Grafuri hamiltoniene

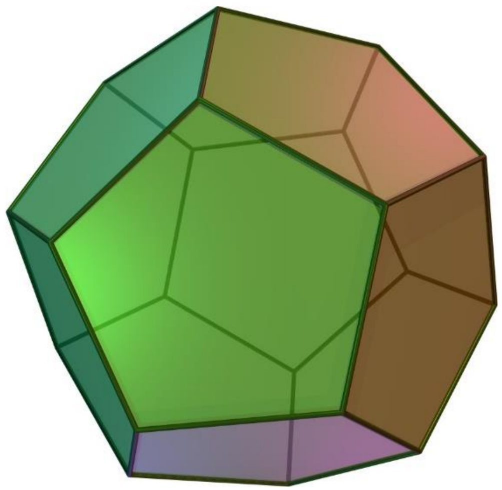
Istoric

– din cursul 1

Jocul icosian

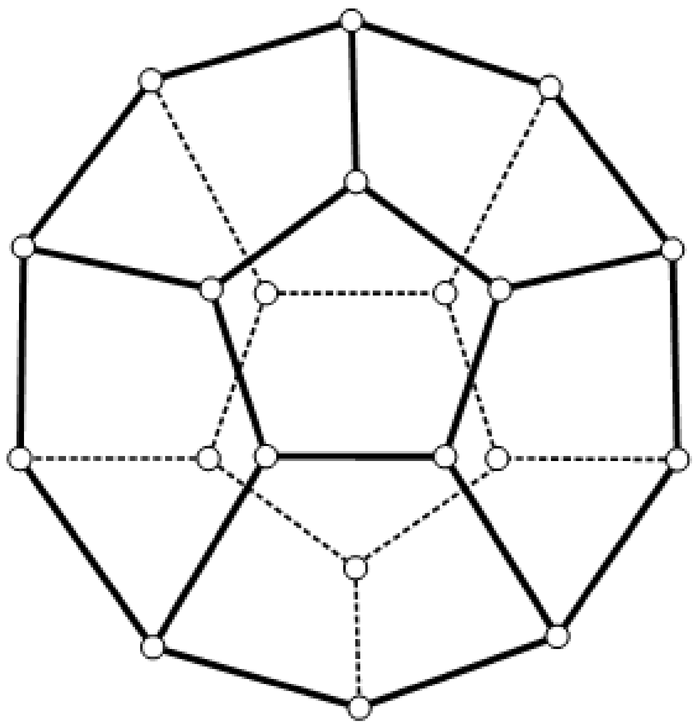
- 1856 – **Hamilton –** *“voiaj în jurul lumii”* :

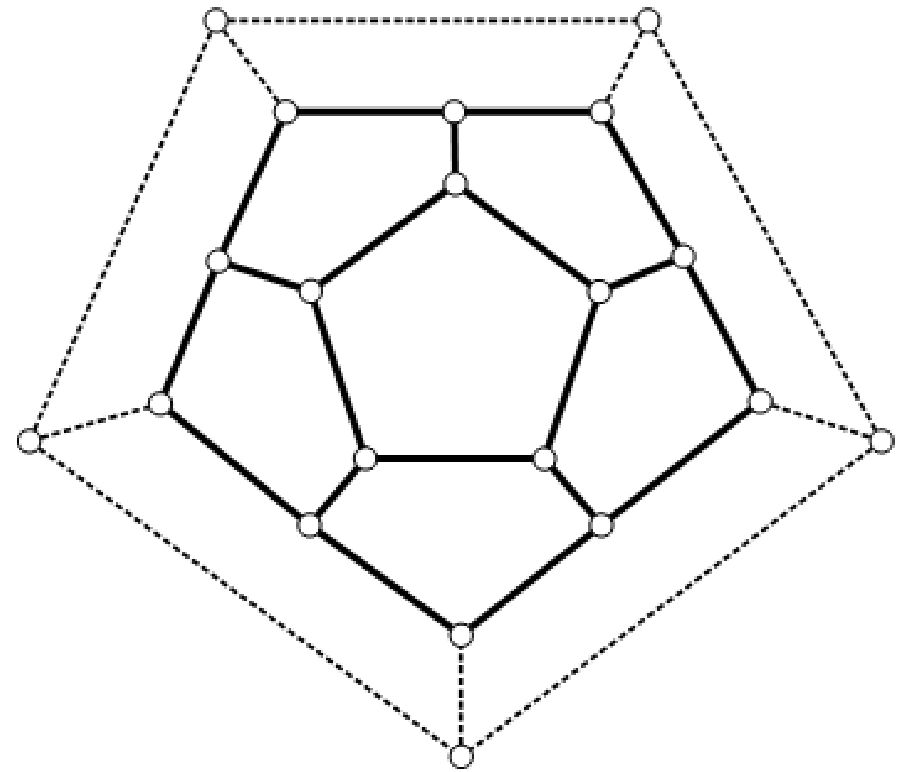
Există un traseu închis pe muchiile dodecaedrului care să treacă prin fiecare vârf o singură dată



http://en.wikipedia.org/wiki/File:Dodecahedron.jpg

Jocul icosian





Grafuri hamiltoniene

Fie G graf neorientat

- **Ciclu hamiltonan** al lui G = ciclu C **elementar** în G cu

  $$V(C) = V(G)$$

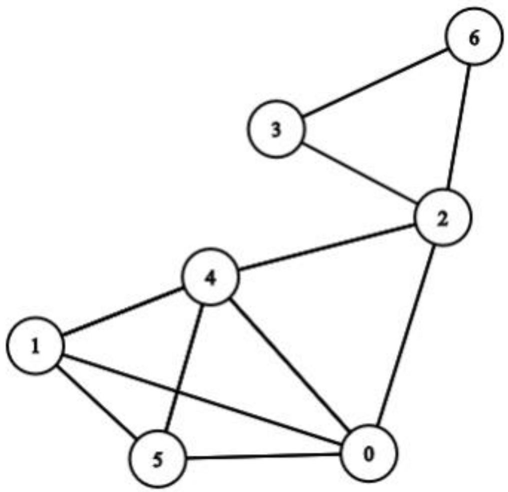
- G hamiltonian = conține un **ciclu** hamiltonian

- **Lanț hamiltonian** al lui G = lanț **elementar** P în G cu

  $$V(P) = V(G)$$

Grafuri hamiltoniene

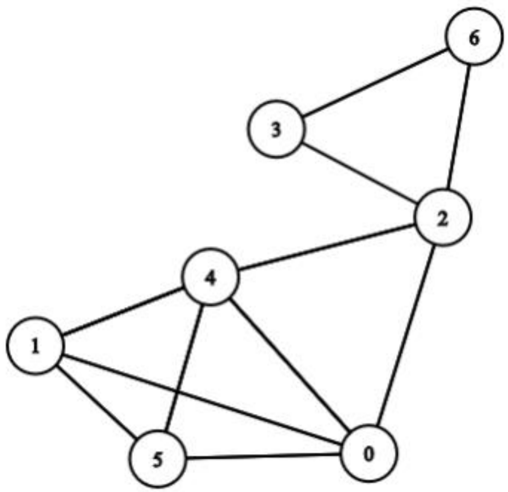
Condiții necesare **și** suficiente ca un graf să fie hamiltonian (ca în cazul grafurilor euleriene)?



Este hamiltonian?

Grafuri hamiltoniene

Condiții necesare **și** suficiente ca un graf să fie hamiltonian (ca în cazul grafurilor euleriene)?



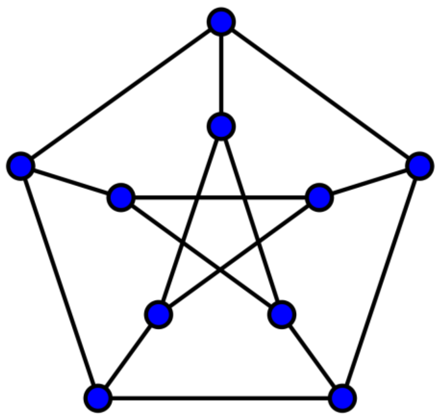
Este hamiltonian?

Nu – are punct critic

Grafuri hamiltoniene

Condiții necesare **și** suficiente ca un graf să fie hamiltonian (ca în cazul grafurilor euleriene)?

Graful lui Petersen



Este hamiltonian?

Nu, deși nu are puncte critice

Grafuri hamiltoniene

Condiții necesare ~~și~~ **sau** suficiente ca un graf să fie hamiltonian

<u>**Condiții necesare**</u>**:**

Fie G un graf hamiltonian. Atunci:

- **G este biconex (nu are noduri critice)**
- **Pentru orice $S \subset V$ nr_comp_conexe $(G-S) \leq |S|$**
  - deoarece nr_comp_conexe $(C-S) \leq |S|$ pentru un ciclu hamiltonian C din G

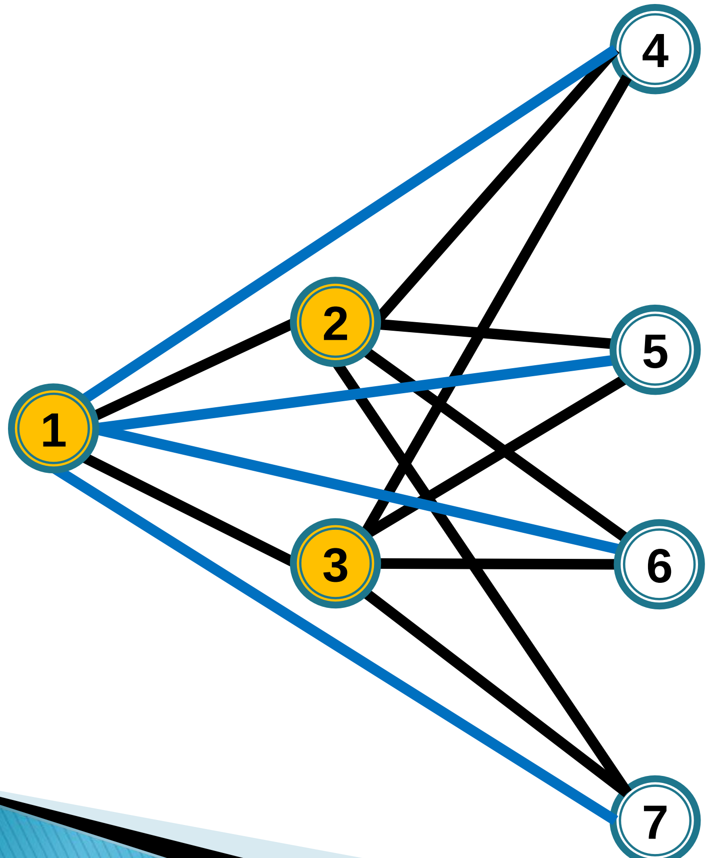
  Exemplu $K_{1,2,4}$ – nu este hamiltonian

Grafuri hamiltoniene

Condiții necesare ~~și~~ **sau** suficiente ca un graf să fie hamiltonian

<u>Condiții necesare</u>:

Exemplu $K_{1,2,4}$ – nu este hamiltonian



$S = \{1,2,3\}$

$K_{1,2,4} - S$ are 4 componente conexe

$|S| < 4$

Grafuri hamiltoniene

Condiții necesare ~~și~~ **sau** suficiente ca un graf să fie hamiltonian

__Condiţii suficiente__:

- **Teorema lui Dirac**
- **Teorema lui Ore**
- **Teorema lui Chvatal și Erdos etc**

Grafuri hamiltoniene

Teorema lui Dirac

Fie G un graf cu $n \geq 3$ vârfuri.

Dacă $d(v) \geq n / 2$ pentru orice vârf v, atunci G este hamiltonian.

Grafuri hamiltoniene

Teorema lui Dirac

Fie G un graf cu $n \geq 3$ vârfuri.

Dacă $d(v) \geq n / 2$ pentru orice vârf v, atunci G este hamiltonian.

Demonstrație (schiță):

G este conex (de ce?)

Arătăm că putem construi un ciclu hamiltonian C în G.

1. Fie P=[x]

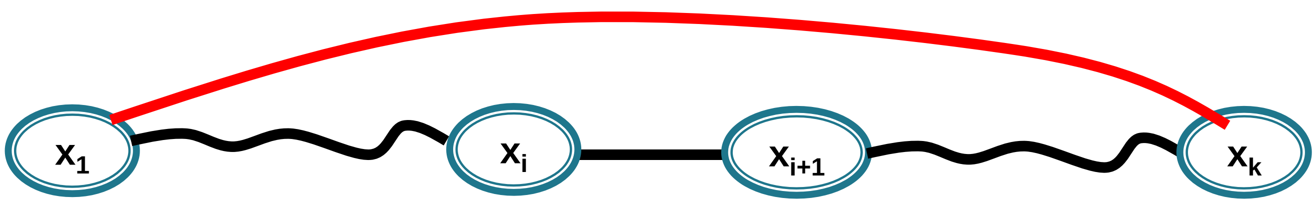
2. Extindem P la un lanț elementar maximal, adăugând câte o muchie la una dintre extremități până când toți vecinii extremităților sunt în lanț:

$$P = [x_1,\ldots,x_k]$$

Grafuri hamiltoniene

3. Dacă $k = n$

- Dacă $x_1x_k \in E(G)$ atunci $P+ x_1x_k$ este ciclu hamiltonian.

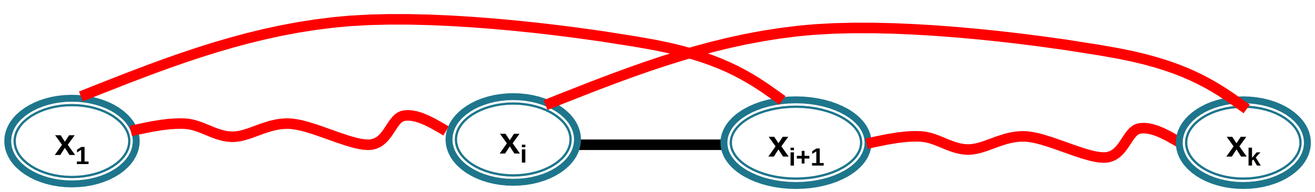


Grafuri hamiltoniene

3. Dacă $k = n$

- Dacă $x_1x_k \in E(G)$ atunci $P+ x_1x_k$ este ciclu hamiltonian.
- Altfel: deoarece P nu se mai poate extinde, toți vecinii lui x_1 și ai lui x_k sunt în P, deci ambele vârfuri au cel puțin $n/2$ vecini în $V(P)$.
- **Din principiul cutiei (Dirichlet)** există există un i astfel încât $x_0x_{i+1} \in E$ și $x_ix_k \in E$, deoarece
  - Există cel puțin $n/2$ noduri i, astfel încât $x_ix_k \in E$
  - Există cel puțin $n/2$ noduri i, astfel încât $x_0x_{i+1} \in E$

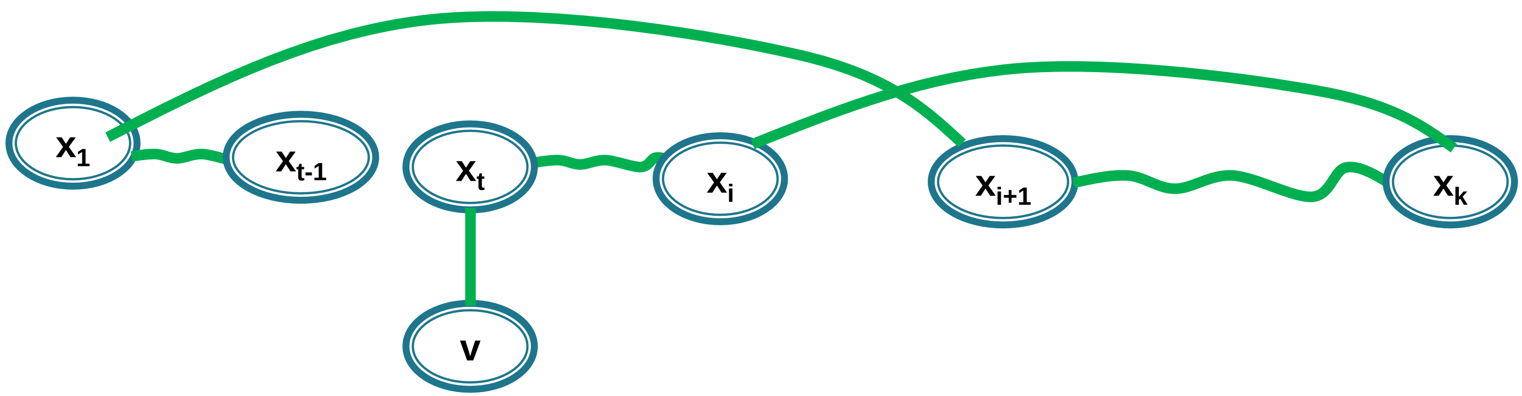
Atunci putem construi ciclul $C = [x_1 - P - x_i, x_k - P - x_{i+1}, x_1]$ indicat în figură cu roșu și C este hamiltonian



Grafuri hamiltoniene

4. Altfel ($k<n$) putem obține un lanț elementar mai lung astfel:

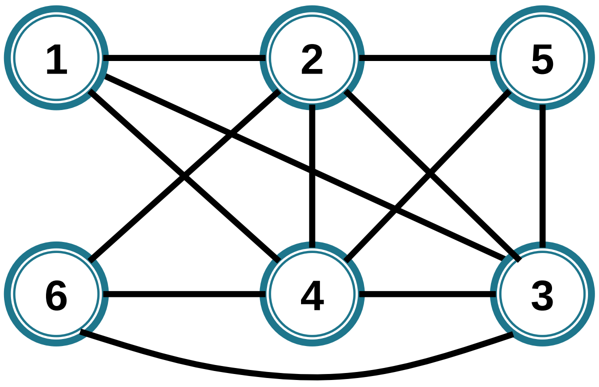
- Considerăm un vârf v care nu este în P, dar adiacent cu un vârf x_t din P
- Similar cu 3, folosind tot principiul lui Dirichlet, obținem un lanț elementar mai lung decât P, indicat cu verde $[v, x_t - P - x_i, x_k - P - x_{i+1}, x_1 - P - x_{t-1}]$:

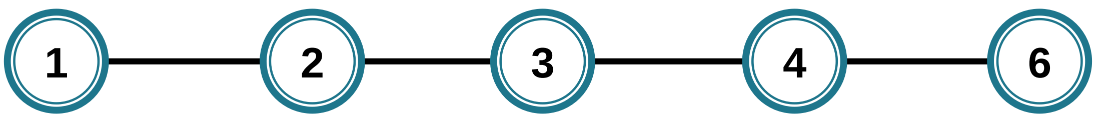


și reluăm raționamentul/construcția de la 2 pentru noul lanț P (până $k=n$)

Grafuri hamiltoniene

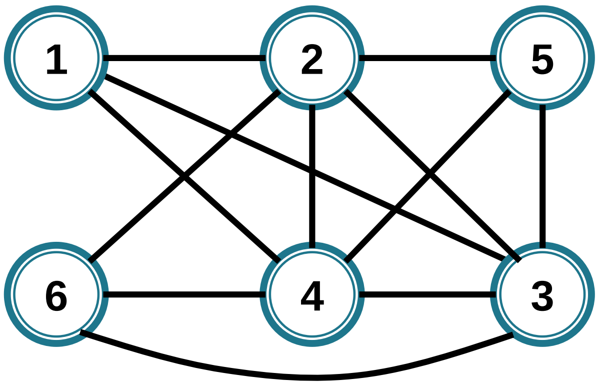
- Exemplu:

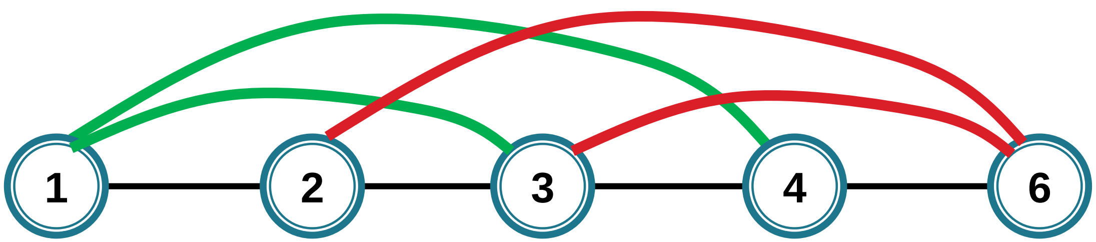




Grafuri hamiltoniene

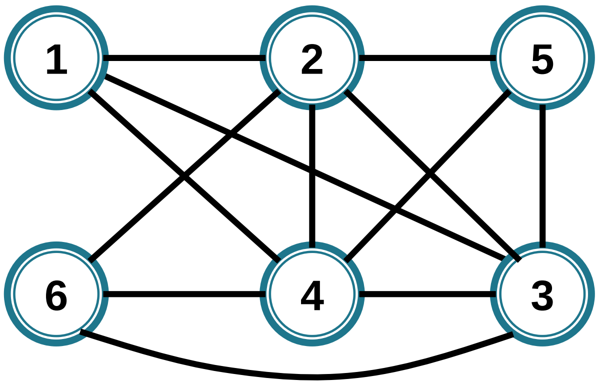
- Exemplu:

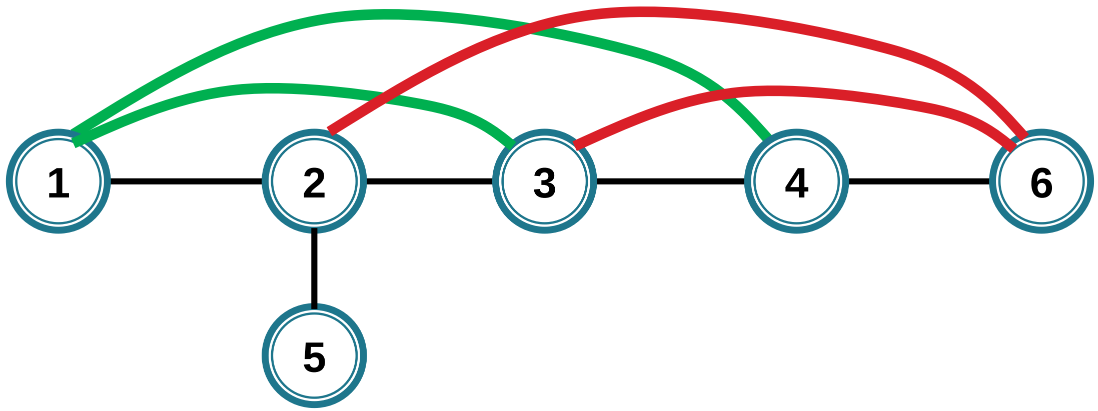




Grafuri hamiltoniene

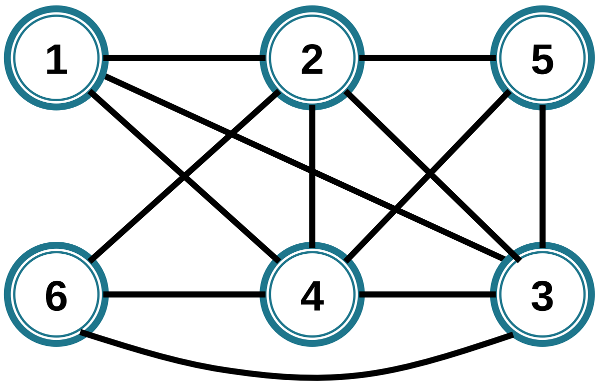
- Exemplu:

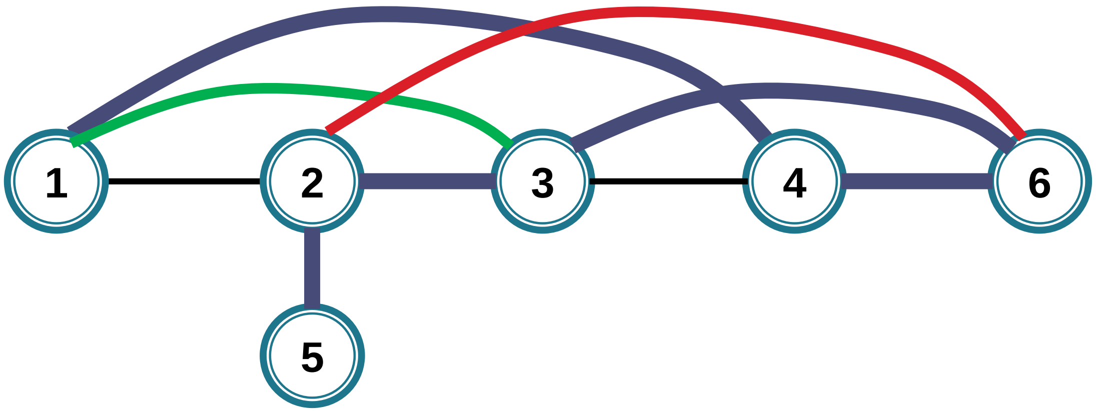




Grafuri hamiltoniene

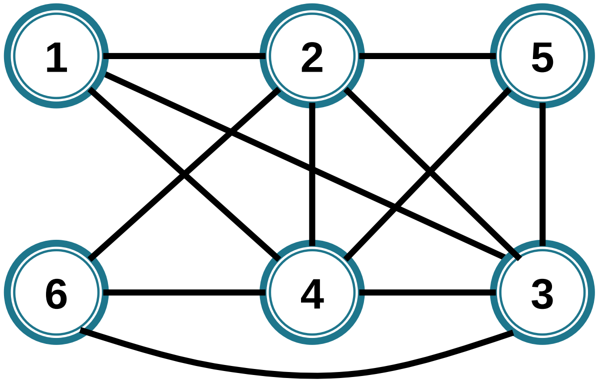
- Exemplu:

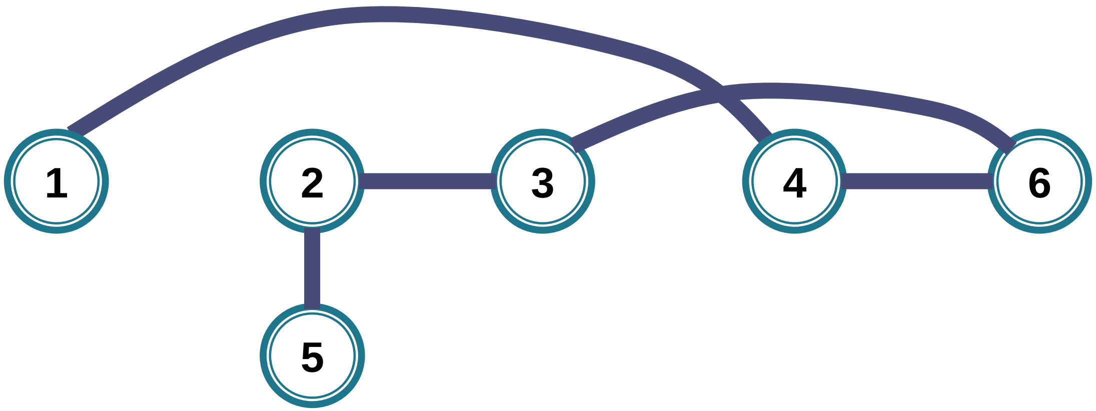




Grafuri hamiltoniene

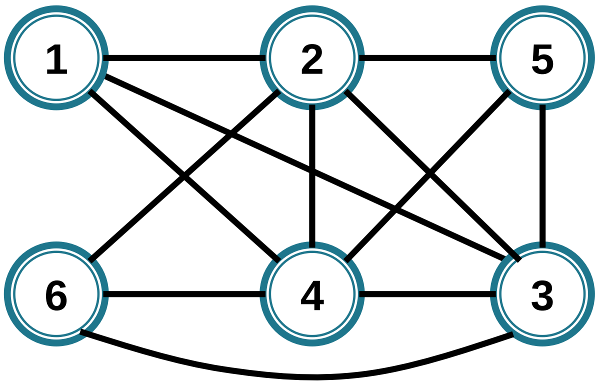
- Exemplu:

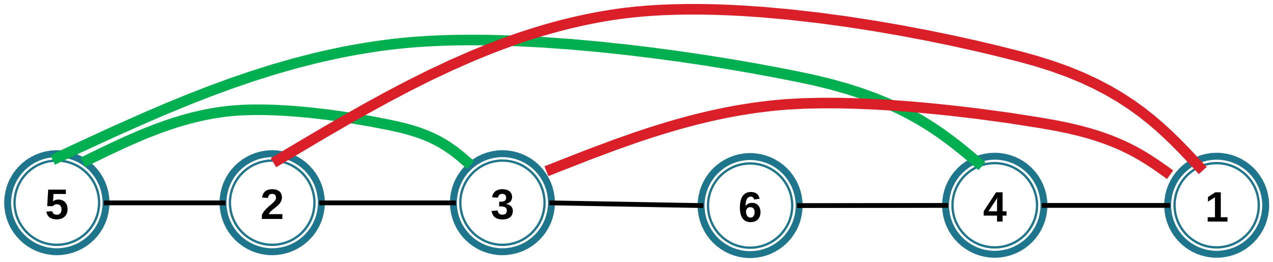




Grafuri hamiltoniene

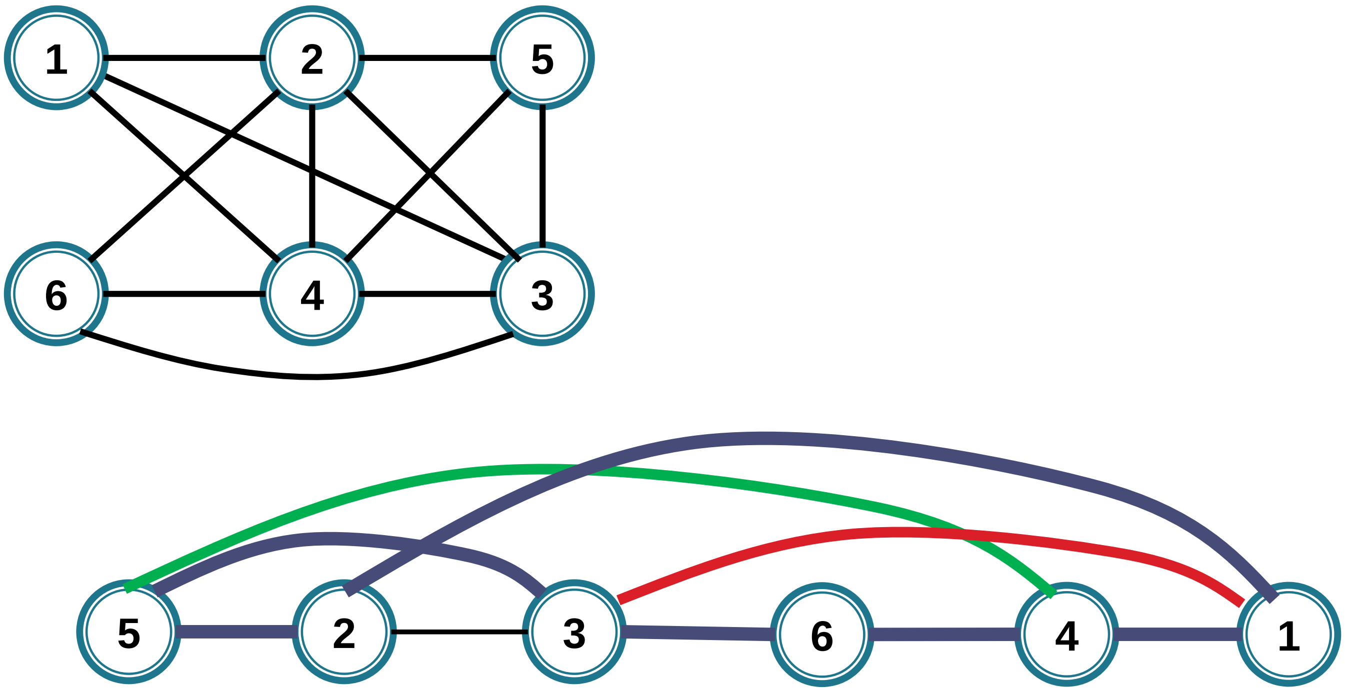
- Exemplu:





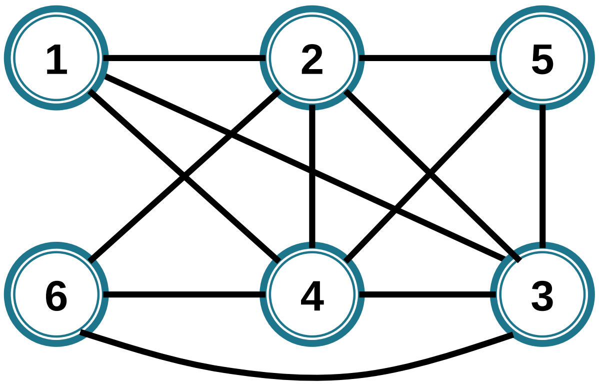
Grafuri hamiltoniene

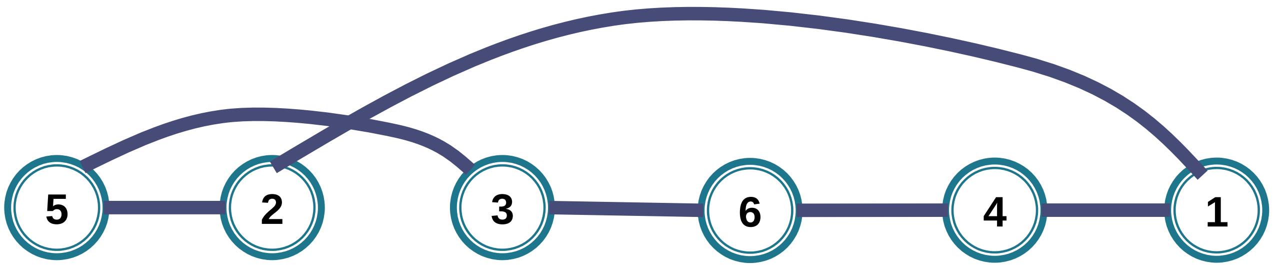
- Exemplu:



Grafuri hamiltoniene

- Exemplu:





Grafuri hamiltoniene

Teorema lui Ore

Fie G un graf cu $n \geq 3$ vârfuri.

Dacă $d(x) + d(y) \geq n$ pentru orice două vârfuri neadiacente, atunci G este hamiltonian.

Demonstrație - similar

Probleme de hamiltoneitate

aspecte algoritmice

Probleme de hamiltoneitate

Probleme de decizie (raspuns DA/ NU):

- dat un graf neorientat G, **există un ciclu hamiltonian** în G?
- dat un graf neorientat G, **există un lanț hamiltonian** în G?

TSP (Travelling Salesman Problem) – Problema comis-voiajorului

Dat un graf complet (neorientat) ponderat, să se determine un ciclu hamiltonian de cost minim (fără a restrânge generalitatea, ponderile pot fi și infinit)

- TSP ca problemă de decizie: Dat un graf G complet (neorientat) ponderat și un număr L, există un ciclu hamiltonian în G de cost cel mult L?

NP-complete => nu se cunoaște un algoritm polinomial de rezolvare

Ciclu hamiltonian

Problemă – dat un graf neorientat G, **există un ciclu hamiltonian** în G?

Soluții posibile:

- Generăm toate permutările și verificăm pentru fiecare dacă este soluție validă – **O(n!*n)**

Algoritmi exponențiali mai eficienți?

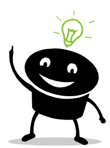
Ciclu hamiltonian

Problemă – dat un graf neorientat G, **există un ciclu hamiltonian** în G?

Soluții posibile:

- Generăm toate permutările și verificăm pentru fiecare dacă este soluție validă – **O(n!*n)**

- **Algoritmi exponențiali mai eficienți?**

 **Programare dinamică**

Ciclu hamiltonian- PD (Alg. Bellman, Held, Karp)

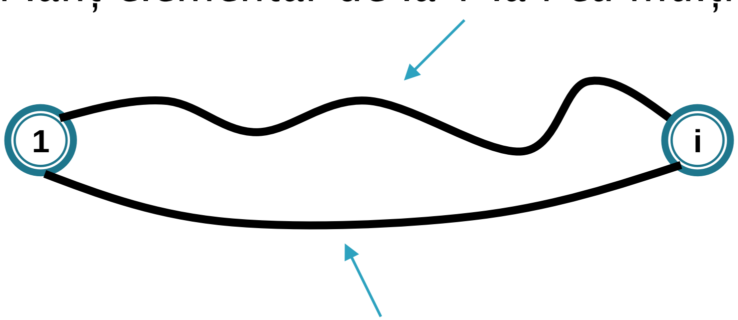
Putem presupune că primul vârf din ciclu este 1

Ciclu hamiltonian– PD (Alg. Bellman, Held, Karp)

Putem presupune că primul vârf din ciclu este 1

Un ciclul hamiltonian este format din:

Un lanț elementar de la 1 la i cu mulțimea vârfurilor V

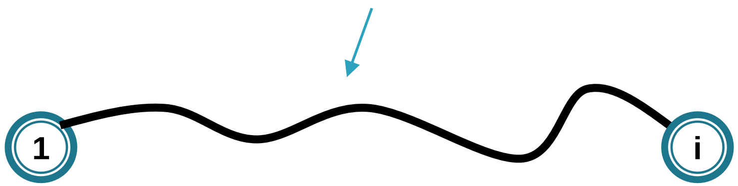


plus muchia (1, i)

Ciclu hamiltonian– PD (Alg. Bellman, Held, Karp)

Cum putem afla dacă există un astfel de i (pentru care avem lanț elementar de la 1 la i cu mulțimea vârfurilor V)?

Un lanț elementar de la 1 la i cu mulțimea vârfurilor V



Ciclu hamiltonian– PD (Alg. Bellman, Held, Karp)

Lanț elementar de la 1 la i cu mulțimea vârfurilor V =

Lanț elementar de la 1 la j cu mulțimea vârfurilor V – {i} plus muchia (j,i)

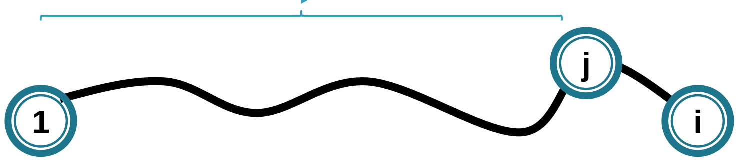
Un lanț elementar de la 1 la j cu mulțimea vârfurilor V – {i}

Ciclu hamiltonian– PD (Alg. Bellman, Held, Karp)

Lanţ elementar de la 1 la i cu mulţimea vârfurilor V =

Lanţ elementar de la 1 la j cu mulţimea vârfurilor V – {i} plus muchia (j,i)

Un lanț elementar de la 1 la j cu mulțimea vârfurilor V – {i}



Subprobleme: Există un lanţ elementar de la 1 la i cu mulţimea vârfurilor S ?

Ciclu hamiltonian– PD (Alg. Bellman, Held, Karp)

Subprobleme: Există un lanț elementar de la `1` la `i` cu mulțimea vârfurilor S ?

`dp[i][S] = True` ⇔ există un lanț elementar de la 1 la i cu mulțimea vârfurilor S

Ştim:

Ciclu hamiltonian– PD (Alg. Bellman, Held, Karp)

Subprobleme: Există un lanț elementar de la `1` la `i` cu mulțimea vârfurilor S ?

`dp[i][S] = True` ⇔ există un lanț elementar de la 1 la i cu mulțimea vârfurilor S

<u>Știm</u>:

- `dp[1][ {1} ] = True`
- `dp[i][ S ] = False, dacă 1, i ∉ S`

Ciclu hamiltonian– PD (Alg. Bellman, Held, Karp)

Subprobleme: Există un lanț elementar de la `1` la `i` cu mulțimea vârfurilor S ?

`dp[i][S] = True` ⇔ există un lanț elementar de la 1 la i cu mulțimea vârfurilor S

<u>Ştim</u>:

- `dp[1][ {1} ] = True`
- `dp[i][ S ] = False, dacă 1, i ∉ S`

<u>Relația de recurență:</u>

`dp[i][ S ] = True` ⇔ i∈S și

∃ j ∈ S <u>adiacent cu i</u> astfel încât `dp[j][ S – {i} ] = True`

Un lanț elementar de la 1 la j cu mulțimea vârfurilor S – {i}

Ciclu hamiltonian– PD (Alg. Bellman, Held, Karp)

Subprobleme: Există un lanț elementar de la `1` la `i` cu mulțimea vârfurilor S ?

`dp[i][S] = True` ⇔ există un lanț elementar de la 1 la i cu mulțimea vârfurilor S

<u>Ştim</u>:

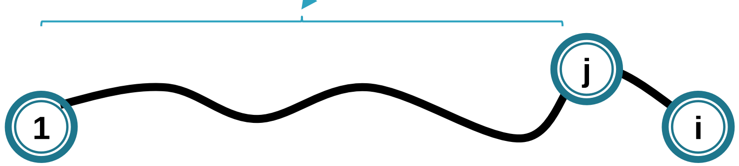
- `dp[1][ {1} ] = True`
- `dp[i][ S ] = False, dacă 1, i ∉ S`

<u>Relația de recurență:</u>

`dp[i][ S ] = True` ⇔ $i \in S$ și

$\exists\, j \in S$ <u>adiacent cu i</u> astfel încât `dp[j][ S – {i} ] = True`

Un lanț elementar de la 1 la j cu mulțimea vârfurilor S – {i}



<u>Soluția problemei</u>: există ciclu hamiltonian ⇔ există i vecin cu 1 astfel încât `dp[i][V]`=True

Ciclu hamiltonian– PD (Alg. Bellman, Held, Karp)

Subprobleme: Există un lanț elementar de la 1 la i cu mulțimea vârfurilor S ?

dp[i][S] = True ⇔ există un lanț elementar de la 1 la i cu mulțimea vârfurilor S

Ştim:

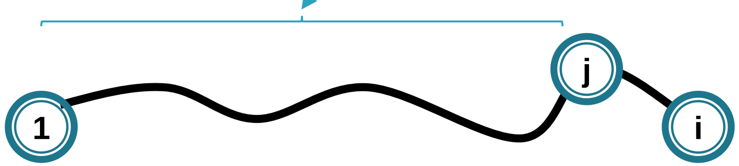
- dp[1][{1}] = True
- dp[i][S] = False, dacă 1, i ∉ S

Relația de recurență:

dp[i][S] = True ⇔ i∈S și

∃ j ∈ S adiacent cu i astfel încât dp[j][S – {i}] = True

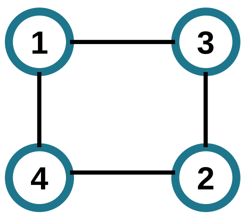
Un lanț elementar de la 1 la j cu mulțimea vârfurilor S – {i}



Ordinea de calcul: când calculăm dp[i][S] să fie deja calculate dp[j][S – {i}]

(de exemplu crescător după |S|)

Ciclu hamiltonian– PD (Alg. Bellman, Held, Karp)

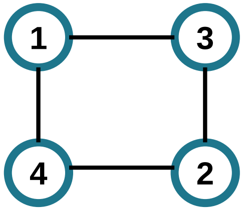


- `dp[i][ S ] = False, dacă 1, i ∉ S`

	{1}	{1,2}	{1,3}	{1,4}	{1,2,3}	{1,2,4}	{1,3,4}	{1,2,3,4}
1	True	False	False	False	False	False	False	False
2	False	False						
3	False							
4	False							

`dp[2][ {1,2} ] = False (2 nu are vecini in {1,2})`

Ciclu hamiltonian– PD (Alg. Bellman, Held, Karp)

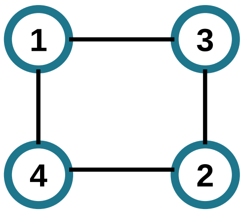


- dp[i][S] = False, dacă 1, i ∉ S

	{1}	{1,2}	{1,3}	{1,4}	{1,2,3}	{1,2,4}	{1,3,4}	{1,2,3,4}
1	True	False	False	False	False	False	False	False
2	False	False						
3	False	False						
4	False	False						

dp[3][{1,2}] = False deoarece 3∉ {1,2}

Ciclu hamiltonian– PD (Alg. Bellman, Held, Karp)

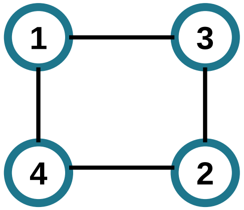


- dp[i][S] = False, dacă 1, i ∉ S

	{1}	{1,2}	{1,3}	{1,4}	{1,2,3}	{1,2,4}	{1,3,4}	{1,2,3,4}
1	True	False	False	False	False	False	False	False
2	False	False	False					
3	False	False	True					
4	False	False	False					

dp[3][{1,3}] = True deoarece (3,1)∈E și d[1][{1}]=True

Ciclu hamiltonian– PD (Alg. Bellman, Held, Karp)

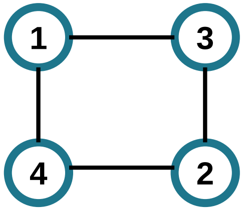


- dp[i][S] = False, dacă 1, i ∉ S

	{1}	{1,2}	{1,3}	{1,4}	{1,2,3}	{1,2,4}	{1,3,4}	{1,2,3,4}
1	True	False	False	False	False	False	False	False
2	False	False	False	False				
3	False	False	True	False				
4	False	False	False	True				

dp[4][{1,4}] = True deoarece (4,1)∈E și d[1][{1}]=True

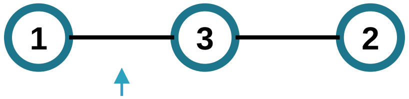
Ciclu hamiltonian– PD (Alg. Bellman, Held, Karp)



- dp[i][S] = False, dacă 1, i ∉ S

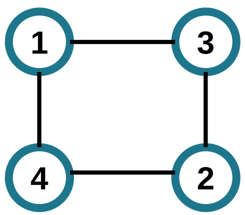
	{1}	{1,2}	{1,3}	{1,4}	{1,2,3}	{1,2,4}	{1,3,4}	{1,2,3,4}
1	True	False	False	False	False	False	False	False
2	False	False	False	False	True			
3	False	False	True	False				
4	False	False	False	True				

dp[2][{1,2,3}] = True deoarece (2,3)∈E și d[3][{1,3}]=True



d[3][{1,3}]=True => d[2][{1,2,3}] = True

Ciclu hamiltonian– PD (Alg. Bellman, Held, Karp)



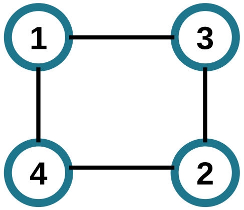
- dp[i][S] = False, dacă 1, i ∉ S

	{1}	{1,2}	{1,3}	{1,4}	{1,2,3}	{1,2,4}	{1,3,4}	{1,2,3,4}
1	True	False	False	False	False	False	False	False
2	False	False	False	False	True			
3	False	False	True	False	False			
4	False	False	False	True				

dp[3][{1,2,3}] = False deoarece, pentru vecinii lui 3 din {1,2,3} avem:

- (3,1)∈E și d[1][{1,2}]=False
- (3,2)∈E și d[2][{1,2}]=False

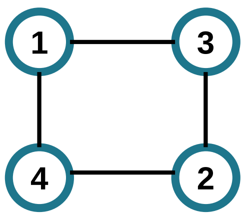
Ciclu hamiltonian– PD (Alg. Bellman, Held, Karp)



- $dp[i][\ S\ ] = False$, dacă $1, i \notin S$

	{1}	{1,2}	{1,3}	{1,4}	{1,2,3}	{1,2,4}	{1,3,4}	{1,2,3,4}
1	True	False	False	False	False	False	False	False
2	False	False	False	False	True			
3	False	False	True	False	False			
4	False	False	False	True	False			

Ciclu hamiltonian– PD (Alg. Bellman, Held, Karp)

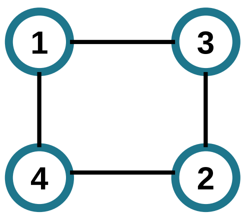


- dp[i][S] = False, dacă 1, i ∉ S

	{1}	{1,2}	{1,3}	{1,4}	{1,2,3}	{1,2,4}	{1,3,4}	{1,2,3,4}
1	True	False	False	False	False	False	False	False
2	False	False	False	False	True	True		
3	False	False	True	False	False			
4	False	False	False	True	False			

dp[2][{1,2,4}] = True deoarece (2,4)∈E și d[4][{1,4}]=True

Ciclu hamiltonian– PD (Alg. Bellman, Held, Karp)



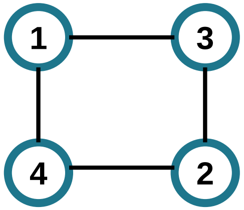
- dp[i][S] = False, dacă 1, i ∉ S

	{1}	{1,2}	{1,3}	{1,4}	{1,2,3}	{1,2,4}	{1,3,4}	{1,2,3,4}
1	True	False	False	False	False	False	False	False
2	False	False	False	False	True	True		
3	False	False	True	False	False	False		
4	False	False	False	True	False	False		

dp[4][{1,2,4}] = False deoarece pentru vecinii lui 4 din {1,2,4} avem:

- (4,2)∈E și d[2][{1,2}]=False
- (4,1)∈E și d[1][{1,2}]=False

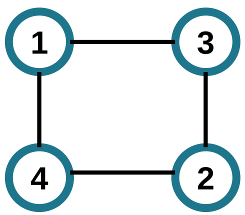
Ciclu hamiltonian– PD (Alg. Bellman, Held, Karp)



- `dp[i][ S ] = False, dacă 1, i ∉ S`

	{1}	{1,2}	{1,3}	{1,4}	{1,2,3}	{1,2,4}	{1,3,4}	{1,2,3,4}
1	True	False	False	False	False	False	False	False
2	False	False	False	False	True	True	False	
3	False	False	True	False	False	False	False	
4	False	False	False	True	False	False	False	

Ciclu hamiltonian– PD (Alg. Bellman, Held, Karp)



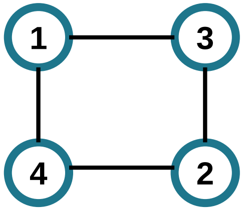
- dp[i][S] = False, dacă 1, i ∉ S

	{1}	{1,2}	{1,3}	{1,4}	{1,2,3}	{1,2,4}	{1,3,4}	{1,2,3,4}
1	True	False	False	False	False	False	False	False
2	False	False	False	False	True	True	False	False
3	False	False	True	False	False	False	False	
4	False	False	False	True	False	False	False	

dp[2][{1,2,3,4}] = False deoarece pentru vecinii lui 2 din {1,2,3,4} avem:

- (2,4)∈E și d[4][{1,3,4}]=False
- (2,3)∈E și d[3][{1,3,4}]=False

Ciclu hamiltonian– PD (Alg. Bellman, Held, Karp)

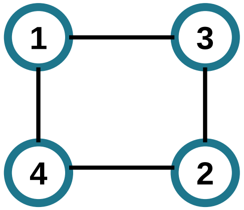


- dp[i][S] = False, dacă 1, i ∉ S

	{1}	{1,2}	{1,3}	{1,4}	{1,2,3}	{1,2,4}	{1,3,4}	{1,2,3,4}
1	True	False	False	False	False	False	False	False
2	False	False	False	False	True	True	False	False
3	False	False	True	False	False	False	False	True
4	False	False	False	True	False	False	False	

dp[3][{1,2,3,4}] = True deoarece (3,2)∈E și d[2][{1,2,4}]=True

Ciclu hamiltonian– PD (Alg. Bellman, Held, Karp)



- dp[i][S] = False, dacă 1, i ∉ S

	{1}	{1,2}	{1,3}	{1,4}	{1,2,3}	{1,2,4}	{1,3,4}	{1,2,3,4}
1	True	False	False	False	False	False	False	False
2	False	False	False	False	True	True	False	False
3	False	False	True	False	False	False	False	True
4	False	False	False	True	False	False	False	

Există lanț hamiltonian de la 1 la 3, cu 3 adiacent cu 1 => ciclu hamiltonian

Ciclu hamiltonian– PD (Alg. Bellman, Held, Karp)

Pseudocod

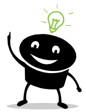
```
inițializează dp cu False
dp[1][ {1} ] = True

pentru S submulțime din V (!ordine după cardinal)
   pentru i din V
       daca i ∈S atunci
            pentru j vecin al lui I
                daca j ∈ S și dp[j][S-{i}] = True
                       dp[i][S] = True
pentru i din V
    daca dp[i][V]=True și (i este adiacent cu 1)
          returneaza True
returneaza False
```

Ciclu hamiltonian- PD (Alg. Bellman, Held, Karp)

Cum generăm/ codificăm submulțimile?

Ciclu hamiltonian– PD (Alg. Bellman, Held, Karp)

Cum generăm/ codificăm submulțimile?



Șiruri binare, vector caracteristic -> numerele 0,…, 2^n–1

- i ∈ submulțimii S codificată de numărul x ⇔ `x & (1<<(i-1)) != 0`
- Dacă S este codificată prin x, atunci S – {i} are codificarea `x ^ (1<<(i-1))`

Ciclu hamiltonian– PD (Alg. Bellman, Held, Karp)

Pseudocod

```
inițializează dp cu False
dp[1][ {1} ] = True

pentru S submulțime din V
  pentru i din V
    daca i ∈S atunci
      pentru j vecin al lui I
        daca j ∈ S și dp[j][S-{i}] = True
            dp[i][S] = True
pentru i din V
  daca dp[i][V]=True și (i adiacent cu 1)
          returneaza True
returneaza False
```

Pseudocod V = {0,…,n−1}

```
inițializează dp cu False
dp[0][1] = True, nr_subm = (1<<n)-1

pentru x = 0, nr_subm
  pentru i =0,n-1
    daca x & (1<<i) atunci
      pentru j vecin al lui i
        daca x & (1<<j) și dp[j][x^{1<<i)] = True
            dp[i][S] = True
pentru i din V
  daca dp[i][nr_subm-1]=True și (i adiacent cu 1)
          returneaza True
returneaza False
```