Izračun porazdelitve temperature v 2D prerezih

Projektna naloga pri predmetu Napredna računalniška orodja

Matic Brank, dr. Jernej Kovačič, prof. dr. Janez Povh, prof. dr. Leon Kos

December, 2023

Kazalo

1 Teorija

1.1 Prenos toplote v 2D prerezu

V tem projektu bomo obravnavali časovno neodvisen primer prenosa toplote v 2D prerezu, kjer bomo za dane robne pogoje izračunali porazdelitev temperatur. Pri tem bomo predpostavili temperaturno neodvisno toplotno prevodnost in robne pogoje. Hkrati bomo zanemarili notranjo generacijo toplote. Pri teh pogojih je prenos toplote po trdnini definiran kot

$$\frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k\frac{\partial T}{\partial y}) + q = 0 \tag{1}$$

Za rešitev diferencialne enačbe moramo na mejah računske domene (2D prerez) definirati robne pogoje. To so lahko:

- temperatura $T[^\circ C]$
- toplotni tok $[W/m^2]$
- prestop toplote s toplotno prestopnostjo $h[W/m^2K]$ in temperaturo okoliške tekočine $T_{ext}[^\circ C]$

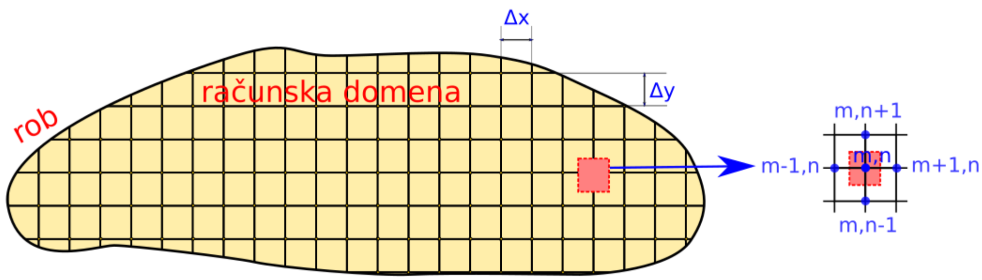
Pri stacionarnem dvodimenzionalnem prevodu toplote z zgoraj omenjenimi pogoji sledi iz (1)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

1.2 Metoda končnih razlik

V inženirskih aplikacijah se pogosto zgodi, da imamo kompleksen prerez, kjer analitična rešitev diferencialne enačbe ni mogoča. V takih primerih posežemo po numeričnih metodah, kot so metoda končnih razlik (MKR), metoda končnih elementov (MKE), metoda končnih volumnov (MKV), itd.

Pri tej projektni nalogi bomo uporabili metodo končnih razlik. Metoda končnih razlik je numerična metoda, ki služi reševanju diferencialnih enačb. Diferencialno enačbo iskane funkcije v danem prostoru rešujemo numerično tako, da odvode funkcije aproksimiramo s



$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{m-1/2,n} = \frac{T_{m,n} - T_{m-1,\,n}}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{m+1/2,n} = \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x}$$

Slika 1: Prikaz mreže.

kvocientom razlik. Od tod tej metodi tudi ime. Pri izbrani mreži točk oziroma vozlišč v prostoru nas omenjen način privede do sistema (diferenčnih) enačb za funkcijske vrednosti v teh vozliščih. Glejte sliko 1.

1.2.1 Mreža

Kot rečeno, je rešitev po metodi MKE dana v diskretnih točkah. Pri tej metodi moramo obravnavano območje popisati s strukturirano mrežo pravokotnikov (Slika 1). V robnih točkah mreže pa definiramo vnaprej predpisane robne pogoje.

1.2.2 Rešitev po MKE

Drugi odvod v enačbi (2) se lahko v vozlišču definira kot

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{m,n} \approx \frac{\partial T/\partial x|_{m+1/2,n} - \partial T/\partial x|_{m-1/2,n}}{\Delta x} \tag{3}$$

Iz enačbe (3) se tempreaturni gradient lahko izrazi kot

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{m+1/2,n} \approx = \frac{T_{m+1,n} - T_m}{\Delta x} \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{m-1/2,n} \approx= \frac{T_m - T_{m+1,n}}{\Delta x} \tag{5}$$

Če vstavimo enačbi (4) in (5) v (3), dobimo

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{m,n} \approx \frac{T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n}}{(\Delta x)^2} \tag{6}$$

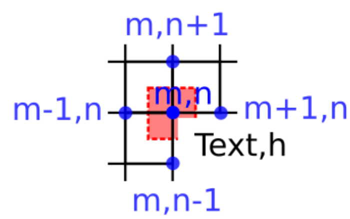
Enako dobimo za koordinato y

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right|_{m,n} \approx \frac{T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n}}{(\Delta y)^2} \tag{7}$$

1.2.3 Robni pogoji

Vozlišča na robovih moramo definirati preko sledečih enačb.

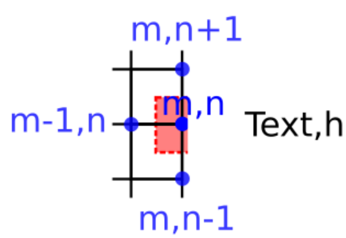
Prestop toplote na notranjem kotu



Slika 2: Enačba za prestop toplote na notranjem kotu.

$$2(T_{m-1,n} + T_{m,n+1}) + (T_{m+1,n} + T_{m,n-1}) + 2\frac{h\Delta x}{k}T_{ext} - 2(3 + \frac{h\Delta x}{k})T_{m,n} = 0 \tag{8}$$

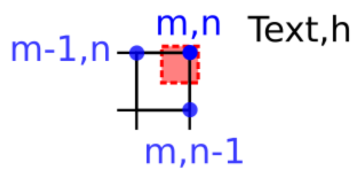
Prestop toplote na robu



Slika 3: Enačba za prestop toplote na robu.

$$2(T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1}) + 2\frac{h\Delta x}{k}T_{ext} - 2(\frac{h\Delta x}{k} + 2)T_{m,n} = 0 \tag{9}$$

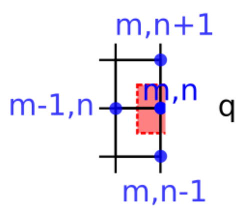
Prestop toplote na zunanjem kotu



Slika 4: Enačba za prestop toplote na zunanjem kotu.

$$(T_{m,n-1} + T_{m-1,n}) + 2\frac{h\Delta x}{k}T_{ext} - 2(\frac{h\Delta x}{k} + 1)T_{m,n} = 0 \tag{10}$$

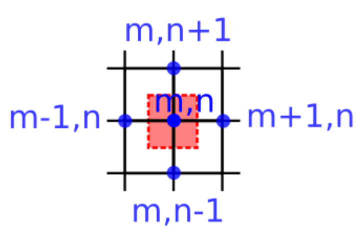
Toplotni tok na robu



Slika 5: Enačba za toplotni tok kot robni pogoj.

$$(2T_{m-1,n} + T_{m,n-1} + T_{m,n+1}) + 2\frac{q\Delta x}{k} - 4T_{m,n} = 0 \tag{11}$$

Vozlišče v notranjosti



Slika 6: Enačba za temperaturo v notranjosti.

$$T_{m-1,n} + T_{m+1,n} + T_{m,n-1} + T_{m,n+1} - 4T_{m,n} = 0 \tag{12}$$

1.2.4 Rešitev sistema enačb

Enačb imamo toliko, kot imamo vozlišč. Ko sestavimo enačbe za vsako vozlišče, dobimo

$$a_{11}T_1 + a_{12}T_1 + a_{13}T_1 + ... + a_{1N}T_N = C1 \tag{13}$$
$$a_{21}T_1 + a_{22}T_1 + a_{23}T_1 + ... + a_{2N}T_N = C1 \tag{14}$$
$$a_{31}T_1 + a_{32}T_1 + a_{33}T_1 + ... + a_{3N}T_N = C1 \tag{15}$$
$$\vdots$$
$$a_{N1}T_1 + a_{N2}T_1 + a_{N3}T_1 + ... + a_{NN}T_N = C1 \tag{16}$$
$$\tag{17}$$

Oziroma v matrični obliki

$$[A][T] = [b] \tag{18}$$

kjer je

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2N} \\ \vdots & ... & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{NN} \end{bmatrix}, [T] = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_N \end{bmatrix}, [b] = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} \tag{19}$$

2 Primer

Za boljše razumevanje si poglejmo sledeč primer:

Dolžina stranice je $\Delta x = \Delta y = 1m$. Koeficient toplotne prevodnosti je $k = 1$. Na sliki 7 imamo podana robna vozlišča s sledečimi robnimi pogoji

- Vozlišča z identifikacijsko številko 0,4,8,12 imajo temperaturo $50°C$

- Vozlišča 1,2, 3 imajo temperaturo $100°C$
- Vozlišča 13, 14, 15 imajo temperaturo $300°C$
- Vozlišči 7, 11 imata temperaturo okoliškega fluida $T_{ext} = 200°C$ in koeficient prestopnosti $h = 1000[W/m^2K]$

Notranja vozlišča 5,6,9,10 imajo neznano temperaturo, zato za njih zapišemo enačbe iz slike 6:

$$T_4 + T_6 + T_9 + T_1 - 4T_5 = 0 \tag{20}$$

$$T_5 + T_7 + T_{10} + T_2 - 4T_6 = 0 \tag{21}$$

$$T_8 + T_{10} + T_{13} + T_5 - 4T_9 = 0 \tag{22}$$

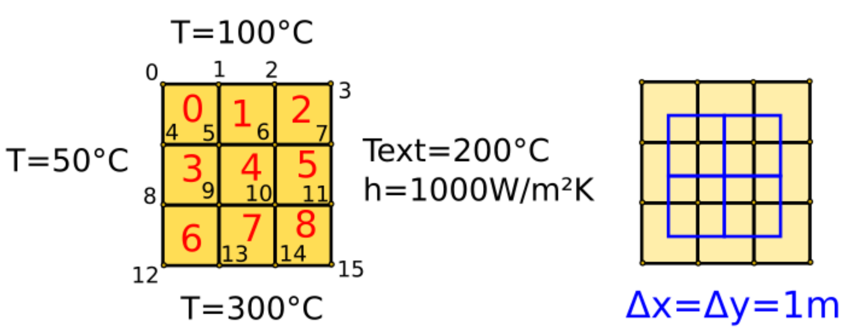
$$T_9 + T_{10} + T_{14} + T_6 - 4T_{10} = 0 \tag{23}$$

$$\tag{24}$$

Prav tako ne poznamo temperature v robnih vozliščih 13 in 14. Tudi tu moramo zapisati enačbi

$$2T_6 + T_3 + T_{11} - 2(\frac{h\Delta(x)}{k} + 2)T_7 = -\frac{2h\Delta x}{k}T_{ext} \tag{25}$$

$$2T_{10} + T_7 + T_{15} - 2(\frac{h\Delta(x)}{k} + 2)T_{11} = -\frac{2h\Delta x}{k}T_{ext} \tag{26}$$



Slika 7: Primer mreže in robnih pogojev.

V matrični obliki celoten sistem enačb izgleda takole

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -2004 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -2004 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \\ T_9 \\ T_{10} \\ T_{11} \\ T_{12} \\ T_{13} \\ T_{14} \\ T_{15} \\ T_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \\ -4e5 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \\ -4e5 \\ 50 \\ 300 \\ 300 \\ 300 \end{bmatrix} \tag{27}$$

2.1 Rešitev sistema enačb

Obstaja več metod za rešitev sistema enačb. Poglejmo si eno izmed enostavnejših, metodo Gauss-Seidel. Psevdokoda v pythonu je podana kot

```
Algoritem:

// nastavimo zacetno resitev vektorja, ki vsebuje neznanke temperature
// to je lahko robni pogoj, npr za 100 stopinj
T = np.ones(length)*100
for ii in range(iterations):
    // stevilo vozlisc
    n = len(A)
```

```
// for zanka za izracun T
for j in range(0, n):
    d = b[j]

    / izracunamo trenutno vrednost d
    for i in range(0, n):
        if(j != i):
             d -= A[j][i] * T[i]
    // posodobimo vrednost re\v{s}itve v trenutni iteraciji
    T[j] = d / A[j][j]
// Vrnemo resitev v  trenutni iteraciji
```

Rešitev sistema enačb iz primera po 700 iteracijah je $T_0 = 50$; $T_1 = 100$; $T_2 = 100$; $T_3 = 100$; $T_4 = 50$; $T_5 = 118.74454103$; $T_6 = 156.22738738$; $T_7 = 199.90644255$; $T_8 = 50.$; $T_9 = 168.75077674$; $T_{10} = 206.25856593$; $T_{11} = 200.05609959$; $T_{12} = 50.$; $T_{13} = 300.$; $T_{14} = 300.$; $T_{15} = 300$.

3 Naloga

Za 2D presek imate definirano kvadratno mrežo, ki je podana v vhodni datoteki "primerXmreza.txt". Struktura je sledeča

```
tocke N // N je stevilo tock
0;x0;y0
...
N;xN;yN

celice M // M je stevilo celic
0; id0, id1, id2, id3
1; id4, id5, id6, id7
```

```
...
M; id, id, id, id

robni pogoji K // K je stevilo robnih pogojev
pogoj 1: temperatura
temperatura: T
b1_Nb // b1_Nb je stevilo vozlisc v robnem pogoju 1
b1_0
b1_1
...
b1_N

pogoj 2: toplotni tok
toplotni tok: q
b2_Nb // b2_Nb je stevilo vozlisc v robnem pogoju 2
b2_0
b2_1
...
b2_N

pogoj 3: prestop
temperatura: T
koeficient prestopa: h
b3_Nb // b2_Nb je stevilo vozlisc v robnem pogoju 3
b3_0
b3_1
...
b3_N
```

3.1 Navodila

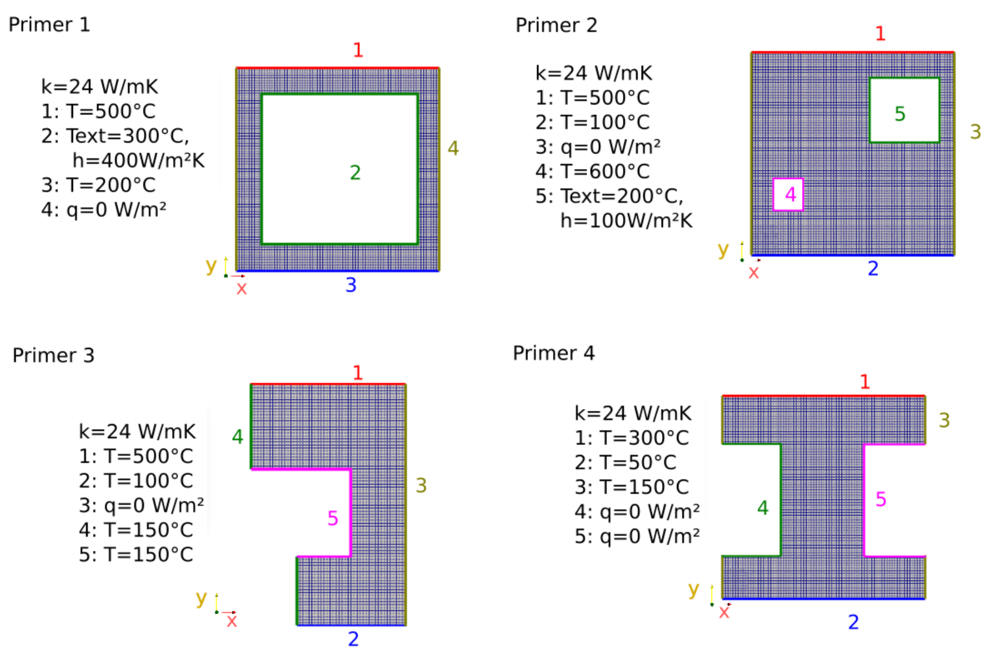
Izdelajte računalniški program v C++, ki:

- prebere omenjeno datoteko
- sestavi matriko A in vektor b.
- Nato reši sistem enačb.
- Rešitev nato shranite v VTK format in jo prikažite v okolju ParaViev.

Shranite matriko A in vektor b ter ju uvozite v MATLAB ali Mathematico. Tam rešite sistem enačb z uporabo ene izmed vgrajenih funkcij za reševanje enačb. Primerjajte hitrost izvajanja programa. Kateri program (c++ ali MATLAB/Mathematica) je hitrejši? Poskusite optimirati delovanje c++ programa in izboljšati hitrost preračuna.

4 Dodelitev primerov

Projektno nalogo delate v parih. V pare se povežite sami. Vsakemu posamezniku v paru je dodeljen eden izmed štirih primerov, glejte tabelo 1. Znotraj para izberete primer posameznika, ki je prvi po abecednem redu po priimku. Posamezni primeri so podani spodaj na sliki 8.



Slika 8: Skice primerov.

Vpisna številka	primer	Vpisna številka	primer	Vpisna številka	primer
23211122	1	23211364	2	23211267	3
23211107	2	23211305	3	23211268	4
23211092	3	23211033	4	23211321	1
23211177	4	23211218	1	23211082	2
23211163	1	23211023	2	23211075	3
23211208	2	23211199	3	23211330	4
23211240	3	23211180	4	23211220	1
23211100	4	23211051	1	23211085	2
23211315	1	23211186	2	23211147	3
23211225	2	23211291	3	23211243	4
23211336	3	23211285	4	23211143	1
23211061	4	23211048	1	23211226	2
23211062	1	23211355	2	23211011	3
23211050	2	23211149	3	23211301	4
23211234	3	23211080	4	23211202	1
23211072	4	23211233	1	23211297	2
23211155	1	23211182	2	23211136	3
23211029	2	23211087	3	23211227	4
23211172	3	23211306	4	23211047	1
23224018	4	23211003	1	23211332	2
23180149	1	23211128	2	23211166	3
23200189	2	23200338	3	23211097	4
23211168	3	23211290	4	23211108	1
23211118	4	23211109	1	23200280	2
23211184	1	23211193	2	23211246	3

Tabela 1: Dodelitev primerov. Projektno nalogo delate v parih. V pare se povežite sami. Vsakemu posamezniku v paru je dodeljen eden izmed štirih primerov. Znotraj para izberete primer posameznika, ki je prvi po abecednem redu po priimku.

4.1 Splošna priporočila za delo

Noben program ne deluje na mah. Ker je problem večplasten, se ga je potrebno lotiti sistematično. Znotraj para si delo razdelite. Najprej napišite enostavnejše dele programa. Posamezne dele programa sproti testirajte. Začnite z majhnimi funkcijami, preverite njihovo delovanje in jih nato postopoma nadgrajujte. Pomembno je tudi dokazovanje pravilnosti delovanja, kjer si logično razlagamo obnašanje programa za različne vhodne parametre.

5 Oddaja

Za oddajo pripravite tudi poročilo v LaTeX. V poročilu opišite problem in razložite vaš program. Poročilo arhivirajte skupaj s prilogami (izvorna koda) in naložite na spletno učilnico **do 24.1.2024**.

Viri

[1] Frank P. Incropera - Fundamentals of Heat and Mass Transfer-Wiley (2006)