

Proiect la Probabilități și Statistică

An II, grupele 232 și 234

Precizări importante

1. Proiectele se realizează în echipă de 2-4 persoane. Fiecare echipa va desemna un lider care va fi precizat în documentație.

2. Liderul echipei va trimite pe adresa simona.cojocsa@fmi.unibuc.ro până la data de **1 februarie 2025 ora 22:00** o singură arhivă care va conține fișierele sursă ale proiectului împreună cu documentația.

3. Documentația este **obligatorie** și lipsa ei atrage necorectarea proiectului.

4. Documentația trebuie să conțină :

-numele membrilor echipei

-descrierea problemei

-aspecte teoretice folosite în rezolvarea problemei care depășesc nivelul cursului

-reprezentări grafice și orice altă formă multimedia oportună proiectului

-precizări privind pachete software folosite și surse de inspirație

-codul și comentarea acestuia, precum și a soluției prezentate

-identificarea unor eventuale dificultăți în realizarea cerințelor

-probleme care au rămas deschise în urma implementării actuale

-concluzii

OBS: Documentația se dorește o prezentare *completă* a proiectului astfel încât evaluarea acestuia să poată fi făcută facil și nu o documentație uzuală pentru un produs software.

5. Dacă la oricare din cele 3 proiecte se realizează cerințe suplimentare față de cele date, cerințe care să fie relevante, se poate obține un bonus de **5p**, fără însă ca nota finală asociată laboratorului să poată depăși **50 p**.

Cerinte:

- I. Se consideră o activitate care presupune parcurgerea secvențială a n etape. Timpul necesar finalizării etapei i de către o persoană A este o variabilă aleatoare $T_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$. După finalizarea etapei i , A va trece în etapa $i+1$ cu probabilitatea α_i sau va opri lucrul cu probabilitatea $1-\alpha_i$. Fie T timpul total petrecut de persoana A în realizarea activității respective.

- 1) Construiți un algoritm în R care simulează 10^6 valori pentru v.a. T și în baza acestora aproximați $E(T)$. Reprezentați grafic într-o manieră adecvată valorile obținute pentru T . Ce puteți spune despre repartiția lui T ?
- 2) Calculați valoarea exactă a lui $E(T)$ și comparați cu valoarea obținută prin simulare.
- 3) În baza simulărilor de la 1) aproximați probabilitatea ca persoana A să finalizeze activitatea.
- 4) În baza simulărilor de la 1) aproximați probabilitatea ca persoana A să finalizeze activitatea într-un timp mai mic sau egal cu σ .
- 5) În baza simulărilor de la 1) determinați timpul minim și respectiv timpul maxim în care persoana A finalizează activitatea și reprezentați grafic timpii de finalizare a activității din fiecare simulare. Ce puteți spune despre repartiția acestor timpuri de finalizare a activității?
- 6) În baza simulărilor de la 1) aproximați probabilitatea ca persoana A să se oprească din lucru înainte de etapa k , unde $1 < k \leq n$. Reprezentați grafic probabilitățile obținute într-o manieră corespunzătoare. Ce puteți spune despre repartiția probabilităților obținute?

II. Construiți o aplicație Shiny([Shiny - Welcome to Shiny](#)) în care:

A. să reprezentați grafic funcțiile de repartiție pentru următoarele variabile aleatoare:

- 1) $X, 3-2X, X^2, \sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2$, unde X, X_1, X_2, \dots, X_n i.i.d. $\sim N(0,1)$, $n \in \mathbb{N}$ fixat
- 2) $X, 3-2X, X^2, \sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2$, unde X, X_1, X_2, \dots, X_n i.i.d. $\sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$
 $n \in \mathbb{N}$ fixat
- 3) $X, 2+5X, X^2, \sum_{i=1}^n X_i$, unde X, X_1, X_2, \dots, X_n i.i.d. $\sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$, $n \in \mathbb{N}$ fixat
- 4) $X, 3X-2, X^2, \sum_{i=1}^n X_i$, unde X, X_1, X_2, \dots, X_n i.i.d. $\sim \text{Pois}(\lambda)$, $\lambda > 0$, $n \in \mathbb{N}$ fixat
- 5) $X, 5X-4, X^3, \sum_{i=1}^n X_i$, unde X, X_1, X_2, \dots, X_n i.i.d. $\sim \text{Binom}(r, p)$, $r \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$,
 $n \in \mathbb{N}$ fixat

B. să construiți câte o funcție în R care afișează funcția pentru parametri particularizabili de către utilizator și calculează și media și varianța pentru v.a. X definită de:

- a) $f(x) = cx^4$, $x \in (0,2)$, $c \in \mathbb{R}$
- b) $f(x) = ax + bx^2$, $0 < x < 1$, $a, b \in \mathbb{R}$
- c) $f(x) = \frac{4}{x(x+1)(x+2)}$, $x \in \mathbb{N}^*$
- d) $f(x) = \lg\left(\frac{x}{x+1}\right)$, $x \in \{1, 2, \dots, 9\}$

$$e) f(x) = \frac{\theta^2}{1+\theta} (1+x)e^{-\theta x}, \quad x > 0, \quad \theta > 0$$

$$f) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^x, & x < 0 \\ \frac{1}{3}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3}e^{-(x-1)}, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$g) f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

III. Pentru v.a. X definită prin densitatea/funcția de masă de mai jos estimați parametrul teta prin metoda verosimilității maxime și prin metoda momentelor (pe foaie!), apoi construiți o funcție în R care preia eșantionul dat și întoarce estimațiile realizate în baza celor 2 estimatori. Comparați estimația dată de metoda verosimilității maxime cu valoarea lui teta dată de o metodă numerică.

$$a) f_{\theta}(x) = e^{-2\theta} \cdot \frac{(2\theta)^x}{x!}, \quad x \in \mathbb{N}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Eșantion:

8 12 6 14 9 12 15 7 15 7 10 10 14 9 12 15 11 6 8 6 8 8 9 12 13 10 11 11 13 15 10 8 7
8 13 9 9 13 12 9 10 6 10 8 10 11 12 11 9 10 7 8 8 16 7 15 10 10 8 14 13 4 11 13 6 9
13 10 10 12 11 5 6 4 9 6 9 7 13 9 11 5 5 9 15 10 11 10 14 7 11 9 14 10 5 10 8 12 13
11

$$b) f_{\theta}(x) = C_n^x \cdot \theta^x (1-\theta)^{1-x}, \quad x \in \{1, 2, 3, \dots, n\}, \quad \theta \in (0, 1), \quad n \text{ fixat}$$

Eșantion pentru $n=14$:

3 2 1 4 2 3 4 1 3 2 2 4 2 1 7 5 4 5 5 2 3 4 3 1 2 4 1 1 2 3 1 3 1 4 1 3 1 6 1 3 3 4 3 1 3 2 2 3 2 4
1 1 2 6 3 1 3 6 1 2 3 6 3 2 2 2 4 2 1 3 3 4 2 3 4 1 4 4 6 3 3 5 2 2 2 3 1 3 1 3 3 5 3 4 3 2 4 2 3 3

$$c) f_{\theta}(x) = e^{-\frac{x}{\theta}} \cdot \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha) \cdot \theta^{\alpha}}, \quad x \in (0, \infty), \quad \theta \in (0, \infty), \quad \alpha \in (0, \infty) \text{ fixat}$$

Eșantion pentru $\alpha = 7$:

6.269128 25.204245 13.994878 13.391437 11.458827 10.565065 11.706398 10.625808
7.485952 16.353358 9.277565 8.566438 14.788638 6.830955 9.542004 20.272463
36.562137 12.244005 16.084879 11.454008 15.592298 6.332908 13.106441 6.198981
15.726780 7.883712 35.124934 11.856011 13.766200 16.534869 16.803648 11.196542
19.785629 26.300717 21.270154 7.192149 5.882948 15.812796 10.963237 24.963600

13.802383 15.281262 10.310398 20.940469 23.992540 15.869985 12.041726 12.521264
 10.869006 15.386514 14.636832 18.104562 17.029779 4.506616 20.941222 12.050877
 9.757833 20.070802 12.472900 6.474476 15.059776 13.157344 9.124414 13.768482
 24.354934 12.363936 11.110749 9.092514 17.856801 14.757801 13.898665 9.119410
 11.430184 11.958829 13.516191 10.701083 14.713596 10.121266 16.945351 13.524070
 14.742403 19.165805 10.338392 12.327837 19.619227 7.328246 14.894399 19.631003
 7.622796 12.343832 13.138183 10.061520 17.674638 9.675168 12.115561 15.182861
 13.292479 17.888244 16.695139 2.952334

d) $f_{\theta}(x) = \frac{\theta^x}{(1+\theta)^{1+x}}, x \in \mathbb{N}, \theta \in (0, \infty)$

Eșantion:

6 3 24 24 4 56 10 13 2 28 24 2 22 11 2 8 118 2 14 19 7 9 8 189 2 9 21 6
 6 2 3 2 3 18 3 2 21 1 5 9 11 13 19 76 1 5 9 4 57 1 2 16 5 2 20 8 1
 40 6 4 19 6 3 2 4 9 1 5 10 12 6 525 19 6 17 2 5 159 5 62 6 3 45 21 23
 3 17 2 1 1 474 15 3 3 7 7 13 4 38 4

e) $f_{\theta}(x) = \frac{\alpha}{\theta} x^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}}, x \in (0, \infty), \theta \in (0, \infty), \alpha \in (0, \infty) \text{ fixat}$

Eșantion pentru $\alpha = 3$:

3.5930579 2.1027540 1.7820777 9.6550388 6.8803846 0.7388358 2.9194654 3.1178660
 1.2323236 2.9776820 1.1172078 2.4184586 3.3258971 1.9498871 2.6088612 3.9535062
 3.0389107 4.4226628 3.9366318 2.4551569 5.2814487 5.6778622 4.7683935 1.1581498
 3.1270783 4.1473311 7.4830426 1.1342893 1.7773392 7.7510826 1.3919927 2.3613291
 2.6234826 1.6562602 1.4992235 2.3455062 3.8458809 5.8333841 3.3834034 1.5202546
 3.1248186 5.3029567 3.6225571 4.8309931 3.1579595 3.2640258 3.9538891 4.0796841
 4.0991772 3.2779944 2.5002127 3.0654695 1.6996010 3.2175175 1.9033087 4.4052061
 2.3158379 2.4778345 5.4382190 4.9141207 6.0978745 1.1428936 3.5639106 7.4541937
 7.7778289 3.2859563 0.7432908 1.4442696 3.6619932 2.8361371 4.3180773 1.6763585
 4.4464154 2.5049617 0.4448735 5.0518839 3.4151834 1.6823650 5.4517583 2.8212788
 2.1566837 2.9893287 1.6925123 6.5197938 4.2165408 1.6728425 2.7650830 2.6742755
 2.9622047 0.7809781 1.3913415 5.3430751 2.4859925 3.7329465 6.3129236 0.6635228
 3.7640343 2.1850174 4.3773328 5.0931544