① 21.12.2023

SEMINAR 11 _ 133

Ne reamintim:

Dacă G e grup, iar $H \trianglelefteq G$, atunci

$((G/H)_0 = (G/H)_d)$

$\frac{G}{H}$ este grupul care are:

- Mulțimea subiacentă $(G/H)_0$

- Operația $(xH)\cdot(yH) = xyH$

(notată fecvent și $\hat{x}\cdot\hat{y} = \widehat{xy}$).

Obs: În G/H avem:

$\hat{x} = \hat{y} \iff x^{-1}y \in H$

și în particular,

$\hat{x} = \hat{e} \iff x \in H$

Fie $(\mathbb{R},+)$ mai mult și fie $I \trianglelefteq \mathbb{R}$.

Cum $(\mathbb{R},+)$ este grup abelian, I e subgrup normal al său, deci putem construi grupul factor $\left(\frac{\mathbb{R}}{I},+\right)$.

$I \trianglelefteq \mathbb{R}$ și, de aceea, dacă considerăm $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$ și dacă $\hat{x} = \hat{x'}$ și $\hat{y} = \hat{y'}$ în $\frac{\mathbb{R}}{I}$, atunci $x'-x \in I$ și $y'-y \in I$, ②

și atunci

$I \trianglelefteq^{d} R \supseteq I$

$$x'y'-xy = x'y'-xy'+xy'-xy = (x'-x)y' + x(y'-y)$$

$$I \trianglelefteq^{s} R$$

deci $\widehat{x'y'} = \widehat{xy}$.

Ca urmare, operația $\frac{R}{I} \times \frac{R}{I} \longrightarrow \frac{R}{I}$,

$(\hat{x}, \hat{y}) \longmapsto \widehat{xy}$ e corect definită.

E imediat faptul că această operație e asociativă și distributivă față de adunare, deci

$\left(\frac{R}{I}, +, \cdot\right)$ este inel.

Obs: Dacă R e comutativ, $\frac{R}{I}$ e comutativ

Dacă R e unitar și $\frac{R}{I}$ e unitar

(unitatea sa fiind $\hat{1}$)

$\boxed{\text{Morala}}$

Dat fiind un inel $(R, +, \cdot)$ și un ideal bilateral I al său,

INELUL FACTOR $\frac{R}{I}$

este inelul care are:

Trebuie să punem! $\cdot ka$, $k \in \mathbb{Z}$

$\cdot$ $a\alpha$, $\alpha \in R$.

$\underbrace{a+a+\dots+a}_{k} = a(\underbrace{1+1+\dots 1}_{k})$

Nu știut unde să (pt $k>0$) $\in R$.

pun și altceva.

De aceea, verific!

$\cdot$ $a\alpha - a\beta = a(\alpha - \beta) \in \{a\cdot\mu : \mu \in R\}$ $\forall \alpha, \beta \in R$

$\circ$ $(a\alpha)\sigma = a(\alpha\sigma) \in \{a\cdot\mu : \mu \in R\}$. $\forall \alpha, a \in R$, ok.

Concluzie!

$(\{a\})^d = \{a\cdot\alpha : \alpha \in R\} \stackrel{not}{=} aR$

Analog se obține!

$(a)^s = \{\alpha a : \alpha \in R\} \stackrel{not}{=} Ra$

$(a) = \{\alpha a \beta : \alpha, \beta \in R\} \stackrel{not}{=} RaR$

Dar dacă avem mai mulți generatori?

$(\{a,b\})^d = aR + bR = \{a\alpha + b\beta : \alpha, \beta \in R\}$

$(a,b,c)^d = \{a\alpha + b\beta + c\gamma : \alpha, \beta, \gamma \in R\}$.

Tn general:

$(M)^d = \{\sum_{k=1}^{n} x_k \alpha_k : n \in \mathbb{N}^*, x_k \in M, \alpha_k \in R\}$

$(M)^s = \{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k : \text{— " — " — " —}$

Descrieți inelul factor $\frac{\mathbb{R}[X]}{(X^2+1)} \overset{\text{not}}{=} A$ ④

Sol.:

~~cf teoriei~~,

$A = \{\hat{P} : P \in \mathbb{R}[X]\} \xrightarrow{(1)}$ Neajuns:

$\hat{X}^4 = \hat{X}^4 + \hat{X}^2 - \hat{X}^2 =$

$= \hat{X}^2\widehat{(X^2+1)} - \hat{X}^2 = -\hat{X}^2$

Analog $\hat{X}^6 = \hat{X}^4$

deci AVEM MULTE REDUNDANTE!

Ne-am dori o reprezentare a elementelor lui A care să fie „ireduundantă"

În acest scop, observăm:

1) Dacă $P \in \mathbb{R}[X]$, cf TiR, $\exists\, Q, R \in \mathbb{R}[X]$

$P = (X^2+1)\cdot Q + R \wedge \text{grad } R < \text{grad}(X^2+1) = 2$,

deci

$\exists\, a, b \in \mathbb{R} \quad \exists\, Q \in \mathbb{R}[X]$

$P = (X^2+1)\, Q + aX + b$,

de unde

$\exists\, a, b \in \mathbb{R} \quad \hat{P} = \widehat{aX+b} = \hat{a}\hat{X} + \hat{b}$.

Dacă considerăm $\varphi : \mathbb{R} \to A$, $\varphi(\alpha) = \hat{\alpha}$,

atunci:

$\varphi(\alpha+\beta) = \widehat{\alpha+\beta} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$

$\varphi(\alpha\beta) = \widehat{\alpha\beta} = \hat{\alpha}\hat{\beta} = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)$

$\varphi(1) = \hat{1}$.

Deci, φ e morfism (unitar!) de inele.

În plus, pt $\alpha \in \mathbb{R}$,

$\alpha \in \ker \varphi \Leftrightarrow \varphi(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \hat{\alpha} = \hat{0} \Leftrightarrow$

$\alpha \in (X^2+1) \Leftrightarrow (2)$

Obs (cursuri) Dacă $(R, +, \cdot)$ e inel, iar $a \in R$,

$(a)^s = \{\alpha a : \alpha \in R\} = Ra$

$(a)^d = \{a\alpha : \alpha \in R\} = aR$

$(a) = \{\alpha a \beta : \alpha, \beta \in R\}$.

Obs ~~Dacă~~ R e comutativ, cele trei tipuri de ideale coincid, ~~și~~ ~~de~~ obicei folosim:

$(a) = \{\alpha a : \alpha \in R\}$.

Deci, $(2) \Leftrightarrow \exists\, S \in \mathbb{R}[X]$ $\alpha = S \cdot (X^2+1) \Leftrightarrow$

$\alpha = 0$.

Pp $S \neq 0$, grad MS $\leq 0 < 2 \leq$ grad MD, $\not\downarrow$

Ca urmare, φ e injectivă.

În consecință putem identifica $\mathbb{R}$ cu $\operatorname{Im}\varphi$, ceea ce ne va sugera să notăm elementele lui A de forma $\hat{e}$ cu „un simplu" e.

Cu aceste lucruri în minte,

$(1) = \{a\hat{X} + b : a, b \in \mathbb{R}\} = (3)$

Notând ~~și~~ $\hat{X}$ cu z,

$(3) = \{az + b : a, b \in \mathbb{R},\ z \equiv \hat{X}\}. = (4)$

Să observăm acum că, pt $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, (6)

$$az+b = cz+d \Leftrightarrow \hat{a}\hat{X}+\hat{b} = \hat{c}\hat{X}+\hat{d} \Leftrightarrow$$

$$\widehat{aX+b} = \widehat{cX+d} \Longleftrightarrow (c-a)X+(d-b) \in (X^2+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}[X] \quad (c-a)X+(d-b) = (X^2+1)Q \quad (5)$$

Dar dacă $Q \neq 0$, $1 \geq \text{grad MS} = \text{grad MD} \geq 2$, abs.,

deci $(5) \Rightarrow (c=a \wedge d=b)$

Deci, scrierea (4) e ~~redundantă~~

$$(az+b)+(cz+d) = (\hat{a}\hat{X}+\hat{b})+(\hat{c}\hat{X}+\hat{d}) =$$

$$= \widehat{aX+b} + \widehat{cX+d} =$$

$$= \widehat{(a+c)X+b+d} =$$

$$= \widehat{(a+c)}\hat{X} + \widehat{b+d} = (a+c)z + (b+d)$$

$$(az+b)(cz+d) = \widehat{aX+b} \cdot \widehat{cX+d} =$$

$$= \widehat{(aX+b)(cX+d)} =$$

$$= \widehat{acX^2+(bc+ad)X+bd} =$$

$$= \widehat{ac(X^2+1)-ac+(ad+bc)X+bd} =$$

$$= \widehat{ac(X^2+1)} + \widehat{(ad+bc)X+bd-ac}$$

$$= \widehat{(ad+bc)X+bd-ac} =$$

$$= (ad+bc)z + (bd-ac)$$

ca urmare

$$A = \{az+b : a,b \in \mathbb{R},\ z = \hat{X}\}$$

cu operațiile

$$(az+b)+(cz+d)=(a+c)z+(b+d)$$

și

$$(az+b)(cz+d)=(ad+bc)z+(bd-ac)$$

Aşa: $\boxed{z^2}=\hat{X}^2=\widehat{X^2}=\widehat{X^2+1-1}=\widehat{X^2+1}-\hat{1}=-\hat{1}$

Ca urmare, inelul A este, de fapt, corpul numerelor complexe.

$\boxed{\text{TD}}$ Descrieți inelul factor $\dfrac{\mathbb{Q}[X]}{(X^3-2)}$