Noţiuni introductive

Multiset

- **Intuitiv**: O “mulțime” unde elementele se pot repeta

Multiset

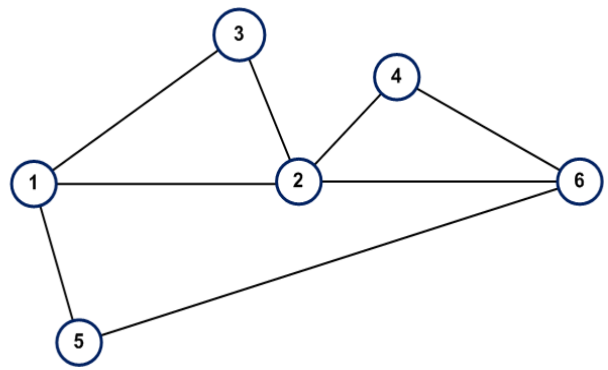
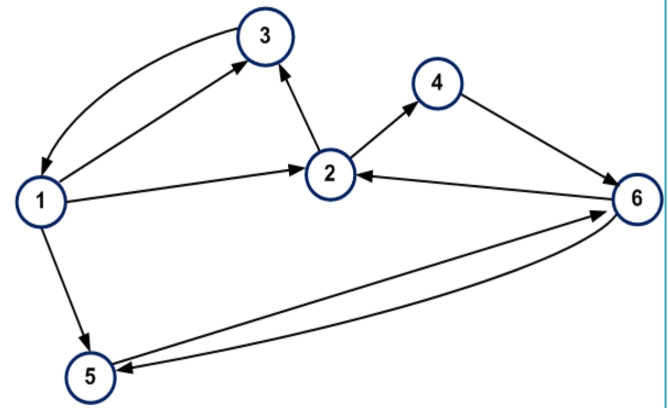
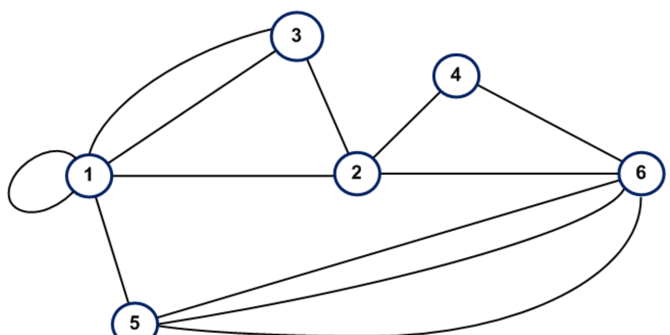
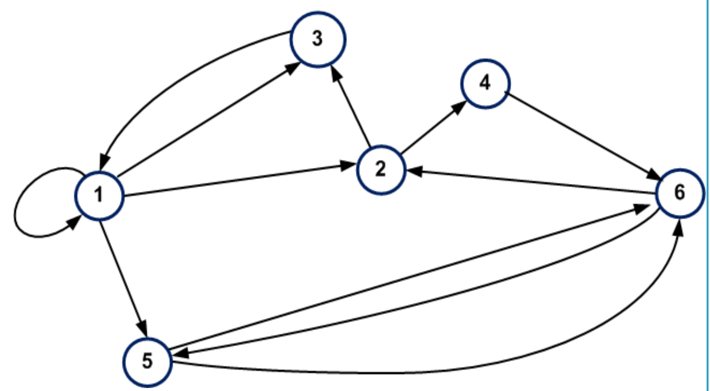
- S o mulţime (finită) nevidă
- **Multiset**
  - $R = (S, r)$, $r : S \to \mathbb{N}$ **funcţie de multiplicitate**
- **Notaţie**
  - $R = \{x^{r(x)} \mid x \in S\}$

Exemplu

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$R = \{2^2, 3, 5^3\}$$

- $|R| = 2+1+3 = 6$ – suma multiplicităților
- $1 \notin R$

Graf, multigraf

<table>
<tr><th></th><th>neorientat</th><th>orientat</th></tr>
<tr><td>graf</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>multigraf</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Graf orientat

$G = (V, E)$

V – finită

E – perechi (ordonate) de 2 elemente distincte din V

- $v \in V$ – vârf
- $e = (u, v) = uv$ – arc

$u = e^-$ – vârf iniţial / origine / extremitate iniţială

$v = e^+$ – vârf final / terminus / extremitate finală

Graf neorientat

$G = (V, E)$

V – finită

E – submulţimi de 2 elemente (distincte) din V

- $v \in V$ – vârf / nod
- $e = \{u, v\} = (u, v) = uv$ – muchie

u, v – capete / extremităţi

Notaţii

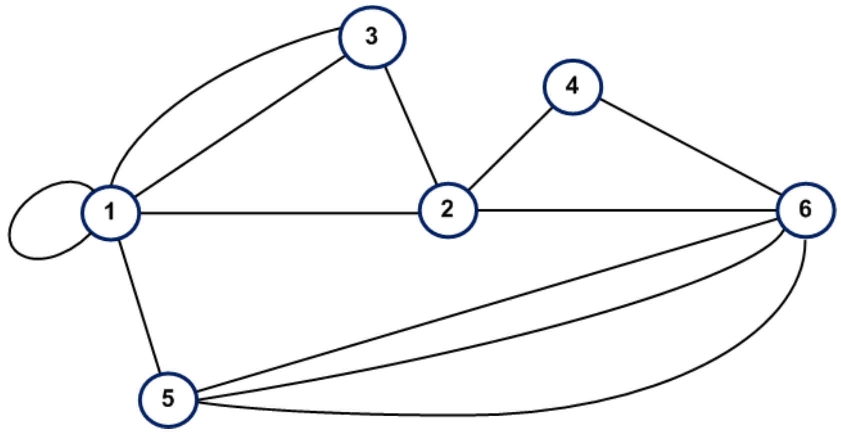
- $V(G)$, $E(G)$
- $e = uv$

Multigraf neorientat/orientat

- **$G = (V, E, r)$**

  r(e) – multiplicitatea muchiei e

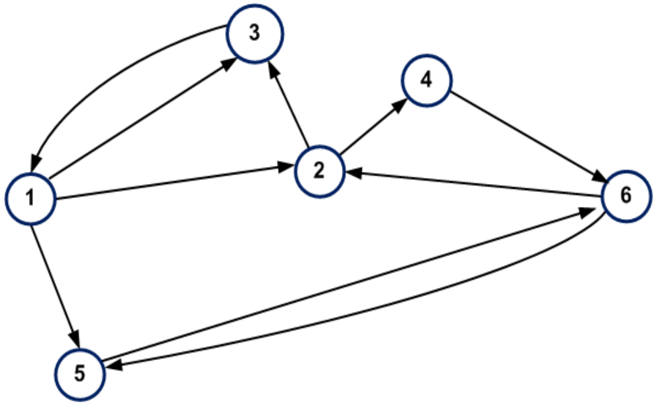
  - e = {u,u} = **buclă**
  - e cu r(e) >1 = **muchie/arc multiplă/multiplu**



Grade

Graf orientat

- grad interior $d_G^-(u) = |\{e \in E \mid u \text{ extremitate finala pentru } e\}|$
- grad exterior $d_G^+(u) = |\{e \in E \mid u \text{ extremitate initiala pentru } e\}|$
- grad $d_G(u) = d_G^+(u) + d_G^-(u)$

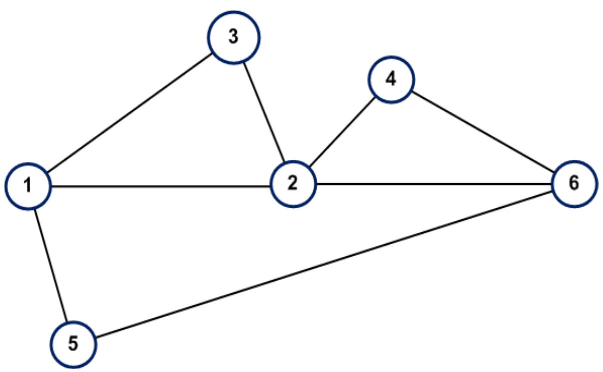


$$s^-(G) = \{d_G^-(v_1), \ldots, d_G^-(v_n)\}$$

Graf neorientat

- grad $d_G(u) = |\{e \in E \mid u \text{ extremitate pentru } e\}|$

$$s^+(G) = \{d_G^+(v_1), \ldots, d_G^+(v_n)\}$$



Grade – Proprietate

Graf orientat

$$\sum_{u \in V} d_G^-(u) = \sum_{u \in V} d_G^+(u) = |E|$$

Graf neorientat

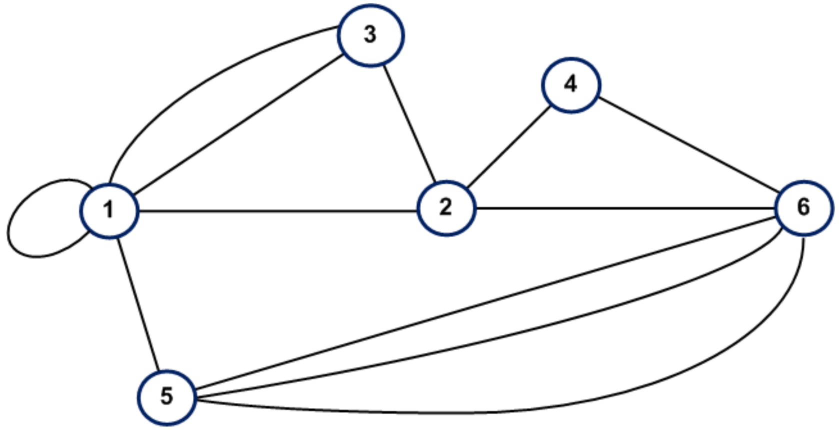
$$\sum_{u \in V} d_G(u) = 2|E|$$

Idee demonstrație – Cu cât contribuie un arc / o muchie la sumă?

Grade multigraf neorientat

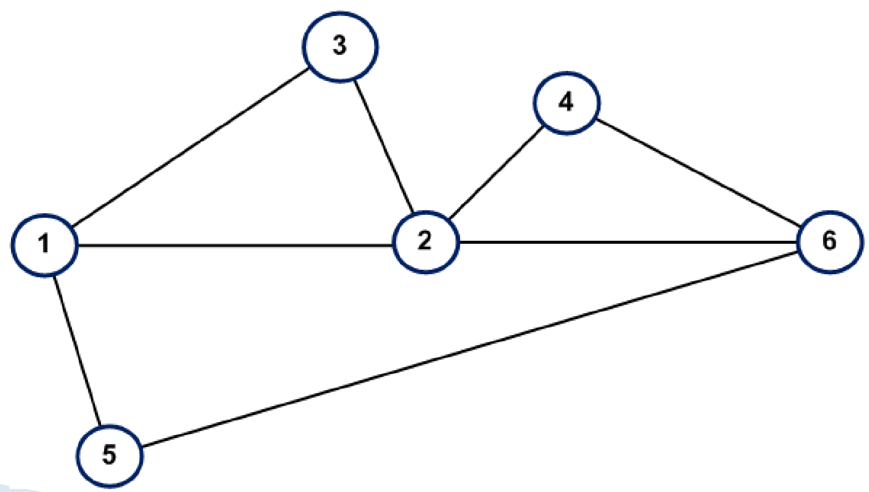
- G = (V, E, r) – multigraf

$$d_G(u) = |\{e \in E \mid e \text{ nu este buclă}, u \text{ extremitate a lui } e\}| +$$
$$+ 2 \cdot |\{e \in E \mid e \text{ este buclă}, u \text{ extremitate a lui } e\}|$$



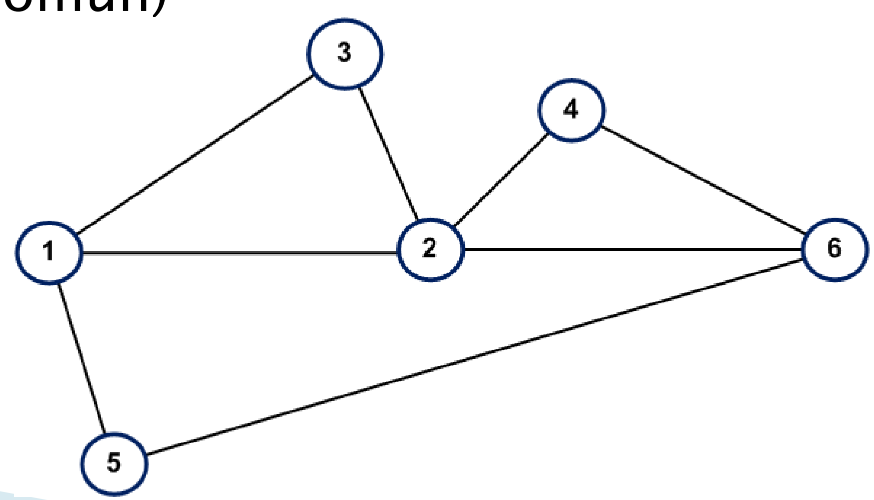
Adiacență. Incidență

- Fie G = (V, E) un graf
  - u și v $\in$ V sunt **adiacente** dacă uv $\in$ E
  - Un **vecin** al lui u $\in$ V este un vârf adiacent cu el
  - **Notație** $N_G(u)$ = mulțimea vecinilor lui u



Adiacență. Incidență

- Fie $G = (V, E)$ un graf
  - u și $v \in V$ sunt **adiacente** dacă $uv \in E$
  - Un **vecin** al lui $u \in V$ este un vârf adiacent cu el
  - **Notație** $N_G(u)$ = mulțimea vecinilor lui u
  - O muchie $e \in E$ este **incidentă** cu un vârf u dacă u este extremitate a lui e
  - e și $f \in E$ sunt **adiacente** dacă există un vârf în care sunt incidente (au o extremitate în comun)



Graf orientat

- Drum (walk)
- Drum simplu (trail)
- Drum elementar (path)
- Circuit + elementar
- Lungimea unui drum
- Distanță între două vârfuri

Graf neorientat

- Lanț (walk)
- Lanț simplu (trail)
- Lanț elementar (path)
- Ciclu + elementar
- Lungimea unui lanț
- Distanță între două noduri

Drumuri/ Lanțuri

Fie G un graf **orientat/neorientat**

- Un **drum/lanț** este o secvență P de vârfuri

$$P = [v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k]$$

a.î. între oricare două vârfuri consecutive există arc/muchie:

$$(v_i, v_{i+1}) \in E(G), \ \forall\, i \in \{1, \dots, k-1\}$$

Drumuri/ Lanțuri

Fie G un graf **orientat/neorientat**

- Un **drum/lanț** este o secvență P de vârfuri

$$P = [v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k]$$

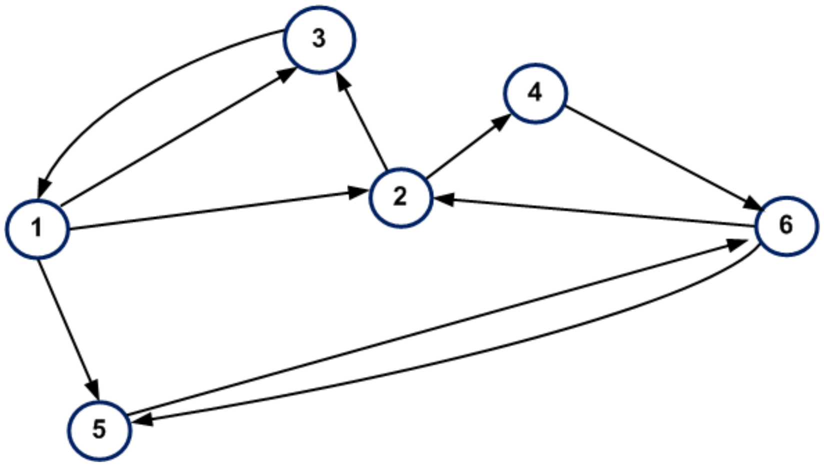
  a.î. între oricare două vârfuri consecutive există arc/muchie:

$$(v_i, v_{i+1}) \in E(G),\ \forall\ i \in \{1, \dots, k-1\}$$

- P este **drum/lanț simplu** dacă nu conține **un arc/o muchie** de mai multe ori ($(v_i, v_{i+1}) \neq (v_j, v_{j+1})$, $\forall i \neq j$)

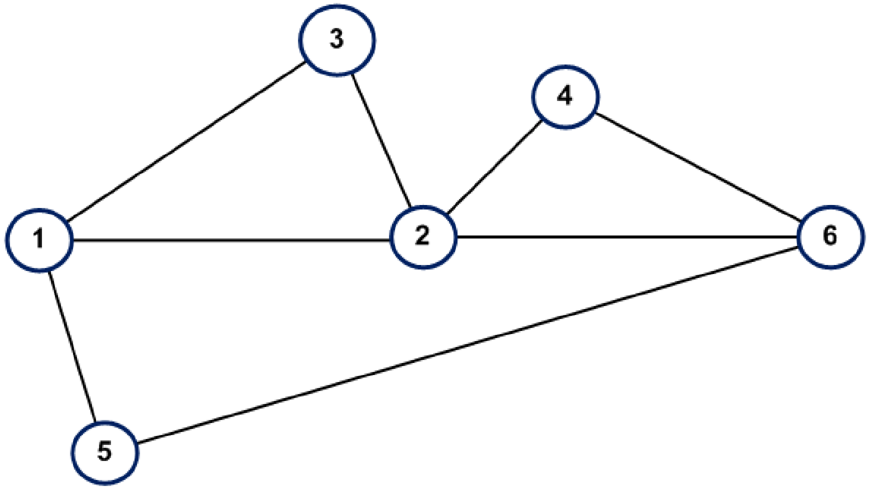
- P este **drum/lanț elementar** dacă nu conține **un vârf** de mai multe ori ($v_i \neq v_j$, $\forall i \neq j$)

Exemple



Drum neelementar, dar simplu:

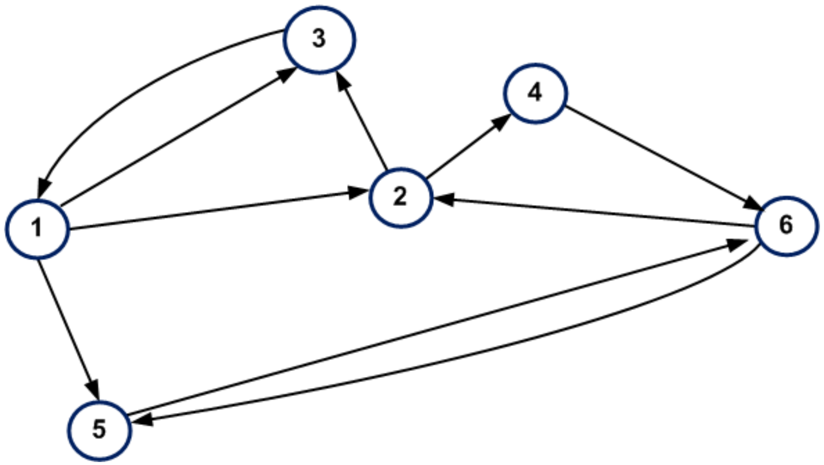
Drum elementar:



Lanț neelementar, dar simplu:

Lanț elementar:

Exemple

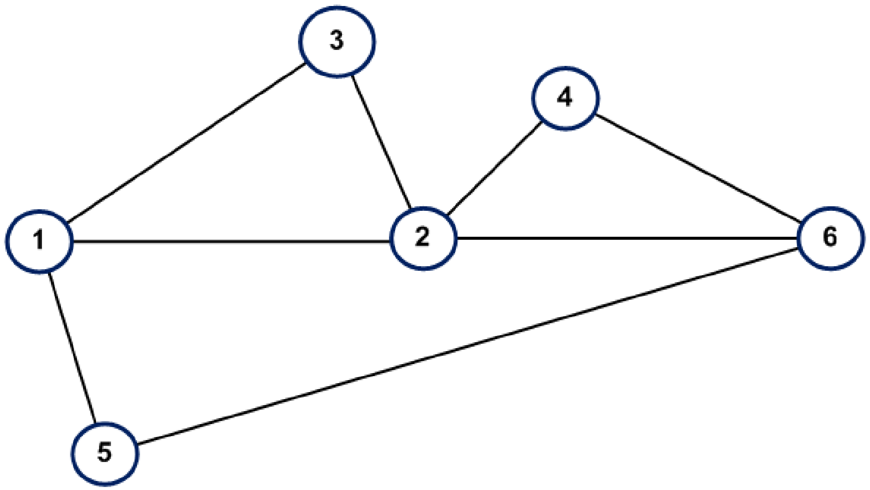


Drum neelementar, dar simplu:

P=[1, 3, 1, 2]

Drum elementar:

P=[1, 2, 4, 6]



Lanț neelementar, dar simplu:

P=[1, 3, 2, 1, 5]

Lanț elementar:

P=[1, 2, 4, 6]

Drumuri/ Lanțuri

$P = [v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k]$

- **Lungimea** lui P = **l(P)** = **k−1 = |E(P)| – număr de arce/muchii**

Drumuri/ Lanțuri

$P = [v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k]$

- **Lungimea** lui P = **l(P)** = **k-1** = **|E(P)|**
- v_1 și v_k se numesc **capetele/ extremitățile** lui P
- P se numește și **v_1-v_k drum**

Notăm

- $V(P) = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$
- $e_i = (v_i, v_{i+1})$
- $E(P) = \{e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}\}$
- Pentru $i \leq j$ notăm $[v_i \underline{P}\, v_j]$ **subdrumul** lui P dintre v_i și v_j

Distanță. Drum minim

- Pentru două vârfuri u și v definim **distanța de la u la v** astfel:

$$\delta_G(u,v) = \begin{cases} \mathbf{0}, \text{ daca } \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{\infty}, \text{ daca nu exista } \boldsymbol{u}\text{-}\boldsymbol{v} \text{ drum/lant in } \boldsymbol{G} \\ \mathbf{min}\{\boldsymbol{l}(\boldsymbol{P}) \mid \boldsymbol{P} \text{ este } \boldsymbol{u}\text{-}\boldsymbol{v} \text{ drum/lant in } \boldsymbol{G}\}, \text{ altfel} \end{cases}$$

(cea mai mică lungime a unui u-v drum/lanț)

Distanță. Drum minim

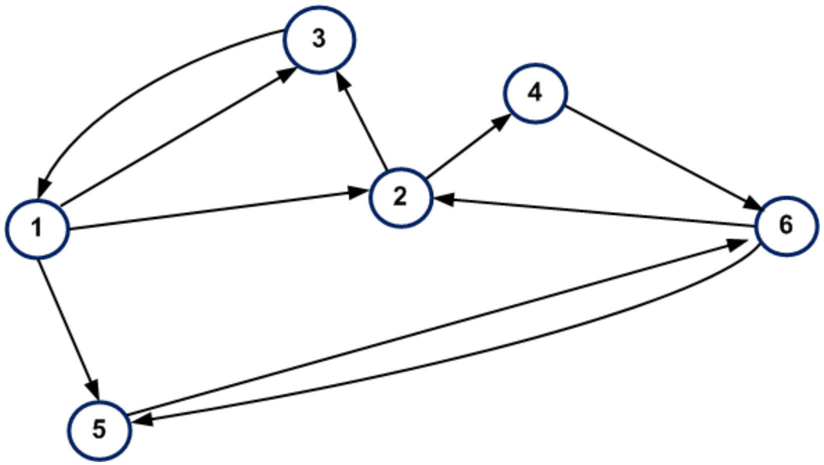
- Pentru două vârfuri u și v definim **distanța de la u la v** astfel:

$$\delta_G(u,v) = \begin{cases} \mathbf{0}, \text{ daca } \boldsymbol{u = v} \\ \boldsymbol{\infty}, \text{ daca nu exista } \boldsymbol{u\text{-}v} \text{ drum/lant in } \boldsymbol{G} \\ \mathbf{min}\{\boldsymbol{l(P)} \mid \boldsymbol{P} \text{ este } \boldsymbol{u\text{-}v} \text{ drum/lant in } \boldsymbol{G}\}, \text{ altfel} \end{cases}$$

(cea mai mică lungime a unui u-v drum/lanț)

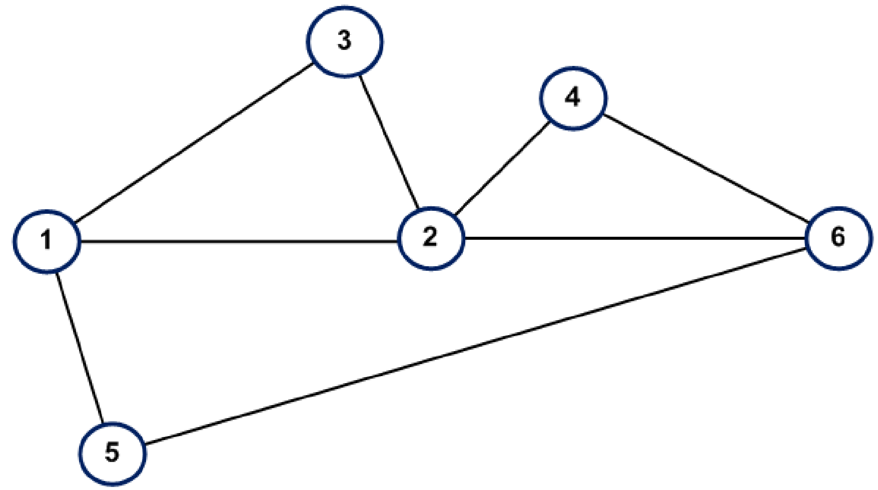
- Un u-v drum de lungime $\delta_G(u,v)$ se numește **drum minim de la u la v**
- Vom nota și $\delta(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ dacă G se deduce din context sau d(u,v) dacă nu apar confuzii de notație

Exemple



$\delta(1, 6) =$

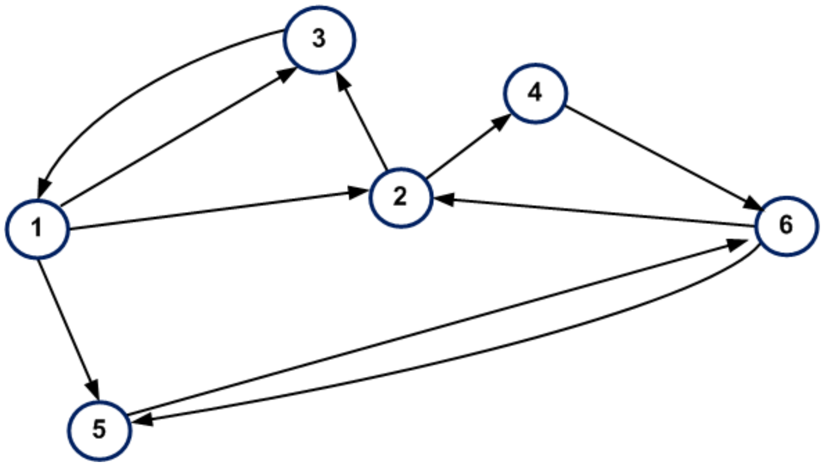
Un drum minim de la 1 la 6:



$\delta(1, 4) =$

Un lanț minim de la 1 la 4:

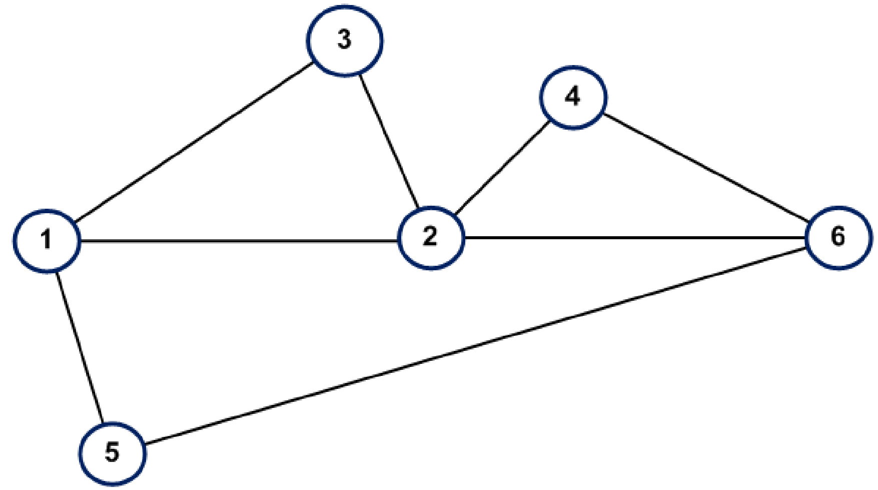
Exemple



$\delta(1, 6) = 2$

Un drum minim de la 1 la 6:

P=[1, 5, 6]



$\delta(1, 4) = 2$

Un lanț minim de la 1 la 4:

P=[1, 2, 6]

Circuite/Cicluri

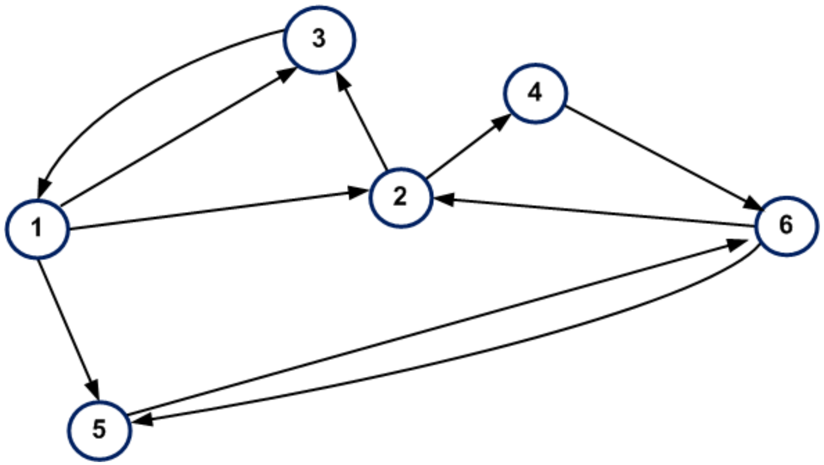
- Un **circuit/ciclu** este un drum/lanț *simplu* de lungime cel puțin 1 cu capetele identice

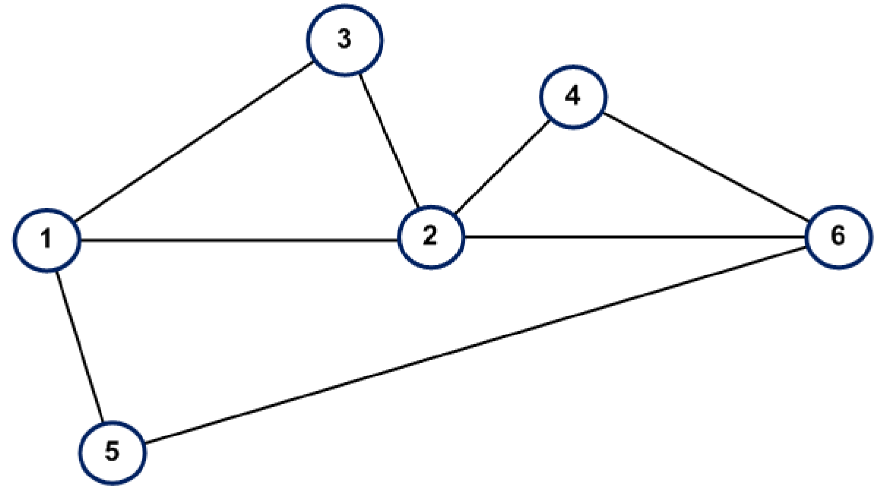
  $C = [v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_{k,} v_1]$

- **Circuit/ciclu elementar**: drumul/lanțul $[v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k]$ este elementar

- **Notații** $V(C)$, $E(C)$

Exemple





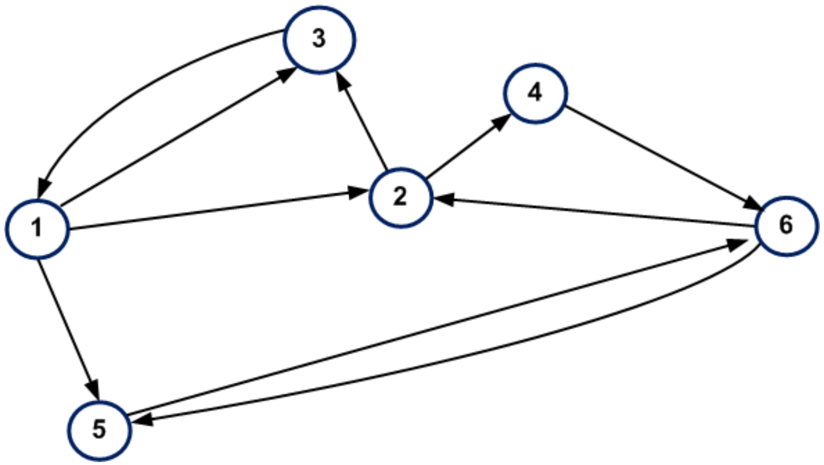
Circuit neelementar:

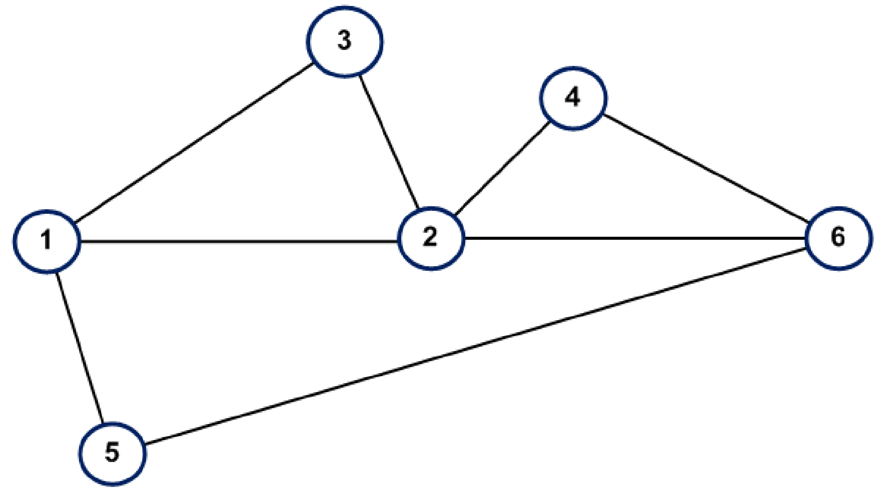
Circuit elementar:

Ciclu neelementar:

Ciclu elementar:

Exemple





Circuit neelementar:

P=[1, 2, 4, 6, 2, 3, 1]

Circuit elementar:

P=[2, 4, 6, 2]

Ciclu neelementar:

P=[1, 2, 6, 4, 2, 3, 1]

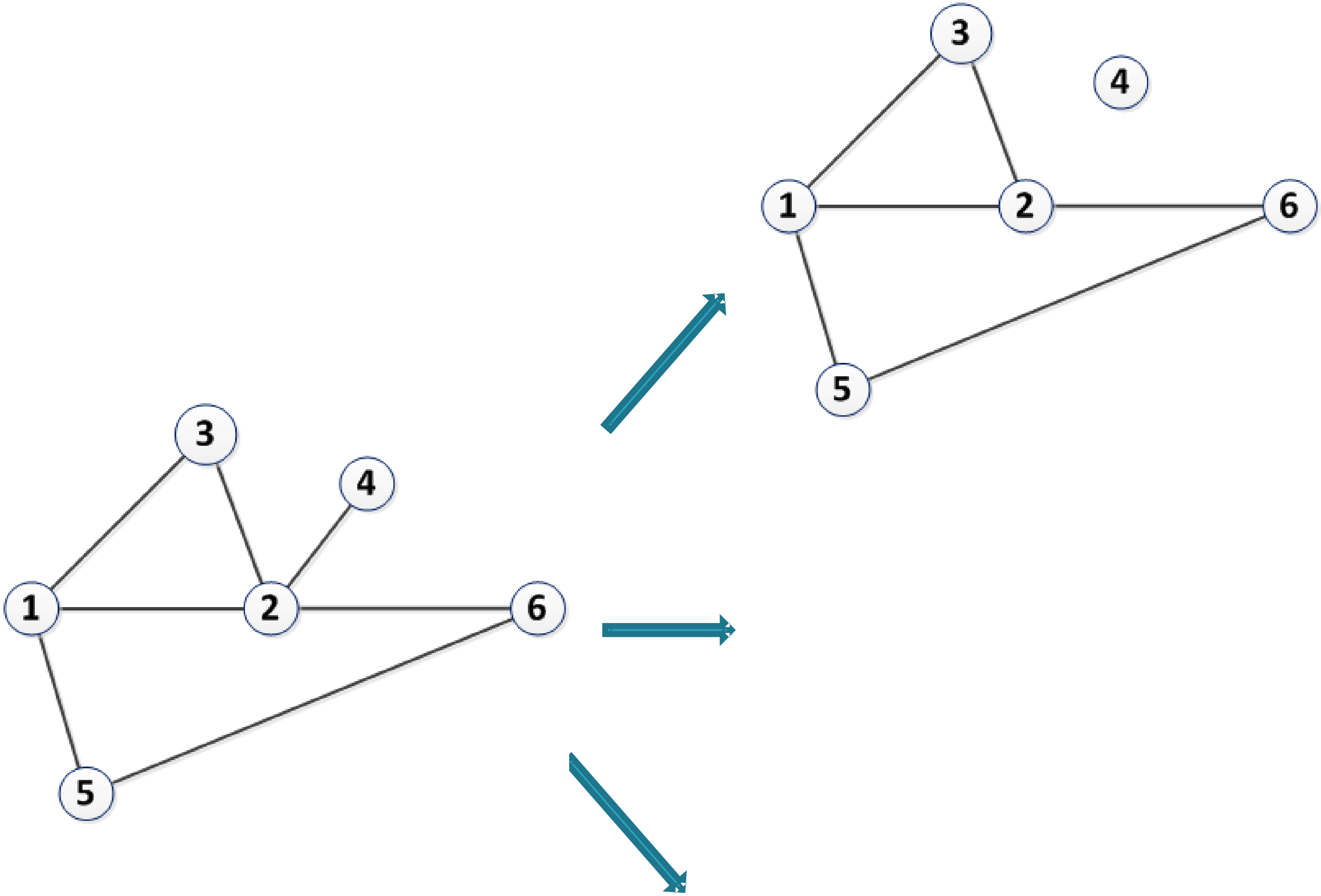
Ciclu elementar:

P=[1, 2, 6, 5, 1]

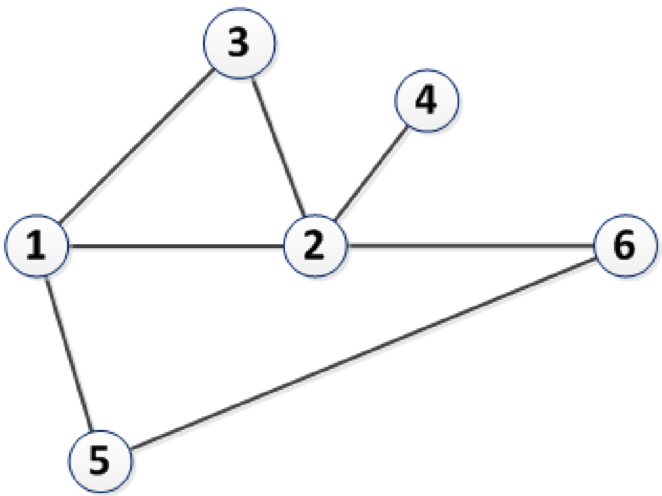
Graf parțial. Subgraf. Conexitate

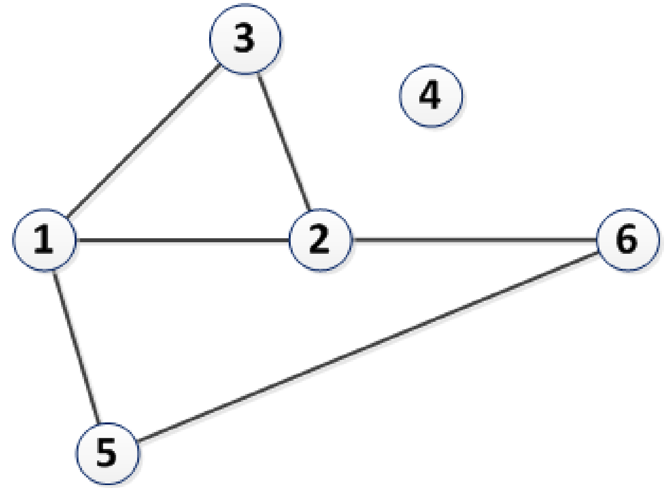
Graf parțial. Subgraf

- graf parțial
- subgraf
- subgraf indus

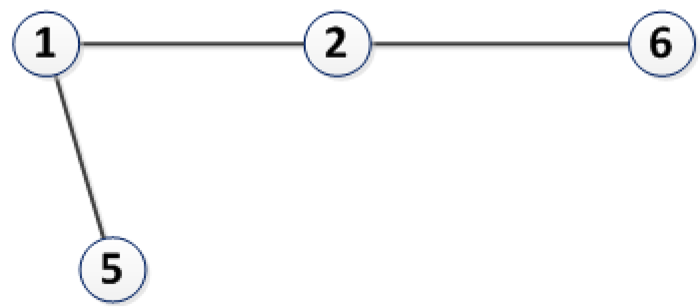


graf parțial

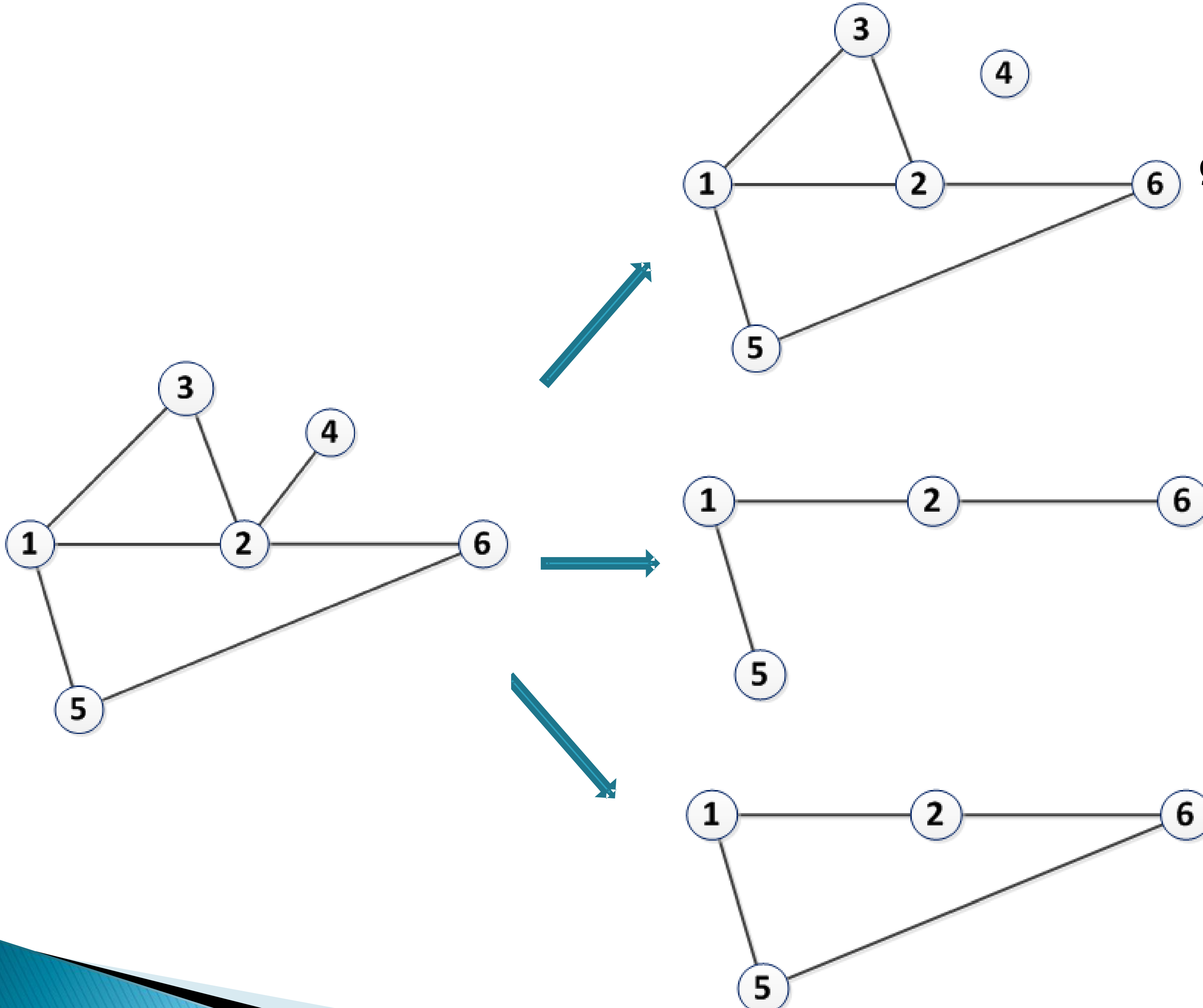




graf parțial



subgraf



graf parțial

subgraf

subgraf indus de {1,2,5,6}

Graf parțial. Subgraf

Fie $G = (V, E)$ și $G_1 = (V_1, E_1)$ două grafuri

- G_1 este **graf parțial** al lui G (vom nota $\mathbf{G_1 \leq G}$) dacă

  $V_1 = V, \quad E_1 \subseteq E$

Graf parțial. Subgraf

Fie $G = (V, E)$ și $G_1 = (V_1, E_1)$ două grafuri

- G_1 este **graf parțial** al lui G (vom nota $\mathbf{G_1} \leq \mathbf{G}$) dacă

  $V_1 = V, \quad E_1 \subseteq E$

- G_1 este **subgraf** al lui G (vom nota $\mathbf{G_1} \prec \mathbf{G}$) dacă

  $V_1 \subseteq V, \quad E_1 \subseteq E$

Graf parțial. Subgraf

Fie $G = (V, E)$ și $G_1 = (V_1, E_1)$ două grafuri

- G_1 este **graf parțial** al lui G (vom nota $\mathbf{G_1 \leq G}$) dacă

  $V_1 = V, \quad E_1 \subseteq E$

- G_1 este **subgraf** al lui G (vom nota $\mathbf{G_1 \prec G}$) dacă

  $V_1 \subseteq V, \quad E_1 \subseteq E$

- G_1 este **subgraf indus de V_1 în** G (vom nota $\mathbf{G_1 = G[V_1]}$) dacă

  $V_1 \subseteq V,$

  $E_1 = \{e \mid e \in E(G),$ e are ambele extremități în $V_1 \}$

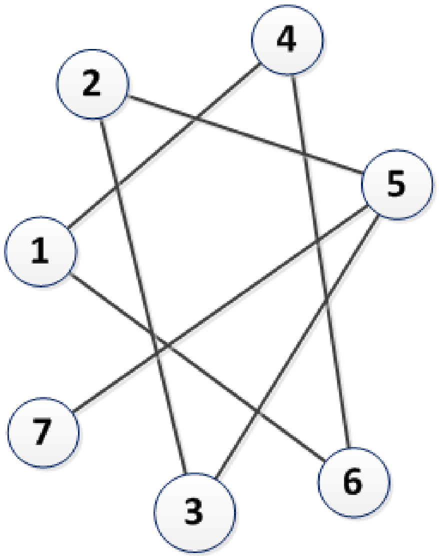
  (toate arcele/muchiile cu extremități în V_1)

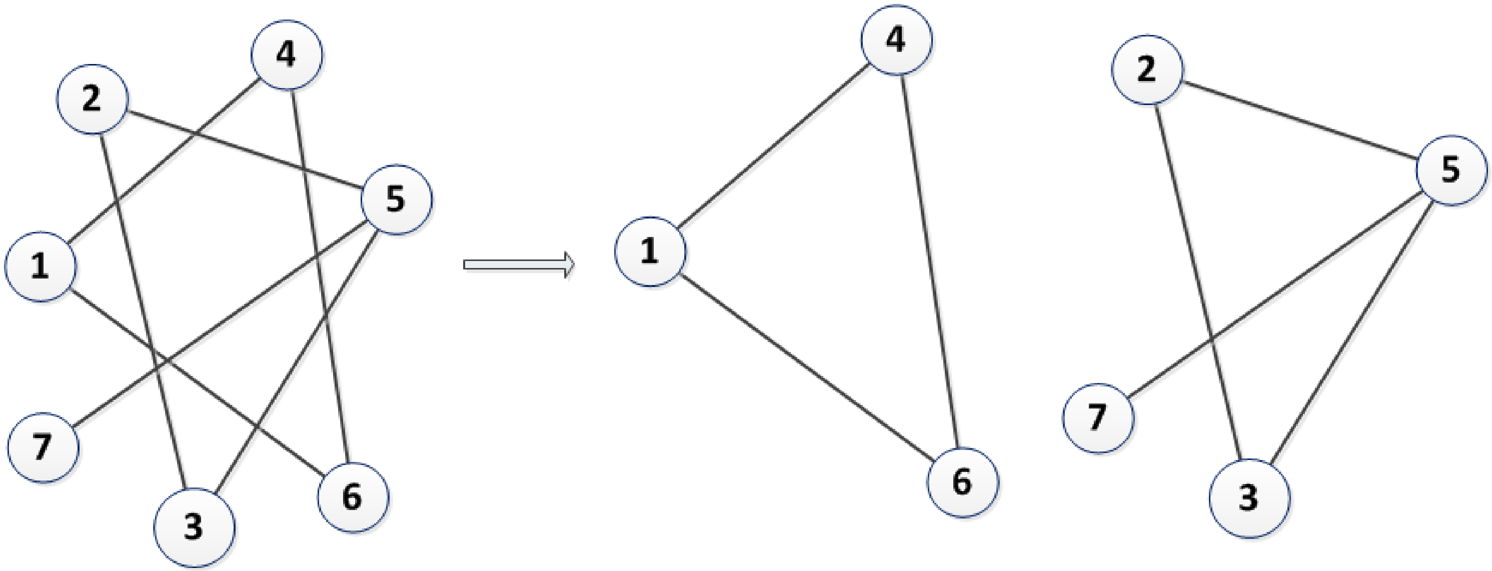
Conexitate

Fie $G = (V, E)$ un graf neorientat

- **graf conex**

- **componentă conexă**


4
2
5
1
7
6
3



două componente conexe

Conexitate

Fie G = (V, E) un graf neorientat

- G este **graf conex** dacă între orice două vârfuri distincte există un lanț
- O **componentă conexă** a lui G este un subgraf indus conex maximal (care nu este inclus în alt subgraf conex)
- Pentru cazul orientat – **tare-conexitate**

Conexitate

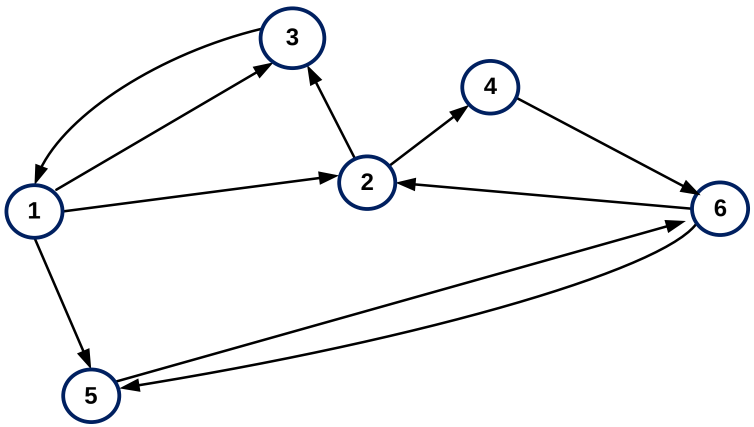
Fie G = (V, E) un graf neorientat

- G este **graf conex** dacă între orice două vârfuri distincte există un lanț
- O **componentă conexă** a lui G este un subgraf indus conex maximal (care nu este inclus în alt subgraf conex)
- Pentru cazul orientat – **tare-conexitate**
- **Toate vârfurile și muchiile lui G aparțin unei (singure) componente conexe)**

Tare conexitate

Fie G = (V, E) un graf **orientat**

- G este **graf tare-conex** dacă între orice două vârfuri distincte există un drum

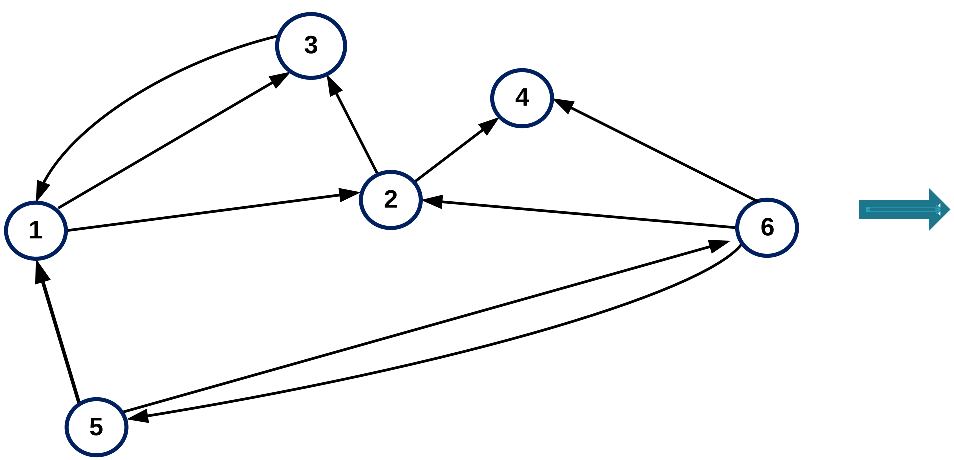


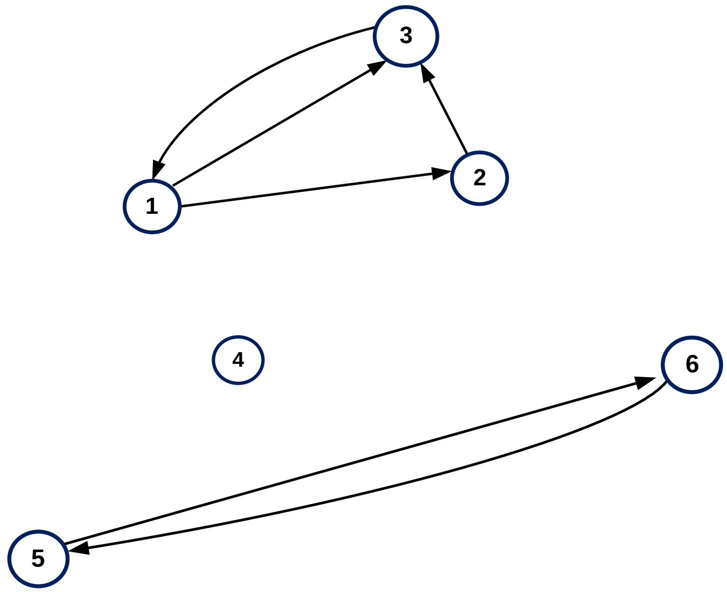
Tare conexitate

Fie G = (V, E) un graf orientat

- G este **graf tare-conex** dacă între orice două vârfuri distincte există un drum

- O **componentă tare-conexă** a lui G este un subgraf indus tare-conex maximal (care nu este inclus în alt subgraf tare-conex)





Tare conexitate

Fie G = (V, E) un graf orientat

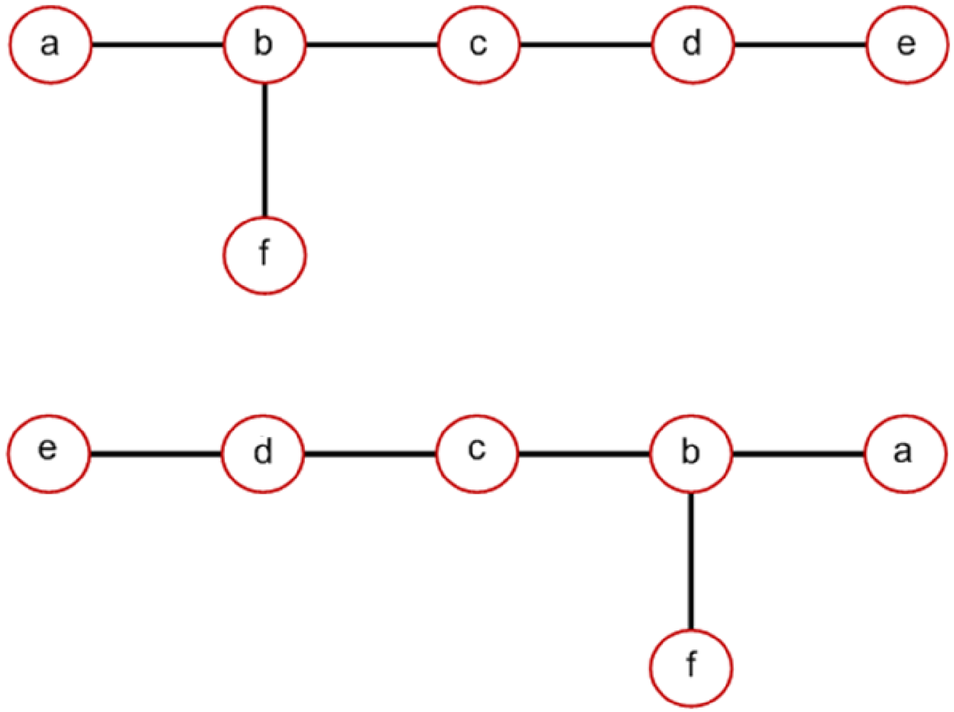
- G este **graf tare-conex** dacă între orice două vârfuri distincte există un drum
- O **componentă tare-conexă** a lui G este un subgraf indus tare-conex maximal (care nu este inclus în alt subgraf tare-conex)
- **Toate vârfurile lui G aparțin unei (singure) componente tare-conexe**
- **Un arc din G nu aparține neapărat unei componente tare-conexe**

Notaţii

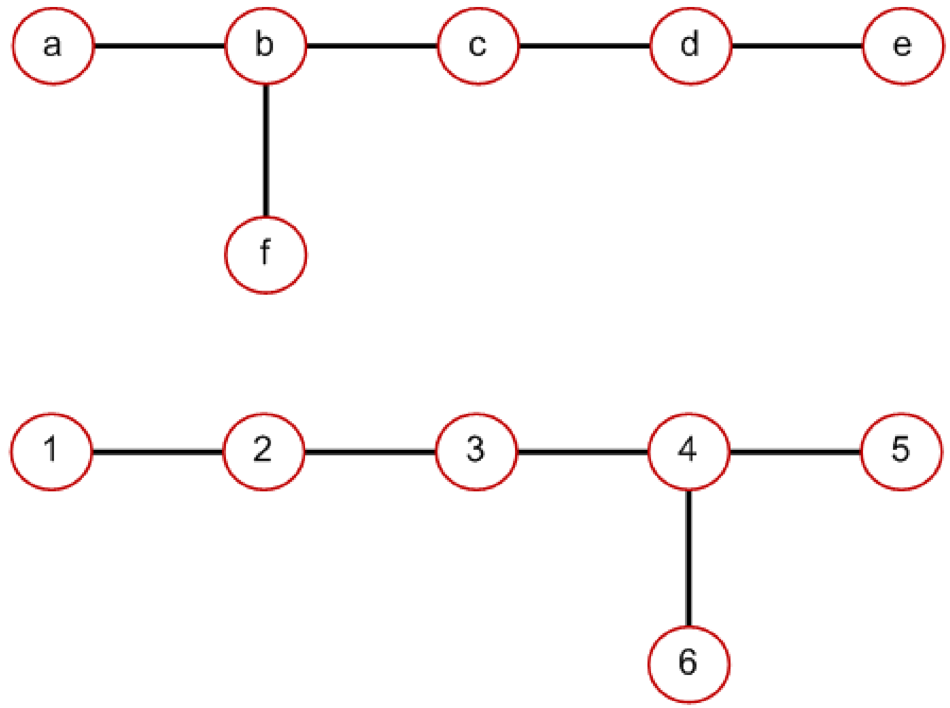
- **$G - v$** , $v \in V(G)$
- **$G - e$** , $e \in E(G)$
- **$G - V'$** , $V' \subseteq V(G)$
- **$G - E'$** , $E' \subseteq E(G)$
- **$G + e$**

Egalitate. Izomorfism

Egalitate



Egalitate?



Izomorfism

Fie G_1, G_2 două grafuri

- $G_1 = (V_1, E_1)$
- $G_2 = (V_2, E_2)$

Grafurile G_1 și G_2 sunt **izomorfe** (**$G_1 \sim G_2$**) $\Leftrightarrow$ există $f : V_1 \to V_2$ bijectivă cu

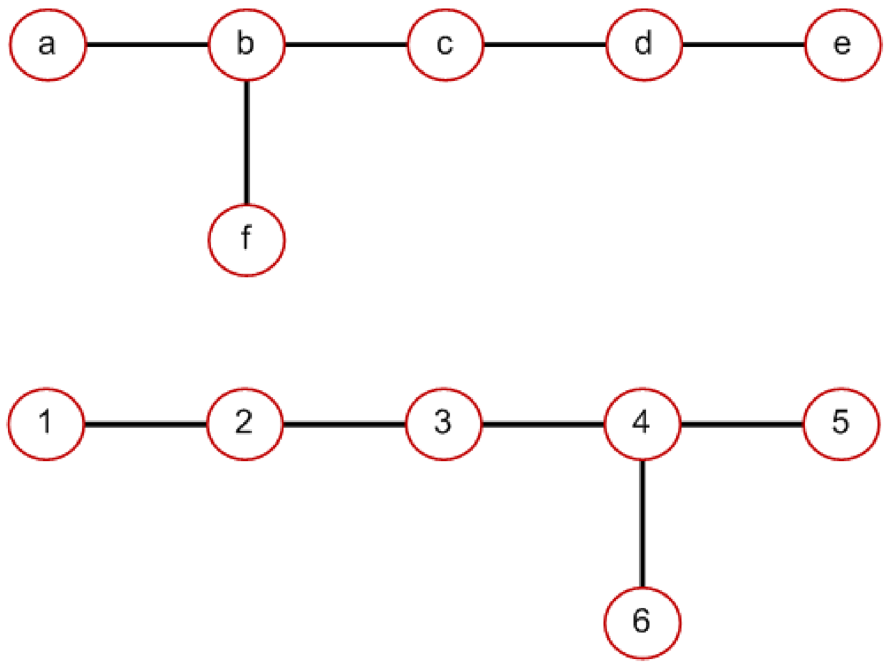
$$\mathbf{uv \in E_1 \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E_2}$$

pentru orice $u,v \in V_1$

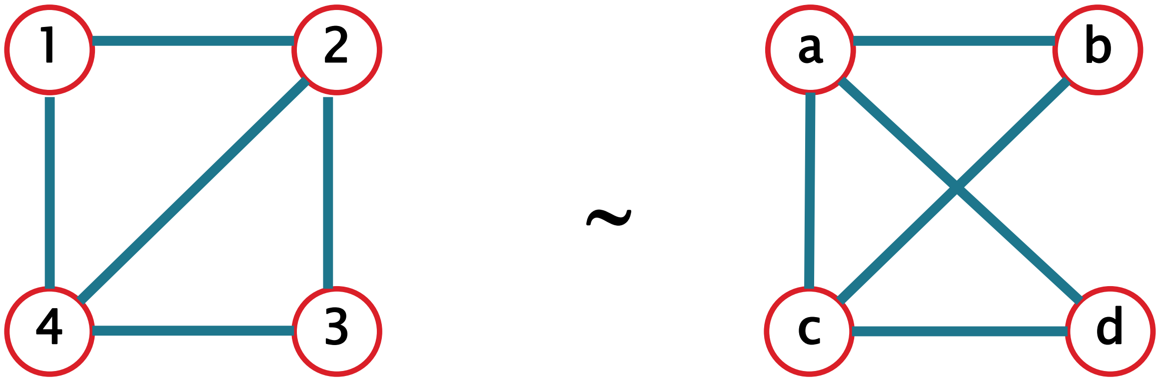
(f conservă adiacența și neadiacența)

Izomorfism

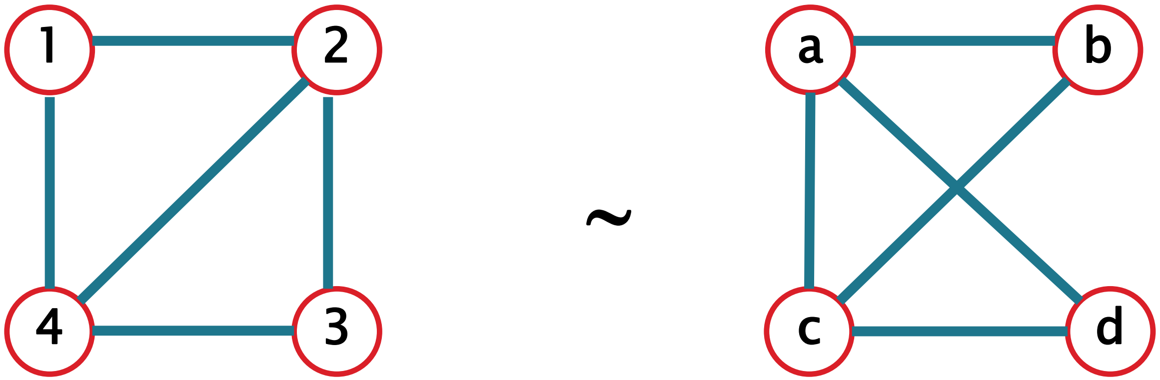
Interpretare: se pot reprezenta în plan prin același desen



Izomorfism



Izomorfism



f: 2 -> a

4 -> c

1 -> b

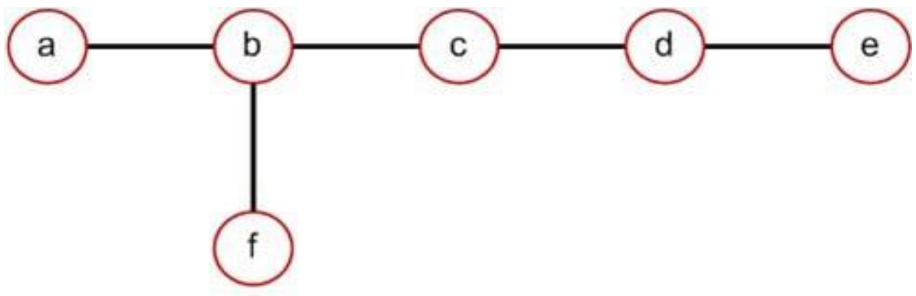
3- > d

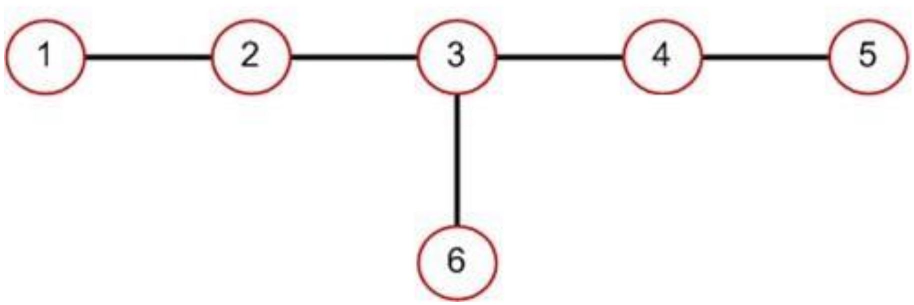
Izomorfism

- $G_1 \sim G_2 \Rightarrow s(G_1) = s(G_2)$

- $s(G_1) = s(G_2) \Rightarrow G_1 \sim G_2$ Exemplu??

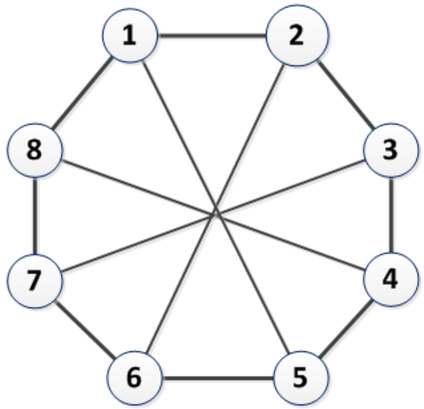
Izomorfism

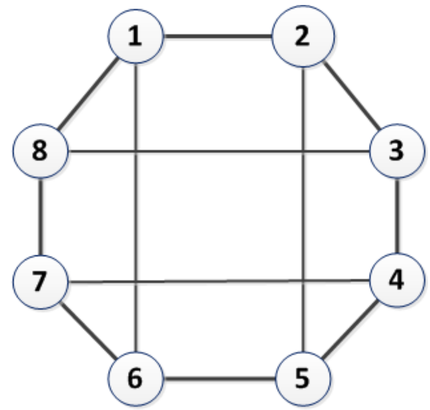


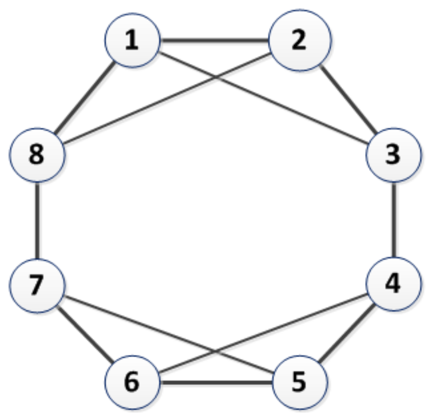


Izomorfe?

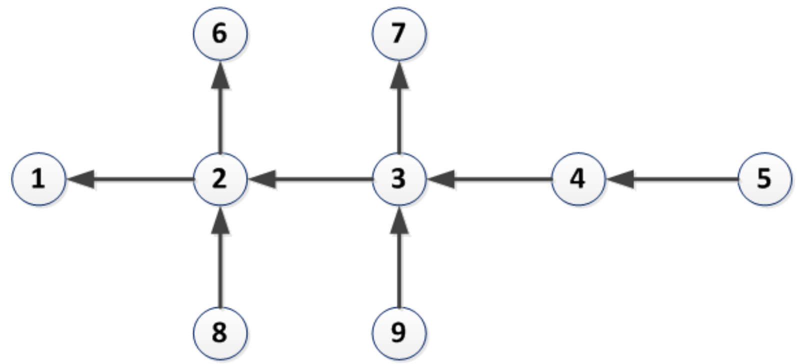
Care dintre aceste grafuri sunt izomorfe?

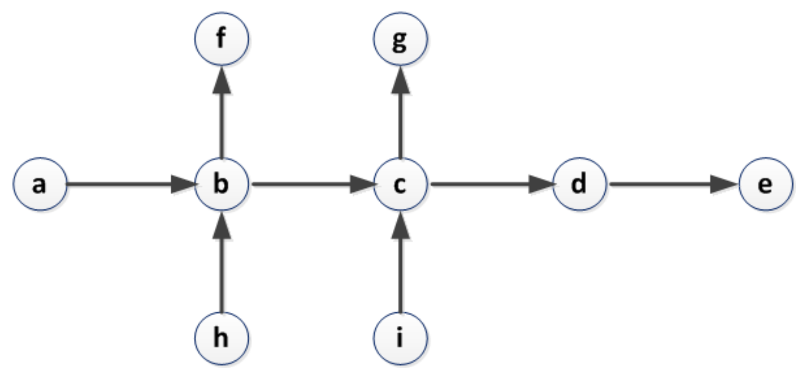






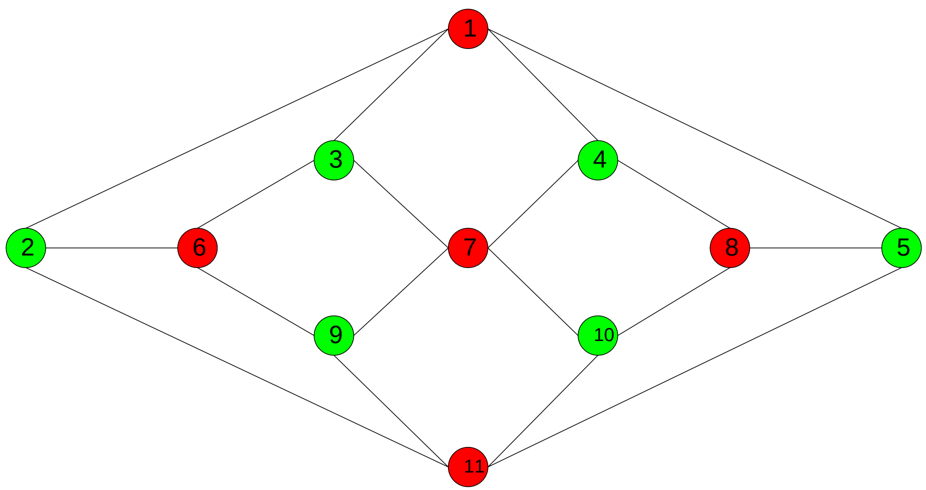
Sunt aceste grafuri izomorfe?

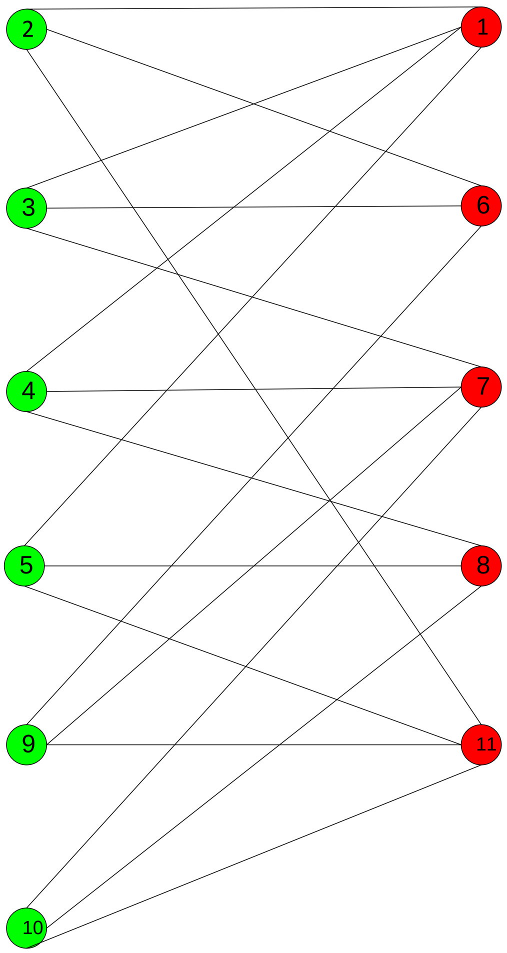




Grafuri standard

Graf bipartit





Graf bipartit

- Un graf neorientat $G = (V, E)$ se numește **bipartit** $\Leftrightarrow$

  există o partiție a lui V în două submulțimi V_1, V_2 (**bipartiție**):

$$V = V_1 \cup V_2$$

$$V_1 \cap V_2 = \varnothing$$

astfel încât orice muchie $e \in E$ are o extremitate în V_1 și cealaltă în V_2:

$$|e \cap V_1| = |e \cap V_2| = 1$$

Graf bipartit

Observație

- $G = (V, E)$ **bipartit** $\Leftrightarrow$

  există o colorare a vârfurilor cu două culori:

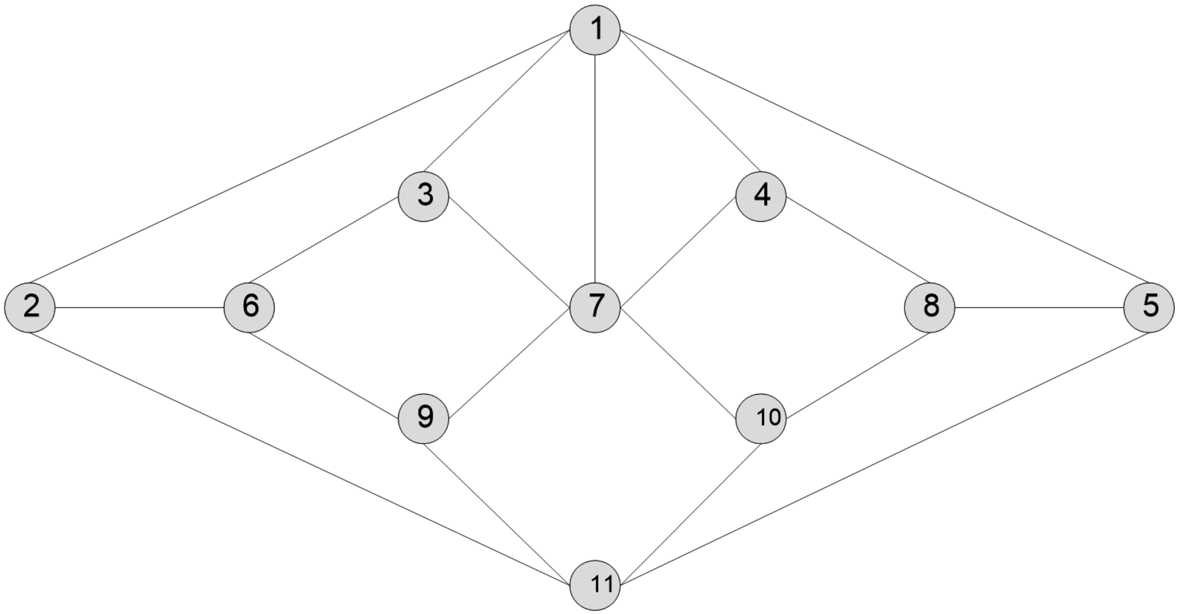
  $$c : V \rightarrow \{1, 2\}$$

  astfel încât pentru orice muchie $e=xy\in E$ avem

  $$c(x) \neq c(y)$$

  (**bicolorare**)

Graf bipartit

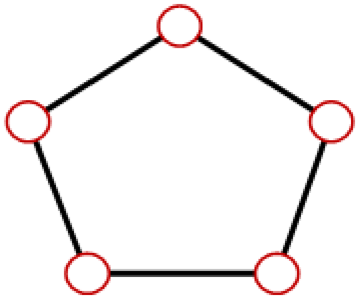


nu este bipartit

Grafuri standard

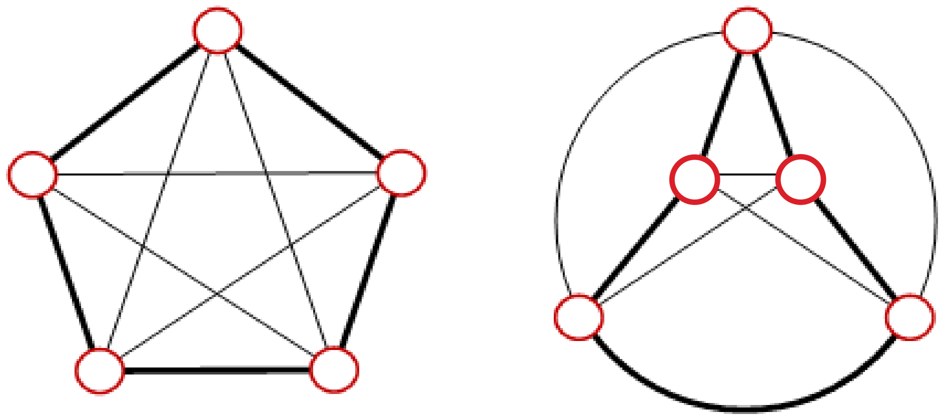
- P_n – lanţ elementar

- C_n – ciclu elementar



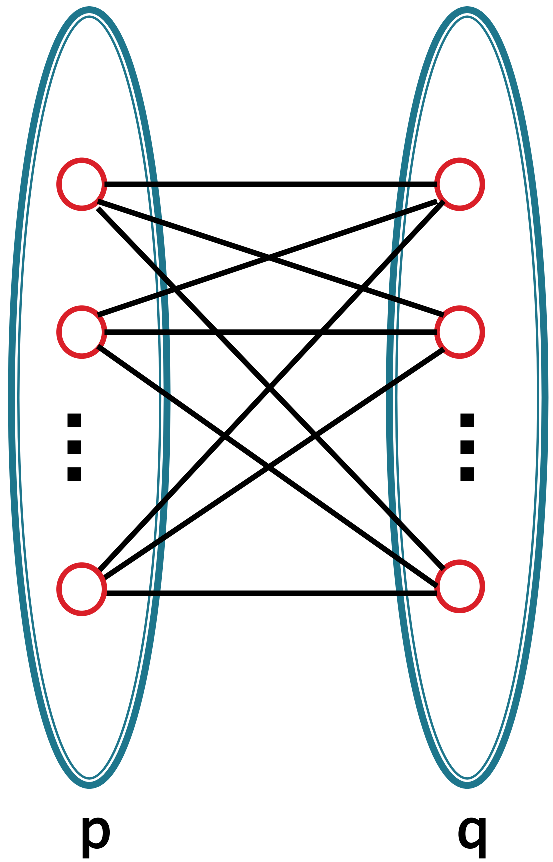
Grafuri standard

- K_n – graf complet (de ordin n)



Grafuri standard

- $K_{p,q}$ – graf bipartit complet



Grafuri standard

- $K_{3,3}$