UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Matej Novoselec

Schwarzov princip zrcaljenja za harmonične funkcije

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Barbara Drinovec Drnovšek

Ljubljana, 2023

Kazalo

1. Uvod 4
2. Harmonične funkcije 4
3. Dirichletov problem za enotski disk 5
4. Lastnost povprečne vrednosti 10
5. Schwarzov princip zrcaljenja za harmonične funkcije 12

Literatura 13

Schwarzov princip zrcaljenja za harmonične funkcije

Povzetek

Schwarz Reflection Principle for Harmonic Functions

Abstract

Math. Subj. Class. (2020):
Ključne besede:
Keywords:

1. Uvod

Znotraj diplomske naloge bomo spoznali osnovne lastnosti harmoničnih fukcij, ki jih bomo proti koncu s pridom uporabili za dokaz glavnega izreka, katerega ime nosi naslov naloge. Ves čas se bomo opirali in vlekli številne vzporednice s kompleksno analizo. Gre za področje, močno povezano s študijo harmoničnih funkcij.
V prvem poglavju, bomo spoznali kaj so harmonične funkcije in poudarili, katere njihove lastnosti bodo za nadaljevanje pomembne. Ogledali si bomo tudi njihov odnos s holomorfnimi funkcijami. Znotraj drugega poglavja bomo spoznali Dirichletov problem za enostki disk, ki nam bo dal osnovo za definicijo Poissonovega jedra in Poissonovega integrala. Ogledali si bomo nekaj lastnosti obeh definiranih pojmov in z njuno pomočjo rešili na začetku poglavja zastavljen Dirichletov problem. Tretje poglavje je namenjeno karakterizaciji harmoničnih funkcij s pomočjo lastnosti povprečne vrednosti in analizi pomembnosti te karakterizacije. V zadnjem poglavju, bomo s pomočjo orodij, spoznanih v prejšnih poglavjih, navedli in dokazali glavni izrek diplomskega dela - Schwarzov princip zrcaljenja za harmonične funkcije.

2. Harmonične funkcije

Definicija 2.1. Funkcija $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je **harmonična**, če velja

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0.$$

Operatorju $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ pravimo Laplaceov operator in pišemo

$$\Delta u = 0.$$

Pogoj za harmoničnost funkcije podaja (Laplaceovo) parcialno diferencialno enačbo, zapisano bodisi s Laplaceovim operatorjem ali razpisano s parcialnimi odvodi drugega reda. Drugače rečeno, funkcija je harmonična, če zadošča zgoraj zapisani parcialni diferencialni enačbi. Po tihem tu seveda privzemamo obstoj (vsaj) drugih parcialnih odvodov, saj drugače o harmoničnosti funkcije ne moremo govoriti.

Opomba 2.2. Vredno je omeniti, da nismo specificirali ali gre pri funkciji u (harmoničnost katere bi radi opazovali) za realno ali kompleksno funkcijo. Pojem harmoničnosti smo definirali v splošnem, torej tako za kompleksne, kot tudi realne funkcije. Znotraj diplomske naloge, se bomo omejili na funkcije dveh realnih spremenljivk ali funkcijo ene kompleksne spremenljivke, ki jo bomo nato delili na realni in imaginarni del ($z = x + iy$) in na ta način prešli nazaj na funkcije dveh realnih spremenljivk. Pogoj za harmoničnost takrat zapišemo kot:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Trditev 2.3. *Naj bo $f = u + iv$ holomorfna funkcija. Potem sta funkciji u in v harmonični. Rečeno drugače, realni in imaginarni del holomorfne sta harmonični funkciji.*

Dokaz. Z uporabo Cauchy-Riemannovega sistema enačb lahko bralec sam hitro preveri, da trditev drži. □

Definicija 2.4. Naj bo funkcija u na območju D harmonična. Če obstaja harmonična funkcija v, definirana na D, tako da je funkcija $f + u + iv$ na D holomorfna, potem funkciji v pravimo **harmonična konjugiranka funkcije** u (na D).

Trditev 2.5. *Naj bo u harmonična funkcija, definirana na zvezdastem območju D. Potem za u na D obstaja harmonična konjugiranka v in je do konstante natančno enolično določena.*

Dokaz. Konstrukcijo harmonične konjugiranke, si bralec za primer, ko je zvezdasto območje kar odprt disk lahko ogleda v [1]. Ideja dokaza v splošnem je podobna. □

Opomba 2.6. V duhu zgornjih dveh trditev, je velikokrat smiselno na harmonične funkcije gledati kot na realne dele holomorfnih funkcij. Prav to že nekako nakazuje, da se bodo vsaj nekatere "lepe/željene"lastnosti, ki jih holomorfne funkcije imajo, prenesle tudi na harmonične funkcije.

Opomba 2.7. Očitno, vendar le vredno spomniti, je da je zaradi linearnosti parcialnih odvodov tudi linearna kombinacija harmoničnih funkcij harmonična. To bomo pri reševanju enega izmed glavnih problemov diplomskega dela s pridom uporabili.

Opomba 2.8. V literaturi se v definiciji harmoničnosti za funkcijo u pojavlja tudi zahteva, da je funkcija gladka, oziroma $u \in C^\infty$. V zgornji definiciji zahtevamo le obstoj drugih parcialnih odvodov, oziroma $u \in C^2$. Nekoliko kasneje v diplomskem delu, bomo pokazali, da gladkost u ni potrebna predpostavka, saj lahko z nekaj znanja kompleksne analize gladkost u izpeljemo iz harmoničnosti u in s tem pokažemo ekvivalentnost definicij.

3. Dirichletov problem za enotski disk

Problem 3.1. Naj bo $\mathbb{D}$ enotski disk. Zvezno kompleksno funkcijo h, definirano na $\partial\mathbb{D}$, razširi do zvezne funkcije $\widetilde{h}$, tako da bo $\widetilde{h}$ harmonična na $\mathbb{D}$ in zvezna na $\overline{\mathbb{D}}$, ter se bo zožitev $\widetilde{h}$ na $\partial\mathbb{D}$ ujemala s h.

Opomba 3.1. Kot je bilo to že komentirano po definiciji 2.1, so funkcije harmonične, natanko tedaj ko zadoščajo Laplaceovi parcialno diferencialni enačbi. Vredno je omeniti, da lahko na Direchletov problem za enotski disk gledamo tudi iz stališča teorije diferencialnih enačb. Gre za problem iskanja funkcije, ki na notranjosti območja (v našem primeru kar notranjost enotskega diska), reši Laplaceovo diferencialno enačbo, ob robnem pogoju, ki ga določa v naprej podana funkcija na robu območja (v našem primeru začetna zvezna funkcija, podana na enotski krožnici). Navadno se v teoriji parcialnih diferencialnih enačb srečamo s tako imenovanimi dobro postavljenimi matematičnimi problemi, o katerih si bralec več lahko prebere na REFERENCA. Spodaj se bomo le seznanili z njihovo definicijo in pokazali, da zgoraj zastavljen Dirichletov problem ustreza definiciji.

Definicija 3.2 (J. Hadamard 1902)**.** Pravimo, da je matematičen problem (parcialno diferencialnih enačb z robnimi in začetnimi pogoji) **dobro postavljen**, če zanj velja:

- rešitev problema obstaja,
- rešitev problema je ena sama, oziroma rešitev je enolično določena,
- rešitev je zvezno odvisna od začetnih podatkov problema.

Lema 3.3. *Če rešitev za Dirichletov problem na enotskem disku obstaja, je enolično določena.*

Dokaz. Denimo, da obstajata dve rešitvi Dirichletovega problema za enotski disk, h_1 in h_2. Oglejmo si razliko $h_1 - h_2$. Vemo, da je njuna razlika na $\partial\mathbb{D}$ enaka 0, saj so njune vrednosti (kot rešitvi problema) enake vrednostim h. Zaradi harmoničnosti h_1 in h_2 po principu o maksimu za harmonične funkcije vemo, da je njuna razlika ničelna tudi na $\mathbb{D}$. Sledi enakost h_1 in h_2 tudi na $\mathbb{D}$ in protislovje. $\square$

Opomba 3.4. Po lemi 3.3, opazimo, da je rešitev problema največ ena, zato se je dovolj posvetiti konstrukciji potencialne rešitve. Opazimo, da lahko spremenljivko $z \in \partial\mathbb{D}$, funkcije h, zamenjamo z $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$, ter funkcijo $h(z)$ pišemo kot kompozitum $h(e^{i\theta})$. Poskusimo sedaj skonstruirati (harmonično) razširitev, ki bo zadoščala Dirichletovemu problemu za zvezno funkcijo $h(e^{i\theta})$.

Konstrukcija. Kot velikokrat v matematiki, se najprej posvetimo enostavnim primerom in si nato teorijo oziroma konstrukcijo oglejmo v splošnem. Naravno je za enostavne zvezne funkcije, definirane na $\partial\mathbb{D}$, vzeti kar polinome. V luči opombe 3.4 je polinomska spremenljivka lahko kar $e^{i\theta}$, s pomočjo opombe 2.7, pa vidimo, da zadošča rešitve poiskati za posamezne faktorje polinoma, oziroma monome. Zato si oglejmo funkcije oblike $h(e^{i\theta}) = e^{ik\theta}, k \in \mathbb{Z}$, ter za njih poskusimo skonstruirati željeno razširitev. Brez večjih težav opazimo, da se nam v te primeru pojavlja preprosta eksplicitna razširitev s predpisom $\widetilde{h}(re^{i\theta}) = r^{|k|}e^{ik\theta}$, za $r \in [0,1]$ in $\theta \in [0, 2\pi]$. Tako predpisana razširitev je za $k \geq 0$ očitno harmonična na $\mathbb{D}$ ($r^k e^{ik\theta} = z^k$ je namreč celo holomorfna funkcija), pri $k < 0$ pa dobimo razširitev, ki v splošnem ni holomorfna, a kljub temu je harmonična ($r^{-k}e^{ik\theta} = \overline{z}^{-k}$, kar je monom v konjugirani spremenljivki, ki je harmoničen). Prav tako je za vsak $k \in \mathbb{D}$ razširitev očitno zvezna na $\overline{\mathbb{D}}$ in se na $\partial\mathbb{D}$ ujema z začetnimi pogoji (robnimi vrednosti podane funckije h), zato je res po lemi 3.3 enolična rešitev Dirichletovega problema. Kot že omenjeno, lahko sedaj postopamo po linearnosti in za začetne funkcije oblike $h(e^{i\theta}) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{ik\theta}$, konstruiramo razširitev s predpisom $\widetilde{h}(re^{i\theta}) = \sum_{k=-N}^{N} a_k r^{|k|} e^{ik\theta}$. Smiselno bi bilo, predvsem v eksplicitnem predpisu razširitve, koeficiente a_k izraziti direktno prek funkcije h. V ta namen si oglejmo $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ij\theta}e^{-ik\theta}d\theta$. S hitrim izračunom hitro preverimo tako imenovano ortogonalno relacijo med kompleksnimi eksponenti:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ij\theta}e^{-ik\theta}\frac{d\theta}{2\pi} = \begin{cases} 1; & j = k \\ 0; & j \neq k \end{cases} .$$

Zgornja relacija nam pri $h(e^{i\theta}) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{ik\theta}$, omogoča izražavo koeficientov a_k kot:

$$a_k = \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{i\theta})e^{-ik\theta}\frac{d\theta}{2\pi}.$$

Sedaj lahko koeficiente izrazimo:

$$\sum_{k=-N}^{N} a_k r^{|k|} e^{ik\theta} = \sum_{k=-N}^{N} \left(\int_{-\pi}^{\pi} h(e^{i\varphi})e^{-ik\varphi}\frac{d\varphi}{2\pi} \right) r^{|k|}e^{ik\theta},$$

zamenjamo vsoto in integral, ter brez škode iteracijsko območje vsote razširimo na vsa cela števila (pri dodanih indeksih je člen vsote ničeln). Dobimo željeni ekspliciten zapis:

$$\text{(P)} \qquad \widetilde{h}(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{i\varphi}) \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{-ik\varphi}e^{ik\theta} \right] \frac{d\varphi}{2\pi}, \quad re^{i\theta} \in \overline{\mathbb{D}}.$$

Že iz načina konstrukcije in sprotnih komentarjev je jasno, da funkcija te oblike, za primere, ko je h (trigonometričen) polinom reši Dirichletov problem. Sedaj bomo zgornjo funkcijo, ki smo jo na intuitiven način konstruirali s pomočjo začetnega pogoja preprostih zveznih funkcij h (katere vrednosti poznamo na $\partial\mathbb{D}$) vzeli za definicijo novega pojma in z njegovo pomočjo prišli do rešitve/razširitve za splošno začetno zvezno funkcijo h.

Definicija 3.5. **Poissonovo jedro** je funkcija definirana s predpisom

$$P_r(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik\theta}, \text{ kjer je } \theta \in [-\pi, \pi] \text{ in } r < 1.$$

Na Poissonovo jedro lahko gledamo kot funkcijo dveh spremenljivk (θ in r) ali pa kot družino funkcij, indeksiranih s parametrom r.
Smiselno se je vprašati, ali je za vsako vrednost iz zapisanega definicijskega območje Poissonovega jedra vrsta na desni strani definicijske enakosti sploh konvergira. Potencialne strahove pomiri naslednja trditev.

Trditev 3.6. *Za vsak fiksen $\rho < 1$, vrsta, definirana s Poissonovim jedrom konvergira enakomerno za vsak $r \leq \rho < 1$ in vsak $-\pi \leq \theta \leq \pi$.*

Dokaz. Za vsak člen vrste velja $|r^{|k|}e^{ik\phi}| \leq \rho^{|k|}$, zato po Weierstrassovem M-testu velja, da vrsta konvergira enakomerno. □

Definicijo Poissonovega jedra, bi lahko ekvivalentno zapisali tudi kot:

$$P_r(\theta) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} z^k + \sum_{j=1}^{\infty} \overline{z}^j, \text{ kjer } z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}, \quad \text{oziroma} \tag{1}$$

$$P_r(\theta) = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta)}, \text{ kjer } z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}. \tag{2}$$

Pokazati ekvivalentnost definicije z zapisom 1 je dokaj trivialno, vrsto v definiciji le razbijemo na tri dele (glede na predznačenost iterativnega indeksa) in člen vsake izmed vsot zapišemo s kompleksno spremenljivko. Za dokaz ekvivalence z drugo alternativno definicijo se moramo nekoliko bolj potruditi in pomagati z 1. Vrsti v 1 sta definirani za notranjost enotskega diska (kjer je absolutna vrednost manjša od 1), zato obe vrsti konvergirata in ju lahko seštejemo s pomočjo formule za geometrijsko vrsto. Prek enakosti $|1-z|^2 = (\overline{1-z})(1-z) = (1-\overline{z})(1-z) = 1 + r^2 - 2r\cos(\theta)$ dobimo ekvivalenco z zapisom 2:

$$P_r(\theta) = 1 + \frac{z}{1-z} + \frac{\overline{z}}{1-\overline{z}} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta)}.$$

Preden se lotimo uporabe novo definiranega pojma, si oglejmo še nekaj njegovih lastnosti.

Trditev 3.7. *Funkcija Poissonovega jedra ima naslednje lastnosti:*

(1) funkcija Poissonovega jedra je periodična s periodo 2π,
(2) za vsak fiksen $r \in [0,1) : \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\frac{d\theta}{2\pi} = 1$,
(3) za vsak fiksen $r \in [0,1)$ in $-\pi \leq \theta \leq \pi : P_r(\theta) > 0$,
(4) za vsak fiksen $r \in [0,1)$ in $-\pi \leq \theta \leq \pi : P_r(-\theta) = P_r(\theta)$,
(5) za vsak fiksen $r \in [0,1) : P_r(\theta)$ na $-\pi \leq \theta \leq 0$ narašča in na $0 \leq \theta \leq \pi$ pada,
(6) za vsak fiksen $\delta > 0 : max\{P_r(\theta) \mid \delta \leq |\theta| \leq \pi\} \to 0$ ko gre $r \to 1$,
(7) Poissonovo jedro je kot funkcija dveh spremenljivk (r in θ) harmonična.

Dokaz.

(1) Periodičnost funkcije, s periodo 2π, je zaradi definiranosti prek vsote členov $e^{ik\theta}$ očitna.
(2) Oglejmo si P in vzemimo $h \equiv 1$. Dobimo:

$$\widetilde{h}(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik(\varphi-\theta)} \right] \frac{d\varphi}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\varphi - \theta) \frac{d\varphi}{2\pi}.$$

Opazimo, da $\widetilde{h} \equiv 1$ reši Dirichletov problem, zato je po lemi 3.3 edina rešitev. Uporabimo translacijo $\varphi \mapsto \varphi - \theta$ za uvedbo nove spremenljivke v integral, ter ob upoštevanju periodičnosti dobimo:

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\varphi - \theta) \frac{d\varphi}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\varphi) \frac{d\varphi}{2\pi}.$$

(3) Trditev očitno sledi iz definicije 2.
(4) Trditev očitno sledi iz definicije 2.
(5) Trditev očitno sledi iz definicije 2.
(6) TODO
(7) Po trditvi 2.3 zadošča pokazati, da lahko Poissonovo jedro zapišemo kot realni del holomorfne funkcije (definirane na $\mathbb{D}$). Opazimo, da po 1 to res lahko storimo kot:

$$P_r(\theta) = 1 + 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{z}{1-z} \right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1+z}{1-z} \right), \text{ za } z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}.$$

□

Opomba 3.8. Lastnosti Poissonovega jedra, navedene v trditvi 3.7, so tudi dobro razvidne na spodnji sliki.
SLIKA - GRAF POISSONOVEGA JEDRA
Vredno je omeniti tudi, da točki (2) in (3) trditve 3.7 nakazujeta, da funkcija $\frac{1}{2\pi} P_r(\theta)$ določa gostoto zvezno porazdeljene slučajne spremenljivke.

Sedaj se vrnimo k reševanju Dirichletovega problema za enotski disk. Spomnimo se, da smo za polinomske funkcije h skonstruirali predpis razširitve, ki je rešila zastavljen problem. Opazimo, da si sedaj lahko pomagamo z definiranim pojmom Poissonovega jedra in zapišimo:

$$\widetilde{h}(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{i\varphi}) \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{-ik\varphi} e^{ik\theta} \right] \frac{d\varphi}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{i\varphi}) P_r(\theta - \varphi) \frac{d\varphi}{2\pi}.$$

Če (trigonometričen) polinom $h(e^{i\theta})$ (ki bi seveda lahko zavzemal kompleksne vrednosti), zamenjamo s (trigonometričnim) polinomom $u(e^{i\theta})$, ki zavzema le realne vrednosti, se nam zgornja enakost v duhu točke (7) trditve 3.7, še olepša. Takrat lahko namreč za $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ pišemo:

$$\begin{aligned} \widetilde{u}(z) = \widetilde{u}(re^{i\theta}) &= \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{i\varphi}) P_r(\theta - \varphi) \frac{d\varphi}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{i\varphi})\, \mathrm{Re}\left(\frac{1 + re^{i(\theta-\varphi)}}{1 - re^{i(\theta-\varphi)}} \right) \frac{d\varphi}{2\pi} = \\ &\int_{-\pi}^{\pi} u(e^{i\varphi})\, \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\varphi} + re^{i\theta}}{e^{i\varphi} - re^{i\theta}} \right) \frac{d\varphi}{2\pi} = \mathrm{Re}\left[\int_{-\pi}^{\pi} u(e^{i\varphi}) \left(\frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} \right) \frac{d\varphi}{2\pi} \right]. \end{aligned} \tag{3}$$

Opazimo, da nam je uspelo $\widetilde{u}(z)$ za $z \in \mathbb{D}$ izraziti kot realni del holomorfne funkcije, ne le implicira harmoničnost predpisa (po trditvi 2.3) ampak tudi gladko odvisnost $\widetilde{u}(z)$ od spremenljivke/parametra z.

Posvetimo se sedaj nazaj iskanju splošne rešitve Dirichletovega problema. Zgoraj smo z intuitivno izpeljavo nevede že zapisali funkcijo, ki jo bomo sedaj vzeli za definicijo novega pojma, ter pokazali da tudi v splošnem pripelje do rešitve.

Definicija 3.9. **Poissonov integral**, ki ga označimo z $\widetilde{h}(z)$, od zvezne funkcije $h(e^{i\theta})$ je funkcija, definirana na enotskem disku s predpisom

$$\widetilde{h}(z) = \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{i\varphi}) P_r(\theta - \varphi)\, \frac{d\varphi}{2\pi}\ , \text{ kjer } \ z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}.$$

Opomba 3.10. Ekvivalentno bi lahko definicijo Poissonovega integrala, zaradi (2π) periodičnosti Poissonovega jedra, zapisali tudi kot:

$$\widetilde{h}(z) = \int_{-\pi}^{\pi} h\big(e^{i(\theta-\varphi)}\big) P_r(\varphi)\, \frac{d\varphi}{2\pi}\ , \text{ kjer } \ z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}.$$

Trditev 3.11. *Za preslikavo $\Phi : h \mapsto \widetilde{h}$, t.j. preslikavo, ki zvezni funkciji h, definirani na $\partial\mathbb{D}$ priredi njen Poissonov integral, velja:*

(1) Φ je linearna preslikava, t.j. $\Phi(c_1h_1 + c_2h_2) = c_1\widetilde{h_1} + c_2\widetilde{h_2}$,

(2) Φ "ohranja omejenost", t.j. če $|h| \le M$ na $\partial\mathbb{D}$, potem $|\widetilde{h}| \le M$ na $\mathbb{D}$.

Dokaz.

(1) Trditev trivialno sledi iz definicije Poissonovega integrala, zaradi linearnosti integrala.

(2) Trditev sledi iz točke (2) in (3) trditve 3.7.

□

Trditev 3.12. *Naj bo h zvezna kompleksna funkcija definirana na $\partial\mathbb{D}$. Rešitev Dirichletovega problema obstaja in ima vrednosti na $\mathbb{D}$ definirane kot Poissonov integral funkcije h.*
Rečeno drugače, Poissonov integral zvezne kompleksne funkcije, definirane na $\partial\mathbb{D}$ je zvezna harmonična funkcija, definirana na $\mathbb{D}$, ki nam ponuja zvezno harmonično razširitev h na $\overline{\mathbb{D}}$, če jo dodefiniramo na $\mathbb{D}$ z njenim Poissonovim integralom.

Dokaz. Trditev dokaži v dveh korakih. Najprej dokažimo, da je Poissonov integral na $\mathbb{D}$ harmonična funkcija. Vemo, da lahko vsako kompleksno funkcijo h zapišemo/razcepimo na njen realni in imaginarni del kot $h = u + iv$, pri čemer sta u in v funkciji (ene kompleksne ali dveh realni spremenljivk), z zalogo vrednostjo znotraj realnih števil. Zaradi linearnosti Poissonovega integrala, po trditvi 3.11 se lahko sedaj posebej skoncentriramo na Poissonov integral realnega ($\widetilde{u}$) in Poissonov integral imaginarnega ($\widetilde{v}$) dela. Tako, kot smo to naredili pri 3, lahko vsakega izmed Poissonovih integralov $\widetilde{u}$ in $\widetilde{v}$ zapišemo kot realni del neke holomorfne funkcije, kar nam po trditvi 2.3 implicira harmoničnost $\widetilde{u}$ in $\widetilde{v}$. Zaradi opombe 2.7, nam to implicira tudi harmoničnost $\widetilde{h} = \widetilde{u} + i\widetilde{v}$, ter dokaz prvega dela trditve.
Za dokaz zveznosti na $\overline{\mathbb{D}}$ se moramo nekoliko bolj potruditi. Uporabili bomo lastnosti Poissonovega jedra iz trditve 3.7. Ker je h na $\partial\mathbb{D}$ zvezna, je kot zvezna funkcija na kompaktu:

- omejena, t.j.: $\exists M : |h(e^{i\theta})| \le M$ in
- enakomerno zvezna, t.j.: $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 : |\theta - \varphi| < \delta \Rightarrow |h(e^{i\theta}) - h(e^{i\varphi})| < \epsilon$.

Po točki (2) iz trditve 3.7, lahko zapišemo:

$$\widetilde{h}(re^{i\theta}) - h(e^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} \Big[h\big(e^{i(\theta-\varphi)}\big) - h(e^{i\theta})\Big] P_r(\theta) \frac{d\varphi}{2\pi}.$$

Sedaj vzamemo absolutno vrednost leve in desne strani enakosti, ter uporabimo trikotniško neenakost. Dobimo:

$$|\widetilde{h}(re^{i\theta}) - h(e^{i\theta})| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \Big| h\big(e^{i(\theta-\varphi)}\big) - h(e^{i\theta}) \Big| P_r(\theta) \frac{d\varphi}{2\pi}.$$

Integral lahko razdelimo na dva dela, tako, da bomo lahko uporabili enakomerno zveznost funkcije:

$$|\widetilde{h}(re^{i\theta}) - h(e^{i\theta})| \leq \left(\int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta \leq |\varphi| \leq \pi} \right) \Big| h\big(e^{i(\theta-\varphi)}\big) - h(e^{i\theta}) \Big| P_r(\theta) \frac{d\varphi}{2\pi}.$$

Vrednosti znotraj prvega integral lahko zaradi enakomerne zveznosti navzgor ocenimo z ϵ, vrednosti znotraj drugega integrala, pa lahko prek omejenosti navzgor ocenimo kar z $2M$.

$$|\widetilde{h}(re^{i\theta}) - h(e^{i\theta})| \leq \epsilon \int_{-\delta}^{\delta} P_r(\theta) \frac{d\varphi}{2\pi} + 2M \int_{\delta \leq |\varphi| \leq \pi} P_r(\theta) \frac{d\varphi}{2\pi}.$$

Vsakega od integralov lahko sedaj v duhu točke (2) trditve 3.7 navzgor ocenimo in dobimo:

$$|\widetilde{h}(re^{i\theta}) - h(e^{i\theta})| \leq \epsilon + 2M \max\{P_r(\varphi) \mid \delta \leq |\varphi| \leq \pi\}.$$

Sedaj uporabimo točko (6) trditve 3.7, ki nam pove, da gre drugi sumand res proti 0, ko gre r proti 1. Torej, za vsak $\widetilde{\epsilon} > 0$, pri r, ki je dovolj blizu 1, velja, da $|\widetilde{h}(re^{i\theta}) - h(e^{i\theta})| < \widetilde{\epsilon}$. Zveznost in trditev je s tem dokazana.

□

Posledica 3.13. *Dirichletov problem za enotski disk, je dobro postavljen matematičen problem.*

Dokaz. Obstoj rešitve za vsako zvezno začetno podano funkcijo, nam (eksplicitno) zagotavlja trditev 3.12. Enoličnost rešitve, nam zaradi že zagotovoljenega obstoja zagotavlja lema 3.3, zvezna odvisnost rešitve od začetnih podatkov, pa je predpostavka problema (funkcija reši problem le v primeru, ko je zvezna na zaprtju enotskega diska, kar nam zagotavlja zvezno odvisnost od pogojev na robu diska oziroma zvezno odvisnost od začetnih pogojev). □

4. Lastnost povprečne vrednosti

Definicija 4.1. Zvezna funkcija h, definirana na območju $D \subseteq \mathbb{C}$ ima **lastnost povprečne vrednosti**, če za vsak $z_0 \in D$ obstaja $\epsilon_0 > 0$, da $\overline{\mathbb{D}}(z_0, \epsilon_0) \subseteq D$ in za vsak $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ velja:

$$h(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_0 + \epsilon e^{i\theta}) d\theta.$$

Opomba 4.2. Definicija nam pove, da ima zvezna funkcija h, definirana na območju $D \subseteq \mathbb{C}$, lastnost povprečne vrednosti, če za vsak z_0 iz D velja, da je $h(z_0)$ povprečje vrednosti $h(z)$, kjer z teče po majhni krožnici s središčem v z_0.

Trditev 4.3. *Naj bo u harmonična funkcija na območju $D \subseteq \mathbb{C}$. Če velja $\overline{\mathbb{D}}(z_0, \rho) \subseteq D$, potem velja:*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta, \quad \textit{kjer} \;\; 0 < r < \rho.$$

Dokaz. Diplomska naloga □

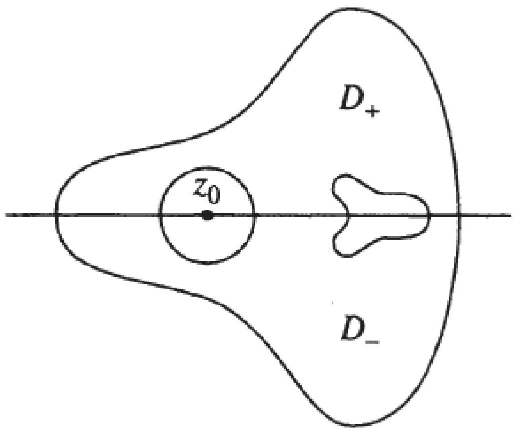
Opomba 4.4. Iz kompleksne analize vemo, da imajo holomorfne funkcije lastnost povprečne vrednosti, zgornja trditev pa nam pove, da imajo lastnost povprečne vrednosti tudi harmonične funkcije. Za harmonične funkcije velja celo več, da se jih namreč karakterizirati s pomočjo lastnosti povprečne vrednosti.

Trditev 4.5. *Naj bo h zvezna funkcija, definirana na območju $D \subseteq \mathbb{C}$. Velja, da je h harmonična funkcija, natanko tedaj, ko ima lastnost povprečne vrednosti.*

Dokaz. Diplomska naloga $\square$

5. Schwarzov princip zrcaljenja za harmonične funkcije

Izrek 5.1. *Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ območje, simetrično glede na realno os. Označimo $D^+ = D \cap \{Im > 0\}$. Naj bo $u(z) : D^+ \to \mathbb{R}$ harmonična funkcija, za katero velja, da gre $u(z) \to 0$, ko gre $z \in D^+$ proti poljubni točki $D \cap \mathbb{R}$. Potem obstaja harmonična razširitev $u(z)$ na D, ki je eksplicitno podana s predpisom $u(\bar{z}) = -u(z)$ za $z \in D$.*



Slika prikazuje glede na $\mathbb{R}$ simetrično območje $D \subseteq \mathbb{C}$. D^+ označuje območje na katerem harmonično funkcijo u poznamo, D^- pa območje na katerem lahko po izreku eksplicitno konstruiramo razširitev. Točka z_0 in "majhen"disk okoli nje, nakazujeta, da se bomo dokaza lotili z lastnostjo povprečne vrednosti.

Dokaz. Dokaz temelji na uporabi karakterizacije harmoničnih funkcij s pomočjo lastnosti povprečne vrednosti, oziroma uporabi le-tega, za dokaz harmoničnosti eksplicitno podane razširitve, za katero trdimo, da je harmonična na D. $\square$

Literatura

[1] Theodore W. Gamelin *Complex Analysis*, Springer (2001), Chapter X, str. 274 - 288
[2] Weisstein, Eric W. *Mean-Value Property*, v: From MathWorld–A Wolfram Web Resource, [ogled 22. 2. 2023], dostopno na https://mathworld.wolfram.com/Mean-ValueProperty.html