(iii) matricea asociată lui $d_a^2 f$ este $f''(a)$.

Demonstrație.

1. Dacă f este diferențiabilă de două ori în punctul $a \in A$, atunci f este diferențiabilă pe o vecinătate $V \subset A$ a lui a și gradientul lui $f(\nabla f)$ este diferențiabil în punctul a . Atunci ∇f este diferențiabil în sens **Gâteaux** în punctul a . Deci f este diferențiabilă în sens **Gâteaux** de două ori în punctul a și

$$\delta_a^2 f(u, v) = \langle \delta_a(\nabla f)(u), v \rangle = \langle d_a(\nabla f)(u), v \rangle = d_a^2 f(u, v).$$

2. Din 1 și Propoziția 6.139 se obține că f este derivabilă parțial de două ori în punctul a și

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \delta_a^2 f(e_i, e_j) = d_a^2 f(e_i, e_j).$$

Ținând seama că $d_a^2 f$ este o formă biliniară, se obține că pentru orice $u, v \in \mathbb{R}^p$

$$\begin{aligned} d_a^2 f(u, v) &= d_a^2 f\left(\sum_{i=1}^p u_i \cdot e_i, \sum_{j=1}^p v_j \cdot e_j\right) = \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p u_i \cdot v_j \cdot d_a^2 f(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^p u_i \cdot v_j \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \end{aligned}$$

Din definiția matricei asociate unei aplicații biliniare rezultă imediat afirmația de la (iii). \square

Remarcă 6.147. Dacă notăm cu $\mathcal{F}_a^2, \mathcal{G}_a^2$ și \mathcal{D}_a^2 (respectiv $\mathcal{F}_a, \mathcal{G}_a$ și \mathcal{D}_a) mulțimile funcțiilor diferențiabile de două ori în punctul a , funcțiilor diferențiabile în sens **Gâteaux** de două ori în a și funcțiilor derivabile parțial de două ori în punctul a (respectiv diferențiabile în a , diferențiabile în sens **Gâteaux** în a și derivabile parțial în a), atunci din Remarca 6.43 și Propozițiile 6.139, 6.146 rezultă următoarele incluziuni

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}_a^2 & \subset & \mathcal{G}_a^2 & \subset & \mathcal{D}_a^2 \\ \cap & & \cap & & \cap \\ \mathcal{F}_a & \subset & \mathcal{G}_a & \subset & \mathcal{D}_a \end{array}$$

Un criteriu de diferențiabilitate de ordinul doi, analog celui dat de Corolarul 6.49 pentru diferențiabilitatea de ordinul întâi este

Propoziție 6.148. Dacă $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă parțial de două ori pe multimea A și pentru orice $i, j = 1, \dots, p$ funcțiile

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : A \rightarrow \mathbb{R}$$

sunt continue în punctul $a \in A$, atunci f este diferențiabilă de două ori în a .

Cu alte cuvinte, dacă f are derivate parțiale de ordinul doi continue în punctul a , atunci f este diferențiabilă de două ori în punctul a .

Demonstrație. Dacă f are derivate parțiale de ordinul doi continue în punctul a , atunci derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției f (adică, componentele aplicației ∇f) au derivatele parțiale continue în a .

Din Corolarul 6.49 aplicat lui ∇f rezultă că ∇f este diferențiabil în punctul a , deci f este diferențiabilă de două ori în a . \square

Condiții suficiente pentru diferențiabilitatea de ordinul doi oferă Propoziția 6.148, referitor la *operații cu funcții diferențiabile de două ori*.

Propoziție 6.149. Dacă $f, g : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ sunt diferențiabile de două ori în punctul $a \in A$, iar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$, $f \cdot g$ și $\frac{f}{g}$ (în acest din urmă caz presupunem $g(a) \neq 0$) sunt diferențiabile de două ori în a și

- $d_a^2(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = \alpha \cdot d_a^2 f + \beta \cdot d_a^2 g$;
- $d_a^2(f \cdot g)(u, v) = g(a) \cdot d_a^2 f(u, v) + f(a) \cdot d_a^2 g(u, v) + d_af(u) \cdot d_ag(v) + d_ag(u) \cdot d_af(v)$;
- $d_a^2\left(\frac{f}{g}\right)(u, v) = \frac{g^2(a) \cdot d_a^2 f(u, v) - f^2(a) \cdot d_a^2 g(u, v)}{g^3(a)} + \frac{2 \cdot f(a) \cdot d_ag(u) \cdot d_ag(v) - g(a) \cdot d_af(u) \cdot d_ag(v) - g(a) \cdot d_ag(u) \cdot d_af(v)}{g^3(a)}$

pentru orice $F(x, y) = x_1^2 + x_2^2 + y^2 - 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 4 \cdot y + 10$.

Demonstrația rezultă din definițiile diferențiabilității și diferențialei de ordinul doi și proprietățile de la operații cu funcții diferențiabile. \square

Diferențiabilitatea și diferențiala de ordinul doi a aplicațiilor vectoriale se introduce prin

Definiție 6.150. O aplicație vectorială $f = (f_1, \dots, f_q) : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ se numește diferențiabilă de două ori în punctul $a \in A$, dacă toate componentele sale f_1, \dots, f_q sunt diferențiabile de două ori în a .

Prin definiție, aplicația

$$f : \overline{A} \rightarrow \mathbb{R}$$

definită prin

$$d_a^2 f = (d_a^2 f_1, \dots, d_a^2 f_q)$$

se numește *diferențiala de ordinul doi a aplicației f în punctul a* .

Deoarece $d_a^2 f_1, \dots, d_a^2 f_q$ sunt biliniare, din definiția precedentă rezultă că diferențiala de ordinul doi a oricărei aplicații vectoriale $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ diferențiabilă de două ori în punctul $a \in A$ este o aplicație biliniară.

Remarcă 6.151. Din definiția precedentă, deducem imediat că Propozițiile 6.146 și 6.148 rămân adevărate și pentru cazul aplicațiilor vectoriale diferențiabile de două ori.

Relativ la diferențabilitatea de ordinul doi a funcțiilor compuse demonstrăm

Propoziție 6.152. Fie $A \subset \mathbb{R}^p, B \subset \mathbb{R}^q$ mulțimi deschise, iar $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ și $f = (f_1, \dots, f_q): A \rightarrow B$. Dacă f este diferențiabilă de două ori în punctul $a \in A$ și g este diferențiabilă de două ori în punctul $b = f(a) \in B$, atunci $g \circ f$ este diferențiabilă de două ori în a și

$$d_a^2(g \circ f)(u, v) = d_b^2 g(d_a f(u), d_a f(v)) + d_b g(d_a^2 f(u, v))$$

pentru orice $F(x, y) = x_1^2 + x_2^2 + y^2 - 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 4 \cdot y + 10$.

Demonstrație. Deoarece f (respectiv g) este diferențiabilă de două ori în a (respectiv în b), rezultă că există o vecinătate $U \subset A$ (respectiv $V \subset B$) a punctului a (respectiv b) astfel încât f (respectiv g) este diferențiabilă pe U (respectiv V) și derivatele parțiale ale lui f (respectiv g) sunt diferențiabile în a (respectiv b). Din proprietatea de diferențabilitate a funcțiilor compuse (Propoziția 6.4) rezultă că funcția $h = g \circ f$ este diferențiabilă pe vecinătatea $U_1 = f^{-1}(V) \cap U \subset A$ a punctului a , deci și derivabilă parțial pe U_1 cu

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^q \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(x)) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)$$

pentru orice $j = 1, \dots, p$ și orice $a \in A$.

Din diferențabilitatea în punctul a a funcțiilor $\frac{\partial g}{\partial y_k}$ și $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$ (prin utilizarea

Corolarului 6.60) deducem că

$$\nabla h = \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_p} \right)$$

este diferențiabilă în a și

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(a) &= \sum_{k=1}^q \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial y_k} g \circ f \right)(a) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a) + \sum_{k=1}^q \frac{\partial g}{\partial y_k}(b) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j} \right)(a) = \\ &= \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^q \frac{\partial^2 g}{\partial y_k \partial y_l}(b) \cdot \frac{\partial f_l}{\partial x_i}(a) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a) + \sum_{k=1}^q \frac{\partial g}{\partial y_k}(b) \cdot \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(a) \end{aligned}$$

De aici deducem că h este diferențiabilă de două ori în a și (conform Propoziției 6.146) obținem

$$\begin{aligned}
 d_a^2 h(u, v) &= \sum_{i,j=1}^p u_i \cdot v_j \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \\
 &= \sum_{k,l=1}^q \frac{\partial^2 g}{\partial y_l \partial y_k}(b) \cdot \sum_{i=1}^p u_i \cdot \frac{\partial f_l}{\partial x_i}(a) \cdot \sum_{j=1}^p v_j \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a) + \sum_{k=1}^q \frac{\partial g}{\partial y_k}(b) \cdot \sum_{i=1}^p u_i \cdot v_j \cdot \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \\
 &= \sum_{k,l=1}^q \frac{\partial^2 g}{\partial y_l \partial y_k}(b) \cdot d_a f_l(u) \cdot d_a f_k(v) + \sum_{k=1}^q \frac{\partial g}{\partial y_k}(b) \cdot d_a^2 f_k(u, v) = \\
 &= d_b^2 g(d_a f(u), d_a f(v)) + d_b g(d_a^2 f(u, v))
 \end{aligned}$$

pentru orice $F(x, y) = x_1^2 + x_2^2 + y^2 - 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 4 \cdot y + 10$. \square

O altă condiție suficientă de egalitate a derivatelor parțiale mixte de ordinul doi este datorată lui **Young**¹².

Teoremă 6.153. (Criteriul lui **Young**). Dacă $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă de două ori în punctul interior $a \in A$, atunci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a),$$

pentru orice $i, j = 1, \dots, p$.

Demonstrație. Din raționamente similare ca în demonstrația criteriului lui **Schwarz** deducem că este suficient să considerăm doar cazul $p = 2$. Cu notațiile din demonstrația Teoremei 6.37, din diferențiabilitatea funcției f pe o vecinătate $V = D(a, r) \subset A$ a punctului a , pentru orice $x = (x_1, x_2) \in V$ se deduce existența unei puncte c_1 situat între a_1 și x_1 astfel că

$$F(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, a_2) \right) \cdot (x_1 - a_1).$$

Din diferențiabilitatea funcției $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ în punctul a (via Teorema 6.37 și

Corolarul 6.46) se deduce existența a două funcții $\omega_1, \omega_2 : A \rightarrow \mathbb{R}$ continue și nule în punctul $a = (a_1, a_2)$ astfel ca

¹² William Henry Young, 1863-1942, matematician englez

$$\begin{aligned}
F(x_1, x_2) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) \right) \cdot (x_1 - a_1) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, a_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) \right) \cdot (x_1 - a_1) = \\
&= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) \cdot (c_1 - a_1) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) \cdot (x_2 - a_2) + \omega_1(c_1, x_2) \cdot (c_1 - a_1) + \omega_2(c_1, x_2) \cdot (x_2 - a_2) \right] \cdot (x_1 - a_1) - \\
&\quad - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) \cdot (c_1 - a_1) + \omega_1(c_1, a_2) \cdot (c_1 - a_1) \right) \cdot (x_1 - a_1)
\end{aligned}$$

prin urmare

$$F(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) \cdot (x_1 - a_1) \cdot (x_2 - a_2) + \Omega_1(x_1, x_2), \quad (1)$$

unde

$$\Omega_1(x_1, x_2) = [\omega_1(c_1, x_2) - \omega_1(c_1, a_2)] \cdot (c_1 - a_1) \cdot (x_1 - a_1) + \omega_2(c_1, x_2) \cdot (x_2 - a_2) \cdot (x_1 - a_1)$$

Cu un raționament complet analog, utilizând diferențiabilitatea în punctul a a funcției $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, se deduce existența a două funcții $\omega_3, \omega_4 : A \rightarrow \mathbb{R}$ continue și nule în punctul a astfel ca

$$\begin{aligned}
F(x_1, x_2) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, d_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, d_2) \right) \cdot (x_2 - a_2) = \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, d_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \right) \cdot (x_2 - a_2) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, d_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \right) \cdot (x_2 - a_2) = \quad (2) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) \cdot (x_1 - a_1) \cdot (x_2 - a_2) + \Omega_2(x_1, x_2)
\end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned}
\Omega_2(x_1, x_2) &= [\omega_4(x_1, d_2) - \omega_4(a_1, d_2)] \cdot (x_2 - a_2) \cdot (d_2 - a_2) + \\
&\quad + \omega_3(x_1, d_2) \cdot (x_1 - a_1) \cdot (x_2 - a_2)
\end{aligned}$$

iar punctul d_2 este situat între a_2 și x_2 .

Fie $x = (x_1, x_2) \in V$ cu $|x_2 - a_2| = |x_1 - a_1| \neq 0$.

Din (1) și (2) deducem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) + \frac{\Omega_1(x_1, x_2)}{(x_1 - a_1) \cdot (x_2 - a_2)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) + \frac{\Omega_2(x_1, x_2)}{(x_1 - a_1) \cdot (x_2 - a_2)}$$

Din continuitatea funcțiilor $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 : A \rightarrow \mathbb{R}$ în punctul a rezultă

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\Omega_1(x_1, x_2)}{(x_1 - a_1) \cdot (x_2 - a_2)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\Omega_2(x_1, x_2)}{(x_1 - a_1) \cdot (x_2 - a_2)} = 0,$$

care împreună cu egalitatea precedentă, prin trecere la limită pentru $x \rightarrow a$, conduce la egalitatea din enunț. \square

Corolar 6.154. Dacă $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențială de două ori în punctul $a \in A$, atunci $d_a^2 f$ este o aplicație biliniară și simetrică.

Demonstrație. În adevăr, din Teorema 6.153 a lui **Young** și Propoziția 6.146 obținem că pentru orice $u, v \in \mathbb{R}^p$ avem

$$d_a^2 f(u, v) = \sum_{i,j=1}^p u_i \cdot v_j \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \sum_{i,j=1}^p u_i \cdot v_j \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = d_a^2 f(v, u),$$

ceea ce arată că $d_a^2 f$ este simetrică. \square

Remarcă 6.155. Criteriile lui **Schwarz** și, respectiv, **Young** pun în evidență **condiții suficiente** pentru egalitatea derivatelor parțiale mixte de ordinul doi. Aceste condiții **nu sunt și necesare**, fenomen ilustrat și de **I. Barbălat** prin următorul exemplu.

Exemplu 6.156 (Funcție cu derivate parțiale mixte de ordinul doi egale, care nu verifică condițiile din ipotezele teoremelor **Schwarz** și **Young**). Funcția

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} y^2 \cdot \ln\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right), & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

este derivabilă parțial pe \mathbb{R}^2 cu

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{2 \cdot x \cdot y^2}{x^2 + y^2}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

și

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} 2 \cdot y \cdot \ln \frac{x^2 + y^2}{y^2} - \frac{2 \cdot x^2 \cdot y}{x^2 + y^2}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

Funcțiile $\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$ sunt derivabile parțial pe \mathbb{R}^2 , deci f este derivabilă parțial de două ori pe \mathbb{R}^2) cu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{4 \cdot x^3 \cdot y}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

adică derivate parțiale mixte de ordinul doi sunt egale pe \mathbb{R}^2 .

1. Vom arăta că derivata $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ nu este continuă în origine, adică funcția

f nu satisfac condițiile criteriului lui **Schwarz**.

Considerăm sirul $(x_n, x_n)_n \subset \mathbb{R}^2$ astfel că $\exists \lim_n x_n = 0$ și constatăm că

$$r > 0,$$

adică $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ nu este continuă în origine.

2. Să arătăm că funcția f nu satisfacă nici condițiile criteriului lui **Young**.

Pentru aceasta este suficient să arătăm că $\frac{\partial f}{\partial x}$ nu este diferențiabilă în origine.

Presupunând contrariul, ar exista o funcție $\omega: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continuă și nulă în origine astfel ca

$$\frac{2 \cdot x \cdot y^2}{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \omega(x, y), \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

adică

$$\omega(x, y) = \begin{cases} \frac{2 \cdot x \cdot y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Considerăm ca mai sus, sirul $(x_n, x_n)_n \subset \mathbb{R}^2$ astfel că $\exists \lim_n x_n = 0$ și constatăm că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega(x_n, x_n) = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0 = \omega(0, 0),$$

adică funcția ω nu este continuă în origine.

6.4.4 Diferențiabilitate globală de ordinul doi

Fie aplicația $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, unde mulțimea A este presupusă deschisă.

Definiție 6.157. Aplicația $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ se numește *diferențiabilă* (respectiv *diferențiabilă în sens Gâteaux*) de două ori pe mulțimea A , dacă f este diferențiabilă (respectiv diferențiabilă în sens **Gâteaux**) de două ori în orice punct $a \in A$.

Dacă f este diferențiabilă (respectiv diferențiabilă în sens **Gâteaux**) de două ori pe mulțimea A , atunci aplicația

$$d^2 f: A \rightarrow \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q), \quad d^2 f(a) = d_a^2 f,$$

respectiv $\delta^2 f: A \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, $\delta^2 f(a) = \delta_a^2 f$, se numește *diferențiala* (respectiv *diferențiala Gâteaux*) de ordinul doi a funcției f pe mulțimea A .

În definiția precedentă am notat cu $\mathcal{F}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ mulțimea aplicațiilor definite pe $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ cu valori în \mathbb{R}^q , iar cu $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ mulțimea aplicațiilor $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ biliniare.

Remarcă 6.158. Din Remarca 6.147 și definiția precedentă rezultă că dacă $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$

- (i) este diferențiabilă în sens **Gâteaux** de două ori pe A , atunci f este derivabilă parțial de două ori pe A ;
- (ii) este diferențiabilă de două ori pe A , atunci f este diferențiabilă în sens **Gâteaux** de două ori pe A .

Cu alte cuvinte, dacă notăm cu \mathcal{F}_A^2 , \mathcal{G}_A^2 și, respectiv, \mathcal{D}_A^2 mulțimile aplicațiilor diferențiabile de două ori pe A , diferențiabile în sens **Gâteaux** de două ori pe A și, respectiv, derivabile parțial de două ori pe A , avem că

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}_A^2 & \subset & \mathcal{G}_A^2 & \subset & \mathcal{D}_A^2 \\ \cap & & \cap & & \cap \\ \mathcal{F}_A & \subset & \mathcal{G}_A & \subset & \mathcal{D}_A \end{array}$$

Definiție 6.159. Aplicația $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ se zice că este de clasă C^2 pe mulțimea A , dacă f este diferențiabilă de două ori pe A și

$$d^2 f : A \rightarrow \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$$

este continuă pe mulțimea A .

Caracterizarea aplicațiilor de clasă C^2 cu ajutorul derivatelor parțiale de ordinul doi este dată de

Propoziție 6.160. O aplicație $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este de clasă C^2 pe mulțimea A dacă și numai dacă este derivabilă de două ori pe A și pentru orice $i, j = 1, \dots, p$ aplicațiile $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : A \rightarrow \mathbb{R}^q$ sunt continue pe A .

Demonstrație. **Necesitatea.** Dacă f este de clasă C^2 pe mulțimea A , atunci din

$$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right\| = \left\| (d_x^2 f - d_a^2 f)(e_i, e_j) \right\| \leq \|d_x^2 f - d_a^2 f\| \cdot \|e_i\| \cdot \|e_j\| = \|d_x^2 f - d_a^2 f\|$$

și din continuitatea aplicației $d^2 f$ rezultă imediat continuitatea aplicațiilor $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ pentru orice $i, j = 1, \dots, p$ și în orice punct $a \in A$.

Suficiență. Dacă f are derive parțiale de ordinul doi continue pe A , atunci utilizând formula de clacul a diferențialei de ordinul doi avem

$$\begin{aligned} \left\| (d_x^2 f - d_a^2 f)(u, v) \right\| &\leq \sum_{i,j=1}^p |u_i| \cdot |v_j| \cdot \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right\| \\ &\leq \|u\| \cdot \|v\| \cdot \sum_{i,j=1}^p \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right\| \end{aligned}$$

pentru orice $u, v \in \mathbb{R}^p$ și orice $x, a \in A$.

De aici rezultă

$$\|d_x^2 f - d_a^2 f\| \leq \sum_{i,j=1}^p \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right\|$$

care, împreună cu continuitatea derivatelor parțiale de ordinul doi, conduce la continuitatea aplicației $d^2 f$ pe mulțimea A , deci f este de clasă C^2 pe A . \square

Corolar 6.161. Orice aplicație $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ de clasă C^2 pe mulțimea A este diferențiabilă de două ori pe A .

Demonstrația rezultă din propoziția precedentă și Propoziția 6.148. \square

Remarcă 6.162. Dacă notăm cu \mathcal{C}_A^2 mulțimea aplicațiilor de clasă C^2 pe mulțimea A , atunci din corolarul precedent și Remarca 6.158 rezultă că au loc inclusiunile

$$\mathcal{C}_A^2 \subset \mathcal{F}_A^2 \subset \mathcal{G}_A^2 \subset \mathcal{D}_A^2.$$

Corolar 6.163. Dacă aplicația $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow B \subset \mathbb{R}^q$ este de clasă C^2 pe mulțimea A și $g : B \subset \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^s$ este de clasă C^2 pe mulțimea B , atunci $g \circ f$ este de clasă C^2 pe mulțimea A .

Demonstrația rezultă din Propozițiile 6.152 și 6.160. \square

6.4.5 Exerciții

1. Fie funcția

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \cdot y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Să se studieze dacă f

- este derivabilă parțial de două ori pe \mathbb{R}^2 ;
- este diferențiabilă în sens **Gâteaux** de două ori pe \mathbb{R}^2 ;
- este diferențiabilă de două ori pe \mathbb{R}^2 ;
- este de clasă C^2 pe \mathbb{R}^2 ;
- satisface condițiile criteriilor **Schwarz** și **Young**.

2. Să se arate că:

- funcția $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\|x\|}$ satisfacă pe $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ ecuația lui Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 0;$$

- dacă funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sunt derivabile și $a \in \mathbb{R}$, atunci funcția $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, h(x,t) = f(x+a \cdot t) - g(x-a \cdot t)$

satisfacă ecuația coardei vibrante

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}.$$

3. Fie funcția $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^2 pe \mathbb{R}^2 și aplicația $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definită prin

$$F(r,t) = f(r \cdot \cos t, r \cdot \sin t).$$

Să se arate că

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r},$$

unde derivatele parțiale ale lui f se calculează în punctul $(x,y) = (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t)$, iar cele ale lui F în punctul (r,t) .

4. Să se arate că aplicația $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este diferențiabilă de două ori în punctul $a \in A$, dacă și numai dacă există o vecinătate $V \subset A$ a lui a astfel ca f să fie diferențiabilă pe V și aplicația $df : V \rightarrow L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ să fie diferențiabilă în a .

În plus, avem că

$$d_a^2 f(u,v) = d_a(df)(u)(v)$$

pentru orice $u, v \in \mathbb{R}^p$.

5. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\|x\|^2 - 1}, & \|x\| < 1 \\ 0, & \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

este de clasă C^2 pe \mathbb{R}^2 .

6. Să se arate că funcția implicită f definită de ecuația $F(x, y) = 0$ și $f(a) = b$ este o funcție de clasă C^2 pe o vecinătate a punctului a și apoi să se calculeze derivatele parțiale de ordinul doi ale lui f în punctul a , unde

- $F(x, y) = x_1^2 + x_2^2 - y^2 + x_1 \cdot y - x_2 \cdot y - 1, \quad a = (1, 0), \quad b = 1;$
- $F(x, y) = x_2 \cdot y \cdot \sin x_1 - x_1 - x_2 - y, \quad a = (0, 0), \quad b = 1.$

7. Fie funcția $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^p a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j,$$

unde $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}, \quad \forall i, j = 1, \dots, p$. Să se arate că f este de clasă C^2 pe \mathbb{R}^p și

$$f(x) = f(a) + d_a f(x-a) + \frac{1}{2} \cdot d_a^2 f(x-a, x-a)$$

pentru orice $a, x \in \mathbb{R}^p$.

8. Funcției $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ diferențiabilă de două ori în punctul $a \in A$ î se asociază funcția $F : A \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$F(x) = f(x) - f(a) - d_a f(x-a) - \frac{1}{2} \cdot d_a^2 f(x-a, x-a)$$

și aplicația vectorială $\Omega_f : A \rightarrow \mathbb{R}^p$ definită prin

$$\Omega_f(x) = \begin{cases} \frac{\nabla f(x) - \nabla f(a) - d_a(\nabla f)(x-a)}{\|x-a\|}, & x \neq a \\ 0, & x = a. \end{cases}$$

Să se arate că

- Ω_f este continuă în punctul a ;
- F este diferențiabilă pe A și

$$d_x F(v) = \langle \Omega_f(x), v \rangle \cdot \|x-a\|$$

pentru orice $x \in A$ și $v \in \mathbb{R}^p$;

- există $r > 0$ astfel încât pentru orice $x \in D(a, r)$ există $c \in (a, x)$ cu

$$|F(x)| \leq \|\Omega_f(c)\| \cdot \|x-a\|^2;$$

- există funcția $\omega : A \rightarrow \mathbb{R}$ continuă și nulă în punctul a astfel încât

$$f(x) = f(a) + d_a f(x-a) + \frac{1}{2} \cdot d_a^2 f(x-a, x-a) + \|x-a\|^2 \cdot \omega(x)$$

pentru orice $x \in A$.

9. Oricărei aplicații vectoriale $F = (F_1, F_2, F_3) : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (numită și câmp vectorial) de clasă C^1 pe mulțimea A i se asociază aplicația

$$\operatorname{rot} F : A \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)$$

numită și *rotorul* câmpului vectorial F . Să se arate că:

- aplicația
 $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad G(x_1, x_2, x_3) = (2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3, x_1^2 \cdot x_3 + x_2, x_1^2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3^2)$
 are proprietatea că $\operatorname{rot} G = 0$;
- $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$ pentru orice funcție $f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^2 pe A ;
- există o funcție $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^2 pe \mathbb{R}^3 cu proprietatea $G = \nabla g$.

10. Oricărei aplicații vectoriale $F = (F_1, F_2, F_3) : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clasă C^1 pe mulțimea A i se asociază funcția

$$\operatorname{div} F : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad \operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}$$

numită și *divergența* câmpului vectorial F . Să se arate că dacă F este de clasă C^2 pe A , iar

$$\Delta f : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$$

este *laplacianul* câmpului scalar $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^2 pe A , atunci

- $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$;
- $\operatorname{div}(\nabla f) = \Delta f$;
- $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} F) = \nabla(\operatorname{div} F) - \Delta F$, unde

$$\Delta F : A \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Delta F = (\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3)$$

este laplacianul câmpului vectorial F .

6.5 Concepte de diferențiabilitate de ordin superior

6.5.1 Derivabilitate parțială de ordin superior

Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime deschisă nevidă, punctul $a \in A$ și $n \in \mathbb{N}^*$.

Definiție 6.164. O aplicație $f : A \rightarrow \mathbb{R}^q$ se numește *derivabilă parțial de n ori în punctul* $a \in A$, dacă există o vecinătate $V \subset A$ a punctului $a \in A$ astfel încât f este derivabilă parțial în de $n-1$ ori pe V și orice derivată parțială de ordinul $n-1$ este derivabilă parțial în a .

Vectorii (numerele reale în cazul $q=1$)

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_1}} \right) (a) \text{ se notează cu } \mathcal{F}_A \subset \mathcal{G}_A \subset \mathcal{D}_A$$

și se numesc *derivatele parțiale de ordinul n în raport cu variabilele de indici i_n, i_{n-1}, \dots, i_1 ale aplicației f în punctul a* , unde $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, p\}$.

Definiție 6.165. Aplicația $f : A \rightarrow \mathbb{R}^q$ se numește *derivabilă parțial de n ori pe mulțimea A* , dacă f este derivabilă parțial de n ori în orice punct $a \in A$.

Remarcă 6.166. O aplicație $f = (f_1, \dots, f_q) : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este derivabilă parțial de n ori în punctul a (respectiv pe mulțimea A) dacă și numai dacă toate componentele sale f_1, \dots, f_q sunt derivabile parțial de n ori în punctul a (respectiv pe A). În plus, avem că

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_1}} (a) = \left(\frac{\partial^n f_1}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_1}} (a), \dots, \frac{\partial^n f_q}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_1}} (a) \right).$$

De aici rezultă că este suficient să considerăm doar cazul $q=1$.

Varianta teoremei lui **Schwarz** pentru deriveate parțiale de ordinul n este dată de

Teoremă 6.167 (Schwarz) Fie $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă parțial de n ori pe mulțimea A și fie indicii $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, p\}$, iar $\{j_1, \dots, j_k\}$ o permutare arbitrară a numerelor i_1, \dots, i_k , $1 \leq k \leq n$.

Dacă toate deriveatele parțiale de ordinul n sunt continue în punctul $a \in A$, atunci

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}} (a) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \partial x_{j_{k-1}} \dots \partial x_{j_1}} (a)$$

pentru orice $k \in \{2, \dots, n\}$.

Demonstrația se face prin inducție, cu ajutorul teoremei lui **Schwarz** (cazul $k=2$), ținând seama de proprietățile permutărilor.

Vom considera aici doar cazul $k=3$ (analog se procedează în general), caz în care putem presupune fără a micșora generalitatea că $p=3$.

Trebuie demonstrat că

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial x_3 \partial x_2 \partial x_1} (a) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_3 \partial x_1} (a) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_3 \partial x_1 \partial x_2} (a) = \\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_3 \partial x_2} (a) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_3} (a) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} (a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 f}{\partial x_3 \partial x_2 \partial x_2}(a) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_2 \partial x_3}(a) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_3 \partial x_2}(a) \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x_3 \partial x_1 \partial x_1}(a) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_3}(a) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_3 \partial x_1}(a) \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_1}(a) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2}(a) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1}(a) \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_2}(a) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_2 \partial x_1}(a) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_2}(a)\end{aligned}$$

Să arătăm de exemplu că

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_3 \partial x_2 \partial x_1}(a) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}(a)$$

(analog se procedează pentru demonstrația și celorlalte egalități).

Prin aplicarea criteriului lui **Schwarz** (relativ la egalitatea derivatelor parțiale mixte de ordinul doi) obținem

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}(a) &= \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right)(a) = \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right)(a) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_3}(a) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_3} \right)(a) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_3 \partial x_1} \right)(a) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_3 \partial x_1}(a) = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)(a) = \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)(a) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_3 \partial x_2 \partial x_1}(a),\end{aligned}$$

ceea ce trebuia demonstrat. \square

Definiție 6.168. Aplicația $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ se zice că este de clasă C^n pe mulțimea A (unde $n \geq 1$), dacă f este derivabilă parțial de n ori pe A și toate derivatele parțiale de ordinul n sunt continue pe A .

Dacă f este de clasă C^n pe mulțimea A , atunci f se zice că este de clasă C^∞ pe A și notăm $f \in C_A^\infty$. Deci

$$C_A^\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_A^n,$$

unde C_A^n desemnează mulțimea aplicațiilor de clasă C^n pe A .

Din teorema precedentă rezultă că dacă $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este de clasă C^n pe A , atunci operația de derivare parțială (în raport cu variabilele de indici $i_k \in \{1, \dots, p\}$) este asociativă și deci apare posibilitatea utilizării unor notații prescurtate de tipul

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_1}}(a) = \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_p^{\alpha_p}}(a),$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \{1, \dots, p\}$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = n$. Aceasta înseamnă că în

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_p^{\alpha_p}}(a)$$

se derivează în raport cu variabila x_1 de α_1 ori, în raport cu variabila x_2 de α_2 ori și, respectiv, în raport cu variabila x_p de α_p ori. Dacă $\alpha_j = 0$, vom conveni să nu se mai scrie $\partial x_j^{\alpha_j}$. De exemplu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1 \partial x_2}(a) &= \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}(a) \\ \frac{\partial^5 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_2 \partial x_1 \partial x_2}(a) &= \frac{\partial^5 f}{\partial x_1^2 \partial x_2^3}(a). \end{aligned}$$

Dacă notăm cu D_i operația de derivare în raport cu variabila de indice i (unde $i = 1, \dots, p$) și cu

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \circ D_2^{\alpha_2} \circ \dots \circ D_p^{\alpha_p},$$

unde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{N}^p$ (numit și multiindice) și cu

$$D_i^{\alpha_i} = D_i \circ D_i \circ \dots \circ D_i \quad \text{de } \alpha_i \text{ ori, } 1 \leq i \leq p,$$

atunci

$$D^\alpha f(a) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_p^{\alpha_p}}(a), \quad \text{unde } |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_p.$$

Spre exemplu

$$\frac{\partial^5 f}{\partial x_1^2 \partial x_2^3}(a) = D^\alpha f(a) = D^{(2,3)} f(a).$$

6.5.2 Diferențabilitate de ordin superior

Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime deschisă nevidă, punctul $a \in A$ și $n \in \mathbb{N}^*$.

Definiție 6.169. Funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *diferențabilă* (respectiv *diferențabilă în sens Gâteaux*) de n ori în punctul $a \in A$, dacă există o vecinătate $V \subset A$ a punctului $a \in A$ astfel încât f este diferențabilă (respectiv diferențabilă în sens Gâteaux) de $n-1$ ori pe V și toate derivatele parțiale de ordinul $n-1$ sunt diferențiable (respectiv diferențabile în sens Gâteaux) în a .

Procedând prin inducție, se justifică

Remarcă 6.170. Funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă (respectiv diferențiabilă în sens **Gâteaux**) de n ori în punctul $a \in A$ dacă și numai dacă f este diferențiabilă (respectiv diferențiabilă în sens **Gâteaux**) pe o vecinătate $V \subset A$ a lui a și gradientul său $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p} \right)$ este diferențiabil (respectiv diferențiabil în sens **Gâteaux**) de ordinul $n-1$ în punctul a .

Această remarcă sugerează

Definiție 6.171. Fie $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ diferențiabilă (respectiv diferențiabilă în sens **Gâteaux**) de n ori în punctul $a \in A$. Aplicația

$d_a^n f : \mathbb{R}^p \times \dots \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, respectiv $\delta_a^n f : \mathbb{R}^p \times \dots \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$d_a^n f(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n) = \langle d_a^{n-1}(\nabla f)(v_1, \dots, v_{n-1}), v_n \rangle,$$

respectiv prin

$$\delta_a^n f(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n) = \langle \delta_a^{n-1}(\nabla f)(v_1, \dots, v_{n-1}), v_n \rangle$$

se numește diferențiala (respectiv diferențiala **Gâteaux**) de ordinul n a funcției f în punctul a .

Remarcă 6.172. Problema diferențiabilității (respectiv a diferențiabilității în sens **Gâteaux**) de ordinul n a aplicației vectoriale $f = (f_1, \dots, f_q) : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ se tratează analog ca în cazul $n=2$, prin reducere la cazul $q=1$ (cu ajutorul componentelor f_1, \dots, f_q).

Remarcă 6.173. Procedând prin inducție, se arată că dacă $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă de n ori în punctul $a \in A$, atunci $d_a^n f$ este o funcție *n-liniară*, adică liniară în raport cu fiecare dintre cele n argumente ale sale.

Relațiile dintre conceptele de diferențiabilitate de ordin superior sunt puse în evidență de

Propoziție 6.174. Dacă funcția $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă de n ori în punctul $a \in A$, atunci

- f este diferențiabilă în sens **Gâteaux** de n ori în a și $\delta_a^n f = d_a^n f$;
- f este derivabilă parțial de n ori în a și

$$\circ \quad \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}(a) = d_a^n f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}), \quad \forall i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, p\};$$

$$\circ \quad d_a^n f(v_1, \dots, v_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^p v_{i_1}^1 \cdot \dots \cdot v_{i_n}^n \cdot \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}(a),$$

$$\forall v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^p, \quad v_i = (v_1^i, \dots, v_p^i).$$

Demonstrația rezultă din Definițiile 6.169 și 6.171, ținând seama de incluziunile

$$\mathcal{F}_A \subset \mathcal{G}_A \subset \mathcal{D}_A$$

și de faptul că $d_a^n f$ este n -liniară. \square

Un criteriu de diferențiabilitate de ordinul n (analog celor date pentru cazurile $n=1$ și $n=2$) este dat de

Propoziție 6.175. Dacă $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă parțial de n ori pe mulțimea A și toate derivatele parțiale de ordinul n sunt continue în punctul $a \in A$, atunci f este diferențiabilă de n ori în punctul a .

Demonstrația se face prin inducție după n , observând că derivatele parțiale de ordinul n ale funcției f în punctul a sunt tocmai derivatele parțiale de ordinul $n-1$ în a ale gradientului său ∇f .

Deci, conform ipotezei inducției, ∇f este diferențiabilă de $n-1$ ori în punctul a ceea ce, via Remarca 6.170, este echivalent cu faptul că funcția f este diferențiabilă de n ori în a . \square

Varianta *criteriului lui Young pentru diferențiabilitatea de ordinul n* este dată de

Teoremă 6.176 (Young) Fie funcția $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, $k, n \in \mathbb{N}$ cu $k \leq n$, iar mulțimea $\{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k\} \subset \{1, \dots, p\}$ cu proprietatea că j_1, \dots, j_k este o permutare a numerelor i_1, \dots, i_k și $j_1 + \dots + j_k = n$. Dacă f este diferențiabilă de n ori în punctul $a \in A$, atunci

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a) = \frac{\partial^n f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}(a).$$

Demonstrație. Se procedează prin inducție, analog ca în demonstrația criteriului lui **Schwarz** (Teorema 6.167), reducând problema la cazul $k=2$. \square

Ca o primă consecință a teoremei lui **Young** avem

Corolar 6.177. Dacă $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă de n ori în punctul $a \in A$, atunci

$$d_a^n f(v_1, \dots, v_n) = d_a^n f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)})$$

pentru orice $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^p$ și orice permutare $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$, adică $d_a^n f$ este simetrică.

Demonstrația rezultă imediat din Propoziția 6.174 și teorema lui **Young**. \square

În continuare, pentru $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{N}^p$, $v = (v_1, \dots, v_p) \in \mathbb{R}^p$, vom utiliza următoarele notații $\alpha! = \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_p!$, $v^\alpha = v_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot v_p^{\alpha_p}$.

Cu aceste notații demonstrăm

Corolar 6.178. Dacă funcția $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă de n ori în punctul a , atunci

$$d_a^n f(v, \dots, v) = n! \sum_{|\alpha|=n} \frac{1}{\alpha!} \cdot D^\alpha f(a) \cdot v^\alpha, \quad \forall v \in \mathbb{R}^p.$$

Demonstrație. Fie I_n mulțimea acelor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{N}^p$ cu $\alpha_1 + \dots + \alpha_p = n$. Din criteriul lui **Young** rezultă că dacă f este diferențiabilă de n ori în punctul a , atunci numărul derivatelor parțiale de ordinul n egale cu $D^\alpha f(a)$ este egal cu numărul acelor sisteme ordonate (i_1, \dots, i_k) cu $1 \leq i_j \leq p$, $\forall j = 1, \dots, n$ și în care numărul 1 apare de α_1 ori, numărul 2 apare de α_2 ori, ..., numărul p apare de α_p ori. Cum numărul acestor sisteme este

$$\frac{n!}{\alpha!} = \frac{n!}{\alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_p!}$$

cu ajutorul formulei de calcul al lui $d_a^n f$, dată de Propoziția 6.174, se obține egalitatea din enunț. \square

6.5.3 Diferențiabilitate globală de ordin superior

Fie funcția $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, unde mulțimea A este presupusă deschisă.

Definiție 6.179. Funcția f se numește *diferențiabilă* (respectiv diferențiabilă în sens **Gâteaux**) de n ori pe mulțimea A și notăm $f \in \mathcal{F}_A^n$, respectiv $f \in \mathcal{G}_A^n$ dacă f este diferențiabilă (respectiv diferențiabilă în sens **Gâteaux**) de n ori în orice punct $a \in A$.

Remarcă 6.180. Din Propozițiile 6.174 și 6.175 și definiția precedentă rezultă imediat că:

- dacă f este diferențiabilă de n ori pe mulțimea A , atunci f este diferențiabilă în sens **Gâteaux** de n ori pe A ;
 - dacă f este de clasă C^n pe A , atunci f este diferențiabilă de n ori pe A .
- Cu alte cuvinte, au loc incluziunile

$$\mathcal{C}_A^n \subset \mathcal{F}_A^n \subset \mathcal{G}_A^n \subset \mathcal{D}_A^n$$

Să notăm cu

$$\mathcal{C}_A^\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_A^n, \quad \mathcal{F}_A^\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_A^n, \quad \mathcal{G}_A^\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_A^n, \quad \mathcal{D}_A^\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_A^n.$$

Elementele acestor mulțimi se numesc funcții de clasă \mathcal{C}^∞ pe A , funcții indefinit diferențiabile pe A , funcții indefinit diferențiabile în sens **Gâteaux** pe A și, respectiv, funcții indefinit derivabile parțial pe A .

Din cele de mai sus, ținând seama că orice funcție diferențiabilă pe A este continuă pe A , obținem în final că

$$\mathcal{C}_A^\infty \subset \mathcal{F}_A^\infty \subset \mathcal{G}_A^\infty \subset \mathcal{D}_A^\infty,$$

incluziunile fiind stricte. În acest sens prezentăm

Exemplu 6.181 (Funcție discontinuă indefinit derivabilă parțial): Prin inducție se arată că funcția

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x \cdot y \neq 0 \\ 0, & x \cdot y = 0 \end{cases}$$

este indefinit derivabilă parțial pe \mathbb{R}^2 .

Deoarece există sirul $(x_n, x_n)_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ astfel ca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, x_n) = 1 \neq f(0, 0),$$

deducem că f nu are limită în origine, prin urmare este discontinuă în origine.

Remarcă 6.182. Fie $\mathcal{L}_n(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ mulțimea aplicațiilor *n-liniare*

$$F : \mathbb{R}^p \times \dots \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q.$$

Procedând analog ca în demonstrația Propoziției 6.160, se arată că funcția $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este de clasă C^n pe A dacă și numai dacă f este diferențiabilă de n ori pe A și aplicația

$$d^n f : A \rightarrow \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q), \quad (d^n f)(x) = d_x^n f$$

este continuă pe A .

6.5.4 Formule de tip Taylor în \mathbb{R}^p

În continuare vom pune în evidență proprietăți ale funcțiilor diferențiabile de n ori pe o mulțime, scopul principal fiind generalizarea teoremei lui **Taylor** de la cazul funcțiilor reale de argument real.

Fie funcția $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ diferențiabilă de n ori în punctul $a \in A$, unde A este presupusă deschisă. Atunci există $r > 0$ cu $D(a, r) \subset A$.

Definiție 6.183. Funcția polinomială $T_n : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$T_n(v) = f(a) + d_a f(v) + \frac{1}{2!} \cdot d_a^2 f(v, v) + \dots + \frac{1}{n!} \cdot d_a^n f(v, \dots, v)$$

se numește *polinomul Taylor de gradul n asociat funcției f în punctul a*, iar

$$R_n : D(a, r) \rightarrow \mathbb{R}, \quad R_n(v) = f(a + v) - T_n(v)$$

se numește *restul Taylor de ordinul n asociat funcției f în punctul a*.

Se pune problema aproximării valorii $f(a + v)$, pentru $\|v\|$ suficient de mică, prin valoarea $T_n(v)$, adică *problema aproximării locale a unei funcții*.

O egalitate de forma

$$f(a + v) = R_n(v) + T_n(v), \quad v \in D(a, r)$$

cu R_n cunoscut, se numește *formulă de tip Taylor cu restul R_n* .

Remarcă 6.184. Din corolarul 6.178 rezultă

$$T_n(v) = \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{1}{\alpha!} \cdot D^\alpha f(a) \cdot v^\alpha.$$

În continuare ne propunem să determinăm formulele de reprezentare ale restului R_n . Are loc

Teoremă 6.185 (Taylor-Lagrange). Fie A o mulțime deschisă și convexă. Dacă funcția $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă de $n+1$ ori pe A , atunci pentru orice $a \in A$ și $v \in \mathbb{R}^p$ cu $[a + a + v] \subset A$ există punctul $c \in (a, a + v)$ astfel ca

- $R_n(v) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot d_c^{n+1} f(v, \dots, v)$ (restul **Lagrange**);
- $f(a + v) = f(a) + d_a f(v) + \frac{1}{2!} \cdot d_a^2 f(v, v) + \dots + \frac{1}{n!} \cdot d_a^n f(v, \dots, v) + \frac{1}{(n+1)!} \cdot d_c^{n+1} f(v, \dots, v)$ (formula lui **Taylor** cu restul lui **Lagrange**).

Demonstrație. Dacă $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă de $n+1$ ori pe A , atunci pentru orice $v \in \mathbb{R}^p$ fixat, cu $[a, a + v] \subset A$, funcția reală de variabilă reală

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) = f(a + t \cdot v)$$

este derivabilă de $n+1$ ori pe $[0, 1]$ și

$$g^{(k)}(t) = d_{a+t \cdot v}^k f(v, \dots, v), \quad \forall k \in \{1, \dots, n+1\}.$$

Din formula lui **Taylor-Lagrange** aplicată funcției g există un punct $\xi \in (0, 1)$ cu

$$g(1) = g(0) + \frac{1}{1!} \cdot g'(0) + \dots + \frac{1}{n!} \cdot g^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!} \cdot g^{(n+1)}(\xi)$$

care conduce imediat la egalitățile din enunț, cu $c = a + \xi \cdot v \in (a, a + v)$. \square

Corolar 6.186. În ipotezele teoremei precedente, formula lui **Taylor** cu restul **Lagrange** se reprezintă și prin

$$f(a+v) = \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{1}{\alpha!} \cdot D^\alpha f(a) \cdot v^\alpha + \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{1}{\alpha!} \cdot D^\alpha f(c) \cdot v^\alpha.$$

Demonstrația rezultă imediat din teorema precedentă și Remarca 6.184. \square

Ca și în cazul $p=1$, are loc următoarea proprietate a restului **Taylor**.

Corolar 6.187. Dacă $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este de clasă C^n pe mulțimea convexă și deschisă A , atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n(v)}{\|v\|^n} = 0.$$

Demonstrație. Din formula lui **Taylor-Lagrange** rezultă că pentru orice $v \in \mathbb{R}^p$ cu $[a, a+v] \subset A$ există punctul $c \in (a, a+v)$ cu proprietatea

$$f(a+v) = T_{n-1}(v) + \sum_{|\alpha|=n} \frac{1}{\alpha!} \cdot D^\alpha f(c) \cdot v^\alpha = T_n(v) + \sum_{|\alpha|=n} \frac{1}{\alpha!} \cdot (D^\alpha f(c) - D^\alpha f(a)) \cdot v^\alpha,$$

de unde rezultă că

$$\begin{aligned} \frac{R_n(v)}{\|v\|^n} &= \frac{|f(a+v) - T_{n-1}(v)|}{\|v\|^n} \leq \sum_{|\alpha|=n} \frac{|D^\alpha f(c) - D^\alpha f(a)|}{\alpha!} \cdot \frac{|v_1^{\alpha_1}| \cdot \dots \cdot |v_p^{\alpha_p}|}{\|v\|^n} \leq \\ &\leq \sum_{|\alpha|=n} \frac{|D^\alpha f(c) - D^\alpha f(a)|}{\alpha!}. \end{aligned}$$

Ținând seama de continuitatea funcției $D^\alpha f$ în punctul a și trecând la limită pentru $v \rightarrow a$ (ceea ce implică $c \rightarrow a$), se obține proprietatea din enunț. \square

Cu ajutorul proprietății restului **Taylor** pusă în evidență de corolarul precedent demonstrăm o nouă formulă de tip **Taylor** datorată lui **Young**¹³:

Teoremă 6.188 (Taylor-Young). Dacă funcția $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este de clasă C^n pe mulțimea convexă și deschisă A , atunci pentru orice punct $a \in A$ există $r > 0$ și o funcție $\omega_n: D(0, r) \rightarrow \mathbb{R}$ continuă și nulă în origine astfel ca:

- $R_n(v) = \omega_n(v) \cdot \|v\|^n$, (restul lui **Young**);
 - $f(a+v) = f(a) + d_a f(v) + \frac{1}{2!} \cdot d_a^2 f(v, v) + \dots + \frac{1}{n!} \cdot d_a^n f(v, \dots, v) + \omega_n(v) \cdot \|v\|^n$,
- (formula lui **Taylor-Young**) pentru orice $v \in D(0, r)$.

¹³ John W. Young, matematician englez, 1879-1932

Demonstrație. Din corolarul precedent rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $r > 0$ cu $D(a, r) \subset A$ și $|R_n(v)| < \varepsilon \cdot \|v\|^n$ pentru orice $v \in D(0, r)$. Atunci funcția

$$\omega_n : D(0, r) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega_n(v) = \begin{cases} \frac{R_n(v)}{\|v\|^n}, & v \neq 0 \\ 0, & v = 0 \end{cases}$$

este continuă și nulă în origine cu $R_n(v) = \omega_n(v) \cdot \|v\|^n$.

Prin înlocuirea lui $R_n(v) = \omega_n(v) \cdot \|v\|^n$ în $f(a + v) = T_n(v) + R_n(v)$ se obține formula lui **Taylor-Young**. \square

O altă formulă de tip **Taylor**:

Teoremă 6.189. Dacă funcția $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este de clasă C^{n+1} , $n \in \mathbb{N}$ pe mulțimea deschisă și convexă A , $a \in A$ și $v \in \mathbb{R}^p$ cu $[a, a + v] \subset A$, atunci

$$f(a + v) = T_n(v) + \frac{1}{n!} \cdot \int_0^1 (1-t)^n \cdot d_{a+t \cdot v}^{n+1} f(v, \dots, v, v) dt$$

(formula **Taylor** cu restul integral).

Demonstrație. Dacă f este de clasă C^{n+1} pe mulțimea A și $v \in \mathbb{R}^p$ cu $[a, a + v] \subset A$, atunci funcția

$$F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(t) = f(a + t \cdot v)$$

este de clasă C^{n+1} pe $[0, 1]$ cu

$$F^{(k)}(t) = d_{a+t \cdot v}^k f(v, \dots, v), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Din egalitatea

$$[F^{(1)}(t) + (1-t) \cdot F^{(2)}(t) + \dots + (1-t)^n \cdot F^{(n)}(t)]^{(1)} = (1-t)^n \cdot F^{(n+1)}(t), \quad \forall t \in [0, 1]$$

prin integrare pe $[0, 1]$ se obține

$$F(1) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot F^{(k)}(0) + \frac{1}{n!} \cdot \int_0^1 (1-t)^n \cdot F^{(n+1)}(t) dt$$

de unde egalitatea din enunț. \square

6.5.5 Condiții suficiente pentru extrem

Ca și în cazul $p=1$ (al funcțiilor reale de variabilă reală) cu ajutorul formulelor de tip **Taylor** se pot obține *caracterizări* ale funcțiilor convexe de clasă C^2 , precum și *condiții necesare și suficiente* pentru ca un punct să fie de extrem local pentru o funcție de clasă C^2 .

În acest scop convenim că dacă aplicația biliniară (și simetrică) $d_a^2 f$ are proprietatea

$$d_a^2 f(v, v) \geq 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^p, \text{ respectiv } d_a^2 f(v, v) > 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^p - \{0\}$$

sau echivalent

$d_a^2 f(u, u) \geq 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}^p, \|u\| = 1$, respectiv $d_a^2 f(u, u) > 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}^p, \|u\| = 1$, atunci vom nota

$$d_a^2 f \geq 0, \text{ respectiv } d_a^2 f > 0$$

și spunem că $d_a^2 f$ este *nenegativă*, respectiv *pozitivă definită*.

În mod similar se definesc relațiile

$$d_a^2 f \leq 0, \text{ respectiv } d_a^2 f < 0,$$

spunând că $d_a^2 f$ este *nepozitivă*, respectiv *negativă definită*.

Dacă există $u, v \in \mathbb{R}^p$ cu proprietatea

$$d_a^2 f(u, u) > 0, \quad d_a^2 f(v, v) < 0,$$

atunci se zice că $d_a^2 f$ este *nedefinită*.

6.5.5.1 Extrem necondiționat

Remarca 6.190. Dacă $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențialabilă de două ori în punctul $a \in A$, atunci $d_a^2 f > 0$, respectiv $d_a^2 f < 0$ dacă și numai dacă forma pătratică

$$H_f^a(v) = d_a^2 f(v, v) = \sum_{i,j=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot v_i \cdot v_j,$$

numită și *hessiană*¹⁴ funcției f în punctul a , este pozitiv, respectiv negativ definită.

Aplicând criteriul lui **Sylvester**¹⁵ din algebra liniară pentru forma pătratică H_f^a , se obține că

$$d_a^2 f > 0 \Leftrightarrow \Delta_f^1(a) > 0, \quad \Delta_f^2(a) > 0, \dots, \quad \Delta_f^p(a) > 0,$$

respectiv

$$d_a^2 f < 0 \Leftrightarrow \Delta_f^1(a) < 0, \quad \Delta_f^2(a) > 0, \dots, \quad (-1)^p \cdot \Delta_f^p(a) > 0,$$

unde

$$\Delta_f^k(a) = \det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j=1,\dots,k}, \quad k = 1, \dots, p.$$

¹⁴ Ludwig Otto Hesse, matematician german, 1811-1874

¹⁵ James Joseph Sylvester, matematician englez, 1814-1897

Corolar 6.191. Fie $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^2 pe mulțimea deschisă și convexă A . Atunci f este convexă pe A dacă și numai dacă

$$d_a^2 f \geq 0, \quad \forall a \in A.$$

Demonstrație. Necesitatea. Dacă f este o funcție convexă de clasă C^2 pe A , atunci din Teorema de caracterizare a convexității funcțiilor diferențiable rezultă că

$$f(a+v) \geq f(a) + d_a f(v), \quad \forall v \in \mathbb{R}^p$$

cu $a+v \in A$.

Din corolarul precedent obținem că există $r > 0$ cu $D(a, r) \subset A$ și o funcție $\omega_2: D(0, r) \rightarrow \mathbb{R}$ continuă și nulă în origine astfel ca

$$f(a+v) = f(a) + d_a f(v) + \frac{1}{2!} \cdot d_a^2 f(v, v) + \omega_2(v) \cdot \|v\|^2.$$

Deci

$$\frac{1}{2!} \cdot d_a^2 f(v, v) + \omega_2(v) \cdot \|v\|^2 \geq 0, \quad \forall v \in D(0, r).$$

În particular, pentru $v = t \cdot u$, $t \in (0, r)$, $\|u\| = 1$, obținem (ținând seama că $d_a^2 f$ este biliniară)

$$d_a^2 f(u, u) + 2 \cdot \omega_2(t \cdot u) \geq 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}^p, \|u\| = 1, \quad \forall t \in (0, 1),$$

de unde trecând la limită pentru $t \rightarrow 0$, ținând seama de continuitatea în origine a funcției ω_2 , rezultă

$$d_a^2 f(u, u) \geq 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}^p, \|u\| = 1$$

și deci $d_a^2 f$.

Suficiență. Din formula **Taylor-Lagrange** rezultă că pentru orice $a, x \in A$ există punctul $c \in (a, a+x)$ cu

$$f(x) = f(a) + d_a f(x-a) + \frac{1}{2!} \cdot d_c^2 f(x-a, a-x),$$

de unde rezultă că dacă $d_a^2 f > 0$ pentru orice $a \in A$, atunci

$$f(x) - f(a) - d_a f(x-a) \geq 0, \quad \forall a, x \in A.$$

Din Teorema de caracterizare a convexității funcțiilor diferențiable rezultă că f este convexă pe A . \square

Cu ajutorul formulei **Taylor-Young** se demonstrează o condiție necesară pentru ca un punct a să fie punct de extrem local pentru o funcție de clasă C^2 .

Corolar 6.192. Dacă $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este de clasă C^2 pe mulțimea deschisă și convexă A , iar $a \in A$ este un punct de minim (respectiv de maxim) local pentru funcția f , atunci

$$d_a^2 f \geq 0 \text{ (respectiv } d_a^2 f \leq 0\text{).}$$

Demonstrație. Să presupunem, de exemplu, că a este un punct de minim local pentru f , cu alte cuvinte că există $r > 0$ cu

$$f(a+v) - f(a) \geq 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^p, \quad \|v\| < r.$$

De aici și din formula lui **Taylor-Young** pentru $n = 2$ (ținând seama că $d_a f = 0$, conform teoremei lui **Fermat**) rezultă că există $r > 0$ și o funcție $\omega_2 : D(0, r) \rightarrow \mathbb{R}$ continuă și nulă în origine astfel ca

$$0 \leq f(a+v) - f(a) = \frac{1}{2!} \cdot d_a^2 f(v, v) + \|v\|^2 \cdot \omega_2(v), \quad \forall v \in D(0, r).$$

Procedând analog ca în demonstrația corolarului precedent, se obține că $d_a^2 f \geq 0$. \square

Remarcă 6.193. Condiția necesară de extrem local pusă în evidență de corolarul precedent nu este și suficientă.

De exemplu, funcția

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x - y$$

are proprietatea că punctul $a = (0, 0)$ nu este punct de extrem local deși $d_a f = 0$ și $d_a^2 f = 0$.

Mai mult, observăm că dacă $d_a f = 0$ și $d_a^2 f = 0$ și f este de clasă C^m , $m > 2$, este necesar să folosim termeni de ordin superior în formula lui **Taylor** pentru a studia semnul diferenței

$$f(a+v) - f(a), \quad \forall v \in \mathbb{R}^p, \quad \|v\| < r.$$

De exemplu, funcția

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^4 + y^4$$

are proprietatea că punctul $a = (0, 0)$ este punct de minim local (chiar global), deși $d_a f = 0$ și $d_a^2 f = 0$. În adevăr $d_a^3 f = 0$ și diferențiala

$$d_a^4 f(x, y) = 24 \cdot \left[(dx)^4 + (dy)^4 \right] \geq 0,$$

prin urmare $a = (0, 0)$ este punct de minim local pentru funcția f .

Remarcă 6.194. Dacă $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este de clasă C^2 pe mulțimea deschisă și convexă A , atunci funcția (*hessiană* lui f în punctul a)

$$H_f^a : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}, \quad H_f^a(v) = d_a^2 f(v, v) = v^T \cdot H \cdot v,$$

unde

$$H \in M_p(\mathbb{R}), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = h_{ij}, \quad i, j = 1 : p$$

este continuă.

Remarcă 6.195. Dacă $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este de clasă C^2 pe mulțimea deschisă și convexă A , atunci $d_a^2 f > 0$ dacă și numai dacă există numărul $m > 0$ astfel ca

$$d_a^2 f(v, v) \geq m \cdot \|v\|^2$$

pentru orice $v \in \mathbb{R}^p$.

Demonstrație. Din continuitatea lui H_f^a pe mulțimea compactă $K = \{v \in \mathbb{R}^p \mid \|v\| = 1\}$ rezultă că există punctul $v_0 \in K$ cu $H_f^a(v_0) = \inf_{v \in K} H_f^a(v)$.

Dacă presupunem în plus că $d_a^2 f > 0$, atunci $m = H_a^2(v_0) > 0$ și deci

$$d_a^2 f(v, v) = \|v\|^2 \cdot d_a^2 f\left(\frac{v}{\|v\|}, \frac{v}{\|v\|}\right) = \|v\|^2 \cdot H_f^a\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \geq m \cdot \|v\|^2$$

pentru orice $v \in \mathbb{R}^p$, $v \neq 0$. Evident, inegalitatea are loc și pentru $v = 0$.

Reciproc, dacă există $m > 0$ cu

$$d_a^2 f(v, v) \geq m \cdot \|v\|^2$$

pentru orice $v \in \mathbb{R}^p$, atunci $d_a^2 f > 0$. \square

De aici, rezultă că dacă $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este de clasă C^2 pe mulțimea deschisă și convexă A , atunci $d_a^2 f < 0$ dacă și numai dacă există numărul $m > 0$ astfel ca

$$d_a^2 f(v, v) \leq -m \cdot \|v\|^2$$

pentru orice $v \in \mathbb{R}^p$.

Corolar 6.196. Fie funcția $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^2 pe mulțimea deschisă și convexă A , $a \in A$ cu $d_a f = 0$.

- (i) Dacă $d_a^2 f > 0$ (respectiv $d_a^2 f < 0$), atunci a este punct de minim (respectiv maxim) local strict pentru f .
- (ii) Dacă $d_a^2 f$ este nedefinită, atunci a nu este punct de extrem local pentru f .

Demonstrație

- (i) Din formula **Taylor-Young** există $r_1 > 0$ cu $D(a, r_1) \subset A$ și o funcție $\omega_2 : D(0, r_1) \rightarrow \mathbb{R}$ continuă și nulă în origine astfel ca

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{2!} \cdot d_a^2 f(x-a, x-a) + \|x-a\|^2 \cdot \omega_2(x-a), \quad \forall x \in A.$$

Din continuitatea funcției $\omega_2 : D(0, r_1) \rightarrow \mathbb{R}$ în origine rezultă că există numărul $r \in (0, r_1)$ astfel încât

$$\omega_2(x-a) < \frac{m}{3}, \quad \forall x \in D(a, r) \subset A,$$

unde $m = \inf_{\|v\|=1} H_f^a(v)$, care împreună cu egalitatea precedentă conduce la

$$f(x) - f(a) \geq \frac{m}{2} \cdot \|x-a\|^2 - \frac{m}{3} \cdot \|x-a\|^2 = \frac{m}{6} \cdot \|x-a\|^2 > 0, \quad \forall x \in D(a, r), x \neq a,$$

adică a este punct de minim local stric pentru f .

(ii) Dacă $d_a^2 f$ este nedefinită, atunci există punctele $u, v \in \mathbb{R}^p$, $\|u\|=\|v\|=1$ și $\alpha=d_a^2 f(u, u)>0>d_a^2 f(v, v)=\beta$. Procedând analog ca mai sus, din formula lui **Taylor-Young** există $r>0$ cu $D(a, r) \subset A$ și o funcție $\omega_2 : D(0, r) \rightarrow \mathbb{R}$ continuă și nulă în origine cu

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2!} \cdot d_a^2 f(x-a, x-a) + \|x-a\|^2 \cdot \omega_2(x-a), \quad \forall x \in A$$

și

$$|\omega_2(v)| < \max \left\{ \frac{\alpha}{3}, \frac{-\beta}{3} \right\}, \quad \forall v \in D(0, r).$$

Fie $V \subset A$ o vecinătate a lui a . Atunci există numărul $t \in (0, r)$ încât $x = a + t \cdot u$, iar din inegalitatea precedentă (ținând seama că $d_a^2 f$ este biliniară) obținem

$$f(x) - f(a) = \frac{t^2}{2!} \cdot \alpha + t^2 \cdot \omega_2(t \cdot u) > t^2 \cdot \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{3} \right) = t^2 \cdot \frac{\alpha}{6} > 0.$$

Analog, se arată că există $s \in (0, r)$ încât $y = a + s \cdot v \in V$ și

$$f(x) - f(a) = \frac{s^2}{2!} \cdot \alpha + s^2 \cdot \omega_2(s \cdot u) < s^2 \cdot \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\beta}{3} \right) = s^2 \cdot \frac{\beta}{6} < 0.$$

În concluzie, în orice vecinătate $V \subset A$ a lui a există punctele $x, y \in V$ astfel ca $f(x) > f(a) > f(y)$. Deci, a nu este punct de extrem local pentru f , deși este punct critic pentru f . \square

Cu ajutorul notațiilor din Remarca 6.190 obținem

Corolar 6.197 (Sylvester). Fie funcția $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^2 pe mulțimea deschisă și convexă A , $a \in A$ cu

- $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p;$
- $\Delta_f^1(a) > 0, \quad \Delta_f^2(a) > 0, \dots, \quad \Delta_f^p(a) > 0,$
- $\left(\Delta_f^1(a) < 0, \Delta_f^2(a) > 0, \dots, (-1)^p \cdot \Delta_f^p(a) > 0 \right),$

atunci a este un punct de minim (respectiv maxim) local strict pentru f .

Demonstrația este evidentă din corolarul precedent și Remarca 6.190.

În cazul particular $p = 2$, utilizând notațiile lui **Monge**¹⁶

$$p_a = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \quad q_a = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \quad r_a = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a), \quad s_a = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a), \quad t_a = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a)$$

are loc

Corolar 6.198 (Monge). Fie funcția $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^2 pe mulțimea deschisă și convexă A , $a \in A$ cu $p_a = q_a = 0$.

- (i) Dacă $s_a^2 - r_a \cdot t_a < 0$, atunci a este punct de extrem local pentru f , și anume:
 - dacă $r_a > 0$, atunci a este punct de minim local strict pentru f ;
 - dacă $r_a < 0$, atunci a este punct de maxim local strict pentru f .
- (ii) Dacă $s_a^2 - r_a \cdot t_a > 0$, atunci a nu este punct de extrem local pentru f .

Demonstrație. În acest caz particular avem că

$$\Delta_f^1(a) > r_a, \quad \Delta_f^2(a) = r_a \cdot t_a - s_a^2.$$

Din corolarul 6.190 rezultă imediat afirmațiile de la (i).

Dacă $s_a^2 - r_a \cdot t_a > 0$, atunci ținând seama că

$$d_a^2 f(v, v) = r_a \cdot v_1^2 + 2 \cdot s_a \cdot v_1 \cdot v_2 + t_a \cdot v_2^2$$

este nedefinită, atunci din Corolarul 6.196 rezultă că punctul a nu este punct de extrem pentru f . \square

Remarcă 6.199. Dacă $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este de clasă C^2 pe mulțimea deschisă A , atunci funcția (*hessiană*) lui f în punctul a)

$$H_f^a : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}, \quad H_f^a(v) = d_a^2 f(v, v) = v^T \cdot H \cdot v, \quad H \in M_p(\mathbb{R})$$

este

- pozitiv definită, dacă cea mai mică valoare proprie a lui H este pozitivă sau echivalent matricea H are toate valorile proprii pozitive;
- negativ definită, dacă cea mai mare valoare proprie a lui H este negativă sau echivalent matricea H are toate valorile proprii negative.

6.5.5.2 Extrem condiționat

Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ și $B \subset \mathbb{R}^q$ mulțimi deschise (nevide) și $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^2 pe $A \times B$ și mulțimea $S \subset A \times B$ cu S nevidă.

¹⁶ Gaspard Monge, matematician francez, 1746-1818

În continuare vom pune în evidență **condiții suficiente** pentru ca un *punct critic condiționat* $s = (a, b) \in S$ relativ la S pentru funcția f să fie *punct de extrem condiționat* al funcției f relativ la S .

Ca și mai înainte vom considera submulțimi $S \subset A \times B$ de forma

$$S = \{(x, y) \in A \times B \mid F(x, y) = 0\},$$

unde $F = (F_1, \dots, F_q) : A \times B \rightarrow \mathbb{R}^q$ este o aplicație de clasă C^1 pe $A \times B$ cu

$$J_F^y(x, y) = \frac{D(F_1, \dots, F_q)}{D(y_1, \dots, y_q)}(x, y) \neq 0,$$

pentru orice $x = (x_1, \dots, x_p)$, $y = (y_1, \dots, y_q)$ cu $(x, y) \in S$.

Fie $s = (a, b) \in S$ un punct critic condiționat relativ la S pentru funcția f , adică punctul (s, λ_0) este un punct critic pentru funcția lui **Lagrange**

$$L : A \times B \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \langle \lambda, F(x, y) \rangle.$$

Pentru caracterizarea acestui punct este normal să studiem semnul diferenței

$$f(x, y) - f(a, b)$$

pentru toate punctele $(x, y) \in S$. Este clar că a cerceta semnul diferenței de mai sus este echivalent cu a cerceta semnul diferenței

$$L(x, y, \lambda) - L(a, b, \lambda_0)$$

pentru toate punctele $(x, y) \in S$, întrucât

$$f(x, y) - f(a, b) = L(x, y, \lambda) - L(a, b, \lambda_0), \forall (x, y) \in S.$$

Aplicând formula lui **Taylor-Lagrange** funcției L cu restul de ordinul 2 și ținând seama că $d_{(a, b, \lambda_0)}^2 L = 0$, obținem

$$\begin{aligned} L(x, y, \lambda) - L(a, b, \lambda_0) &= \frac{1}{2} \cdot d_{(\xi, \zeta, \tau)}^2 L(x - a, y - b, \lambda - \lambda_0) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot d_{(a, b, \lambda_0)}^2 L(x - a, y - b, \lambda - \lambda_0) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \left[d_{(\xi, \zeta, \tau)}^2 L(x - a, y - b, \lambda - \lambda_0) - \frac{1}{2} \cdot d_{(a, b, \lambda_0)}^2 L(x - a, y - b, \lambda - \lambda_0) \right] \end{aligned}$$

Raționând la fel ca în demonstrația corolarului 6.196, se constată că semnul diferenței $L(x, y, \lambda) - L(a, b, \lambda_0)$ este dat de semnul formei pătratice $d_{(a, b, \lambda_0)}^2 L$.

Deoarece variabilele $(x, y) \in S$ deducem că ele nu sunt independente, prin urmare nici diferențialele dx_k, dy_j , $k = 1 : p$, $j = 1 : q$ nu sunt independente.

Calculăm, în punctul critic (a,b) , diferențialele sistemului de relații $F(x,y)=0$, obținem

$$\sum_{k=1}^p \frac{\partial F_j}{\partial x_k}(a,b)dx_k + \sum_{i=1}^q \frac{\partial F_j}{\partial y_i}(a,b)dy_i = 0, \quad j=1:q.$$

Cum determinantul sistemului

$$J_F^y(x,y) = \frac{D(F_1, \dots, F_q)}{D(y_1, \dots, y_q)}(x,y) \neq 0, \quad \forall (x,y) \in S,$$

utilizând regula lui **Cramer** putem determina $dy_i, i=1:q$ în funcție de $dx_k, k=1:p$ care înlocuiți în $d_{(a,b,\lambda_0)}^2 L(x-a, y-b, \lambda-\lambda_0)$ ne vor conduce la forma pătratică

$$d_{(a,b,\lambda_0)}^2 L = \sum_{1 \leq i, j \leq p} a_{ij} \cdot dx_i dx_j.$$

Stabilim semnul formei pătratice fie folosind corolarul 6.197, fie remarcă 6.199, astfel dacă

- $d_{(a,b,\lambda_0)}^2 L > 0$, punctul s este punct de minim condiționat relativ la S pentru funcția f ;
- $d_{(a,b,\lambda_0)}^2 L < 0$, punctul s este punct de maxim condiționat relativ la S pentru funcția f .

Exemplu: Vom determina punctele de extrem local ale funcției f relativ la submulțimea S , unde

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$$

și

$$S = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in [1, \infty)^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8, 2 \right\}.$$

Funcția lui **Lagrange** asociată acestei probleme de extrem condiționat este $L: [1, \infty)^4 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda) = f(x_1, x_2, x_3, x_4) - \lambda \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 8, 2),$$

iar sistemul punctelor sale staționare

$$\begin{cases} 1 + x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 - \lambda = 0 \\ x_1 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 - \lambda = 0 \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 - \lambda = 0 \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 - \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8, 2 \end{cases}$$

Prin operații algebrice simple se obține

$$\frac{1}{x_1 - x_2} = \frac{x_2}{x_2 - x_3} = \frac{1 + x_2}{x_1 - x_3}, \quad x_4 = x_3 - 1,$$

care conduce la următoarea ecuație polinomială

$$4 \cdot z^4 - 9,2 \cdot z^3 + 6 \cdot z^2 - 8,2 \cdot z + 2 = 0, \quad z := x_3 \geq 1,$$

care are o singură soluție admisibilă $z = 2$. Prin urmare, funcția lui **Lagrange** are un singur punct critic $(x_1^c, x_2^c, x_3^c, x_4^c, \lambda^c) = \left(\frac{27}{10}, \frac{5}{2}, 2, 1, \frac{27}{2}\right)$.

Analizăm natura acestui punct critic. Pentru aceasta este normal să studiem semnul diferenței

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) - f(x_1^c, x_2^c, x_3^c, x_4^c) = f(x_1, x_2, x_3, x_4) - f\left(\frac{27}{10}, \frac{5}{2}, 2, 1\right)$$

pentru toate punctele $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S$. Este clar că a cerceta semnul diferenței de mai sus este echivalent cu a cerceta semnul diferenței

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda) - L(x_1^c, x_2^c, x_3^c, x_4^c, \lambda^c) = L(x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda) - L\left(\frac{27}{10}, \frac{5}{2}, 2, 1, \frac{27}{2}\right)$$

pentru toate punctele $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S$, întrucât pentru orice $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) - f(x_1^c, x_2^c, x_3^c, x_4^c) = L(x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda) - L(x_1^c, x_2^c, x_3^c, x_4^c, \lambda^c).$$

Calculăm diferențiala de ordinul doi a lui L în punctul critic $a := (x_1^c, x_2^c, x_3^c, x_4^c, \lambda^c)$.

$$\begin{aligned} d_a^2 L(x, \lambda) &= 2(1 + x_3^c + x_3^c \cdot x_4^c) dx_1 dx_2 + 2x_2^c \cdot x_4^c dx_1 dx_3 + 2x_2^c \cdot x_3^c dx_1 dx_4 + \\ &+ 2(x_1^c + x_1^c \cdot x_4^c) dx_2 dx_3 + 2x_1^c \cdot x_3^c dx_2 dx_4 + 2x_1^c \cdot x_2^c dx_3 dx_4 - 2(dx_1 + dx_2 + dx_3 + dx_4) d\lambda \end{aligned}$$

Deoarece variabilele $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S$, deducem că ele nu sunt independente, prin urmare nici diferențialele dx_k , $k = 1 : 4$ nu sunt independente.

Calculând, în punctul critic, diferențiala relației de legătură, obținem

$$dx_1 + dx_2 + dx_3 + dx_4 = 0.$$

Înlocuind în forma pătratică $d_a^2 L(x, \lambda)$ obținem

$$\begin{aligned} d_a^2 L(x, \lambda) &= -10 \cdot (dx_2)^2 - 4,2 \cdot dx_2 dx_3 - 9,2 \cdot dx_2 dx_4 - \\ &- 5 \cdot (dx_3)^2 - 1,5 \cdot dx_3 dx_4 - 10 \cdot (dx_4)^2 \end{aligned}$$

a cărei matrice asociată bazei canonice este

$$H = \begin{pmatrix} -10 & -2,1 & -4,6 \\ -2,1 & -5 & -0,75 \\ -4,6 & -0,75 & -10 \end{pmatrix}.$$

➤ Stabilim natura punctului critic folosind corolarul 6.197, dar pentru acest lucru calculăm determinanții lui **Sylverster**

$$\Delta_f^1(a) = -10, \quad \Delta_f^2(a) = \begin{vmatrix} -10 & -2,1 \\ -2,1 & -5 \end{vmatrix} = 45,59$$

$$\Delta_f^3(a) = \det \begin{pmatrix} -10 & -2,1 & -4,6 \\ -2,1 & -5 & -0,75 \\ -4,6 & -0,75 & -10 \end{pmatrix} = -358,965$$

adică punctul a este de maxim condiționat pentru funcția f .

➤ Putem stabili natura punctului critic folosind remarcă 6.199, dar pentru acest lucru calculăm valorile proprii ale matricei H . Acestea formează *spectrul* matricei H , adică mulțimea $\text{sp}H = \{-15,010; -6,013; -3,977\}$. Este clar că primul criteriu este mai *convenabil*, deoarece nu întotdeauna putem determina toate valorile proprii ale matricei H . Cum toate valorile proprii ale matricei H sunt negative deducem că $d_a^2 f < 0$, adică punctul a este de maxim condiționat pentru f . Astfel putem afirma că există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(a)$ astfel ca

$$f(x) \leq f(a) = 36,45, \quad \forall x \in V \cap C.$$

6.5.5.3 Extrem necondiționat al unei funcții implice

Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ și $B \subset \mathbb{R}$ mulțimi deschise (nevide) și aplicația $F: A \times B \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^2 pe $A \times B$ și $a \in A, b \in B$ astfel ca $F(a, b) = 0$ și $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$. Atunci cunoaștem că există o vecinătate deschisă $U \subset A$ a punctului a , o vecinătate deschisă $V \subset B$ a punctului b și o funcție unică $f: U \subset A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow V \subset B \subset \mathbb{R}$ cu proprietățile:

- (i) f este de clasă C^2 pe U ;
- (ii) $f(a) = b$;
- (iii) $F(x, f(x)) = 0$ pentru orice $x \in U$.

Deoarece $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x_i}}(x, f(x))$ pentru orice $x \in U$ și $i = 1, \dots, p$,

punctele critice $x^c \in U$ ale funcției implice $y = f(x)$ sunt soluții ale sistemului

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x, f(x)) = 0, & i=1:p \\ F(x, f(x)) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \neq 0. \end{cases}$$

Semnul diferențialei de ordinul doi a funcției implicate $y=f(x)$ în punctul $x^c \in U$ stabilește natura punctului critic. Astfel

- (i) dacă $d_{x^c}^2 f > 0$ (respectiv $d_{x^c}^2 f < 0$), atunci $x^c \in U$ este punct de minim (respectiv maxim) local strict pentru funcția implicită f ;
- (ii) dacă $d_{x^c}^2 f$ este *nedefinită*, atunci $x^c \in U$ nu este punct de extrem local pentru f .

Exemplu: Vom determina punctele de extrem condiționat ale funcției $z=f(x,y)$ definite implicit de ecuația

$$F(x, y, z) = z^2 - 4 \cdot z - 3 + x \cdot y + \frac{1}{2} \cdot x^2 + y^2 - 2y = 0$$

și de condiția $z(2,1)=4$. Constatăm că sunt îndeplinite ipotezele teoremei funcțiilor implicate, și anume:

- $F(2,1,4) = 0$,
- $F \in C^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$, fiind polinomială;
- $\frac{\partial F}{\partial z}(2,1,4) = 4 \neq 0$.

Prin urmare, există o vecinătate deschisă $U \subset A$ a punctului $(2,1)$, o vecinătate deschisă $V \subset B$ a punctului 4 și o funcție unică $f : U \subset A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow V \subset B \subset \mathbb{R}$ cu proprietățile:

- (i) f este de clasă C^2 pe U ;
- (ii) $f(2,1) = 4$;
- (iii) $F(x, y, f(x, y)) = 0$ pentru orice $(x, y) \in U$.

Punctul critic al funcției implicate f este soluție a următorului sistem

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = y + x = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = x + 2y - 2 = 0, \\ F(x, y, z) = z^2 - 4 \cdot z - 3 + x \cdot y + \frac{1}{2} \cdot x^2 + y^2 - 2y = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 2z - 4 \neq 0. \end{cases}$$

Soluțiile acestui sistem sunt $(-2, 2, 5)$ și $(-2, 2, -1)$. Dintre acestea numai $(-2, 2, 5)$ este în concordanță cu ipoteza $z(2,1)=4$. Astfel punctul critic al funcției implicate este punctul $(x^c, y^c) = (-2, 2)$. Calculând derivatele partiale de ordinul doi ale funcției implicate f , în punctul critic, obținem

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^c, y^c) = \frac{1}{4 - 2 \cdot f(x^c, y^c)} = -\frac{1}{6} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^c, y^c) = \frac{1}{4 - 2 \cdot f(x^c, y^c)} = -\frac{1}{6} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^c, y^c) = \frac{1}{2 - f(x^c, y^c)} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

iar matricea H asociată bazei canonice și *hessianei* lui f în punctul critic este

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

matrice care are toate valorile proprii strict negative, prin urmare $d_{(x^c, y^c)}^2 f < 0$,

adică punctul $(x^c, y^c) = (-2, 2)$ este punct de maxim local pentru funcția implicită f și $f_{\max} = f(x^c, y^c) = 5$.

6.5.5.4 Extrem condiționat al unei funcții implicate

Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ și $B \subset \mathbb{R}^q$ mulțimi deschise (nevide) și aplicația $F: A \times B \times C \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^2 pe $A \times B \times C$ și $a \in A, b \in B, c \in C$ astfel ca $F(a, b, c) = 0$ și $\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) \neq 0$. Atunci cunoaștem că există o vecinătate deschisă $U \subset A \times B$ a punctului (a, b) , o vecinătate deschisă $V \subset C$ a punctului c și o funcție unică $f: U \subset A \times B \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow V \subset B \subset \mathbb{R}$ cu proprietățile:

- (i) f este de clasă C^2 pe U ;
- (ii) $f(a, b) = c$;
- (iii) $F(x, y, f(x, y)) = 0$ pentru orice $(x, y) \in U$.

Vom considera submulțimi $S \subset A \times B$ de forma

$$S = \{(x, y) \in A \times B \mid G(x, y) = 0\},$$

unde $G = (G_1, \dots, G_q) : A \times B \rightarrow \mathbb{R}^q$ este o aplicație de clasă C^2 pe $A \times B$ cu

$$J_G^y(x, y) = \frac{D(G_1, \dots, G_q)}{D(y_1, \dots, y_q)}(x, y) \neq 0,$$

pentru orice $x = (x_1, \dots, x_p)$, $y = (y_1, \dots, y_q)$ cu $(x, y) \in S$.

Definiție. Un punct $s = (a, b) \in S$ se numește *punct de extrem local relativ la mulțimea S pentru funcția implicită f* , dacă s este un punct de extrem local pentru restricția lui f la S .

Fie $s = (x^c, y^c) \in S$ un punct critic condiționat relativ la S pentru funcția implicită f , adică punctul (s, λ_0) este un punct critic pentru funcția lui **Lagrange**

$$L : A \times B \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \langle \lambda, G(x, y) \rangle.$$

Din teorema funcțiilor implicate se cunoaște că

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial z}}(x, y, f(x, y)), & i = 1 : p \\ \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y_j}}{\frac{\partial F}{\partial z}}(x, y, f(x, y)), & j = 1 : q \end{cases}$$

pentru orice $(x, y) \in U$. Punctele critice $(x^c, y^c) \in U$ condiționate relativ la S ale funcției implicate $z = f(x, y)$ sunt puncte critice pentru funcția **Lagrange**, adică sunt soluții ale sistemului

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x, y, f(x, y)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y)) \cdot \sum_{k=1}^q \lambda_k \cdot \frac{\partial G_k}{\partial x_i}(x, y) = 0, & i = 1 : p \\ \frac{\partial F}{\partial y_j}(x, y, f(x, y)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y)) \cdot \sum_{k=1}^q \lambda_k \cdot \frac{\partial G_k}{\partial y_j}(x, y) = 0, & j = 1 : q \\ F(x, y, f(x, y)) = 0 \\ G(x, y) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y)) \neq 0 \end{cases}$$

Este natural să studiem semnul diferenței

$$f(x, y) - f(x^c, y^c)$$

pentru toate punctele $(x, y) \in S$. Este clar că a cerceta semnul diferenței de mai sus este echivalent cu a cerceta semnul diferenței

$$L(x, y, \lambda) - L(a, b, \lambda_0)$$

pentru toate punctele $(x, y) \in S$, întrucât

$$f(x, y) - f(x^c, y^c) = L(x, y, \lambda) - L(x^c, y^c, \lambda_0), \forall (x, y) \in S.$$

Aplicând formula lui **Taylor-Lagrange** funcției L cu restul de ordinul 2 și ținând seama că $d_{(x^c, y^c, \lambda_0)}^L = 0$, obținem

$$\begin{aligned} L(x, y, \lambda) - L(x^c, y^c, \lambda_0) &= \frac{1}{2} \cdot d_{(\xi, \varsigma, \tau)}^2 L(x - x^c, y - y^c, \lambda - \lambda_0) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot d_{(x^c, y^c, \lambda_0)}^2 L(x - x^c, y - y^c, \lambda - \lambda_0) + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \left[d_{(\xi, \varsigma, \tau)}^2 L(x - y^c, y - y^c, \lambda - \lambda_0) - \frac{1}{2} \cdot d_{(x^c, y^c, \lambda_0)}^2 L(x - y^c, y - y^c, \lambda - \lambda_0) \right] \end{aligned}$$

Raționând la fel ca în demonstrația corolarului 6.196, se constată că semnul diferenței $L(x, y, \lambda) - L(x^c, y^c, \lambda_0)$ este dat de semnul formei pătratice $d_{(x^c, y^c, \lambda_0)}^2 L$.

Deoarece variabilele $(x, y) \in S$ deducem că ele nu sunt independente, prin urmare nici diferențialele dx_k, dy_j , $k = 1 : p$, $j = 1 : q$ nu sunt independente.

Calculăm, în punctul critic (x^c, y^c) , diferențialele sistemului de relații $G(x, y) = 0$ și obținem

$$\sum_{k=1}^p \frac{\partial G_j}{\partial x_k}(x^c, y^c) dx_k + \sum_{i=1}^q \frac{\partial G_j}{\partial y_i}(x^c, y^c) dy_i = 0, \quad j = 1 : q.$$

Cum determinantul sistemului

$$J_G^y(x, y) = \frac{D(G_1, \dots, G_q)}{D(y_1, \dots, y_q)}(x, y) \neq 0, \quad \forall (x, y) \in S,$$

utilizând regula lui **Cramer** putem determina dy_i , $i = 1 : q$ în funcție de dx_k , $k = 1 : p$, care înlocuiți în $d_{(x^c, y^c, \lambda_0)}^2 L$ ne vor conduce la forma pătratică

$$d_{(x^c, y^c, \lambda_0)}^2 L = \sum_{1 \leq i, j \leq p} a_{ij} \cdot dx_i dx_j.$$

Stabilim semnul formei pătratice fie folosind corolarul 6.197, fie remarcă 6.199, astfel dacă:

- $d_{(a,b,\lambda_0)}^2 L > 0$, punctul s este punct de minim condiționat relativ la S pentru funcția f ;
- $d_{(a,b,\lambda_0)}^2 L < 0$, punctul s este punct de maxim condiționat relativ la S pentru funcția f .

Exemplu: Vom studia extremele locale relative la mulțimea $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid G(x, y) = x + y - \sqrt{2} = 0\}$ pentru funcția implicită $z = f(x, y)$ definită prin

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 2 \cdot (x^4 + y^4 + z^4) - (x^2 + y^2 + z^2) = 0 \\ z\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{1+\sqrt{3}}}{2}. \end{cases}$$

Constatăm că sunt îndeplinite ipotezele teoremei funcțiilor implice, și anume:

- $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{1+\sqrt{3}}}{2}\right) = 0$,
- $F \in C^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$, fiind polinomială;
- $\frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{1+\sqrt{3}}}{2}\right) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{1+\sqrt{3}} \neq 0$.

Prin urmare, există o vecinătate deschisă $U \subset A$ a punctului $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, o vecinătate deschisă $V \subset B$ a punctului $\frac{\sqrt{1+\sqrt{3}}}{2}$ și o funcție unică $f : U \subset A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset B \subset \mathbb{R}$ cu proprietățile:

- (i) f este de clasă C^2 pe U ;
- (ii) $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{1+\sqrt{3}}}{2}$;
- (iii) $F(x, y, f(x, y)) = 0$ pentru orice $(x, y) \in U$.

Punctele critice $(x^c, y^c) \in U$ condiționate relativ la S ale funcției implice $z = f(x, y)$ sunt puncte critice pentru funcția **Lagrange**

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \cdot (x + y - \sqrt{2}),$$

adică sunt soluții ale sistemului

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda = -\frac{\partial F}{\partial x} - \lambda = 0 \Rightarrow 8x^3 - 2x + \lambda \cdot (8z^3 - 2z) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda = -\frac{\partial F}{\partial y} - \lambda = 0 \Rightarrow 8y^3 - 2y + \lambda \cdot (8z^3 - 2z) = 0 \\ G(x, y) = x + y - \sqrt{2} = 0 \\ F(x, y, z) = 2 \cdot (x^4 + y^4 + z^4) - (x^2 + y^2 + z^2) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 8z^3 - 2z \neq 0 \end{array} \right.$$

După câteva operații algebrice elementare obținem două soluții distincte ale acestui sistem: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{14}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{14}\right)$.

Dintre acestea numai $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{14}\right)$ este în concordanță cu ipoteza

$z\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{1+\sqrt{3}}}{2}$. Astfel punctul critic condiționat relativ la S pentru funcția implicită f este punctul $(x^c, y^c) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Calculând derivatele parțiale de ordinul doi ale funcției implicate f , în punctul critic, obținem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^c, y^c) = \frac{1 - 12 \cdot (x^c)^2}{4 \cdot f^3(x^c, y^c) - f(x^c, y^c)} = \frac{12 - \sqrt{2}}{28} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^c, y^c) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^c, y^c) = \frac{1 - 12 \cdot (y^c)^2}{4 \cdot f^3(x^c, y^c) - f(x^c, y^c)} = \frac{12 - \sqrt{2}}{28} \end{array} \right.$$

Calculăm diferențiala de ordinul doi a lui L în punctul critic

$$d_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{14}\right)}^2 L = \frac{12-\sqrt{2}}{28} \cdot (dx)^2 + \frac{12-\sqrt{2}}{28} \cdot (dy)^2 - 2 \cdot (dx + dy) \cdot d\lambda.$$

Deoarece variabilele $(x, y) \in S$ deducem că ele nu sunt independente, prin urmare nici diferențialele dx_k , $k=1:4$ nu sunt independente.

Diferențind, în punctul critic, relația de legătură obținem

$$dx + dy = 0.$$

Înlocuind în forma pătratică de mai sus obținem

$$d_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{14}\right)}^2 L = \frac{12-\sqrt{2}}{14} \cdot (dx)^2 \geq 0,$$

adică punctul $(x^c, y^c) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ este punct de minim condiționat relativ la S

pentru funcția implicită f și $f_{\min} = f(x^c, y^c) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

6.5.6 Exerciții

1. Să se arate că dacă aplicația

$$f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \times \dots \times \mathbb{R}^p = A \rightarrow \mathbb{R}^q, (k \text{ ori})$$

este k -liniară, atunci f este de clasă C^∞ pe A și $d_a^n f = 0$ pentru orice $n \geq k+1$ și orice $a \in A$.

2. Să se scrie formulele lui **Taylor-Lagrange** și, respectiv, **Taylor** cu restul integral pentru

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = e^{x_1+x_2}$ și $a \in (-1, 1)$;
- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ și $a \in (1, 1, 1)$.

3. Să se arate că dacă funcția $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este de clasă C^2 pe mulțimea deschisă și convexă A , $a, b \in A$ cu $d_a f = d_b f = 0$, atunci există punctul $c \in A$ astfel ca

$$4 \cdot |f(b) - f(a)| \leq \|b - a\|^2 \cdot \|d_c^2 f\|.$$

4. Să se determine punctele de extrem local ale funcției $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, unde

- $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 25$;

- $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2$;
- $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 + 2 \cdot x_1^2 \cdot x_2^2 - 8 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2$.

5. Să se determine punctele de extrem local ale funcției $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, unde

- $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 3 \cdot x_3^2 - x_2 \cdot x_1 + x_3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_3$;
- $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot e^{x_2} + x_2 \cdot e^{x_3} + x_3 \cdot e^{x_1}$;
- $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot e^{x_3} + x_2 \cdot x_3 \cdot e^{x_1} + x_1 \cdot x_3 \cdot e^{x_2}$.

6. Să se determine punctele de extrem local ale funcției implicate $y = f(x)$ definită de ecuația $F(x, y) = 0$, unde

- $F(x, y) = x_1^2 + x_2^2 + y^2 - 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 4 \cdot y + 10$ și condiția $f(1, -1) = 6$;
- $F(x, y) = y^3 + y + 20 \cdot (x_1^2 + x_2^2) - 8 \cdot (x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2)$ și condiția $f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = 1$.

7. O funcție $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ indefinit diferențiabilă pe mulțimea deschisă A se numește *dezvoltabilă în serie Taylor centrată în punctul $a \in A$* , dacă există numărul $r > 0$ astfel încât pentru orice $x \in D(a, r)$ să avem

$$f(x) = f(a) + d_a f(x-a) + \frac{1}{2!} \cdot d_a^2 f(x-a, x-a) + \dots + \frac{1}{n!} \cdot d_a^n f(x-a, \dots, x-a) + \dots$$

Să se arate că dacă există $M, r > 0$ încât

$$\|d_x^n f\| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x \in D(a, r) \subset A,$$

atunci f este dezvoltabilă în serie **Taylor** centrată în a .

Să se arate că $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\|x\|}$ este dezvoltabilă în serie **Taylor** centrată în origine.

8. Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime deschisă și mărginită. O funcție $f : \overline{A} \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^2 pe A , continuă pe \overline{A} și cu proprietatea că

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2}(x) = 0, \quad \forall x \in A$$

se numește funcție *armonică pe mulțimea A* .

Să se arate că dacă funcția $f : \overline{A} \rightarrow \mathbb{R}$ este armonică, atunci f **nu** are puncte de extrem local în *interiorul* mulțimii A , adică

$$\inf_{x \in A} f(x) = \inf_{x \in \partial A} f(x) \leq \sup_{x \in \partial A} f(x) = \sup_{x \in A} f(x).$$

9. Fie $f : A \times B \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^2 pe $A \times B$, unde $A \subset \mathbb{R}^p$, $B \subset \mathbb{R}^p$ sunt mulțimi deschise, iar mulțimea

$$C = \{(x, y) \in A \times B \mid F(x, y) = 0\},$$

unde $F = (F_1, F_2, \dots, F_q) : A \times B \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este o aplicație de clasă C^2 pe $A \times B$ cu $J_F^y(x, y) \neq 0$, $\forall (x, y) \in A \times B$.

Fie punctul $(c, \lambda_0) = (a, b, \lambda_0) \in A \times B \times \mathbb{R}^q$ un punct critic pentru funcția lui **Lagrange**

$$L : A \times B \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(x, y, \lambda_0) = f(x, y) + \langle \lambda, F(x, y) \rangle,$$

iar

$$L_0 : A \times B \rightarrow \mathbb{R}, \quad L_0(x, y) = L(x, y, \lambda_0).$$

Să se arate că:

(i) $c = (a, b)$ este un punct de minim local relativ la mulțimea C pentru f dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o vecinătate deschisă $V \subset A \times B$ a punctului c astfel ca

$$L_0(x, y) + \varepsilon \cdot F(x, y) \geq f(a, b), \quad \forall (x, y) \in V.$$

Să se formuleze condiția corespunzătoare pentru cazul în care $c = (a, b)$ este punct de maxim local relativ la mulțimea C pentru funcția f :

(ii) dacă $c = (a, b)$ este un punct de minim (respectiv maxim) local relativ la C pentru f , atunci

$$d_c^2 L_0(v, v) \geq 0, \quad \forall v \in \text{Ker } d_c F, \quad \text{respectiv} \quad d_c^2 L_0(v, v) \leq 0, \quad \forall v \in \text{Ker } d_c F;$$

(iii) există o vecinătate $U \subset A$ a punctului a și o aplicație $h : U \rightarrow \mathbb{R}^q$ de clasă C^1 pe U astfel ca

$$d_a F(x, h(x)) = 0, \quad \forall x \in U;$$

(iv) dacă forma pătratică

$$H_a : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}, \quad H_a(x) = d_a^2 L_0((x, h(x)), (x, h(x)))$$

este pozitiv (respectiv negativ) definită, atunci $c = (a, b)$ este un punct de minim (respectiv maxim) local relativ la mulțimea C pentru f .

10. Aplicând rezultatele din exercițiul precedent, să se determine punctele de extrem local ale funcției f relativ la submulțimea C , unde

$$(i) \quad f(x_1, x_2) = 6 - 4 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2, \quad C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\};$$

$$\text{(ii)} \quad f(x_1, x_2) = (1 - x_1)^2 + x_2^2, \quad C = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^2 = 1 \right\};$$

$$\text{(iii)} \quad f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3,$$

$$C = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\}.$$

CAPITOLUL 7

CALCUL INTEGRAL ÎN \mathbb{R}^p

Scopul acestui capitol este prezentarea principalelor aspecte din teoria integralei **Riemann** pentru funcții reale de mai multe variabile reale. Se obține astfel o generalizare a unor rezultate referitoare la integrabilitatea funcțiilor reale de variabilă reală. Spre deosebire de acest caz, pentru teoria integralei **Riemann** în \mathbb{R}^p sunt necesare câteva elemente de teoria măsurii **Jordan** prezentate în primele două paragrafe ale acestui capitol.

7.1 Multimi neglijabile

7.1.1 Multimi elementare

O mulțime $I \subset \mathbb{R}^p$ de forma $I = I_1 \times \dots \times I_p$, unde $I_1, \dots, I_p \subset \mathbb{R}$ sunt intervale în \mathbb{R} , se numește interval în \mathbb{R}^p .

Dacă toate intervalele $I_1, \dots, I_p \subset \mathbb{R}$ sunt deschise, respectiv închise, respectiv mărginite, atunci $I = I_1 \times \dots \times I_p$ se numește interval deschis, respectiv interval închis, respectiv interval mărginit în \mathbb{R}^p .

În cele ce urmează vom extinde operația de înmulțire din $\overline{\mathbb{R}}$ prin
 $0 \cdot \infty = 0$.

Definiție 7.1. Numărul din $\overline{\mathbb{R}}$

$$v(I) = l(I_1) \cdot \dots \cdot l(I_p),$$

unde $l(I_j)$ reprezintă lungimea intervalului I_j , se numește volumul sau măsura intervalului $I = I_1 \times \dots \times I_p$. Cu convenția făcută mai sus, rezultă că

- $v(I) = 0$, dacă și numai dacă există $j \in \{1, \dots, p\}$ cu $v(I_j) = 0$;
- $v(I) = \infty$, dacă și numai dacă $v(I_k) = 0, \forall k \in \{1, \dots, p\}$ și există $j \in \{1, \dots, p\}$ cu $v(I_j) = \infty$.

Definiție 7.2. O mulțime $E \subset \mathbb{R}^p$ se numește mulțime elementară și notăm $E \in \mathcal{E}$, dacă există numărul $n \in \mathbb{N}^*$ și intervalele $I_1, \dots, I_n \subset \mathbb{R}^p$ mărginite în \mathbb{R}^p astfel ca

$$E = \bigcup_{k=1}^n I_k.$$

Cu alte cuvinte, o mulțime este elementară dacă se reprezintă ca o reuniune finită de intervale mărginite în \mathbb{R}^p .

Remarcă 7.3. Orice mulțime elementară se reprezintă ca o reuniune finită de intervale mărginite cu interioare disjuncte. Cu alte cuvinte, o mulțime $E \in \mathcal{E}$ dacă și numai dacă există intervalele $I_1, \dots, I_n \subset \mathbb{R}^p$ mărginite în \mathbb{R}^p cu

$$E = \bigcup_{k=1}^n I_k, n \in \mathbb{N}^*, \quad \text{int}(I_j) \cap \text{int}(I_k) = \emptyset, i \neq k,$$

caz în care vom utiliza în continuare notația

$$E = \bigcup_{k=1}^n I_k.$$

Definiție 7.4. Numărul real pozitiv

$$v(E) = \sum_{k=1}^n v(I_k), \quad I_k \subset \mathbb{R}^p$$

se numește volumul sau măsura mulțimii elementare $E = \bigcup_{k=1}^n I_k$.

Remarcă 7.5. Se vede ușor că $v(E)$ nu depinde de modul particular în care E se reprezintă ca o reuniune finită de intervale mărginite, ale căror interioare sunt disjuncte două câte două, adică $v(E)$ este corect definită.

Remarcă 7.6. Evident, orice interval mărginit, în particular \emptyset , este o mulțime elementară. În plus, dacă E este o mulțime elementară, atunci $\text{int } E$ și \overline{E} sunt de asemenea elementare și

$$v(E) = v(\text{int } E) = v(\overline{E}).$$

Are loc

Propoziție 7.7. Dacă E și F sunt mulțimi elementare, atunci mulțimile $E \cup F$, $E \cap F$ și $E - F$ sunt de asemenea elementare. În plus, avem că:

- (i) dacă $\text{int } E \cap \text{int } F = \emptyset$, atunci $v(E \cup F) = v(E) + v(F)$ (aditivitate);
- (ii) dacă $E \subset F$, atunci
 - a. $v(E) \leq v(F)$ (monotonie);
 - b. $v(E - F) = v(E) - v(F)$ (subtractivitate);
- (iii) $v(E \cup F) \leq v(E) + v(F)$, $\forall E, F \in \mathcal{E}$ (subaditivitate).

Demonstrație. Se observă mai întâi că dacă I și J sunt intervale mărginite, atunci $I \cup J$, $I \cap J$ și $I - J$ sunt mulțimi elementare. De aici, rezultă imediat că

dacă E și F sunt mulțimi elementare, atunci $E \cup F, E \cap F$ și $E - F$ sunt de asemenea elementare.

(i) Dacă

$$E = \coprod_{k=1}^m I_k \text{ și } F = \coprod_{k=1}^n J_k, \quad m, n \in \mathbb{N}^*$$

cu $\text{int } E \cap \text{int } F = \emptyset = I_{j_1} \cap I_{j_2} = J_{k_1} \cap J_{k_2}, \quad j_1 \neq j_2 \text{ și } k_1 \neq k_2,$

atunci $\text{int } I_j \cap \text{int } J_k = \emptyset$ pentru orice $j \in \{1, \dots, m\}$ și orice $k \in \{1, \dots, n\}$. În consecință, din definiția 7.4 obținem

$$v(E \cup F) = \sum_{j=1}^m v(I_j) + \sum_{k=1}^n v(J_k) = v(E) + v(F).$$

(ii) Dacă $E \subset F$, atunci $F = E \cup (F - E)$ și ținând seama că $E \cap (F - E) = \emptyset$, rezultă

$$v(F) = v(E) + v(F - E) \leq v(E).$$

Folosind proprietatea de aditivitate și faptul că $E \cap (F - E) = \emptyset$ obținem

$$v(F - E) = v(E) - v(F).$$

(iii) Ținând seama că $E \cup F = (E \cap F) \coprod [E - (E \cap F)] \coprod [F - (F \cap E)]$,

din (i) și (ii) rezultă

$$\begin{aligned} v(E \cup F) &= v(E \cap F) + v(E) - v(E \cap F) + v(F) - v(F \cap E) = \\ &= v(E) + v(F) - v(E \cap F). \end{aligned}$$

7.1.2 Măsura exterioară Jordan

Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime mărginită. Atunci există o mulțime elementară $E \in \mathcal{E}$ cu $A \subset E$ și deci mulțimea

$$\mathcal{E}_A = \{E \in \mathcal{E} \mid A \subset E\} \neq \emptyset.$$

De aici rezultă că are sens

Definiție 7.8. Numărul real pozitiv

$$m_e(A) := \inf_{E \in \mathcal{E}_A} v(E)$$

se numește *măsura exterioară Jordan a mulțimii mărginite A*.

Remarcă 7.9. Dacă E este o mulțime elementară, atunci

$$m_e(E) = v(E).$$

Remarcă 7.10. Dacă notăm cu

$$\mathcal{E}_A^1 = \left\{ E \in \mathcal{E} \mid \overline{A} \subset \text{int}(E) \right\},$$

atunci are loc egalitatea

$$m_e(A) = \inf_{E \in \mathcal{E}_A^1} v(E).$$

Pentru justificare, să notăm cu α membrul drept al egalității precedente.

Să observăm pentru început că dacă $\overline{A} \subset \text{int}(E)$, atunci $A \subset \overline{A} \subset \text{int}(E) \subset E$ și deci $\mathcal{E}_A^1 \subset \mathcal{E}_A$, ceea ce implică $m_e(A) \leq \alpha$. Rămâne să demonstrăm inegalitatea de sens contrar.

Din definiția măsurii exterioare $m_e(A) := \inf_{E \in \mathcal{E}_A} v(E)$ rezultă că pentru

orice $\varepsilon > 0$ există mulțimea elementară $E_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^n I_k \in \mathcal{E}$, $E_\varepsilon \supset A$ și

$$v(E_\varepsilon) = \sum_{k=1}^n v(I_k) \leq m_e(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fie J_k un interval cu proprietatea că $\overline{I_k} \subset \text{int}(J_k)$ și $v(J_k) - v(I_k) < \frac{\varepsilon}{2 \cdot n}$, atunci $F = \bigcup_{k=1}^n J_k \in \mathcal{E}$ cu $\overline{A} \subset \bigcup_{k=1}^n \overline{I_k} \subset \bigcup_{k=1}^n \text{int} J_k \subset \text{int}(F)$,

adică $F \in \mathcal{E}_A^1$. Deci

$$\alpha \leq v(F) \leq \sum_{k=1}^n v(J_k) < \sum_{k=1}^n \left(v(I_k) + \frac{\varepsilon}{2 \cdot n} \right) < m_e(A) + \varepsilon,$$

ceea ce conduce la $\alpha < m_e(A) + \varepsilon$ pentru orice $\varepsilon > 0$. Trecând la limită pentru $\varepsilon \rightarrow 0$, se obține $\alpha \leq m_e(A)$, ceea ce rămăsește de demonstrat. \square

Proprietățile măsurii exterioare **Jordan** sunt puse în evidență de

Propoziție 7.11. Pentru orice mulțimi mărginite A_1 și A_2 avem că

- (i) dacă $A_1 \subset A_2$, atunci $m_e(A_1) \leq m_e(A_2)$ (monotonie);
- (ii) $m_e(A_1 \cup A_2) \leq m_e(A_1) + m_e(A_2)$ (subaditivitate).
- (iii) $m_e(\emptyset) = 0$.

Demonstrație. (i) Dacă $A_1 \subset A_2$, atunci $\mathcal{E}_{A_2} \subset \mathcal{E}_{A_1}$ și din definiția 7.8 rezultă $m_e(A_1) \leq m_e(A_2)$.

(ii) Din definiția măsurii exterioare **Jordan** avem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există mulțimile elementare $E_k \in \mathcal{E}$ cu

$$A_k \subset E_k \text{ și } v(E_k) < m_e(A_k) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad k \in \{1, 2\}.$$

Fie $A = A_1 \cup A_2$ și $E = E_1 \cup E_2$, atunci $E \in \mathcal{E}_A$ și din propoziția 7.7 obținem

$$m_e(A) \leq v(E) \leq v(E_1) + v(E_2) \leq m_e(A_1) + m_e(A_2) + \varepsilon,$$

pentru orice $\varepsilon > 0$. Prin trecere la limită pentru $\varepsilon \rightarrow 0$ rezultă proprietatea de subaditivitate a măsurii exterioare.

(iii) Rezultă imediat din remarcile 7.6 și 7.9.

7.1.3 Mulțimi de măsură Jordan nulă

Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime mărginită.

Definiție 7.12. Mulțimea A cu proprietatea $m_e(A) = 0$ se numește de **măsură Jordan nulă** și notăm $A \in \mathcal{J}_0$.

Cu alte cuvinte, $A \in \mathcal{J}_0$ dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o mulțime elementară $E \supset A$, adică $E \in \mathcal{E}_A$, $v(E) < \varepsilon$.

Exemplu 7.13. Orice mulțime finită este de măsură Jordan nulă.

Fie $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ o mulțime finită și $\varepsilon > 0$. Pentru fiecare $k = 1, \dots, n$ considerăm un interval I_k cu $v(I_k) = \frac{\varepsilon}{2 \cdot n}$, atunci

$$E = \bigcup_{k=1}^n I_k \in \mathcal{E}_A$$

și

$$v(E) \leq \sum_{k=1}^n v(I_k) \leq n \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot n} < \varepsilon,$$

deci $A \in \mathcal{J}_0$.

Exemplu 7.14. Dacă funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann, atunci graficul său

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x), x \in [a, b]\}$$

este de măsură Jordan nulă.

Din criteriul lui Darboux aplicat funcției f rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există o diviziune $d = \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\} \in \mathcal{D}[a, b]$ a segmentului $[a, b]$ astfel ca

$$S(f, d) - s(f, d) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \cdot (t_k - t_{k-1}) = \sum_{k=1}^n v(I_k) < \varepsilon,$$

unde $I_k = [t_{k-1}, t_k] \times [m_k, M_k]$, $k \in \{1, \dots, n\}$. Atunci $E = \bigcup_{k=1}^n I_k \in \mathcal{E}$ cu $G_f \subset E$ și

$$v(E) \leq \sum_{k=1}^n v(I_k) < \varepsilon,$$

adică $G_f \in \mathcal{J}_0$. \square

Remarcă 7.15. Din definițiile 7.12 și 7.8 prin aplicarea unui raționament analog cu cel făcut în justificarea afirmației de la Remarca 7.10 rezultă că pentru orice mulțime mărginită $A \subset \mathbb{R}^p$ următoarele afirmații sunt echivalente:

- A este de măsură **Jordan** nulă;
- pentru orice $\varepsilon > 0$ există o familie finită de intervale mărginite I_1, \dots, I_n cu

$$A \subset \bigcup_{k=1}^n I_k \text{ și } \sum_{k=1}^n v(I_k) < \varepsilon; \quad (1)$$

- pentru orice $\varepsilon > 0$ există o familie finită de intervale deschise I_1, \dots, I_n cu proprietatea (1);
- pentru orice $\varepsilon > 0$ există o familie finită de intervale închise I_1, \dots, I_n cu proprietatea (1).

Remarcă 7.16. Orice submulțime a unei mulțimi de măsură **Jordan** nulă este o mulțime de măsură **Jordan** nulă.

În adevăr, dacă $A \in \mathcal{J}_0$ și $A_0 \subset A$, atunci din proprietatea de monotonie a măsurii exterioare **Jordan** obținem

$$0 \leq m_e(A_0) \leq m_e(A) = 0$$

și deci $m_e(A_0) = 0$, adică $A_0 \in \mathcal{J}_0$. \square

Alte proprietăți ale mulțimilor de măsură **Jordan** nulă sunt puse în evidență de

Propoziție 7.17. Dacă A și B sunt mulțimi de măsură **Jordan** nulă, atunci mulțimile $A \cup B$, $A \cap B$, $\text{int}(A)$, \overline{A} și $A - B$ sunt de asemenea mulțimi de măsură **Jordan** nulă.

Demonstrație. Dacă $A \in \mathcal{J}_0$, atunci din $\text{int}(A) \subset A$ și din Remarca 7.16 rezultă că și $\text{int}(A) \in \mathcal{J}_0$.

Pe de altă parte, din $A \in \mathcal{J}_0$ rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există o mulțime elementară $E \supset A$, adică $E \in \mathcal{E}_A$, $v(E) < \varepsilon$.

Atunci $\overline{E} \in \mathcal{E}$ cu $\overline{A} \subset \overline{E}$ și $v(\overline{E}) = v(E) < \varepsilon$, ceea ce arată că $\overline{A} \in \mathcal{J}_0$.

Dacă $A, B \in \mathcal{J}_0$, atunci $m_e(A) = m_e(B) = 0$ și din

$$0 \leq m_e(A \cup B) \leq m_e(A) + m_e(B) = 0$$

rezultă că $m_e(A \cup B) = 0$, adică $A \cup B \in \mathcal{J}_0$.

De aici, via Remarca 7.16, ținând seama că $\begin{cases} A \cap B \\ A - B \end{cases} \subset A \cup B \in \mathcal{J}_0$ rezultă

că $A \cap B, A - B \in \mathcal{J}_0$. \square

7.1.4 Mulțimi de măsură Lebesgue nulă

Fie $A \subset \mathbb{R}^P$ o mulțime arbitrară, **nu neapărat** mărginită.

Definiție 7.18. Mulțimea A cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există o familie cel mult numărabilă de intervale deschise $\{I_n\}_{n \in J}$ cu

$$A \subset \bigcup_{n \in J} I_n \text{ și } \sum_{n \in J} v(I_n) < \varepsilon$$

se numește mulțime neglijabilă sau de măsură **Lebesgue** nulă și notăm $A \in \mathcal{L}_0$.

Cu ajutorul mulțimilor neglijabile se introduce terminologia *aproape peste tot*, pe scurt *a.p.t.* prin

Definiție 7.19. Fie $P(x)$ o proprietate care se referă la elementele x ale unei mulțimi $A \subset \mathbb{R}^P$. Se spune că *proprietatea P are loc aproape peste tot* în A și notăm *a.p.t.*, dacă mulțimea $\{x \in A \mid P(x) \text{ este falsă}\}$ este neglijabilă.

În particular:

- (i) dacă mulțimea punctelor $a \in A$ în care funcția $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ este discontinuă este neglijabilă, atunci f este *continuă a.p.t.* pe A ;
- (ii) dacă mulțimea punctelor $a \in A$ în care funcțiile $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ sunt diferite este neglijabilă, atunci spunem că ele sunt *egale a.p.t.* pe A .

Remarcă 7.20. Analog ca la mulțimile de măsură **Jordan** (cu o justificare analoagă), avem că pentru orice mulțimi $A \subset \mathbb{R}^P$ următoarele afirmații sunt echivalente:

- A este de măsură **Lebesgue** nulă sau neglijabilă;
- pentru orice $\varepsilon > 0$ există o familie cel mult numărabilă de intervale I_1, \dots, I_n, \dots cu proprietatea

$$A \subset \bigcup_{n \in J} I_n \text{ și } \sum_{n \in J} v(I_n) < \varepsilon, \quad (2)$$

- pentru orice $\varepsilon > 0$ există o familie cel mult numărabilă de intervale închise I_1, \dots, I_n, \dots cu proprietatea (2).

Exemplu 7.21. Orice mulțime cel mult numărabilă este neglijabilă.

Fie $A = \{a_1, \dots, a_n, \dots\}$ o mulțime cel mult numărabilă, atunci pentru orice

număr n și orice $\varepsilon > 0$ există un interval deschis I_n cu $a_n \in I_n$ și $v(I_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.

Prin urmare

$$A \subset \bigcup_{n \in J} I_n \text{ și } \sum_{n \in J} v(I_n) < \sum_{n \in J} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

adică $A \in \mathcal{L}_0$.

Remarcă 7.22. Evident, orice mulțime de măsură **Jordan** nulă este neglijabilă, adică $\mathcal{J}_0 \subset \mathcal{L}_0$.

Incluziunea este strictă, deoarece mulțimea $A = \mathbb{Q}^P$ este neglijabilă (fiind numărabilă), dar nu este de măsură **Jordan** nulă (căci este nemărginită).

Mai mult, există și mulțimi mărginite care nu sunt de măsură **Jordan** nulă, de exemplu $A = \mathbb{Q}^P \cap [0,1]^P$.

Remarcă 7.23. Orice mulțime compactă este de măsură **Jordan** nulă.

În adevăr, dacă mulțimea K este neglijabilă, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există o familie cel mult numărabilă de intervale deschise I_1, \dots, I_n, \dots cu proprietatea

$$A \subset \bigcup_{n \in J} I_n \text{ și } \sum_{n \in J} v(I_n) < \varepsilon.$$

Din compacitatea lui K , via teorema **Borel-Lebesgue**, rezultă că din acoperirea lui K cu intervalele deschise I_1, \dots, I_n, \dots putem extrage o acoperire finită cu intervale deschise, adică există $m \in \mathbb{N}^*$ și I_1, \dots, I_m cu

$$K \subset \bigcup_{j=1}^m I_j,$$

prin urmare

$$\sum_{j=1}^m v(I_j) \leq \sum_{n=1} v(I_n) < \varepsilon,$$

adică, via Remarca 7.15 $K \in \mathcal{J}_0$. \square

Remarcă 7.24. Dacă notăm cu \mathcal{K} familia mulțimilor compacte din \mathbb{R}^P , avem că $\mathcal{K} \cap \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{J}_0$ și deoarece $\mathcal{J}_0 \cap \mathcal{K} \subset \mathcal{K} \cap \mathcal{L}_0$, obținem în final

$$\mathcal{K} \cap \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{J}_0 \cap \mathcal{K},$$

adică o *mulțime compactă este neglijabilă dacă și numai dacă este de măsură Jordan nulă*.

Remarcă 7.25. Din Definiția 7.18 rezultă imediat că orice submulțime a unei mulțimi neglijabile este o mulțime neglijabilă. În particular, dacă $A \in \mathcal{L}_0$, atunci $\text{int}(A) \in \mathcal{L}_0$. Spre deosebire de \mathcal{J}_0 , dacă $A \in \mathcal{L}_0$ nu rezultă că și $\overline{A} \in \mathcal{L}_0$, de exemplu pentru $A = \mathbb{Q}^P$.

Alte proprietăți ale mulțimilor neglijabile sunt date de

Proprietatea 7.26. Dacă $A, B, A_1, \dots, A_n, \dots$ sunt mulțimi neglijabile, atunci mulțimile $A \cup B, A \cap B, A - B$ și $\bigcup_n A_n$ sunt de asemenea mulțimi neglijabile.

Demonstrație. Din remarcă precedentă rezultă că este suficient să demonstrăm că dacă $A_n \in \mathcal{L}_0, \forall n \in \mathbb{N}$, atunci $\bigcup_n A_n \in \mathcal{L}_0$.

În adevăr, dacă $A_n \in \mathcal{L}_0, \forall n \in \mathbb{N}$, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $\varepsilon > 0$ există o familie cel mult numărabilă de intervale deschise $(I_m^n)_m$ cu

$$A_n \subset \bigcup_m I_m^n \text{ și } \sum_m v(I_m^n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Atunci

$$\bigcup_n A_n \subset \bigcup_{n,m} I_m^n \text{ și } \sum_{n,m} v(I_m^n) < \sum_n \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

adică $\bigcup_n A_n \in \mathcal{L}_0$. \square

7.1.5 Exerciții

1. Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ și $x \in \mathbb{R}^p$. Notăm cu

$$A + x = \{a + x \mid a \in A\}.$$

Să se arate că

- $m_e(A + x) = m_e(A)$;
- $A \in \mathcal{J}_0$ dacă și numai dacă $A + x \in \mathcal{J}_0$;
- $A \in \mathcal{L}_0$ dacă și numai dacă $A + x \in \mathcal{L}_0$.

2. Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există o familie finită de mulțimi A_1, \dots, A_n mărginite cu proprietatea că

$$A \subset \bigcup_{k=1}^n A_k \text{ și } \sum_{k=1}^n \delta(A_k) < \varepsilon,$$

unde $\delta(A_k)$ reprezintă diametrul mulțimii A_k .

Să se arate că A este de măsură **Jordan** nulă.

3. Să se arate că mulțimea A este de măsură **Jordan** nulă, unde

- $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, iar $(a_n)_n$ este un sir convergent în \mathbb{R}^p ;
- $A = \{(t, f(t)) \mid t \in [a, b]\}$, unde $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ este o funcție cu variație mărginită.

4. Dacă $A \subset \mathbb{R}^p$ este o mulțime mărginită și $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^q$ cu $p < q$ este lipschitziană, atunci $f(A)$ este neglijabilă.

5. Să se studieze dacă mulțimea A este de măsură **Jordan** nulă, respectiv neglijabilă, unde

- $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$;
- $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| + |x_2| = 1\}$;

- $A = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \right\}$.

7.2 Mulțimi măsurabile Jordan

7.2.1 Mulțimi mărginite măsurabile Jordan

Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime mărginită. Atunci există o familie de mulțimi elementare $F \subset A$. Vom nota familia acestor mulțimi elementare cu \mathcal{F}_A .

Definiție 7.27. Numărul real pozitiv

$$m_i(A) := \sup_{F \in \mathcal{F}_A} v(F)$$

se numește *măsura interioară Jordan* a mulțimii mărginite A .

Remarcă 7.28. Dacă E este o mulțime elementară (în particular interval mărginit), atunci

$$m_i(E) = m_e(E) = v(E).$$

Remarcă 7.29. Procedând analog ca în Remarca 7.10, se arată că

$$m_i(A) = \sup \left\{ v(F) \mid F \in \mathcal{E}, \quad \overline{F} \subset \text{int}(A) \right\}.$$

Alte proprietăți ale măsurii interioare **Jordan** sunt puse în evidență de

Propoziție 7.30. Fie $A, A_1, \dots, A_n, \dots$ mulțimi mărginite:

- (i) $m_i(A) \leq m_e(A)$;
- (ii) dacă $A_1 \subset A_2$, atunci $m_i(A_1) \leq m_i(A_2)$ (monotonie);
- (iii) dacă $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$, atunci $m_i(A) \leq \sum_{n \geq 1} m_e(A_n)$.

Demonstrație.

- (i) Dacă E și F sunt mulțimi elementare cu $F \subset A \subset E$, atunci $v(F) \leq v(E)$.

De aici trecând la supremum în raport cu mulțimea $F \in \mathcal{F}_A$, se obține

$$m_i(A) \leq v(E), \quad \forall E \in \mathcal{E}_A.$$

Prin trecere la infimum în raport cu $E \in \mathcal{E}_A$ se obține în final $m_i(A) \leq m_e(A)$.

- (ii) Din Remarca 7.29 rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există o mulțime elementară F cu

$$\overline{F} \subset \text{int}(A) \text{ și } m_i(A) - \varepsilon < v(F). \quad (1)$$

Analog, din Remarca 7.10 rezultă că pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ și orice $\varepsilon > 0$ există o mulțime elementară E_k cu

$$\overline{E_k} \subset \text{int}(E_k) \text{ și } v(E_k) < m_e(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}. \quad (2)$$

Prin urmare

$$\overline{F} \subset \text{int}(A) \subset A = \bigcup_{n \geq 1} A_n \subset \bigcup_{n \geq 1} \overline{A_n} \subset \bigcup_{n \geq 1} \text{int}(E_n),$$

deci familia de mulțimi elementare deschise $(\text{int}(E_k))_k$ constituie o acoperire deschisă a mulțimii compacte \overline{F} . În consecință, există $n \in \mathbb{N}^*$ cu

$$\overline{F} \subset \bigcup_{n \geq 1} \text{int}(E_n) \subset \bigcup_{n \geq 1} E_n.$$

Ultima incluziune împreună cu (1) și (2) conduc la

$$m_i(A) - \varepsilon < v(F) = v(\overline{F}) \leq \sum_{k=1}^n v(E_k) < \sum_{k \geq 1} v(E_k) < \sum_{k \geq 1} m_e(A_k) + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

care pentru $\varepsilon \rightarrow 0$ conduce la inegalitatea din enunț. \square

Definiție 7.31. Mulțimea mărginită $A \subset \mathbb{R}^n$ se zice *măsurabilă Jordan* și notăm $A \in \mathcal{J}$, dacă

$$m_i(A) = m_e(A).$$

Remarcă 7.32. Din Remarca 7.28 rezultă imediat că *orice mulțime elementară este măsurabilă Jordan*.

Remarcă 7.33. Orice mulțime de măsură **Jordan** nulă este măsurabilă **Jordan**, adică $\mathcal{J}_0 \subset \mathcal{J}$.

În adevăr, dacă $A \in \mathcal{J}_0$, atunci $0 \leq m_i(A) \leq m_e(A) = 0$ și deci $m_i(A) = m_e(A)$, ceea ce arată că $A \in \mathcal{J}$.

Mulțimile neglijabile nu sunt neapărat măsurabile **Jordan** (de exemplu, $A = \mathbb{Q}^p \cap [0,1]^p$). Are loc totuși un rezultat interesant, precizat de

Remarcă 7.34. Orice mulțime neglijabilă măsurabilă **Jordan** este de măsură **Jordan** nulă.

În adevăr, dacă mulțimea măsurabilă **Jordan** A este neglijabilă, atunci $m_i(A) = 0$, căci orice mulțime neglijabilă are interiorul vid și se aplică formula din Remarca 7.29. Dar cum A este măsurabilă Jordan rezultă că și $m_i(A) = m_e(A)$ și deci A este de măsură Jordan nulă, adică $m_i(A) = m_e(A) = 0$.

Deci $\mathcal{L}_0 \cap \mathcal{J} \subset \mathcal{J}_0$ și cum și incluziunea reciprocă este adevărată (vezi Remarca 7.20 și 7.34) rezultă că are loc și egalitatea

$$\mathcal{L}_0 \cap \mathcal{J} = \mathcal{J}_0,$$

adică *familia mulțimilor de măsură Jordan nulă coincide cu familia mulțimilor neglijabile măsurabile Jordan*.

Caracterizări ale noțiunii de mulțime mărginită măsurabilă **Jordan** sunt date de

Teoremă 7.35. Pentru orice mulțime mărginită $A \subset \mathbb{R}^p$ următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) A este măsurabilă **Jordan**;

(ii) pentru orice $\varepsilon > 0$ există două mulțimi elementare E și F cu $F \subset A \subset E$ și $v(E) - v(F) < \varepsilon$;

(iii) frontiera lui A este de măsură **Jordan** nulă;
(iv) frontiera lui A este neglijabilă.

Demonstrație. Cunoaștem că dacă A este mărginită, atunci ∂A este compactă (fiind mărginită și închisă). Din Remarca 7.24 rezultă imediat echivalența $(iii) \Leftrightarrow (iv)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Dacă $A \in \mathcal{J}$, atunci există $m \in \mathbb{R}_+$ cu $m_i(A) = m_e(A) = m$. Din Definițiile 7.27 și 7.8 rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există mulțimile elementare E și F cu $F \subset A \subset E$ și

$$m - \frac{\varepsilon}{2} < v(F) \leq v(E) < m + \frac{\varepsilon}{2},$$

ceea ce implică

$$v(E) - v(F) < m + \frac{\varepsilon}{2} - \left(m - \frac{\varepsilon}{2} \right) = \varepsilon.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Fie mulțimile elementare

$$E = \coprod_{j=1}^m I_j, \quad F = \coprod_{k=1}^n J_k$$

cu proprietatea dată de (ii). Atunci mulțimile

$$E_0 = \coprod_{j=1}^m \overline{I}_j, \quad F_0 = \coprod_{k=1}^n \text{int}(J_k)$$

sunt mulțimi elementare cu

$$F_0 \subset \text{int}(A) \subset A \subset \overline{A} \subset E_0 \quad \text{și} \quad v(E_0) = v(E), \quad v(F_0) = v(F).$$

Mulțimea $E_0 - F_0$ este o mulțime elementară cu

$$\partial A \subset \overline{A} - \text{int}(A) \subset E_0 - F_0$$

și

$$v(E_0 - F_0) = v(E_0) - v(F_0) = v(E) - v(F) < \varepsilon,$$

ceea ce arată că ∂A este o mulțime de măsură **Jordan** nulă.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Dacă $\partial A \in \mathcal{J}_0$, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există mulțimea $E_0 \in \mathcal{E}$ cu $\partial A \subset E_0$ și $v(E_0) < \varepsilon$. Deoarece A și E_0 sunt mărginite rezultă că există un interval mărginit I cu $A \cup E_0 \subset I$. Cum I și E_0 sunt mulțimi elementare rezultă că și $I - E_0 \in \mathcal{E}$, deci există o familie finită de intervale I_1, \dots, I_n mărginite cu

$$I - E_0 = \coprod_{j=1}^n I_j.$$

Cum $\partial A \subset E_0$ rezultă că $I_j \cap E_0 = I_j \cap \partial A = \emptyset$, $\forall j = 1, \dots, n$.

Fie mulțimea $J = \left\{ j \in \{1, \dots, n\} \mid I_j \cap \text{int}(A) = \emptyset \right\}$. Să arătăm că

$$A - E_0 = \bigcup_{j \in J} I_j.$$

e1 $A - E_0 \subset \bigcup_{j \in J} I_j$. În adevăr, dacă $a \in A - E_0$, atunci $a \in A - \partial A = \text{int}(A)$.

De aici, ținând seama și de faptul că $a \in I - E_0$ rezultă că există indicele $j \in J$ cu $a \in I_j$ și deci $a \in \bigcup_{j \in J} I_j$.

e2 $A - E_0 \supset \bigcup_{j \in J} I_j$. Dacă există un indice $j \in J$ cu $a \in I_j$ avem că

$I_j \cap \text{int}(A) = \emptyset$. Cum I_j este o mulțime convexă și $I_j \cap \partial A = \emptyset$ rezultă că $I_j \subset A$. Dar $I_j \cap E_0 = \emptyset$, deci $a \in I_j - E_0 \subset A - E_0$.

Din **e1** și **e2** deducem că $A - E_0 = \bigcup_{j \in J} I_j$. Din această egalitate deducem că

că mulțimile $F := A - E_0 \in \mathcal{E}$ și $E := A \cup E_0 = (A - E_0) \cup E_0 \in \mathcal{E}$. În plus, ținând seama că $F \subset A \subset E$ deducem

$$0 \leq m_e(A) - m_i(A) \leq v(E) - v(F) = v(A \cup E_0) - v(A - E_0) = v(E_0) < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Trecând la limită pentru $\varepsilon \rightarrow 0$, se obține în final că $m_e(A) = m_i(A)$, adică $A \in \mathcal{J}$. \square

Operații cu mulțimi măsurabile **Jordan** sunt puse în evidență de

Corolar 7.36. Dacă mulțimile mărginite A și B sunt măsurabile **Jordan**, atunci mulțimile $\overline{A}, \text{int}(A), A \cup B, A - B$ și $A \cap B$ sunt de asemenea măsurabile **Jordan**.

Demonstrație. Din teorema precedentă rezultă că dacă $A, B \in \mathcal{J}$, atunci $\partial A, \partial B \in \mathcal{J}_0$. Cum

$$\partial(A \cup B), \partial(A \cap B), \partial(A - B) \subset \partial A \cup \partial B \in \mathcal{J}_0$$

rezultă că $\partial(A \cup B), \partial(A \cap B), \partial(A - B) \in \mathcal{J}_0$ și deci $A \cup B, A \cap B, A - B \in \mathcal{J}$.

De aici rezultă că dacă $A \in \mathcal{J}$, atunci ținând seama că $\partial A \in \mathcal{J}_0 \subset \mathcal{J}$ avem că

$$\overline{A} = A \cup \partial A \in \mathcal{J} \text{ și } \text{int}(A) = \overline{A} - \partial A \in \mathcal{J}. \quad \square$$

7.2.2 Măsura Jordan în \mathbb{R}^p

Definiție 7.37. Dacă mulțimea mărginită $A \subset \mathbb{R}^p$ este măsurabilă **Jordan**, atunci numărul real pozitiv

$$m(A) := m_i(A) = m_e(A)$$

se numește *măsura Jordan* a mulțimi mărginite numărabile **Jordan** A .

În acest mod, am definit o funcție $m: \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}_+$ care asociază fiecărei mulțimi măsurabile **Jordan** $A \in \mathcal{J}$ numărul real pozitiv $m(A)$, numit și *măsura Jordan* a mulțimii A .

Proprietățile măsurii **Jordan** sunt date de

Teoremă 7.38. Fie mulțimile mărginite $A, B, A_1, \dots, A_n, \dots$ măsurabile **Jordan**.

- (i) Dacă $\text{int}(A) \cap \text{int}(B) = \emptyset$, atunci $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ (aditivitate).
 - (ii) $m(A \cup B) \leq m(A) + m(B)$ (subaditivitate).
 - (iii) Dacă $A \subset B$, atunci $m(A) \leq m(B)$ (monotonie).
 - (iv) Dacă $A \subset B$, atunci $m(B - A) = m(B) - m(A)$ (substractivitate).
 - (v) $m(\overline{A}) = m(\text{int}(A)) = m(A)$.
 - (vi) Dacă $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$ și $A_n \cap A_m = \emptyset$, $n \neq m$, atunci
- $$m(A) = \sum_{n \geq 1} m(A_n) \text{ (aditivitate numărabilă).}$$

Demonstrație.

- (i) Din $A, B \in \mathcal{J}$ rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există mulțimile elementare $E_1, E_2, F_1, F_2 \in \mathcal{E}$ cu $F_1 \subset A \subset E_1$, $F_2 \subset B \subset E_2$ și

$$v(E_1) - v(F_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad v(E_2) - v(F_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Atunci $F = F_1 \cup F_2$, $E = E_1 \cup E_2$ sunt elementare cu $F \subset A \cup B \subset E$. Cum $\text{int}(A) \cap \text{int}(B) = \emptyset$ rezultă că $\text{int}(F_1) \cap \text{int}(F_2) = \emptyset$, deci

$$v(F) = v(F_1) + v(F_2) \leq m(A) + m(B). \quad (3)$$

Din $F \subset A \cup B$ și $E, F \in \mathcal{E}$ rezultă

$$v(F) \leq m(A \cup B) \leq v(E) \leq v(E_1) + v(E_2).$$

Pe de altă parte, din $A \subset E_1$ și $B \subset E_2$ rezultă

$$m(A) \leq v(E_1), \quad m(B) \leq v(E_2),$$

deci

$$m(A) + m(B) \leq v(E_1) + v(E_2). \quad (4)$$

Din (3) și (4) deducem

$$|m(A \cup B) - m(A) - m(B)| < v(E_1) + v(E_2) - v(F_1) - v(F_2) < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Trecând la limită pentru $\varepsilon \rightarrow 0$ se obține egalitatea de la (i).

Demonstrațiile proprietăților (ii), (iii) și (iv) sunt absolut analoage cu cele date acelorași proprietăți pentru mulțimi elementare (vezi Propoziția 7.7)

(v) din $A \subset \overline{A} = A \cup \partial A$ rezultă

$$m(A) \leq m(\overline{A}) = m(A) + m(\partial A) = m(A) + 0 = m(A)$$

se obține că $m(A) = m(\overline{A})$.

Pe de altă parte, din $\text{int}(A) = \overline{A} \cup \partial A$ prin utilizarea proprietății de substractivitate se obține că

$$m(\text{int}(A)) = m(\overline{A}) - m(\partial A) = m(A) - 0 = m(A).$$

(vi) Din Definiția 7.2 și Teorema 7.38 (proprietatea (vi)) rezultă

$$m(A) \leq \sum_{n \geq 1} m(A_n).$$

Pentru demonstrarea inegalității de sens contrar, observăm că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, ținând seama de proprietățile de aditivitate și monotonie a măsurii **Jordan**, avem că

$$m(A_1) + \dots + m(A_n) = m\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq m(A).$$

De aici, trecând la limită pentru $n \rightarrow \infty$, obținem

$$\sum_{n \geq 1} m(A_n) \leq m(A),$$

ceea ce trebuie demonstrat. \square

7.2.3 Mulțimi nemărginite măsurabile Jordan

Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime mărginită. Pentru orice $r > 0$ vom nota cu

$$A_r := \{a \in A \mid \|a\| < r\}$$

numită și *secțiunea de rază r în mulțimea A*.

Definiție 7.39. Mulțimea $A \subset \mathbb{R}^p$ nemărginită se zice măsurabilă **Jordan**, dacă pentru orice număr $r > 0$ mulțimea A_r este măsurabilă **Jordan**.

Vom nota cu $\overline{\mathcal{J}}$ familia mulțimilor nemărginite măsurabile **Jordan**.

Are loc

Propoziție 7.40. Dacă A și B sunt mulțimi nemărginite măsurabile **Jordan**, atunci $A \cup B, A \cap B, A - B$ sunt de asemenea măsurabile **Jordan**.

Demonstrație. Dacă $A, B \in \overline{\mathcal{J}}$, atunci din

$$(A \cup B)_r = A_r \cup B_r$$

rezultă imediat că $A \cup B \in \overline{\mathcal{J}}$.

Dacă $A, B \in \overline{\mathcal{J}}$ și $A \cap B$ (respectiv $A - B$) este nemărginită, atunci din $(A \cap B)_r = A_r \cap B_r$ (respectiv $(A - B)_r = A_r - B_r$) rezultă $A \cap B, A - B \in \overline{\mathcal{J}}$.

În cazul în care $A \cap B$ (respectiv $A - B$) este mărginită, rezultă cu ajutorul Teoremei 7.35 (iv) că $A \cap B, A - B \in \mathcal{J}$. \square

7.2.4 Exerciții

1. Să se calculeze $m_i(A)$ și $m_e(A)$ pentru

$$A = [0,1] \times [0,1] \cup [0,1] \times [1,2] \cap \mathbb{Q}^2$$

2. Pentru orice mulțime mărginită următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) A este mulțime măsurabilă **Jordan**;
- (ii) pentru orice mulțime A există două mulțimi măsurabile **Jordan** $B, C \in \mathcal{J}$ cu $B \subset A \subset C$ și

$$m(C) - m(B) < \varepsilon;$$

- (iii) există două siruri de mulțimi elementare $(E_n)_n, (F_n)_n \subset \mathcal{E}$ cu

$$F_n \subset A \subset E_n, \forall n \in \mathbb{N} \text{ și } \lim_n v(F_n) = \lim_n v(E_n);$$

- (iv) există două siruri de mulțimi măsurabile **Jordan** $(B_n)_n, (C_n)_n \subset \mathcal{J}$ cu

$$B_n \subset A \subset C_n, \forall n \in \mathbb{N} \text{ și } \lim_n v(B_n) = \lim_n v(C_n).$$

3. Să se arate că A este măsurabilă **Jordan**, unde

- (i) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq f(x) \leq y\}$, unde $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ este o funcție continuă;
- (ii) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in B, f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\}$, unde $B \subset \mathbb{R}^2$ este o mulțime mărginită măsurabilă Jordan, iar $f_1, f_2 : B \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții continue cu $f_1 \leq f_2$.

4. Să se arate că dacă A, B, C sunt mulțimi mărginite măsurabile **Jordan**, atunci

- (i) $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$;
- (ii) $m(A \cup B) + m(A) = m(A - B) + m(B - A)$;
- (iii) $A \times B$ este măsurabilă **Jordan** și $m(A \times B) = m(A) \cdot m(B)$;
- (iv) $A + x = \{a + x \mid a \in A\}$ este măsurabilă **Jordan** și $m(A + x) = m(A)$;
- (v) $m(A \cup B \cup C) = m(A) + m(B) + m(C) - m(A \cap B) - m(B \cap C) - m(C \cap A)$.

5. Dacă $(A_n)_n$ este un sir de mulțimi mărginite măsurabile **Jordan** a cărui reuniune este măsurabilă **Jordan**, atunci

$$m\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n \geq 1} m(A_n)$$

numită și proprietatea de subaditivitate numărabilă a măsurii **Jordan**.

Dați exemplu de sir $(A_n)_n$ de mulțimi mărginite măsurabile **Jordan** a cărui reuniune nu este măsurabilă **Jordan**.

7.3 Funcții integrabile pe mulțimi mărginite măsurabile Jordan

7.3.1 Criterii de integrabilitate pe mulțimi mărginite măsurabile Jordan

Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime mărginită măsurabilă **Jordan**. Atunci diametrul său este

$$\delta(A) = \sup_{x,y \in A} \|x - y\| < \infty.$$

Definiție 7.41. O familie finită de mulțimi măsurabile **Jordan** $\{A_1, \dots, A_n\}$ se numește *diviziune Jordan a mulțimii A* dacă

- (i) $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$;
- (ii) $\text{int}(A_j) \cap \text{int}(A_i) = \emptyset$, $i \neq j$.

Notăm cu \mathcal{D}_A mulțimea diviziunilor **Jordan** ale mulțimii mărginite măsurabile **Jordan**. Dacă $d = \{A_1, \dots, A_n\}$ este o diviziune **Jordan** a mulțimii $A \in \mathcal{J}$, atunci numărul

$$\|d\| = \max \{\delta(A_1), \dots, \delta(A_n)\}$$

se numește *norma diviziunii d*.

O mulțime finită

$$\xi_d = \{\xi_1, \dots, \xi_n\} \text{ cu } \xi_k \in A_k, \quad k = 1, \dots, n$$

se numește sistem de puncte intermediare asociat diviziunii $d = \{A_1, \dots, A_n\}$.

Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime mărginită măsurabilă **Jordan** și funcția reală $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Definiție 7.42. Numărul real

$$\sigma(f, d, \xi_d) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot m(A_k)$$

se numește *suma integrală Riemann*, pe scurt *sumă riemanniană*, asociată funcției f , diviziunii d și sistemului de puncte intermediare ξ_d . Uneori $\sigma(f, d, \xi_d)$ se notează cu $\sigma_d(f)$ atunci când punctele intermediare sunt subînțelese.

Definiție 7.43. Funcția reală $f: A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ se zice integrabilă **Riemann**, pe scurt integrabilă, pe mulțimea mărginită măsurabilă **Jordan** A , dacă există un număr real I încât pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ încât pentru orice diviziune **Jordan** $d = \{A_1, \dots, A_n\}$ cu $\|d\| < \delta(\varepsilon)$ și orice sistem de puncte intermediare ξ_d asociat diviziunii d avem

$$|\sigma(f, d, \xi_d) - I| < \varepsilon.$$

Cu alte cuvinte, dacă notăm cu \mathcal{R}_A mulțimea funcțiilor reale integrabile pe mulțimea mărginită măsurabilă **Jordan**, atunci

$$f \in \mathcal{R}_A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall d \in \mathcal{D}_A, \|d\| < \delta(\varepsilon), \forall \xi_d \Rightarrow |\sigma(f, d, \xi_d) - I| < \varepsilon.$$

Remarcă 7.44. Dacă $f \in \mathcal{R}_A$, atunci numărul I din definiția precedentă este unic. În adevăr, dacă prin absurd ar exista numerele reale I_1, I_2 care să satisfacă cerințele definiției 7.43, atunci din

$$|I_1 - I_2| \leq |\sigma(f, d, \xi_d) - I_1| + |\sigma(f, d, \xi_d) - I_2| < 2 \cdot \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Prin trecere la limită, pentru $\varepsilon \rightarrow 0$ se obține $I_1 = I_2$.

Definiție 7.45. Dacă $f \in \mathcal{R}_A$, atunci unicul număr real I dat de definiția 7.43 se notează cu

$$I = \int_A f \text{ sau } I = \int_A f(x) dx$$

și se numește *integrală Riemann a funcției f pe mulțimea mărginită și măsurabilă Jordan A* , sau pe scurt integrala funcției f pe A .

În particular, dacă $p = 2$ respectiv $p = 3$, atunci $I = \int_A f(x) dx$ se notează

cu

$$I = \iint_A f(x, y) dx dy, \text{ respectiv } I = \iiint_A f(x, y, z) dx dy dz$$

și se numește *integrală dublă*, respectiv *integrală triplă* a funcției f pe mulțimea A .

Remarcă 7.46. Dacă mulțimea mărginită $A \in \mathcal{J}$ este neglijabilă ($m(A) = 0$), atunci pentru orice funcție reală $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ avem $\sigma(f, d, \xi_d) = 0$ pentru orice diviziune **Jordan** d a mulțimii A și orice sistem ξ_d de puncte intermediare asociat lui d .

În consecință, orice funcție reală $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă **Riemann** pe mulțimea A de măsură **Jordan** nulă și $\int_A f = 0$.

Exemplu 7.47 (Funcție nemărginită integrabilă **Riemann** pe o mulțime mărginită măsurabilă **Jordan**). Mulțimea

$$A = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

este o mulțime mărginită de măsură **Jordan** nulă, iar funcția reală

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = n$$

este nemărginită cu $f \in \mathcal{R}_A$ și $\int_A f = 0$.

Relativ la relația de mărginire și integrabilitate în sens **Riemann** pe mulțimi mărginite măsurabile **Jordan** facem

Remarcă 7.48. Dacă $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă pe mulțimea $A \in \mathcal{J}$, atunci există o mulțime $A_0 \subset A$ de măsură **Jordan** nulă astfel încât f este mărginită pe $A - A_0$.

În plus, f este integrabilă pe $A - A_0$ și

$$\int_{A-A_0} f = \int_A f.$$

În adevăr, dacă $f \in \mathcal{R}_A$, atunci există numărul $I = \int_A f \in \mathbb{R}$ și $\delta > 0$ astfel

încât pentru orice diviziune $d = \{A_1, \dots, A_n\}$ a mulțimii A , cu $\|d\| < \delta$ și orice sistem de puncte intermediare ξ_d avem că $|\sigma(f, d, \xi_d) - I| < 1$.

Pentru justificarea afirmației din enunț este suficient să arătăm că f este mărginită pe orice mulțime $A_j \in d$, $m(A_j) > 0$, $j = 1, \dots, n$.

Fie $j \in \{1, \dots, n\}$ cu $m(A_j) > 0$, atunci

$$I - 1 < \sigma_d(f) = f(\xi_j) \cdot m(A_j) + \sum_{k=1, k \neq j}^n f(\xi_k) \cdot m(A_k) < I + 1.$$

De aici rezultă

$$\frac{I - 1 - \sum_{k=1, k \neq j}^n f(\xi_k) \cdot m(A_k)}{m(A_j)} < f(\xi_j) < \frac{I + 1 - \sum_{k=1, k \neq j}^n f(\xi_k) \cdot m(A_k)}{m(A_j)}, \quad \forall \xi_j \in \xi_d$$

deci f este mărginită pe A_j .

Ținând seama că în definiția sumelor integrale **Riemann** intervin efectiv numai acele mulțimi $A_j \in d$ cu $m(A_j) > 0$, rezultă imediat și a doua afirmație din enunț. \square

Ca și pentru limite de funcții are loc criteriul **Heine** de integrabilitate.

Teoremă 7.49 (Heine). Funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă pe mulțimea $A \in \mathcal{J}$ dacă și numai dacă există un număr real I astfel încât pentru orice sir $(d_n)_n \subset \mathcal{D}\mathcal{J}_A$ cu $\lim_n \|d_n\| = 0$ și orice sir de sisteme de puncte intermediare $(\xi_{d_n})_n$ avem că sirul $(\sigma(f, d_n, \xi_{d_n}))_n$ converge la I .

Demonstrație. **Necesitatea.** Dacă $f \in \mathcal{R}_A$ și $(d_n)_n \subset \mathcal{D}\mathcal{J}_A$ este un sir de diviziuni **Jordan** a lui A cu $\lim_n \|d_n\| = 0$, atunci

$$\forall \delta > 0, \quad \exists n(\delta) \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n(\delta), \quad \|d_n\| < \delta.$$

Din Definiția 7.43 rezultă că există numărul $I \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ cu

$$|\sigma(f, d_n, \xi_{d_n}) - I| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n(\delta(\varepsilon))$$

$$\text{În consecință, } \exists \lim_n \sigma(f, d_n, \xi_{d_n}) = I.$$

Suficiența se demonstrează prin reducere la absurd. Presupunând contrariul, adică f nu este integrabilă pe mulțimea A , există $\varepsilon_0 > 0$ încât pentru orice $\delta_n = \frac{1}{n}$ există o diviziune **Jordan** $d_n \in \mathcal{D}\mathcal{J}_A$ cu $\|d_n\| < \delta_n$ și un sistem de puncte intermediare ξ_{d_n} cu

$$|\sigma(f, d_n, \xi_{d_n}) - I| \geq \varepsilon_0. \quad (5)$$

Deoarece $\lim_n \|d_n\| = 0$, din ipoteza teoremei deducem că $\lim_n \sigma(f, d_n, \xi_{d_n}) = I$, fapt ce contrazice inegalitatea precedentă. \square

Din Remarca 7.48 rezultă că problema integrabilității unei funcții se reduce la studiul integrabilității unei funcții mărginite. De aceea în continuare vom prezenta criterii de integrabilitate pentru funcții mărginite.

Fie funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ mărginită pe mulțimea $A \in \mathcal{J}$, iar $d = \{A_1, \dots, A_n\}$ o diviziune **Jordan** a lui A . Notând cu

$m = \inf f(A)$, $M = \sup f(A)$, $m_k = \inf f(A_k)$, $M_k = \sup f(A_k)$, $k = 1, \dots, n$ definim sumele **Darboux** prin

Definiție 7.50. Numerele reale

$$s(f, d) = \sum_{k=1}^n m_k \cdot m(A_k), \quad S(f, d) = \sum_{k=1}^n M_k \cdot m(A_k)$$

se numesc *suma Darboux inferioară* și *suma Darboux superioară* asociate funcției f și diviziunii d .

Remarcă 7.51. Dacă $d = \{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathcal{D}\mathcal{J}_A$ și $\xi_d = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ este un sistem de puncte intermediare asociat lui d , iar $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție mărginită pe A , atunci $m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k$, $k = 1, \dots, n$. Înmulțim cu $m(A_k)$ și însumăm după k se obține

$$m \cdot m(A) \leq s(f, d) \leq \sigma(f, d, \xi_d) \leq S(f, d) \leq M \cdot m(A),$$

deci sumele **Darboux** sunt mărginite.

Remarcă 7.52. Se poate demonstra ușor că dacă $d_1, d_2 \in \mathcal{D}\mathcal{J}_A$, unde $d_1 = \{A_1^1, \dots, A_m^1\}$ și $d_2 = \{A_1^2, \dots, A_n^2\}$, sunt diviziuni **Jordan** ale mulțimii A , atunci există diviziunea

$$d = d_1 \vee d_2 = \left\{ A_i^1 \cap A_j^2 \mid i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n \right\} \in \mathcal{D}\mathcal{J}_A,$$

cu proprietatea că

$$s(f, d_1) \leq s(f, d) \leq S(f, d) \leq S(f, d_2),$$

Are sens să introducem

Definiție 7.53. Numerele reale

$$\int_A f = \sup_{d \in \mathcal{D}\mathcal{J}_A} s(f, d), \quad \overline{\int_A f} = \inf_{d \in \mathcal{D}\mathcal{J}_A} S(f, d)$$

se numesc integrala inferioară **Darboux**, respectiv integrala superioară **Darboux** a funcției mărginite $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Din Remarcă 7.52 deducem că

$$s(f, d_1) \leq \int_A f \leq \overline{\int_A f} \leq S(f, d_2), \quad \forall d_1, d_2 \in \mathcal{D}\mathcal{J}_A.$$

Remarcă 7.54. Se poate arăta că

$$s(f, d) = \inf_{\xi_d} \sigma(f, d, \xi_d), \quad S(f, d) = \sup_{\xi_d} \sigma(f, d, \xi_d).$$

Cu aceste pregătiri putem demonstra **criteriul lui Darboux** de integrabilitate.

Teoremă 7.55 (Darboux). Pentru orice funcție mărginită $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) f este integrabilă pe A ;
- (ii) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel că pentru orice diviziune $d \in \mathcal{D}\mathcal{J}_A$, cu $\|d\| < \delta(\varepsilon)$ avem

$$S(f, d) - s(f, d) < \varepsilon;$$

- (iii) pentru orice $\varepsilon > 0$ există o diviziune $d_0 = d(\varepsilon) \in \mathcal{D}\mathcal{J}_A$, astfel ca

$$S(f, d_0) - s(f, d_0) < \varepsilon.$$

Demonstrație. (i) \Rightarrow (ii). Dacă $f \in \mathcal{R}_A$, atunci din definiția 7.43 există numărul real I încât pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel ca

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \sigma(f, d, \xi_d) < I + \frac{\varepsilon}{2},$$

pentru orice diviziune $\forall d \in \mathcal{D}\mathcal{J}_A$ cu $\|d\| < \delta$. De aici, ținând seama de Remarca 7.54 rezultă că

$$I - \frac{\varepsilon}{2} \leq s(f, d) \leq S(f, d) \leq I + \frac{\varepsilon}{2},$$

deci

$$S(f, d) - s(f, d) < I + \frac{\varepsilon}{2} - \left(I - \frac{\varepsilon}{2} \right) = \varepsilon.$$

Pentru orice diviziune $d \in \mathcal{D}\mathcal{J}_A$ cu $\|d\| < \delta$.

(ii) \Rightarrow (iii) este evidentă.

(iii) \Rightarrow (i) Dacă notăm cu \bar{I} și \underline{I} integrala superioară, respectiv inferioară **Darboux** a lui f pe mulțimea A , atunci din (iii) rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există o diviziune $d_0 = d(\varepsilon) \in \mathcal{D}\mathcal{J}_A$, $d_0 = \{A_1^0, \dots, A_m^0\}$ astfel ca

$$0 \leq \bar{I} - \underline{I} \leq S(f, d) - s(f, d) < \frac{\varepsilon}{2},$$

deci $\bar{I} = \underline{I}$ și notăm cu I valoarea lor comună.

Deoarece f este mărginită pe A , există $M > 0$ cu $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in A$.

Mulțimea $B = \bigcup_{k=1}^m \partial A_k^0$ este o mulțime compactă de măsură Jordan nulă.

Atunci există o mulțime elementară $E \in \mathcal{E}$ deschisă cu $E \supset B$ și $v(B) < \frac{\varepsilon}{4 \cdot M}$.

Fie $\delta = \inf \{\|a - b\| \mid a \in CE, b \in B\}$.

Deoarece mulțimea B este compactă și CE este închisă cu $B \cap CE = \emptyset$ rezultă că $\delta > 0$.

Fie acum $d \in \mathcal{D}\mathcal{J}_A$ o diviziune **Jordan** arbitrară a lui A , cu $\|d\| < \delta$. Să notăm cu

$$K = \{k \in \{1, \dots, n\} \mid A_k \subset E\} \text{ și } J = \{j \in \{1, \dots, n\} \mid A_j \cap CE \neq \emptyset\}.$$

Evident $\{1, \dots, n\} = J \cup K$. Dacă $\int_A g = \int_{A-B} g + \int_B g = \int_A f$, atunci există

$a \in A_j \cap CE \subset A$, deci există $i \in \{1, \dots, m\}$ cu $a \in A_i^0$. Conform definiției lui δ , avem $D(a, \delta) \cap B = \emptyset$ și deci $D(a, \delta) \cap \partial A_i^0 = \emptyset$.

Cum $D(a, \delta)$ este conex și $a \in D(a, \delta) \cap A_i^0 \neq \emptyset$, avem că $D(a, \delta) \subset \text{int}(A_i^0)$. În plus, i este unic.

Rezultă că mulțimile $J_i = \left\{ j \in J \mid A_j \subset \text{int}(A_i^0) \right\}$ sunt disjuncte două câte două și

$$J = \bigcup_{i=1}^m J_i$$

Fie $m_j = \inf f(A_j)$, $M_j = \sup f(A_j)$, $m_i^0 = \inf f(A_i^0)$, $M_i^0 = \sup f(A_i^0)$.

Se observă că $M_k - m_k \leq 2M$, $M_j - m_j < M_i^0 - m_i^0$, $j \in J_i$, deci

$$\begin{aligned} S(f, d) - s(f, d) &= \sum_{j \in J} (M_j - m_j) \cdot m(A_j) + \sum_{k \in K} (M_k - m_k) \cdot m(A_k) < \\ &< \sum_{i=1}^m \sum_{j \in J_i} (M_i^0 - m_i^0) \cdot m(A_j) + 2 \cdot M \cdot \sum_{k \in K} m(A_k) = \\ &= \sum_{i=1}^m (M_i^0 - m_i^0) \cdot m\left(\bigcup_{j \in J_i} A_j\right) + 2 \cdot M \cdot m\left(\bigcup_{k \in K} A_k\right) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^m (M_i^0 - m_i^0) \cdot m(A_i^0) + 2 \cdot M \cdot m(E) < S(f, d_0) - s(f, d_0) + 2 \cdot M \cdot \frac{\varepsilon}{4 \cdot M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

De aici, ținând seama că

$$s(f, d) \leq \sigma(f, d, \xi_d), I \leq S(f, d),$$

obținem

$$|\sigma(f, d, \xi_d) - I| < S(f, d) - s(f, d) < \varepsilon,$$

pentru orice $d \in \mathcal{D}\mathcal{J}_A$ cu $\|d\| < \delta$ și orice sistem de puncte intermediare ξ_d . În concluzie, $f \in \mathcal{R}_A$ și $\int_A f = I$. \square

Caracterizarea integrabilității cu ajutorul integralelor **Darboux** este dată de

Corolar 7.56. O funcție mărginită $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă pe $A \in \mathcal{J}$ dacă și numai dacă

$$\int_A f = \overline{\int_A f}.$$

Demonstrație. **Necesitatea** a fost demonstrată în prima parte a justificării implicației $(iii) \Rightarrow (i)$ din teorema precedentă.

Suficiența. Fie I valoarea comună a integralelor **Darboux** a funcției f pe A . Din $I = \int_A f$ rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există o diviziune $d_1 = d_1(\varepsilon) \in \mathcal{D}\mathcal{J}_A$

cu $I - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, d_1)$.

Analog, din $I = \overline{\int_A f}$ se obține că pentru orice $\varepsilon > 0$ există o diviziune

$$d_2 = d_2(\varepsilon) \in \mathcal{D}\mathcal{J}_A \text{ cu } S(f, d_2) < I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Din Remarca 7.52 există o diviziune $d = d_1 \vee d_2 \in \mathcal{D}\mathcal{J}_A$ cu

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, d_1) \leq s(f, d) \leq S(f, d) \leq S(f, d_2) < I + \frac{\varepsilon}{2}$$

deci

$$S(f, d) - s(f, d) < I + \frac{\varepsilon}{2} - \left(I - \frac{\varepsilon}{2} \right) = \varepsilon$$

ceea ce, via criteriul **Darboux**, atrage integrabilitatea pe A a funcției f . \square

Criteriul lui **Riemann** de integrabilitate este dat de

Teoremă 7.57 (Riemann). Funcția mărginită $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă pe $A \in \mathcal{J}$ dacă și numai dacă există un număr real I , astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$ există o diviziune $d = d(\varepsilon) \in \mathcal{D}\mathcal{J}_A$ astfel ca $|\sigma(f, d, \xi_d) - I| < \varepsilon$ pentru orice sistem de puncte intermediare ξ_d asociat lui d .

Demonstrația. **Necesitatea** este evidentă din Definiția 7.43.

Suficiența. Dacă este îndeplinită condiția din ipoteză, atunci procedând ca în demonstrația implicației $(i) \Rightarrow (ii)$ din criteriul lui **Darboux**, se obține că pentru orice $\varepsilon > 0$ există o diviziune $d = d(\varepsilon) \in \mathcal{D}\mathcal{J}_A$ astfel ca

$$S(f, d) - s(f, d) < \varepsilon.$$

Din criteriul lui **Darboux** se obține în final că $f \in \mathcal{R}_A$. \square

Amintim că dacă $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție mărginită și $A_0 \subset A$, atunci

$$\omega_f(A_0) = \sup f(A_0) - \inf f(A_0)$$

se numește **oscilația funcției f pe mulțimea A_0** , iar

$$\omega_f(a) = \inf_{V \in \mathcal{V}_a} \omega_f(V \cap A),$$

unde \mathcal{V}_a reprezintă familia vecinătăților lui a , se numește **oscilația funcției f în punctul $a \in A$** .

Din criteriul **Cauchy-Bolzano** pentru continuitate rezultă că $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă în punctul $a \in A$ dacă și numai dacă $\omega_f(a) = 0$.

Remarcăm în plus că mulțimea $D(f)$ a punctelor de discontinuitate a funcției f este

$$D(f) = \left\{ x \in A \mid \omega_f(x) = 0 \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n,$$

$$\text{unde } D_n = \left\{ x \in A \mid \omega_f(x) > \frac{1}{n} \right\}.$$

Remarcă 7.58. Multimea $D_\varepsilon(f) = \{x \in A \mid \omega_f(x) \geq \varepsilon\}$ este **compactă** pentru orice $\varepsilon > 0$ și orice funcție $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Pentru justificare este suficient să arătăm că $D_\varepsilon(f)$ este închisă.

Presupunem contrariul, adică există un punct de acumulare x a mulțimii $D_\varepsilon(f)$ cu $x \notin D_\varepsilon(f)$. Atunci $\omega_f(x) < \varepsilon$ și deci există $V \in \mathcal{V}_x$ cu $\omega_f(V \cap A) < \varepsilon$.

Dar din $\omega_f(y) \leq \omega_f(V \cap A) < \varepsilon, \forall y \in V \cap A$

rezultă că $V \cap D_\varepsilon(f) = \emptyset$, ceea ce contrazice ipoteza că x este punct de acumulare pentru $D_\varepsilon(f)$. \square

Remarcă 7.59. Dacă A este compactă și există $\varepsilon > 0$ încât $\omega_f(a) < \varepsilon, \forall a \in A$, atunci există și $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $A_0 \subset A$ cu $\delta(A_0) < \delta$ avem $\omega_f(A_0) < \varepsilon$.

În adevăr din definiția oscilației funcției f în punctul $a \in A$ și a faptului că $\omega_f(a) < \varepsilon, \forall a \in A$, rezultă că pentru orice $a \in A$ există r_a astfel ca oscilația lui f pe $V_a = V \cap D(a, 2 \cdot r_a)$ este mai mică decât ε .

Dacă notăm cu $D_a = D(a, r_a)$, din compacitatea lui A rezultă că există punctele $a_1, \dots, a_n \in A$ cu $A \subset D_{a_1} \cup \dots \cup D_{a_n}$.

Fie $\delta = \min\{r_{a_1}, \dots, r_{a_n}\}$ și $A_0 \subset A$ cu $\delta(A_0) < \delta$. Atunci există $k \in \{1, \dots, n\}$ cu $A_0 \cap D_{a_k} \neq \emptyset$, deci $a_0 \in A_0 \cap D_{a_k}$. Atunci pentru orice $a \in A_0$ avem

$$\|a - a_k\| \leq \|a - a_0\| + \|a_0 - a_k\| < \delta + r_{a_k} < 2 \cdot r_{a_k},$$

deci $a \in V_{a_k}$. În consecință, $A_0 \subset A \cap V_{a_k}$ și deci avem

$$\omega_f(A_0) \leq \omega_f(A \cap V_{a_k}) < \varepsilon. \square$$

Relația dintre continuitate și integrabilitate este pusă în evidență de *criteriul lui Lebesgue de integrabilitate* dat de

Teoremă 7.60 (Lebesgue). Funcția mărginită $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă pe A dacă și numai dacă f este continuă a.p.t.

Demonstrație. Necesitatea. Ținând seama că reuniunea numărabilă de mulțimi neglijabile este o mulțime neglijabilă, pentru a demonstra că f este continuă a.p.t. este suficient să demonstrăm că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ mulțimea

$$D_n = \left\{ x \in A \mid \omega_f(x) \geq \frac{1}{n} \right\}$$

este neglijabilă.

Fie $\varepsilon > 0$ și $n \in \mathbb{N}^*$. Deoarece $f \in \mathcal{R}_A$, via criteriul lui **Darboux**, există o diviziune $d = \{A_1, \dots, A_n\} \in \mathcal{D}_A$ **Jordan** a lui A astfel ca

$$S(f, d) - s(f, d) = \sum_{k=1}^n \omega_f(A_k) \cdot m(A_k) < \frac{\varepsilon}{n}.$$

Fie $K = \{k \in \{1, \dots, n\} \mid A_k \cap D_n \neq \emptyset\}$, atunci

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{k \in K} m(A_k) \leq \sum_{k \in K} (M_k - m_k) \cdot m(A_k) < S(f, d) - s(f, d) < \frac{\varepsilon}{n}.$$

Deci

$$D_n \subset \bigcup_{k \in K} A_k \text{ și } \sum_{k \in K} m(A_k) < \varepsilon.$$

De aici rezultă că $m_e(D_n) = 0$, deci D_n este de măsură **Jordan** nulă, deci și neglijabilă.

Suficiență. Să presupunem că f este continuă a.p.t. Atunci $D(f)$ este neglijabilă și cum $D_n \subset D(f)$ rezultă că și D_n este neglijabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Conform Remarcii 7.58, D_n este și compactă, atunci D_n este de măsură **Jordan** nulă.

Fie $\varepsilon > 0$ și $n \in \mathbb{N}^*$ suficient de mare astfel ca $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2 \cdot m(A)}$. Deoarece

$D_n \cup \partial A$ este de măsură **Jordan** nulă, rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există o mulțime elementară deschisă $E \supset D_n \cup \partial A$ și $v(E) < \frac{\varepsilon}{2 \cdot \omega_f(A)}$.

Fie $B = \overline{A} - E = \overline{A} \cap CE$, atunci B este o mulțime compactă măsurabilă **Jordan** și cum $\partial A \subset E$ rezultă $B = A \cap CE$. În consecință, $d_0 = \{B, A \cap E\} \in \mathcal{DJ}_A$ este o diviziune **Jordan** a lui A . Cum $B \cap D_n = \emptyset$ rezultă că pentru orice $b \in B$ avem $\omega_f(b) \leq \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2 \cdot m(A)}$.

Din Remarca 7.59 există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $C \subset B$ cu $\delta(C) < \delta$ avem $\omega_f(C) < \frac{\varepsilon}{2 \cdot m(A)}$.

Fie $d = \{A_1, \dots, A_s\} \in \mathcal{DJ}_B$ o diviziune **Jordan** a lui B cu $\|d\| < \delta$. Atunci

$$\omega_f(A_k) < \frac{\varepsilon}{2 \cdot m(A)}, \quad \forall k = 1, \dots, s.$$

Pentru diviziunea $d_0 = \{A \cap E, A_1, \dots, A_s\} \in \mathcal{DJ}_A$ avem

$$\begin{aligned} S(f, d) - s(f, d) &= \omega_f(A \cap E) \cdot m(A \cap E) + \sum_{k=1}^s \omega_f(A_k) \cdot m(A_k) \leq \\ &\leq \omega_f(A) \cdot v(E) + \frac{\varepsilon}{2 \cdot m(A)} \cdot \sum_{k=1}^s m(A_k) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2 \cdot m(A)} \cdot m(B) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Din criteriul lui **Darboux** se obține în final că f este integrabilă pe A . \square

Corolar 7.61. Dacă funcția mărginită $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă a.p.t. pe $\text{int}(A)$ și A are frontieră neglijabilă, atunci f este integrabilă pe A .

Demonstrația rezultă din criteriul lui **Lebesgue** ținând seama că

$$D(f) = D(f, A) \cup D(f, \partial A) \in \mathcal{L}_0,$$

adică reuniunea a două mulțimi neglijabile este neglijabilă. \square

7.3.2 Proprietățile funcțiilor integrabile pe mulțimi mărginite măsurabile Jordan

Proprietatea de liniaritate

Propoziție 7.62. Dacă $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții integrabile pe mulțimea mărginită și măsurabilă **Jordan** A , iar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ este integrabilă pe mulțimea A și

$$\int_A (\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = \alpha \cdot \int_A f + \beta \cdot \int_A g.$$

Demonstrație. Fie $(d_n)_n$ un sir de diviziuni **Jordan** a lui A cu $\lim_n \|d_n\| = 0$. Se observă că

$$\sigma(\alpha \cdot f + \beta \cdot g, d_n, \xi_{d_n}) = \alpha \cdot \sigma(f, d_n, \xi_{d_n}) + \beta \cdot \sigma(g, d_n, \xi_{d_n})$$

pentru orice sistem de puncte intermediare asociat lui d_n . Aplicând criteriul lui **Heine**, prin trecere la limită, se obține imediat afirmația din enunț. \square

Proprietatea de pozitivitate

Propoziție 7.63. Dacă $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție integrabilă pe mulțimea mărginită și măsurabilă **Jordan** A și $f \geq 0$ pe mulțimea A , atunci

$$\int_A f \geq 0.$$

Demonstrație. Fie $(d_n)_n$ un sir de diviziuni **Jordan** a lui A cu $\lim_n \|d_n\| = 0$. Se observă că

$$\sigma(f, d_n, \xi_{d_n}) \geq 0$$

pentru orice sistem de puncte intermediare asociat lui d_n . Aplicând criteriul lui **Heine**, prin trecere la limită, se obține imediat afirmația din enunț. \square

Proprietatea de monotonie

Propoziție 7.64. Dacă $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții integrabile pe mulțimea mărginită și măsurabilă **Jordan** A și $f \leq g$, atunci

$$\int_A f \leq \int_A g.$$

Demonstrație. Dacă $f \leq g$ și $f, g \in \mathcal{R}_A$, atunci $h = g - f \geq 0$ și folosind proprietatea de liniaritate și de pozitivitate se obține afirmația din enunț. \square

Proprietatea de ereditate

Propoziție 7.65. Dacă funcția mărginită $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă pe mulțimea mărginită și măsurabilă **Jordan** A și $A_0 \subset A$ este o submulțime măsurabilă **Jordan**, atunci f este integrabilă și pe A_0 .

Demonstrație. Dacă notăm cu f_0 restricția lui f la A_0 și ținând seama că $D(f_0) \subset D(f)$ prin aplicarea criteriului lui **Lebesgue**, pentru funcțiile f și f_0 se obține în final că f este integrabilă pe A_0 . \square

Proprietatea de aditivitate

Propoziție 7.66. Fie o funcție mărginită $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, iar A_1 și A_2 două submulțimi mărginite și măsurabile **Jordan** ale lui A cu $A = A_1 \cup A_2$ și $\text{int}(A_1) \cap \text{int}(A_2) = \emptyset$. Atunci f este integrabilă pe A dacă și numai dacă f este integrabilă pe A_1 și pe A_2 . În plus, avem că

$$\int_{A=A_1 \cup A_2} f = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f.$$

Demonstrație. Dacă notăm cu f_1 și f_2 restricția lui f la A_1 , respectiv la A_2 , atunci $D(f_1) \cup D(f_2) \subset D(f) \subset D(f_1) \cup D(f_2) \cup \partial A_1 \cup \partial A_2$.

Prin aplicarea criteriului **Lebesgue** pentru funcțiile f_1, f_2 și f se obține imediat justificarea echivalenței din enunț.

Pentru demonstrarea egalității din enunț se observă că dacă $(d_n^1)_n$, respectiv $(d_n^2)_n$ sunt șiruri de diviziuni **Jordan** ale lui A_1 , respectiv A_2 cu $\lim_n \|d_n^1\| = 0 = \lim_n \|d_n^2\|$, atunci diviziunea $d_n = d_n^1 \cup d_n^2$ este un șir de diviziuni **Jordan** ale lui A cu $\lim_n \|d_n\| = 0$. În plus, din

$$\sigma(f, d_n, \xi_{d_n}) = \sigma(f, d_n^1, \xi_{d_n^1}) + \sigma(f, d_n^2, \xi_{d_n^2})$$

prin trecere la limită se obține egalitatea din enunț. \square

Remarcă 7.67. Fie o funcție mărginită $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, iar A_1 și A_2 două submulțimi mărginite și măsurabile **Jordan** ale lui A . Atunci

- f este integrabilă pe A_1 dacă și numai dacă f este integrabilă pe $A_1 - A_2$ și pe $A_1 \cap A_2$. În plus, avem că

$$\int_{A_1} f = \int_{A_1 - A_2} f + \int_{A_1 \cap A_2} f;$$

- f este integrabilă pe A_1 dacă și numai dacă f este integrabilă pe $A_2 - A_1$ și pe $A_1 \cup A_2$. În plus, avem că

$$\int_{A_1} f = \int_{A_1 \cup A_2} f - \int_{A_2 - A_1} f.$$

Demonstrația se bazează pe proprietatea de aditivitate, ținând seama de $A_1 = (A_1 - A_2) \cup (A_1 \cap A_2)$ și, respectiv, $A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_1 - A_2)$.

Proprietatea de mărginire

Propoziție 7.68. Fie o funcție mărginită $f : A \rightarrow [m, M] \subset \mathbb{R}$ integrabilă pe A o mulțime mărginită și măsurabilă **Jordan**. Atunci

$$m \cdot m(A) \leq \int_A f \leq M \cdot m(A).$$

Demonstrație. Fie $(d_n)_n$ un sir de diviziuni **Jordan** a lui A cu $\lim_n \|d_n\| = 0$. Se observă că

$$m \cdot m(A) = m \cdot \sum_{k=1}^n m(A_k) \leq \sigma(f, d_n, \xi_{d_n}) \leq M \cdot \sum_{k=1}^n m(A_k) \leq M \cdot m(A)$$

pentru orice sistem de puncte intermediare ξ_{d_n} asociat lui d_n . Aplicând criteriul lui **Heine**, prin trecere la limită, se obține imediat afirmația din enunț. \square

Proprietatea de medie

Propoziție 7.69. Fie o funcție mărginită $f : A \rightarrow [m, M] \subset \mathbb{R}$ integrabilă pe A o mulțime mărginită și măsurabilă **Jordan**. Dacă funcția $g : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ este integrabilă pe A , atunci $f \cdot g$ este integrabilă pe A și există numărul real $\mu \in [m, M]$ astfel ca

$$\int_A f \cdot g = \mu \cdot \int_A g.$$

Demonstrație. Putem presupune, conform Remarcii 7.48, fără a micșora generalitatea că funcția g este mărginită pe A .

Ținând seama că $D(f \cdot g) \subset D(f) \cup D(g)$, prin aplicarea criteriului lui **Lebesgue** pentru funcțiile f, g și $f \cdot g$ se obține că $f \cdot g$ este integrabilă pe A .

Pe de altă parte, din $m \cdot g \leq f \cdot g \leq M \cdot g$ pe A , prin aplicarea proprietății de monotonie se deduce

$$m \cdot \int_A g \leq \int_A f \cdot g \leq M \cdot \int_A g,$$

ceea ce conduce la egalitatea din enunț, unde

$$\mu = \begin{cases} \frac{\int_A f \cdot g}{\int_A g}, & \int_A g \neq 0 \\ 0, & \int_A g = 0 \end{cases}. \quad \square$$

Proprietatea modulului

Propoziție 7.70. Dacă $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție integrabilă pe mulțimea mărginită și măsurabilă **Jordan** A , atunci $|f|$ este integrabilă pe A și

$$\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|.$$

Demonstrație. Dacă $f \in \mathcal{R}_A$, atunci, via Remarca 7.48, există o mulțime de măsură **Jordan** nulă $A_0 \subset A$ astfel că f este mărginită pe $A - A_0$. Dacă notăm cu f_0 restricția lui $|f|$ la $A - A_0$, din

$$D(f_0) \subset D(f)$$

prin aplicarea criteriului lui **Lebesgue** pentru f și f_0 se obține că $|f|$ este integrabilă pe $A - A_0$. Deoarece $m(A_0) = 0$, din Remarca 7.46 rezultă că $|f|$ este integrabilă și pe A_0 . Utilizând proprietatea de aditivitate, se obține în final că $|f|$ este integrabilă și pe $A = A_0 \cup (A - A_0)$.

Pe de altă parte, se observă că pentru orice sir $(d_n)_n$ de diviziuni **Jordan** a lui A cu $\lim_n \|d_n\| = 0$ și orice sistem de puncte intermediare ξ_{d_n} asociat lui d_n , avem

$$|\sigma(f, d_n, \xi_{d_n})| \leq \sigma(|f|, d_n, \xi_{d_n}).$$

Aplicând criteriul lui **Heine**, prin trecere la limită, se obține imediat afirmația din enunț. \square

Proprietatea de medie pentru funcții continue

Propoziție 7.71. Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime compactă conexă și măsurabilă **Jordan**, iar $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și $g : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ o funcție integrabilă pe A . Atunci există punctul $a \in A$ astfel ca

$$(i) \quad \int_A f \cdot g = f(a) \cdot \int_A g;$$

$$(ii) \int_A f = f(a) \cdot m(A).$$

Demonstrația rezultă imediat din propoziția 7.69, ținând seama că din continuitatea lui f pe A rezultă $f(A) = [m, M]$, unde m și M sunt marginile lui f pe A și $\mu = f(a)$, $a \in A$. Egalitatea (ii) se obține din (i) pentru $g(x) = 1, \forall x \in A$. \square

Trecerea la limită sub semnul integral

Propoziție 7.72. Fie $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ un sir de funcții mărginite convergent uniform pe mulțimea mărginită și măsurabilă **Jordan** A , la funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă $f_n, n \in \mathbb{N}$ sunt integrabile pe A , pentru orice n , atunci $f = \lim_n f_n$ este integrabilă pe A , în plus

$$\int_A \lim_n f_n = \lim_n \int_A f_n.$$

Demonstrație. Dacă sirul $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ converge uniform către f pe A și $(f_n)_n$ sunt funcții mărginite, atunci f este mărginită și

$$D(f) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} D(f_n).$$

Prin aplicarea criteriului **Lebesgue** pentru $(f_n)_n$ și f se obține că f este integrabilă pe A .

Din convergența uniformă a sirului de funcții $(f_n)_n$ rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru orice $n \geq n(\varepsilon)$ și orice $x \in A$ avem

$$f(x) - \frac{\varepsilon}{m(A)} < f_n(x) < f(x) + \frac{\varepsilon}{m(A)}.$$

Folosind proprietatea de monotonie rezultă

$$\int_A f - \varepsilon < \int_A f_n < \int_A f + \varepsilon,$$

adică $\left| \int_A f_n - \int_A f \right| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n(\varepsilon)$. \square

Integrarea termen cu termen a seriilor de funcții

Corolar 7.73. Fie $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ un sir de funcții mărginite astfel încât seria de funcții $\sum_{n \geq 1} f_n$ este uniform convergentă pe mulțimea mărginită și

măsurabilă **Jordan** A , la funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă $f_n, n \in \mathbb{N}$ sunt integrabile pe A , pentru orice n , atunci suma seriei $f = \sum_{n \geq 1} f_n$ este integrabilă pe A , în plus

$$\int_A \sum_{n \geq 1} f_n = \sum_{n \geq 1} \int_A f_n.$$

Demonstrația rezultă imediat prin aplicarea propoziției precedente pentru sirul de funcții $F_n : A \rightarrow \mathbb{R}$, $F_n = \sum_{k=1}^n f_k$. \square

Perturbarea unei funcții integrabile

Propoziție 7.74. Fie funcțiile mărginite $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ și A o mulțime mărginită și măsurabilă **Jordan**. Dacă:

- g este integrabilă pe A :
- $f = g$ a.p.t. pe A , adică f este *perturbația* lui g pe o mulțime neglijabilă,

atunci f este integrabilă pe A și

$$\int_A f = \int_A g.$$

Demonstrație. Fie B mulțimea neglijabilă pe care f diferă de g . Înând seama că f este mărginită și reuniunea a două mulțimi neglijabile este neglijabilă, adică

$$D(f) \subset D(g) \cup B \in \mathcal{L}_0,$$

prin aplicarea criteriului **Lebesgue** pentru f se obține că f este integrabilă pe A .

Mai mult,

$$\int_A g = \int_{A-B} g + \int_B g = \int_A f. \square$$

7.3.3 Formule de calcul a integralelor multiple

Fie $A \subset \mathbb{R}^m$ și $B \subset \mathbb{R}^n$ mulțimi mărginite măsurabile **Jordan**, iar $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$. Pentru $x \in A$, respectiv $y \in B$ considerăm funcția

$$f_x : B \rightarrow \mathbb{R} \text{ respectiv } f_y : A \rightarrow \mathbb{R}$$

numită și secțiunea prin x , respectiv y a funcției f .

Definiție 7.75. Funcția $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ se zice *integrabilă parțial* pe $A \times B$, dacă pentru orice $x \in A, y \in B$ funcțiile f_x, f_y sunt integrabile pe B , respectiv A .

Ne punem pentru început problema relației dintre conceptele de integrabilitate și integrabilitate parțială. Spre deosebire de cazurile continuității

și diferențiabilității, unde continuitatea implică continuitatea parțială, iar diferențiabilitatea implică diferențiabilitatea parțială, la integrabilitate nu are loc nicio implicație între cele două concepte, fenomen subliniat de următoarele două exemple.

Exemplu 7.76 (Funcție integrabilă care nu este integrabilă parțial). Funcția

$$f : [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{q(y)-1}{q(y)}, & (x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \\ 1, & (x,y) \notin \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \end{cases}$$

unde $q(y)$ este numitorul lui y scris sub forma de fracție ireductibilă, este integrabilă pe $A \times B = [0,1] \times [0,1]$ căci este mărginită și continuă a.p.t. Ea nu este integrabilă parțial pe $B = [0,1]$, deoarece este discontinuă pe $[0,1]$ și deci nu este continuă a.p.t.

Exemplu 7.77 (Funcție integrabilă parțial care nu este integrabilă). Funcția

$$f : [-1,1] \times [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \cdot y}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

este integrabilă parțial pe $A \times B = [-1,1] \times [-1,1]$ și

$$\int_A f_y = \int_B f_x = 0,$$

deoarece f este impară în raport cu fiecare din variabilele sale. Cu toate acestea f nu este integrabilă pe $A \times B = [-1,1] \times [-1,1]$ fiind nemărginită, deși este continuă a.p.t.

În cazul în care $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă parțial pe $A \times B$ atunci are sens să definim funcțiile

$$g : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_B f_x = \int_B f(x,y) dy$$

numită și integrala cu parametru x asociată lui f și

$$h : B \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(y) = \int_A f_y = \int_A f(x,y) dx$$

numită și integrala cu parametru y asociată lui f .

Se pune problema integrabilității funcțiilor g și h pe A , respectiv B și relația cu integrabilitatea lui f .

În cazul în care g este integrabilă pe A , atunci integrala sa

$$\int_A g = \int_A \left(\int_B f(x,y) dy \right) dx$$

se numește *integrală iterată* în ordinea y, x a funcției f pe $A \times B$.

Analog, dacă h este integrabilă pe B , atunci integrala sa

$$\int_B h = \int_B \left(\int_A f(x, y) dx \right) dy$$

se numește *integrală iterată* în ordinea x, y a funcției f pe $A \times B$.

Corelația dintre conceptele de integrabilitate și integrabilitate parțială este și mai complexă după cum se poate vedea din

Exemplu 7.78 (Funcție integrabilă parțial care are integralele iterate diferite). Fie funcția

$$f : [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Cum f nu este mărginită pe $A \times B = [0,1] \times [0,1]$ rezultă că nu este integrabilă pe $[0,1] \times [0,1]$, deși f este continuă a.p.t. Totuși f este integrabilă parțial pe $[0,1] \times [0,1]$, deoarece $\int_A f_y, \int_B f_x$ sunt mărginite și continue a.p.t., iar

$$\int_A f_y = \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = \int_0^{\arctg \frac{1}{y}} \frac{\tg^2 \alpha - 1}{\tg^2 \alpha + 1} \cdot \frac{1}{y} d\alpha = -\frac{1}{2y} \sin\left(2 \arctg \frac{1}{y}\right), \quad y \neq 0.$$

Similar

$$\int_B f_x = \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = \int_0^{\arctg \frac{1}{x}} \frac{1 - \tg^2 \alpha}{\tg^2 \alpha + 1} \cdot \frac{1}{x} d\alpha = \frac{-1}{2x} \cdot \sin\left(2 \arctg \frac{1}{x}\right), \quad x \neq 0.$$

Mai mult, $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx$, adică integralele iterate

există, dar sunt diferite.

Următoarea teoremă datorată lui **G. Fubini**¹ dă o relație între integrala lui f și integralele iterate ale lui f .

Teoremă 7.79 (Fubini). Dacă $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă și integrabilă parțial pe $A \times B$, atunci g este integrabilă pe A , h este integrabilă pe B și

$$\int_{A \times B} f = \int_A g = \int_B h.$$

¹ **Guido Fubini** (1879-1943), matematician italian

Demonstrație. Din integrabilitatea pe $A \times B$ a funcției f rezultă că există numărul $I = \int_{A \times B} f \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât

pentru orice d diviziune **Jordan** a lui $A \times B$ cu $\|d\| < \delta(\varepsilon)$ și orice sistem de puncte intermediare să avem

$$|\sigma(f, d, \xi_d) - I| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1)$$

Fie $d_1 = \{A_1, \dots, A_r\}$ o diviziune **Jordan** a lui A cu $\|d_1\| < \delta(\varepsilon)$ și un sistem de puncte intermediare $\xi_{d_1} = \{\xi_1, \dots, \xi_r\}$ cu $\xi_i \in A_i, i = 1, \dots, r$, asociat lui d_1 .

Din integrabilitatea pe B a secțiunii f_{ξ_i} rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $0 < \delta_2 < \delta(\varepsilon)$ încât pentru orice diviziune $d_2 = \{B_1, \dots, B_s\}$ **Jordan** a lui B cu $\|d_2\| < \delta_2$ și orice sistem de puncte intermediare $\eta_{d_2} = \{\eta_1, \dots, \eta_s\}$ cu $\eta_i \in B_i, i = 1, \dots, s$, să avem

$$|\sigma(f_{\xi_i}, d_2, \eta_{d_2}) - g(\xi_i)| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot r \cdot m(A_i)}, \quad \forall i = 1, \dots, r. \quad (2)$$

Considerăm diviziunea $d = \{A_i \times B_j \mid i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, s\}$ **Jordan** a lui $A \times B$ cu $\|d\| < \delta(\varepsilon)$. Fie de asemenea sistemul de puncte intermediare

$$\zeta_d = \{(\xi_i, \eta_j) \mid i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, s\}$$

asociat diviziunii **Jordan** d a lui $A \times B$.

Din inegalitățile (1) și (2) obținem

$$\begin{aligned} |\sigma(g, d_1, \xi_{d_1}) - I| &\leq |\sigma(g, d_1, \xi_{d_1}) - \sigma(f, d, \xi_d)| + |\sigma(f, d, \xi_d) - I| = \\ &= \left| \sum_{i=1}^r g(\xi_i) \cdot m(A_i) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s f(\xi_i, \eta_j) \cdot m(A_i) \cdot m(B_j) \right| + |\sigma(f, d, \xi_d) - I| < \\ &< \sum_{i=1}^r |g(\xi_i) - \sigma(f_{\xi_i}, d_2, \eta_{d_2})| \cdot m(A_i) + \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{i=1}^r \frac{\varepsilon}{2 \cdot r \cdot m(A_i)} \cdot m(A_i) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

deci g este integrabilă pe A și $\int_{A \times B} f = \int_A g$. Analog se procedează și pentru h . \square

Corolar 7.80. Dacă funcția $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă parțial pe $A \times B$ și are integralele iterate diferite, atunci f nu este integrabilă pe $A \times B$.

Demonstrația derivă imediat din teorema lui **Fubini**. \square

Se pune problema dacă o funcție integrabilă parțial cu integrale iterate egale este integrabilă. Răspunsul este negativ, fenomen subliniat de

Exemplu 7.81 (Funcție neintegrabilă cu integrale iterate egale). Funcția

$$f : [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \\ 1, & (x,y) \notin \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \end{cases}$$

este integrabilă parțial pe $A \times B = [0,1] \times [0,1]$ și are integralele iterate nule, dar nu este integrabilă pe $A \times B = [0,1] \times [0,1]$, deoarece este discontinuă pe $A \times B$.

Să aplică teorema lui **Fubini** pentru calculul integralelor duble și triple.

Definiție 7.82. O submulțime măsurabilă **Jordan** $A \subset \mathbb{R}^2$ se numește *simplă în raport cu axa Oy , respectiv Ox* dacă există două funcții continue $\varphi, \psi : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ cu $\varphi \leq \psi$ astfel ca

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \quad \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\},$$

respectiv

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq y \leq b, \quad \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}.$$

Corolar 7.83. Fie $A \subset \mathbb{R}^2$ o mulțime simplă în raport cu Oy și $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilă pe A . Dacă pentru orice $x \in [a,b]$ secțiunea f_x este integrabilă pe $[\varphi(x), \psi(x)]$, atunci funcția

$$g : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y) dy$$

este integrabilă pe $[a,b]$ și

$$\int_a^b g = \int_A f,$$

adică

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y) dy \right) dx.$$

Demonstrație. Fie $c, d \in \mathbb{R}$ cu $c < d$ astfel încât $A \subset [a,b] \times [c,d]$.

Prelungim funcția f la

$$\bar{f} : [a,b] \times [c,d] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \bar{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in A \\ 0, & (x,y) \notin A \end{cases}$$

Se observă că din ipoteză rezultă că \bar{f} este integrabilă și integrabilă parțial pe $D = [a,b] \times [c,d]$ și $\int_D \bar{f} = \int_A f$. Prin aplicarea teoremei lui **Fubini** funcției \bar{f} pe D se obține că funcția

$$\bar{g} : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \bar{g}(x) = \int_c^d f_x(y) dy = g(x), \quad \forall x \in [a,b]$$

este integrabilă pe $[a,b]$ și are integrala egală cu integrala pe A a lui f . \square

Pentru cazul mulțimilor simple în raport cu axa Ox are loc

Corolar 7.84. Fie $A \subset \mathbb{R}^2$ o mulțime simplă în raport cu Ox și $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilă pe A . Dacă pentru orice $y \in [a,b]$ secțiunea f_y este integrabilă pe $[\varphi(y), \psi(y)]$, atunci funcția

$$h : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y) dx$$

este integrabilă pe $[a,b]$ și

$$\int_a^b h = \int_A f,$$

adică

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y) dx \right) dy.$$

Demonstrația este absolut analoagă cu cea a corolarului precedent. \square

Pentru calculul integralelor triple introducem

Definiție 7.85. O mulțime măsurabilă **Jordan** $A \subset \mathbb{R}^3$ se numește *simplă în raport cu axa Oz* dacă există o mulțime măsurabilă **Jordan** $B \subset \mathbb{R}^2$ și două funcții continue $\varphi, \psi : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ cu $\varphi \leq \psi$ astfel ca

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in B, \quad \varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y)\}.$$

Analog se definesc mulțimile simple în raport cu axele Ox și, respectiv, Oy .

Are loc

Corolar 7.86. Fie $A \subset \mathbb{R}^3$ o mulțime simplă în raport cu axa Oz și funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilă pe A . Dacă pentru orice $(x,y) \in B$ secțiunea $f_{(x,y)}$ este integrabilă pe $[\varphi(x,y), \psi(x,y)]$, atunci funcția

$$g : B \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x,y) = \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z) dz$$

este integrabilă pe B și $\int_B g = \int_A f$, adică

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iint_B \left(\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

Demonstrație. Se procedează analog ca în demonstrația Corolarului 7.83, aplicându-se teorema lui **Fubini** funcției $\bar{f} : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\bar{f}(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & (x, y, z) \in A \\ 0, & (x, y, z) \notin A \end{cases}. \quad \square$$

Corolar 7.87. Fie funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ mărginită și integrabilă pe mulțimea $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, (y, z) \in D(x) \subset \mathbb{R}^2\}$ mărginită și măsurabilă **Jordan**, unde $D(x) \subset \mathbb{R}^2$ este o mulțime mărginită și măsurabilă **Jordan** pentru orice $x \in [a, b]$, astfel încât pentru orice $x \in [a, b]$ secțiunea f_x este integrabilă pe mulțimea $D(x)$, atunci funcția

$$h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \iint_{D(x)} f(x, y, z) dy dz$$

este integrabilă pe $[a, b]$ și $\int_a^b h = \int_A f$, adică

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\iint_{D(x)} f(x, y, z) dy dz \right) dx.$$

Ca și în cazul $p=1$, integralele multiple se pot calcula cu ajutorul teoremei schimbării de variabile.

Spre deosebire de cazul $p=1$, unde schimbarea de variabilă avea drept scop *simplificarea* funcției integrant în integrala multiplă, schimbarea de variabilă pentru cazul $p>1$ are două scopuri:

- *simplificarea* domeniului de integrare;
- *simplificarea* funcției integrant.

În general nu pot fi atinse ambele scopuri simultan și de aceea se preferă, de regulă, numai simplificarea domeniului de integrare.

Teoremă 7.88 (formula schimbării de variabile). Fie $D \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime deschisă, iar $h : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ o aplicație regulată injectivă cu $\overline{A} \subset h(D)$. Dacă $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă pe A , atunci $B = h^{-1}(A)$ este măsurabilă **Jordan**, funcția $(f \circ h) \cdot |J_h|$ este integrabilă pe B și

$$\int_A f = \int_B (f \circ h) \cdot |J_h|.$$

Demonstrația este complicată și poate fi găsită de exemplu în **Rudin**.

Exemplu 7.89 (Trecerea la coordonate polare generalizate)

Fie mulțimea deschisă $D = (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ și aplicația $h: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ definită prin

$$h(r, \theta) = (a \cdot r \cdot \cos \theta, b \cdot r \cdot \sin \theta), \quad a, b \in \mathbb{R}_+^*.$$

Se observă că h este o aplicație regulată injectivă pe D cu $J_h(r, \theta) = a \cdot b \cdot r \neq 0$ și

$$\mathbb{R}^2 - h(D) \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\},$$

adică complementara față de \mathbb{R}^2 a mulțimii $h(D)$ este neglijabilă, deci $\int_A f = \int_{h^{-1}(A)} (f \circ h) \cdot |J_h|$ pentru orice funcție $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilă pe $A \supset h(D)$.

Astfel dacă $A \subset \mathbb{R}^2$ este o mulțime mărginită măsurabilă **Jordan** cu $\overline{A} \subset h(D)$ și funcția $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă pe A , atunci funcția

$$g: B = h^{-1}(A) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(r, \theta) = a \cdot b \cdot r \cdot f(a \cdot r \cdot \cos \theta, b \cdot r \cdot \sin \theta)$$

este integrabilă pe mulțimea B și

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_B a \cdot b \cdot r \cdot f(a \cdot r \cdot \cos \theta, b \cdot r \cdot \sin \theta) dr d\theta.$$

În particular să calculăm integrala

$$\iint_A \sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$$

unde

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \cdot x \leq x^2 + y^2 \leq 2 \cdot a \cdot x, y \geq 0, a > 0\}.$$

Utilizând transformarea în coordonate polare definită prin

$$h: (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad h(r, \theta) = (r \cdot \cos \theta, r \cdot \sin \theta),$$

domeniul A (fig. 7.1) devine

$$B = h^{-1}(A) = \left\{ (r, \theta) \mid \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], r \in [a \cdot \cos \theta, 2 \cdot a \cdot \cos \theta] \right\}.$$

Jacobianul transformării fiind egal cu r rezultă că:

$$\iint_A \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \iint_{\Delta} r \cdot r \cdot dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{a \cdot \cos \theta}^{2 \cdot a \cdot \cos \theta} r^2 dr \right) d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8 \cdot a^3 \cdot \cos^3 \theta - a^3 \cdot \cos^3 \theta}{3} d\theta = \frac{7}{3} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta = \frac{7}{3} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \theta) \cdot \cos \theta d\theta = \frac{14}{9}.$$

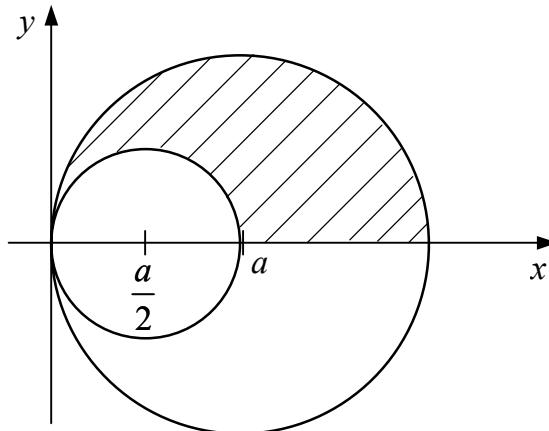


Fig. 7.1

Exemplu 7.90 (Trecerea la coordonate sferice generalizate)

Fie mulțimea deschisă $D = (0, \infty) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (-\pi, \pi)$ și aplicația

$h: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ definită prin

$$h(r, \varphi, \theta) = (a \cdot r \cdot \sin \varphi \cdot \cos \theta, b \cdot r \cdot \sin \varphi \cdot \sin \theta, c \cdot r \cdot \cos \varphi). \quad a, b, c \in \mathbb{R}_+^*.$$

Se observă că h este o aplicație regulată injectivă pe D cu jacobianul $J_h(r, \varphi, \theta) = a \cdot b \cdot c \cdot r^2 \cdot \sin \varphi \neq 0$ și

$$\mathbb{R}^3 - h(D) \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\},$$

ceea ce arată că complementara față de \mathbb{R}^3 a mulțimii $h(D)$ este neglijabilă, deci $\int_A f = \int_{h^{-1}(A)} (f \circ h) \cdot |J_h|$ pentru orice funcție $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilă pe $A \supset h(D)$.

Astfel dacă $A \subset \mathbb{R}^3$ este o mulțime mărginită măsurabilă **Jordan** cu $\overline{A} \subset h(D)$ și funcția $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă pe A , atunci funcția $g: B = h^{-1}(A) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(r, \varphi, \theta) = abcr^2 \sin \varphi \cdot f(ar \sin \varphi \cos \theta, br \sin \varphi \sin \theta, cr \cos \varphi)$ este integrabilă pe mulțimea B și

$$\begin{aligned} & \iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \\ &= \iiint_{B=h^{-1}(A)} abcr^2 \sin \varphi \cdot f(ar \sin \varphi \cos \theta, br \sin \varphi \sin \theta, cr \cos \varphi) dr d\varphi d\theta \end{aligned}$$

În particular să calculăm integrala

$$J = \iiint_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz, \quad a, b, c \in \mathbb{R}_+^*,$$

dacă mulțimea $\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \leq 0, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \right\}$.

Folosind trecerea la coordonate sferice generalizate definită de aplicația

$$h : (0,1) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$h(r, \varphi, \theta) = (a \cdot r \cdot \sin \varphi \cdot \cos \theta, b \cdot r \cdot \sin \varphi \cdot \sin \theta, c \cdot r \cdot \cos \varphi)$$

domeniul Ω (fig. 7.2) devine

$$B = h^{-1}(\Omega) = (0,1) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Se observă că h este o aplicație regulată injectivă pe D cu jacobianul

$$J_h(r, \varphi, \theta) = r^2 \cdot \sin \varphi \neq 0.$$

Folosind teorema de schimbare de variabile, obținem

$$J = a \cdot b \cdot c \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} \cdot r^2 \cdot \sin \theta dr d\varphi d\theta = a \cdot b \cdot c \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{16} \sin \theta d\varphi d\theta = \frac{\pi^2}{32} a \cdot b \cdot c.$$

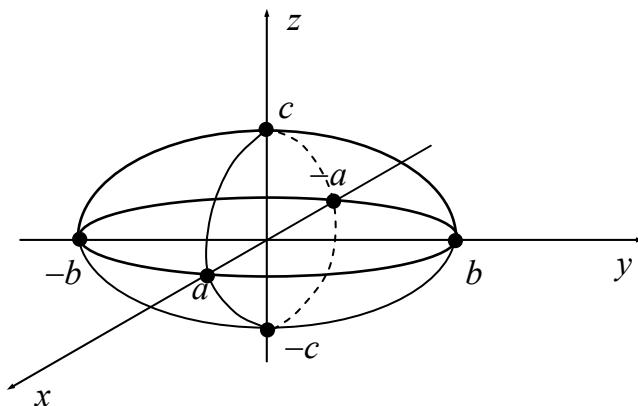


Fig. 7.2

Exemplu 7.91 (Trecerea la coordonate cilindrice generalizate). Fie mulțimea deschisă $D = (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$ și aplicația $h : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ definită prin

$$h(r, \theta, z) = (a \cdot r \cdot \cos \theta, b \cdot r \cdot \sin \theta, z), \quad a, b \in \mathbb{R}_+^*.$$

Se observă că h este o aplicație regulată injectivă pe D cu jacobianul $J_h(r, \theta, z) = a \cdot b \cdot r \neq 0$ și

$$\mathbb{R}^3 - h(D) \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\},$$

ceea ce arată că complementara față de \mathbb{R}^3 a mulțimii $h(D)$ este neglijabilă, deci $\int_A f = \int_{h^{-1}(A)} (f \circ h) \cdot |J_h|$ pentru orice funcție $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilă pe $A \supset h(D)$.

Astfel dacă $A \subset \mathbb{R}^3$ este o mulțime mărginită măsurabilă **Jordan** cu $\bar{A} \subset h(D)$ și funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă pe A , atunci funcția

$$g : B = h^{-1}(A) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(r, \theta, z) = a \cdot b \cdot r \cdot f(a \cdot r \cdot \cos \theta, b \cdot r \cdot \sin \theta, z)$$

este integrabilă pe mulțimea B și

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{B=h^{-1}(A)} a \cdot b \cdot r \cdot f(a \cdot r \cdot \cos \theta, b \cdot r \cdot \sin \theta, z) dr d\theta dz.$$

În particular să calculăm măsura mulțimii Ω mărginite de suprafața $z^2 = (x^2 + y^2)^3$ și de planele $z = 0$ și $z = a^3$, $a > 0$.

Folosind trecerea la coordonate cilindrice generalizate definită de aplicația $h : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $h(r, \theta, z) = (r \cdot \cos \theta, r \cdot \sin \theta, z)$ mulțimea Ω devine

$$B = h^{-1}(\Omega) = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq a, -\pi \leq \theta \leq \pi, 0 \leq z \leq r^3\}.$$

Se observă că h este o aplicație regulată injectivă cu jacobianul $J_h(r, \theta, z) = r \neq 0$. Folosind teorema de schimbare de variabile, obținem

$$\text{măs}(\Omega) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^a \int_0^{r^3} dz dr d\theta = 2\pi \int_0^a \rho^4 d\rho = \frac{2\pi a^5}{5}.$$

7.3.4 Exerciții

1. Fie $B \subset \mathbb{R}^p$ măsurabilă **Jordan**. Să se arate că o mulțime $A \subset B$ este măsurabilă **Jordan** dacă și numai dacă funcția

$$\varphi_A : B \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in B - A \end{cases}$$

este integrabilă pe B , în plus avem că $m(A) = \int_B \varphi_A$.

2. Să se arate că dacă funcțiile $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ sunt integrabile pe A , atunci $f \cdot g, f^2, \sqrt{|f|}$ și

$$f^+ = \frac{f + |f|}{2}, \quad f^- = \frac{|f| - f}{2}$$

sunt integrabile pe A .

3. Să se arate că:

- (i) dacă $\{x \in A \mid f(x) \neq 0\} \in \mathcal{J}_0$, atunci funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă pe A și $\int_A f = 0$;
- (ii) dacă $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă pe A și $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ are proprietatea că multimea $\{x \in A \mid f(x) \neq g(x)\} \in \mathcal{J}_0$, atunci și g este integrabilă pe A cu $\int_A f = \int_A g$;
- (iii) dacă $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ sunt integrabile pe A și $f = g$ a.p.t., atunci $\int_A f = \int_A g$;
- (iv) dacă $f : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ este integrabilă pe A și $\int_A f = 0$, atunci $f = 0$ a.p.t.;
- (v) dacă $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă pe A , atunci $\int_A |f| = 0$ dacă și numai dacă $f = 0$ a.p.t.;
- (vi) dacă $f : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ este continuă cu $\int_A f = 0$, atunci $f = 0$.

4. Să se calculeze $\iint_A f(x, y) dx dy$, unde

- (i) $f(x, y) = (x + y)^2 \cdot e^{x^2}$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 2 \cdot x \leq 2, x + y \geq 0\}$;
- (ii) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 2 \cdot y + 1}$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x \leq y \leq x \leq 1\}$;
- (iii) $f(x, y) = x \cdot y + x$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq y + 2 \leq 4 - x, x^2 + y^2 \geq 2\}$.

5. Fie mulțimea $A \subset \mathbb{R}^3$ măsurabilă **Jordan** și proiecția canonică $p_3 : A \rightarrow \mathbb{R}$, $p_3(x, y, z) = z$ cu proprietățile:

- $p_3(A)$ este măsurabilă **Jordan**;
- $\forall z \in p_3(A)$, $A_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in A\}$ este măsurabilă **Jordan**.

Să se arate că dacă $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă pe A și pentru orice $z \in p_3(A)$ secțiunea f_z este integrabilă pe A_z , atunci funcția

$$g: p_3(A) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(z) = \iint_{A_z} f(x, y, z) dx dy$$

este integrabilă pe $p_3(A)$ și

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_{p_3(A)} \left(\iint_{A_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz.$$

6. Să se calculeze $\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz$, unde

- (i) $f(x, y, z) = x + y + z$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3 \mid x + y + z \leq 1\}$;
- (ii) $f(x, y, z) = 1$, $A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \quad 0 \leq z \leq h, \quad a, b \in \mathbb{R}_+^*\right\}$;
- (iii) $f(x, y, z) = \sqrt{z^2 - x^2 - y^2}$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z^2, \quad 0 \leq z \leq 1\}$.

7. Fie mulțimile $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq x\}$ și

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \frac{1}{4} - x \leq \frac{1}{4} \right\}.$$

Să se arate că aplicația $h: A \rightarrow B$, $h(x, y) = (x - y, y - x^2)$ are proprietatea că $h(A) = B$ și

$$\int_{h(A)} f \neq \int_A (f \circ h) \cdot |J_h|,$$

unde $f(x) = 1$, $\forall x \in B$.

8. Să se calculeze $\iint_A f(x, y) dx dy$, unde

- (i) $f(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, \quad x \leq |y|\}$;
- (ii) $f(x, y) = \frac{y^2}{x^2}$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2 \cdot x\}$;
- (iii) $f(x, y) = x \cdot y \cdot \sqrt[4]{x^4 + y^4}$, $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid \frac{x^4}{3} \leq y^4 \leq 3 \cdot x^4, 1 \leq x^4 + y^4 \leq 16 \right\}$.

9. Să se calculeze $\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz$, unde

- (i) $f(x, y, z) = z^2$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z\}$;
- (ii) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq x + y + z\}$;
- (iii) $f(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3 \mid \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 1\}$.

10. Fie $a = (a_1, a_2, a_3)$ și $b = (b_1, b_2, b_3)$ cu $a_k \leq b_k$, $k = 1, 2, 3$ și mulțimea $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$, iar funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilă și integrabilă parțial pe A cu proprietatea că există $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^p pe A cu

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3), \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in A.$$

Notând cu $\Delta_a^b F = \Delta_{a_1}^{b_1} \Delta_{a_2}^{b_2} \Delta_{a_3}^{b_3} F(x_1, x_2, x_3)$, unde de exemplu

$$\Delta_{a_2}^{b_2} F(x_1, x_2, x_3) = F(x_1, b_2, x_3) - F(x_1, a_2, x_3),$$

se cere:

(i) să se determine $\Delta_a^b F$;

(ii) să se arate că $\int_A f = \Delta_a^b F$;

(iii) utilizând rezultatul de la punctul precedent, să se calculeze $\int_A f$, unde

$$f(x, y, z) = (1 - x^2 \cdot y^2 \cdot z^2) \cdot \cos(x \cdot y \cdot z) - 3 \cdot x \cdot y \cdot z \cdot \sin(x \cdot y \cdot z)$$

și $A = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times (\pi, 2 \cdot \pi)$.

7.4 Integrale multiple generalizate pe mulțimi măsurabile Jordan

7.4.1 Integrabilitate pe mulțimi nemărginite măsurabile Jordan

Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime nemărginită măsurabilă **Jordan**, iar $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilă pe orice secțiune

$$A_r = \{a \in A \mid \|a\| < r\}$$

a lui A . Aceste ipoteze le vom păstra peste tot în cadrul acestei secțiuni. Are sens să considerăm funcția

$$F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(r) = \int_{A_r} f.$$

Definiție 7.92. Funcția f se numește *integrabilă Riemann generalizat* (pe scurt *integrabilă generalizat*) pe A , dacă F are limită finită pentru $r \rightarrow \infty$.

Prin definiție, numărul real $\lim_{r \rightarrow \infty} F(r)$ se notează cu

$$\int_A f = \int_A f(x) dx$$

și se numește *integrală generalizată a funcției f pe mulțimea A* (nemărginită și măsurabilă **Jordan**).

Dacă $p = 2$, atunci se utilizează notația

$$\int_A f(x) dx = \iint_A f(x, y) dx dy,$$

iar în cazul $p = 3$ se utilizează notația

$$\int_A f(x) dx = \iiint_A f(x, y, z) dx dy dz.$$

Exemplu 7.93. Fie $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \geq 1\}$ și funcția

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\|x\|^\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Se observă că prin trecere la coordonatele polare și utilizând teorema lui **Fubini**, avem

$$F(r) = \int_{A_r} f = \int_0^{2\pi} \left(\int_1^r \frac{\rho}{\rho^\alpha} d\rho \right) d\alpha = 2\pi \cdot \int_1^r \rho^{1-\alpha} d\rho = \begin{cases} 2\pi \cdot \ln r, & \alpha = 2 \\ 2\pi \cdot \frac{r^{2-\alpha} - 1}{2-\alpha}, & \alpha \neq 2 \end{cases}$$

deci

$$\lim_{r \rightarrow \infty} F(r) = \begin{cases} \infty, & 0 < \alpha \leq 2; \\ \frac{2\pi}{\alpha-2}, & \alpha > 2. \end{cases}$$

În consecință, f este integrabilă generalizat pe A dacă și numai dacă $\alpha > 2$, caz în care

$$\int_A f = \frac{2\pi}{\alpha-2}.$$

Exemplu 7.94. Fie $A = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \geq 1\}$ și funcția

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\|x\|^\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Se observă că prin trecere la coordonatele sferice și utilizând teorema lui **Fubini**, avem

$$F(r) = \int_{A_r} f = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \left(\int_1^r \frac{\rho^2 \cdot \sin \varphi}{\rho^\alpha} d\rho \right) d\varphi \right) d\theta = 4\pi \cdot \int_1^r \rho^{2-\alpha} d\rho = \begin{cases} 4 \cdot \pi \cdot \ln r, & \alpha = 3 \\ 4 \cdot \pi \cdot \frac{r^{3-\alpha} - 1}{3-\alpha}, & \alpha \neq 3 \end{cases}$$

deci

$$\lim_{r \rightarrow \infty} F(r) = \begin{cases} \infty, & 0 < \alpha \leq 3; \\ \frac{4\pi}{\alpha-3}, & \alpha > 3. \end{cases}$$

În consecință, f este integrabilă generalizat pe A dacă și numai dacă $\alpha > 3$, caz în care

$$\int_A f = \frac{4 \cdot \pi}{\alpha - 3}.$$

Pentru cazul funcțiilor pozitive are loc

Propoziție 7.95. Fie $f : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ integrabilă pe orice secțiune A_r a mulțimii nemărginite măsurabile **Jordan** $A \subset \mathbb{R}^p$. Atunci f este integrabilă generalizat pe A dacă și numai dacă există un sir crescător $(r_n)_n$ nemărginit astfel încât sirul $(F(r_n))_n$ este mărginit.

Demonstrația rezultă prin aplicarea teoremei lui **H.E. Heine**² pentru limita funcțiilor monotone, observând în prealabil că dacă $f \geq 0$, atunci pentru $r_2 > r_1$ avem

$$F(r_2) - F(r_1) = \int_{A_{r_2} - A_{r_1}} f \geq 0,$$

deci F este crescătoare. \square

Un criteriu important de integrabilitate în sens generalizat ne oferă

Teoremă 7.96 (Cauchy-Bolzano). Funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă în sens generalizat pe mulțimea nemărginită măsurabilă **Jordan** dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $r_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $r_2 > r_1 > r_\varepsilon$ să avem

$$\left| \int_{A_{r_2} - A_{r_1}} f \right| < \varepsilon.$$

² Heinrich Eduard Heine (1821-1881), matematician german

Demonstrația rezultă imediat prin aplicarea criteriului **Cauchy-Bolzano** pentru limita funcției F , observând în prealabil că

$$F(r_2) - F(r_1) = \int_{A_{r_2} - A_{r_1}} f. \square$$

Corolar 7.97. Dacă $|f|$ este integrabilă generalizat pe A , atunci și f este integrabilă generalizat pe A .

Demonstrația rezultă imediat din criteriul precedent și faptul că

$$\left| \int_{A_{r_2} - A_{r_1}} f \right| < \int_{A_{r_2} - A_{r_1}} |f|. \square$$

Remarcă 7.98. În terminologia clasică, în loc de f este integrabilă generalizat pe A , se mai zice că $\int_A f$ este *convergentă*, iar în loc de $|f|$ este

integrabilă generalizat pe A se spune că $\int_A f$ este *absolut convergentă*. O integrală convergentă care nu este absolut convergentă se numește *semiconvergentă*. Un exemplu de astfel de integrală este

Exemplu 7.99 (Integrală generalizată semiconvergentă)

Fie funcția

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cdot \varphi_{A_n}(x),$$

unde φ_{A_n} este funcția caracteristică a mulțimii $A_n = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid n-1 \leq \|x\| < n\}$.

Se observă că dacă notăm cu $s = [r]$, atunci

$$\begin{aligned} F(r) &= \int_{A_r} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cdot \varphi_{A_n}(x) = \\ &= \int_{A_1} \varphi_{A_1} - \frac{1}{2^2} \cdot \int_{A_2 - A_1} \varphi_{A_2} + \dots + \frac{(-1)^{s-1}}{s^2} \cdot \int_{A_s - A_{s-1}} \varphi_{A_s} + \frac{(-1)^s}{s^2} \cdot \int_{A_r - A_s} \varphi_{A_{s+1}} = \\ &= \pi \cdot \sum_{k=1}^s \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \cdot (2k-1) + \pi \cdot \frac{(-1)^s}{(s+1)^2} \cdot (r+s). \end{aligned}$$

Deoarece

$$\left| \pi \cdot \frac{(-1)^s}{(s+1)^2} \cdot (r+s) \right| \leq \pi \cdot \frac{r+s}{(s+1)^2} \leq \frac{2\pi}{r} \rightarrow 0,$$

pentru $r \rightarrow \infty$ obținem, via criteriul lui **G.W. Leibniz**³ relativ la convergența seriilor alternate, că există

$$\lim_{r \rightarrow \infty} F(r) = \pi \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \cdot (2k-1) \in \mathbb{R}.$$

În consecință, f este integrabilă generalizat pe A și

$$\int_A f = \pi \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \cdot (2k-1).$$

Analog, deoarece

$$\int_{A_r} |f| = \pi \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)}{k^2} + \pi \cdot \frac{r+s}{(s+1)^2}$$

tinde la infinit pentru $r \rightarrow \infty$, rezultă că $|f|$ nu este integrabilă generalizat pe A . \square

Un alt criteriu de integrabilitate în sens generalizat este criteriul comparației dat de

Propoziție 7.100. Fie $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile pe orice secțiune A_r a mulțimii nemărginite și măsurabile **Jordan** A și cu proprietatea că există $c > 0$ cu $f \leq c \cdot g$.

- (i) Dacă g este integrabilă generalizat pe A , atunci f este integrabilă generalizat pe A .
- (ii) Dacă f nu este integrabilă generalizat pe A , atunci nici g nu este integrabilă generalizat pe A .

Demonstrație. Să notăm cu

$$F(r) = \int_{A_r} f, \quad G(r) = \int_{A_r} g$$

și să observăm că din faptul că f și g sunt pozitive rezultă că F și G sunt crescătoare, deci au limită pentru $r \rightarrow \infty$; în plus, din $f \leq c \cdot g$ rezultă $F \leq c \cdot G$.

- (i) Dacă g este integrabilă generalizat pe A , atunci $\lim_{r \rightarrow \infty} G(r) < \infty$ și din $F \leq c \cdot G$ rezultă că $\lim_{r \rightarrow \infty} F(r) < \infty$, adică f este integrabilă generalizat pe A .
- (ii) Dacă f nu este integrabilă generalizat pe A , atunci $\lim_{r \rightarrow \infty} F(r) = \infty$ și din $F \leq c \cdot G$ rezultă că și $\lim_{r \rightarrow \infty} G(r) = \infty$, ceea ce arată că g nu este integrabilă generalizat pe A . \square

³ Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), matematician german

7.4.2 Proprietățile funcțiilor integrabile pe mulțimi nemărginite măsurabile Jordan

Are loc

Propoziție 7.101. Fie $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile pe orice secțiune A_r a mulțimii nemărginite și măsurabile **Jordan** A și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- (i) Dacă f și g sunt integrabile generalizat pe A , atunci $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ este integrabilă generalizat pe A și

$$\int_A (\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = \alpha \cdot \int_A f + \beta \cdot \int_A g \text{ (liniaritate).}$$

- (ii) Dacă f și g sunt integrabile generalizat pe A și $f \leq g$, atunci

$$\int_A f \leq \int_A g \text{ (monotonie).}$$

- (iii) Dacă $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ cu A_1 și A_2 măsurabile **Jordan**, iar f este integrabilă pe A_1 și pe A_2 , atunci f este integrabilă generalizat pe A și

$$\int_{A=A_1 \cup A_2} f = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f \text{ (aditivitate).}$$

Demonstrație.

- (i) Din proprietatea de liniaritate a integralei pe mulțimi mărginite măsurabile **Jordan** se obține

$$\int_{A_r} (\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = \alpha \cdot \int_{A_r} f + \beta \cdot \int_{A_r} g.$$

Trecând la limită pentru $r \rightarrow \infty$ se obține afirmația din enunț.

- (ii) Din proprietatea de monotonie a integralei pe mulțimi mărginite măsurabile **Jordan**, din $f \leq g$ rezultă

$$\int_{A_r} f \leq \int_{A_r} g,$$

de unde prin trecere la limită pentru $r \rightarrow \infty$ obținem $\int_A f \leq \int_A g$.

- (iii) Ținând seama că $A_r = (A_1)_r \cup (A_2)_r$, $(A_1)_r \cap (A_2)_r = \emptyset$ și utilizând proprietatea de aditivitate a integralei pe mulțimi mărginite măsurabile **Jordan**, rezultă

$$\int_{A_r = (A_1)_r \cup (A_2)_r} f = \int_{(A_1)_r} f + \int_{(A_2)_r} f$$

de unde pentru $r \rightarrow \infty$ se obține afirmația din enunț. \square

7.4.3 Funcții nemărginite integrabile pe mulțimi mărginite măsurabile Jordan

În această secțiune vom defini integrabilitatea în sens generalizat pentru o funcție $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ nemărginită în orice vecinătate a unui punct $a \in \partial A$.

Fie deci A o mulțime mărginită măsurabilă **Jordan** și f integrabilă pe

$$C_r(A) = \{a \in A \mid \|x - a\| \geq r\} = A - D(a, r)$$

pentru orice $r > 0$.

Are sens să considerăm funcția

$$F : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(r) = \int_{C_r(A)} f.$$

Definiție 7.102. Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime mărginită măsurabilă **Jordan** și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ nemărginită în orice vecinătate a punctului $a \in \partial A$ și integrabilă pe $C_r(A)$ pentru orice $r > 0$.

Funcția f se numește *integrabilă generalizat pe A* , dacă funcția F are limită finită în origine.

Prin definiție numărul real $\lim_{r \rightarrow 0} F(r)$ se notează cu

$$\int_A f = \int_A f(x) dx$$

și se numește *integrala generalizată a funcției nemărginite f pe mulțimea mărginită A* .

Exemplu 7.103. Fie $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \geq \|x\| > 0\}$, $a = (0, 0) \in \partial A$ și funcția

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\|x\|^\beta}, \quad \beta > 0.$$

Se observă că prin trecere la coordonatele polare și utilizând teorema lui **Fubini**, avem

$$F(r) = \int_{C_r(A)} f = \int_0^{2\pi} \left(\int_r^1 \frac{\rho}{\rho^\beta} d\rho \right) d\alpha = 2\pi \cdot \int_r^1 \rho^{1-\beta} d\rho = \begin{cases} -2\pi \cdot \ln r, & \beta = 2 \\ 2\pi \cdot \frac{1-r^{2-\beta}}{2-\beta}, & \beta \neq 2 \end{cases}$$

deci

$$\lim_{r \rightarrow 0} F(r) = \begin{cases} \infty, & \beta \geq 2; \\ \frac{2 \cdot \pi}{2-\beta}, & \beta < 2. \end{cases}$$

În consecință, f este integrabilă generalizat pe A dacă și numai dacă $0 < \beta < 2$, caz în care

$$\int_A f = \frac{2 \cdot \pi}{2-\beta}.$$

Exemplu 7.104. $A = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \geq \|x\| > 0\}$, $a = (0, 0, 0) \in \partial A$ și funcția

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\|x\|^\beta}, \quad \beta > 0.$$

Se observă că prin trecere la coordonatele sferice și utilizând teorema lui **Fubini**, avem

$$\begin{aligned} F(r) &= \int_{C_r(A)} f = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \left(\int_r^1 \frac{\rho^2 \cdot \sin \varphi}{\rho^\beta} d\rho \right) d\varphi \right) d\theta = \\ &= 4 \cdot \pi \cdot \int_r^1 \rho^{2-\beta} d\rho = \begin{cases} 4 \cdot \pi \cdot \ln r, & \beta = 3 \\ 4 \cdot \pi \cdot \frac{1-r^{3-\beta}}{3-\beta}, & \beta \neq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

deci

$$\lim_{r \rightarrow \infty} F(r) = \begin{cases} \infty, & \beta \geq 3; \\ \frac{4 \cdot \pi}{3-\beta}, & 0 < \beta < 3. \end{cases}$$

În consecință, f este integrabilă generalizat pe A dacă și numai dacă $0 < \beta < 3$, caz în care

$$\int_A f = \frac{4 \cdot \pi}{3-\beta}.$$

Remarcă 7.105. Toate rezultatele obținute în secțiunile 4.1 și 4.2 se extind, cu modificările evidente ale enunțurilor și la cazul studiat în această secțiune.

Astfel, de exemplu, dacă $f \geq 0$, atunci $F(r) = \int_{C_r(A)} f$ este

descrescătoare, deci în acest caz f este integrabilă generalizat pe A dacă și numai dacă există un sir descrescător $(r_n)_n$ convergent la zero astfel încât sirul $(F(r_n))_n$ să fie mărginit (via criteriul lui **Heine** pentru integrabilitatea generalizată a funcțiilor nemărginite pe mulțimi mărginite).

7.4.4 Exerciții

1. Să se studieze dacă $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă generalizat, iar în caz afirmativ să se calculeze $\int_A f$, unde

$$(i) \quad f(x, y) = \sin(x^2 + y^2), \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\};$$

$$(ii) \quad f(x, y) = \frac{\sin x}{e^{x+y}}, \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\};$$

$$(iii) \quad f(x, y) = \cos(x^2 + y^2) \cdot e^{-(x^2+y^2)}, \quad A = \mathbb{R}^2.$$

2. Fie funcția $f: A \rightarrow \mathbb{R}_+$ integrabilă pe orice submulțime măsurabilă **Jordan** a lui A , iar A este mărginită și măsurabilă **Jordan**. Atunci f este integrabilă generalizat pe A dacă și numai dacă există un sir crescător $(B_n)_n$ de părți ale lui A astfel ca sirul $\left(\int_{B_n} f \right)_n$ să fie convergent în \mathbb{R} .

3. Să se studieze dacă $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă generalizat, iar în caz afirmativ să se calculeze $\int_A f$, unde

$$(i) \quad f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}, \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\};$$

$$(ii) \quad f(x, y) = x^\alpha \cdot y^\beta, \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1, y \geq 1\};$$

$$(iii) \quad f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad A = [0, 1] \times [1, \infty).$$

7.5 Integrale cu parametru

7.5.1 Integrale cu parametru pe mulțimi mărginite măsurabile Jordan

Fie mulțimile $A \subset \mathbb{R}^m$ și $B \subset \mathbb{R}^n$ mărginite măsurabile **Jordan**, iar funcția $f: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilă parțial pe $A \times B$. Atunci pentru orice $x \in A$ și orice $y \in B$ secțiunile sale f_x, f_y sunt integrabile pe B , respectiv A . Deci, are sens să definim funcțiile

$$g: A \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_B f_x = \int_B f(x, y) dy \quad (1)$$

numită și integrală cu parametru x asociată funcției f și

$$h: B \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(y) = \int_A f_y = \int_A f(x, y) dx \quad (2)$$

numită și integrală cu parametru y asociată funcției f .

În vederea studiului limitei integralelor cu parametru introducem

Definiție 7.106. Spunem că funcția $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ are *limită uniformă* în raport cu y în punctul de acumulare $a \in A'$, dacă pentru orice sir de puncte $(a_n)_n \subset A$, $a_n \neq a$ convergent la a , sirul de funcții

$$\varphi_n : B \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_n(y) = f(a_n, y)$$

converge uniform pe B .

Dacă f are limită uniformă în a , atunci funcția

$$f_0 : B \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_0(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n, y)$$

se numește *limită uniformă a funcției f în punctul a* și se notează

$$f(x, y) \xrightarrow[x \rightarrow a]{u} f_0(y), \quad \forall y \in B.$$

Trecerea la limită în raport cu parametru a integralelor (1) sau (2) este soluționată de

Teoremă 7.107 (Transferul limitei). Fie funcția $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice $x \in A$ secțiunea sa f_x este integrabilă pe B , adică f este integrabilă parțial în raport cu y . Dacă

$$f(x, y) \xrightarrow[x \rightarrow a]{u} f_0(y), \quad \forall y \in B,$$

atunci f_0 este integrabilă pe B și funcția g (vezi (1)) are limită în punctul a cu

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \int_B f(x, y) dy = \int_B \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) dy = \int_B f_0(y) dy.$$

Demonstrație. Fie sirul de puncte $(a_n)_n \subset A$, $a_n \neq a$ convergent la a . Atunci sirul de funcții $\varphi_n : B \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_n(y) = f(a_n, y)$ este integrabil pe B cu limită uniformă pe B , $f_0(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(y)$, $\forall y \in B$. Din teorema de transfer de integrabilitate de la siruri de funcții rezultă că funcția limită f_0 este integrabilă pe B și există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_B \varphi_n(y) dy = \int_B \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(y) dy = \int_B f_0(y) dy,$$

adică $\lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) = \int_B f_0(y) dy$. Din teorema lui Heine pentru limită rezultă că funcția g are limită în punctul a și

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \int_B f_0(y) dy. \square$$

Remarcă 7.108. Ultima egalitate este utilă să fie scrisă

$$\lim_{x \rightarrow a} \int_B f(x, y) dy = \int_B \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) dy,$$

adică are loc o intervertire a operațiilor de integrare și trecere la limită.

În vederea studiului continuității integralelor cu parametru introducem

Definiție 5.109. Funcția $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *continuă în punctul $a \in A$ uniform în raport cu $y \in B$* , dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice $x \in A$ cu $\|x - a\| < \delta$ și orice $y \in B$ să avem

$$|f(x, y) - f(a, y)| < \varepsilon.$$

Continuitatea integralelor cu parametru este demonstrată de

Teoremă 7.110 (Transferul continuității). Fie funcția $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilă parțial în raport cu y pe B . Dacă f este continuă în punctul $a \in A$ uniform în raport cu $y \in B$, atunci și funcția g este continuă în punctul a .

Demonstrație. Dacă f este continuă punctul $a \in A$ uniform în raport cu $y \in B$, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice $x \in A$ cu $\|x - a\| < \delta$ și orice $y \in B$ avem

$$|f(x, y) - f(a, y)| < \frac{\varepsilon}{m(B)}.$$

Atunci

$$|g(x) - g(a)| \leq \int_B |f(x, y) - f(a, y)| < \varepsilon,$$

pentru orice $x \in A$ cu $\|x - a\| < \delta$, deci g este continuă în a . \square

Corolar 7.111. Dacă A și B sunt mulțimi compacte măsurabile **Jordan** și $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă pe $A \times B$, atunci g este continuă uniform pe B .

Demonstrație. Din continuitatea lui f pe compactul $A \times B$ rezultă că f este continuă uniform pe $A \times B$, ceea ce implică faptul că f este continuă în orice punct $a \in A$ uniform în raport cu $y \in B$. Din teorema precedentă rezultă că g este continuă pe mulțimea compactă A și deci g este continuă uniform pe A . \square

Teorema de derivabilitate a integralelor cu parametru este

Teorema 7.112 (G. W. Leibniz). Fie $A \subset \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^n$ mulțimi compacte măsurabile **Jordan**, iar $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ continuă cu proprietatea că este derivabilă parțial în raport cu variabila de indice i pe $A \times B$ pentru orice $i = 1, \dots, m$. Dacă $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ este continuă pe $A \times B$ pentru orice $i = 1, \dots, m$, atunci funcția

$$g : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_B f(x, y) dy$$

este de clasă C^1 pe A cu

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \int_B \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) dy, \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad \forall x \in A.$$

Demonstrație. Este suficient să considerăm doar cazul $m=1$ și $m(B)>0$.

Se observă că dacă $a \in A$, atunci prin aplicarea teoremei lui **Lagrange** funcției f_y obținem că pentru orice $x \in A$ există punctul c situat între a și x astfel ca

$$\begin{aligned} & \left| \frac{g(x) - g(a)}{x - a} - \int_B \frac{\partial f}{\partial x}(a, y) dy \right| \leq \int_B \left| \frac{f(x, y) - f(a, y)}{x - a} - \frac{\partial f}{\partial x}(a, y) \right| dy = \\ & = \int_B \left| \frac{\partial f}{\partial x}(c, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, y) \right| dy. \end{aligned}$$

Din continuitatea uniformă a lui $\frac{\partial f}{\partial x}$ pe mulțimea compactă $A \times B$ rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice $x \in A$ cu $\|x - a\| < \delta$ și orice $y \in B$ avem

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, y) \right| < \frac{\varepsilon}{m(B)},$$

ceea ce conduce la concluzia că g este derivabilă în punctul a cu derivată

$$g'(a) = \int_B \frac{\partial f}{\partial x}(a, y) dy.$$

Prin aplicarea teoremei 7.110 rezultă că g' este continuă, deci g este de clasă C^1 pe A . \square

Remarcă 7.113. Formula de derivare a integralelor cu parametru dată de teorema 7.112 se poate scrie astfel

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int_B f(x, y) dy \right) = \int_B \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) dy, \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad \forall x \in A,$$

adică o intervertire a operațiilor de integrare și derivare parțială.

Să considerăm cazul particular $B \subset \mathbb{R}$ și fie $u, v: A \rightarrow B$ două funcții cu $u \leq v$. În ipoteza că $f: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă parțial în raport cu y pe B are sens să definim funcția

$$g: A \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy,$$

deoarece existența integralei este asigurată de proprietatea de ereditate. Funcția g se numește integrală cu parametru cu limite variabile. Are loc

Corolar 7.114. Fie $A \subset \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}$ mulțimi compacte măsurabile **Jordan**, $u, v: A \rightarrow B$ două funcții de clasă C^1 pe A cu $u \leq v$, iar $f: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ continuă. Dacă f este derivabilă parțial în raport cu variabila de indice i pe

$A \times B$ pentru orice $i = 1, \dots, m$, având derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ continue pe $A \times B$ pentru orice $i = 1, \dots, m$, atunci funcția

$$g : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy$$

este de clasă C^1 pe A cu

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) dy + \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \cdot f(x, v(x)) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \cdot f(x, u(x)),$$

$\forall i = 1, \dots, m, \forall x \in A$.

Demonstrație. Se observă că $g(x) = G(x, u(x), v(x))$, unde

$$G(x, u, v) = \int_u^v f(x, y) dy.$$

Prin aplicarea teoremei precedente și a teoremei de diferențiabilitate a funcțiilor compuse se deduce că g este derivabilă parțial pe A cu

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial G}{\partial x_i}(x, u(x), v(x)) + \frac{\partial G}{\partial u}(x, u(x), v(x)) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial G}{\partial v}(x, u(x), v(x)) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) = \\ &= \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) dy - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \cdot f(x, u(x)) + \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \cdot f(x, v(x)), \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad \forall x \in A. \end{aligned}$$

Prin aplicarea teoremei de continuitate a integralelor cu parametru și a teoremei de continuitate a funcțiilor compuse se deduce că $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ este continuă pe

A și deci g este de clasă C^1 pe A . \square

Teorema de integrabilitate a integralelor cu parametru este

Teoremă 7.115 (G. Fubini). Fie $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilă parțial pe $A \times B$. Atunci

- funcția $g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \int_B f(x, y) dy$ este integrabilă pe mulțimea A ;
 - funcția $h : A \rightarrow \mathbb{R}$, $h(y) = \int_A f(x, y) dx$ este integrabilă pe mulțimea B ;
 - $\iint_{A \times B} f(x, y) dxdy = \int_A g(y) dy = \int_B h(x) dx$, adică
- $$\iint_{A \times B} f(x, y) dxdy = \int_A \left(\int_B f(x, y) dy \right) dx = \int_B \left(\int_A f(x, y) dx \right) dy.$$

Demonstrația a fost dată în secțiunea 9.3.

7.5.2 Integrale generalizate cu parametru

Fie $B \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime nemărginită măsurabilă **Jordan**, $A \subset \mathbb{R}^m$ și funcția $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice $x \in A$ secțiunea

$$f_x : B \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_x(y) = f(x, y)$$

este interabilă generalizat pe mulțimea B .

Deci are sens să definim funcția

$$g : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_B f_x = \int_B f(x, y) dy$$

numită și integrală generalizată cu parametru.

Atunci pentru orice sir crescător $(r_n)_n$ nemărginit, sirul

$$g_n : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \int_{B(r_n)} f_x$$

este convergent la funcția g , pentru orice $x \in A$, unde

$$B(r_n) := \{b \in B \mid \|b\| < r_n\}.$$

Definiție 7.116. Spunem că integrala generalizată $\int_B f(x, y) dy$ converge

uniform pe B sau că f este integrabilă generalizat uniform în raport cu x pe B și notăm $f \in \overline{\mathcal{R}}_B^u$, dacă pentru orice sir crescător nemărginit $(r_n)_n$ sirul de funcții $(g_n)_n$ converge uniform pe A la g .

Un criteriu de convergență uniformă a integralelor generalizate cu parametru este **criteriul majorării** dat de

Propoziție 7.117. Dacă există funcția $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilă generalizat pe mulțimea $B \in \overline{\mathcal{J}}$ și

$$|f(x, y)| \leq g(y), \quad \forall (x, y) \in A \times B,$$

atunci f este integrabilă generalizat uniform pe mulțimea B .

Demonstrație. Fie sirul crescător nemărginit $(r_n)_n$. Pentru a demonstra că sirul de funcții $(g_n)_n$ converge uniform pe A este suficient, conform criteriului lui **Cauchy** pentru convergență uniformă, să arătăm că sirul $(g_n)_n$ este uniform fundamental pe mulțimea A .

În adevăr, prin aplicarea criteriului **Cauchy-Bolzano** de integrabilitate generalizată funcției g rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ încât pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ și orice $x \in A$ și $p \in \mathbb{N}$ avem

$$\begin{aligned} |g_{n+p}(x) - g_n(x)| &= \left| \int_{B(r_{n+p}) - B(r_n)} f(x, y) dy \right| \leq \\ &\leq \int_{B(r_{n+p}) - B(r_n)} |f(x, y)| dy \leq \int_{B(r_{n+p}) - B(r_n)} g(y) dy < \varepsilon. \square \end{aligned}$$

Exemplu 7.118 (Convergență uniformă a funcției Gamma)

Se cunoaște că integrala generalizată

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty y^{x-1} \cdot e^{-y} dy,$$

numită și *funcția Gamma* a lui L. Euler⁴, este convergentă pentru orice $x > 0$.

Să arătăm că Γ converge uniform pe orice interval $I = [a, b]$ cu $0 < a < b \leq \infty$. În adevăr, dacă $x \leq b$ și $y \geq 1$, atunci

$$0 < y^{x-1} \cdot e^{-y} \leq y^{b-1} \cdot e^{-y}$$

și cum integrala

$$\int_1^\infty y^{b-1} \cdot e^{-y} dy$$

este convergentă, din criteriul precedent rezultă că $\int_1^\infty y^{x-1} \cdot e^{-y} dy$ este uniform convergentă pe intervalul $[a, b]$ cu $a > 0$.

Pe de altă parte, dacă $0 < a \leq x$ și $0 < y \leq 1$, atunci

$$y^{x-1} \cdot e^{-y} \leq y^{x-1} \leq y^{a-1}$$

și cum $a > 0$ rezultă că integrala $\int_0^1 y^{a-1} dy$ este convergentă, deci prin criteriul

precedent $\int_0^1 y^{x-1} \cdot e^{-y} dy$ converge uniform pe orice interval $[a, \infty)$ cu $a > 0$.

În consecință

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty y^{x-1} \cdot e^{-y} dy = \int_0^1 y^{x-1} \cdot e^{-y} dy + \int_1^\infty y^{x-1} \cdot e^{-y} dy$$

converge uniform pe orice interval $I = [a, b]$ cu $0 < a < b \leq \infty$. \square

⁴ Leonhard Euler, matematician elvețian, 1707-1783

Trecerea la limită sub integralele generalizate cu parametru este justificată de

Teoremă 7.119. Dacă $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilă generalizat uniform pe mulțimea B și există funcția $G : B \rightarrow \mathbb{R}$ astfel ca

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \stackrel{\text{uniform}}{=} f_0(y), \quad \forall y \in B,$$

atunci f_0 este integrabilă generalizat pe mulțimea B și funcția

$$g : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_B f(x, y) dy$$

are limită finită în punctul $a \in A'$ și

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \int_B f(x, y) dy = \int_B \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) dy = \int_B f_0(y) dy.$$

Demonstrație. Fie șirul $(r_n)_n \subset \mathbb{R}_+$ crescător, nemărginit. Din $f \in \overline{\mathcal{R}}_B^u$ rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) \stackrel{\text{uniform}}{=} g(x)$, $\forall x \in A$. Prin aplicarea Teoremei 7.107 pe mulțimea $B(r_n)$ obținem că există

$$\lim_{x \rightarrow a} g_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \int_{B(r_n)} f(x, y) dy = \int_{B(r_n)} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) dy = \int_{B(r_n)} f_0(y) dy, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Din teorema de limită de la șiruri de funcții rezultă că funcția g are limită finită în punctul $a \in A'$ egală cu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} g_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B(r_n)} f_0(y) dy =: \int_B f_0(y) dy. \square$$

Remarcă 7.120. Ultima egalitate se mai poate scrie sub forma

$$\lim_{x \rightarrow a} \int_B f(x, y) dy = \int_B \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) dy,$$

adică o intervertire a operațiilor de integrare generalizată și trecere la limită.

Teorema de continuitate a integralelor generalizate cu parametru este dată de

Teoremă 7.121. Fie $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilă generalizat uniform pe mulțimea B . Dacă f este continuă în punctul $a \in A$ uniform în raport cu $y \in B$, atunci funcția g este continuă în punctul a .

Demonstrație. Din $f \in \overline{\mathcal{R}}_B^u$ rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) \stackrel{\text{uniform}}{=} g(x)$, $\forall x \in A$.

Prin aplicarea Teoremei 7.110 pe mulțimea $B(r_n)$ rezultă că șirul de funcții $(g_n)_n$ este continuu în punctul a . Din teorema transferului continuității de la șiruri de funcții rezultă că g este continuă în punctul a . \square

Corolar 7.122. Fie $A \subset \mathbb{R}^m$ o mulțime compactă măsurabilă **Jordan**, iar $B \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime nemărginită măsurabilă **Jordan** cu proprietatea că orice secțiune a sa $B(r)$ este compactă. Dacă $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă pe $A \times B$ și integrabilă generalizat uniform pe B , atunci integrala generalizată cu parametru g , asociată lui f , este continuă uniform pe mulțimea A .

Demonstrația este analoagă cu demonstrația teoremei precedente, în locul teoremei 7.110 utilizându-se corolarul 7.111. \square

Teorema de derivabilitate a integralelor generalizate cu parametru este

Teoremă 7.123. Fie $A \subset \mathbb{R}^m$ o mulțime compactă măsurabilă **Jordan**, iar $B \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime nemărginită măsurabilă **Jordan** cu proprietatea că orice secțiune a sa $B(r)$ este compactă. Fie $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ continuă pe $A \times B$ și derivabilă parțial în raport cu variabila de indice i pentru orice $i = 1, \dots, m$.

Dacă $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ este continuă pe $A \times B$ și integrabilă generalizat uniform pe B pentru orice $i = 1, \dots, m$, atunci integrala generalizată cu parametru g , asociată lui f , este de clasă C^1 pe mulțimea A și

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \int_B \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) dy, \quad \forall x \in A, \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Demonstrație. Fie sirul $(r_n)_n \subset \mathbb{R}_+$ crescător, nemărginit. Prin aplicarea teoremei 7.112 funcției

$$g_n : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \int_{B(r_n)} f(x, y) dy = \int_{B(r_n)} f_x$$

și folosind faptul că $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \overline{\mathcal{P}}_B^u$ obținem că sirul $(g_n)_n$ este de clasă C^1 pe A cu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial g_n}{\partial x_i}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B(r_n)} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) dy \stackrel{\text{uniform}}{=} \int_B \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) dy, \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Din teorema de derivabilitate de la siruri de funcții rezultă că funcția

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x), \quad \forall x \in A$$

este derivabilă pe mulțimea A și are loc egalitatea din enunț. Din corolarul 7.122 rezultă că g este de clasă C^1 pe mulțimea A . \square

Remarcă 7.124. Egalitatea din enunțul teoremei precedente se rescrie astfel

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_B f(x, y) dy = \int_B \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) dy, \quad \forall x \in A, \quad \forall i = 1, \dots, m,$$

adică o intervertire a operațiilor de derivare și integrare în sens generalizat.

Teoremă 7.125. Fie $A \subset \mathbb{R}^m$ o mulțime compactă măsurabilă **Jordan**, iar $B \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime nemărginită măsurabilă **Jordan** cu proprietatea că orice secțiune a sa $B(r)$ este compactă.

Dacă $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă pe $A \times B$ și integrabilă generalizat uniform pe mulțimea B , atunci

$$g : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_B f(x, y) dy$$

este integrabilă pe mulțimea A , iar funcția

$$h : B \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(y) = \int_A f(x, y) dx$$

este integrabilă generalizat pe mulțimea B cu

$$\int_B h(y) dy = \int_A g(x) dx.$$

Demonstrație. Fie șirul $(r_n)_n \subset \mathbb{R}_+$ crescător, nemărginit. Prin aplicarea corolarului 7.111 funcției

$$g_n : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \int_{B(r_n)} f(x, y) dy = \int_{B(r_n)} f_x$$

rezultă că g_n este continuă pe A . Prin teorema de continuitate de la șiruri de funcții, cum $\overset{\text{uniform}}{\lim}_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x)$, $\forall x \in A$, rezultă că funcția limită g este continuă pe mulțimea A , ceea ce asigură integrabilitatea sa pe A . Din teorema lui **Fubini** aplicată restricției lui f la $A \times B(r_n)$ rezultă că $g_n \in \mathcal{R}_A$, $h \in \mathcal{R}_{B(r_n)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și

$$\int_A g_n(x) dx = \int_{B(r_n)} h(y) dy, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prin aplicarea teoremei transferului integrabilității de la șiruri de funcții rezultă că există

$$\int_B h(y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B(r_n)} h(y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n(x) dx = \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) dx = \int_A g(x) dx. \square$$

Remarcă 7.126. Ultima egalitate se mai poate scrie în forma

$$\int_B \left(\int_A f(x, y) dx \right) dy = \int_A \left(\int_B f(x, y) dy \right) dx,$$

adică are loc o intervertire a operațiilor de integrare și integrare în sens generalizat.

Teorema de integrabilitate generalizată a integralelor generalizate cu parametru este

Teoremă 7.127. Fie $A \subset \mathbb{R}^m$ și $B \subset \mathbb{R}^n$ mulțimi nemărginite măsurabile **Jordan** cu proprietatea că orice secțiune a lor este compactă.

Fie $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ continuă pe $A \times B$, integrabilă generalizat uniform pe mulțimea A și pe B .

Dacă cel puțin una dintre integralele iterate ale lui $|f|$ este convergentă, atunci

➤ funcția

$$g : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_B f(x, y) dy$$

este integrabilă generalizat pe mulțimea A ,

➤ funcția

$$h : B \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(y) = \int_A f(x, y) dx$$

este integrabilă generalizat pe mulțimea B și

$$\int_B h(y) dy = \int_A g(x) dx.$$

Demonstrație. Presupunem că integrala iterată

$$\int_B \left(\int_A |f(x, y)| dx \right) dy$$

este convergentă, adică funcția

$$\bar{h} : B \rightarrow \mathbb{R}, \quad \bar{h}(y) = \int_A |f(x, y)| dx$$

este integrabilă generalizat pe mulțimea B .

Din $|h| \leq \bar{h} \in \overline{\mathcal{R}}_B$, prin utilizarea criteriului comparației rezultă că și h este integrabilă generalizat pe B .

Fie sirul $(r_n)_n \subset \mathbb{R}_+$ crescător, nemărginit. Aplicând teorema precedentă restricției lui f la $A(r_n) \times B$, rezultă că g este integrabilă pe $A(r_n)$ și funcția

$$h_n : B \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_n(y) = \int_{A(r_n)} f(x, y) dx$$

este integrabilă generalizat pe B și

$$\int_{A(r_n)} g(x) dx = \int_B h_n(y) dy, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Urmează să trecem la limită pentru $n \rightarrow \infty$ în această egalitate. Să justificăm existența limitei în partea dreaptă a egalității. Pentru aceasta vom aplica teorema 7.119 pentru funcția

$$H : \mathbb{N} \times B \rightarrow \mathbb{R}, \quad H(n, y) = h_n(y).$$

Din inegalitatea

$$|H(n, y)| \leq \int_{A(r_n)} |f(x, y)| dx \leq \bar{h}(y), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall y \in B$$

prin aplicarea criteriului majorării (propoziția 7.117) obținem că integrala

$$\int_B h_n(y) dy = \int_B H(n, y) dy$$

este uniform convergentă. Din teorema 7.119 obținem că h este integrabilă generalizat pe B și există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_B h_n(y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B H(n, y) dy = \int_B \lim_{n \rightarrow \infty} H(n, y) dy = \int_B \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(y) dy = \int_B h(y) dy.$$

Trecând la limită în egalitatea (1), pentru $n \rightarrow \infty$ se obține în final că g este integrabilă generalizat pe mulțimea A și integrala sa pe A coincide cu integrala lui h pe B . \square

Remarcă 7.128. Egalitatea din enunțul teoremei precedente arată că

$$\int_B \left(\int_A f(x, y) dx \right) dy = \int_A \left(\int_B f(x, y) dy \right) dx,$$

adică are loc o intervertire a operațiilor de integrare în sens generalizat.

7.5.3 Exerciții

1. Utilizând teorema 7.107, să se arate că funcția $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ nu are limită uniformă în punctul $a = 0$, unde:

$$(i) \quad f(x, y) = \frac{y}{x^2} \cdot e^{-y^2/x^2}, \quad A = (0, \infty), \quad B = [0, 1];$$

$$(ii) \quad f(x, y) = \frac{x^2 \cdot y}{(x^2 + y^2)^2}, \quad A = (0, \infty), \quad B = [0, 1].$$

2. Să se studieze continuitatea funcțiilor:

$$(i) \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_0^1 \operatorname{arctg}(x^2 + y^2) dy;$$

$$(ii) \quad h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(y) = \int_0^1 \operatorname{sgn}(x - y) dx.$$

3. Să se studieze diferențiabilitatea funcției

$$h : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \int_B f(x, y) dy,$$

unde $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ este dată de:

- (i) $f(x, y) = \begin{cases} \ln \sqrt{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0 \\ -1, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}, \quad A = B = [0, 1];$
- (ii) $f(x, y) = \frac{\ln(1 + x \cdot y)}{1 + y^2}, \quad A = \mathbb{R}_+, \quad B = [0, 1];$
- (iii) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad A = (0, \infty), \quad B = [0, 1].$

4. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă. Utilizând formula lui **Leibniz**, să se calculeze:

- (i) $g''(x)$ pentru $g(x) = \int_0^1 f(y) \cdot |x - y| dy, \quad x \in \mathbb{R};$
- (ii) $\frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}$ pentru

$$g(x_1, x_2) = \int_{\substack{x_1 \cdot x_2 \\ x_1 \\ x_2}}^{x_1 \cdot x_2} (x_1 - x_2 \cdot y) \cdot f(y) dy, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*.$$

5. Utilizând teorema de derivare a integralelor cu parametru, să se calculeze:

- (i) $I = \int_0^1 \frac{\ln(1 + y)}{1 + y^2} dy;$
- (ii) $I = \int_0^\pi \frac{1}{(x_1 + x_2 \cdot \cos y)^2} dy, \quad x_1 \geq x_2 > 0;$
- (iii) $I = \int_0^\pi \ln(x^2 - 2 \cdot x \cdot \cos y + 1) dy, \quad x \in (0, 1).$

6. Prin aplicarea teoremei de integrabilitate a integralelor cu parametru funcției

$$f : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^y, \quad b > a > 0$$

să se calculeze integrala funcției

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x^b - x^a}{\ln x}, & x \in (0, 1); \\ 0, & x \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

7. Să se studieze convergența uniformă a integralei generalizate

$$h: A \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \int_B f(x, y) dy,$$

unde

- (i) $f(x, y) = x \cdot e^{-x \cdot y}$, $A = [0, 1)$, $B = \mathbb{R}_+$;
- (ii) $f(x, y) = y \cdot e^{-x \cdot y} \cdot \cos y$, $A = [1, \infty)$, $B = \mathbb{R}_+$.

8. Să se studieze aplicabilitatea teoremei de limită de la integrale generalizate cu parametru pentru $a = \infty$ și $f: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$, unde:

$$\begin{aligned} & \triangleright f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{x^2 + y^2}, & y \leq x \\ 0, & y > x \end{cases}, \quad A = [1, \infty), \quad B = \mathbb{R}_+; \\ & \triangleright f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y^3} \cdot e^{-\frac{|x|}{2y^2}}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}, \quad A = [1, \infty), \quad B = \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

9. Să se studieze continuitatea funcției

$$g: \left[0, \frac{1}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_1^\infty \frac{y^{x-1}}{1+y} dy.$$

10. Să se calculeze cu ajutorul teoremei de derivare a integralelor generalizate cu parametru următoarele integrale generalizate:

$$\begin{aligned} & \triangleright I = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctgx}}{1+x^2} dx; \\ & \triangleright J = \int_0^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx. \end{aligned}$$

11. Utilizând teorema de integrabilitate generalizată a integralelor generalizate cu parametru, să se calculeze următoarele integrale generalizate:

$$\begin{aligned} & \triangleright I = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx; \\ & \triangleright J = \int_0^\infty \frac{\cos x - \cos 2x}{x} dx. \end{aligned}$$

12. (calculul integralei S.D. Poisson⁵)

Fie funcția $f : \mathbb{R}_+^{*^3} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, t) = e^{-t \cdot x} \cdot \frac{\sin(x \cdot y)}{x}$. Să se arate că

- integrala generalizată cu parametru

$$h : \mathbb{R}_+^{*^2} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(y, t) = \int_0^\infty f(x, y, t) dx$$

converge uniform;

- $\frac{\partial h}{\partial y}$ este integrabilă generalizat uniform pe \mathbb{R}_+^* ;
- cu ajutorul teoremei de derivare a integralelor generalizate cu parametru să se arate că

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{1}{t^2 + y^2}, \quad h(y, t) = \operatorname{arctg} \frac{y}{t};$$

$$\text{➤ } \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{t \searrow 0} h(1, t) = \frac{\pi}{2} \text{ (integrala Poisson).}$$

13. (calculul integralei Euler-Poisson)

Fie funcția $f : \mathbb{R}_+^{*^2} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x \cdot e^{-x^2 \cdot (1+y^2)}$.

- Să se arate că integrala generalizată cu parametru

$$h : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(y) = \int_0^\infty f(x, y) dx$$

este integrabilă generalizat pe \mathbb{R}_+^* și $\int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(x, y) dx \right) dy = \frac{\pi}{4}$.

- Să se arate că integrala generalizată cu parametru

$$g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_0^\infty f(x, y) dy$$

este integrabilă generalizat pe \mathbb{R}_+^* și $\int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(x, y) dy \right) dx = \left(\int_0^\infty e^{-t^2} dt \right)^2$.

- Să se arate folosind teorema de integrabilitate generalizată a integralelor generalizate cu parametru, că

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ (integrala Euler-Poisson).}$$

⁵ Siméon Denis Poisson, 1781-1840, matematician francez

14. (calculul integralei Fresnel⁶)

Fie funcția $f : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = e^{-y^2 \cdot x} \cdot \sin y$.

➤ Să se arate că integrala generalizată cu parametru

$$h : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(y) = \int_0^\infty f(x, y) dx$$

este integrabilă generalizat pe \mathbb{R}_+^* și $\int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(x, y) dx \right) dy = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{2}}$.

➤ Să se arate că integrala generalizată cu parametru

$$g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_0^\infty f(x, y) dy$$

este integrabilă generalizat pe \mathbb{R}_+^* și $\int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(x, y) dy \right) dx = \sqrt{\pi} \cdot \int_0^\infty \sin t^2 dt$.

➤ Să se arate folosind teorema de integrabilitate generalizată a integralelor generalizate cu parametru, că

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ (integrala Fresnel).}$$

15. Să se enunțe și să se demonstreze variantele rezultatelor din secțiunea 5.2 pentru cazul integralelor generalizate cu parametru generate de funcții $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ nemărginite în orice vecinătate a unui punct $b \in \overline{B} - B$, unde B este mărginită măsurabilă **Jordan**.

⁶ Augustin Jean Fresnel, 1788-1827, matematician francez

CAPITOLUL 8

INTEGRAREA FORMELOR DIFERENȚIABILE DE GRADUL ÎNTÂI ȘI DOI

În acest capitol vom prezenta câteva elemente de calcul integral pentru forme diferențiabile de gradul I și II în \mathbb{R}^n , cunoscute tradițional sub denumirea de *integrale curbilinii* și, respectiv, *de suprafață*. Sunt demonstreate formulele de legătură între aceste integrale și integralele duble și triple, obținându-se aşa-numitele *formule stocksiene* (Green¹, Gauss²-Ostrogradski³, Stokes⁴).

8.1 Integrale curbilinii

8.1.1 Drumuri și curbe în \mathbb{R}^n

O aplicație continuă definită pe un interval compact cu valori în $A \subset \mathbb{R}^n$, $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ se mai numește *drum* în A .

Mulțimea $I(\gamma) = \{\gamma(t) \mid t \in [a, b]\}$ se mai numește imaginea drumului γ .

Dacă pentru orice $t_0 \in [a, b]$ există

$$\gamma'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \in \mathbb{R}^n,$$

atunci drumul γ se numește derivabil sau diferențiabil.

Dacă

$$\Delta \in \mathcal{D}[a, b], \quad a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_n = b$$

este o diviziune a segmentului $[a, b]$, atunci numărul real

$$V(\gamma; \Delta) = \sum_{k=1}^n \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|$$

¹ George Green, matematician englez, 1793-1841

² Johann Carl Friedrich Gauss, matematician german, 1777-1855

³ Mikhail Vasilevich Ostrogradski, matematician ucrainian, 1801-1862

⁴ George Gabriel Stokes, matematician irlandez, 1819-1903

se numește *variația drumului* γ relativ la diviziunea Δ , iar numărul din $\overline{\mathbb{R}}_+$

$$V\gamma = \sup_{\substack{a \\ \Delta \in \mathcal{D}[a,b]}}^b V(\gamma; \Delta)$$

se numește *variația totală a drumului* γ sau *lungimea drumului* γ și notăm

$$l(\gamma) = \sup_{\substack{a \\ \Delta \in \mathcal{D}[a,b]}}^b V\gamma.$$

Definiție 8.1. Drumul $\gamma : [a, b] \rightarrow A \subset \mathbb{R}^n$ se numește:

- *închis*, dacă $\gamma(a) = \gamma(b)$;
- *simplu*, dacă γ este injectivă;
- *rectificabil*, dacă $l(\gamma) < \infty$;
- cu *tangentă continuă*, dacă γ este de clasă C^1 ;
- cu *tangentă continuă pe porțiuni*, dacă există o diviziune $\Delta \in \mathcal{D}[a, b]$ astfel încât restricția lui γ la fiecare interval parțial $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \dots, n$, este de clasă C^1 ;
- *neted*, dacă γ este de clasă C^1 și $\|\gamma'(t)\| \neq 0$, $\forall t \in [a, b]$.

Remarcă 8.2. Au loc implicațiile γ neted $\Rightarrow \gamma$ cu tangentă continuă $\Rightarrow \gamma$ cu tangentă continuă pe porțiuni $\Rightarrow \gamma$ rectificabil.

Dacă γ este cu tangentă continuă pe porțiuni, atunci γ este diferențială cu excepția eventual a unei mulțimi finite și deci aplicația γ' este definită a.p.t. pe $[a, b]$.

Definiție 8.3. Drumurile $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ se numesc:

- de *extremități comune*, dacă $\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2)$, $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2)$;
- *justapozabile*, dacă $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$;
- *echivalente* și notăm $\gamma_1 \sim \gamma_2$, dacă există un homeomorfism cresător $h : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$ de clasă C^1 astfel încât $\gamma_1 = \gamma_2 \circ h$.

Dacă drumurile $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sunt justapozabile, atunci definim drumul $\gamma_1 \cup \gamma_2 : [a_1, b_1 + b_2 - a_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ prin

$$(\gamma_1 \cup \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a_1, b_1]; \\ \gamma_2(t + a_2 - b_1), & t \in (b_1, b_1 + b_2 - a_2]. \end{cases}$$

Se observă că $I(\gamma_1 \cup \gamma_2) = I(\gamma_1) \cup I(\gamma_2)$, motiv pentru care drumul $\gamma_1 \cup \gamma_2$ se mai numește reuniunea drumurilor γ_1 și γ_2 .

Exemplu 8.4. Fie $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ și $\gamma^- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definit prin

$$\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t)$$

numit și opusul drumului γ . Se observă că $I(\gamma) = I(\gamma^-)$, drumurile γ și γ^- sunt justapozabile, iar drumul $\gamma \cup \gamma^-$ este un drum închis.

Remarcă 8.5. Se vede imediat că dacă drumurile γ_1 și γ_2 sunt justapozibile și cu tangentă continuă pe porțiuni respectiv rectificabile, atunci și drumul $\gamma_1 \cup \gamma_2$ este cu tangentă continuă pe porțiuni, respectiv rectificabil.

Remarcă 8.6. Se vede ușor că echivalența drumurilor în \mathbb{R}^n are proprietățile:

- $\gamma \sim \gamma$ (reflexivitate);
- dacă $\gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow \gamma_2 \sim \gamma_1$ (simetrie);
- dacă $\gamma_1 \sim \gamma_2$ și $\gamma_2 \sim \gamma_3$, atunci $\gamma_3 \sim \gamma_1$ (tranzitivitate).

În consecință, relația \sim este o relație de echivalență în mulțimea drumurilor în \mathbb{R}^n .

Definiție 8.7. O clasă de drumuri echivalente în \mathbb{R}^n se numește curbă în \mathbb{R}^n . Proprietățile curbelor sunt similare proprietăților drumurilor.

Propoziție 8.8. Fie $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ două drumuri echivalente. Atunci:

- (i) $I(\gamma_1) = I(\gamma_2)$;
- (ii) dacă γ_2 este *simplu*, atunci și γ_1 este *simplu*;
- (iii) dacă γ_2 este *închis*, atunci și γ_1 este *închis*;
- (iv) dacă γ_2 este *cu tangentă continuă sau cu tangentă continuă pe porțiuni*, atunci și γ_1 este *cu tangentă continuă, respectiv cu tangentă continuă pe porțiuni*;
- (v) dacă γ_2 este *rectificabil*, atunci și γ_1 este *rectificabil* și $l(\gamma_1) = l(\gamma_2)$;
- (vi) dacă γ_2 este *neted*, atunci și γ_1 este *neted*.

Demonstrație. (i) Din definiția 8.3 obținem

$$I(\gamma_1) = \gamma_1([a_1, b_1]) = \gamma_1(h([a_2, b_2])) = \gamma_2([a_2, b_2]) = I(\gamma_2).$$

(ii) Dacă γ_2 este injectivă și h este un homeomorfism, atunci și $\gamma_1 = \gamma_2 \circ h$ este injectivă, adică γ_1 este simplu.

(iii) Dacă $\gamma_2(a_2) = \gamma_2(b_2)$ și $\gamma_1 \sim \gamma_2$, atunci

$$\gamma_1(a_1) = \gamma_2(h(a_1)) = \gamma_2(a_2) = \gamma_2(b_2) = \gamma_2(h(b_1)) = \gamma_1(b_1),$$

deci γ_1 este închisă.

(iv) Dacă γ_2 este cu tangentă continuă și $\gamma_1 \sim \gamma_2$, atunci există homeomorfismul h de clasă C^1 astfel ca $\gamma_1 = \gamma_2 \circ h$, deci γ_1 este cu tangentă continuă. Dacă γ_2 este cu tangentă continuă pe porțiuni și $\gamma_1 \sim \gamma_2$, atunci există o diviziune $\Delta \in \mathcal{D}[a_2, b_2]$ încât restricția lui γ_2 la orice interval parțial al

diviziunii Δ este o aplicație de clasă C^1 . Prin homeomorfismul h diviziunea Δ trece în diviziunea $h(\Delta) \in \mathcal{D}[a_1, b_1]$ cu proprietatea că restricția lui $\gamma_1 = \gamma_2 \circ h$ la orice interval parțial al acestei diviziuni este o aplicație de clasă C^1 , fapt ce arată că drumul γ_1 este cu tangentă continuă pe porțiuni.

(v) Dacă γ_2 este rectificabil și $\gamma_1 \sim \gamma_2$, iar $\Delta \in \mathcal{D}[a_1, b_1]$ este o diviziune arbitrară, atunci

$$\begin{aligned} V(\gamma_1, \Delta) &= \sum_{k=1}^n \|\gamma_1(t_k) - \gamma_1(t_{k-1})\| = \\ &= \sum_{k=1}^n \|\gamma_2(h(t_k)) - \gamma_2(h(t_{k-1}))\| = V(\gamma_1, h(\Delta)) \leq \frac{b_2}{a_2} \gamma_2 < \infty, \end{aligned}$$

deci γ_1 este rectificabil cu

$$l(\gamma_1) = \frac{b_1}{a_1} \gamma_1 \leq \frac{b_2}{a_2} \gamma_2 = l(\gamma_2).$$

Inegalitatea în sens contrar rezultă din simetria relației de echivalență a drumurilor. Prin urmare, $l(\gamma_1) = l(\gamma_2)$.

(vi) Din regula de derivare a funcțiilor compuse și definiția 8.3 rezultă că dacă $\gamma_1 \sim \gamma_2$, atunci există homeomorfismul h astfel ca

$$\gamma'_1(t) = \gamma'_2(h(t)) \cdot h'(t), \quad t \in [a_1, b_1],$$

de unde deducem că dacă γ_2 este neted, atunci și γ_1 are această proprietate.

Propoziția precedentă conduce în mod natural la

Definiție 8.9. O curbă C se numește:

- *închisă*, dacă există un drum $\gamma \in C$ închis;
- *simplă*, dacă există un drum $\gamma \in C$ simplu;
- *rectificabilă*, dacă există un drum $\gamma \in C$ rectificabil;
- *cu tangentă continuă*, dacă există un drum $\gamma \in C$ cu tangentă continuă;
- *cu tangentă continuă pe porțiuni*, dacă există un drum $\gamma \in C$ cu tangentă continuă pe porțiuni;
- *netedă*, dacă există un drum $\gamma \in C$ neted.

Mulțimea $I(C) = I(\gamma)$, $\gamma \in C$ se numește *imaginea curbei* C .

În exemplul de mai jos vom arăta că:

- un drum nu trebuie confundat cu imaginea sa, deoarece există drumuri cu aceeași imagine aparținând la curbe diferite;
- lungimea unui drum nu trebuie confundată cu lungimea imaginii sale.

Exemplu 8.10. Fie drumurile $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definite prin

$$\gamma_k(t) = (f_k(t), g_k(t)), \quad k = 1, 2, 3,$$

$$\text{unde } f_1(t) = t, \quad f_2(t) = \begin{cases} t \cdot \sin \frac{\pi}{2 \cdot t}, & t \in (0, 1], \\ 0, & t = 0 \end{cases}, \quad f_3(t) = \begin{cases} 2 \cdot t, & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ 2 - 2 \cdot t, & t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Se observă că γ_1 este cu tangentă continuă, prin urmare și rectificabil, având lungimea

$$l(\gamma_1) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \sqrt{2},$$

aici am utilizat formula $\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ de calcul a variației totale a unei aplicații $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ cu tangentă continuă pe porțiuni.

Deoarece f_2 este o funcție continuă care nu este cu variație mărginită (exercițiu), rezultă că γ_2 nu este rectificabil, ceea ce arată că γ_2 nu este echivalent cu γ_1 .

Drumul γ_3 este un drum cu tangentă continuă pe porțiuni, deci rectificabil, aşadar nu este echivalent cu γ_2 , mai mult

$$l(\gamma_3) = \int_0^{1/2} \|\gamma_3'(t)\| dt + \int_{1/2}^1 \|\gamma_3'(t)\| dt = \frac{\sqrt{8}}{2} + \frac{\sqrt{8}}{2} = 2\sqrt{2} \neq l(\gamma_1),$$

ceea ce arată că γ_1 și γ_3 nu sunt echivalente.

Se constată imediat că γ_3 este închis, proprietate pe care drumul γ_2 nu o are. Cu toate acestea putem observa cu ușurință că cele trei drumuri au aceeași imagine

$$I(\gamma_1) = I(\gamma_2) = I(\gamma_3) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \in [0, 1]\}.$$

8.1.2 Forme diferențiale de gradul întâi în \mathbb{R}^n

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă, iar $L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ mulțimea funcțiilor liniare $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Definiție 8.11. O aplicație $f : A \rightarrow L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ continuă se numește *formă diferențială de gradul întâi în A* și notăm $f \in \mathcal{F}_1(A)$.

Dacă aplicația $f \in \mathcal{F}_1(A)$ este de clasă C^k , cu $k \in \mathbb{N}$, atunci f se numește *formă diferențială de gradul întâi de clasă C^k* și notăm $f \in \mathcal{F}_1^k(A)$. Evident $\mathcal{F}_1^0(A) = \mathcal{F}_1(A)$.

Remarcă 8.12. Dacă $f \in \mathcal{F}_1^k(A)$, atunci pentru orice $x \in A$ și orice $v = v_1 \cdot e_1 + v_2 \cdot e_2 + \dots + v_n \cdot e_n \in \mathbb{R}^n$, avem

$$f(x)(v) = f(x) \left(\sum_{i=1}^n v_i \cdot e_i \right) = \sum_{i=1}^n v_i \cdot f(x)e_i = \sum_{i=1}^n f_i(x) \cdot dx_i(v),$$

unde $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f_i(x) = f(x)(e_i)$, $i = 1, \dots, n$, sunt funcții de clasă C^k , iar $dx_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $dx_i(v) = v_i$, $i = 1, \dots, n$, sunt proiecțiile canonice din \mathbb{R}^n pe \mathbb{R} .

Deci, orice $f \in \mathcal{F}_1^k(A)$ se reprezintă prin

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) dx_i, \quad \text{cu } f_1, \dots, f_n \in C_A^k.$$

Exemplu 8.13. Dacă $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție de clasă C^1 pe A , atunci aplicația (diferențiala)

$$dF : A \rightarrow L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}), \quad (dF)(x) = d_x F$$

se calculează cu ajutorul relației

$$d_x F(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} v_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} dx_i(v),$$

deci diferențiala este o formă diferențială de gradul întâi pe A , ai cărei coeficienți sunt funcțiile

$$f_i : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_i(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Acum exemplul sugerează

Definiție 8.14. O formă diferențială $f \in \mathcal{F}_1^k(A)$ este *primitivabilă* sau *formă diferențială exactă* pe A și notăm $f \in \mathcal{P}_A^k$, dacă există o funcție $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^{k+1} cu proprietatea $dF = f$.

Facem convenția ca în cazul $k = 0$ să notăm $\mathcal{P}_1^0(A) = \mathcal{P}_1(A)$.

Cu alte cuvinte, $f \in \mathcal{P}_A^k$ dacă și numai dacă există o funcție $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^{k+1} pe A astfel încât

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x_i} = f_i(x), \quad \forall x \in A, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Funcția F , prin analogie cu situația funcțiilor care se mai numesc și forme diferențiale de grad zero, se numește primitivă pe A a formei diferențiale

$$f = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n.$$

Mulțimea tuturor primitivelor formei diferențiale $f \in \mathcal{P}_A^k$ o notăm cu $\int f$.

Remarcă 8.15. Dacă A este un **domeniu**, adică A este deschisă și conexă, în \mathbb{R}^n , $f \in \mathcal{P}_A^k$ și $F \in \int f$, atunci prin consecința teoremei lui **Lagrange** avem că

$$\int f = \{F + C \mid C \in \mathbb{R}\}$$

și deci pentru determinarea mulțimii primitivelor unei forme diferențiale $f \in \mathcal{P}_A^k$ este suficient să determinăm doar o primitivă F a acesteia, toate celelalte diferind, în situația când A este domeniu, de F prinț-o constantă.

8.1.3 Integrala unei forme diferențiale de gradul întâi pe un drum

Fie $f = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n$ o formă diferențială de gradul întâi pe mulțimea deschisă $A \subset \mathbb{R}^n$ și $\gamma : [a, b] \rightarrow A$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ un drum în A .

Definiție 8.16. Forma diferențială f se numește integrabilă pe drumul γ și notăm $f \in \mathcal{I}_\gamma$, dacă pentru orice $i = 1, \dots, n$ funcția $f_i \circ \gamma$ este integrabilă în sens **Stieltjes**⁵-**Riemann**⁶ pe $[a, b]$.

Prin definiție numărul real

$$\sum_{i=1}^n \int_a^b (f_i \circ \gamma) d\gamma_i =: \int_\gamma f$$

se numește integrala formei diferențiale f pe drumul γ .

Exemplu 8.17. Pentru orice $a, x \in \mathbb{R}^n$ există drumul cu tangentă continuă

$$\gamma_a^x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \gamma_a^x(t) = a + t \cdot (x - a)$$

cu $\gamma_a^x(0) = a$, $\gamma_a^x(1) = x$.

Deoarece componentele lui γ_a^x sunt de clasă C^1 , iar $f_i \circ \gamma_a^x$ sunt continue pe $[a, x]$ rezultă că $f \in \mathcal{I}_{\gamma_a^x}$ și prin aplicarea teoremei de reducere a integralei **Stieltjes-Riemann** la integrala **Riemann** obținem

$$\int_{\gamma_a^x} f = \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) \cdot \int_0^1 f_i(a + t \cdot (x - a)) dt.$$

⁵ Thomas Jan Stieltjes, matematician olandez, 1856-1894

⁶ Georg Friedrich Bernhard Riemann, matematician german, 1826-1866

În particular, pentru $n = 2$, $a = (0, 0)$, $f_1(x) = x_2$, $f_2(x) = x_1$ obținem

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_a^x} f &= \sum_{i=1}^2 (x_i - a_i) \cdot \int_0^1 f_i(a + t \cdot (x - a)) dt = x_1 \cdot \int_0^1 f_1(t \cdot (x - a)) dt + \\ &+ x_2 \cdot \int_0^1 f_2(t \cdot (x - a)) dt = x_1 \cdot \int_0^1 t \cdot x_2 dt + x_2 \cdot \int_0^1 t \cdot x_1 dt = x_1 \cdot x_2. \end{aligned}$$

Remarcă 8.18. Dacă $f \in \mathcal{F}_1(A)$ și $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [a, b] \rightarrow A$ este un drum rectificabil, atunci $f_i \circ \gamma$ este continuă, iar γ_i este cu variație mărginită pentru orice $i = 1, \dots, n$. În consecință, $f_i \circ \gamma$ este integrabilă **Stieltjes** în raport cu γ_i , deci $f \in \mathcal{I}_\gamma$.

Remarcă 8.19. Dacă $f = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n \in \mathcal{F}_1(A)$ și drumul cu tangentă continuă $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [a, b] \rightarrow A$, atunci din teorema de reducere a integralei **Stieltjes-Riemann** la integrala **Riemann** rezultă că $f \in \mathcal{I}_\gamma$ și

$$\int_{\gamma} f = \sum_{i=1}^n \int_a^b f_i(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Adică formula de reducere a integralei **Stieltjes-Riemann** la integrala **Riemann**.

Proprietatea de liniaritate a integralei unei forme diferențiale de gradul întâi pe un drum este dată de

Propoziție 8.20. Dacă $f, g \in \mathcal{F}_1(A)$ sunt integrabile pe drumul rectificabil $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [a, b] \rightarrow A$, iar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ este integrabilă pe γ și are loc

$$\int_{\gamma} (\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = \alpha \cdot \int_{\gamma} f + \beta \cdot \int_{\gamma} g.$$

Demonstrația rezultă imediat din Definiția 8.14 și proprietatea de liniaritate a integralei **Stieltjes-Riemann**. \square

Proprietatea de aditivitate a integralei unei forme diferențiale de gradul întâi pe un drum este

Propoziție 8.21. Fie $\gamma^1 = (\gamma_1^1, \dots, \gamma_n^1) : [a_1, b_1] \rightarrow A$

și

$$\gamma^2 = (\gamma_1^2, \dots, \gamma_n^2) : [a_2, b_2] \rightarrow A \text{ justapozabile},$$

$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, iar

$$f = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n \in \mathcal{F}_1(A).$$

f este integrabilă pe γ dacă și numai dacă f este integrabilă pe γ_1 și pe γ_2 .

În plus,

$$\int_{\gamma=\gamma_1 \cup \gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f.$$

Demonstrație. Se aplică proprietatea de aditivitate și teorema schimbării de variabilă în integrala **Stieltjes-Riemann** și se obține că $f \in \mathcal{I}_{\gamma_1} \cap \mathcal{I}_{\gamma_2}$ și

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f &= \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i+b_2-a_2} f_i(\gamma(t)) d\gamma_i(t) = \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} f_i(\gamma_1(t)) d\gamma_i^1(t) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_{b_i}^{b_i+b_2-a_2} f_i(\gamma_2(t+a_2-b_i)) d\gamma_i^2(t+a_2-b_i). \end{aligned}$$

În a doua integrală, efectuând schimbarea de variabilă $s = t - b_i + a_2$, obținem

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma_1} f + \sum_{i=1}^n \int_{a_2}^{b_2} f_i(\gamma_2(s)) d\gamma_i^2(s) = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f.$$

Ne punem problema dacă din faptul că forma diferențiabilă f este integrabilă pe un drum γ aparținând curbei C rezultă că f este integrabilă pe orice alt drum $\gamma_1 \in C$. Un drum $\gamma \in C$ se mai numește și reprezentare parametrică pentru curba C .

Independența de reprezentarea parametrică sau *teorema de schimbare de variabilă* pentru integrala unei forme diferențiabile de gradul întâi este

Propoziție 8.22. Fie $\gamma^1 = (\gamma_1^1, \dots, \gamma_n^1) : [a_1, b_1] \rightarrow A$ și

$\gamma^2 = (\gamma_1^2, \dots, \gamma_n^2) : [a_2, b_2] \rightarrow A$ două drumuri echivalente $\gamma_1 \sim \gamma_2$. Dacă $f = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n \in \mathcal{F}_1(A)$ este integrabilă pe γ_1 , atunci f este integrabilă și pe γ_2 și

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f.$$

Demonstrație. Se aplică teorema schimbării de variabilă de la integrala **Stieltjes-Riemann**, făcându-se schimbarea de variabilă $h(t) = s$, unde $h : [a_2, b_2] \rightarrow [a_1, b_1]$ este un homeomorfism crescător cu $\gamma_2 = \gamma_1 \circ h$. Rezultă $f \in \mathcal{I}_{\gamma_2}$ și

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f &= \sum_{i=1}^n \int_{a_1}^{b_1} f_i(\gamma_1(s)) d\gamma_i^1(s) = \sum_{i=1}^n \int_{a_2}^{b_2} f_i(\gamma_1(h(t))) d\gamma_i^1(h(t)) = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{a_2}^{b_2} f_i(\gamma_2(t)) d\gamma_i^2(t) = \int_{\gamma_2} f. \square \end{aligned}$$

Propoziția precedentă conduce în mod natural la

Definiție 8.23. Fie $f = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n \in \mathcal{F}_1(A)$ și C o curbă cu $I(C) \subset A$. Forma diferențială f se numește integrabilă pe curba C și notăm $\int_C f$, dacă există un drum $\gamma \in C$ cu $f \in \mathcal{I}_\gamma$. Numărul real $\int_C f$ se notează cu unde provine și denumirea tradițională de *integrală curbilinie*.

Remarcă 8.24. Procedând absolut analog ca în demonstrația propoziției 8.22, se demonstrează că dacă $f \in \mathcal{I}_{\gamma_1}$ și $\gamma_2 = \gamma_1 \circ h$, unde $h : [a_2, b_2] \rightarrow [a_1, b_1]$ este un homeomorfism descrescător, atunci $f \in \mathcal{I}_{\gamma_2}$ și

$$-\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f.$$

În particular, pentru $h(t) = a + b - t$ se obține că dacă $f \in \mathcal{I}_\gamma$, atunci $f \in \mathcal{I}_{\gamma^-}$ și

$$\int_{\gamma^-} f = - \int_\gamma f = .$$

Vom pune în continuare în evidență o formulă de legătură între integrala curbilinie și integrala dublă.

În acest scop, vom considera pentru început o mulțime $A \subset \mathbb{R}^2$ simplă în raport cu axa Oy dată de

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\},$$

unde $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt continue cu $\varphi \leq \psi$.

Considerăm drumul $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3^- \cup \gamma_4^-$, unde

$$\begin{aligned} \gamma_1 &: [a, b] \rightarrow \partial A, \quad \gamma_1(t) = (t, \varphi(t)); \\ \gamma_2 &: [\varphi(b), \psi(b)] \rightarrow \partial A, \quad \gamma_2(t) = (b, t); \\ \gamma_3 &: [a, b] \rightarrow \partial A, \quad \gamma_3(t) = (t, \psi(t)); \\ \gamma_4 &: [\varphi(a), \psi(a)] \rightarrow \partial A, \quad \gamma_4(t) = (a, t). \end{aligned}$$

Se utilizează notația

$$\int_\gamma f = \oint_{\partial A} f$$

și o vom numi *integrală curbilinie orientată pe frontieră lui A* a formei diferențiale de gradul întâi $f = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n \in \mathcal{F}_1(A)$. Are loc

Lemă 8.25. Fie $f_1 : A \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^1 pe mulțimea $A \subset \mathbb{R}^2$ simplă în raport cu axa Oy a cărei frontieră γ este imaginea unui drum închis rectificabil. Atunci forma diferențiabilă de gradul întâi $f = f_1 dx_1 \in \mathcal{I}_\gamma$, adică este integrabilă pe γ și

$$\int_\gamma f = \oint_{\partial A} f_1 dx_1 = - \iint_A \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_1 dx_2.$$

Demonstrație. Prin formulei lui **Lebniz⁷-Newton⁸** obținem

$$\iint_A \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x_1)}^{\psi(x_1)} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 = \int_a^b [f_1(x_1, \psi(x_1)) - f_1(x_1, \varphi(x_1))] dx_1.$$

Pe de altă parte, din proprietatea de aditivitate și de reducere a integralei curbilinii la o integrală **Riemann** obținem

$$\begin{aligned} \oint_{\partial A} f_1 dx_1 &= \int_\gamma f_1 dx_1 = \int_{\gamma_1} f_1 dx_1 + \int_{\gamma_2} f_1 dx_1 - \int_{\gamma_3} f_1 dx_1 - \int_{\gamma_4} f_1 dx_1 = \\ &= \int_{\gamma_1} f_1 dx_1 - \int_{\gamma_3} f_1 dx_1 = \int_a^b [f_1(t, \varphi(t)) - f_1(t, \psi(t))] dt \end{aligned}$$

și din egalitatea precedentă rezultă relația din enunț. \square

Dacă mulțimea $A \subset \mathbb{R}^2$ este simplă în raport cu axa Ox

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \phi(y) \leq x \leq \theta(y)\},$$

unde $\phi, \theta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt continue cu $\phi \leq \theta$ și $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3^- \cup \gamma_4^-$ este un drum închis definit analog ca mai sus

$$\begin{aligned} \gamma_4 : [c, d] &\rightarrow \partial A, \quad \gamma_4(t) = (\phi(t), t); \\ \gamma_3 : [\phi(d), \theta(d)] &\rightarrow \partial A, \quad \gamma_3(t) = (t, d); \\ \gamma_2 : [c, d] &\rightarrow \partial A, \quad \gamma_2(t) = (\theta(t), t); \\ \gamma_1 : [\phi(c), \theta(c)] &\rightarrow \partial A, \quad \gamma_1(t) = (t, c). \end{aligned}$$

Pentru $f \in \mathcal{F}_1(A)$ cu $f \in \mathcal{I}_\gamma$ vom utiliza și în acest caz notația

$$\int_\gamma f = \oint_{\partial A} f.$$

Lemă 8.26. Fie $f_2 : A \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^1 pe mulțimea $A \subset \mathbb{R}^2$ simplă în raport cu axa Ox a cărei frontieră γ este imaginea unui drum închis rectificabil.

⁷ Gottfried Wilhelm von Leibniz, matematician german, 1646-1716

⁸ Sir Isaac Newton, matematician englez, 1643-1727

Atunci forma diferențială de gradul întâi $f = f_2 dx_2 \in \mathcal{I}_\gamma$, adică este integrabilă pe γ și

$$\int_\gamma f = \oint_{\partial A} f_2 dx_2 = \iint_A \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 dx_2.$$

Demonstrația este analoagă cu a lemei precedente. \square

Prin combinarea rezultatelor obținute în lemele precedente obținem o formulă de legătură între integrala curbilinie și integrala dublă, datorată matematicianului englez **G. Green**⁹.

Teoremă 8.27 (Green). Fie $A \subset \mathbb{R}^2$ o mulțime simplă în raport cu ambele axe a cărei frontieră este imaginea unui drum închis rectificabil, iar

$$f = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 \in \mathcal{F}_1(A)$$

o formă diferențială de gradul întâi și de clasă C^1 pe A . Atunci

$$\int_\gamma f = \oint_{\partial A} f_1 dx_1 + f_2 dx_2 = \iint_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2$$

(formula lui **Green**).

Demonstrația rezultă imediat din Lemele 8.25 și 8.26. \square

Remarcă 8.28. Din proprietățile de aditivitate ale integralei duble și a integralei curbilinii se deduce imediat că formula lui **Green** rămâne adevărată și pentru mulțimi care sunt reuniuni finite de mulțimi simple în raport cu ambele axe și ale căror frontiere sunt imagini de drumuri rectificabile închise.

Corolar 8.29. Dacă $A \subset \mathbb{R}^2$ este o mulțime simplă în raport cu ambele axe a cărei frontieră este imaginea unui drum închis rectificabil, atunci A este măsurabilă **Jordan** și

$$m(A) = \frac{1}{2} \cdot \oint_{\partial A} x_1 dx_2 - x_2 dx_1.$$

Demonstrație. Se aplică teorema lui **Green** pentru forma diferențială

$$f = -\frac{x_2}{2} dx_1 + \frac{x_1}{2} dx_2 \in \mathcal{F}_1(A)$$

și se obține

$$m(A) = \iint_A dx_1 dx_2 = \iint_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \oint_{\partial A} f = \frac{1}{2} \cdot \oint_{\partial A} x_1 dx_2 - x_2 dx_1. \square$$

8.1.4 Integrarea formelor diferențiale primitivabile

Analog ca și în cazul funcțiilor, adică a formelor diferențiale de grad zero, și pentru formele diferențiale de gradul întâi primitivabile are loc o formulă de tip **Leibniz-Newton**.

⁹ George Green, matematician englez, 1793-1841

Teoremă 8.30 (Leibniz-Newton). Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă, $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ un drum cu tangentă continuă. Dacă $f \in \mathcal{F}_1(A)$ este o formă diferențiabilă de gradul întâi primitivabilă pe A , iar F este o primitivă a lui f pe A , atunci f este integrabilă pe γ și

$$\int_{\gamma} f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

numită și formula lui **Leibniz-Newton** pentru integrala curbilinie.

Demonstrație. Prin aplicarea formulelor de reducere a integralei curbilinii la integrala **Riemann**, de derivare a funcțiilor compuse și a formulei lui **Leibniz Newton** pentru integrala **Riemann** obținem

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f &= \sum_{i=1}^n \int_a^b f_i(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial F(\gamma(t))}{\partial x_i} \cdot \gamma'(t) dt = \\ &= \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \end{aligned}$$

Remarcă 8.31. Din proprietatea de aditivitate a integralei **Riemann** se obține că formula lui **Leibniz-Newton** dată de teorema precedentă rămâne adevărată și în cazul în care γ este un drum cu tangentă continuă.

Corolar 8.32. Dacă $f \in \mathcal{F}_1(A)$ este o formă diferențiabilă primitivabilă pe mulțimea A și $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ este un drum închis cu tangentă continuă pe porțiuni, atunci

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

Demonstrația rezultă imediat din formula **Leibniz-Newton** pentru integrala curbilinie. \square

Corolar 8.33. Dacă $f \in \mathcal{F}_1(A)$ este o formă diferențiabilă primitivabilă pe mulțimea A , iar $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow A$ și $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow A$ sunt drumuri cu tangentă continuă pe porțiuni și cu extremități comune, atunci

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f.$$

Demonstrație. Dacă $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow A$ și $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow A$ au extremități comune, atunci $\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2)$, $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2)$ și din formula lui **Leibniz-Newton** pentru integrala curbilinie obținem

$$\int_{\gamma_1} f = F(\gamma_1(b_1)) - F(\gamma_1(a_1)) = F(\gamma_2(b_2)) - F(\gamma_2(a_2)) = \int_{\gamma_2} f. \square$$

Corolarul precedent sugerează

Definiție 8.34. Spunem că integrala $\int_{\gamma} f$ nu depinde de γ , ci doar de

extremitățile lui γ , dacă pentru orice două drumuri cu tangenta continuă pe porțiuni $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow A$ și $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow A$ cu extremități comune, avem că

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f.$$

Dacă integrala $\int_{\gamma} f$ nu depinde de γ , ci doar de extremitățile lui γ , atunci

se utilizează notația

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} f$$

pentru a sublinia că $\int_{\gamma} f$ nu depinde de γ , ci doar de extremitățile lui γ .

Corolarul 8.33 arată că dacă f este primitivabilă, atunci $\int_{\gamma} f$ nu depinde

de γ . Se pune problema în ce condiții are loc afirmația reciprocă. Este necesar să introducем următoarea

Definiție 8.35. O mulțime $A \subset \mathbb{R}^n$ se zice *stelată în raport cu punctul* $a \in A$, dacă pentru orice $x \in A$ avem că

$$[a, x] = \{a + t \cdot (x - a) \mid t \in [0, 1]\} \subset A.$$

Evident, orice mulțime conexă este stelată în raport cu orice punct al său.

Teorema următoare dă o caracterizare a formelor diferențiale de gradul întâi primitivabile pe mulțimi deschise și stelate și este datorat matematicianului **J. Henri Poincaré**¹⁰.

Teoremă 8.36 (Poincaré). Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă și stelată în raport cu punctul $a \in A$, iar $f = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n \in \mathcal{F}_1^1(A)$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) f este primitivabilă pe mulțimea A ;
- (ii) $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x), \quad \forall x \in A, \quad \forall i, j = 1, \dots, n$;
- (iii) $\int_{\gamma} f$ nu depinde de γ .

¹⁰ **J. Henri Poincaré**, matematician francez, 1854-1912

Demonstrație. $(i) \Rightarrow (ii)$ Dacă $f \in \mathcal{P}_A^1$, atunci, prin definiția 8.14, există funcția $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^2 pe A cu proprietatea

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = f_i(x), \quad \forall x \in A, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Prin aplicarea criteriului lui **Young** obținem

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \right)(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x), \quad \forall x \in A, \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Din corolarul 8.33 rezultă că este suficient să demonstrăm că $(ii) \Rightarrow (i)$. Pentru fiecare $x \in A$ fixat considerăm drumul

$$\gamma_x : [0, 1] \rightarrow A, \quad \gamma_x(t) = a + t \cdot (x - a).$$

Fie funcția $F : A \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{\gamma_x} f$. Să arătăm că F este o primitivă

pentru f , adică

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = f_i(x), \quad \forall x \in A, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Din exemplul 8.17 rezultă

$$F(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) \cdot \int_0^1 f_i(a + t \cdot (x - a)) dt.$$

Aplicând teorema de derivare a integralelor cu parametru, ipoteza (ii) și formula **Leibniz-Newton** se obține că

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_j}(x) &= \int_0^1 f_j(a + t \cdot (x - a)) dt + \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) \cdot \int_0^1 t \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\gamma_x(t)) dt = \\ &= \int_0^1 \left[f_j(\gamma_x(t)) + \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) \cdot t \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\gamma_x(t)) \right] dt = \\ &= \int_0^1 \left[f_j(\gamma_x(t)) + \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) \cdot t \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\gamma_x(t)) \right] dt = \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \left[t \cdot f_j(\gamma_x(t)) \right] dt = f_j(x), \quad \forall x \in A, \quad \forall j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

ceea ce trebuia arătat.

(iii) \Rightarrow (i). Considerăm funcția $F : A \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f$, definirea fiind posibilă datorită independenței de drum a integralei $\int_{\gamma} f$ față de drumul γ cu extremitățile $a, x \in A$.

Din faptul că A este deschisă, rezultă că pentru orice $x \in A$ există $r > 0$ cu $[x, x + t \cdot e_j] \subset A$, $\forall t \in (-r, r)$, $\forall j = 1, \dots, n$.

Din proprietatea de aditivitate a integralei curbilinii obținem

$$F(x + t \cdot e_j) = \int_a^{x+t \cdot e_j} f = \int_a^x f + \int_x^{x+t \cdot e_j} f = F(x) + \int_{\gamma} f,$$

unde $\gamma : [0, t] \rightarrow A$, $\gamma(s) = x + s \cdot e_j$.

De aici rezultă că

$$F(x + t \cdot e_j) - F(x) = \sum_{i=1}^n \int_0^t f_i(x + s \cdot e_j) \cdot \gamma'_i(s) ds = \int_0^t f_j(x + s \cdot e_j) ds,$$

deci

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x + t \cdot e_j) - F(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \int_0^t f_j(x + s \cdot e_j) ds = f_j(x), \quad \forall x \in A, \forall j = 1, \dots, n,$$

ceea ce trebuia demonstrat. \square

Ipoteza ca mulțimea A să fie stelată în raport cu un punct al său este esențială pentru ca echivalențele din teorema precedentă să aibă loc.

Acest fapt este subliniat de

Exemplu 8.37 (Integrală curbilinie care depinde de drum). Fie mulțimea $A = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ și forma diferențiabilă

$$f(x) = -\frac{x_2}{\|x\|^2} \cdot dx_1 + \frac{x_1}{\|x\|^2} \cdot dx_2, \quad x = (x_1, x_2) \in A.$$

Se observă că $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$, adică f satisfacă condiția (ii) din teorema 8.36.

Cu toate acestea, f nu este primitivabilă, deoarece $\int_{\gamma} f$ depinde de γ .

În adevăr, drumurile

$$\gamma_1 : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$\gamma_2 : \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \gamma_2(t) = (\cos t, -\sin t)$$

sunt cu tangentă continuă și au aceleași extremități, dar

$$\int_{\gamma_1} f = \pi \neq -\pi = \int_{\gamma_2} f.$$

8.1.5 Exerciții

1. Pentru orice drum $\gamma : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ există un drum $\gamma_0 : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ cu $\gamma \sim \gamma_0$.

2. Să se arate că dacă în echivalență a două drumuri se cere ca funcția h să fie continuă și strict crescătoare, atunci există drumuri echivalente, în sensul cestei definiții, $\gamma_1 \sim \gamma_2$ astfel încât γ_1 este cu tangentă continuă, iar γ_2 nu are această proprietate.

3. Să se arate că drumurile γ_1 și γ_2 , unde

$$\gamma_1 : [0,2] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma_1(t) = \left(\cos t, \sin t, \frac{t}{2\pi} \right);$$

$$\gamma_2 : [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma_2(t) = (1, 0, -t),$$

sunt justapozabile deși γ_2 și γ_1 nu sunt justapozabile.

4. Să se arate că f este integrabilă pe γ și să se calculeze $\int_{\gamma} f$, unde

$$(i) \quad f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2) dx_1 - x_2 dx_2, \quad \gamma(t) = \left(1 - |1-t|, \cos \frac{\pi \cdot t}{2} \right), \quad t \in [-1, 3];$$

$$(ii) \quad f(x_1, x_2, x_3) = x_1 dx_1 + x_1 \cdot x_2 dx_2 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 dx_3, \quad \gamma(t) = (t \cdot \cos t, t \cdot \sin t, t), \\ t \in [-\pi, \pi].$$

5. Să se studieze dacă $f \in \mathcal{F}_1(A)$ este primitivabilă, în caz afirmativ să se calculeze $\int_{\gamma} f$, unde

$$(i) \quad f(x_1, x_2) = x_2 dx_1 + x_1 dx_2, \quad A = \mathbb{R}^2;$$

$$(ii) \quad f(x_1, x_2, x_3) = x_2 \cdot x_3 dx_1 + x_3 \cdot x_1 dx_2 + x_1 \cdot x_2 dx_3, \quad A = \mathbb{R}^3;$$

$$(iii) \quad f(x_1, x_2) = \frac{x_2}{3 \cdot x_1^2 + 3 \cdot x_2^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2} dx_1 - \frac{x_1}{3 \cdot x_1^2 + 3 \cdot x_2^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2} dx_2, \\ A = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*;$$

$$(iv) \quad f(x_1, x_2) = \frac{x_2}{3 \cdot x_1^2 + 3 \cdot x_2^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2} dx_1 - \frac{x_1}{3 \cdot x_1^2 + 3 \cdot x_2^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2} dx_2,$$

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\};$$

6. Să se arate că $\int\limits_{\gamma} f$ nu depinde de γ și să se calculeze $\int\limits_A^B f$, unde

- (i) $f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 \cdot x_2 dx_1 + x_1^2 dx_2$, $A = (0,1)$, $B = (2,1)$;
- (ii) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 dx_1 + \sqrt{x_2} dx_2 + x_3 \cdot \sqrt{x_2} dx_3$, $A = (0,1,2)$, $B = (-2,1,5)$.

7. Să se studieze aplicabilitatea formulei lui **Green** și în caz afirmativ să se calculeze $\oint_{\partial A} f$, unde

$$A = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \right\}$$

și $f = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$, unde

- (i) $f_1(x_1, x_2) = -x_2 \cdot e^{x_1^2 + x_2^2}$, $f_2(x_1, x_2) = x_1 \cdot e^{x_1^2 + x_2^2}$;
- (ii) $f_1(x_1, x_2) = e^{-(x_1^2 + x_2^2)} \cdot \cos(2 \cdot x_1 \cdot x_2)$, $f_2(x_1, x_2) = e^{-(x_1^2 + x_2^2)} \cdot \sin(2 \cdot x_1 \cdot x_2)$.

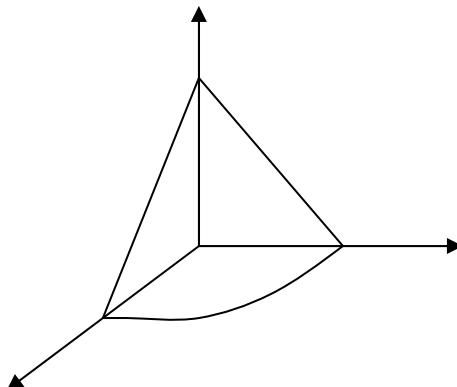
8. Să se calculeze cu ajutorul formulei **Green**, măsura **Jordan** a mulțimii A , unde

- (i) $A = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leq 1 \right\}$, $a, b \in \mathbb{R}^*$;
- (ii) $A = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt[3]{x_1^2} + \sqrt[3]{x_2^2} \leq 1 \right\}$.

9. Să se calculeze $\int\limits_{\gamma} f$, unde

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 dx_1 + dx_2 - x_1 \cdot x_3 dx_3, \quad \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3,$$

iar drumurile $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sunt indicate în figura următoare.



10. Să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}, \quad \forall x > 0$$

și apoi să se stabilească monotonia funcțiilor

$$e, f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*, \quad e(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

(i) Să se demonstreze că funcțiile $z, y : [2, e] \rightarrow \mathbb{R}$, definite implicit de sistemul

$$\begin{cases} x^y = y^x \\ x^z = y \end{cases}$$

și de condițiile $y(2) = 4$, $z(2) = 2$, au derivata continuă și mărginită pe intervalul $(2, e)$. Precizați monotonia funcțiilor z și y .

(ii) Demonstrați că aria A aflată între graficele celor două funcții satisfac relația

$$A = \int_0^1 (1+x)^{\frac{2}{x}} dx.$$

(iii) Dezvoltați în serie **Laurent** în jurul punctului $x=0$ funcția

$$h : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{2}{x}}, & x > 0 \\ e^2, & x = 0 \end{cases}$$

și apoi determinați eroarea maximă care se face dacă se calculează integrala considerând numai patru termeni din seria **Laurent** a funcției h în jurul punctului $x=0$.

Observație. Se consideră o aplicație $V : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Fie C o curbă astfel încât $I(C) \subset D$. Dacă $V(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ și

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(t) = \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$, un element al clasei de echivalență C ,

atunci definim *lucrul mecanic* al forței V de-a lungul curbei C ca fiind

$$L(\bar{V}, C) = \int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b \bar{V} \cdot d\bar{r}.$$

Integrala de mai sus se numește integrală curbilinie de speță a două căreia îi vom studia proprietățile, printre care cea mai importantă este aceea de independentă de drum.

Observație. Integrala curbilinie de speță a două se mai poate defini ca fiind integrala formelor diferențiable de gradul întâi.

Fie $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ spațiul aplicațiilor liniare definite pe \mathbb{R}^k cu valori reale și fie $A \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$, iar $x = (x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^k$, atunci $x = \sum_{i=1}^k x^i \cdot e_i$, unde $e_i, i = 1, \dots, k$, formează baza canonica în \mathbb{R}^k . Putem exprima aplicația liniară A în forma

$$A(x) = A\left(\sum_{i=1}^k x^i \cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^k x^i \cdot A(e_i).$$

Prin urmare, pentru a cunoaște aplicația liniară A trebuie să cunoaștem valorile ei în baza canonica, echivalent cu cunoașterea elementului $(A(e_1), \dots, A(e_k)) \in \mathbb{R}^k$. Din punct de vedere algebric spațiul $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ este izomorf cu \mathbb{R}^k . Mai mult, spațiul $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ este de dimensiune k și aplicațiile $p_i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, $p_i(x^1, \dots, x^i, \dots, x^k) = x^i, i = 1, \dots, k$, numite *proiecții* ale lui \mathbb{R}^k pe \mathbb{R} , constituie o bază a acestui spațiu vectorial peste corpul \mathbb{R} .

Definiție. Fie $U \subset \mathbb{R}^k$ o mulțime deschisă. Aplicația $\omega : U \rightarrow L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ de clasă C^p , $p \geq 0$ se numește formă diferențiabilă de gradul întâi și de clasă C^p , $p \geq 0$ pe mulțimea U . Mulțimea formelor diferențiabile de gradul întâi și de clasă C^p , $p \geq 0$ pe mulțimea U le vom nota prin $D_1^{(p)}(U)$. Deoarece $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^k$, noțiunea de formă diferențiabilă de gradul întâi se poate gândi ca fiind legată de aplicația $\omega : U \rightarrow L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$.

Observație. Vrem să descriem mai exact modul de scriere al unei forme diferențiabile conform definiției pentru $k = 3$.

Fie aplicația $\omega(x, y, z) = (\omega_1(x, y, z), \omega_2(x, y, z), \omega_3(x, y, z))$ de clasă C^1 .

Dacă $v = (v^1, v^2, v^3) \in \mathbb{R}^3$, atunci din regula de calcul a funcțiunilor liniare

$$\omega(x, y, z) \cdot v = \omega_1(x, y, z) \cdot v_1 + \omega_2(x, y, z) \cdot v_2 + \omega_3(x, y, z) \cdot v_3.$$

Folosind proiecțiile lui \mathbb{R}^k pe \mathbb{R} obținem

$$\begin{aligned} \omega(x, y, z) \cdot v &= \omega_1(x, y, z) \cdot p_1(v) + \omega_2(x, y, z) \cdot p_2(v) + \omega_3(x, y, z) \cdot p_3(v) = \\ &= [\omega_1(x, y, z) \cdot p_1 + \omega_2(x, y, z) \cdot p_2 + \omega_3(x, y, z) \cdot p_3](v). \end{aligned}$$

Prin urmare, putem scrie formal

$$\omega(x, y, z) = \omega_1(x, y, z) \cdot p_1 + \omega_2(x, y, z) \cdot p_2 + \omega_3(x, y, z) \cdot p_3.$$

Observație. Să reamintim câteva proprietăți ale proiecțiilor și spunem că funcția $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențială în punctul interior $a \in U$.

8.2 Integrale de suprafață

8.2.1 Pânze și lanțuri în \mathbb{R}^n

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă și $k \in \mathbb{N}^*$ cu $k \leq n$. O aplicație continuă

$$p : T_k := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}^k \rightarrow A \subset \mathbb{R}^n$$

se numește *k-pânză în mulțimea A* și notăm $p \in \mathcal{P}_k(A)$. Dacă pânza p este de clasă C^r pe mulțimea A , atunci notăm $p \in \mathcal{P}_k^r(A)$. Deci $\mathcal{P}_k^0(A) = \mathcal{P}_k(A)$.

Dacă $p \in \mathcal{P}_k(A)$, atunci mulțimea

$$I(p) = p(T_k) \subset A$$

se numește *imaginea k-pânzei p*.

În cazul particular $k=1$, orice $p \in \mathcal{P}_1(A)$ este un drum, iar pentru $k=2$ elementele mulțimii $\mathcal{P}_2(A)$ se vor numi pe scurt *pânze în A*.

Dacă $k=2$ și $n=3$, atunci o aplicație continuă

$$p : T_2 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow A \subset \mathbb{R}^3$$

se numește *pânză de suprafață*.

În sfârșit, dacă $k=n-1 \geq 2$, atunci $p \in \mathcal{P}_k(A)$ se mai numește și *pânză de hipersuprafață*.

Remarcăm că dacă $p : T_2 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow A \subset \mathbb{R}^3$ este o pânză de suprafață, atunci pentru orice punct $(t_1, t_2) \in T_2$ aplicațiile, în fapt secțiunile lui p ,

$$p_{t_1} : T_1^1 = [a_2, b_2] \rightarrow A, \quad p_{t_1}(t_2) = p(t_1, t_2)$$

și, respectiv,

$$p_{t_2} : T_1^2 = [a_1, b_1] \rightarrow A, \quad p_{t_2}(t_1) = p(t_1, t_2)$$

sunt drumuri în A .

În particular, o pânză de suprafață $p : T_2 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow A \subset \mathbb{R}^3$ definită prin

$$p(t_1, t_2) = (t_1, t_2, f(t_1, t_2)),$$

unde $f : T_2 \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă, se numește *pânză de suprafață dată sub formă explicită*, iar $z = f(x, y)$ este *ecuația explicită* a pânzei de suprafață p .

Definiție 8.38. Pânza de suprafață $p : T_2 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow A \subset \mathbb{R}^3$ este:

- *simplă*, dacă p este injectivă pe T_2 ;
- *închisă*, dacă pentru orice punct $(t_1, t_2) \in T_2$ drumurile p_{t_1} și p_{t_2} sunt închise;
- *netedă sau singulară*, dacă p este de clasă C^1 cu rang $p'(t) = 2$, $\forall t \in T_2$.

Remarcă 8.39. Dacă $p : T_2 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow A \subset \mathbb{R}^3$ este o pânză de suprafață, atunci se vede imediat că drumurile p_{a_1} și p_{b_1} , $p_{b_2}^-$ și $p_{a_1}^-$, $p_{a_2} \cup p_{b_1}$ și $p_{b_2} \cup p_{a_1}$ sunt justapozabile și deci are sens considerarea drumului închis

$$\partial p = (p_{a_2} \cup p_{b_1}) \cup (p_{b_2}^- \cup p_{a_1}^-)$$

numit și *bordul pânzei de suprafață* p .

În vederea introducerii noțiunii de bord pentru o k -pânză vom utiliza pentru bordul pânzei de suprafață notația

$$\hat{\partial}p = p_{a_2} + p_{a_2} - p_{b_2} - p_{a_1} \text{ sau } \hat{\partial}p = p_{20} + p_{11} - p_{21} - p_{10},$$

unde

$$p_{20}(t_1) = p(t_1, a_2) = p_{a_2}(t_1), \quad p_{21}(t_1) = p(t_1, b_2) = p_{b_2}(t_1),$$

$$p_{10}(t_2) = p(a_1, t_2) = p_{a_1}(t_2), \quad p_{11}(t_2) = p(a_1, t_2) = p_{a_1}(t_2).$$

Definiție 8.40. O aplicație de forma

$$L = \sum_{i=1}^m c_i \cdot p_i, \quad m \in \mathbb{N}^*, \quad c_i \in \mathbb{Z}, \quad p_i \in \mathcal{P}_k^r(A), \quad i = 1, \dots, m,$$

se numește *k -lanț de clasă C^r în A* și notăm $L \in \mathcal{L}_k^r(A)$.

Pentru $r = 0$ notăm $L \in \mathcal{L}_k^0(A) = \mathcal{L}_k(A)$ și elementele acestei mulțimi le numim *k -lanțuri în A* .

Se vede imediat că un *k -lanț* este o combinație liniară a m pânze de clasă C^r pe mulțimea A , adică mai spunem că $\mathcal{L}_k^r(A)$ este un \mathbb{Z} -modul liber generat de elementele mulțimii $\mathcal{P}_k^r(A)$.

Definiție 8.41. Dacă $p : T_k := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}^k \rightarrow A \subset \mathbb{R}^n$ este o k -pânză în mulțimea A , atunci $(k-1)$ -lanțul

$$\partial p = \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^1 (-1)^{i+j} \cdot p_{ij},$$

unde aplicația

$$p_{ij} : T_{k-1}^i := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{i-1}, b_{i-1}] \times [a_{i+1}, b_{i+1}] \times \dots \times [a_k, b_k] \rightarrow A$$

este definită prin

$$p_{ij}(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_k) = p(t_1, \dots, t_{i-1}, s_{ij}, t_{i+1}, \dots, t_k),$$

iar

$$s_{ij} = \begin{cases} a_i, & j=0 \\ b_i, & j=1 \end{cases}$$

se numește *bordul k-pânzei p în mulțimea A*.

Exemplu 8.42. Fie $p : T_3 := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_3, b_3] \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow A \subset \mathbb{R}^3$ o 3-pânză în \mathbb{R}^3 . Bordul său este 2-lanțul

$$\partial p = p_{11} + p_{20} + p_{31} - (p_{10} + p_{21} + p_{30}),$$

unde

$$\begin{aligned} p_{11}(t_2, t_3) &= p_{b_1}(t_2, t_3) = p(b_1, t_2, t_3), \\ p_{20}(t_1, t_3) &= p_{a_2}(t_1, t_3) = p(t_1, a_2, t_3), \\ p_{31}(t_1, t_2) &= p_{b_3}(t_1, t_2) = p(t_1, t_2, b_3), \\ p_{10}(t_2, t_3) &= p_{a_1}(t_2, t_3) = p(a_1, t_2, t_3), \\ p_{21}(t_1, t_3) &= p_{b_2}(t_1, t_3) = p(t_1, b_2, t_3), \\ p_{30}(t_1, t_2) &= p_{a_3}(t_1, t_2) = p(t_1, t_2, a_3). \end{aligned}$$

8.2.2 Noțiunea de suprafață

După cum am văzut în paragraful precedent, noțiunea de curbă s-a definit ca o clasă de drumuri echivalente. Noțiunea de suprafață este un analog bidimensional al noțiunii de curbă.

Pentru definirea noțiunii de suprafață introducem

Definiție 8.43. Pânzele de suprafețe

$$p : T_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad q : \widetilde{T}_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

se numesc *echivalente* și notăm $p \sim q$ dacă există un homeomorfism $h : \widetilde{T}_2 \rightarrow T_2$ de clasă C^1 cu $J_h > 0$ și $q = p \circ h$.

Se verifică imediat că relația \sim introdusă în definiția precedentă este o relație de echivalență.

O clasă de echivalență în raport cu această relație de echivalență se numește *suprafață* și notăm $S = \hat{p}$. Cu alte cuvinte, o *suprafață este o clasă de pânze echivalente*.

Propoziție 8.44. Fie $p: T_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $q: \widetilde{T}_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ două pânze de suprafață echivalente. Atunci:

- (i) $I(p) = I(q)$;
- (ii) dacă p este *simplă*, atunci și q este *simplă*;
- (iii) dacă p este de *clasă C^1* , atunci și q este de *clasă C^1* ;
- (iv) dacă p este *netedă*, atunci și q este *netedă*.

Demonstrația este imediată din definiția precedentă. Pentru (iv) este suficient să se observe că dacă

$$\text{rang } p'(t) = 2, \quad t \in T_2 \text{ și } J_h > 0,$$

atunci din

$$q'(t) = p'(h(t)) \cdot h'(t), \quad t \in \widetilde{T}_2$$

deducem

$$\text{rang } q'(t) = 2, \quad \forall t \in \widetilde{T}_2,$$

adică q este netedă. \square

Propoziția precedentă conduce în mod natural la

Definiție 8.45. O suprafață S se numește

- (i) *simplă*, dacă există o pânză $p \in S$ *simplă*;
- (ii) *de clasă C^1* , dacă există pânza $p \in S$ *de clasă C^1* ;
- (iii) *netedă*, dacă există pânza $p \in S$ *de netedă*.

Exemplu 8.46. Pânzele de suprafețe $p, q: [0,1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definite prin

$$p(t) = (t_1, t_2, 0), \quad q(t) = (|2 \cdot t_1 - 1|, |2 \cdot t_2 - 1|, 0),$$

au proprietatea că $I(p) = I(q)$. Cu toate acestea, p nu este echivalentă cu q , deoarece p este simplă, iar q nu are această proprietate, căci

$$q\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = q\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right).$$

8.2.3 Forme diferențiale de gradul doi

În continuare vom nota cu $\mathcal{A}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mulțimea funcțiilor $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ biliniare cu

$$F(u, v) = -F(v, u), \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n.$$

Elementele lui $\mathcal{A}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ se numesc aplicații alternate pe \mathbb{R}^n .

Remarca 8.47. Dacă $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ este alternată pe \mathbb{R}^n , atunci $F(u, u) = 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$.

Exemplu 8.48. Dacă $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sunt liniare, atunci funcția $f \wedge g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$(f \wedge g)(u, v) = f(u) \cdot g(v) - f(v) \cdot g(u)$$

este o *aplicație alternată* pe \mathbb{R}^n . În particular, $dx_i \wedge dx_j \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, unde

$$(dx_i \wedge dx_j)(u, v) = u_i \cdot v_j - u_j \cdot v_i.$$

Din Remarca 8.47 rezultă că

$$dx_i \wedge dx_i = 0, \quad dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i.$$

Definiție 8.49. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă. O aplicație $f : A \rightarrow \mathcal{A}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ continuă se numește *formă diferențială de gradul doi* în A și notăm $f \in \mathcal{F}_2(A)$.

Dacă f este de clasă C^k pe mulțimea A , atunci notăm $f \in \mathcal{F}_2^k(A)$. În particular, $\mathcal{F}_2(A) = \mathcal{F}_2^0(A)$.

Remarca 8.50. Din definiția precedentă, ținând seama de exemplul 8.48, obținem că dacă $f \in \mathcal{F}_2^k(A)$, atunci pentru orice $x \in A$ și orice $u, v \in \mathbb{R}^n$ avem

$$\begin{aligned} f(x)(u, v) &= f(x) \left(\sum_{i=1}^n u_i \cdot e_i, \sum_{j=1}^n v_j \cdot e_j \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n u_i \cdot f(x) \left(\sum_{j=1}^n v_j \cdot e_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i \cdot v_j \cdot f(x)(e_i, e_j) = \\ &= \sum_{i, j=1}^n (u_i \cdot v_j - u_j \cdot v_i) \cdot f_{ij}(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} f_{ij}(x) \cdot (dx_i \wedge dx_j)(u, v) \end{aligned}$$

unde

$$f_{ij} : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_{ij}(x) = f(x)(e_i, e_j), \quad x \in A, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i < j$$

sunt funcții de clasă C^k pe A .

În concluzie, orice formă diferențială de gradul doi de clasă C^k pe A este de forma

$$f(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} f_{ij}(x) \cdot dx_i \wedge dx_j$$

unde $f_{ij} : A \rightarrow \mathbb{R}$ este de clasă C^k pe A pentru orice $i, j = 1, \dots, n$, $i < j$.

În cazul particular $n = 3$, obținem că o formă diferențială de gradul doi și de clasă C^k pe o mulțime $A \subset \mathbb{R}^3$ este de forma

$$\begin{aligned} f(x) &= f_{12}(x) \cdot dx_1 \wedge dx_2 + f_{13}(x) \cdot dx_1 \wedge dx_3 + f_{23}(x) \cdot dx_2 \wedge dx_3 = \\ &= f_1(x) \cdot dx_2 \wedge dx_3 + f_2(x) \cdot dx_3 \wedge dx_1 + f_3(x) \cdot dx_1 \wedge dx_2, \end{aligned}$$

unde $f_1 = f_{23}$, $f_2 = -f_{12}$, $f_3 = f_{12}$ sunt funcții de clasă C^k pe A .

Vom nota pe scurt

$$f = f_1 \cdot dx_2 \wedge dx_3 + f_2 \cdot dx_3 \wedge dx_1 + f_3 \cdot dx_1 \wedge dx_2.$$

8.2.4 Integrarea formelor diferențiale de gradul doi în \mathbb{R}^3

Fie $p : T_2 := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow A \subset \mathbb{R}^3$ o pânză de suprafață în $A \subset \mathbb{R}^3$, iar

$$f = f_1 \cdot dx_2 \wedge dx_3 + f_2 \cdot dx_3 \wedge dx_1 + f_3 \cdot dx_1 \wedge dx_2$$

o formă diferențială de gradul doi în A .

La aceste două obiecte asociem funcția reală $f_p : T_2 \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$\begin{aligned} f_p(t_1, t_2) &= f_1(p(t_1, t_2)) \cdot \frac{D(p_2, p_3)}{D(t_1, t_2)}(t_1, t_2) + f_2(p(t_1, t_2)) \cdot \frac{D(p_3, p_1)}{D(t_1, t_2)}(t_1, t_2) + \\ &\quad + f_3(p(t_1, t_2)) \cdot \frac{D(p_1, p_2)}{D(t_1, t_2)}(t_1, t_2). \end{aligned}$$

Definiție 8.51. Forma diferențială de gradul doi $f \in \mathcal{F}_2(A)$ se numește *integrabilă pe pânza de suprafață* $p \in \mathcal{P}_2(A)$, dacă funcția f_p este integrabilă pe T_2 . Numărul real $\int_{T_2} f_p$ se mai notează cu $\int_p f$ sau

$$\iint_p f_1 \cdot dx_2 \wedge dx_3 + f_2 \cdot dx_3 \wedge dx_1 + f_3 \cdot dx_1 \wedge dx_2,$$

fiind *integrala formei diferențiale de gradul doi f pe pânza de suprafață p*.

Propoziție 8.52. Fie $p: T_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow A \subset \mathbb{R}^3$ și $q: \widetilde{T}_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow A$ două pânze de suprafață de clasă C^1 echivalente. Dacă $f \in \mathcal{F}_2(A)$ este integrabilă pe pânza p , atunci f este integrabilă și pe pânza q și are loc

$$\int_p f = \int_q f.$$

Demonstrație. Fie $h: \widetilde{T}_2 \rightarrow T_2$ un homeomorfism de clasă C^1 cu $J_h > 0$ și $q = p \circ h$. Se observă că $f_q = (f_p \circ h) \cdot J_h$ și din teorema schimbării de variabile rezultă că f_q este integrabilă pe \widetilde{T}_2 , adică f este integrabilă pe q și

$$\int_q f = \int_{\widetilde{T}_2} f_q = \int_{\widetilde{T}_2} (f_p \circ h) \cdot J_h = \int_{T_2} f_p = \int_p f,$$

ceea ce trebuia demonstrat. \square

În baza propoziție precedente se poate defini integrala unei forme diferențiale de gradul doi în \mathbb{R}^3 pe o suprafață prin următoarea

Definiție 8.53. Forma diferențială de gradul doi $f \in \mathcal{F}_2(A)$ se numește *integrabilă pe suprafața S de clasă C^1* , dacă există o pânză de suprafață $p \in S$ încât f este integrabilă pe pânza p . Numărul real

$$\int_p f \text{ se mai notează cu } \int_S f$$

și se numește integrala formei diferențiale de gradul doi f pe suprafața S , de unde și denumirea tradițională integrală de suprafață.

Integrala unei forme diferențiale de gradul doi pe un 2-lanț se definește prin

Definiție 8.54. Fie $L = \sum_{i=1}^m c_i \cdot p_i$, $m \in \mathbb{Z}^*$, $c_i \in \mathbb{Z}$, $p_i \in \mathcal{P}_2(A)$ un 2-lanț

în $A \subset \mathbb{R}^3$. O formă diferențială $f \in \mathcal{F}_2(A)$ se numește integrabilă pe lanțul L , dacă f este integrabilă pe pânzele p_1, \dots, p_m . Numărul real

$$\sum_{i=1}^m c_i \cdot \int_{p_i} f \text{ se notează cu } \int_L f$$

și se numește integrala lui $f \in \mathcal{F}_2(A)$ pe 2-lanțul $L \in \mathcal{L}_2(A)$.

În continuare vom stabili formule de legătură între integrala de suprafață și integrala triplă, respectiv integrala curbilinie.

O formulă de legătură între integrala de suprafață și integrala triplă este dată de teorema **Gauss-Ostrogradski** pentru formularea căreia avem nevoie de o 3-pânză în $A \subset \mathbb{R}^3$

$$p = (p_1, p_2, p_3) : T_3 = J_1 \times J_2 \times J_3 \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow A \subset \mathbb{R}^3$$

cu $J_K = [a_k, b_k]$, $k = 1, 2, 3$ și o formă diferențială de gradul doi în A

$$f = f_1 \cdot dx_2 \wedge dx_3 + f_2 \cdot dx_3 \wedge dx_1 + f_3 \cdot dx_1 \wedge dx_2.$$

Are loc

Teoremă 8.55 (Gauss-Ostrogradski). Dacă $f \in \mathcal{F}_2^1(A)$ și $p \in \mathcal{P}_3^2(A)$ cu $J_p > 0$, atunci

$$\int_A f = \int_{p(T_3)} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right)$$

numită și formula **Gauss-Ostrogradski**.

Demonstrație. Este suficient să demonstrăm că

$$\int_{\partial p} f_1 \cdot dx_2 \wedge dx_3 = \int_{p(T_3)} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}$$

Ținând seama de definiția 8.54, avem că

$$\int_{\partial p} f = I_1 + I_2 + I_3,$$

unde

$$I_1 = \int_{p_{11}} f - \int_{p_{10}} f,$$

$$I_2 = \int_{p_{20}} f - \int_{p_{21}} f,$$

$$I_3 = \int_{p_{31}} f - \int_{p_{30}} f$$

și $f = f_1 \cdot dx_2 \wedge dx_3$.

Din definiția 8.53 ținând seama de exemplul 8.42 și prin aplicarea formulei **Leibniz-Newton**, rezultă

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{J_2 \times J_3} \left[f_1(p(b_1, t_2, t_3)) \cdot \frac{D(p_2, p_3)}{D(t_2, t_3)}(b_1, t_2, t_3) - \right. \\ &\quad \left. - f_1(p(a_1, t_2, t_3)) \cdot \frac{D(p_2, p_3)}{D(t_2, t_3)}(a_1, t_2, t_3) \right] dt_2 dt_3 = \end{aligned}$$

$$= \iint_{J_2 \times J_3} \left(\int_{J_1} \frac{\partial}{\partial t_1} \left[f_1(p(t)) \cdot \frac{D(p_2, p_3)}{D(t_2, t_3)}(t) \right] dt_1 \right) dt_2 dt_3.$$

De aici prin utilizarea formulei lui **Fubini** obținem

$$I_1 = \iiint_{T_3} \frac{\partial}{\partial t_1} \left[f_1(p(t)) \cdot \frac{D(p_2, p_3)}{D(t_2, t_3)}(t) \right] dt_1 dt_2 dt_3.$$

Analog se arată că

$$I_2 = - \iiint_{T_3} \frac{\partial}{\partial t_2} \left[f_1(p(t)) \cdot \frac{D(p_2, p_3)}{D(t_1, t_3)}(t) \right] dt_1 dt_2 dt_3$$

și

$$I_3 = \iiint_{T_3} \frac{\partial}{\partial t_3} \left[f_1(p(t)) \cdot \frac{D(p_2, p_3)}{D(t_1, t_2)}(t) \right] dt_1 dt_2 dt_3.$$

Prin aplicarea formulei de derivare a funcțiilor compuse se obține

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t_1} \left[f_1(p(t)) \cdot \frac{D(p_2, p_3)}{D(t_2, t_3)}(t) \right] - \frac{\partial}{\partial t_2} \left[f_1(p(t)) \cdot \frac{D(p_2, p_3)}{D(t_1, t_3)}(t) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial t_3} \left[f_1(p(t)) \cdot \frac{D(p_2, p_3)}{D(t_1, t_2)}(t) \right] = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p(t)) \cdot J_p(t) \end{aligned}$$

De aici prin aplicarea formulei de schimbare de variabilă rezultă

$$\begin{aligned} \int_{\partial p} f &= \int_{\partial p} f_2 \cdot dx_2 \wedge dx_3 = \iiint_{T_3} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p(t)) \cdot J_p(t) dt_1 dt_2 dt_3 = \\ &= \iiint_{p(T_3)} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p(t)) dx_1 dx_2 dx_3, \end{aligned}$$

ceea ce trebuia demonstrat. \square

Remarcă 8.56. Formula lui **Gauss-Ostrogradski** se mai poate scrie astfel

$$\begin{aligned} & \iint_{\partial p} f_1 \cdot dx_2 \wedge dx_3 + f_2 \cdot dx_3 \wedge dx_1 + f_3 \cdot dx_1 \wedge dx_2 = \\ &= \iiint_{p(T_3)} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3. \end{aligned}$$

O formulă de legătură între integrala curbilinie și integrala de suprafață este dată de teorema lui **Stockes**, pentru formularea căreia considerăm o pânză de suprafață

$$p = (p_1, p_2) : T_2 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow A \subset \mathbb{R}^3$$

și o formă diferențială de gradul întâi în A ,

$$f = f_1 \cdot dx_1 + f_2 \cdot dx_2 + f_3 \cdot dx_3.$$

Are loc

Teoremă 8.57 (Stockes). Dacă $f \in \mathcal{F}_1^1(A)$ și $p \in \mathcal{P}_2^2(A)$, atunci

$$\begin{aligned} \int_{\partial p} f_1 \cdot dx_1 + f_2 \cdot dx_2 + f_3 \cdot dx_3 &= \iint_p \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right) \cdot dx_2 \wedge dx_3 + \\ &+ \iint_p \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \right) \cdot dx_3 \wedge dx_1 + \iint_p \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) \cdot dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

numită și formula lui **Stockes**.

Demonstrație. Este suficient să demonstrăm că

$$\int_{\partial p} f_1 \cdot dx_1 = \iint_p \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} \cdot dx_3 \wedge dx_1 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdot dx_1 \wedge dx_2 \right).$$

Tinând seama că $\partial p = p_{11} + p_{20} - p_{10} - p_{21}$, avem

$$\int_{\partial p} f_1 \cdot dx_1 = I_1 + I_2,$$

unde

$$I_1 = \int_{p_{11}} f_1 \cdot dx_1 - \int_{p_{10}} f_1 \cdot dx_1$$

$$I_2 = \int_{p_{20}} f_1 \cdot dx_1 - \int_{p_{21}} f_1 \cdot dx_1.$$

Procedând analog ca în demonstrația teoremei precedente prin utilizarea formulelor lui **Leibniz-Newton** și, respectiv, **Fubini**, se obține

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{a_2}^{b_2} f_1(p(b_1, t_2)) \cdot \frac{\partial p_1}{\partial t_2}(b_1, t_2) dt_2 - \int_{a_2}^{b_2} f_1(p(a_1, t_2)) \cdot \frac{\partial p_1}{\partial t_2}(a_1, t_2) dt_2 = \\ &= \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_2}^{b_1} \frac{\partial}{\partial t_1} \left[f_1(p(t)) \cdot \frac{\partial p_1}{\partial t_2}(t) \right] dt_1 \right) dt_2 = \iint_{T_2} \frac{\partial}{\partial t_1} \left[f_1(p(t)) \cdot \frac{\partial p_1}{\partial t_2}(t) \right] dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Analog se arată că

$$I_2 = - \iint_{T_2} \frac{\partial}{\partial t_2} \left[f_1(p(t)) \cdot \frac{\partial p_1}{\partial t_1}(t) \right] dt_1 dt_2.$$

Utilizând formula de derivare a funcțiilor compuse, se verifică egalitatea

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t_1} \left[(f_1 \circ p)(t) \cdot \frac{\partial p_1}{\partial t_2}(t) \right] - \frac{\partial}{\partial t_2} \left[(f_1 \circ p)(t) \cdot \frac{\partial p_1}{\partial t_1}(t) \right] = \\ & = \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(p(t)) \cdot \frac{D(p_3, p_1)}{D(t_1, t_2)}(t) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p(t)) \cdot \frac{D(p_1, p_2)}{D(t_1, t_2)}(t) \end{aligned}$$

care conduce la

$$\begin{aligned} \int_{\partial p} f_1 \cdot dx_1 &= \iint_{T_2} \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_3}(p(t)) \cdot \frac{D(p_3, p_1)}{D(t_1, t_2)}(t) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p(t)) \cdot \frac{D(p_1, p_2)}{D(t_1, t_2)}(t) \right] dt_1 dt_2 = \\ &= \iint_p \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} \cdot dx_3 \wedge dx_1 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdot dx_1 \wedge dx_2 \right), \end{aligned}$$

ceea ce trebuia arătat. \square

8.2.5 Exerciții

1. Să se determine ∂p , unde

- (i) $p : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $p(t_1, t_2) = (\sin t_1 \cdot \cos t_2, \sin t_1 \cdot \sin t_2, \cos t_1)$;
- (ii) $p : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $p(t_1, t_2, t_3) = (t_3 \cdot \sin t_1 \cdot \cos t_2, t_3 \cdot \sin t_1 \cdot \sin t_2, t_3 \cdot \cos t_1)$

2. Să se calculeze $\int_p f$, unde

$$p : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad p(t_1, t_2) = (t_1, t_2, t_1 + t_2)$$

și

$$f(x) = x_1 \cdot dx_2 \wedge dx_3 + x_2 \cdot dx_3 \wedge dx_1 + x_3 \cdot dx_1 \wedge dx_2.$$

3. Să se calculeze direct și cu formula lui **Gauss-Ostrogradski** $\int_p f$, unde

$$f(x) = x_1 \cdot dx_2 \wedge dx_3 + x_3 \cdot dx_3 \wedge dx_1 + x_1 \cdot dx_1 \wedge dx_2$$

și

$$p : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad p(t_1, t_2, t_3) = (t_3 \cdot \sin t_1 \cdot \cos t_2, t_3 \cdot \sin t_1 \cdot \sin t_2, t_3 \cdot \cos t_1)$$

4. Să se calculeze direct și cu formula lui **Stockes** $\int_P f$, unde

$$p : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad p(t_1, t_2) = (\sin t_1 \cdot \cos t_2, \sin t_1 \cdot \sin t_2, \cos t_1)$$

și

$$f(x) = -x_2 \cdot dx_1 + x_1 \cdot dx_2 + x_3 \cdot dx_3.$$

CAPITOLUL 9

ECUAȚII DIFERENȚIALE

9.1 Ecuății diferențiale liniare

Definiții 9.1

- O ecuație diferențială de forma:

$$a_0(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) \cdot y = f(x), \quad x \in I, \quad (9.1)$$

unde $y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}$, $k = 1:n$ și în care funcțiile $a_k, f \in C^0(I, \mathbb{R})$, $k = 0:n$, $I \subset \mathbb{R}$

este interval, $a_0(x) \neq 0$, $x \in I$, iar $y \in C^n(I, \mathbb{R})$ este funcția necunoscută, se numește *ecuație diferențială liniară de ordinul n*.

- Numim soluție a ecuației (9.1) orice funcție $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietățile:
 - $y \in C^{(n-1)}(I; \mathbb{R})$;
 - $\exists y^{(n)}$ pe intervalul I ;
 - funcția y verifică identic ecuația (9.1).
- Dacă $f(x) = 0$, $\forall x \in I$, ecuația se numește omogenă, iar dacă $\exists x \in I$, astfel încât $f(x) \neq 0$, ecuația se numește neomogenă. Funcțiile se numesc coeficienții ecuației, iar funcția f , termenul liber. Punctele $x \in I$ în care $a_0(x) = 0$ se numesc puncte singulare ale ecuației (9.1).
- Definim operatorul diferențial liniar de ordinul n :

$$L_n : C^n(I, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(I, \mathbb{R})$$

prin $L_n := a_0(x) \cdot \frac{d^n}{dx^n} + a_1(x) \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x)$.

Cu ajutorul său ecuația (9.1) se scrie $(L_n y)(x) = f(x)$, $x \in I$.

Ecuația $L_n y = 0$ se mai numește ecuația omogenă asociată ecuației (9.1).

Propoziție 9.2

Operatorul L_n este operator liniar iar $\text{Ker } L_n$ este un \mathbb{R} -spațiu vectorial.

Exemplu 9.3. Vom determina $\text{Ker } D^n$, unde $D^n, n \in \mathbb{N}^*$ este operatorul de derivare de ordin n : $C^\infty(I) \rightarrow C^\infty(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ al funcțiilor reale de clasă C^∞ .

Este clar că soluția generală ecuației diferențiale $Dy = 0$ este un polinom de gradul zero, adică $y = c_0$. Soluția generală a ecuației diferențiale $D^2y = 0$ este un polinom de gradul unu, adică $y = c_0 \cdot x + c_1$. Vom presupune că soluția generală a ecuației $D^n y = 0$ este un polinom de gradul $(n-1)$, adică

$$y = c_0 \cdot x^{n-1} + c_1 \cdot x^{n-2} + \dots + c_{n-2} \cdot x + c_{n-1}.$$

Deoarece $D^{n+1}y = 0$ se poate scrie $D^n(Dy) = 0$, deducem

$$Dy = c_0 \cdot x^{n-1} + c_1 \cdot x^{n-2} + \dots + c_{n-2} \cdot x + c_{n-1},$$

de unde

$$y = c_0 \cdot \frac{x^n}{n} + c_1 \cdot \frac{x^{n-1}}{n-1} + \dots + c_{n-2} \cdot \frac{x^2}{2} + c_{n-1} \cdot x + c_n,$$

adică soluția generală a ecuației diferențiale $D^{n+1}y = 0$ este un polinom de gradul n . În concluzie, $\text{Ker } D^n$ este spațiul vectorial al funcțiilor polinomiale de grad n .

Definiție 9.4. Elementele $y_k \in \text{Ker } L_n$, $k = 1:p$ se numesc liniar dependente dacă există constantele reale c_k , $k = 1:p$ nu toate nule, astfel încât să avem

$$\sum_{k=1}^p c_k \cdot y_k(x) = 0, \forall x \in I.$$

În caz contrar, elementele $y_k \in \text{Ker } L_n$, $k = 1:p$ se numesc independente.

- Fie $y_k \in C^{(n-1)}(I, \mathbb{R})$, $k = 1:n$. Determinantul funcțional

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x) := \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \frac{d}{dx} y_1 & \frac{d}{dx} y_2 & \dots & \frac{d}{dx} y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} y_1 & \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} y_2 & \dots & \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} y_n \end{vmatrix}(x), x \in I$$

se numește determinantul lui **Wronski**¹ sau *wronskianul* funcțiilor $y_k \in C^{(n-1)}(I, \mathbb{R})$, $k = 1:n$.

¹ Josef Hoene de Wronski (1778-1853)

Teoremă 9.5. Funcțiile $y_k \in C^{(n-1)}(I, \mathbb{R})$, $k = 1:n$ sunt liniar dependente pe intervalul I dacă și numai dacă wronskianul lor este nul în orice punct din I .

Exemplu 9.6

- Arătați că în spațiul vectorial real al funcțiilor reale de clasă C^∞ funcțiile

$$\{1 \ 1-x \ 1-x-\exp(x)\}$$

sunt liniar independente pe \mathbb{R} și generează un subspațiu finit dimensional V .

- Determinați ecuația diferențială liniară ce caracterizează subspațiul V .
- Calculați *wronskianul* funcțiilor date.

Soluție

- Din relația $c_1 + c_2 \cdot (1-x) + c_3 \cdot (1-x-\exp(x)) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ deducem

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

de unde $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, adică funcțiile $\{1 \ 1-x \ 1-x-\exp(x)\}$ sunt liniar independente pe \mathbb{R} . Se pot verifica cu ușurință axiomele spațiului vectorial real pentru subspațiul

$$V = \left\{ v \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \mid v = c_1 + c_2 \cdot (1-x) + c_3 \cdot (1-x-\exp(x)), c_k \in \mathbb{R}, k = 1:3 \right\}.$$

- Un element arbitrar al subspațiului vectorial $y \in V$ se poate scrie sub forma

$$y = c_1 + c_2 \cdot (1-x) + c_3 \cdot (1-x-\exp(x)), c_k \in \mathbb{R}, k = 1:3,$$

iar *wronskianul* funcțiilor $y, y_1, y_2, y_3 \in V$ este

$$W(y, y_1, y_2, y_3)(x) := \begin{vmatrix} y & 1 & 1-x & 1-x-\exp(x) \\ \frac{dy}{dx} & 0 & -1 & -1-\exp(x) \\ \frac{d^2y}{dx^2} & 0 & 0 & -\exp(x) \\ \frac{d^3y}{dx^3} & 0 & 0 & -\exp(x) \end{vmatrix} = 0, x \in \mathbb{R}.$$

Prin calcul direct se constată că $y^{(3)} - y^{(2)} = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

- Un calcul direct arată că

$$W(y_1, y_2, y_3)(x) := \begin{vmatrix} 1 & 1-x & 1-x-\exp(x) \\ 0 & -1 & -1-\exp(x) \\ 0 & 0 & -\exp(x) \end{vmatrix} = \exp(x) > 0, x \in \mathbb{R}$$

Teoremă 9.7

Dacă $n+1$ funcții $y_k, y \in C^{(n)}(I, \mathbb{R}), k = 1:n$ au proprietățile:

- $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(x) \neq 0, \forall x \in I;$
- $W(y_1, y_2, \dots, y_n, y)(x) = 0, \forall x \in I,$

atunci există constantele $c_k \in \mathbb{R}, k = 1:n$ arbitrare, nu toate nule, astfel încât

$$y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + \dots + c_n \cdot y_n.$$

Exemplu 9.8

Arată că funcțiile $y_1, y_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$y_1(x) = \begin{cases} x^n, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}, \quad y_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^n, & x \geq 0 \end{cases}, \quad n \geq 3$$

au următoarele proprietăți:

- sunt liniar independente pe \mathbb{R} ;
- sunt soluții ale ecuației diferențiale

$$x^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + x \cdot \frac{dy}{dx} - n^2 \cdot y = 0, \quad x \in \mathbb{R};$$

- au *wronskianul* nul pe \mathbb{R} ;
- nu generează spațiul vectorial al soluțiilor V pentru ecuația dată.

Explicați de ce afirmația **Teoremei 9.5** nu este verificată de funcțiile y_1, y_2 .

Soluție

- Relația $c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 = 0, x \in \mathbb{R}$ devine

$$0 = \begin{cases} c_1 \cdot x^n, & x < 0 \\ c_2 \cdot x^n, & x \geq 0 \end{cases}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ceea ce conduce la $c_1 = c_2 = 0$. Astfel funcțiile y_1, y_2 sunt liniar independente.

- Se verifică imediat că funcțiile $y_1, y_2 \in C^2(\mathbb{R})$ și verifică identic pe \mathbb{R} ecuația

$$x^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + x \cdot \frac{dy}{dx} - n^2 \cdot y = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Un calcul direct conduce la

$$W(y_1, y_2)(x) := \begin{cases} \begin{vmatrix} x^n & 0 \\ n \cdot x^n & 0 \end{vmatrix} = 0, & x < 0; \\ \begin{vmatrix} 0 & x^n \\ 0 & n \cdot x^n \end{vmatrix} = 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

- Se poate constata că ecuația admite de asemenea soluția $y_3 = \frac{1}{x^n}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ce nu aparține spațiului vectorial V generat de soluțiile y_1, y_2 .
- Ecuația $x^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + x \cdot \frac{dy}{dx} - n^2 \cdot y = 0, x \in \mathbb{R}$ admite soluția $y_4 = x^n$.
- Ecuația $x^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + x \cdot \frac{dy}{dx} - n^2 \cdot y = 0, x \in \mathbb{R} - \{0\}$ admite drept soluții liniar independente soluțiile y_3, y_4 .
- Mulțimea soluțiilor ecuației $x^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + x \cdot \frac{dy}{dx} - n^2 \cdot y = 0, x > 0$ este subspațiul vectorial bidimensional real ale cărui elemente sunt de forma

$$y(x) = c_1 \cdot \frac{1}{x^n} + c_2 \cdot x^n, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- Pe un interval I ce conține originea, nu sunt verificate ipotezele teoremei de existență și unicitate. În fapt se poate constata că toate soluțiile $y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2$ ale ecuației date verifică condițiile inițiale $y(0) = y^{(1)}(0) = 0$.

Teoremă 9.9

Fie ecuația diferențială liniară de ordinul n , omogenă

$$L_n(y) := a_0(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) \cdot y = 0, \quad x \in I, \quad (9.2)$$

în care funcțiile $a_k \in C^0(I, \mathbb{R}), k = 0:n$, $I \subset \mathbb{R}$ este interval, $a_0(x) \neq 0, x \in I$ și $y_k \in C^{(n)}(I, \mathbb{R}), k = 1:n$, n soluții ale sale. Dacă wronskianul celor n soluții $y_k \in C^{(n)}(I, \mathbb{R}), k = 1:n$ nu este identic nul pe I , atunci orice soluție a ecuației (9.2) este de forma

$$y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + \dots + c_n \cdot y_n, \quad \forall x \in I, \quad (9.3)$$

unde constantele $c_k \in \mathbb{R}, k = 1:n$ sunt arbitrale. Funcția dată de (9.3) se numește *soluția generală* a ecuației (9.2) pe intervalul I .

Definiție 9.10

Un sistem de soluții $y_k \in C^{(n)}(I, \mathbb{R}), k = 1:n$ ale ecuației (9.2), cu wronskianul nenul pe intervalul I , se numește sistem fundamental de soluții pe I ale ecuației (9.2).

Consecință 9.11

- n soluții $y_k \in C^{(n)}(I, \mathbb{R}), k = 1:n$ formează un sistem fundamental pe I dacă și numai dacă sunt liniar independente pe I ;

- $n+1$ soluții ale unei ecuații diferențiale de ordinul n , definite pe I , sunt liniar dependente pe I .

Observație 9.12

Dacă $y_k \in C^{(n)}(I, \mathbb{R})$, $k=1:n$ constituie un sistem fundamental de soluții pe I ale ecuației (9.2) atunci soluția generală a ecuației (9.2) pe I este combinația liniară a acestor soluții, adică (9.3).

Teoremă 9.13

Fie ecuația diferențială liniară de ordinul n , omogenă

$$L_n(y) := a_0(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) \cdot y = 0, \quad x \in I,$$

în care funcțiile $a_k \in C^0(I, \mathbb{R})$, $k=0:n$, $I \subset \mathbb{R}$ este interval, $a_0(x) \neq 0$, $x \in I$. Dacă se cunoaște o soluție particulară y_p a ecuației date (deci, un element al bazei spațiului soluțiilor), atunci ordinul ecuației se poate micșora cu o unitate prin schimbarea de funcție $y = y_p \cdot z$.

Definiție 9.14

Se numește problema lui **Cauchy** pentru ecuația diferențială liniară omogenă de ordinul n

$$L_n(y) := a_0(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) \cdot y = 0, \quad x \in I,$$

în care funcțiile $a_k \in C^0(I, \mathbb{R})$, $k=0:n$, $I \subset \mathbb{R}$ este interval, $a_0(x) \neq 0$, $x \in I$, problema determinării soluției $\varphi \in C^{(n)}(I; \mathbb{R})$ care în punctul $x_0 \in I$ satisfac condițiile inițiale $\varphi^{(k)}(x_0) = y_{0,k}$, $y_{0,k} \in \mathbb{R}$, $k=0:(n-1)$.

Teoremă 9.15

Fie ecuația diferențială de ordinul n , liniară și omogenă

$$a_0(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) \cdot y = f(x), \quad x \in I, \quad (9.4)$$

în care funcțiile $a_k, f \in C^0(I, \mathbb{R})$, $k=0:n$, $I \subset \mathbb{R}$ este interval, $a_0(x) \neq 0$, $x \in I$.

Soluția generală a ecuației (9.4) este suma dintre soluția generală a ecuației omogene asociate și o soluție particulară (oarecare) a ecuației neomogene.

Teoremă 9.16 (Lagrange)

Fie ecuația diferențială de ordinul n , liniară și omogenă

$$a_0(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) \cdot y = f(x), \quad x \in I,$$

în care funcțiile $a_k, f \in C^0(I, \mathbb{R})$, $k=0:n$, $I \subset \mathbb{R}$ este interval, $a_0(x) \neq 0$, $x \in I$.

Dacă se cunoaște un sistem fundamental de soluții y_k , $k=1:n$, ale ecuației omogene asociate pe I , atunci o soluție particulară a ecuației neomogene (9.4) pe I este dată de

$$y_p = \sum_{k=1}^n y_k \cdot \int c_k^{(1)}(x) dx,$$

unde derivatele funcțiilor $c_k \in C^{(1)}(I; \mathbb{R})$, $k = 1:n$, reprezintă soluția sistemului algebric liniar, de n ecuații cu n necunoscute, neomogen

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1^{(1)}(x) \cdot y_1(x) + c_2^{(1)}(x) \cdot y_2(x) + \dots + c_n^{(1)}(x) \cdot y_n(x) = 0 \\ c_1^{(1)}(x) \cdot y_1^{(1)}(x) + c_2^{(1)}(x) \cdot y_2^{(1)}(x) + \dots + c_n^{(1)}(x) \cdot y_n^{(1)}(x) = 0 \\ \dots \\ c_1^{(1)}(x) \cdot y_1^{(n-2)}(x) + c_2^{(1)}(x) \cdot y_2^{(n-2)}(x) + \dots + c_n^{(1)}(x) \cdot y_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ c_1^{(1)}(x) \cdot y_1^{(n-1)}(x) + c_2^{(1)}(x) \cdot y_2^{(n-1)}(x) + \dots + c_n^{(1)}(x) \cdot y_n^{(n-1)}(x) = \frac{f(x)}{a_0(x)} \end{array} \right., \quad x \in I$$

Exemplu 9.17

Determinați soluția generală a ecuației diferențiale

$$x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \cdot \frac{dy}{dx} + x \cdot y = 1, \quad x > 0,$$

cunoscând o soluție $y_1(x) = \frac{\sin x}{x}$ a ecuației omogene.

Soluție

Pentru ecuația diferențială omogenă

$$x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \cdot \frac{dy}{dx} + x \cdot y = 0, \quad x > 0$$

vom face schimbarea de funcție $y = y_1 \cdot z$.

$$\text{Rezultă } \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \sin x + 2 \cdot \frac{dz}{dx} \cdot \cos x = 0, \quad x > 0.$$

Schimbând din nou funcția prin relația $\frac{dz}{dx} = v$, se obține o ecuație cu variabile separate de forma $\frac{dv}{v} = -\frac{2dx}{\sin x}$. Vom determina o soluție particulară de forma $v \cdot \sin^2 x = 1$. Prin urmare, $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow z = -\operatorname{ctg} x + C$. Am obținut a doua soluție $y_2 = \frac{\cos x}{x}$ a ecuației diferențiale omogene, liniar independentă de y_1 . Soluția generală a ecuației diferențiale liniare omogene este

$$y_0 = c_1 \cdot \frac{\sin x}{x} + c_2 \cdot \frac{\cos x}{x}, \quad x > 0.$$

O soluție particulară a ecuației diferențiale neomogene poate fi găsită prin metoda variației constantelor. Sistemul liniar diferențial (**Lagrange**)

$$\begin{cases} \frac{\sin x}{x} \cdot c_1^{(1)} + \frac{\cos x}{x} \cdot c_2^{(1)} = 0 \\ \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} \cdot c_1^{(1)} + \frac{-x \cdot \sin x - \cos x}{x^2} \cdot c_2^{(1)} = \frac{1}{x}, \quad x > 0 \end{cases}$$

are soluția $c_1^{(1)} = \cos x$, $c_2^{(1)} = -\sin x$. Astfel am obținut următoarea soluție particulară pentru ecuația diferențială neomogenă

$$y_p(x) = \frac{\sin^2 x}{x} + \frac{\cos^2 x}{x} = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Soluția generală a ecuației diferențiale neomogene este

$$y = c_1 \cdot \frac{\sin x}{x} + c_2 \cdot \frac{\cos x}{x} + \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Teoremă 9.18 (soluția problemei Cauchy pentru ecuația diferențială liniară de ordinul n , neomogenă)

Fie ecuația diferențială liniară de ordinul n neomogenă

$$a_0(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) \cdot y = f(x), \quad x \in I,$$

în care funcțiile $a_k, f \in C^0(I, \mathbb{R})$, $k = 0:n$, $I \subset \mathbb{R}$ este interval, $a_0(x) \neq 0$, $x \in I$.

Dacă se cunoaște un sistem fundamental de soluții y_k , $k = 1:n$, pe intervalul I , atunci există și este unică soluția $\varphi \in C^{(n)}(I; \mathbb{R})$ care în punctul $x_0 \in I$ satisfac condițiile inițiale $\varphi^{(k)}(x_0) = y_{0,k}$, $y_{0,k} \in \mathbb{R}$, $k = 0:(n-1)$.

Definiție 9.19

Se numește ecuația caracteristică a ecuației diferențiale de ordinul n , liniare, cu coeficienți constanți, omogene

$$a_0 \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_n \cdot y = 0, \quad x \in I, \quad a_0 \neq 0,$$

în care $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 0:n$, $I \subset \mathbb{R}$ este interval, ecuația algebraică de ordinul n

$$a_0 \cdot r^n + a_1 \cdot r^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (9.5)$$

Se mai notează

$$K_n(r) = a_0 \cdot r^n + a_1 \cdot r^{n-1} + \dots + a_n$$

și se numește polinomul caracteristic asociat ecuației diferențiale de ordinul n , liniară, cu coeficienți constanți, omogene.

Teoremă 9.20

Fie ecuația diferențială de ordinul n , liniară, cu coeficienți constanți, omogenă

$$a_0 \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_n \cdot y = 0, \quad x \in I, \quad a_0 \neq 0$$

și ecuația sa caracteristică asociată

$$K_n(r) = a_0 \cdot r^n + a_1 \cdot r^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

- Dacă ecuația caracteristică are toate rădăcinile reale și distințe, $r_k \in \mathbb{R}$, $r_k \neq r_j$, $k \neq j$, $\forall k, j = 1:n$, atunci funcțiile $y_k(x) = e^{r_k \cdot x}$, $k = 1:n$ formează un sistem fundamental de soluții pe I , pentru ecuația omogenă.
- Dacă n este un număr par, $n = 2 \cdot k$, și ecuația caracteristică are toate rădăcinile complexe distințe

$$r_m = \alpha_m + i \cdot \beta_m = \overline{r_m^*}, r_m \neq r_j, m \neq j, \forall j, m = 1:k,$$

atunci funcțiile

$$y_m(x) = e^{\alpha_m \cdot x} \cdot \cos(\beta_m \cdot x), y_m^*(x) = e^{\alpha_m \cdot x} \cdot \sin(\beta_m \cdot x), \forall m = 1:k,$$

formează un sistem fundamental de soluții pe I , pentru ecuația omogenă.

- Dacă ecuația caracteristică are rădăcina $r = \alpha \in \mathbb{R}$ multiplă de ordinul $k \leq n$, atunci funcțiile $y_m(x) = x^{m-1} \cdot e^{\alpha \cdot x}$, $\forall m = 1:k$ sunt soluții independente pe I , pentru ecuația omogenă.
- Dacă ecuația caracteristică are rădăcina complexă $r = \alpha + i \cdot \beta$ multiplă de ordinul $k \leq \frac{n}{2}$, atunci funcțiile

$$y_m(x) = x^{m-1} \cdot e^{\alpha_m \cdot x} \cdot \cos(\beta_m \cdot x), y_m^*(x) = x^{m-1} \cdot e^{\alpha_m \cdot x} \cdot \sin(\beta_m \cdot x), \forall m = 1:k$$

sunt $2 \cdot k$ soluții independente, pe I , pentru ecuația omogenă.

Propoziție 9.21 (metoda coeficienților nedeterminați)

Fie ecuația diferențială de ordinul n , liniară, cu coeficienți constanți, neomogenă

$$a_0 \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_n \cdot y = f(x), x \in I, a_0 \neq 0 \quad (9.6)$$

Dacă $f(x) = P_m(x) \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x) + Q_k(x) \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x)$, unde

$P_m, Q_k \in \mathbb{R}[x]$ sunt polinoame de gradul m , respectiv k și

- $K_n(\alpha + i \cdot \beta) \neq 0$, atunci o soluție particulară a ecuației neomogene este $y_p(x) = [P_s^*(x) \cdot \cos(\beta \cdot x) + Q_s^*(x) \cdot \sin(\beta \cdot x)] \cdot e^{\alpha \cdot x}$, unde $P_s^*, Q_s^* \in \mathbb{R}[x]$ sunt polinoame de gradul $s = \max(m, k)$;
- $K_n(\alpha + i \cdot \beta) = 0$, $r = \alpha + i \cdot \beta = \overline{r^*}$ fiind o rădăcină de ordinul $q \leq \frac{n}{2}$ a ecuației caracteristice, atunci o soluție particulară a ecuației neomogene este

$$y_p(x) = x^q \cdot [P_s^*(x) \cdot \cos(\beta \cdot x) + Q_s^*(x) \cdot \sin(\beta \cdot x)] \cdot e^{\alpha \cdot x},$$

unde $P_s^*, Q_s^* \in \mathbb{R}[x]$ sunt polinoame de gradul $s = \max(m, k)$.

Propoziție 9.22 (principiul superpoziției)

Dacă termenul liber f al ecuației diferențiale neomogene (9.6) este o sumă a $s \in \mathbb{N}^*$ funcții $f = \sum_{i=1}^s f_i$ fiecare dintre acestea având structură dată în propoziția 9.21, atunci soluția particulară căutată pentru ecuația diferențială neomogenă (9.6) va fi de forma $y_p(x) = \sum_{i=1}^s y_{p,i}(x)$, $x \in I$ unde $y_{p,i}$ este o soluție particulară a sistemului neomogen

$$a_0 \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_n \cdot y = f_k(x), x \in I, a_0 \neq 0, k = 1 : s.$$

Exemplu 9.23

Determinați soluția generală a ecuației diferențiale

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + y = 3 \cdot \exp(x) + 5 \cdot x \cdot \sin x, x \in \mathbb{R}.$$

Soluție

Rădăcinile ecuației caracteristice ale ecuației diferențiale omogene

$$K_3(r) = r^3 - r^2 - r + 1 = 0$$

sunt $r_1 = r_2 = 1$, $r_3 = -1$. Soluția generală a ecuației omogene este

$$y_0 = (c_1 + c_2 \cdot x) \cdot \exp(x) + c_3 \cdot \exp(-x).$$

Folosind principiul superpoziției și metoda coeficientilor nedeterminați propunem pentru ecuația diferențială neomogenă soluția particulară

$$y_p = c_4 \cdot x^2 \cdot \exp(x) + (c_5 + c_6 \cdot x) \cdot \cos x + (c_7 + c_8 \cdot x) \cdot \sin x.$$

Înlocuind în ecuația diferențială neomogenă și efectuând identificările termenilor asemenea, obținem

$$c_4 = \frac{3}{4}, c_5 = \frac{10}{7}, c_6 = c_8 = \frac{5}{7}, c_7 = -\frac{5}{7}.$$

Prin urmare, soluția generală a ecuației diferențiale neomogene este

$$y = (c_1 + c_2 \cdot x) \cdot \exp(x) + c_3 \cdot \exp(-x) + \frac{3}{4} \cdot x^2 \cdot \exp(x) + \\ + \left(\frac{10}{7} + \frac{5}{7} \cdot x \right) \cdot \cos x + \left(-\frac{5}{7} + \frac{5}{7} \cdot x \right) \cdot \sin x$$

Definiție 9.24

O ecuație diferențială liniară de ordinul n de forma

$$a_0 \cdot x^n \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot x^{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_n \cdot y = f(x), x \in I, a_0 \neq 0, \quad (9.7)$$

în care $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 0 : n$, $I \subset \mathbb{R}$ este interval și $f \in C^0(I; \mathbb{R})$ se numește ecuația lui Euler², neomogenă.

² Leonard Euler (1707-1783)

Dacă $f(x) = 0, \forall x \in I$, atunci ecuația se numește ecuația **Euler** omogenă și soluția sa este definită pe $I - \{0\}$.

Teoremă 9.25 (Euler)

Prin schimbarea de variabilă independentă $|x| = e^t$, ecuația diferențială de tip **Euler** (9.7) se transformă într-o ecuație diferențială liniară de ordinul n , cu coeficienți constanți.

Exemplu 9.26

Determinați soluția problemei **Cauchy**

$$\begin{cases} x^3 \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + 3 \cdot x^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + x \cdot \frac{dy}{dx} - y = 0, x > 0 \\ y(1) = y^{(1)}(1) = 0, y^{(2)}(1) = 1 \end{cases}$$

Soluție

Deoarece ecuația diferențială este o ecuație de tip **Euler** vom face schimbarea de variabilă independentă $x = e^t, x > 0$. Ecuația diferențială de tip **Euler** se reduce la ecuația diferențială liniară cu coeficienți constanți

$$\frac{d^3y}{dt^3} - y = 0.$$

Ecuația caracteristică atașată ecuației diferențiale obținute este

$$K_3(r) = r^3 - 1 = 0.$$

Rădăcinile acestei ecuații sunt $r_1 = 1, r_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = r_3$. Prin urmare, soluția generală a ecuației diferențiale transformate este

$$y(t) = c_1 \cdot \exp(t) + \exp\left(-\frac{t}{2}\right) \cdot \left(c_2 \cdot \cos \frac{\sqrt{3} \cdot t}{2} + c_3 \cdot \sin \frac{\sqrt{3} \cdot t}{2}\right).$$

Revenind la variabila independentă x , vom determina soluția generală a ecuației diferențiale inițiale de forma

$$y(x) = c_1 \cdot x + \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left(c_2 \cdot \cos \frac{\sqrt{3} \cdot \ln x}{2} + c_3 \cdot \sin \frac{\sqrt{3} \cdot \ln x}{2}\right), x > 0.$$

Scriem condițiile inițiale ale soluției și obținem sistemul liniar

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 3 \cdot c_1 + \sqrt{3} \cdot c_3 = 0 \\ 9 \cdot c_1 - 3 \cdot c_2 = 4 \end{cases}$$

de unde $c_1 = \frac{1}{3} = -c_2, c_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Soluția problemei **Cauchy** este

$$y(x) = \frac{1}{3} \cdot x - \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \cos \frac{\sqrt{3} \cdot \ln x}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin \frac{\sqrt{3} \cdot \ln x}{2} \right), x > 0.$$

Observăm că $x=1$ este punct de minim pentru soluția problemei **Cauchy**.

Propoziție 9.27 (Metoda seriilor de puteri)

Dacă f și g pot fi reprezentate prin serii **Taylor** (adică sunt funcții analitice) într-o vecinătate a punctului x_0 , atunci orice soluție a ecuației

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x) \cdot \frac{dy}{dx} + g(x) \cdot y = 0, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \delta > 0$$

poate fi reprezentată în forma unei serii de puteri

$$y(x) = \sum_{k \geq 0} a_k \cdot (x - x_0)^k, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \delta > 0,$$

unde raza seriei de puteri se stabilește după ce se determină prin identificare, coeficienții seriei a_k , $k \geq 0$.

Propoziție 9.28 (Metoda seriilor de puteri)

Dacă f și g pot fi reprezentate prin serii **Taylor** într-o vecinătate a punctului x_0 (punct singular pentru ecuația diferențială), atunci orice soluție a ecuației

$$(x - x_0)^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + (x - x_0) \cdot f(x) \cdot \frac{dy}{dx} + g(x) \cdot y = 0, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \delta > 0$$

poate fi reprezentată în forma unei serii de puteri

$$y(x) = (x - x_0)^\alpha \cdot \sum_{k \geq 0} a_k \cdot (x - x_0)^k, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \delta > 0, \alpha \geq 0,$$

unde raza seriei de puteri se stabilește după ce se determină prin identificare, coeficienții seriei a_k , $k \geq 0$. În acest caz x_0 este un punct singular al soluției.

Exemplu 9.29

Determinați soluția ecuației **Schrödinger**

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k \cdot \left(E - \frac{A}{x} \cdot \exp(-\lambda \cdot x) \right) \cdot y = 0, x > 0,$$

unde $k, E, A, \lambda \in \mathbb{R}$, folosind metoda seriilor de puteri.

Soluție

Folosind dezvoltarea în serie de puteri, în vecinătatea originii, a funcției analitice $\exp(-\lambda \cdot x)$, ecuația

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k \cdot \left(E - \frac{A}{x} \cdot \sum_{k \geq 0} \frac{(-\lambda \cdot x)^k}{k!} \right) \cdot y = 0, x > 0.$$

Vom căuta o soluție sub forma unei serii de puteri

$$y = x^\alpha \cdot \sum_{k \geq 0} a_k \cdot x^k, \quad x > 0, \alpha \geq 0.$$

Impunând ca această soluție să verifice identic ecuația **Schrödinger**, obținem prin identificare următorul sistem infinit de ecuații liniare

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \cdot (\alpha - 1) = 0 \\ \alpha \cdot (\alpha + 1) \cdot a_1 - k \cdot A \cdot a_0 = 0 \\ (\alpha + 2) \cdot (\alpha + 1) \cdot a_2 + (k \cdot E + \lambda \cdot k \cdot A) \cdot a_0 - k \cdot A \cdot a_1 = 0 \\ \dots \\ [\alpha \cdot (\alpha - 1) + (n+1) \cdot (n+2)] \cdot a_{n+2} + 2 \cdot \alpha \cdot (n+1) \cdot a_{n+1} + \\ + k \cdot E \cdot a_n - k \cdot A \cdot \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-\lambda)^k}{k!} \cdot a_{n+1-k} = 0 \\ \dots \end{array} \right.$$

Rezultă $\alpha = 0$ sau $\alpha = 1$. Pentru $\alpha = 1$ obținem

$$a_1 = \frac{k \cdot A}{2} \cdot a_0, \quad a_2 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{k^2 \cdot A^2}{2} - k \cdot E - \lambda \cdot k \cdot A \right) \cdot a_0, \dots$$

Prin urmare, o soluție a ecuației **Schrödinger** este seria de puteri

$$y = a_0 \cdot x \cdot \left[1 + \frac{k \cdot A}{2} \cdot x + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{k^2 \cdot A^2}{2} - k \cdot E - \lambda \cdot k \cdot A \right) \cdot x^2 + \dots \right], \quad x > 0,$$

unde $a_0 \in \mathbb{R}$ și a cărei raza de convergență este $R = \infty$.

Exemplu 9.30

Determinați soluția ecuației diferențiale

$$2 \cdot x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \cdot (2 \cdot x - 3) \cdot \frac{dy}{dx} - 3 \cdot y = 0, \quad x > 0$$

folosind metoda seriilor de puteri.

Definiții 9.31

Fie ecuația diferențială liniară omogenă de ordinul n cu coeficienți constanți

$$a_0 \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_n \cdot y = 0, \quad x \in I, \quad a_0 \neq 0.$$

Soluția generală se scrie ca fiind combinația liniară a n soluțiilor liniar independente y_k , $k = 1 : n$

$$y(x, c) = \sum_{k=1}^n c_k \cdot y_k(x), \quad x \in I, \quad c = (c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n)^t \in \mathbb{R}^n.$$

- Soluția $y(x, c) = 0$, $x \in I$ corespunzătoare lui $c = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ se numește **punct de echilibru**.

- Punctul de echilibru $y(x, c) = 0, x \in I$ este numit **stabil** dacă
$$\exists \lim_{c \rightarrow 0} y^{(k)}(x, c) = 0, k = 0 : (n-1), \forall x \in I$$
uniform în raport cu $x \in I$.
- Punctul de echilibru $y(x, c) = 0, x \in I$ este numit **asimptotic stabil** dacă este stabil și suplimentar
$$\exists \lim_{x \rightarrow \infty} y^{(k)}(x, c) = 0, k = 0 : (n-1), c \in \mathbb{R}^n.$$

Propoziție 9.32

Fie ecuația diferențială de ordinul n , liniară, cu coeficienți constanți, omogenă

$$a_0 \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_n \cdot y = 0, x \in I, a_0 \neq 0$$

și ecuația sa caracteristică asociată

$$K_n(r) = a_0 \cdot r^n + a_1 \cdot r^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

- Dacă toate rădăcinile ecuației caracteristice au partea reală strict negativă, atunci punctul de echilibru este *stabil* și *asimptotic stabil*.
- Dacă există o rădăcină a ecuației caracteristice cu proprietățile:
 - are ordinul de multiplicitate unu,
 - are partea reală nulă,
iar celelalte rădăcini au partea reală strict negativă, atunci punctul de echilibru este *stabil*, dar *nu este asimptotic stabil*.
- Dacă are loc cel puțin una din următoarele două situații:
 - există o rădăcină a ecuației caracteristice cu partea reală strict pozitivă;
 - există o rădăcină cu partea reală nulă, dar multiplă de cel puțin ordin doi,
atunci punctul de echilibru *nu este stabil*.

Teoremă 9.33 (criteriul Hurwitz). Rădăcinile polinomului $K_n \in \mathbb{R}[x]$ (ecuației caracteristice)

$$K_n(r) = a_0 \cdot r^n + a_1 \cdot r^{n-1} + \dots + a_n = 0, a_k \in \mathbb{R}, k = 0 : n, a_0 > 0, a_n \neq 0$$

au partea reală strict negativă dacă și numai dacă

- $a_k > 0, k = 0 : n$;
- matricea

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2 \cdot n - 1} & a_{2 \cdot n - 2} & a_{2 \cdot n - 3} & a_{2 \cdot n - 4} & a_{2 \cdot n - 5} & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

unde $a_s = 0, \forall s > n$, are toți minorii principali strict pozitivi.

Exemplu 9.34

Studiați stabilitatea punctului de echilibru pentru următoarea ecuație diferențială

$$y^{(3)} + y^{(2)} + y^{(1)} + y = 0, x \in \mathbb{R}.$$

Soluție

Ecuția caracteristică atașată ecuației diferențiale date este

$$K_3(r) = r^3 + r^2 + r + 1 = 0.$$

Matricea **Hurwitz** $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ nu are toți minorii strict pozitivi, prin urmare nu toate rădăcinile ecuației caracteristice au partea reală strict negativă.

Rădăcinile ecuației caracteristice sunt $r_1 = i = \bar{r}_2, r_3 = -1$. Soluția generală a ecuației diferențiale se poate scrie sub forma

$$y(x, c_1, c_2, c_3) = c_1 \cdot \sin x + c_2 \cdot \cos x + c_3 \cdot \exp(-x).$$

Deoarece $\exists \lim_{c \rightarrow 0} y^{(k)}(x, c) = 0, k = 0 : 2, \forall x \in \mathbb{R}$ și $\nexists \lim_{x \rightarrow \infty} y^{(k)}(x, c)$,

$k = 0 : 2, c \in \mathbb{R}^3$ deducem că punctul de echilibru este stabil, dar nu este asimptotic stabil.

9.2 Sisteme de ecuații diferențiale liniare

Definiție 9.35

Un sistem de ecuații diferențiale de forma

$$F_k\left(x; y_1, y_1^{(1)}, \dots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2^{(1)}, \dots, y_2^{(m_2)}, \dots, y_s, y_s^{(1)}, \dots, y_s^{(m_s)}\right) = 0, x \in I, k = 1 : s \quad (9.8)$$

unde funcțiile $F_k : I \times \prod_{j=1}^s E_j \rightarrow \mathbb{R}, E_k \subseteq \mathbb{R}^{m_k}, k = 1 : s$, $I \subset \mathbb{R}$ este interval,

$y_k \in C^{(m_s)}(I, \mathbb{R}), k = 1 : s$ sunt funcțiile necunoscute, se numește *sistem de ecuații diferențiale* de ordinul $n = \max_{k=1:s} m_k$. Dacă $n = 1$, sistemul (9.8) se numește sistem de ecuații diferențiale de ordinul întâi.

Teoremă 9.36

Un sistem de ecuații diferențiale de ordin superior poate fi transformat într-un sistem de ecuații diferențiale de ordinul întâi prin introducerea de noi funcții necunoscute.

Exemplu 9.37

Să se transforme sistemul de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} \frac{d^2x_1}{dt^2} + 2 \cdot m \cdot x_2 = 0 \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} - 2 \cdot m \cdot x_1 = 0 \end{cases}, \quad m > 0, t > 0$$

într-un sistem de ecuații diferențiale de ordinul întâi.

Soluție

Prin introducerea următoarelor noi funcții necunoscute $x_3 = \frac{dx_1}{dt}$, $x_4 = \frac{dx_2}{dt}$ obținem un sistem de ecuații diferențiale de ordinul întâi cu coeficienți constanți

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_4 \\ \frac{dx_3}{dt} = -2 \cdot m \cdot x_2 \\ \frac{dx_4}{dt} = 2 \cdot m \cdot x_1 \end{cases}, \quad t > 0.$$

Consecință 9.38

O ecuație diferențială de ordinul superior se poate transforma într-un sistem de ecuații diferențiale de ordinul întâi.

Teoremă 9.39 (metoda reducerii la o ecuație rezolvantă)

Rezolvarea unui sistem de n ecuații diferențiale de ordinul întâi se poate reduce la rezolvarea unei ecuații diferențiale de ordinul n .

Exemplu 9.40

Să se reducă următorul sistem de ecuații diferențiale de ordinul întâi

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 + x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_3, \quad t > 0 \\ \frac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2 \end{cases}$$

la o ecuație diferențială de ordin trei.

Soluție

Derivăm prima ecuație (în raport cu variabila independentă) și ținând seama de celelalte două ecuații, obținem

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = 2 \cdot x_1 + \frac{dx_1}{dt}, \quad t > 0.$$

Prin derivarea încă o dată a ultimei ecuații obținute, avem

$$\frac{d^3x_1}{dt^2} = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot \frac{dx_1}{dt}, \quad t > 0,$$

a cărei soluție generală este

$$x_1 = (c_1 + c_2 \cdot t) \cdot \exp(-t) + c_3 \cdot \exp(2 \cdot t), \quad t > 0, \quad c_k \in \mathbb{R}, k = 1:3.$$

Teoremă 9.41 (de existență și unicitate a soluției problemei Cauchy pentru sisteme de ecuații diferențiale de ordinul întâi)

Fie punctul $(x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}) \in I \times D = \Omega$, $I \subset \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ și sistemul de n ecuații diferențiale de ordinul întâi cu n funcții necunoscute

$$\frac{dy_k}{dx} = F_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad x \in I, \quad k = 1:n,$$

unde $F_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega = I \times D$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $k = 1:n$, care îndeplinește următoarele condiții:

- funcțiile F_k , $k = 1:n$ sunt continue pe compactul $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, definit prin $\Omega = \{(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \mid |x - x_0| \leq a, |y_k - y_{k0}| \leq b_k, a, b_k \in \mathbb{R}_+, k = 1:n\}$;
- funcțiile F_k , $k = 1:n$ sunt *local lipschitziene* pe Ω în raport cu argumentele y_1, y_2, \dots, y_n , adică există constantele pozitive $l_{k,j} > 0$, $k, j = 1:n$, astfel încât oricare ar fi două puncte $(x, y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*), (x, y_1, y_2, \dots, y_n) \in \Omega$ are loc inegalitatea

$$\left| F_k(x, y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*) - F_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \right| \leq \sum_{j=1}^n l_{k,j} \cdot |y_j^* - y_j|, \quad k = 1:n.$$

Atunci *există* și este *unică* soluția sistemului, și anume: $y_k = \varphi_k(x)$, $\varphi_k \in C^{(1)}(J; D)$, $k = 1:n$, $J = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| \leq h\} \subseteq I$, unde $h = \min_{k=1:n} \left\{ a, \frac{b_k}{M} \right\}$, $M = \max_{k=1:n} \sup_{(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \in D} |F_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n)|$, iar φ_k , $k = 1:n$ verifică condițiile inițiale $\varphi_k(x_0) = y_{k0}$, $k = 1:n$. Mai mult, funcțiile φ_k , $k = 1:n$ verifică și următorul sistem de ecuații integrale

$$\varphi_k(x) = y_{k0} + \int_{x_0}^x F_k(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) dt, \quad k = 1:n, \quad x \in I.$$

Exemplu 9.42

Cunoscând că $|x_k| \leq 1$, $k = 1:2$, să se arate că următorul sistem de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = t + x_1 - \operatorname{arctg} x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = 1 - x_2 + \operatorname{arctg} x_1 \end{cases}, \quad t \in [-1, 1], \quad x_1(0) = x_2(0) = 0$$

are o soluție unică pe intervalul $J = \left\{ t \in \mathbb{R} \mid |t| \leq h = \frac{4}{8 + \pi} \right\}$.

Soluție

Se verifică ipotezele **Teoremei 9.41**. Astfel funcțiile

$$F_k : [-1, 1]^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad k = 1 : 2$$

$$\begin{cases} F_1(t, x_1, x_2) = t + x_1 - \operatorname{arctg} x_2 \\ F_2(t, x_1, x_2) = 1 - x_2 + \operatorname{arctg} x_1 \end{cases}$$

sunt continue pe domeniul de definiție și

$$\left| \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(t, x_1, x_2) \right| \leq \frac{\pi}{2} = l_{k,j}, \quad j, k = 1 : 2, \quad \forall (t, x_1, x_2) \in [-1, 1]^3.$$

Mai mult, $M = \max_{k=1:2} \sup_{(t, x_1, x_2) \in D} |F_k(t, x_1, x_2)| = 2 + \frac{\pi}{4}$. Concluzia este imediată.

Teorema (Peano). Fie punctul

$$(x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}) \in I \times D = \Omega, \quad I \subset \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^n$$

și sistemul de n ecuații diferențiale de ordinul întâi cu n funcții necunoscute

$$\frac{dy_k}{dx} = F_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad x \in I, \quad k = 1 : n,$$

unde $F_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \Omega = I \times D, D \subseteq \mathbb{R}^n, k = 1 : n$, care îndeplinește următoarele condiții: funcțiile $F_k, k = 1 : n$ sunt continue pe compactul $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, definit prin $\Omega = \{(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \mid |x - x_0| \leq a, |y_k - y_{k0}| \leq b_k, a, b_k \in \mathbb{R}_+, k = 1 : n\}$.

Atunci **există** cel puțin o soluție a sistemului, și anume:

$$y_k = \varphi_k(x), \quad \varphi_k \in C^{(1)}(J; D), \quad k = 1 : n, \quad J = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| \leq h\} \subseteq I,$$

unde $h = \min_{k=1:n} \left\{ a, \frac{b_k}{M} \right\}$, $M = \max_{k=1:n} \sup_{(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \in D} |F_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n)|$ iar $\varphi_k, k = 1 : n$

verifică condițiile inițiale $\varphi_k(x_0) = y_{k0}, k = 1 : n$.

Exemplu: Fie ecuația diferențială $\frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}}$ și condiția inițială $y(0) = 0$,

unde funcția $f(x, y) = 3y^{\frac{2}{3}}$ este funcție continuă în \mathbb{R}^2 , dar nu este

lipschitziană într-o vecinătate a originii. Se pot găsi cel puțin **patru** soluții care verifică atât ecuația, cât și condiția inițială, și anume:

$$\begin{cases} y_1 = x^3, x \in \mathbb{R} \\ y_2 = 0, x \in \mathbb{R} \\ y_3 = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^3, & x > 0 \end{cases} \\ y_4 = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ x^3, & x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Teoremă 9.43

Fie sistemul de n ecuații diferențiale de ordinul întâi cu n funcții necunoscute

$$\frac{dy_k}{dx} = F_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad x \in I, \quad k = 1 : n,$$

unde $F_k \in C^{(1)}(D; \mathbb{R})$, $D = I \times E$, $I \subseteq \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $k = 1 : n$. Soluția generală a sistemului depinde de n constante reale arbitrară.

Consecință 9.44

Soluția generală a unei ecuații diferențiale de ordinul n $y^{(n)} = F(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)})$, $x \in I \subset \mathbb{R}$, unde $F \in C^{(1)}(I \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, depinde de n constante reale arbitrară.

Teoremă 9.45 (de existență și unicitate a soluției problemei Cauchy pentru ecuația diferențială de ordinul n)

Fie problema **Cauchy** asociată ecuației diferențiale de ordinul n , $y^{(n)} = F(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)})$, $x \in I$ cu condițiile inițiale

$$y^{(k)}(x_0) = y_{k0} \in \mathbb{R}, \quad k = 0 : (n-1), \quad \text{unde } I = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| \leq a \right\} \subset \mathbb{R}.$$

Dacă

$$F \in C^{(1)}(I \times \Omega; \mathbb{R}), \quad \Omega = \left\{ (y_1, y_2, \dots, y_n) \mid |y_k - y_{k0}| \leq b_k, \quad b_k \in \mathbb{R}_+, \quad k = 1 : n \right\} \subseteq \mathbb{R}^n,$$

atunci **există** și este **unică** soluția $y = \varphi(x)$, $\varphi \in C^{(n)}(J; \mathbb{R})$ a ecuației diferențiale date, unde

$$J = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| \leq h \right\} \subset I, \quad \text{iar } h = \min_{k=1:n} \left\{ a, \frac{b_k}{M} \right\},$$

$$M = \sup \left| F(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}) \right|.$$

Definiție 9.46

Un sistem de ecuații diferențiale de forma

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \cdot y_j + f_i(x), \quad i = 1:n, \quad (9.9)$$

unde $a_{ij}, f_i \in C^0(I; \mathbb{R})$, $i, j = 1:n$, iar $y_i \in C^{(1)}(I; \mathbb{R})$, $i = 1:n$ sunt funcții necunoscute, se numește *sistem de ecuații diferențiale liniare de ordinul întâi*.

Observație 9.47

Un sistem de ecuații diferențiale de ordinul întâi satisfac condițiile din teorema de existență și unicitate a soluției problemei **Cauchy**. Se poate demonstra că orice asemenea soluție se poate prelungi până la extremitățile intervalului I , dacă I este un interval închis.

Din punct de vedere **fizic** aceasta înseamnă că sistemele liniare cu coeficienți funcții continue nu au soluții care tind la infinit într-un timp finit.

Geometric soluția $(y_1, y_2, \dots, y_n)(x)$, $x \in J \subseteq I$ este o curbă (sub formă parametrică) din \mathbb{R}^n de clasa $C^1(I; \mathbb{R}^n)$.

În notație matriceală sistemul (9.9) se poate scrie

$$\frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y(x) + F(x), \quad x \in I, \quad (9.10)$$

unde

$$Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^t(x), \quad A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1:n},$$

$$F(x) = (f_1, f_2, \dots, f_n)^t(x), \quad x \in J \subseteq I,$$

iar condițiile inițiale se scriu $Y(x_0) = Y_0 := (y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})^t$.

Teoremă 9.48

Soluția generală a sistemului neomogen (9.10) este suma dintre soluția generală a sistemului omogen asociat și o soluție particulară a sistemului neomogen, adică $Y_g(x) = Y_{go}(x) + Y_p(x)$, unde

$$\frac{dY_{go}}{dx} = A(x) \cdot Y_{go}(x), \quad \frac{dY_p}{dx} = A(x) \cdot Y_p(x) + F(x), \quad x \in I.$$

Teoremă 9.49

Dacă A este o matrice de ordinul n , atunci mulțimea tuturor soluțiilor sistemului (9.9) definite pe intervalul I , notată cu V , este un spațiu vectorial izomorf cu \mathbb{R}^n , adică V este subspațiu vectorial finit dimensional ($\dim V = n$) al spațiului vectorial real infinit dimensional $C^1(I; \mathbb{R}^n)$.

Definiție 9.50

Fie n soluții ale sistemului diferențial liniar, omogen $\frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y(x)$, $x \in I$, și anume: Y_1, Y_2, \dots, Y_n . Matricea $W = [Y_1 \ Y_2 \ \dots \ Y_n]$ se numește matricea **Wronski** sau *matricea fundamentală de soluții*, iar $w = \det W$ se numește *wronskianul* celor n soluții. Spunem că soluțiile Y_1, Y_2, \dots, Y_n sunt *liniar independente pe intervalul I* dacă din identitatea

$$c_1 \cdot Y_1(x) + c_2 \cdot Y_2(x) + \dots + c_n \cdot Y_n(x) = 0, \quad \forall x \in I$$

rezultă $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

Teoremă 9.51 (Abel-Liouville)

- Matricea W satisface ecuația diferențială $\frac{dW}{dx} = A(x) \cdot W(x)$, $x \in I$.

- Wronskianul w are expresia

$$w(x) = w(x_0) \cdot \exp \left(\int_{x_0}^x \text{tr}(A(t)) dt \right), \quad \forall x \in I.$$

- Soluțiile Y_1, Y_2, \dots, Y_n (coloanele lui W) sunt liniar independente pe intervalul I , dacă și numai dacă wronskianul este nenul pe I .

Exemplu 9.52

Se dă sistemul diferențial liniar, omogen $\frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, unde

$$A(x) = \begin{bmatrix} -1 + \frac{3}{2} \cdot \cos^2 x & -1 - \frac{3}{2} \cdot \cos x \cdot \sin x \\ -1 - \frac{3}{2} \cdot \cos x \cdot \sin x & -1 + \frac{3}{2} \cdot \sin^2 x \end{bmatrix}, \quad Y(x) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}(x).$$

- Arătați că $Y(x) = \begin{bmatrix} -\exp\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos x \\ \exp\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin x \end{bmatrix}$ este o soluție a sistemului.

- Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \|Y(x)\|$.

- Calculați expresia wronskian-ului soluțiilor sistemului.

Soluție

- Se verifică prin calcul direct.

- Deoarece $\|Y(x)\| = \sqrt{\exp(x) \cdot \cos^2 x + \exp(x) \cdot \sin^2 x} = \exp\left(\frac{x}{2}\right)$

deducem $\lim_{x \rightarrow \infty} \|Y(x)\| = \infty$.

- Cum $\text{tr}(A(x)) = -\frac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, conform **Teoremei 9.51** deducem

$$w(x) = w(x_0) \cdot \exp \left(\int_{x_0}^x \text{tr}(A(t)) dt \right) = w(x_0) \cdot \exp \left(-\frac{1}{2} \cdot (x - x_0) \right), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Teoremă 9.53 (Lagrange)

Fie sistemul liniar, neomogen (9.10) și sistemul omogen asociat

$$\frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y(x), x \in I.$$

Notăm cu Y_{go} soluția generală a sistemului omogen, matricea $W = [Y_1 \ Y_2 \ \dots \ Y_n]$ fiind matricea fundamentală de soluții.

O soluție particulară a sistemului neomogen poate fi găsită sub forma

$$Y_p(x) = W(x) \cdot C(x), x \in I,$$

unde $C(x) = (c_1, c_2, \dots, c_n)^t(x) \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ și

$$\frac{dC}{dx} = W^{-1}(x) \cdot F(x), x \in I.$$

Exemplu 9.54

Se consideră sistemul diferențial neomogen

$$\frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y(x) + F(x), x \in \mathbb{R}_+^*,$$

unde

$$A(x) = \begin{bmatrix} -\frac{4}{x} & -\frac{4}{x^2} \\ 2 & -\frac{1}{x} \end{bmatrix}, \quad F(x) = \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix}, \quad x > 0.$$

- Arătați că vectorii $Y_1(x) = [1 \ x]^t$, $Y_2(x) = [2 \cdot x^2 \ x^3]^t$ constituie o bază în spațiul vectorial real al soluțiilor sistemului omogen, pentru $x > 0$. Scrieți soluția generală a sistemului omogen.
- Folosind metoda variației constanțelor, să se determine soluția sistemului diferențial neomogen.

Soluție

- Se verifică prin calcul direct că vectorii

$$Y_1(x) = [1 \ x]^t, \quad Y_2(x) = [2 \cdot x^2 \ x^3]^t$$

sunt soluții ale sistemului diferențial omogen.

Deoarece wronskianul

$$w(x) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \cdot x^2 \\ x & x^3 \end{vmatrix} = -x^3 < 0, \forall x > 0$$

deducem că soluțiile Y_1, Y_2 sunt liniar independente pentru $x > 0$. Prin urmare, soluția generală a sistemului diferențial omogen este

$$Y_{go}(x) = c_1 \cdot Y_1(x) + c_2 \cdot Y_2(x), x > 0.$$

- Matricea fundamentală de soluții (*Wronski*) a sistemului diferențial omogen este

$$W(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \cdot x^2 \\ x & x^3 \end{bmatrix}, \forall x > 0.$$

O soluție particulară a sistemului diferențial neomogen poate fi găsită de forma $Y_p(x) = W(x) \cdot C(x)$, unde $\frac{dC}{dx} = W^{-1}(x) \cdot F(x)$, $x > 0$.

Dar $W^{-1}(x) = \begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{x} \\ \frac{1}{x^2} & \frac{-1}{x^3} \end{bmatrix}$, $x > 0$ și ultima ecuație devine

$$\frac{dC}{dx} = W^{-1}(x) \cdot F(x) = \begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{x} \\ \frac{1}{x^2} & \frac{-1}{x^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}, x > 0.$$

Integrând ultimul sistem de ecuații, se obține ca soluție particulară a sistemului diferențial neomogen

$$Y_p(x) = W(x) \cdot C(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \cdot x^2 \\ x & x^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{x^2}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x^2}{2} \\ \frac{x^3}{2} \end{bmatrix}.$$

Soluția generală a sistemului diferențial neomogen este

$$Y_g(x) = Y_{go}(x) + Y_p(x) = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{x^2}{2} \\ \frac{x^3}{2} \end{bmatrix}, x > 0.$$

Lemă 9.55 (Duhamel). Fie aplicația $A: \mathbb{R} \rightarrow L(X)$, unde X este un subspațiu al lui $M_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$. Dacă A este continuă și aplicațiile $U, V: \mathbb{R} \rightarrow L(X)$ sunt soluțiile unice ale următoarelor sisteme de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}V(t) = A(t) \cdot V(t), & t \in \mathbb{R} \\ V(0) = I \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}U(t) = -A(t) \cdot U(t), & t \in \mathbb{R} \\ U(0) = I \end{cases}$$

atunci $V(t)$ este inversabilă pentru orice $t \in \mathbb{R}$ și $V^{-1}(t) = U(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Demonstrație. Este clar că

$$\frac{d}{dt}(U \cdot V) = U \cdot \frac{d}{dt}V + \left(\frac{d}{dt}U\right) \cdot V = -U \cdot A \cdot V + U \cdot A \cdot V = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Prin urmare, $U(t) \cdot V(t) = C$, $t \in \mathbb{R}$. Dar

$$V(0) = I = U(0) \Rightarrow U(t) \cdot V(t) = I \Rightarrow \exists V^{-1}(t) = U(t).$$

Propoziție 9.56 (principiul I al lui Duhamel). Fie aplicația $A: \mathbb{R} \rightarrow L(X)$, unde X este un subspațiu al lui $M_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$ și $h \in C(\mathbb{R}; X)$. Dacă A este continuă și aplicația $V: \mathbb{R} \rightarrow L(X)$ este soluția unică a sistemului de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}V(t) = A(t) \cdot V(t), & t \in \mathbb{R}; \\ V(0) = I, \end{cases}$$

atunci sistemul de ecuații diferențiale

$$\frac{dy}{dt} = A(t) \cdot y(t) + h(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{9.11}$$

cu condiția inițială $y(0) = a \in X$ are soluția unică

$$y(t) = V(t) \cdot a + V(t) \cdot \int_0^t V^{-1}(\tau) \cdot h(\tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Demonstrație. Dacă y este soluția sistemului de ecuații diferențiale (9.11), atunci folosind lema anterioară putem constata că

$$\frac{d}{dt}(V^{-1} \cdot y) = \frac{d}{dt}(U \cdot y) = \frac{d}{dt}(U) \cdot y + U \cdot \frac{d}{dt}(y) = -U \cdot A \cdot y + U \cdot (A \cdot y + h) = U \cdot h.$$

Prin urmare

$$\begin{aligned} V(t) \cdot a + V(t) \cdot \int_0^t V^{-1}(\tau) \cdot h(\tau) d\tau &= V(t) \cdot a + V(t) \cdot \int_0^t U(\tau) \cdot h(\tau) d\tau = V(t) \cdot a + \\ &+ V(t) \cdot \int_0^t \frac{d}{d\tau}(V^{-1}(\tau) \cdot y(\tau)) d\tau = V(t) \cdot a + V(t) \cdot [V^{-1}(t) \cdot y(t) - V^{-1}(0) \cdot y(0)] = y(t), \end{aligned}$$

$t \in \mathbb{R}$.

Exemplu:

Se consideră sistemul diferențial neomogen

$$\frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y(x) + F(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

unde

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad F(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Arătați că vectorii $Y_1(x) = [1 \ 1]^T \cdot e^x, \quad Y_2(x) = [-1 \ 1]^T \cdot e^{-x/3}$ constituie o bază în spațiul vectorial real al soluțiilor sistemului omogen, pentru $x \in \mathbb{R}$. Scrieți soluția generală a sistemului omogen.
- Folosind principiul I al lui **Duhamel**, să se determine soluția sistemului diferențial neomogen cu condiția inițială $Y(0) = Y_0 = [1 \ 2]^T$.

Soluție

- Se verifică prin calcul direct că vectorii

$$Y_1(x) = [1 \ 1]^T \cdot e^x, \quad Y_2(x) = [-1 \ 1]^T \cdot e^{-x/3}$$

sunt soluții ale sistemului diferențial omogen. Deoarece wronskianul

$$w(x) = \begin{vmatrix} e^x & -e^{x/3} \\ e^x & e^{x/3} \end{vmatrix} = 2 \cdot e^{4x/3} > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

deducem că soluțiile Y_1, Y_2 sunt liniar independente pentru $x \in \mathbb{R}$. Prin urmare, soluția generală a sistemului diferențial omogen este

$$Y_{go}(x) = c_1 \cdot Y_1(x) + c_2 \cdot Y_2(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Soluția sistemului de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}V(t) = A(t) \cdot V(t), & t \in \mathbb{R} \\ V(0) = I \end{cases}$$

este $V(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot e^x + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-x/3} \right]$. Prin urmare, sistemul de ecuații

diferențiale inițial cu condiția inițială $Y(0) = Y_0 = [1 \ 2]^T$ are soluția unică

$$Y(x) = V(x) \cdot Y_0 + V(x) \cdot \int_0^x V^{-1}(\tau) \cdot F(\tau) d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^x + e^{-x/3} & e^x - e^{-x/3} \\ e^x - e^{-x/3} & e^x + e^{-x/3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \\
&\quad + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^x + e^{-x/3} & e^x - e^{-x/3} \\ e^x - e^{-x/3} & e^x + e^{-x/3} \end{pmatrix} \cdot \int_0^x \begin{pmatrix} e^{-\tau} + e^{\tau/3} & e^{-\tau} + e^{\tau/3} \\ e^{-\tau} + e^{\tau/3} & e^{-\tau} + e^{\tau/3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\tau = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot e^x + e^{-x/3} \\ e^{-x/3} + 3 \cdot e^x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^x + 3 \cdot e^{-x/3} - 4 \\ e^x - 3 \cdot e^{-x/3} + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^x + e^{-x/3} - 2 \\ 2e^x - e^{-x/3} + 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Similar se poate demonstra

Propoziție 9.57 (principiul al II-lea al lui Duhamel). Fie aplicația $A: \mathbb{R} \rightarrow L(X)$, unde X este un subspațiu al lui $M_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$ și $H \in C(\mathbb{R}; X)$. Dacă A este continuă și aplicația $V: \mathbb{R} \rightarrow L(X)$ este soluția unică a sistemului de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}V(t) = A(t) \cdot V(t), & t \in \mathbb{R} \\ V(0) = I \end{cases}$$

atunci sistemul de ecuații diferențiale

$$\frac{dy}{dt} = A(t) \cdot y(t) + H(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{9.12}$$

cu condiția inițială $y(0) = b \in L(X)$ are soluția unică

$$y(t) = V(t) \cdot b + V(t) \cdot \int_0^t V^{-1}(\tau) \cdot H(\tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Propoziție 9.58

Fie $W = [Y_1 \ Y_2 \ \dots \ Y_n]$ matricea fundamentală de soluții pe intervalul I , a sistemului omogen asociat sistemului de ecuații diferențiale liniare neomogen (9.10). Sistemul de n ecuații diferențiale de ordinul întâi

$$\left| \begin{array}{ccccc} \frac{dz_k}{dx} & \frac{dy_{k1}}{dx} & \frac{dy_{k2}}{dx} & \dots & \frac{dy_{kn}}{dx} \\ \hline z_1 & y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ z_n & y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{array} \right| (x) = 0, \quad k = 1:n, x \in I$$

admite ca sistem fundamental de soluții coloanele matricei W .

Exemplu 9.59

Se dau funcțiile vectoriale

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}, Y_2 = \begin{bmatrix} x \\ \exp(x^2) \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R}.$$

- Să se arate că formează un sistem fundamental de soluții.
- Să se formeze sistemul diferențial liniar omogen care admite acest sistem fundamental de soluții.

Soluție

- Verificăm mai întâi că soluțiile date formează un sistem fundamental de soluții

$$w(x) = \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & \exp(x^2) \end{vmatrix} = \exp(x^2) - x^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Folosind Propoziția 9.58 formăm ecuațiile sistemului

- prima ecuație

$$\begin{vmatrix} \frac{dy_1}{dx} & 0 & 1 \\ y_1 & 1 & x \\ y_2 & x & \exp(x^2) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{dy_1}{dx} = -\frac{x \cdot y_1 - y_2}{\exp(x^2) - x^2}, x \in \mathbb{R};$$

- a doua ecuație

$$\begin{vmatrix} \frac{dy_2}{dx} & x & \exp(x^2) \\ y_1 & 1 & x \\ y_2 & x & \exp(x^2) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{dy_2}{dx} = y_2, x \in \mathbb{R}.$$

Observație 9.60

Pentru sistemele de ecuații diferențiale liniare omogene cu coeficienți constanți de forma

$$\frac{dY}{dx} = A \cdot Y, x \in I, \quad (9.13)$$

unde $A = (a_{ij})_{i,j=1:n} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, sunt îndeplinite condițiile teoremei de existență și unicitate a soluției problemei **Cauchy** și se poate determina în totdeauna un sistem fundamental de soluții.

Definiții 9.61

- Ecuația $\det(A - r \cdot I_n) = 0$ se numește *ecuația caracteristică* a sistemului (9.13). Rădăcinile acestei ecuații sunt valorile proprii ale matricei A .

- Numim *multiplicitate algebrică* a valorii proprii r_i numărul natural $m_a(r_i) \geq 1$ egal cu ordinul de multiplicitate al valorii proprii r_i ca rădăcină a polinomului caracteristic $\det(A - r \cdot I_n)$ al matricei A .
- Se numește *subspațiul vectorilor proprii* corespunzători valorii proprii r_i mulțimea $S(r_i)$ generată de toate combinațiile liniare ale vectorilor proprii asociați valorii proprii r_i .
- Se numește *multiplicitate geometrică* a valorii proprii r_i numărul natural $m_g(r_i) \geq 1$ egal cu dimensiunea spațiului $S(r_i)$, adică $m_g(r_i) = \dim S(r_i)$. Se poate demonstra că $m_g(r_i) \leq m_a(r_i)$.

Teoremă 9.62

Fie sistemul de ecuații diferențiale liniare omogene cu coeficienți constanți (9.13). Dacă

- matricea A are valori proprii reale distințe $r_i \in \mathbb{R}, r_i \neq r_j, i, j = 1:n$, iar $v_i \in \mathbb{R}^n, i = 1:n$ sunt *vectorii proprii* corespunzători, atunci soluția generală a sistemului (9.13) este

$$Y(x) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot \exp(r_i \cdot x) \cdot v_i, x \in I, c_i \in \mathbb{R}, i = 1:n;$$

- n este un număr par, $n = 2 \cdot k$, matricea A are toate valorile proprii complexe (nereale) distințe

$$r_m = \alpha_m + i \cdot \beta_m = \overline{r_m^*} \in \mathbb{C} - \mathbb{R}, r_m \neq r_j, m \neq j, \forall j, m = 1:k,$$

iar $v_i \in \mathbb{C}^n, i = 1:k$ sunt *vectorii proprii* corespunzători, atunci soluția generală a sistemului (9.13) este

$$Y(x) = \sum_{m=1}^k c_m \cdot \operatorname{Re}[\exp(r_m \cdot x) \cdot v_m] + \sum_{m=1}^k d_m \cdot \operatorname{Im}[\exp(r_m \cdot x) \cdot v_m], x \in I,$$

unde $c_i, d_i \in \mathbb{R}, i = 1:k$;

- matricea A are valoarea proprie reală $r = \alpha \in \mathbb{R}$ multiplă, pentru care
 - $n = k = m_a(r) \geq m_g(r) = p$;
 - $v_i \in \mathbb{R}^n, i = 1:p$ sunt *vectorii proprii* liniari independenți asociați valorii proprii $r = \alpha \in \mathbb{R}$;
 - $w_{i,j} \in \mathbb{R}^n, j = 1:s_i$,
- $s_i + 1 = \dim \operatorname{Ker}(A - r \cdot I_n)^k - \dim \operatorname{Ker}(A - r \cdot I_n), i = 1:p$
- sunt *vectorii principali* liniari independenți asociați fiecărui vector propriu. Aceștia se calculează rezolvând succesiv sistemele liniare

$$\begin{cases} (A - r \cdot I_n) \cdot w_{i,1} = v_i \\ (A - r \cdot I_n) \cdot w_{i,2} = w_{i,1} \\ \dots \\ (A - r \cdot I_n) \cdot w_{i,s_i} = w_{i,(s_i-1)} \end{cases}, \quad i = 1 : k, \quad (9.14)$$

atunci soluția generală a sistemului (9.13) este

$$Y(x) = \exp(r \cdot x) \cdot \sum_{m=1}^p \left(P_m(x) \cdot v_m + \sum_{j=1}^{s_m} P_m^{(j)}(x) \cdot w_{m,j} \right), \quad x \in I,$$

unde $P_i, i = 1 : p$ este un polinom arbitrar, cu coeficienți reali, de grad s_i , adică $P_i \in \mathbb{R}[x]$, $\text{grad } P = s_i, i = 1 : p$;

- n este un număr par, $n = 2 \cdot k$, matricea A are valoarea proprie complexă (nereală) $r = \alpha + i \cdot \beta \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ multiplă, pentru care

- $\frac{n}{2} = k = m_a(r) \geq m_g(r) = p$;
 - $v_i \in \mathbb{C}^n, i = 1 : p$ sunt *vectorii proprii* liniari independenți asociați valorii proprii $r = \alpha + i \cdot \beta \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$;
 - $w_{ij} \in \mathbb{C}^n, j = 1 : s_i$,
- $s_i + 1 = \dim \text{Ker}(A - r \cdot I_n)^k - \dim \text{Ker}(A - r \cdot I_n), i = 1 : p$
- sunt *vectorii principali* liniari independenți asociați fiecărui vector propriu. Aceștia se calculează rezolvând succesiv sistemele liniare (9.14),

atunci soluția generală a sistemului (9.13) este

$$\begin{aligned} Y(x) = & c_1 \cdot \text{Re} \left[\exp(r \cdot x) \cdot \sum_{m=1}^p \left(P_m(x) \cdot v_m + \sum_{j=1}^{s_m} P_m^{(j)}(x) \cdot w_{m,j} \right) \right] + \\ & + c_2 \cdot \text{Im} \left[\exp(r \cdot x) \cdot \sum_{m=1}^p \left(P_m(x) \cdot v_m + \sum_{j=1}^{s_m} P_m^{(j)}(x) \cdot w_{m,j} \right) \right], \quad x \in I, \end{aligned}$$

unde $P_i, i = 1 : p$ este un polinom arbitrar, cu coeficienți complecsi, de grad s_i , adică $P_i \in \mathbb{C}[x]$, $\text{grad } P = s_i, i = 1 : p, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Exemplu 9.63

Să se determine soluția generală a următorului sistem diferențial liniar omogen cu coeficienți constanți

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 3 \cdot y_1 + y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = 2 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Soluție

Matricea atașată sistemului diferențial este

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

iar ecuația caracteristica asociată este

$$\det(A - r \cdot I_2) \equiv r^2 - 5 \cdot r + 4 = 0.$$

Spectrul matricei A este $\text{sp } A = \{4, 1\}$ și vectorii proprii corespunzători sunt

$$v_1 = (1 \ 1)^t, \quad v_2 = (1 \ -2)^t.$$

Prin urmare, soluția generală a sistemului diferențial este

$$Y_{go}(x) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{4 \cdot x} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot e^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Matricea fundamentală este $W(x) = \begin{bmatrix} e^{4 \cdot x} & e^x \\ e^{4 \cdot x} & -2 \cdot e^x \end{bmatrix}$, iar wronskianul

soluțiilor este $w(x) = \det W(x) = -3 \cdot e^{5 \cdot x} \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}$.

Exemplu 9.64

Să se determine soluția generală a următorului sistem diferențial liniar omogen cu coeficienți constanți

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 2 \cdot y_1 - y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 + 2 \cdot y_2 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Soluție

Matricea atașată sistemului diferențial este

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

iar ecuația caracteristica asociată este

$$\det(A - r \cdot I_2) \equiv r^2 - 4 \cdot r + 5 = 0.$$

Obținem $\text{sp } A = \{2 + i, 2 - i\}$ și vectorii proprii corespunzători

$$v_1 = (i \ 1)^t, \quad v_2 = \bar{v}_1 = (-i \ 1)^t.$$

Prin urmare, soluția generală a sistemului diferențial este

$$\begin{aligned} Y_{go}(x) &= c_1 \cdot \text{Re} \left[\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{(2+i)x} \right] + c_2 \cdot \text{Im} \left[\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{(2+i)x} \right] = \\ &= c_1 \cdot \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} \cdot e^{2x} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} \cdot e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Matricea fundamentală este $W(x) = \begin{bmatrix} -e^{2x} \cdot \sin x & e^{2x} \cdot \cos x \\ e^{2x} \cdot \cos x & e^{2x} \cdot \sin x \end{bmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$, iar wronskianul soluțiilor este $w(x) = \det W(x) = -e^{4x} \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Exemplu 9.65

Să se determine soluția generală a următorului sistem diferențial liniar omogen cu coeficienți constanți

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_3 + x^2 \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 - 3 \cdot y_3 + x, x \in \mathbb{R} \\ \frac{dy_3}{dx} = y_2 - 3 \cdot y_3 \end{cases}$$

Soluție. Matricea atașată sistemului diferențial omogen este

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix},$$

iar ecuația caracteristică asociată este

$$\det(A - r \cdot I_3) \equiv -r^3 - 3 \cdot r^2 - 3 \cdot r - 1 = 0,$$

a cărei valoarea proprie reală $r = -1$ are ordinul de multiplicitate 3 (multiplicitatea algebrică este $m_a = 3$).

Cum $\text{rang}(A - r \cdot I_3) = \dim \text{Ker}(A - r \cdot I_3) = \dim S(r) = m_g = 2$ (numărul de vectori proprii liniari independenți) numărul de celule **Jordan** este

$$n - \text{rang}(A - r \cdot I_3) = 3 - 2 = 1.$$

Deoarece există o singură celulă **Jordan** de tip 3×3 , atunci corespunzător acesteia există un vector propriu și doi vectori principali asociați acestuia. Forma **Jordan** a matricei A este următoarea

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Deoarece diferența dintre multiplicitatea algebrică și cea geometrică a valorii proprii este $m_a - m_g = 1$, vom determina un vector propriu liniar independent, rezolvând sistemul simplu nedeterminat

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3 \cdot x_3 = 0 \\ x_2 - 4 \cdot x_3 = 0 \end{cases}$$

Se obține vectorul propriu $v_1 = (1 \ 2 \ 1)^t$. Determinăm vectorii principali asociați vectorului propriu prin rezolvarea succesivă a sistemelor liniare (9.14).

Astfel din

$$(A - r \cdot I_3) \cdot w_{1,1} = v_1$$

se obtine un prim vector principal

$$w_{1,1} = (1 \ 2 \ 0)^t,$$

iar din sistemul

$$(A - r \cdot I_n) \cdot w_{1,2} = w_{1,1}$$

se obține un al doilea vector principal

$$w_{1,2} = (1 \ 0 \ 0)^t.$$

S-a obținut următoarea mulțime de vectori $\{v_1 \ w_{1,1} \ w_{1,2}\}$ care determină baza **Jordan** $\tilde{B} = \{v_1 \ w_{1,1} \ w_{1,2}\} \subset \mathbb{R}^3$, în care matricea A are forma **Jordan**. Forma **Jordan** a matricei A și matricea de trecere C la noua bază sunt respectiv

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = (v_1 \ w_{1,1} \ w_{1,2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

acestea verificând relația $C^{-1} \cdot A \cdot C = J$.

Conform Teoremei 9.62 se obține soluția generală a sistemului diferențial liniar cu coeficienți constanți dată

$$\begin{aligned} Y_{go}(x) &= \exp(-x) \cdot \left[\left(c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot \frac{x^2}{2} \right) \cdot v_1 + (c_3 \cdot x + c_2) \cdot w_{1,1} + c_3 \cdot w_{1,2} \right] = \\ &= c_1 \cdot \exp(-x) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \exp(-x) \cdot \begin{pmatrix} x+1 \\ 2x+1 \\ x \end{pmatrix} + c_3 \cdot \exp(-x) \cdot \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} + x + 1 \\ x^2 + x \\ \frac{x^2}{2} \end{pmatrix}, \quad c_k \in \mathbb{R}, k = 1:3. \end{aligned}$$

Matricea fundamentală este

$$W(x) = \begin{bmatrix} e^{-x} & (x+1) \cdot e^{-x} & \left(\frac{x^2}{2} + x + 1\right) \cdot e^{-x} \\ 2 \cdot e^{-x} & (2x+1) \cdot e^{-x} & (x^2 + x) \cdot e^{-x} \\ e^{-x} & x \cdot e^{-x} & \frac{x^2}{2} \cdot e^{-x} \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R},$$

iar wronskianul soluțiilor este $w(x) = \det W(x) = -e^{-3x} \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}$.

Pentru a determina o soluție particulară a sistemului neomogen vom folosi Teorema 9.53 a lui **Lagrange**. O soluție particulară a sistemului diferențial neomogen poate fi găsită de forma

$$Y_p(x) = W(x) \cdot C(x), \text{ unde } \frac{dC}{dx} = W^{-1}(x) \cdot F(x), \quad x > 0.$$

Dar

$$W^{-1}(x) = \begin{bmatrix} e^x \cdot \frac{x^2}{2} & \left(-\frac{x^2}{2} - x\right) \cdot e^x & \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 1\right) \cdot e^x \\ -x \cdot e^x & (x+1) \cdot e^x & (-x-2) \cdot e^x \\ e^x & -e^x & e^x \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

și ultima ecuație devine

$$\frac{dC}{dx} = \begin{bmatrix} e^x \cdot \frac{x^2}{2} & \left(-\frac{x^2}{2} - x\right) \cdot e^x & \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 1\right) \cdot e^x \\ -x \cdot e^x & (x+1) \cdot e^x & (-x-2) \cdot e^x \\ e^x & -e^x & e^x \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{2} + x^2\right) \cdot e^x \\ \left(-x^3 + x^2 + x\right) \cdot e^x \\ \left(x^2 - x\right) \cdot e^x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Integrând ultimul sistem de ecuații, se obține ca soluție particulară a sistemului diferențial neomogen

$$Y_p(x) = \begin{bmatrix} e^{-x} & (x+1) \cdot e^{-x} & \left(\frac{x^2}{2} + x + 1\right) \cdot e^{-x} \\ 2 \cdot e^{-x} & (2x+1) \cdot e^{-x} & (x^2 + x) \cdot e^{-x} \\ e^{-x} & x \cdot e^{-x} & \frac{x^2}{2} \cdot e^{-x} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left(\frac{x^4}{2} - \frac{5x^3}{2} + \frac{13x^2}{2} - 13x + 13\right) \cdot e^x \\ \left(-x^3 + 4x^2 + 7x - 7\right) \cdot e^x \\ \left(x^2 - 3x + 3\right) \cdot e^x \end{pmatrix}$$

$$Y_p(x) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 13x + 23 \\ 3x^2 - 16x + 33 \\ x^2 - 6x + 13 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Soluția particulară a sistemului diferențial neomogen putea fi obținută și prin Propoziția 9.57 (*metoda coeficienților nedeterminați*). Astfel se propune drept soluție particulară a sistemului neomogen

$$Y_p(x) = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x^2 + a_{12} \cdot x + a_{13} \\ a_{21} \cdot x^2 + a_{22} \cdot x + a_{23} \\ a_{31} \cdot x^2 + a_{32} \cdot x + a_{33} \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Din condiția ca Y_p să verifice identic sistemul diferențial neomogen obținem

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot a_{11} \cdot x + a_{12} \\ 2 \cdot a_{21} \cdot x + a_{22} \\ 2 \cdot a_{31} \cdot x + a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x^2 + a_{12} \cdot x + a_{13} \\ a_{21} \cdot x^2 + a_{22} \cdot x + a_{23} \\ a_{31} \cdot x^2 + a_{32} \cdot x + a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Folosind metoda identificării coeficienților nedeterminați se obține aceeași soluție particulară ca mai sus.

Soluția generală a sistemului diferențial neomogen este

$$\begin{aligned} Y_g(x) &= Y_{go}(x) + Y_p(x) = \\ &= \begin{bmatrix} e^{-x} & (x+1) \cdot e^{-x} & \left(\frac{x^2}{2} + x + 1\right) \cdot e^{-x} \\ 2 \cdot e^{-x} & (2x+1) \cdot e^{-x} & (x^2 + x) \cdot e^{-x} \\ e^{-x} & x \cdot e^{-x} & \frac{x^2}{2} \cdot e^{-x} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x^2 - 13x + 23 \\ 3x^2 - 16x + 33 \\ x^2 - 6x + 13 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exemplu 9.66

Sa se determine soluția generală a următorului sistem diferențial liniar omogen cu coeficienți constanți

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 2 \cdot y_1 + 2 \cdot y_3 - y_4 \\ \frac{dy_2}{dx} = 2 \cdot y_2 + 4 \cdot y_3 - 2 \cdot y_4 \\ \frac{dy_3}{dx} = 2 \cdot y_1 - y_2 + y_3 + y_4 \\ \frac{dy_4}{dx} = 2 \cdot y_1 - y_2 - y_3 + 3 \cdot y_4 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Soluție

Matricea atașată sistemului diferențial este

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

iar ecuația caracteristică asociată este

$$\det(A - r \cdot I_4) = r^4 - 8 \cdot r^3 + 24 \cdot r^2 - 32 \cdot r + 16 = 0$$

a cărei valoarea proprie reală $r = 2$ are ordinul de multiplicitate 4 (multiplicitatea algebrică este $m_a = 4$).

Cum $\text{rang}(A - r \cdot I_4) = \dim \text{Ker}(A - r \cdot I_4) = \dim S(r) = m_g = 2$ (numărul de vectori proprii liniari independenți) numărul de celule **Jordan** este

$$n - \text{rang}(A - r \cdot I_4) = 4 - 2 = 2.$$

Ordinele celulelor **Jordan** pot fi

- ambele de ordinul doi;
- una de ordinul trei și cealaltă de ordinul unu.

Deoarece diferența dintre multiplicitatea algebrică și cea geometrică a valorii proprii este $m_a - m_g = 2$, vom determina 2 vectori proprii liniari independenți rezolvând sistemul dublu nedeterminat

$$\begin{cases} 2 \cdot x_3 - x_4 = 0 \\ 4 \cdot x_3 - 2 \cdot x_4 = 0 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Soluția generală a acestui sistem este

$$v = \alpha \cdot (1 \ 2 \ 0 \ 0)^t + \beta \cdot (0 \ 1 \ 1 \ 2)^t, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Determinăm situația în care ne aflăm, folosind ordinul de nilpotență al matricei $N_r := A - r \cdot I_4$.

Deoarece

$$B := A - r \cdot I_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^3 = 0_4,$$

obținem că ordinul de nilpotență este $h = 3$ și

$$\begin{aligned} S(r) &= \text{Ker}(A - r \cdot \text{Id}) \subset \text{Ker}(A - r \cdot \text{Id})^2 \subset \\ &\subset \text{Ker}(A - r \cdot \text{Id})^3 = \text{Ker}(A - r \cdot \text{Id})^4 = \mathbb{R}^4, \end{aligned}$$

unde am notat prin Id aplicația identică a spațiului vectorial \mathbb{R}^4 .

Deoarece $h=3$ și $n-h=4-3=1$ există o singură celulă **Jordan** de tip $h \times h = 3 \times 3$ și corespunzător acesteia un vector propriu și doi vectori principali asociați acestuia. Forma **Jordan** a matricei A este următoarea

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & J_2 \end{pmatrix}, \quad J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad J_2 = (2)$$

sau într-o formă compactă

$$J = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{2} \end{pmatrix}.$$

Determinăm vectorii principali asociați vectorului propriu $v_1 = (1 \ 2 \ 0 \ 0)^t$ prin rezolvarea succesivă a sistemelor liniare (9.14). Astfel din

$$(A - r \cdot I_n) \cdot w_{1,1} = v_1$$

se obține un prim vector principal

$$w_{1,1} = (1 \ 2 \ 1 \ 1)^t,$$

iar din sistemul

$$(A - r \cdot I_n) \cdot w_{1,2} = w_{1,1}$$

se obține un al doilea vector principal

$$w_{1,2} = (1 \ 1 \ 1 \ 1)^t.$$

S-au obținut următoarele seturi de vectori $\{v_1 \ w_{1,1} \ w_{1,2}\}, \{v_2\}$ care prin reuniune determină baza **Jordan** $\tilde{B} = \{v_1 \ w_{1,1} \ w_{1,2} \ v_2\} \subset \mathbb{R}^4$, în care matricea A are forma **Jordan**. Corespunzător fiecărui set de vectori în parte avem două celule **Jordan** de ordinul trei și, respectiv, de ordinul unu (numărul de vectori din fiecare set). Relativ la baza **Jordan** \tilde{B} , forma **Jordan** a matricei A și matricea de trecere C la noua bază sunt respectiv

$$J = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{2} \end{pmatrix}, \quad C = (v_1 \ w_{1,1} \ w_{1,2} \ v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

acestea verificând relația $C^{-1} \cdot A \cdot C = J$.

Conform Teoremei 9.62 se obține soluția generală a sistemului diferențial liniar cu coeficienți constanți dați

$$Y(x) = \exp(2 \cdot x) \cdot \left[\left(c_1 \cdot \frac{x^2}{2} + c_2 \cdot x + c_3 \right) \cdot v_1 + (c_1 \cdot x + c_2) \cdot w_{1,1} + c_1 \cdot w_{1,2} + c_4 \cdot v_2 \right],$$

$c_k \in \mathbb{R}, k = 1 : 4.$

Exemplu 9.67

Sa se determine soluția generală a următorului sistem diferențial liniar omogen cu coeficienți constanți

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 2 \cdot y_1 + y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = -4 \cdot y_1 - 2 \cdot y_2 \\ \frac{dy_3}{dx} = 7 \cdot y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \\ \frac{dy_4}{dx} = -17 \cdot y_1 - 6 \cdot y_2 - y_3 - y_4 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Soluție

Matricea atașată sistemului diferențial este

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

iar ecuația caracteristică asociată este

$$\det(A - r \cdot I_4) = r^4 = 0$$

a cărei valoarea proprie reală $r = 0$ are ordinul de multiplicitate 4 (multiplicitatea algebrică este $m_a = 4$).

Cum $\text{rang}(A - r \cdot I_4) = \dim \text{Ker}(A - r \cdot I_4) = \dim S(r) = m_g = 2$ (numărul de vectori proprii liniari independenți) numărul de celule **Jordan** este

$$n - \text{rang}(A - r \cdot I_4) = 4 - 2 = 2.$$

Ordinele celulelor **Jordan** pot fi

- ambele de ordinul doi;
- una de ordinul trei și cealaltă de ordinul unu.

Deoarece diferența dintre multiplicitatea algebrică și cea geometrică a valorii proprii este $m_a - m_g = 2$, vom determina 2 vectori proprii liniari independenți rezolvând sistemul dublu nedeterminat

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + x_2 = 0 \\ -4 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 = 0 \\ 7 \cdot x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -17 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Soluția generală a acestui sistem este

$$v = \alpha \cdot (1 \ -2 \ -5 \ 0)^t + \beta \cdot (0 \ 0 \ -1 \ 1)^t, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Determinăm situația în care ne aflăm, folosind ordinul de nilpotență al matricei $N_r := A - r \cdot I_4$.

Deoarece

$$B := A - r \cdot I_4 = A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^2 = 0_4,$$

obținem că ordinul de nilpotență este $h = 2$ și

$$\begin{aligned} S(r) &= \text{Ker}(A - r \cdot \text{Id}) \subset \text{Ker}(A - r \cdot \text{Id})^2 = \\ &= \text{Ker}(A - r \cdot \text{Id})^3 = \text{Ker}(A - r \cdot \text{Id})^4 = \mathbb{R}^4, \end{aligned}$$

unde am notat prin Id aplicația identică a spațiului vectorial \mathbb{R}^4 .

Deoarece $h = 2$ și $n - h = 4 - 2 = 2$ există două celule **Jordan** de tip $h \times h = 2 \times 2$ și corespunzător fiecăreia un vector propriu și un vector principal asociat acestuia. Forma **Jordan** a matricei A este următoarea

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_2 \end{pmatrix}, J_1 = J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sau într-o formă compactă

$$J = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Determinăm vectorul principal asociat vectorului propriu $v_1 = (1 \ -2 \ -5 \ 0)^t$ prin rezolvarea succesivă a sistemelor liniare (9.14). Astfel din

$$(A - r \cdot I_n) \cdot w_{1,1} = v_1$$

se obține vectorul principal

$$w_{1,1} = (0 \ 1 \ -6 \ 0)^t.$$

Determinăm vectorul principal asociat vectorului propriu $v_2 = (0 \ 0 \ -1 \ 1)^t$. Astfel din

$$(A - r \cdot I_n) \cdot w_{2,1} = v_2$$

se obține vectorul principal, liniar independent de $w_{1,1}$

$$w_{2,1} = (0 \ 0 \ -1 \ 0)^t.$$

S-au obținut următoarele seturi de vectori $\{v_1 \ w_{1,1}\}, \{v_2 \ w_{2,1}\}$, care prin reuniune determină baza **Jordan** $\tilde{B} = \{v_1 \ w_{1,1} \ v_2 \ w_{2,1}\} \subset \mathbb{R}^4$. Corespunzător fiecărui set de vectori în parte avem două celule **Jordan** de ordinul doi (numărul de vectori din fiecare set). Relativ la baza **Jordan** \tilde{B} forma **Jordan** a matricei A și matricea de trecere la noua bază sunt respectiv

$$J = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}, \quad C = (v_1 \ w_{1,1} \ v_2 \ w_{2,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -6 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

acestea verificând relația $C^{-1} \cdot A \cdot C = J$.

Conform Teoremei 9.62 se obține soluția generală a sistemului diferențial liniar cu coeficienți constanți dată

$$Y(x) = (c_1 \cdot x + c_2) \cdot v_1 + c_1 \cdot w_{1,1} + (c_3 \cdot x + c_4) \cdot v_2 + c_3 \cdot w_{2,1}, \quad c_k \in \mathbb{R}, k = 1:4$$

$$Y(x) = \begin{pmatrix} c_2 + c_1 \cdot x \\ c_1 - 2 \cdot c_2 - 2 \cdot c_1 \cdot x \\ c_4 - 5 \cdot c_2 - c_3 - 6 \cdot c_1 + (c_3 - 5c_1) \cdot x \\ c_4 + c_3 \cdot x \end{pmatrix}.$$

Exemplu: Să se determine soluția generală a următorului sistem diferențial liniar omogen cu coeficienți constanți

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2 + y_3 \\ \frac{dy_2}{dx} = -y_1 + y_4 \\ \frac{dy_3}{dx} = y_4 \\ \frac{dy_4}{dx} = -y_3 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Matricea atașată sistemului diferențial este

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

iar ecuația caracteristică asociată este

$$\det(A - r \cdot I_4) = r^4 + 2r^2 + 1 = 0.$$

Valorile proprii sunt $\{i, -i\}$, fiecare cu ordinul de multiplicitate 2.

Vectorul propriu asociat valorii proprii i este

$$v_1 = (1 \ i \ 0 \ 0)^t,$$

iar vectorul principal asociat acestuia este

$$w_{11} = (-i \ 1 \ 1 \ i)^t.$$

Conform teoremei 9.62 soluția generală a sistemului de ecuații diferențiale este

$$\begin{aligned} Y(x) &= c_3 \cdot \operatorname{Re} \left[e^{ix} \cdot \left((c_1 x + c_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \cdot \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \right) \right] + \\ &\quad + c_4 \cdot \operatorname{Im} \left[e^{ix} \cdot \left((c_1 x + c_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \cdot \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \right) \right] = \\ &= \begin{pmatrix} c_3 \cdot (c_1 \cdot x + c_2) \cdot \cos x + c_3 \cdot c_1 \cdot \sin x + c_4 \cdot (c_1 \cdot x + c_2) \cdot \sin x - c_4 \cdot c_1 \cdot \cos x \\ -c_3 \cdot (c_1 \cdot x + c_2) \cdot \sin x + c_3 \cdot c_1 \cdot \cos x + c_4 \cdot (c_1 \cdot x + c_2) \cdot \cos x - c_4 \cdot c_1 \cdot \sin x \\ c_3 \cdot c_1 \cdot \cos x + c_4 \cdot c_1 \cdot \sin x \\ -c_3 \cdot c_1 \cdot \sin x + c_4 \cdot c_1 \cdot \cos x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Propoziția 9.68 (metoda coeficienților nedeterminați)

Fie sistemul de n ecuații diferențiale cu coeficienți constanți, neomogen

$$\frac{dY}{dx} = A \cdot Y(x) + F(x), \quad x \in I, \quad (9.15)$$

unde $A = (a_{ij})_{i,j=1:n} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, termenul

$$F(x) = (f_1(x) \ f_2(x) \ \dots \ f_n(x))^t, \quad x \in I,$$

având componente de următoarea formă particulară

$$f_i(x) = \left[P_{i,m_i}(x) \cdot \cos(\beta \cdot x) + Q_{i,k_i}(x) \cdot \sin(\beta \cdot x) \right] \cdot e^{\alpha \cdot x}, \quad i = 1:n,$$

unde $P_{im_i}, Q_{ik_i} \in \mathbb{R}[x]$ sunt polinoame de gradul m_i , respectiv k_i . Dacă notăm $r = \alpha + i \cdot \beta$ și

- $\det(A - r \cdot I_n) \neq 0$, atunci o soluție particulară a ecuației neomogene este

$$Y_p(x) = \begin{pmatrix} y_{1p}(x) & y_{2p}(x) & \dots & y_{np}(x) \end{pmatrix}^t, \quad x \in I,$$

având componente de următoarea formă particulară

$$y_{ip} = e^{\alpha \cdot x} \cdot \left(P_{i,m}^*(x) \cdot \cos(\beta \cdot x) + Q_{i,m}^*(x) \cdot \sin(\beta \cdot x) \right), \quad i = 1:n,$$

unde $P_{i,m}^*, Q_{i,m}^* \in \mathbb{R}[x]$ sunt polinoame de gradul $m = \max_{i=1:n}(m_i, k_i)$;

- $\det(A - r \cdot I_n) = 0$, $r = \alpha + i \cdot \beta = \overline{r}^*$ fiind o rădăcină multiplă de ordinul $q \in \mathbb{N}$, $0 \leq q \leq \frac{n}{2}$ a ecuației caracteristice, atunci o soluție particulară a ecuației neomogene este

$$Y_p(x) = \begin{pmatrix} y_{1p}(x) & y_{2p}(x) & \dots & y_{np}(x) \end{pmatrix}^t, \quad x \in I,$$

având componente de următoarea formă particulară

$$y_{ip} = x^q \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \left(P_{i,m}^*(x) \cdot \cos(\beta \cdot x) + Q_{i,m}^*(x) \cdot \sin(\beta \cdot x) \right), \quad i = 1:n,$$

unde $P_{i,m}^*, Q_{i,m}^* \in \mathbb{R}[x]$ sunt polinoame de gradul $m = \max_{i=1:n}(m_i, k_i)$.

Propoziția 9.69 (principiul superpoziției)

Dacă vectorul termen liber F al sistemului diferențial neomogen (9.15)

este o sumă de s vectori $F = \sum_{i=1}^s F_i$, fiecare dintre aceștia având structura dată în

Propoziția 9.68, atunci soluția particulară căutată pentru sistemul diferențial neomogen (9.15) va fi de forma $Y_p(x) = \sum_{i=1}^s Y_{p,i}(x)$, unde $Y_{p,i}$ este o soluție particulară a sistemului neomogen

$$\frac{dY}{dx} = A \cdot Y(x) + F_k(x), \quad x \in I, \quad k = 1:s.$$

Exemplu 9.70

Să se determine soluția generală a următorului sistem diferențial liniar neomogen, cu coeficienți constanți

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -y_1 + y_2 + \exp(x) \\ \frac{dy_2}{dx} = -y_1 + y_3 + \cos x \quad , \quad x \in \mathbb{R} . \\ \frac{dy_3}{dx} = -y_1 \end{cases}$$

Soluție

Matricea atașată sistemului diferențial liniar omogen este

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

iar ecuația caracteristică asociată este

$$\det(A - r \cdot I_3) = r^3 + r^2 + r + 1 = 0,$$

iar valorile proprii sunt $r_1 = -1$, $r_2 = i = \overline{r_3}$. Corespunzător acestor valori proprii avem următorii vectori proprii

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix} = \overline{v_3}.$$

Conform Teoremei 9.62 se obține soluția generală a sistemului diferențial liniar cu coeficienți constanți

$$Y_o(x) = c_1 \cdot \exp(-x) \cdot v_1 + c_2 \cdot \operatorname{Re}[\exp(i \cdot x) \cdot v_2] + c_3 \cdot \operatorname{Im}[\exp(i \cdot x) \cdot v_2], \quad x \in \mathbb{R}$$

sau în formă reală

$$Y_o(x) = c_1 \cdot \exp(-x) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x + \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} -\cos x \\ -\cos x + \sin x \\ \sin x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Matricea **Wronski** este

$$W(x) = \begin{pmatrix} \exp(-x) & \sin x & -\cos x \\ 0 & \cos x + \sin x & \sin x - \cos x \\ \exp(-x) & \cos x & \sin x \end{pmatrix}.$$

O soluție particulară a sistemului diferențial neomogen poate fi găsită de forma $Y_p(x) = W(x) \cdot C(x)$, unde $\frac{dC}{dx} = W^{-1}(x) \cdot F(x)$, $x > 0$.

$$\text{Dar } W^{-1}(x) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \exp(x) & -\exp(x) & \exp(x) \\ -\cos x + \sin x & \cos x + \sin x & \cos x - \sin x \\ -\cos x - \sin x & -\cos x + \sin x & \cos x + \sin x \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{și}$$

ultima ecuație devine

$$\frac{dC}{dx} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \exp(x) & -\exp(x) & \exp(x) \\ -\cos x + \sin x & \cos x + \sin x & \cos x - \sin x \\ -\cos x - \sin x & -\cos x + \sin x & \cos x + \sin x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \exp(x) \\ \cos x \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R},$$

de unde

$$C(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \cdot \exp(x) \cdot (\exp(x) - \sin x - \cos x) \\ \frac{1}{4} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot \exp(x) \cdot \cos x - \frac{1}{8} \cdot \cos(2 \cdot x) + \frac{1}{8} \cdot \sin(2 \cdot x) \\ -\frac{1}{4} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot \exp(x) \cdot \sin x - \frac{1}{8} \cdot \cos(2 \cdot x) - \frac{1}{8} \cdot \sin(2 \cdot x) \end{pmatrix}.$$

Prin urmare, o soluție particulară a sistemului diferențial neomogen este

$$Y_p(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \cdot x - \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} \cdot x \\ \frac{1}{4} \cdot x - \frac{3}{8} \end{pmatrix} \cdot \cos x + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \cdot x + -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \cdot x - \frac{1}{8} \end{pmatrix} \cdot \sin x + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \exp(x). \quad (9.16)$$

Este clar că putem să ne folosim de Propozitia 9.69 (**metoda coeficienților nedeterminați**) și în consecință, aplicând *principiul superpoziției*, putem propune forma soluției particulare, aici $\det(A - r \cdot I_n) \neq 0$, $r \in \{i, 0\}$, astfel

$$Y_p(x) = \begin{pmatrix} a_{1,1} \cdot x + a_{1,0} \\ a_{2,1} \cdot x + a_{2,0} \\ a_{3,1} \cdot x + a_{3,0} \end{pmatrix} \cdot \cos x + \begin{pmatrix} b_{1,1} \cdot x + b_{1,0} \\ b_{2,1} \cdot x + b_{2,0} \\ b_{3,1} \cdot x + b_{3,0} \end{pmatrix} \cdot \sin x + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \cdot \exp(x),$$

iar coeficienții din forma generală a soluției particulare se determină impunând condiția ca aceasta să verifice identic sistemul diferențial neomogen. Se obține aceeași soluție particulară (9.16).

Soluția generală a sistemului diferențial neomogen este

$$Y(x) = c_1 \cdot \exp(-x) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x + \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} -\cos x \\ -\cos x + \sin x \\ \sin x \end{pmatrix} + Y_p(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exemplu: Vom exemplifica cazul când forma termenului liber are componenta $e^{\alpha+i\beta}$, $r = \alpha + i \cdot \beta = \overline{r}^*$ fiind o rădăcină multiplă de ordinul $q \in \mathbb{N}$,

$0 \leq q \leq \frac{n}{2}$ a ecuației caracteristice $\det(A - r \cdot I_n) = 0$.

Să se determine soluția problemei **Cauchy** asociată sistemului diferențial liniar

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y_1 + n \cdot y_2 = \cos nt \\ \frac{d}{dt}y_2 - n \cdot y_1 = \sin nt \end{cases}, \quad t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

și condițiile inițiale $y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 1$.

Matricea atașată sistemului diferențial liniar omogen este

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -n \\ -n & 0 \end{bmatrix},$$

iar ecuația caracteristică asociată este

$$\det(A - r \cdot I_2) = r^2 + n^2 = 0,$$

iar valorile proprii sunt $r_1 = i \cdot n = \overline{r_2}$. Corespunzător acestor valori proprii avem următorii vectori proprii

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \overline{v_2}.$$

Conform Teoremei 9.62 se obține soluția generală a sistemului diferențial liniar cu coeficienți constanți

$$Y_{go}(x) = c_1 \cdot \operatorname{Re}[\exp(i \cdot n \cdot x) \cdot v_1] + c_2 \cdot \operatorname{Im}[\exp(i \cdot n \cdot x) \cdot v_1], \quad x \in \mathbb{R}$$

sau în formă reală

$$Y_{go}(x) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos nx \\ \sin nx \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} \sin nx \\ -\cos nx \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Putem propune forma soluției particulare astfel

$$Y_p(x) = x \cdot \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos nx \\ \sin nx \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin nx \\ -\cos nx \end{pmatrix} = x \cdot a \cdot w_1 + x \cdot b \cdot w_2,$$

iar coeficienții din forma generală a soluției particulare se determină impunând condiția ca aceasta să verifice identic sistemul diferențial neomogen

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}Y_p = a \cdot w_1 + x \cdot a \cdot A \cdot w_1 + b \cdot w_2 + x \cdot b \cdot A \cdot w_2 \\ \frac{d}{dx}Y_p = A \cdot (x \cdot a \cdot w_1 + x \cdot b \cdot w_2) + F \end{cases} \Rightarrow a \cdot w_1 + b \cdot w_2 = F.$$

Se obține

$$Y_p = x \cdot I_2 \cdot w_1 = \begin{pmatrix} x \cdot \cos nx \\ x \cdot \sin nx \end{pmatrix}.$$

Soluția generală a sistemului diferențial neomogen este

$$Y(x) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos nx \\ \sin nx \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} \sin nx \\ -\cos nx \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \cdot \cos nx \\ x \cdot \sin nx \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}.$$

Soluția problemei **Cauchy** se obține folosind condiția inițială $Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$Y(x) = \begin{pmatrix} \sin nx \\ -\cos nx \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \cdot \cos nx \\ x \cdot \sin nx \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}.$$

Definiția 9.71

Un sistem de n ecuații diferențiale liniare de forma

$$x \cdot \frac{dy_k}{dx} = a_{k,1} \cdot y_1 + a_{k,2} \cdot y_2 + \dots + a_{k,n} \cdot y_n + f_k(x), x \in I, k = 1:n, \quad (9.17)$$

în care $a_{k,i} \in \mathbb{R}, k, i = 1:n, I \subset \mathbb{R}$ este interval și $f_k \in C^0(I; \mathbb{R}), k = 1:n$ se numește *sistem diferențial liniar de tip Euler, neomogen*. Dacă $f_k(x) = 0, \forall x \in I, k = 1:n$, atunci sistemul se numește sistem **Euler** omogen și soluția sa este definită pe $I - \{0\}$.

Teorema 9.72 (Euler)

Prin schimbarea de variabilă independentă $|x| = e^t$, sistemul diferențial de tip **Euler** (9.17) se transformă într-un sistem diferențial liniar de ordinul întâi, cu coeficienți constanti.

Exemplu 9.73

$$\begin{cases} x \cdot \frac{dy_1}{dx} = -y_1 - 2 \cdot y_2 + x^2 \\ x \cdot \frac{dy_2}{dx} = 3 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2 + x \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Efectuând schimbarea de variabilă independentă $x = e^t$, sistemul devine

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -y_1 - 2 \cdot y_2 + e^{2t} \\ \frac{dy_2}{dt} = 3 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2 + e^t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Matricea atașată sistemului diferențial liniar omogen este

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

iar ecuația caracteristică asociată este

$$\det(A - r \cdot I_2) = r^2 - 3 \cdot r + 2 = 0,$$

iar valorile proprii sunt $r_1 = 2, r_2 = 1$. Corespunzător acestor valori proprii avem următorii vectori proprii

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Conform Teoremei 9.62 se obține soluția generală a sistemului diferențial liniar cu coeficienți constanți

$$Y_{go}(x) = c_1 \cdot \exp(2t) \cdot v_1 + c_2 \cdot \exp(t) \cdot v_2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Aplicând principiul superpoziției, putem propune forma soluției particulare, aici $\det(A - r \cdot I_n) = 0, \quad r \in \{2, 1\}$, astfel

$$Y_p(t) = t \cdot \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \cdot v_1 \cdot e^{2t} + t \cdot \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \cdot v_2 \cdot e^t = t \cdot a \cdot v_1 \cdot e^{2t} + t \cdot b \cdot v_2 \cdot e^t,$$

iar coeficienții din forma generală a soluției particulare se determină impunând condiția ca aceasta să verifice identic sistemul diferențial neomogen

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} Y_p = a \cdot v_1 \cdot e^{2t} + t \cdot a \cdot v_1 \cdot 2 \cdot e^{2t} + b \cdot v_2 \cdot e^t + t \cdot b \cdot v_2 \cdot e^t \\ \frac{d}{dt} Y_p = A \cdot (t \cdot a \cdot v_1 \cdot e^{2t} + t \cdot b \cdot v_2 \cdot e^t) + F_1 + F_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot v_1 = F_1 \\ b \cdot v_2 = F_2 \end{cases}$$

sau încă

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se obține

$$Y_p(t) = t \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot v_1 \cdot e^{2t} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v_2 \cdot e^t = \begin{pmatrix} t \cdot e^{2t} \\ t \cdot e^t \end{pmatrix}.$$

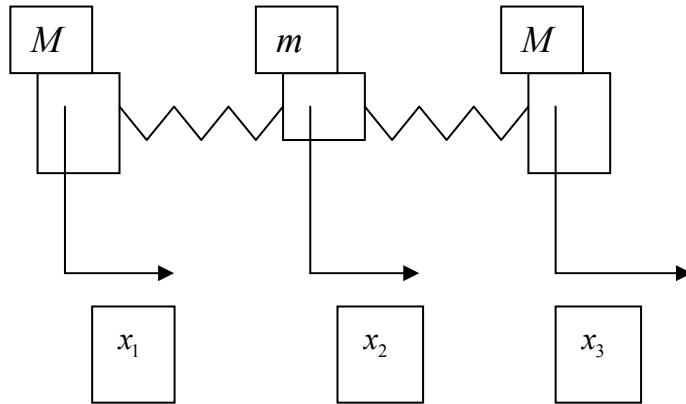
Soluția generală a sistemului diferențial neomogen este

$$Y(t) = c_1 \cdot e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \cdot e^{2t} \\ t \cdot e^t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Prin urmare, } Y(x) = c_1 \cdot x^2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \cdot x \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^2 \cdot \ln x \\ x \cdot \ln x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Exerciții

1. Se consideră trei mase de-a lungul axei Ox legate între ele prin intermediul a două arcuri elastice având aceeași constantă elastică k . Forțele elastice sunt presupuse liniare și masele se deplasează pe axa Ox.



Prin aplicarea legii lui **Newton** fiecărei mase obținem următorul sistem liniar de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}x_1 = -\frac{k}{M} \cdot (x_1 - x_2) \\ \frac{d^2}{dt^2}x_2 = -\frac{k}{m} \cdot (x_2 - x_1) - \frac{k}{m} \cdot (x_2 - x_3) \\ \frac{d^2}{dt^2}x_3 = -\frac{k}{M} \cdot (x_3 - x_2) \end{cases}$$

- Pentru $\frac{k}{M} = 1$, $\frac{k}{m} = 2$ determinați soluția generală a sistemului de ecuații diferențiale de mai sus. (Ecuația caracteristică a sistemului diferențial este $r^6 + 6 \cdot r^4 + 5 \cdot r^2 = 0$).
- Dacă sistemul de mase este în *vibrăție*, aflați frecvența comună $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{v}}$ sau echivalent $x_s(t) = C_s \cdot \exp(s \cdot \omega \cdot t)$, $s = 1, 2, 3$.

2. Fie ecuația diferențială liniară omogenă

$$\frac{d^2}{dx^2}y + P(x) \cdot \frac{d}{dx}y + Q(x) \cdot y = 0, \quad x \in I \subset \mathbb{R}.$$

- Să se arate că dacă se cunosc y_1, y_2 două soluții liniar independente ale ecuației, atunci coeficienții P și Q se pot determina în mod unic.
- Să se arate că dacă se cunoaște o soluție particulară $u(x) \neq 0$, $x \in I$ a ecuației diferențiale, atunci

$$v(x) = u(x) \cdot \int_a^x \exp\left(-\int_a^\xi P(t) dt\right) \cdot \frac{1}{u^2(\xi)} d\xi$$

este la rândul său o soluție particulară a ecuației diferențiale.

➤ Dacă se cunoaște soluția particulară $y(x) = \exp(x)$ a ecuației diferențiale $\frac{d^2}{dx^2}y + Q(x) \cdot y = 0$, $x \in I \subset \mathbb{R}$ să se determine soluția generală a ecuației diferențiale date și funcția Q .

CAPITOLUL 10

ECUAȚII CU DERIVATE PARTIALE DE ORDINUL ÎNTÂI

10.1 Sisteme simetrice. Integrale prime

Considerăm funcțiile $f_k : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1:n$, $n \in \mathbb{N}$ și sistemul de n ecuații diferențiale de ordinul întâi scris sub forma canonică, adică

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad k = 1:n, \quad t > 0, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n. \quad (10.1)$$

Dacă toate funcțiile f_k , $k = 1:n$ sunt nenule pe domeniul lor de definiție, atunci putem rescrie sistemul (10.1) sub forma

$$\frac{dx_1}{f_1(t, x_1, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(t, x_1, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{f_n(t, x_1, \dots, x_n)} = dt, \quad (10.2)$$

pentru orice $t > 0$ și orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$.

În general un sistem de ecuații diferențiale de ordinul întâi în care nu apare variabila independentă t poate avea și forma (10.2), convenția că dacă numitorul este identic nul, atunci și numărătorul să fie nul.

Definiție. Numim *formă simetrică* a sistemului (10.1) sirul de rapoarte

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(x_1, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{f_n(x_1, \dots, x_n)} \quad (10.3)$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, unde funcțiile de la numitor nu se anulează simultan în D .

Considerând, spre exemplu, pe x_n ca variabilă independentă sistemul (10.3), se poate transforma într-un sistem de $(n - 1)$ ecuații diferențiale

$$\frac{dx_k}{dx_n} = \frac{f_k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \quad k = 1:n-1, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n. \quad (10.4)$$

Dacă putem determina soluția sistemului (10.4) sub forma

$$x_k = \varphi_k(x_n, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}), \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1:n-1, \quad (10.5)$$

atunci prin aplicarea teoremei funcțiilor implicate putem determina constantele $c_k \in \mathbb{R}$, $k = 1:n-1$, obținând

$$\psi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_k, \quad k = 1:n-1, \quad (10.6)$$

unde funcțiile $\psi_k : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1:n - 1$ sunt de clasă C^1 pe domeniul D .

Definiție. Orice funcție $\psi_k : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1:n - 1$ de clasă C^1 pe domeniul D cu proprietatea că este constantă de-a lungul oricărei soluții a sistemului (10.2) se numește integrală primă a sistemului (10.2).

Din considerațiile de mai sus deducem că dacă se cunosc $(n - 1)$ integrale prime ale sistemului (10.2), atunci cunoaștem soluția generală a sistemului (10.1).

Observație. Relațiile (10.6) reprezintă o familie de curbe în spațiul \mathbb{R}^n . Mai mult, prin orice punct al domeniului D trece o singură curbă integrală și numai una.

Definiție. Un sistem de n funcții $\lambda_k : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1:n$ continue cu proprietățile:

➤ există funcția diferențiabilă $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ pe D astfel ca

$$\lambda_1(x) \cdot dx_1 + \lambda_2(x) \cdot dx_2 + \dots + \lambda_n(x) \cdot dx_n = d\Phi, \quad x \in D;$$

➤ pentru orice $x \in D$

$$\lambda_1(x) \cdot f_1(x) + \lambda_2(x) \cdot f_2(x) + \dots + \lambda_n(x) \cdot f_n(x) = 0$$

se numește *combinație integrabilă* a sistemului (10.3) în domeniul D , iar funcția Φ se numește *integrală primă* pe domeniul D a sistemului (10.3).

Observație. A determina $(n - 1)$ combinații integrabile independente pe domeniul D este echivalent cu a determina $(n - 1)$ integrale prime ale sistemului (10.3) sau încă este echivalent cu a determina soluția generală a sistemului (10.1).

Exemplu:

Să se determine soluția generală a următorului sistem diferențial dat sub formă simetrică

$$\frac{dx}{b \cdot z - c \cdot y} = \frac{dy}{c \cdot x - a \cdot z} = \frac{dz}{a \cdot y - b \cdot x}.$$

Se poate constata cu ușurință

$$\frac{dx}{b \cdot z - c \cdot y} = \frac{dy}{c \cdot x - a \cdot z} = \frac{dz}{a \cdot y - b \cdot x} = \frac{a \cdot dx + b \cdot dy + c \cdot dz}{a \cdot y - b \cdot x} = \frac{x \cdot dx + y \cdot dy + z \cdot dz}{0}$$

de unde deducem

$$\begin{cases} a \cdot dx + b \cdot dy + c \cdot dz = 0 \\ x \cdot dx + y \cdot dy + z \cdot dz = 0 \end{cases}$$

curbele integrale fiind cercurile

$$\begin{cases} a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = k_1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = k_2 \end{cases}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}. \quad (10.7)$$

Este soluția sistemului diferențial dat sub formă simetrică, funcțiile fiind definite implicit de sistemul de relații (10.7).

Exemplu:

Să se determine soluția generală a următorului sistem diferențial dat sub formă simetrică

$$\frac{dx}{2 \cdot x^4 - x \cdot y^3} = \frac{dy}{x^3 \cdot y - 2 \cdot y^4} = \frac{dz}{9 \cdot z \cdot x^3 - 9 \cdot z \cdot y^3}$$

Se poate constata cu ușurință

$$\frac{\frac{dx}{x}}{2 \cdot x^3 - y^3} = \frac{\frac{dy}{y}}{x^3 - 2 \cdot y^3} = \frac{\frac{dz}{z}}{9 \cdot x^3 - 9 \cdot y^3} = \frac{x^2 \cdot dx + y^2 \cdot dy}{2 \cdot (x^6 - y^6)} = \frac{\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}}{3 \cdot (x^3 - y^3)},$$

de unde deducem

$$\begin{cases} 3 \cdot \frac{d(x^3 + y^3)}{x^3 + y^3} + 2 \cdot \frac{dz}{z} = 0 \\ \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + 3 \cdot \frac{dz}{z} = 0 \end{cases}$$

curbele integrale fiind

$$\begin{cases} z^2 \cdot (x^3 + y^3)^3 = k_1, & k_1, k_2 \in \mathbb{R} \\ x \cdot y \cdot z^3 = k_2 \end{cases}. \quad (10.8)$$

Este soluția sistemului diferențial dat sub formă simetrică, funcțiile fiind definite implicit de sistemul de relații (10.8).

10.2 Ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi liniare

Definiție. Fie funcția $F : \Omega \subset \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$. O relație de forma

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in C^1(D) \quad (10.9)$$

pentru care se cere să se determine funcția $u = u(x)$, $x \in D$ de clasă C^1 pe domeniul D astfel ca aceasta să verifice identic relația (10.9) se numește *ecuație cu derivate parțiale de ordinul întâi* pe domeniul D . Funcțiile $u = u(x)$, $x \in D$ care îndeplinesc condițiile enumerate mai sus se numesc *soluții* ale ecuației cu derivate parțiale de ordinul întâi.

În continuare ne vom ocupa de ecuațiile cu derivate parțiale de ordinul întâi *liniare* în raport cu derivatele parțiale, adică ecuațiile de forma

$$P_1(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} + P_2(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + P_n(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D, \quad (10.10)$$

unde funcțiile $P_k : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1:n$.

În majoritatea aplicațiilor ingineresci se caută o anumită soluție a ecuației (10.9), soluție care îndeplinește anumite condiții inițiale. Problema determinării unei astfel de soluții se numește problema **Cauchy** pentru ecuația cu derivate parțiale (10.9) și condiția inițială asociată acesteia.

Să se determine soluția ecuației cu derivate parțiale de ordinul întâi liniare care pentru $x_n = x_{n0}$ se reduce la o funcție dată, adică

$$u(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n0}) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in d \subset \mathbb{R}^{n-1},$$

unde funcția $\varphi : d \rightarrow \mathbb{R}$ este de clasă C^1 pe domeniul d .

Se poate demonstra că în anumite condiții impuse funcțiilor $\varphi : d \rightarrow \mathbb{R}$ și $P_k : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1:n$ soluția problemei **Cauchy** este unică.

În cele ce urmează vom demonstra că soluția generală a ecuației cu derivate parțiale de ordinul întâi liniare depinde de o funcție arbitrară.

Definiție. Fiind dată o ecuație cu derivate parțiale de ordinul întâi liniară (10.10) cu funcțiile $P_k : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1:n$ continue și nenule simultan în domeniul D , numim *sistem simetric* asociat ecuației (10.10) sistemul

$$\frac{dx_1}{P_1(x)} = \frac{dx_2}{P_2(x)} = \dots = \frac{dx_n}{P_n(x)}, \quad x \in D. \quad (10.11)$$

Vom arăta că problema integrării ecuației cu derivate parțiale de ordinul întâi liniare (10.10) este echivalentă cu problema integrării sistemului simetric asociat ei (10.11).

Teoremă. Dacă $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = c \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ este o integrală primă a sistemului simetric asociat ecuației (10.10), atunci

$$u(x) = \varphi(x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$$

este o soluție a ecuației (10.10).

Demonstrație. Deoarece $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = c \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ este o integrală primă a sistemului simetric asociat ecuației (10.10) deducem

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx_n = 0, \quad x \in D.$$

De-a lungul curbelor caracteristice diferențialele dx_i , $i = 1:n$, sunt proporționale cu P_i , $i = 1:n$, adică

$$\frac{dx_1}{P_1(x)} = \frac{dx_2}{P_2(x)} = \dots = \frac{dx_n}{P_n(x)} = \lambda, \quad x \in D.$$

În concluzie

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \cdot P_1(x) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \cdot P_2(x) + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \cdot P_n(x) \right) \cdot \lambda = 0, \quad x \in D,$$

adică funcția φ este o soluție a ecuației (10.10).

Exemplu: Fie ecuația cu derivate parțiale liniară de ordinul întâi

$$x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + 2y^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Sistemul simetric asociat este $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y^2} = \frac{dz}{z}$,

iar combinațiile integrabile

$$\begin{cases} \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2y^2} dy = 0 \\ \frac{1}{x} dx - \frac{1}{z} dz = 0 \end{cases}$$

Integralele prime sunt

$$\begin{cases} \ln|x| + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y} = \varphi_1(x, y) \\ \ln|x \cdot z| = \varphi_2(x, z). \end{cases}$$

Teoremă (soluția generală). Fie ecuația cu derivate parțiale liniară de ordinul I (10.10), unde funcțiile $P_i, i=1:n$ sunt continue și nenule simultan în domeniul $D \subset \mathbb{R}^n$.

Dacă $\varphi_i(x) = c_i, i=1:n-1$ sunt $(n-1)$ integrale prime independente ale sistemului simetric asociat ecuației (10.10), iar funcția Φ este de clasă C^1 pe domeniul $d \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ($\Phi \in C^1(d \subset \mathbb{R}^{n-1})$), atunci funcția

$$u(x) = \Phi(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)), x \in D \quad (10.12)$$

este o soluție a ecuației (10.10). Reciproc, orice soluție a ecuației (10.10) se poate scrie în forma (10.12).

Demonstrație. Fie funcția $u(x) = \Phi(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)), x \in D$.

Este clar că funcția u este de clasă C^1 pe domeniul $d \subset \mathbb{R}^{n-1}$ și pentru orice $i=1:n$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_{n-1}} \cdot \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_i}, \quad x \in D. \quad (10.13)$$

Înmulțim relația (10.13) cu P_i , însumăm după $i=1:n$ și pentru orice $x \in D$ obținem

$$\begin{aligned} P_1(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} + P_2(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + P_n(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_n} &= \sum_{i=1}^n P_i(x) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_k} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_k} \cdot \left(\sum_{i=1}^n P_i(x) \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_k} \cdot \left(P_1(x) \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} + P_2(x) \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} + \dots + P_n(x) \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} \right) = 0. \end{aligned}$$

Ultima egalitate rezultă din teorema precedentă, deoarece toate funcțiile $\varphi_i, i = 1:n - 1$ verifică identic relația (10.13). Am arătat astfel că funcția u este soluție a ecuației (10.10).

Reciproc.

Vom arăta că orice soluție a ecuației (10.10) este de forma (10.12). Fie funcția $u \in C^1(D)$ o soluție a ecuației (10.10), adică pentru orice $x \in D$ are loc

$$P_1(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} + P_2(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + P_n(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \quad (10.14)$$

Deoarece și funcțiile independente $\varphi_i, i = 1:n - 1$ sunt soluții ale ecuației (10.10), avem

$$P_1(x) \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} + P_2(x) \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} + \dots + P_n(x) \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} = 0, \quad x \in D, \quad i = 1:n - 1. \quad (10.15)$$

Din (10.14) și (10.15) rezultă un sistem de n ecuații cu n necunoscute, funcțiile $P_i, i = 1:n$. Cum sistemul este liniar, omogen și admite și soluții nebanale deducem că determinantul sistemului este nul în domeniul D , adică

$$\frac{D(u, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} = 0, \quad x \in D.$$

Dar funcțiile $\varphi_i, i = 1:n - 1$ sunt liniar independente în domeniul D , adică

$$\text{rang } \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} = n - 1, \quad x \in D,$$

deci funcțiile $u, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$ sunt în dependență funcțională în domeniul D .

Prin urmare, există o funcție $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^1 , astfel ca

$$\Psi(u(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)) = 0, \quad x \in D. \quad (10.16)$$

Dacă sunt îndeplinite pe D ipotezele teoremei funcțiilor implicate, atunci putem determina în mod explicit funcția u din relația (10.16), adică există funcția $\Phi \in C^1(d)$ astfel ca

$$u(x) = \Phi(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)), \quad x \in D.$$

În ipotezele teoremei precedente, funcția u din (10.12) se numește *soluția generală* a ecuației (10.10).

Observație. Pentru rezolvarea problemei **Cauchy** vom considera integralele prime $\varphi_i = c_i, i = 1:n - 1$ liniar independente în domeniul D și vom presupune că determinantul funcțional

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})}$$

este nenul în punctul $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \in D$. Rezolvarea problemei **Cauchy** revine la determinarea funcției $\Phi \in C^1(d)$ cu proprietatea că funcția compusă

$$u(x) = \Phi(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)), x \in D$$

satisfacă condiția

$$u(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n0}) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in d \subset \mathbb{R}^{n-1},$$

unde funcția $\varphi \in C^1(d)$.

Deoarece $\varphi_i(x) = c_i, i = 1:n-1, x \in D$, vom înlocui pe $x_n = x_{n0}$, obținând sistemul

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n0}) = c_i, i = 1:n-1, \quad (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in d. \quad (10.17)$$

Acest sistem cu necunoscutele $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in d$ permite determinarea lui $x_k, k = 1:n-1$ într-o vecinătate a punctului $(x_{1,0}, x_{2,0}, \dots, x_{n-1,0}, x_{n,0})$, adică există funcțiile $\psi_k, k = 1, n-1$ de clasă C^1 pe domeniul d , astfel ca

$$x_k = \psi_k(c_1, c_2, \dots, c_{n-1}), \quad k = 1:n-1. \quad (10.18)$$

Teoremă. În ipotezele teoremei anterioare, soluția problemei **Cauchy** pentru ecuația (10.10) cu condiția

$$u(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n0}) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in d \subset \mathbb{R}^{n-1},$$

unde funcția $\varphi: d \rightarrow \mathbb{R}$ este de clasă C^1 pe domeniul d , este dată de

$$u(x) = \varphi(\psi_1(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}), \psi_2(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}), \dots, \psi_{n-1}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}))(x). \quad (10.19)$$

Demonstrație. Considerăm funcția u dată de (10.19). Deoarece funcția $\varphi: d \rightarrow \mathbb{R}$ este de clasă C^1 pe domeniul d , din teorema precedentă deducem că funcția u este soluție a ecuației (10.10). Mai mult, din modul cum a fost definită funcția u deducem pentru $x_n = x_{n,0}$ că

$$u(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n0}) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in d \subset \mathbb{R}^{n-1},$$

adică funcția u satisfacă condiția **Cauchy**. Deci, funcția u din (10.19) este soluția problemei **Cauchy** a ecuației (10.10).

Exemplu: Să se determine soluția problemei **Cauchy** asociată ecuației cu derivate parțiale liniară de ordinul I

$$(1+x^2) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + xy \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

și condiției

$$u(0, y) = y^2.$$

Integrala primă a ecuației cu derivate parțiale este $\varphi(x, y) = \frac{1+x^2}{y^2}$, iar

soluția generală a problemei **Cauchy** este $u(x, y) = \frac{y^2}{1+x^2}$.

10.3 Ecuății cu derivate parțiale de ordinul întâi cvasiliniare

Forma generală a ecuației cu derivate parțiale de ordinul întâi *cvasiliniare* în raport cu derivatele parțiale este

$$P_1(x,u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} + P_2(x,u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + P_n(x,u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_n} = P_{n+1}(x,u), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \quad (10.20)$$

unde funcțiile $P_k : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1:n+1$, $D \subset \mathbb{R}^n$ sunt continue și cu derivate parțiale de ordinul I continue și nenule simultan în domeniul D , iar funcția $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ este de clasă C^1 pe domeniul D .

Teoremă. Fie funcția $v : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $v = v(x,u)$ este de clasă C^1 pe domeniul $D \times \mathbb{R}$. Dacă $\frac{\partial v}{\partial u}(x,u) \neq 0$, $(x,u) \in D \times \mathbb{R}$, atunci integrarea ecuației (10.20) se reduce la integrarea ecuației cu derivate parțiale liniare și omogene în $(n+1)$ variabile

$$P_1(x,u) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_1} + P_2(x,u) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_2} + \dots + P_n(x,u) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_n} + P_{n+1}(x,u) \cdot \frac{\partial v}{\partial u} = 0. \quad (10.21)$$

Demonstrație

Căutăm pentru ecuația (10.20) o soluție definită implicit prin relația

$$v(x, u(x)) = 0, \quad x \in D, \quad (10.22)$$

unde funcția $v : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^1 pe domeniul $D \times \mathbb{R}$ urmează să o determinăm în cele ce urmează. Fiind în condițiile teoremei funcțiilor implicate $(\frac{\partial v}{\partial u}(x,u) \neq 0, (x,u) \in D \times \mathbb{R})$ deducem că există funcția $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^1 pe domeniul D astfel ca

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = -\frac{\frac{\partial v}{\partial x_k}}{\frac{\partial v}{\partial u}}, \quad k = 1:n, \quad x \in D.$$

Înlocuind în (10.20) se obține (10.21), adică funcția $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ definită implicit de relația (10.22) este soluție a ecuației (10.20) dacă și numai dacă funcția $v : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este la rândul său soluție a ecuației (10.21).

Algoritm de determinare a soluției unei ecuații cu derivate parțiale de ordinul I cvasiliniare (10.20).

- Se scrie ecuația cu derivate parțiale de ordinul I liniară (10.21).

➤ Se scrie sistemul characteristic asociat ecuației (10.21)

$$\frac{dx_1}{P_1(x,u)} = \frac{dx_2}{P_2(x,u)} = \dots = \frac{dx_n}{P_n(x,u)} = \frac{du}{P_{n+1}(x,u)}, \quad (x,u) \in D \times \mathbb{R}.$$

➤ Se determină n integrale prime ale sistemului characteristic anterior

$$\varphi_k(x,u) = c_k, \quad k=1:n, \quad (x,u) \in D \times \mathbb{R}.$$

➤ Scriem soluția generală a ecuației (10.21) sub forma

$$v(x,u) = \Phi(\varphi_1(x,u), \varphi_2(x,u), \dots, \varphi_n(x,u)),$$

unde funcția $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ este de clasă C^1 pe domeniul său de definiție.

➤ Relația $v(x,u) = 0$ definește implicit soluția generală a ecuației (10.20).

Exemplu

Să se determine soluția generală a ecuației cu derivate parțiale de ordinul I cvasiliniare

$$x_1^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + x_n^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x_n} = u^2,$$

unde funcția $u = u(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ este de clasă C^1 pe domeniul său de definiție.

Sistemul characteristic asociat ecuației cu derivate parțiale de ordinul I liniare

$$x_1^2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x_1} + x_2^2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x_2} + \dots + x_n^2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x_n} + u^2 \cdot \frac{\partial v}{\partial u} = 0$$

este

$$\frac{dx_1}{x_1^2} = \frac{dx_2}{x_2^2} = \dots = \frac{dx_n}{x_n^2} = \frac{du}{u^2}.$$

Integralele prime ale acestui sistem simetric sunt $\frac{1}{x_k} - \frac{1}{u} = c_k$, $k=1:n$.

Soluția generală a ecuației cu derivate parțiale de ordinul I liniare asociate este

$$v(x,u) = \Phi\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{u}, \frac{1}{x_2} - \frac{1}{u}, \dots, \frac{1}{x_n} - \frac{1}{u}\right),$$

unde funcția $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ este de clasă C^1 pe domeniul său de definiție.

Relația $\Phi\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{u}, \frac{1}{x_2} - \frac{1}{u}, \dots, \frac{1}{x_n} - \frac{1}{u}\right) = 0$ definește implicit funcția

$u = u(x)$ ce este soluție a ecuației cu derivate parțiale de ordinul I cvasiliniare date.

10.4 Interpretarea geometrică a soluțiilor

Fie ecuația cu derivate parțiale de ordinul I cvasiliniară

$$P(x,y,z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y,z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z) \quad (10.23)$$

și câmpul vectorial

$$\vec{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{v} = P(x,y,z) \cdot \vec{i} + Q(x,y,z) \cdot \vec{j} + R(x,y,z) \cdot \vec{k}, \quad (10.24)$$

unde funcțiile reale $P, Q, R: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sunt continue în domeniul $D \subset \mathbb{R}^3$ având derivate parțiale de ordinul I continue în D și

$$P^2(x,y,z) + Q^2(x,y,z) \neq 0, \quad \forall (x,y,z) \in D.$$

Dacă ecuația $z = z(x, y)$ este ecuația explicită a unei suprafețe simplă și netedă, atunci în fiecare punct (a, b, c) al suprafeței se poate duce un plan tangent de ecuație

$$(x-a) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(a,b) + (y-b) \cdot \frac{\partial z}{\partial y}(a,b) = z - c.$$

Propoziție. Soluțiile ecuației cu derivate parțiale de ordinul I cvasiliniare (10.23) reprezintă suprafețe S de ecuație $z = z(x, y)$ pentru care câmpul vectorial (10.24) este situat în planul tangent la suprafața S în fiecare punct al său.

Demonstrație. Câmpul vectorial (10.24) se află în planul tangent la suprafața S dacă și numai dacă normala planului este ortogonală cu câmpul vectorial. Cum normala la planul tangent suprafeței S este $\vec{n} = \frac{\partial z}{\partial x}(a,b) \cdot \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}(a,b) \cdot \vec{j} - \vec{k}$, condiția de ortogonalitate $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ devine (10.23).

Fie acum sistemul caracteristic asociat ecuației (10.23)

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)} \quad (10.25)$$

și integralele sale prime

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = c_1 \\ \varphi_2(x, y, z) = c_2 \end{cases} \quad (10.26)$$

ce formează o familie de curbe în domeniul D . Sistemul simetric (10.25) se mai poate scrie și în următoarea formă $\vec{v} \times d\vec{r} = 0$ și are următoarea interpretare geometrică:

Dacă \vec{r} este vectorul de poziție al punctului curent $M(x, y, z)$ al curbei $\Gamma \subset D$, atunci câmpul vectorial \vec{v} este tangent la curbă în punctul curent M .

Prin urmare, curbele integrale, ce sunt soluții ale sistemului (10.25), au proprietatea că în fiecare punct vectorul \vec{v} este tangent la curbă. Cum câmpul vectorial \vec{v} este situat în planul tangent la suprafețele integrale ale ecuației (10.23) putem afirma că soluțiile integrale ale sistemului caracteristic (10.25) sunt situate pe suprafețele integrale ale ecuației cu derivate parțiale de ordinul I cvasiliniare (10.23).

În concluzie, determinarea suprafețelor integrale ale ecuației (10.23), suprafețe ce se sprijină pe o curbă dată, este chiar soluția problemei Cauchy pentru ecuația (10.23). **Algoritm** pentru determinarea suprafeței integrale a ecuației (10.23), suprafață ce se sprijină pe curba

$$\Gamma: \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (10.27)$$

- Se scrie sistemul simetric asociat (10.25), determinându-se soluția sa (10.26) sub forma unei familii de curbe biparametrice.
- Această familie de curbe biparametrice (10.26) trebuie să se sprijine pe curba (10.27), prin urmare sistemul

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \\ \varphi_1(x, y, z) = c_1 \\ \varphi_2(x, y, z) = c_2 \end{cases} \quad (10.28)$$

trebuie să fie compatibil.

- Se rezolvă sistemul (10.28) în raport cu necunoscutele principale (x, y, z) , obținându-se o relație de forma $\Phi(c_1, c_2) = 0$, $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, numită *relația de compatibilitate*.
- Ecuația sub formă implicită a suprafeței căutate este $\Phi(\varphi_1(x, y, z), \varphi_2(x, y, z)) = 0$.

Exemplu: Să se determine suprafața $z = z(x, y)$ care are proprietatea

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z$$

și se sprijină pe curba

$$\Gamma: \begin{cases} x = y \\ z = x^2 \end{cases}$$

Sistemul caracteristic asociat este

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{z},$$

iar integralele prime sunt

$$\begin{cases} x \cdot y = c_1 \\ z = c_2 \cdot x \end{cases}$$

Acstea două relații combinate cu ecuațiile ce descriu curba Γ conduc la următoarea relație de compatibilitate $c_2^2 = c_1$ de unde obținem ecuația sub formă implicită a suprafeței căutate $z^2 = x^3 \cdot y$.

Exemplu: Să se determine suprafața de tangență câmpului vectorial

$$v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{v} = yz \cdot \vec{i} + zx \cdot \vec{j} + xy \cdot \vec{k}$$

care se sprijină pe cercul

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Condiția geometrică se poate rescrie analitic astfel $\vec{v} \times d\vec{r} = 0$, condiție care conduce la următorul sistem simetric

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{zx} = \frac{dz}{xy}.$$

Integralele prime ale sistemului simetric sunt

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = c_1 \\ z^2 - y^2 = c_2 \end{cases}$$

Acstea două relații combinate cu ecuațiile ce descriu curba C conduc la următoarea relație de compatibilitate $2c_2 - c_1 = 1$ de unde obținem ecuația sub formă implicită a suprafeței căutate $2z^2 - x^2 - y^2 = 1$.

10.5 Aplicații ale sistemelor de ecuații diferențiale

10.5.1 Traекторiile ortogonale ale unei familii de suprafețe

Fie S_C familia de suprafețe de ecuație implicită $F(x, y, z) = C$, unde funcția F este de clasă $C^1(D \subset \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$. Dacă \vec{r} este vectorul de poziție al punctului curent $M(x, y, z)$ al curbei $\Gamma \subset D$, curbă care intersectează una din suprafețele S_C în punctul curent M.

Dacă curba $\Gamma \subset D$ este ortogonală suprafeței S_C , atunci tangentă la curbă este coliniară în punctul M cu normala la suprafață. Condiția geometrică de coliniaritate se poate rescrie analitic în forma $d\vec{r} \times \vec{n} = 0$ sau $d\vec{r} \times \text{grad } F = 0$. În consecință:

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)} = \frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)} = \frac{dz}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)}.$$

Acest sistem definește în domeniul D mulțimea curbelor $\Gamma \subset D$ ortogonale familiei de suprafețe S_C .

Exemplu: Să se determine familiile de curbe ortogonale hiperboloizilor

$$x^2 + y^2 - z^2 = C.$$

Normala în punctul curent la hiperboloizi este

$$\vec{n} = \text{grad } F = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) \cdot \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) \cdot \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) \cdot \vec{k} = 2x \cdot \vec{i} + 2y \cdot \vec{j} - 2z \cdot \vec{k}.$$

Ecuăția curbelor ortogonale conduce la următorul sistem simetric

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{-z}$$

a cărui soluție

$$\begin{cases} x = c_1 y \\ yz = c_2 \end{cases}$$

reprezintă curbele ortogonale familiei de suprafețe date. În cazul acestui exemplu acestea se află la intersecția unei familii de cilindri hiperbolici cu o familie de plane.

10.5.2 Liniile de câmp ale unui câmp vectorial

Fie câmpul vectorial

$$v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{v} = P(x,y,z) \cdot \vec{i} + Q(x,y,z) \cdot \vec{j} + R(x,y,z) \cdot \vec{k},$$

unde funcțiile reale $P, Q, R: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sunt continue în domeniul $D \subset \mathbb{R}^3$.

Curbele $\Gamma \subset D$ tangente în fiecare punct curent $M \in D$ la câmpul vectorial v se numesc *liniile de câmp* ale câmpului v . Ecuățiile liniilor de câmp se definesc din condiția de tangență $d\vec{r} \times \vec{v} = 0$ sau echivalent

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}.$$

Soluțiile integrale ale acestui sistem simetric reprezintă liniile de câmp ale câmpului vectorial v .

Exemplu: Să se determine liniile de câmp ale câmpului vectorial

$$v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{v} = (3x^2y - y^3) \cdot \vec{i} + (x^3 - 3xy^2) \cdot \vec{j} + (y^2 - x^2) \cdot \frac{xy}{z} \cdot \vec{k}.$$

Sistemul simetric al liniilor de câmp este

$$\frac{dx}{3x^2y - y^3} = \frac{dy}{x^3 - 3xy^2} = \frac{dz}{(y^2 - x^2) \cdot \frac{xy}{z}}.$$

Combinațiile integrabile sunt

$$\begin{cases} xdx + ydy + 4zdz = 0 \\ (x^3 - 3xy^2)dx - (3x^2y - y^3)dy = 0 \end{cases}$$

iar integralele prime, ce se constituie în familia de linii de câmp ale câmpului vectorial dat, sunt

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4z^2 = c_1 \\ x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = c_2 \end{cases}$$

10.5.3 Generarea suprafetelor

1. Suprafețe cilindrice. Dacă de exemplu avem problema determinării ecuației carteziene implicate a suprafeței cilindrice pentru care generatoarele sunt paralele cu dreapta

$$\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ x + 2y - z = -2 \end{cases}$$

iar curba directoare este elipsa

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ z = 2 \end{cases} \quad (10.29)$$

Fie $\vec{v} = l \cdot \vec{i} + m \cdot \vec{j} + n \cdot \vec{k}$ vectorul director al suprafeței cilindrice S căutate $z = z(x, y)$.

Parametrii directori ai normalei la suprafață în punctul $M(x, y, z) \in S$ sunt $(p, q, -1)$, adică normala la suprafața S într-un punct arbitrar are expresia

$$\vec{n} = \frac{p \cdot \vec{i} + q \cdot \vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}. \quad (10.30)$$

Cum în fiecare punct al suprafeței are loc condiția de ortogonalitate $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$, obținem

$$l \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + m \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = n$$

numită ecuația generală a suprafețelor cilindrice din \mathbb{R}^3 cu generatoarea de vector director \vec{v} .

În cazul concret al problemei de mai sus, generatoarea este dată ca intersecția a două plane, prin urmare $\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = -5 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j} + 3 \cdot \vec{k}$, iar ecuația suprafeței cilindrice căutate este

$$5 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - 4 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = -3.$$

Cele două integrale prime sunt

$$\begin{cases} 4x + 5y = c_1 \\ 3x + 5z = c_2 \end{cases}$$

Ecuația generală a suprafețelor cilindrice având generatoarea de vector director $\vec{v} = -5 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j} + 3 \cdot \vec{k}$ este $\Phi(4x + 5y, 3x + 5z) = 0$, unde funcția Φ este de clasă C^1 .

Suprafața cilindrică generată de curbele caracteristice care se sprijină pe curba directoare (10.29) se obține determinând condiția de compatibilitate

$$194c_2^2 + 81c_1^2 - 216c_1c_2 + 2160c_1 - 3880c_2 = -15350.$$

Înlocuind expresiile constantelor se obține ecuația suprafeței cilindrice căutate

$$18 \cdot x^2 + 60 \cdot x \cdot z - 120 \cdot x + 81 \cdot y^2 - 216 \cdot y \cdot z + 432 \cdot y + 194 \cdot z^2 - 776 \cdot z + 614 = 0.$$

2. Suprafețe conice. Fie punctul $V(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ vârful conicei și $M(x, y, z)$ un punct arbitrar pe suprafața conică de ecuație $z = z(x, y)$. Vectorul \overrightarrow{VM} se află pe suprafața conicei, iar normala în punctul M la conică are expresia (10.30), prin urmare $\overrightarrow{VM} \cdot \vec{n} = 0$ sau echivalent

$$(x - a) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + (y - b) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z - c. \quad (10.31)$$

Sistemul characteristic asociat ecuației cu derivate parțiale cvasiliniare de ordinul I este

$$\frac{dx}{x - a} = \frac{dy}{y - b} = \frac{dz}{z - c},$$

iar integralele prime independente sunt

$$\begin{cases} x - a = c_1 \cdot (y - b) \\ y - b = c_2 \cdot (z - c) \end{cases}$$

Soluția generală a ecuației cu derivate parțiale pentru suprafețele conice este dată în următoarea formă implicită

$$\Phi\left(\frac{x - a}{y - b}, \frac{y - b}{z - c}\right) = 0, \quad \Phi \in C^1(\mathbb{R}^2).$$

Exemplu: Ecuația carteziană implicită a suprafeței conice cu vârful în punctul $V(1, -1, 1)$ și având curba directoare

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 - 4 \cdot y = 0 \\ z = 4 \end{cases}$$

se obține urmând pașii descriși mai sus, obținându-se soluția generală de forma

$$\Phi\left(\frac{x-1}{y+1}, \frac{y+1}{z-1}\right) = 0, \quad \Phi \in C^1(\mathbb{R}^2).$$

Soluția problemei **Cauchy** se obține determinând mai întâi condiția de compatibilitate

$$9 \cdot c_1^2 \cdot c_2^2 + 6 \cdot c_1 \cdot c_2 - 12 \cdot c_2 + 5 = 0.$$

Înlocuind expresiile constantelor se obține ecuația suprafeței conice căutate

$$9 \cdot x^2 + 5 \cdot z^2 + 6 \cdot x \cdot z - 12 \cdot y \cdot z - 24 \cdot x + 12 \cdot y - 28 \cdot z + 32 = 0.$$

BIBLIOGRAFIE

- [1] **Barbu, V.**, *Ecuății diferențiale*, Editura Junimea, Iași, 1985
- [2] **Elianu, I.P.**, *Principii de analiză matematică. Calcul diferențial*, vol. I, Editura Academiei Militare, 1976
- [3] **Fihtenholț, G.M.**, *Curs de calcul diferențial și integral*, vol. I, II, III, Editura Tehnică, București, 1964-1965
- [4] **Flondor, D., Donciu, N.**, *Algebră și analiză matematică – culegere de probleme*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1965, 1978-1979
- [5] **Găină, St., Câmpu, E., Bucur, Gh.**, *Culegere de probleme de calcul diferențial și integral*, vol. I, II, III, Editura Tehnică, București, 1964-1968
- [6] **Gârban, V., Udrea, C.**, *Ecuății diferențiale și cu derivate parțiale*, Editura Academiei Tehnice Militare, 2004
- [7] **Gârban, V., Sprintu, I.**, *Analiză matematică. Calcul diferențial. Aplicații*, Editura Academiei Tehnice Militare, 2003
- [8] **Günter, N.M., Cuzmin, R.O.**, *Culegere de probleme de matematici superioare*, vol. I, II, III, Editura Tehnică, București, 1950-1955
- [9] **Megan, M.**, *Calcul diferențial și integral în \mathbb{R}^p* , Editura Universității de Vest, Timișoara, 2000
- [10] **Meghea, C., Meghea, I.**, *Tratat de Calcul diferențial și integral pentru învățământul politehnic*, vol. II, Editura Tehnică, București, 2000
- [11] **Otlăcan, P., Mocănescu, A., Giurgiu, M., Păltineanu, G., Dochitoiu, I.**, *Culegere de probleme de analiză matematică*, vol. I, II, Editura Academiei Militare, București, 1980, 1981
- [12] **Popescu, E.**, *Analiză matematică. Structuri fundamentale*, Editura Academiei Tehnice Militare, 1998
- [13] **Precupeanu, A.**, *Bazele Analizei Matematice*, Editura Universității Alexandru Ioan Cuza, Iași, 1993
- [14] **Radu, C., Drăgușin, L., Drăgușin, C.**, *Algebră liniară, Analiză matematică, geometrie analitică și diferențială - culegere de probleme*, Editura Fair Parteners, București, 2000
- [15] **Rogai, E.**, *Exerciții și probleme de ecuații diferențiale și integrale*, Editura Tehnică, București, 1965
- [16] **Rudin, W.**, *Analiză reală și complexă*, Editura Theta, București, 1999

[17] **Soloi, A., Popescu, E.**, *Analiză matematică – integrale multiple*, vol. IV, Editura Academiei Tehnice Militare, Bucureşti, 1996

[18] **Soloi, A., Popescu, E., Lupaş, A.**, *Analiză matematică. Calcul integral. Culegere de probleme*, Editura Academiei Tehnice Militare, 2004

[19] **Udrea, C.**, *Analiză matematică, vol. III, integrala funcțiilor de o variabilă reală*, Editura Academiei Militare, Bucureşti, 1987

[20] **Udrea, C.**, *Integrala Riemann pentru funcții de variabile vectoriale*, Editura Academiei Tehnice Militare, 2001

