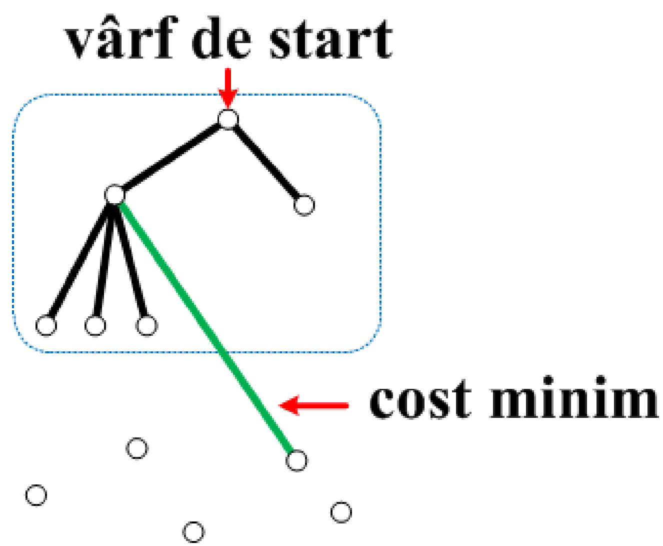
Arbori parțiali de cost minim

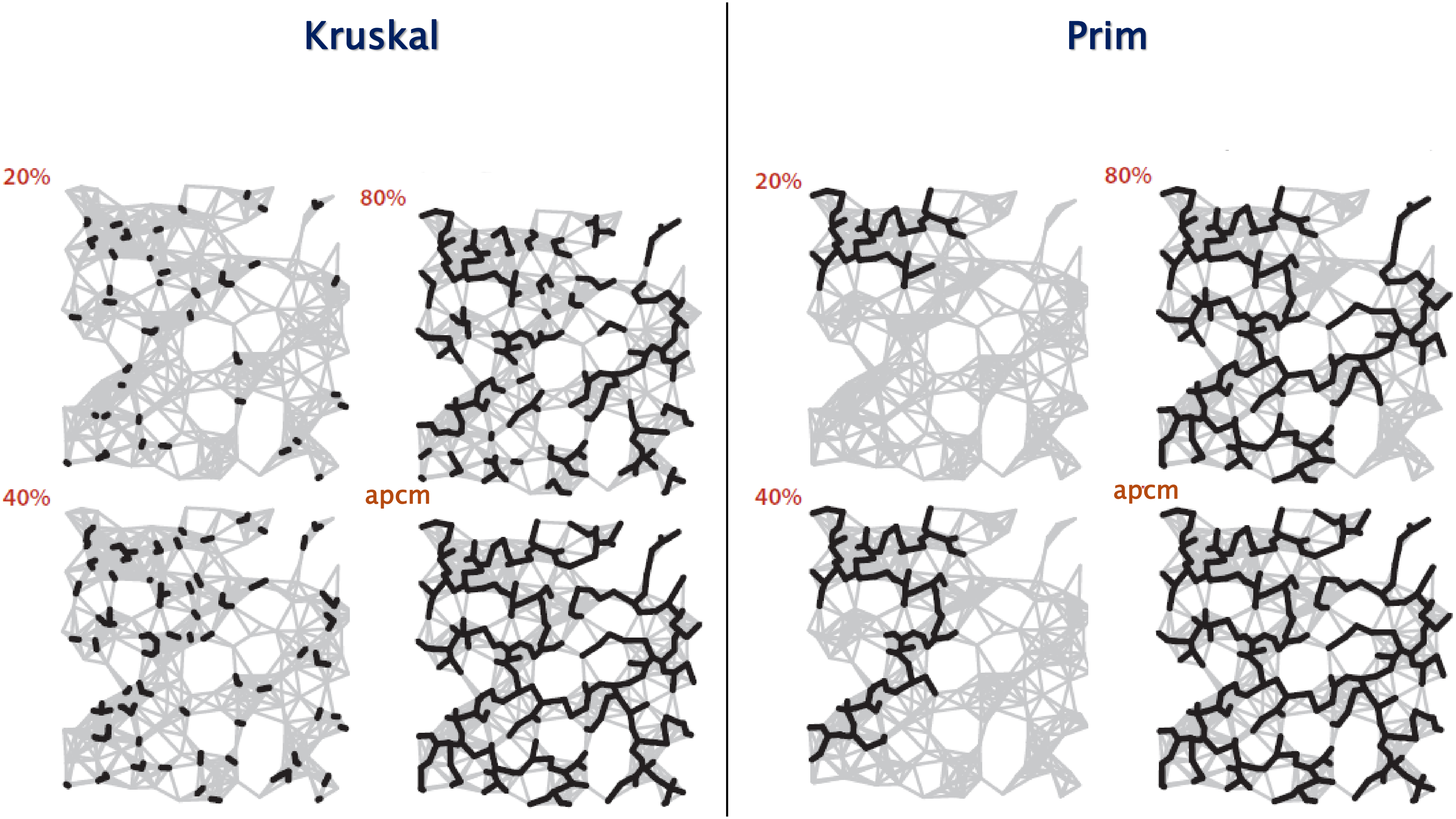
Algoritmul lui Prim

Algoritmul lui Prim

- Se porneşte de la un vârf (care formează arborele iniţial)
- La un pas este selectată o muchie de cost minim de la un vârf deja adăugat la arbore la unul neadăugat



Arbori parțiali de cost minim



Imagine din
R. Sedgewick, K. Wayne – **Algorithms, 4th edition, Pearson** Education, 2011

O primă formă a algoritmului

Kruskal

- Inițial T= (V; ∅)
- pentru i = 1, n-1
  - alege o muchie uv cu **cost minim** a.î. u,v sunt în **componente conexe diferite (T+uv aciclic)**
  - E(T) = E(T) ∪ uv

Prim

- **s- vârful de start**
- **Inițial T= ({s}; ∅)**

O primă formă a algoritmului

Kruskal

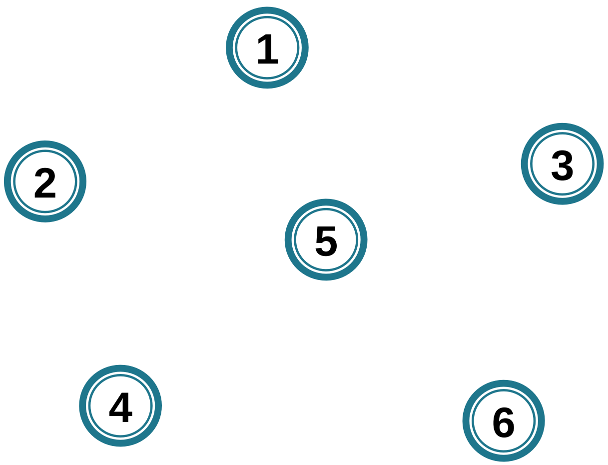
- **Inițial T= (V; ∅)**
- **pentru i = 1, n-1**
  - alege o muchie uv cu **cost minim** a.î. u,v sunt în **componente conexe diferite (T+uv aciclic)**
  - $E(T) = E(T) \cup uv$

Prim

- **s- vârful de start**
- **Inițial T= ({s}; ∅)**
- **pentru i = 1, n-1**
  - alege o muchie uv cu **cost minim** a.î. $u \in V(T)$ și $v \notin V(T)$
  - $V(T) = V(T) \cup \{v\}$
  - $E(T) = E(T) \cup uv$

Kruskal

- **Inițial**: cele n vârfuri sunt izolate, fiecare formând o componentă conexă



- **Se încearcă unirea acestor componente prin muchii de cost minim**

Prim

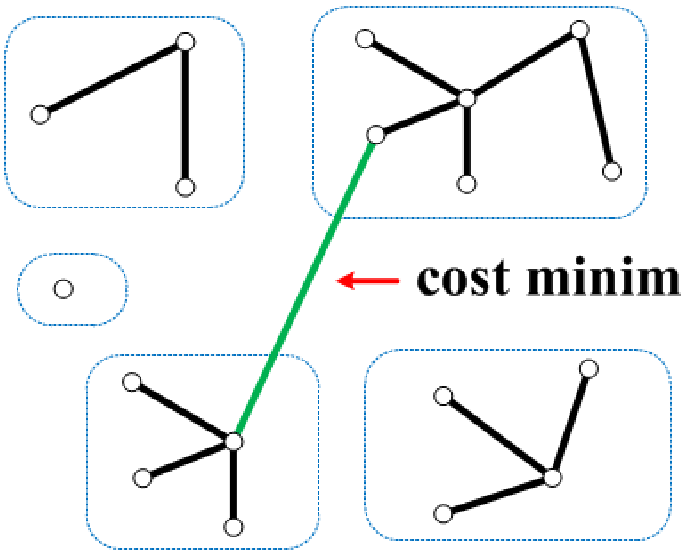
- **Inițial**: se pornește de la un vârf de start

- **Se adăugă pe rând câte un vârf la arborele deja construit, folosind muchii de cost minim**

Kruskal

- **La un pas**:

Muchiile selectate formează o **pădure**

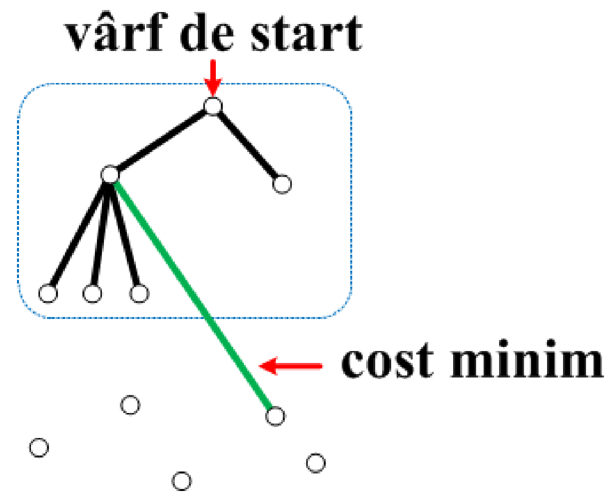


Este selectată o muchie de cost minim care unește doi arbori din pădurea curentă (două componente conexe)

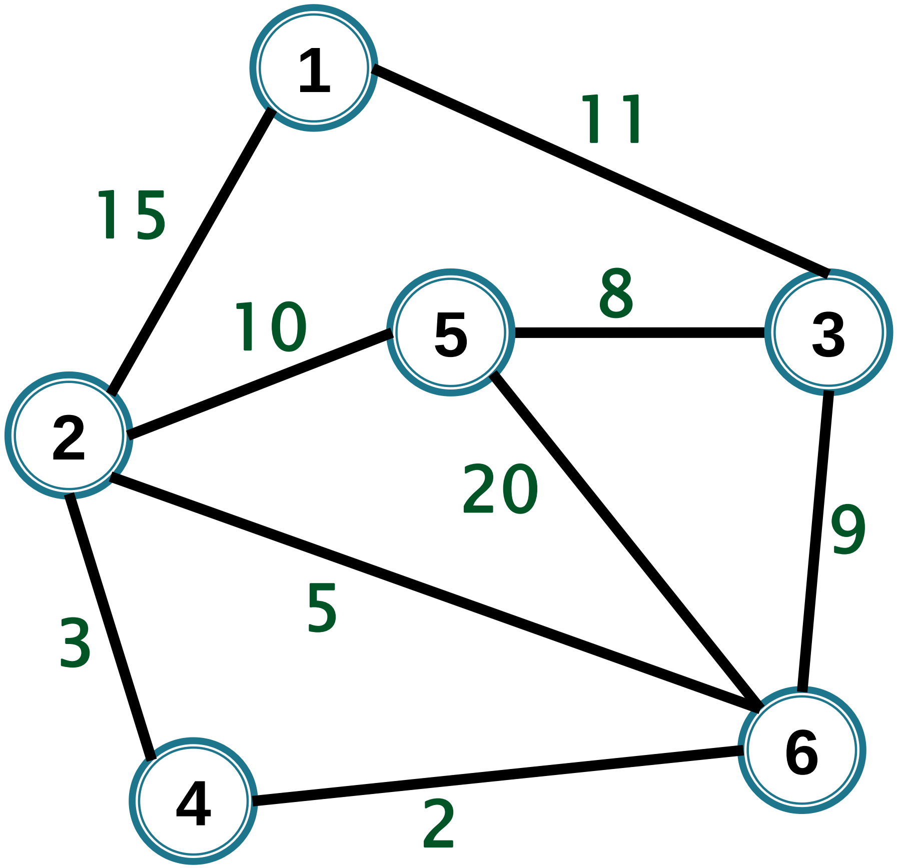
Prim

- **La un pas**:

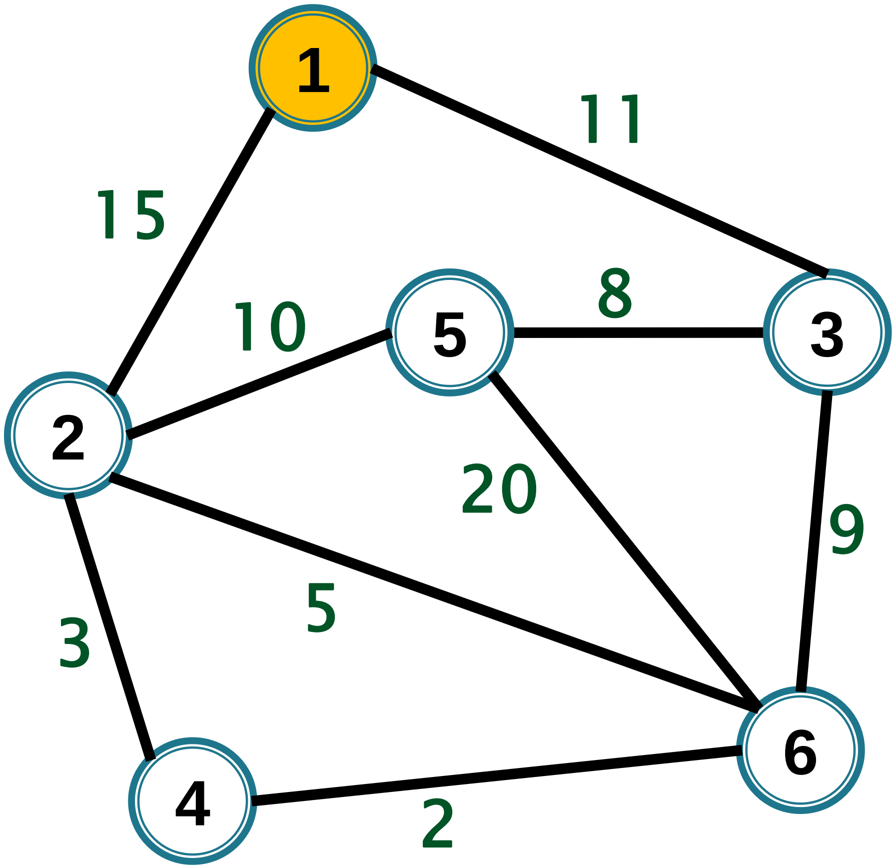
Muchiile selectate formează un **arbore**



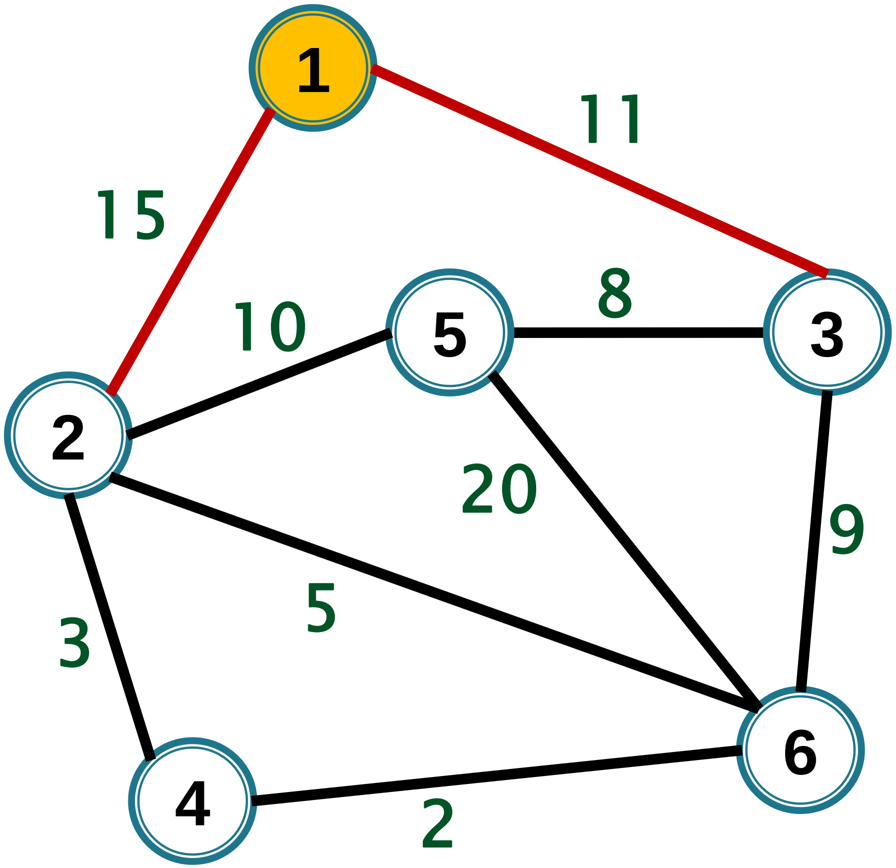
Este selectată o muchie de cost minim care unește un vârf din arbore cu unul care nu este în arbore(neselectat)



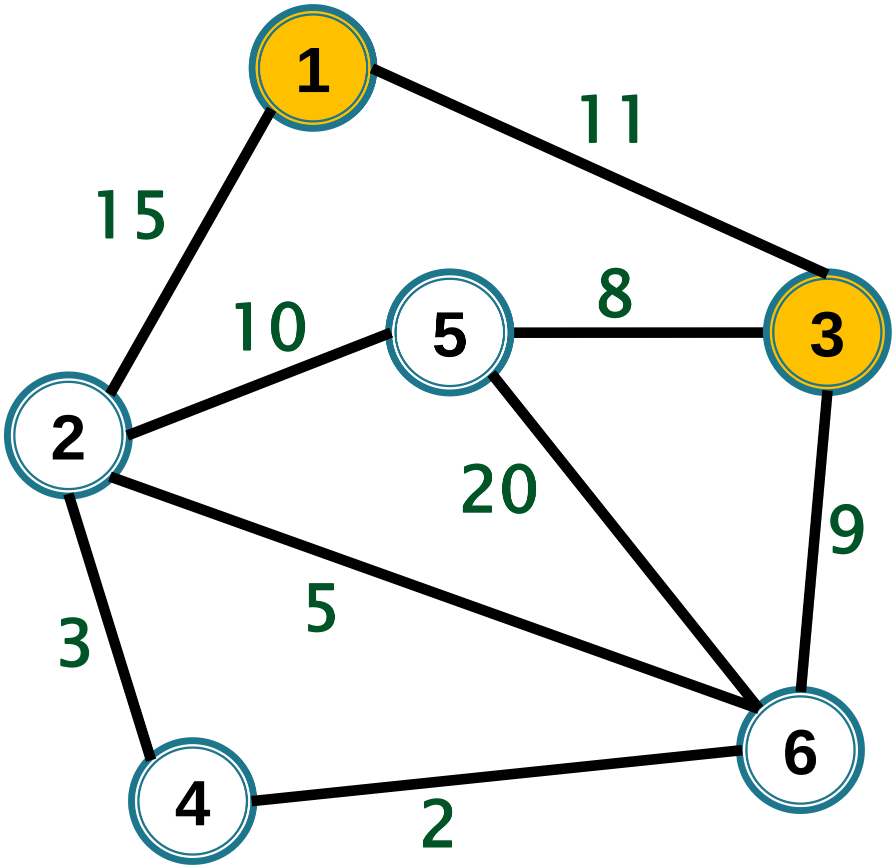
1
2
3
4
5
6
15
11
10
8
20
9
5
3
2



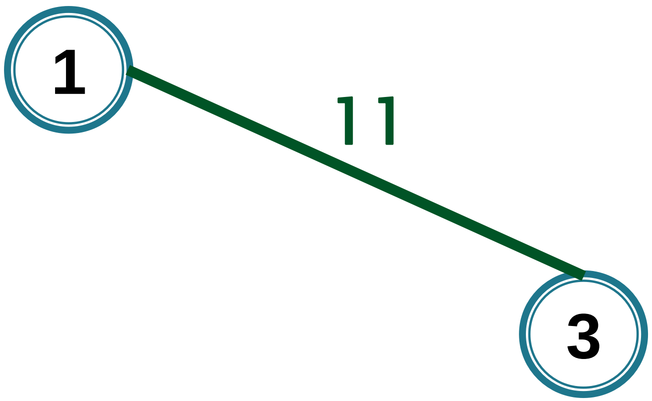
s = 


1
15
11
10
8
5
3
2
20
9
5
3
6
4
2

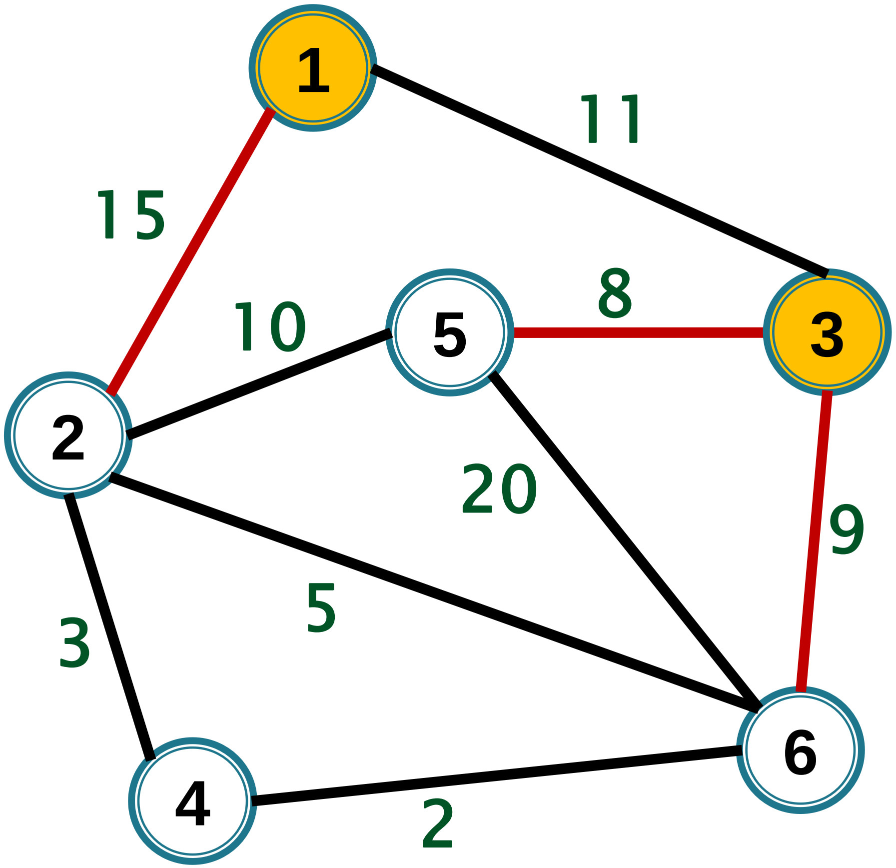

1



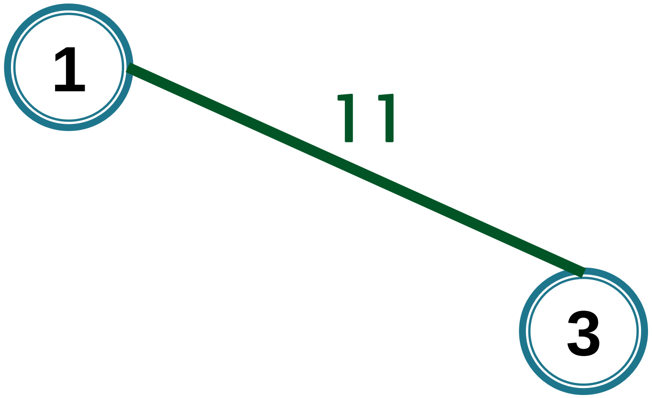
1
2
3
4
5
6
11
15
10
8
20
9
5
3
2



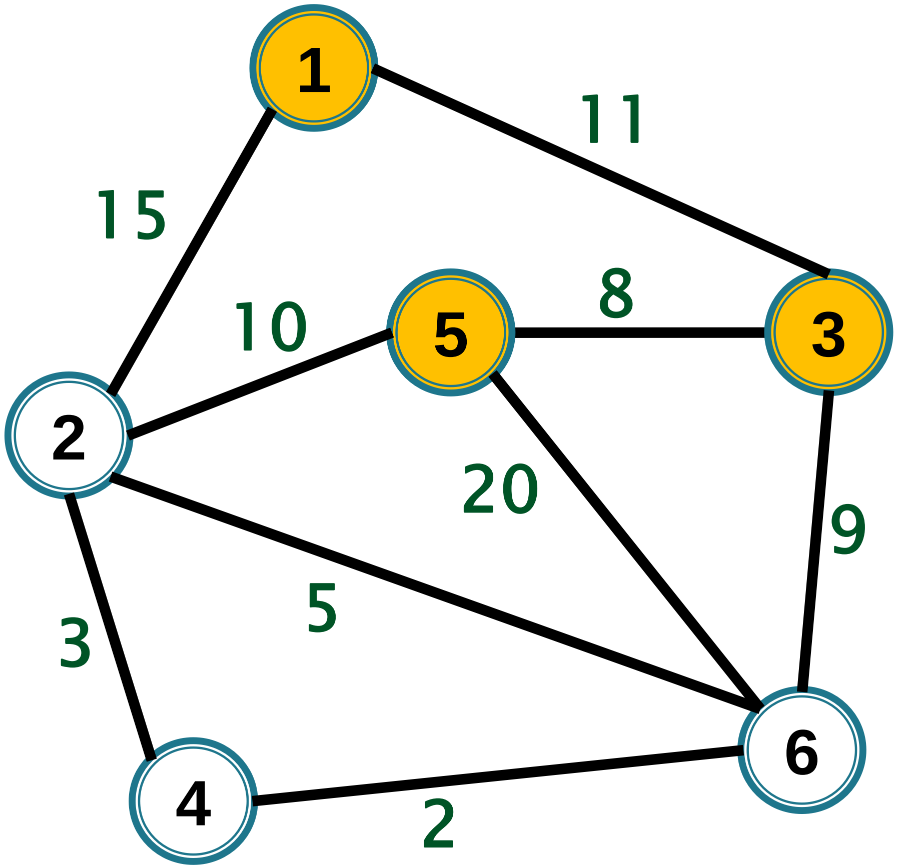
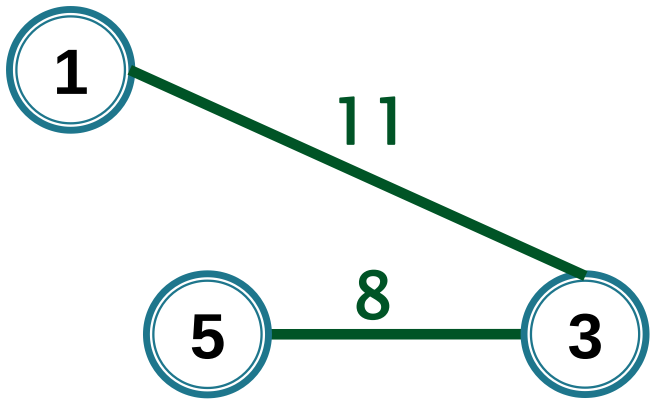
1
3
11

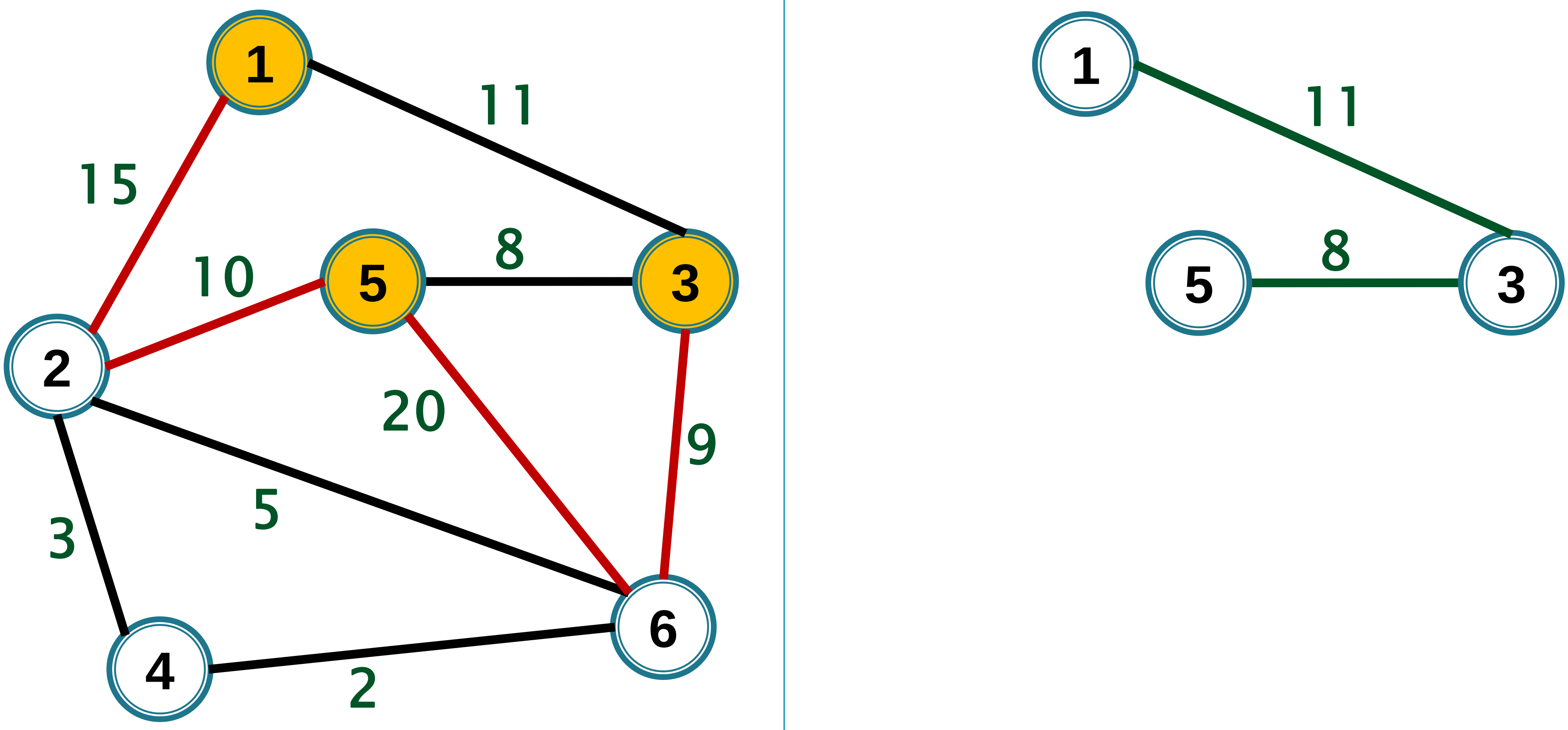


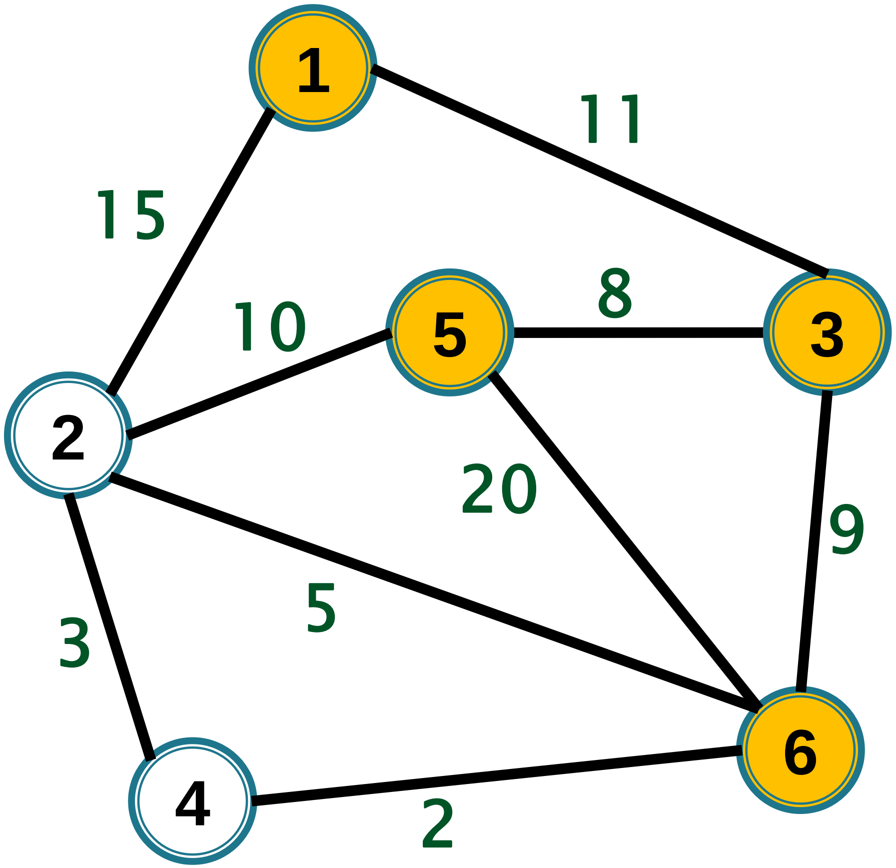
1
11
15
10
5
8
3
2
20
9
5
3
6
4
2

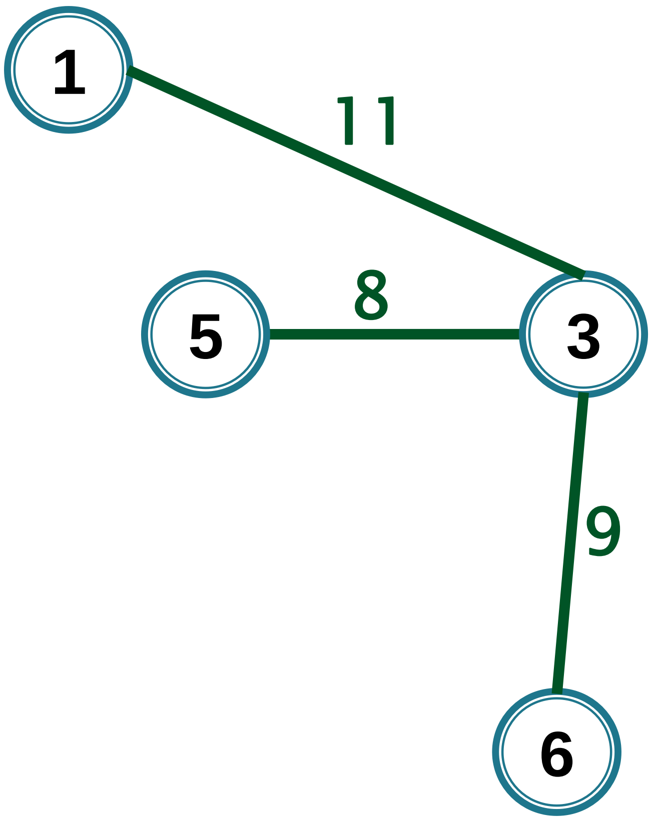


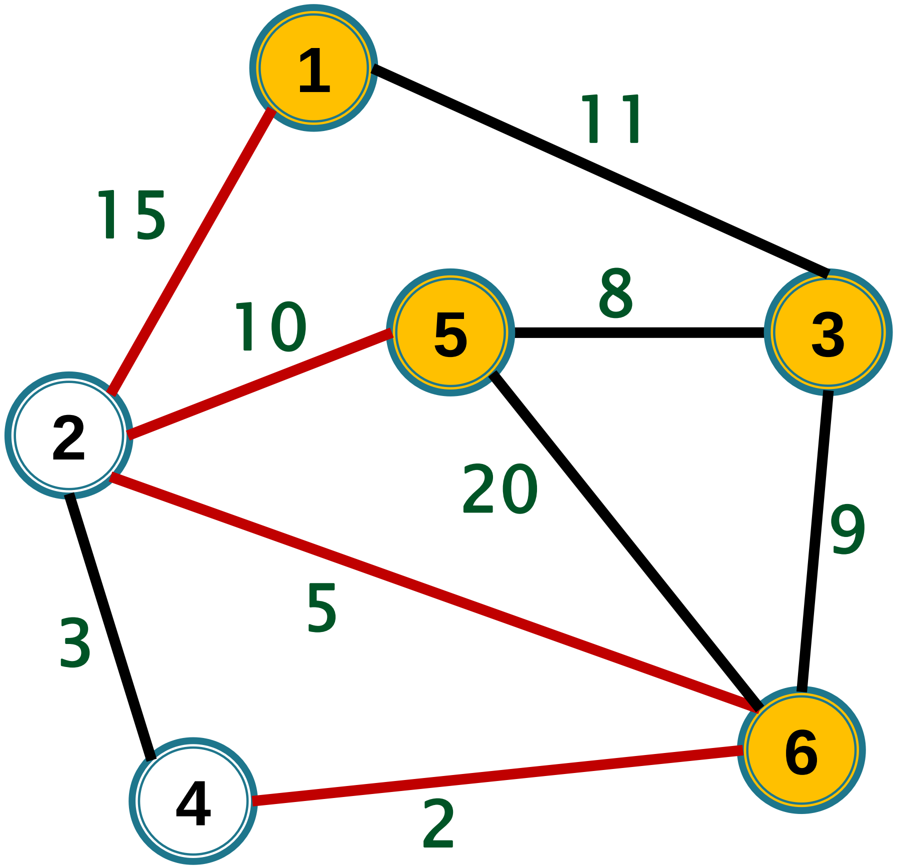
1
11
3

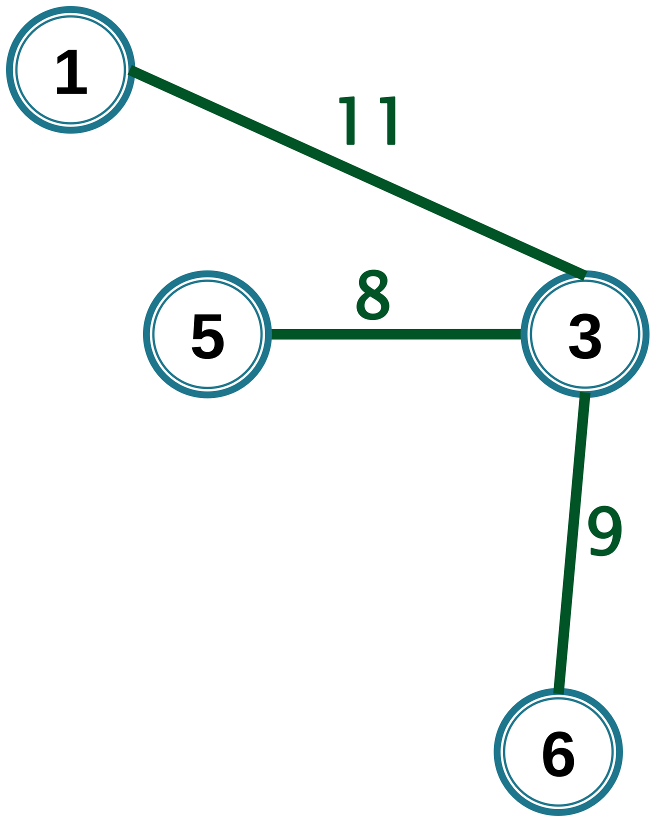

1
2
3
4
5
6
15
11
10
8
20
9
5
3
2

1
5
3
11
8

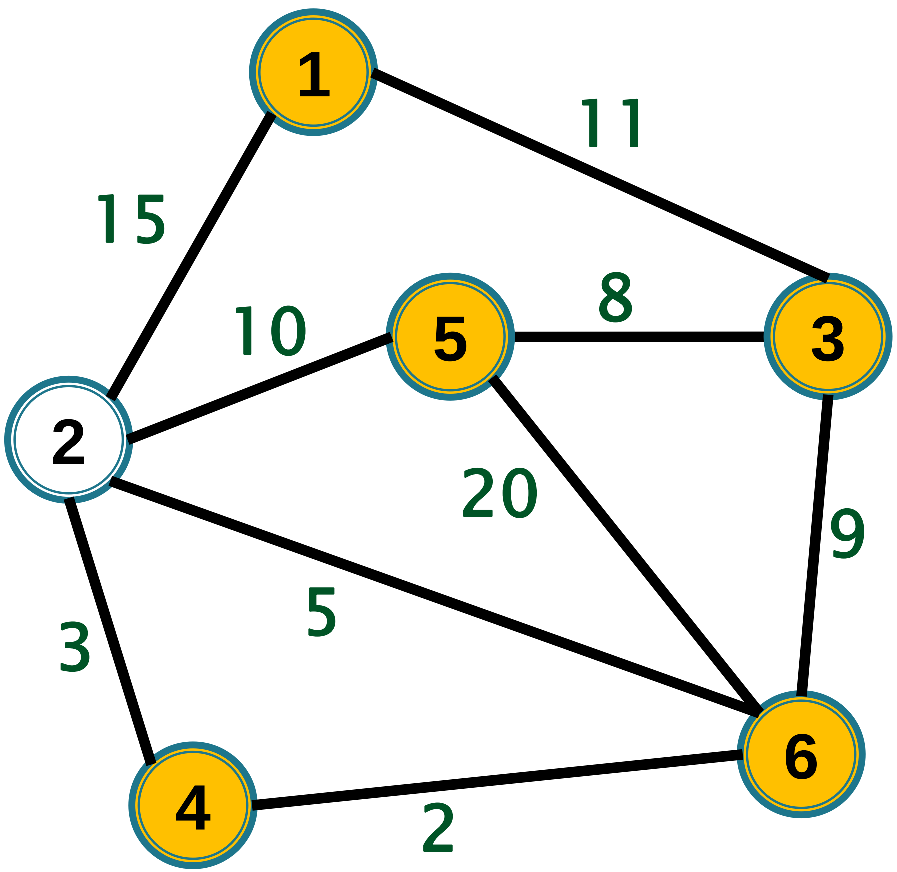

1
2
3
4
5
6
15
11
10
8
20
9
5
3
2
1
5
3
11
8

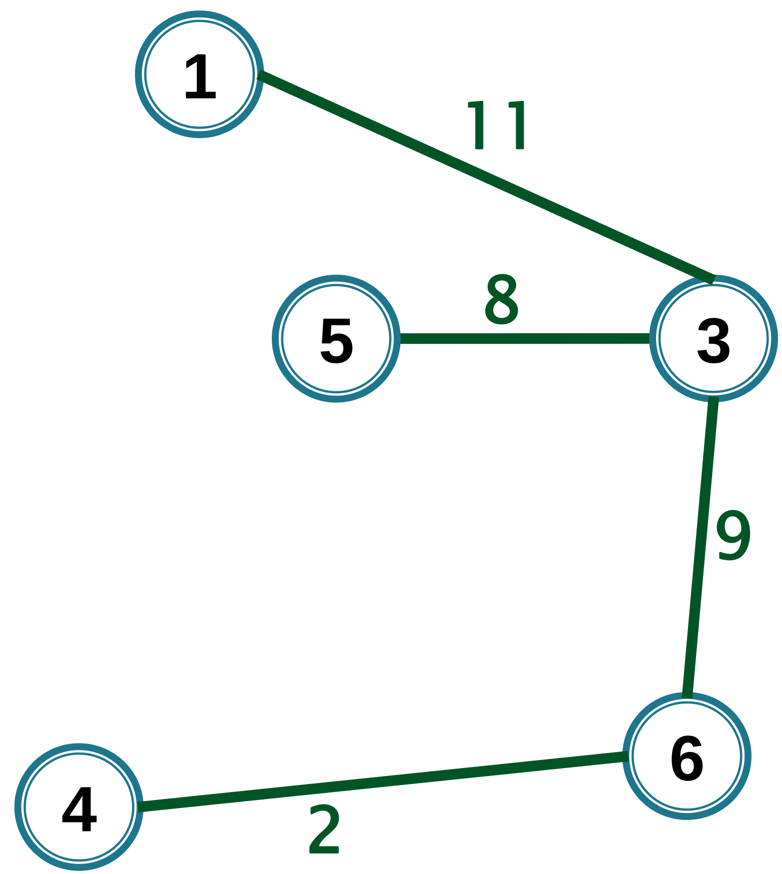

1
2
3
4
5
6
15
11
10
8
20
9
5
3
2

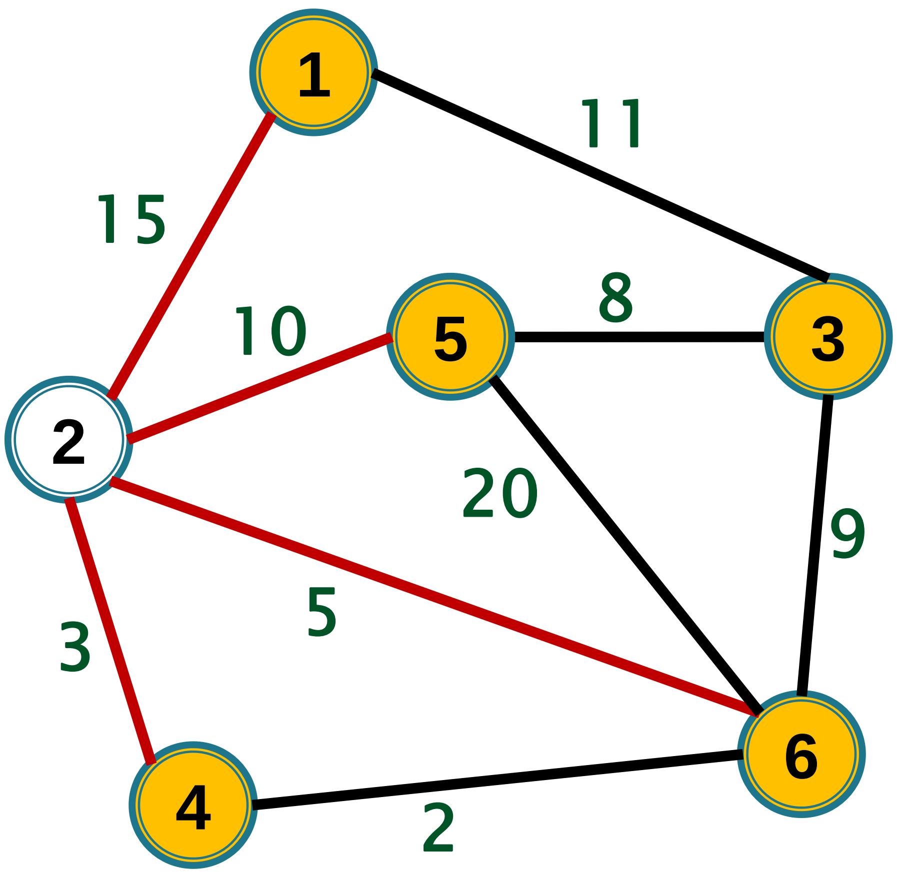
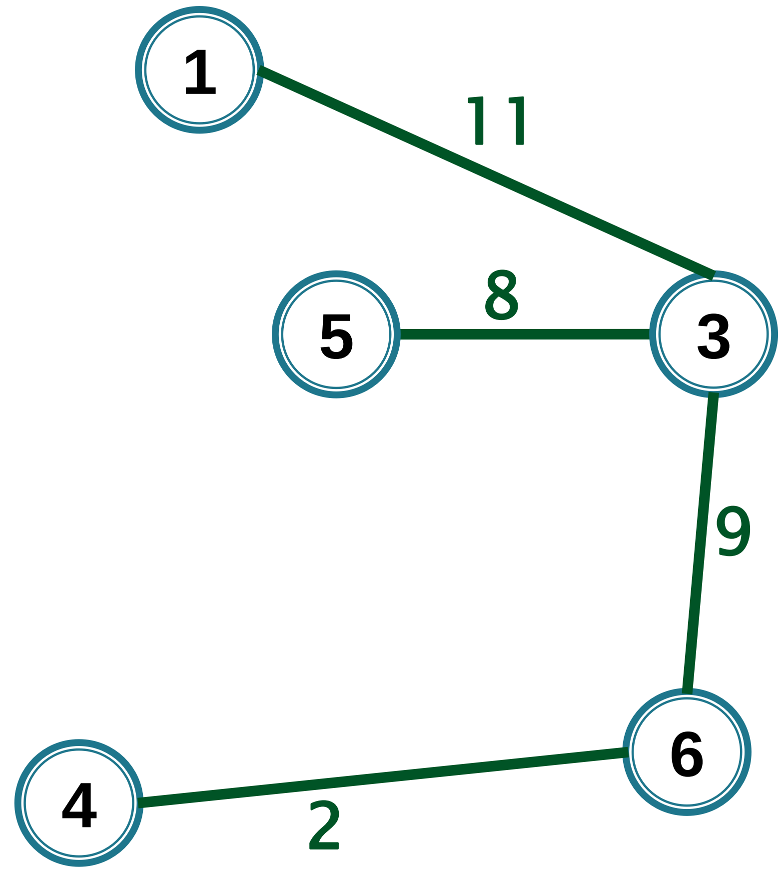

1
3
5
6
11
8
9

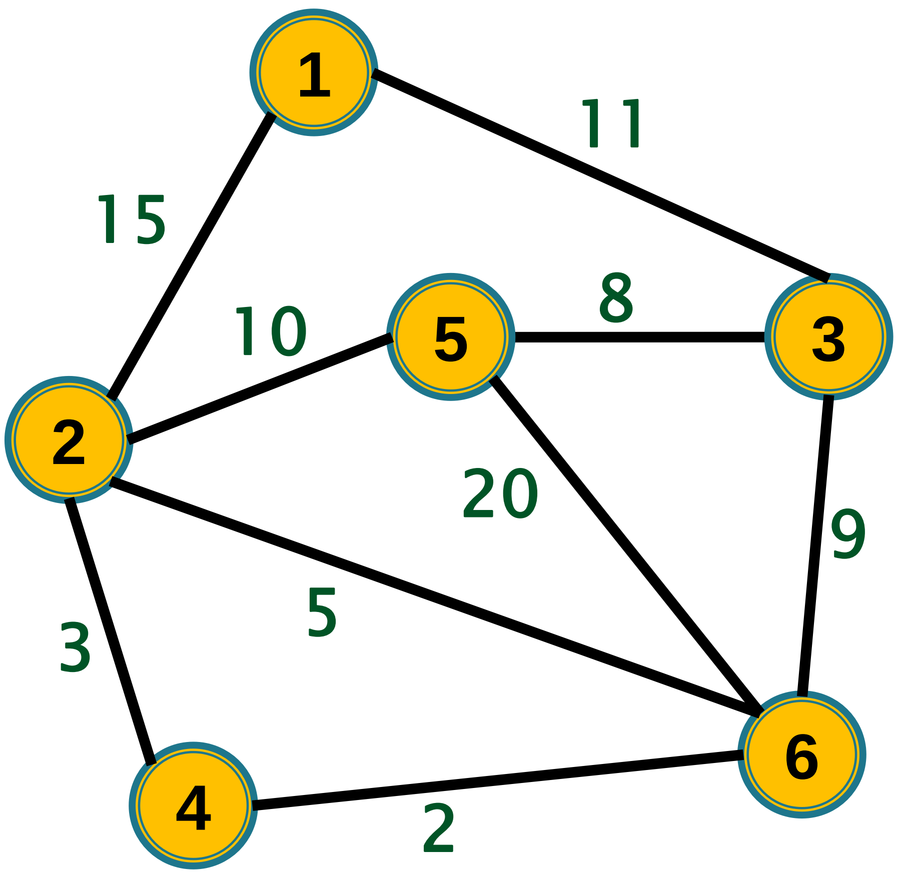

1
2
3
4
5
6
15
11
10
8
20
9
5
3
2

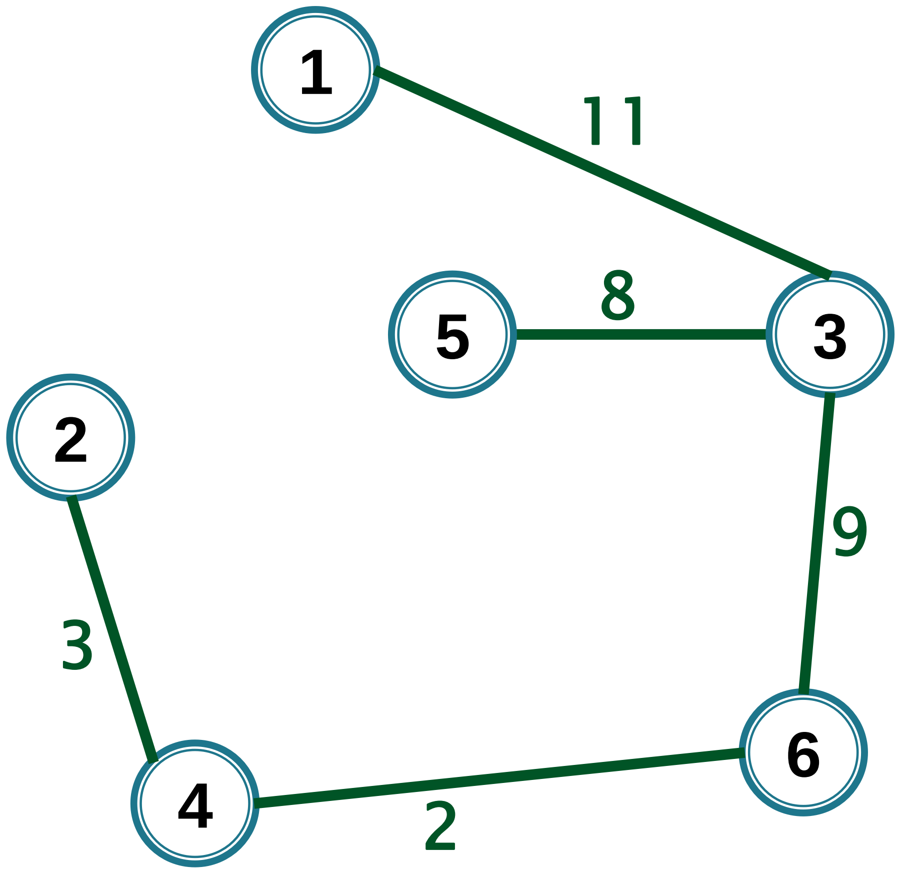

1
5
3
6
11
8
9

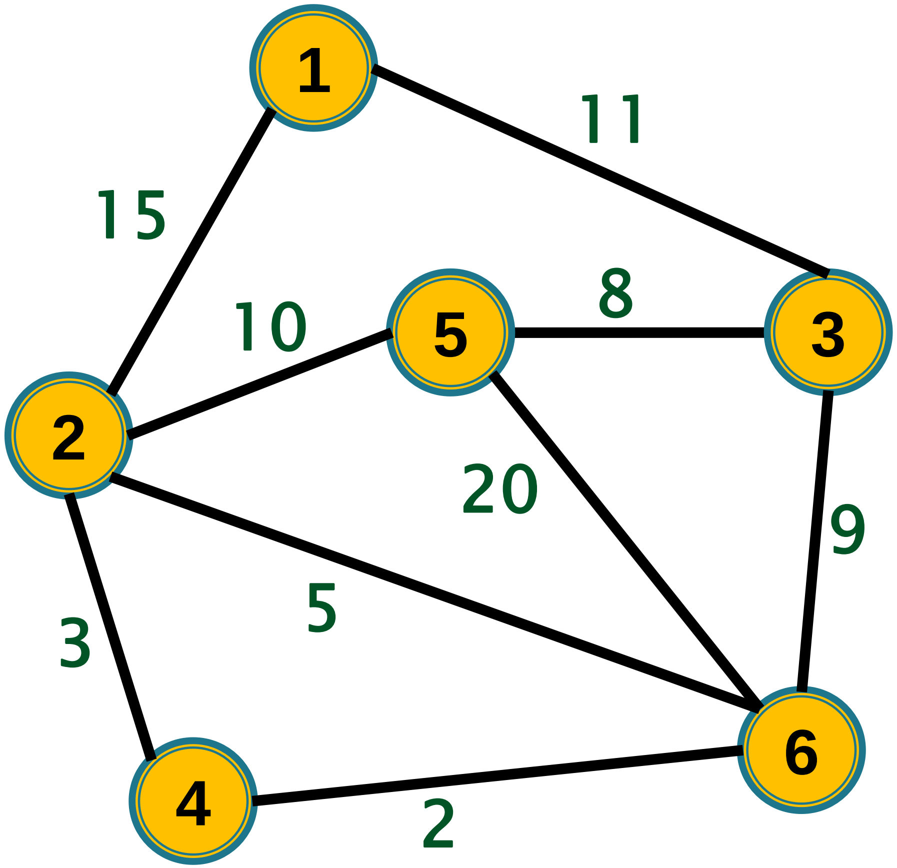

1
11
15
10
5
8
3
2
20
9
5
3
6
4
2

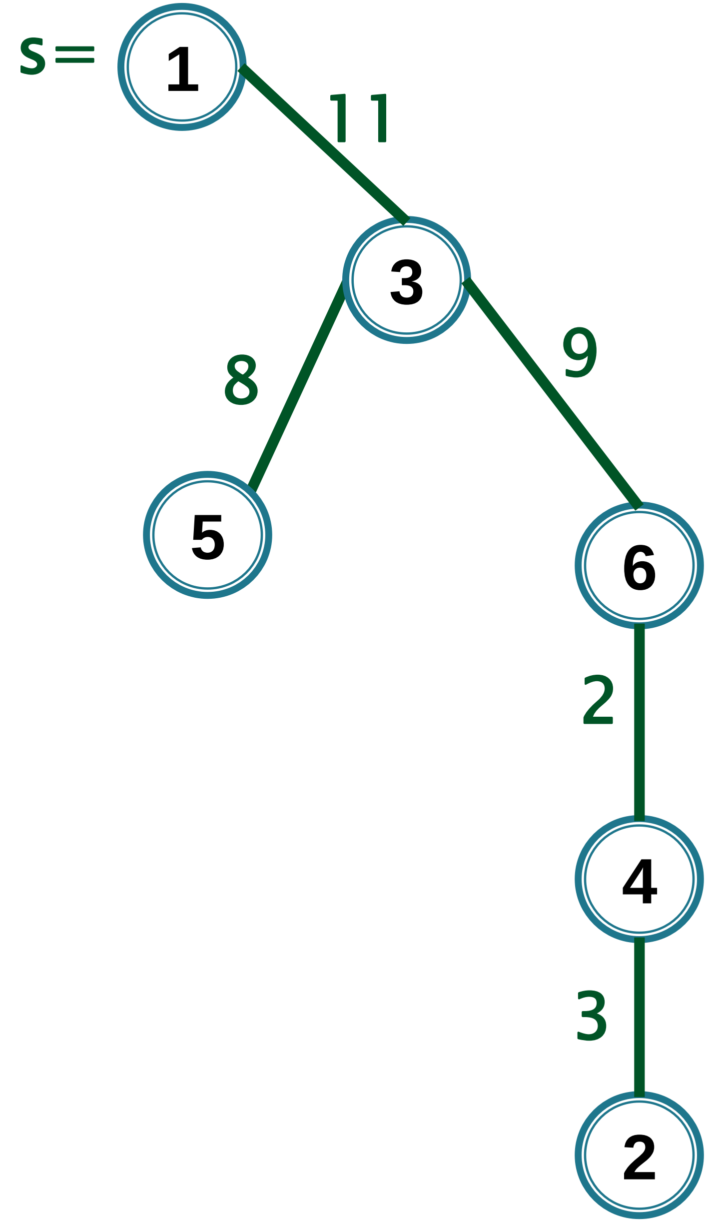

1
11
5
8
3
9
6
4
2


1
2
3
4
5
6
15
11
10
8
20
9
5
3
2

1
3
4
5
6
11
8
9
2


1
2
3
4
5
6
15
11
10
8
20
9
5
3
2


1
2
3
4
5
6
11
8
9
3
2


1
11
15
10
5
8
3
2
20
9
5
3
6
4
2


s=
1
11
3
8
9
5
6
2
4
3
2

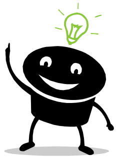
Implementare+Complexitate

Cum alegem *eficient* o muchie de cost minim cu o extremitate selectată (deja în arbore) și cealaltă nu?

Implementare+Complexitate

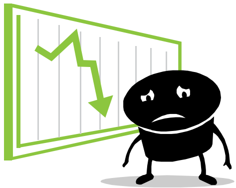
- La fiecare pas parcurgem **toate** muchiile şi o alegem pe cea de cost minim cu o extremitate selectată şi una neselectată

Implementare+Complexitate



- La fiecare pas parcurgem toate muchiile şi o alegem pe cea de cost minim cu o extremitate selectată şi una neselectată

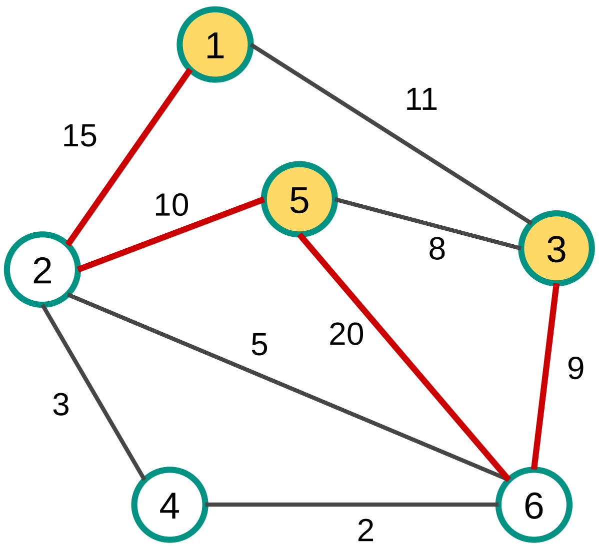
O(nm) – ineficient



Implementare Prim

Cum evităm să comparam de fiecare dată toate muchiile cu o extremitate în arbore și cealaltă nu?

Exemplu:



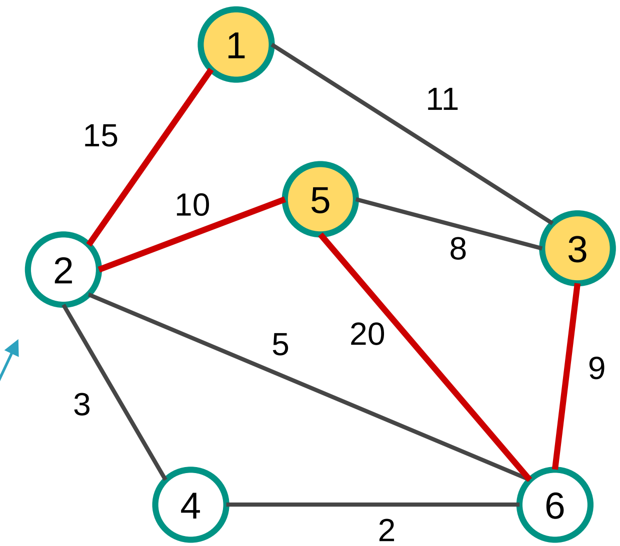
După ce vârfurile 1 și 5 au fost adăugate în arbore, muchiile **(2,1)** și **(2,5)** sunt comparate la fiecare pas, deși w(2,1)>w(2,5), **deci (2,1)** **nu va fi selectată niciodată**

Implementare Prim

Cum evităm să comparam de fiecare dată toate muchiile cu o extremitate în arbore și cealaltă nu?

Exemplu:

Soluție: Pentru fiecare vârf (neselectat), memorăm **doar o muchie de cost minim** care îl unește cu un vârf din arbore (selectat).



pentru vârful **2**, va fi memorată, la acest pas, muchia **(2, 5)**

Implementare+Complexitate

Variante $O(n^2)$/ $O(m\log n)$

- **memorăm la fiecare pas pentru fiecare vârf muchia de cost minim care îl uneşte de un vârf care este deja în arbore**

sau

- heap de muchii

(v. laborator+seminar)

Detalii implementare

Algoritmul lui Prim

Implementare Prim

Asociem fiecărui vârf u următoarele informaţii (etichete) - pentru a reține **muchia de cost minim care îl unește de un vârf selectat deja în arbore**:

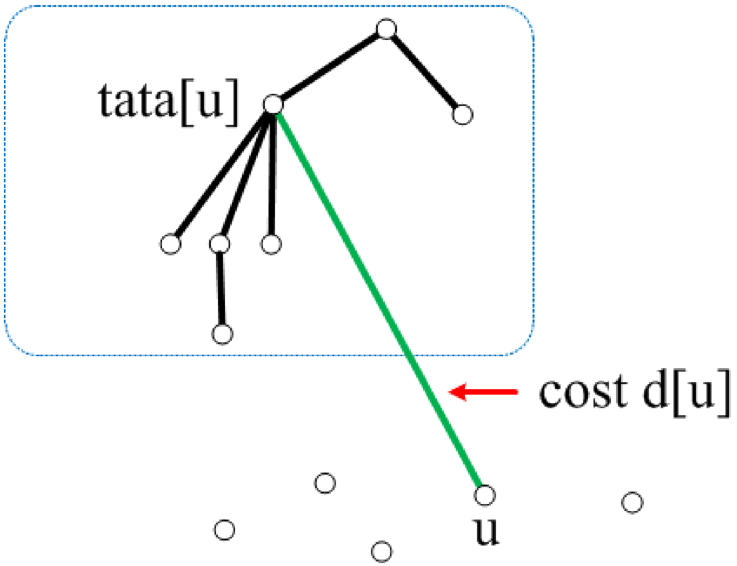
-

-

Implementare Prim

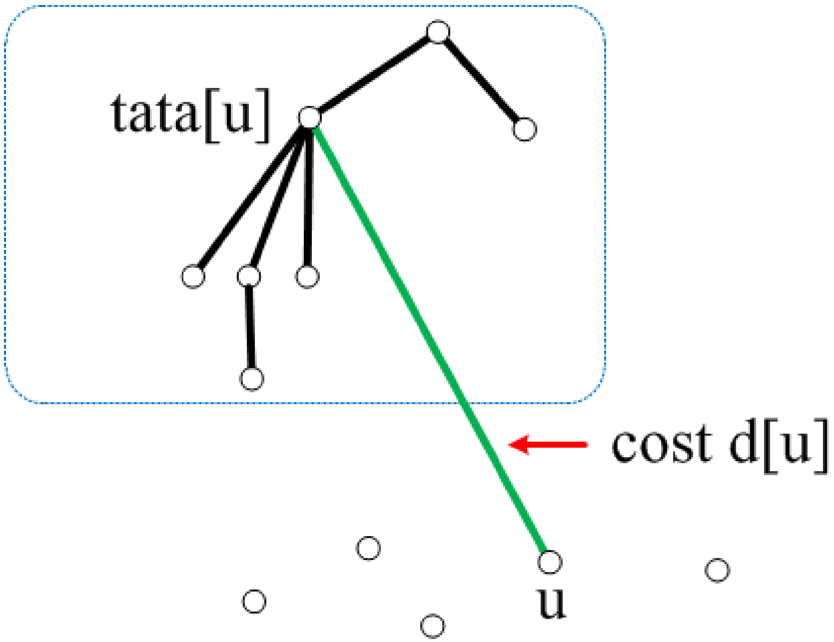
Asociem fiecărui vârf u următoarele informaţii (etichete) – pentru a reține **muchia de cost minim care îl unește de un vârf selectat deja în arbore**:

- **d[u]** = costul minim al unei muchii de la u la un vârf selectat deja în arbore
- **tata[u]** = acest vârf din arbore pentru care se realizează minimul



Implementare Prim

- **Avem**
  - **(u, tata[u])** este muchia de cost minim de la u la un vârf din arbore
  - **d[u] = w(u, tata[u])**



Implementare Prim

Atunci algoritmul se modifică astfel:

<u>La un pas</u>

- se alege **un vârf** u cu **eticheta d minimă** care nu este încă în arbore şi se adaugă la arbore muchia **(tata[u], u)**
  - **!! aceasta este muchia de cost minim (=d[u]) care unește un vârf neselectat de un vârf din arbore**

Implementare Prim

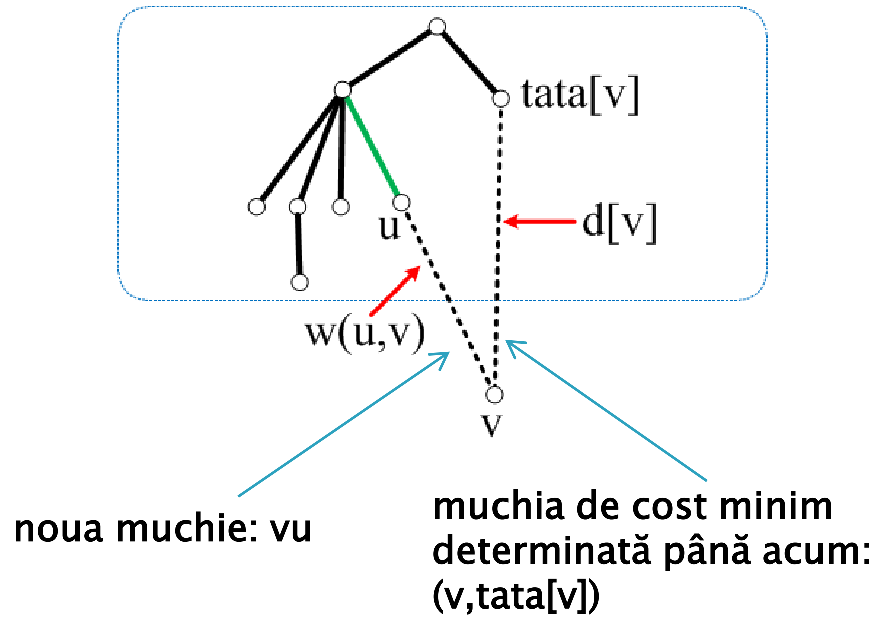
Atunci algoritmul se modifică astfel:

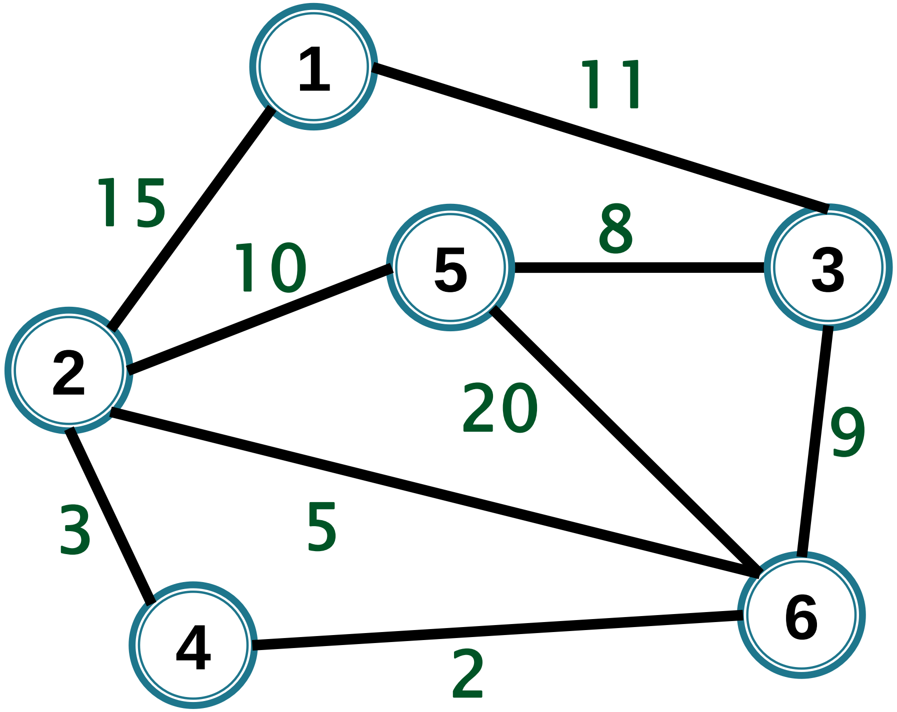
<u>La un pas</u>

- se alege **un vârf** u cu **eticheta d minimă** care nu este încă în arbore şi se adaugă la arbore muchia **(tata[u], u)**
  - **!! aceasta este muchia de cost minim care uneşte un vârf neselectat de un vârf din arbore**

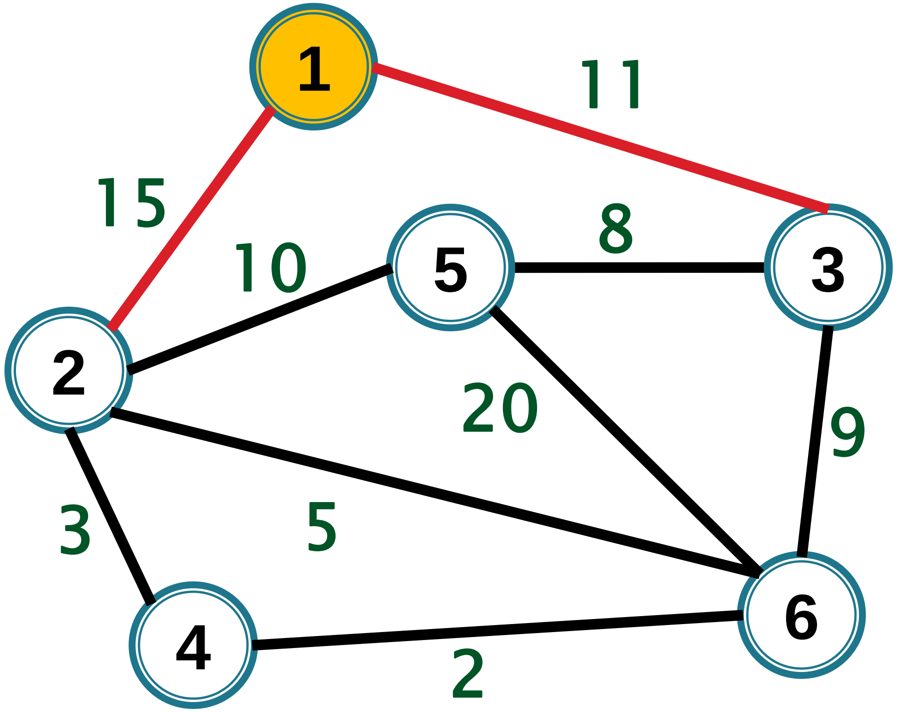
- se actualizează etichetele vârfurilor v$\notin$V(T) vecine cu u astfel:

```
dacă w(u,v) < d[v] atunci
        d[v] = w(u,v)
        tata[v] = u
```

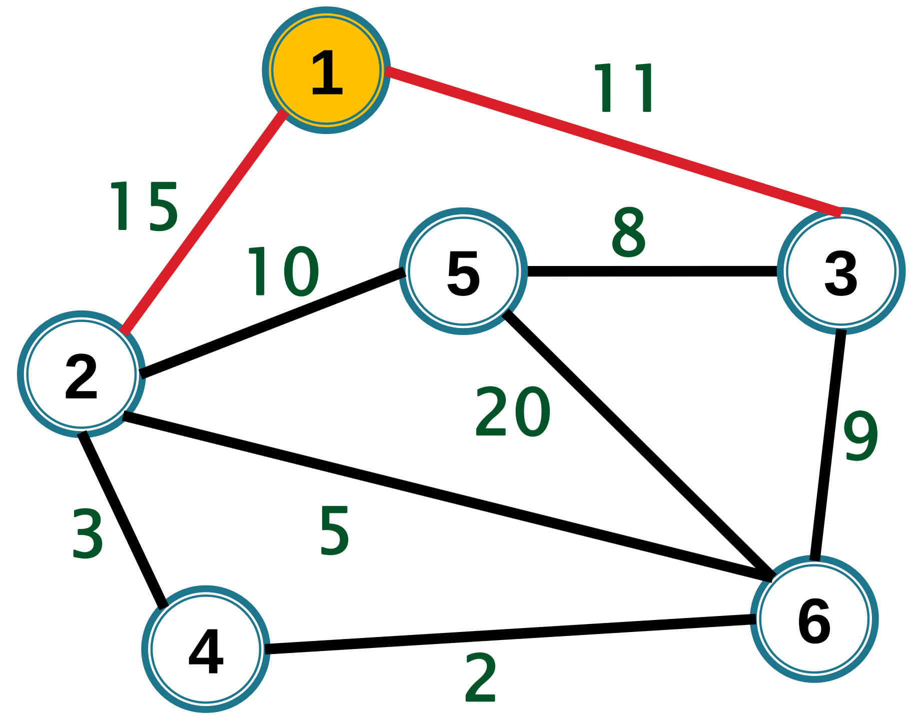




1	2	3	4	5	6
d/tata= [0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]

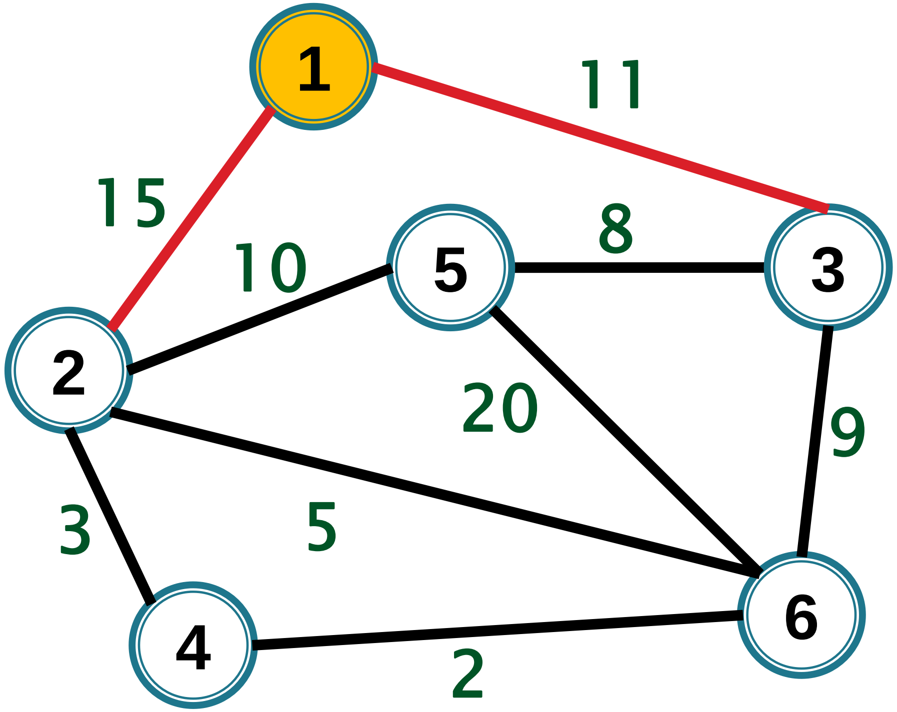


	1	2	3	4	5	6
	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 1:						



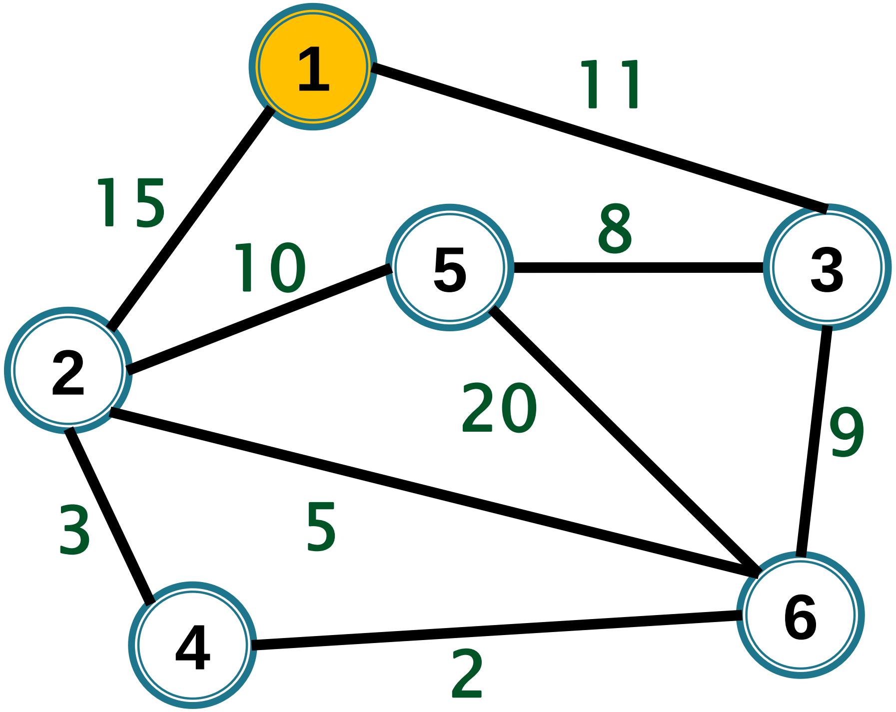
1	2	3	4	5	6
[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]

Sel. 1: viz [1] = 1 (vom reprezenta prin –)

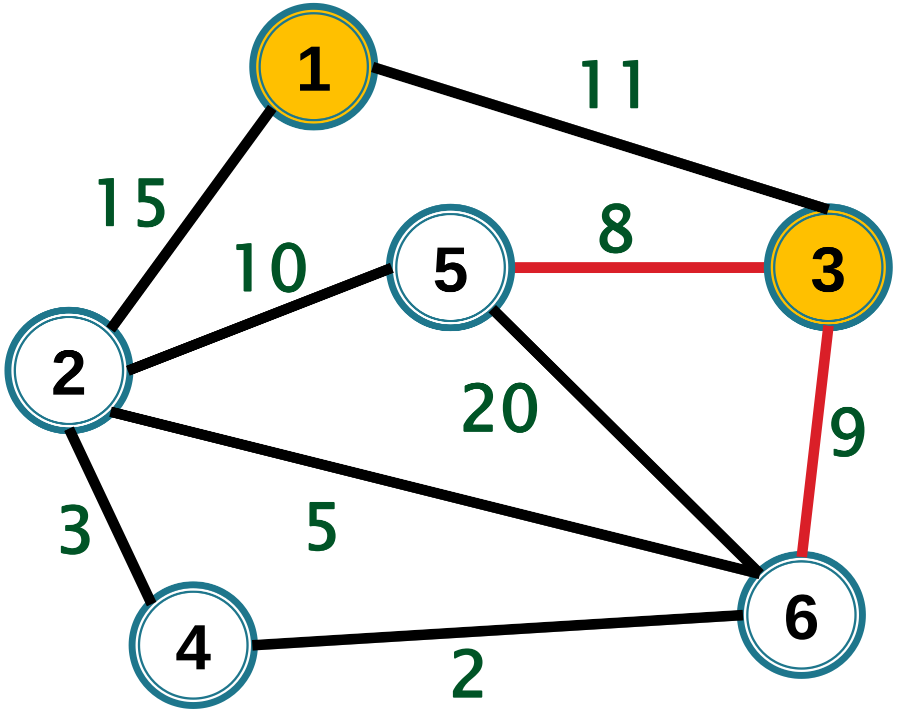


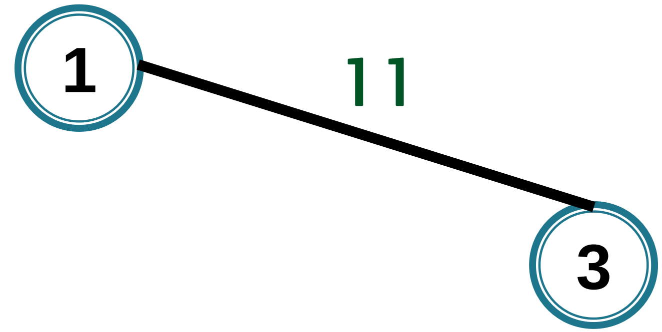
1	2	3	4	5	6
[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]

Sel. 1: actualizăm etichetele vecinilor

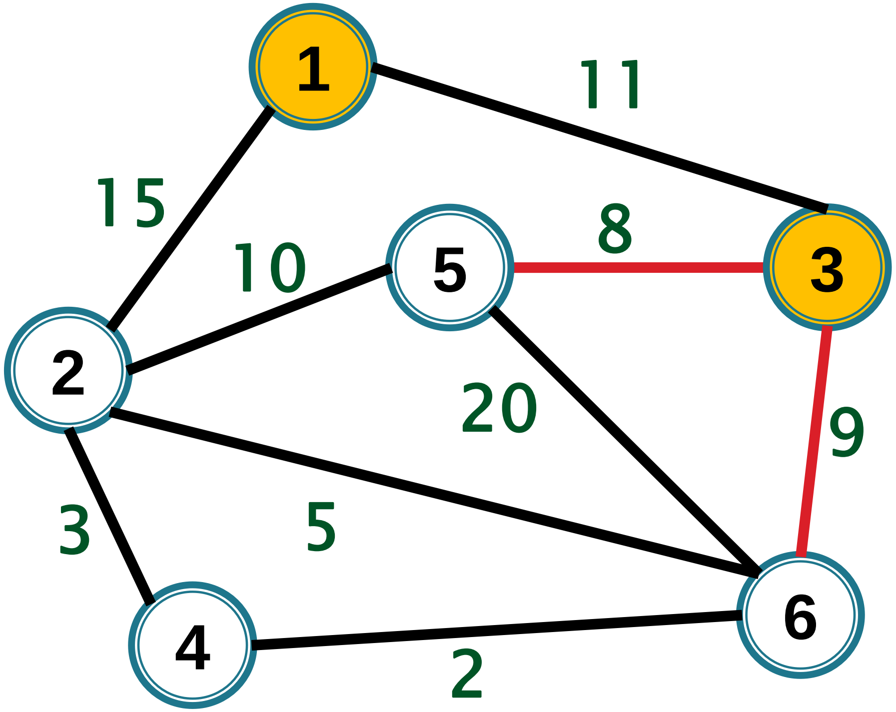


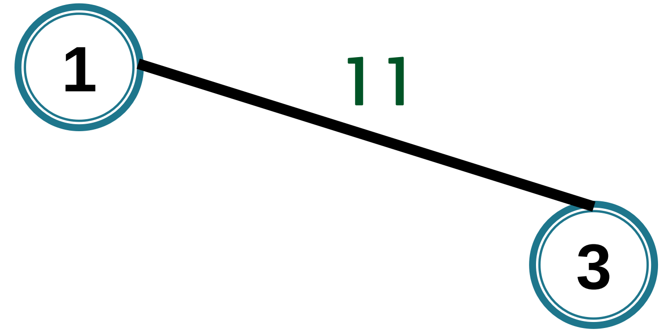
	1	2	3	4	5	6
	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 1:	[– ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
		muchia (2,1) de cost 15	muchia (3,1) de cost 11			



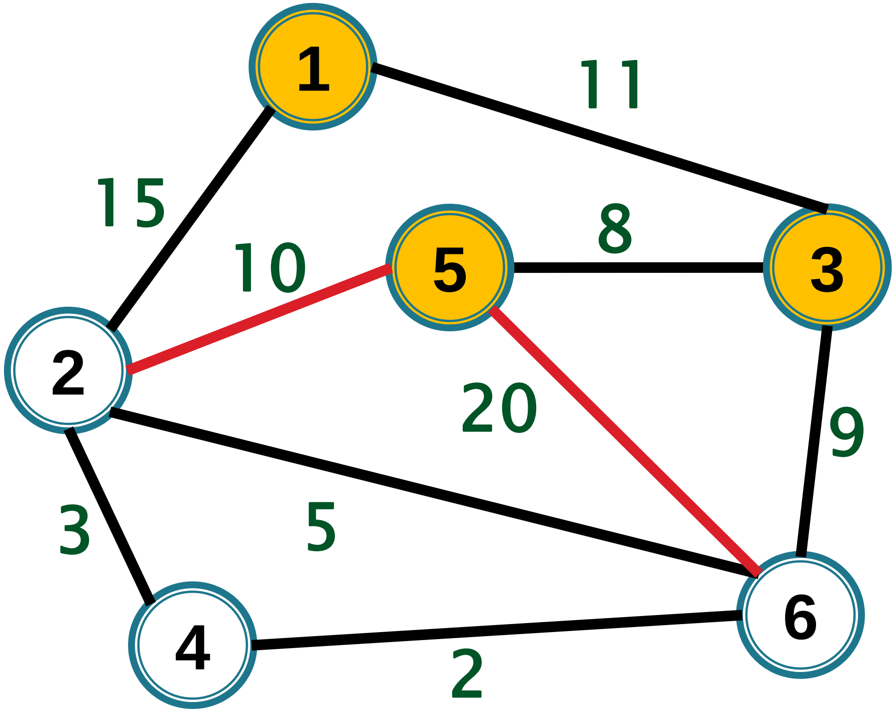


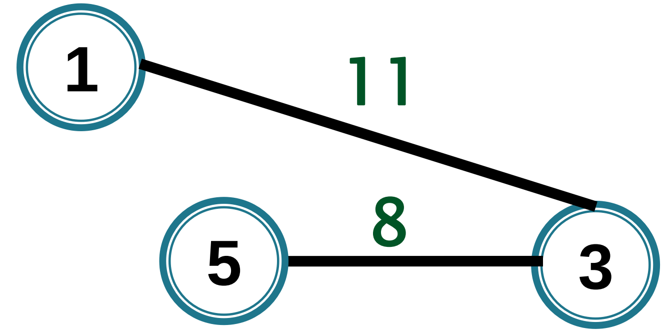
	1	2	3	4	5	6
	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 1:	[– ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 3:						



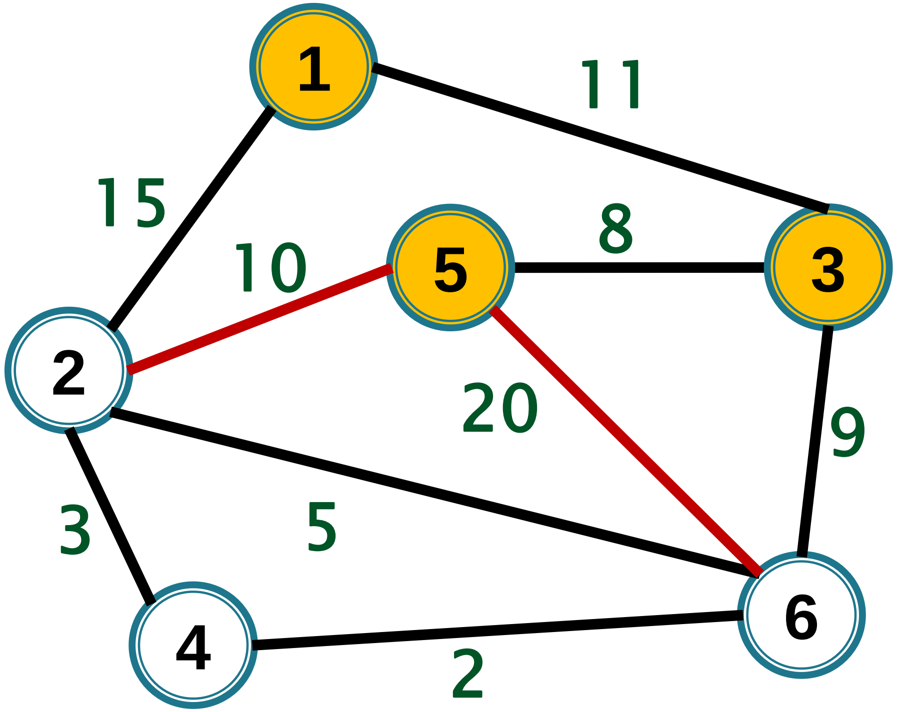


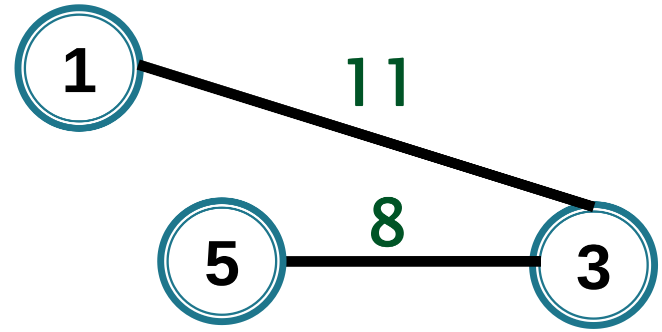
	1	2	3	4	5	6
	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 1:	[– ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 3:	[– ,	15/1,	– ,	∞/0,	8/3,	9/3]





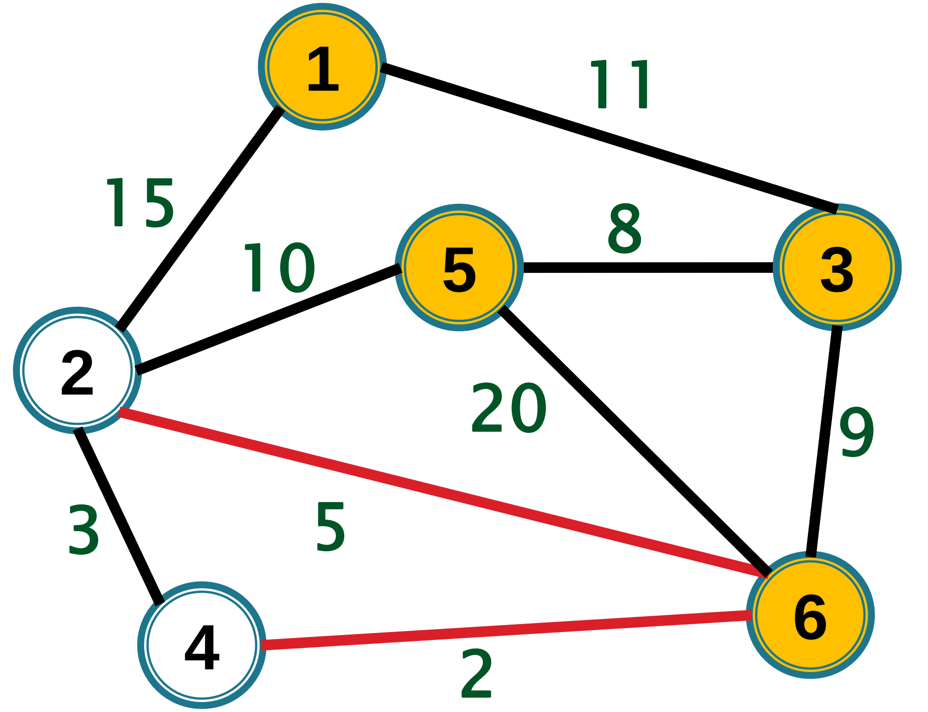
	1	2	3	4	5	6
	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 1:	[– ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 3:	[– ,	15/1,	– ,	∞/0,	8/3,	9/3]
Sel. 5:						

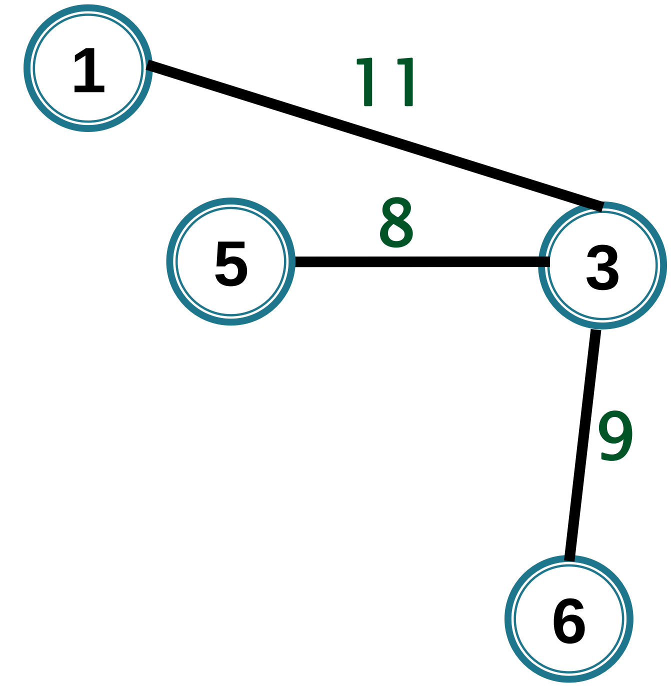




	1	2	3	4	5	6
	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 1:	[– ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 3:	[– ,	15/1,	– ,	∞/0,	8/3,	9/3]
Sel. 5:	[– ,	10/5 ,	– ,	∞/0,	– ,	9/3]

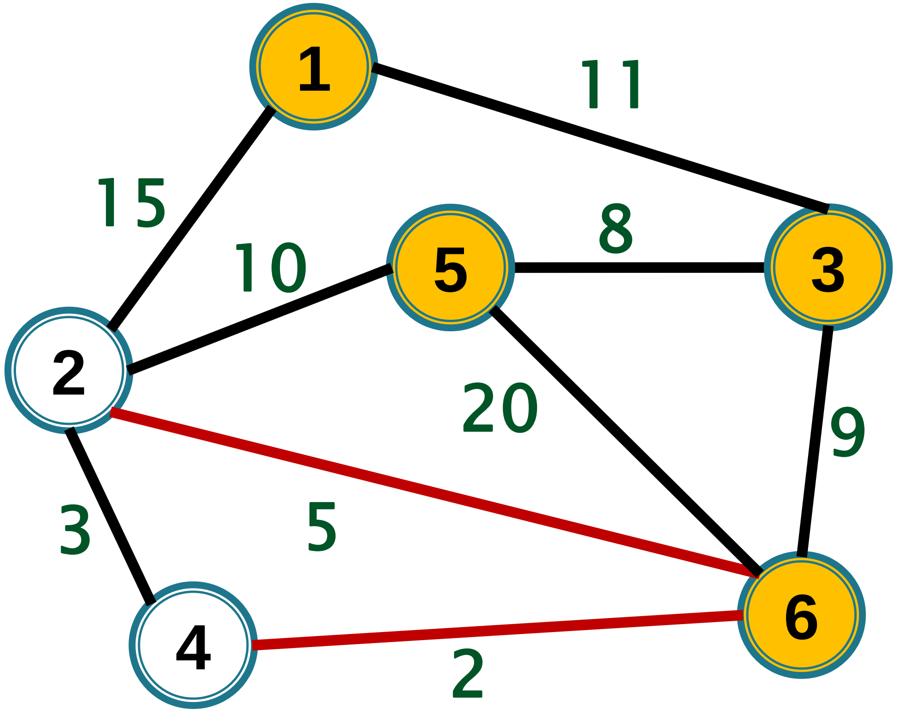
muchia (2,5)
de cost 10

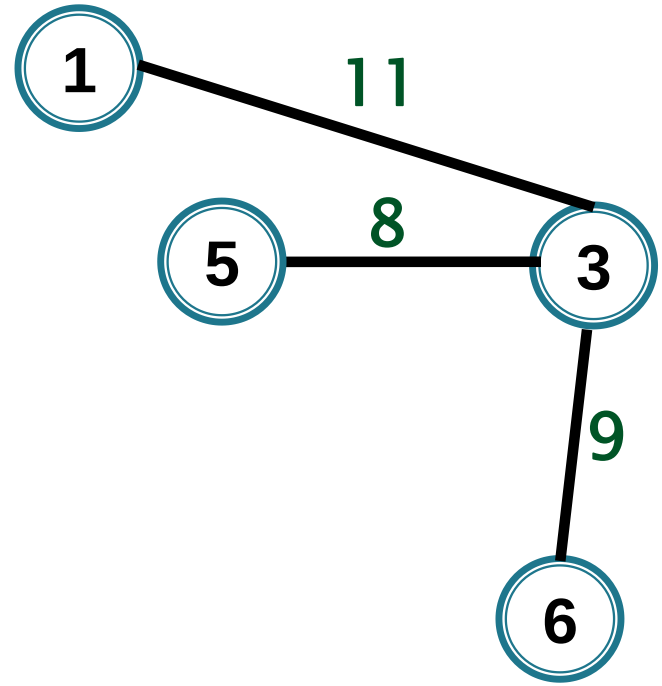




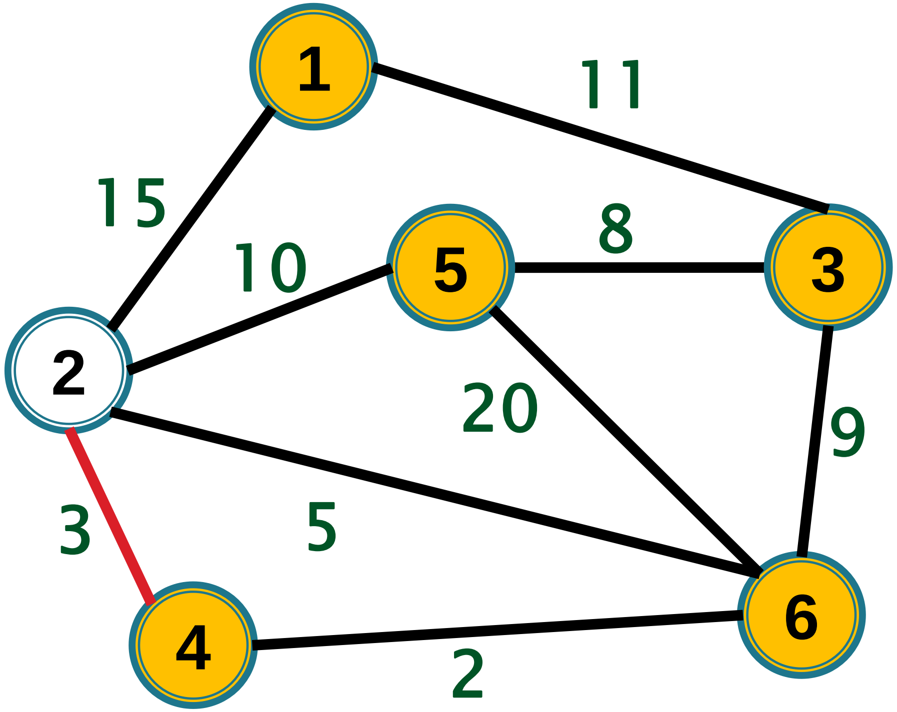
	1	2	3	4	5	6
	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 1:	[– ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 3:	[– ,	15/1,	– ,	∞/0,	8/3,	9/3]
Sel. 5:	[– ,	10/5 ,	– ,	∞/0,	– ,	9/3]
Sel. 6:						

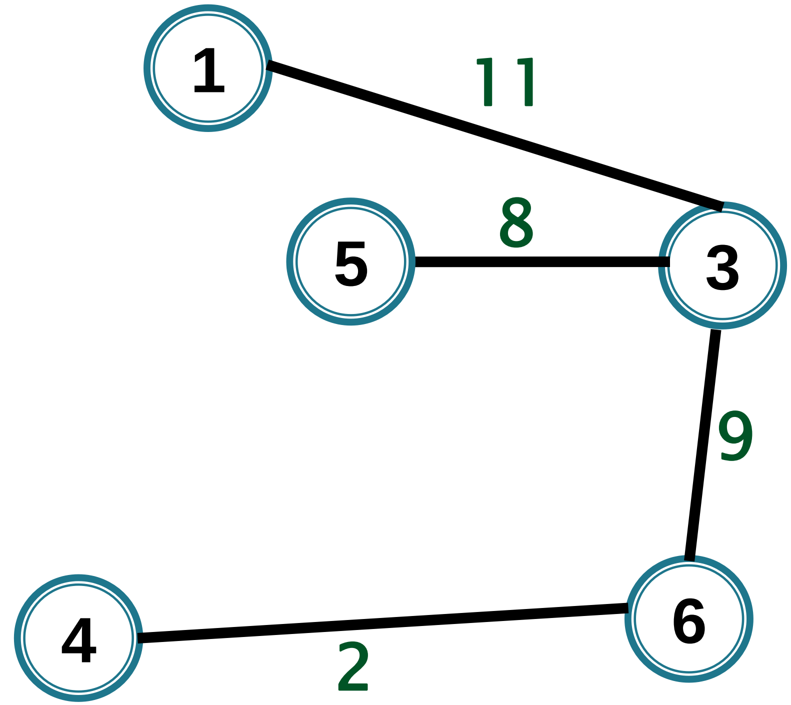
muchia (6,3)
de cost 9



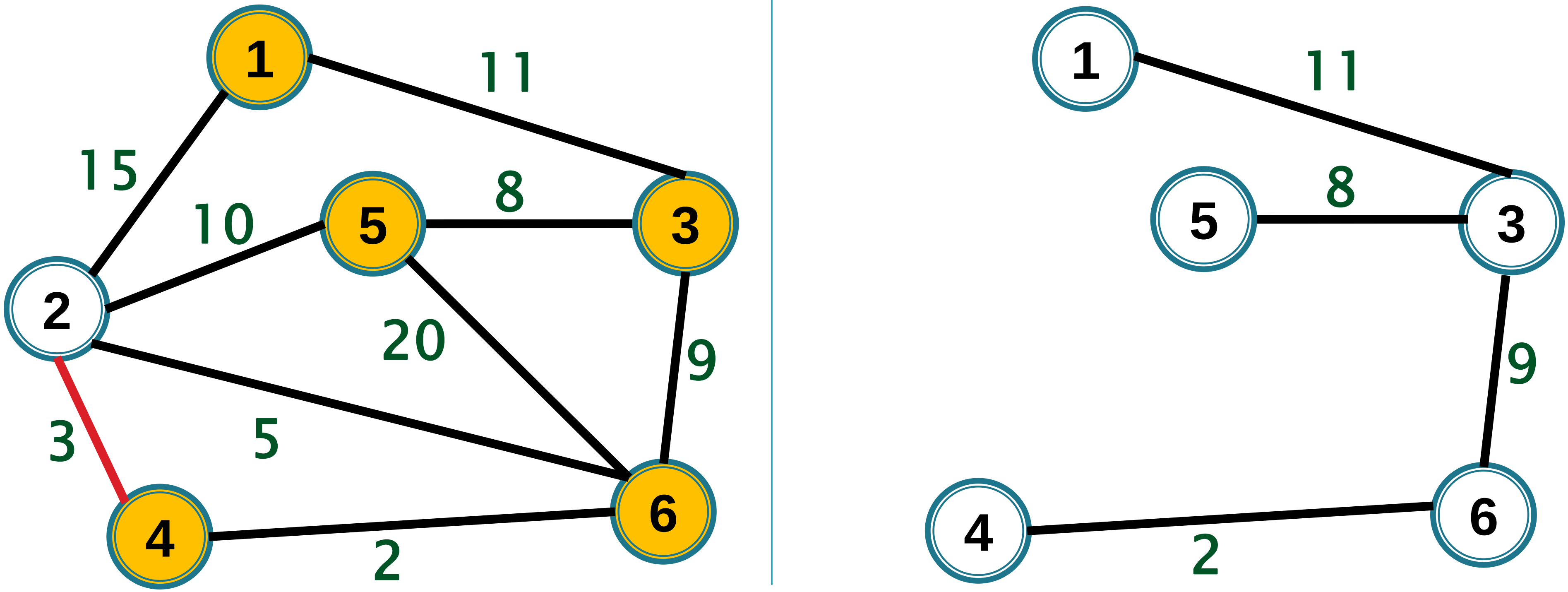


	1	2	3	4	5	6
	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 1:	[– ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 3:	[– ,	15/1,	– ,	∞/0,	8/3,	9/3]
Sel. 5:	[– ,	10/5 ,	– ,	∞/0,	– ,	9/3]
Sel. 6:	[– ,	5/6 ,	– ,	2/6,	– ,	–]

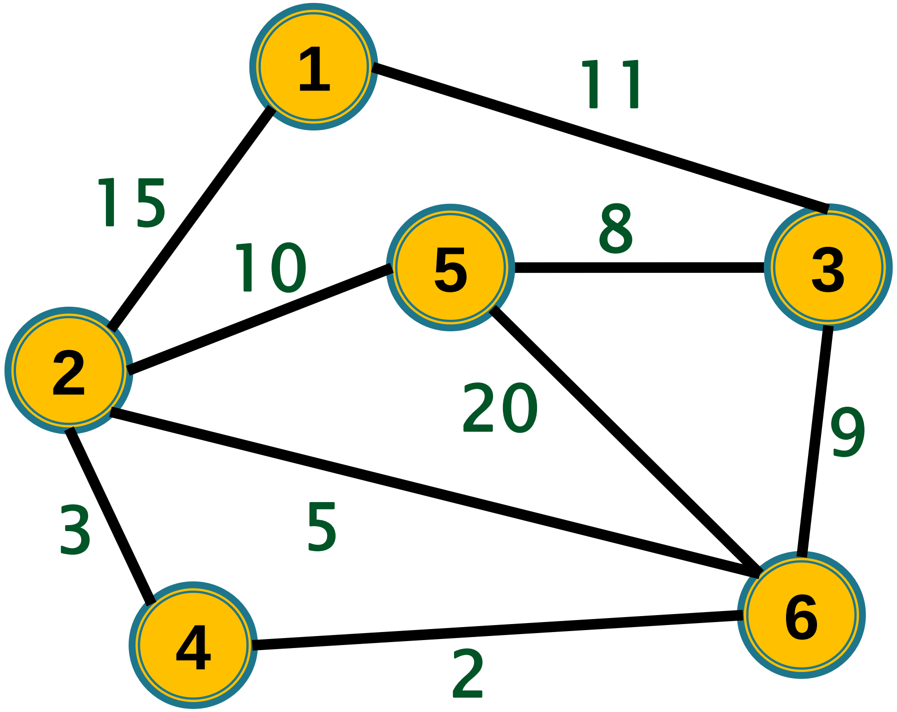


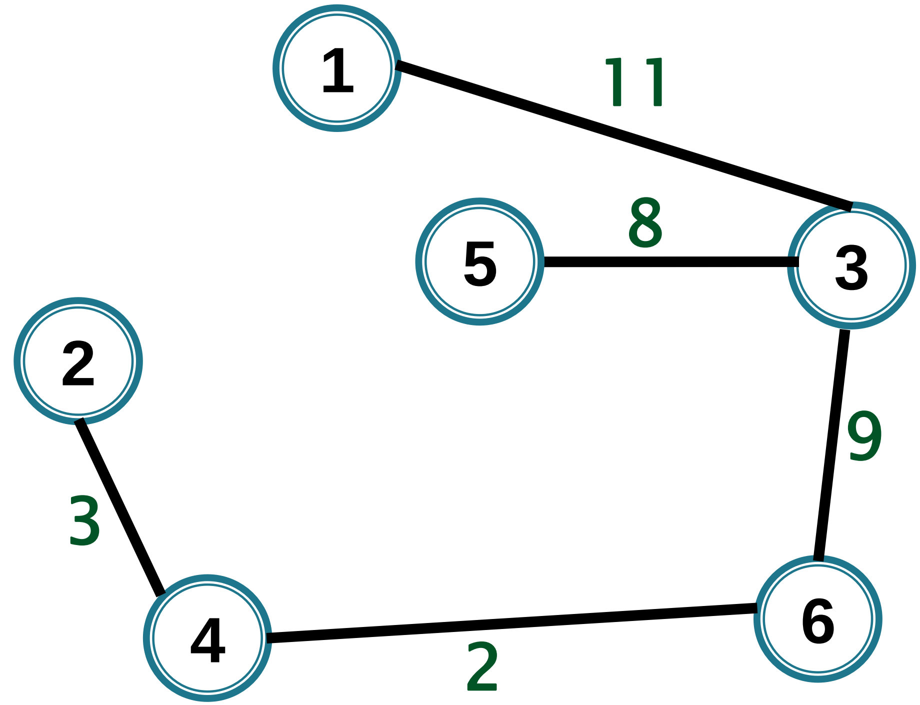


	1	2	3	4	5	6
	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 1:	[– ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 3:	[– ,	15/1,	– ,	∞/0,	8/3,	9/3]
Sel. 5:	[– ,	10/5 ,	– ,	∞/0,	– ,	9/3]
Sel. 6:	[– ,	5/6 ,	– ,	2/6,	– ,	–]
Sel. 4:						

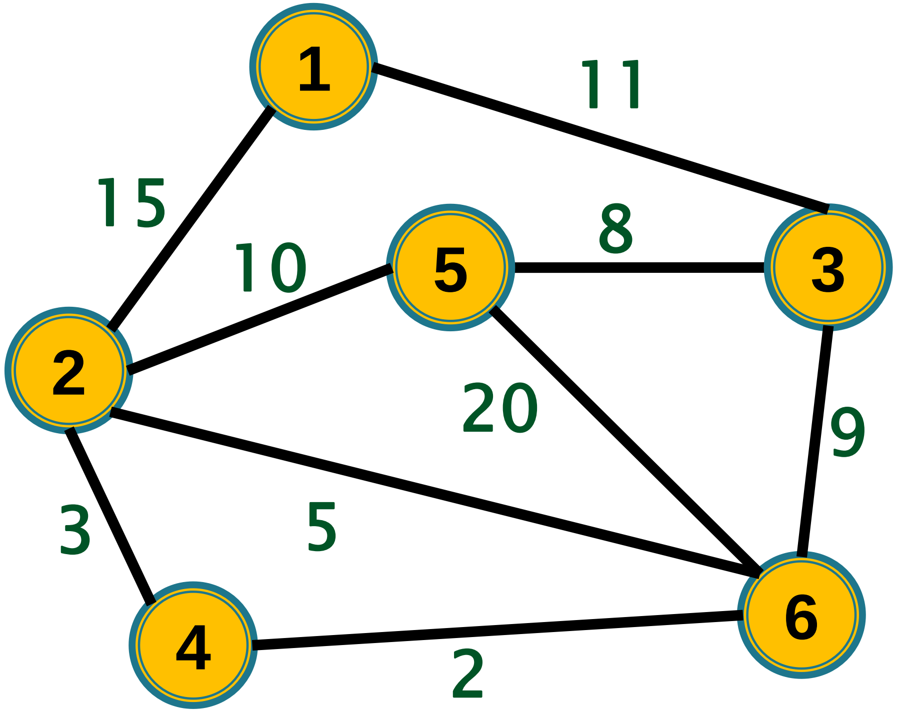


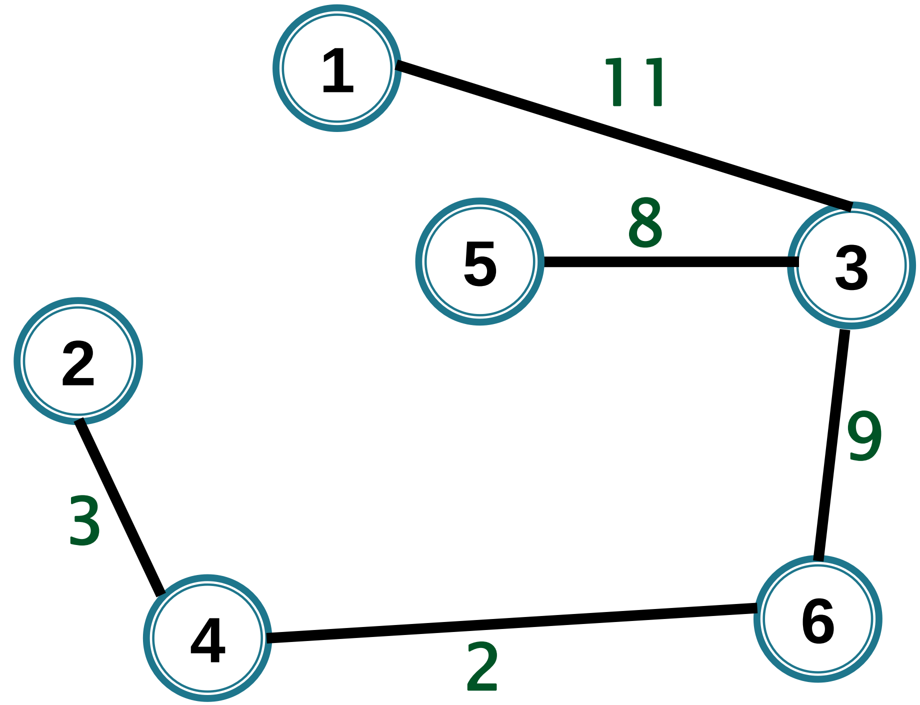
	1	2	3	4	5	6
	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 1:	[– ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 3:	[– ,	15/1,	– ,	∞/0,	8/3,	9/3]
Sel. 5:	[– ,	10/5 ,	– ,	∞/0,	– ,	9/3]
Sel. 6:	[– ,	5/6 ,	– ,	2/6,	– ,	–]
Sel. 4:	[– ,	3/4 ,	– ,	– ,	– ,	–]





	1	2	3	4	5	6
	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 1:	[– ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 3:	[– ,	15/1,	– ,	∞/0,	8/3,	9/3]
Sel. 5:	[– ,	10/5 ,	– ,	∞/0,	– ,	9/3]
Sel. 6:	[– ,	5/6 ,	– ,	2/6,	– ,	–]
Sel. 4:	[– ,	3/4 ,	– ,	– ,	– ,	–]
Sel. 2:						





	1	2	3	4	5	6
	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 1:	[– ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 3:	[– ,	15/1,	– ,	∞/0,	8/3,	9/3]
Sel. 5:	[– ,	10/5 ,	– ,	∞/0,	– ,	9/3]
Sel. 6:	[– ,	5/6 ,	– ,	2/6,	– ,	–]
Sel. 4:	[– ,	3/4 ,	– ,	– ,	– ,	–]
Sel. 2:	[– ,	– ,	– ,	– ,	– ,	–]

Implementare Prim

- Muchiile arborelui vor fi în final

  $(u, tata[u]), u \neq s$

Algoritmul lui Prim

Notăm Q=V(G) – V(T) = mulțimea vârfurilor neselectate încă în arbore

Algoritmul lui Prim

- s- vârful de start
- **`inițializează Q cu V`**
- **`pentru fiecare u∈V executa`**

```
      d[u] = ∞; tata[u]=0
 d[s] = 0
```

Algoritmul lui Prim

- s- vârful de start
- `inițializează Q cu V`
- `pentru fiecare u∈V executa`

```
      d[u] = ∞; tata[u]=0
 d[s] = 0
```

- `cat timp Q ≠ ∅ executa` ⇔ pentru i = 1, n -1

Algoritmul lui Prim

- s- vârful de start
- `inițializează Q cu V`
- `pentru fiecare u∈V executa`

  `d[u] = ∞; tata[u]=0`

  `d[s] = 0`
- `cat timp Q ≠ ∅ executa`

  extrage un vârf u∈Q cu eticheta d[u] minimă

Algoritmul lui Prim

- s- vârful de start
- `inițializează Q cu V`
- `pentru fiecare u∈V executa`

  `d[u] = ∞; tata[u]=0`

  `d[s] = 0`
- `cat timp Q ≠ ∅ executa`

  extrage un vârf u∈Q cu eticheta d[u] minimă

  `pentru fiecare uv∈E executa`

Algoritmul lui Prim

- s- vârful de start
- inițializează Q cu V
- pentru fiecare u∈V executa
  - d[u] = ∞; tata[u]=0

  d[s] = 0
- cat timp Q ≠ ∅ executa
  - extrage un vârf u∈Q cu eticheta d[u] minimă
  - pentru fiecare uv∈E executa
    - daca v∈Q si w(u,v)<d[v] atunci
      - d[v] = w(u,v)
      - tata[v] = u

Algoritmul lui Prim

- s- vârful de start
- `inițializează Q cu V`
- `pentru fiecare u∈V executa`

```
      d[u] = ∞; tata[u]=0
 d[s] = 0
```

- `cat timp Q ≠ ∅ executa`

  extrage un vârf u∈Q cu eticheta d[u] minimă

```
    pentru fiecare uv∈E executa
             daca v∈Q si w(u,v)<d[v] atunci
                 d[v] = w(u,v)
                 tata[v] = u
```

- scrie (u, tata[u]), pentru u≠ s

Algoritmul lui Prim

Complexitate

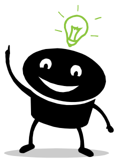
- Inițializări ->
- n * extragere vârf minim ->
- actualizare etichete vecini ->

Algoritmul lui Prim

Cum putem memora Q pentru a determina eficient vârful $u \in Q$ cu eticheta minimă?

Algoritmul lui Prim

Cum putem memora Q pentru a determina eficient vârful $u \in Q$ cu eticheta minimă?



- Vector
- Heap…

Algoritmul lui Prim

Varianta 1- Folosim vector de vizitat

$$Q[u] = \begin{cases} 1, & \text{dacă } u \notin Q \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Algoritmul lui Prim – Complexitate

Varianta 1 – cu vector de vizitat

- **Inițializări** ->
- **n * extragere vârf minim** ->
- **actualizare etichete vecini** ->

Algoritmul lui Prim – Complexitate

Varianta 1 – cu vector de vizitat

- **Inițializări** -> $O(n)$
- **n * extragere vârf minim** -> $O(n^2)$
- **actualizare etichete vecini** -> $O(m)$

$O(n^2)$

Algoritmul lui Prim - Complexitate

Varianta 2 - memorarea vârfurilor din Q într-un min-heap (min-ansamblu)

- **Inițializare Q** ->
- **n * extragere vârf minim** ->
- **actualizare etichete vecini** ->

Prim(G, w, s)

```
pentru fiecare u∈V executa
      d[u] = ∞; tata[u]=0
 d[s] = 0
 inițializează Q cu V
 cat timp Q ≠ ∅ executa
       u=extrage vârf cu eticheta d minimă din Q
       pentru fiecare v adiacent cu u executa
             daca v∈Q si w(u,v)<d[v] atunci
                  d[v] = w(u,v)
                  tata[v] = u
                  ???
 scrie (u, tata[u]), pentru u≠ s
```

Prim(G, w, s)

```
pentru fiecare u∈V executa
     d[u] = ∞; tata[u]=0
 d[s] = 0
 inițializează Q cu V
 cat timp Q ≠ ∅ executa
       u=extrage vârf cu eticheta d minimă din Q
       pentru fiecare v adiacent cu u executa
             daca v∈Q si w(u,v)<d[v] atunci
                 d[v] = w(u,v)
                 tata[v] = u
                 //actualizeaza Q - pentru Q heap
 scrie (u, tata[u]), pentru u≠ s
```

Algoritmul lui Prim – Complexitate

Varianta 2 – memorarea vârfurilor din într-un min-heap Q (min-ansamblu)

- **Inițializare Q** -> O(n)
- **n * extragere vârf minim** -> O(n log n)
- **actualizare etichete vecini** -> O(m log n)

O(m log n)

Algoritmul lui Prim – Complexitate

Temă

- Pentru grafuri dense (m de ordin n^2) ce complexitate are algoritmul și pentru ce structuri se obține?

- Dacă ponderile sunt in mulțimea $\{1, \ldots, k\}$, $k<100$, ce complexitate are algoritmul?

Algoritmul lui Prim – Complexitate

Observație – Dacă graful este complet (spre exemplu dacă toate punctele se pot conecta și distanța dintre puncte este distanța euclidiană) $m = n(n-1)/2$ este de ordin n^2

$\Rightarrow$ **$O(n^2)$** mai eficient

Corectitudine

Corectitudine Kruskal + Prim

- Cei doi algoritmi determină corect un apcm? **Chiar dacă muchiile au şi costuri negative?**
- Costul arborelui obținut de algoritmul lui Prim nu depinde de vârful de start ?

Corectitudine Kruskal + Prim

Atât algoritmul lui Kruskal, cât și cel al lui Prim funcționează după următoarea schemă:

- $A \leftarrow \varnothing$ (mulțimea muchiilor selectate în arborele construit)
- pentru i = 1, n−1 execută

  alege o muchie *e* astfel încât $A \cup \{e\} \subseteq$ apcm

  $A = A \cup \{e\}$
- returnează $T = (V, A)$

Corectitudine Kruskal + Prim

- vom demonstra un **criteriu de alegere a muchiei e** la un pas astfel încât:

$$\mathbf{A} \subseteq \text{apcm} \quad \Rightarrow \quad A \cup \{e\} \subseteq \text{apcm}$$

și

- **vom demonstra că algoritmii lui Kruskal și Prim aplică acest criteriu.**

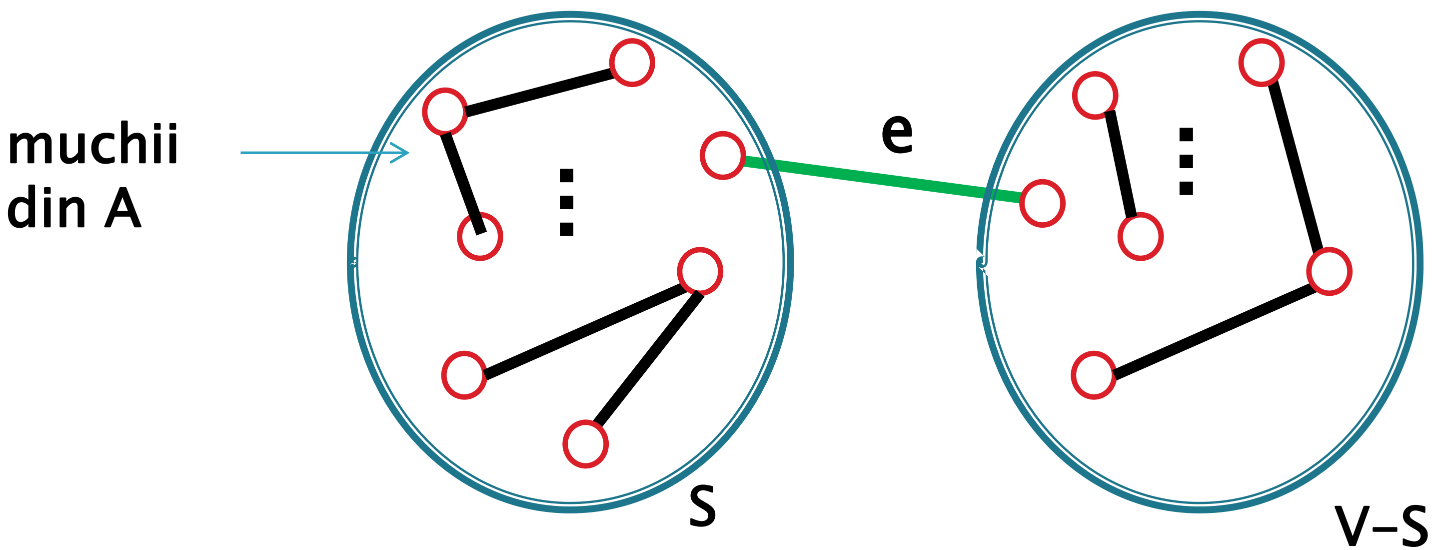
Corectitudine Kruskal + Prim

- **Propoziție.** Fie G=(V, E, w) un graf conex ponderat și A ⊆ E o submulțime a mulțimii muchiilor unui apcm al lui G.

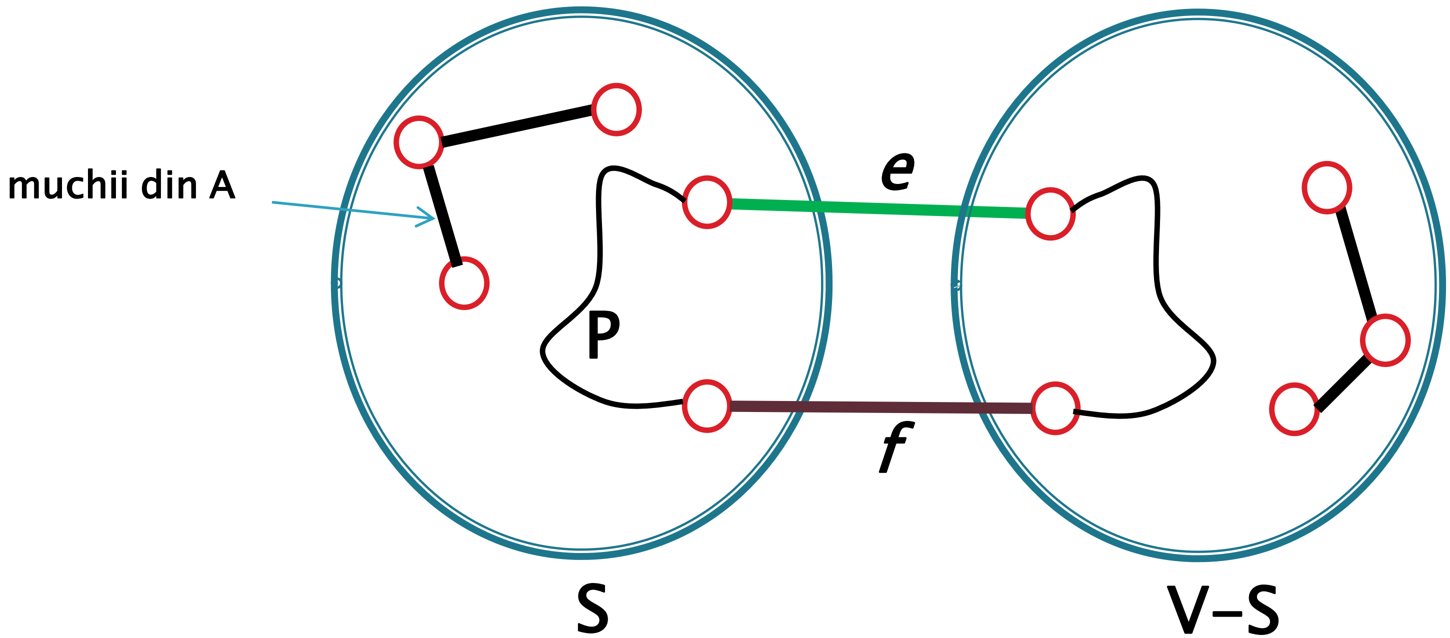
  Fie S ⊆ V a.î. orice muchie din A are ambele extremități în S sau ambele extremități în V−S .

  Fie *e*=*uv* o muchie de cost minim cu o extremitate în S și cealaltă în V−S.

  Atunci A ∪ {e} ⊆ apcm



Corectitudine Kruskal + Prim



Algoritmi bazaţi pe eliminare de muchii

Temă – Care dintre următorii algoritmi determină corect un arbore parţial de cost minim (justificaţi)? Pentru fiecare algoritm corect precizaţi ce complexitate are.

1.
```
T ← G
cât timp T conţine cicluri execută
      alege e o muchie de cost maxim care este
      conţinută într-un ciclu din T
      T ← T - e
```

2.
```
T ← G
cât timp T conţine cicluri execută
      alege C un ciclu oarecare din T şi fie e
      muchia de cost maxim din C
      T ← T - e
```