

Schwarzov princip zrcaljenja za harmonične funkcije

Matej Novoselec

FMF Fakulteta za matematiko in fiziko

5. april 2023

Princip maksima za holomorfne funkcije

Naj bo D omejeno območje. Naj bo h holomorfna na D in zvezna na \overline{D} . Če velja $|h(z)| \leq M$ za vsak $z \in \partial D$, potem velja $|h(z)| \leq M$ za vsak $z \in \overline{D}$.

Dirichletov problem za enotski disk

Problem (Dirichletov problem za enotski disk)

Naj bo \mathbb{D} enotski disk. Zvezno kompleksno funkcijo h , definirano na $\partial\mathbb{D}$, razširi do zvezne funkcije \tilde{h} tako, da bo \tilde{h} harmonična na \mathbb{D} in zvezna na $\overline{\mathbb{D}}$, ter se bo zožitev \tilde{h} na $\partial\mathbb{D}$ ujemala s h .

Spomnimo se...

Dirichletov problem za enotski disk

Problem (Dirichletov problem za enotski disk)

Naj bo \mathbb{D} enotski disk. Zvezno kompleksno funkcijo h , definirano na $\partial\mathbb{D}$, razširi do zvezne funkcije \tilde{h} tako, da bo \tilde{h} harmonična na \mathbb{D} in zvezna na $\overline{\mathbb{D}}$, ter se bo zožitev \tilde{h} na $\partial\mathbb{D}$ ujemala s h .

Spomnimo se...

Če razširitev obstaja je enolično določena.

Dirichletov problem za enotski disk

Problem (Dirichletov problem za enotski disk)

Naj bo \mathbb{D} enotski disk. Zvezno kompleksno funkcijo h , definirano na $\partial\mathbb{D}$, razširi do zvezne funkcije \tilde{h} tako, da bo \tilde{h} harmonična na \mathbb{D} in zvezna na $\overline{\mathbb{D}}$, ter se bo zožitev \tilde{h} na $\partial\mathbb{D}$ ujemala s h .

Spomnimo se...

Če razširitev obstaja je enolično določena.
Oglejmo si enostavne zvezne funkcije.

Definicija

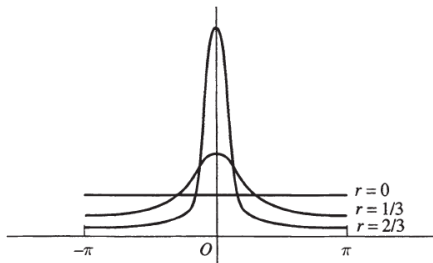
Poissonovo jedro je funkcija definirana s predpisom

$$P_r(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik\theta}, \text{ kjer je } \theta \in [-\pi, \pi] \text{ in } r < 1.$$

Definicija

Poissonovo jedro je funkcija definirana s predpisom

$$P_r(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik\theta}, \text{ kjer je } \theta \in [-\pi, \pi] \text{ in } r < 1.$$



Definicija

Poissonov integral, ki ga označimo z $\tilde{h}(z)$, zvezne funkcije $h(e^{i\theta})$, je funkcija, definirana na enotskem disku s predpisom

$$\tilde{h}(z) = \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{i\varphi}) P_r(\theta - \varphi) \frac{d\varphi}{2\pi}, \text{ kjer je } z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}.$$

Definicija

Poissonov integral, ki ga označimo z $\tilde{h}(z)$, zvezne funkcije $h(e^{i\theta})$, je funkcija, definirana na enotskem disku s predpisom

$$\tilde{h}(z) = \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{i\varphi}) P_r(\theta - \varphi) \frac{d\varphi}{2\pi}, \text{ kjer je } z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}.$$

Izrek (Poissonov integral)

Naj bo $h(e^{i\theta})$ zvezna funkcija na enotski krožnici. Potem nam zgoraj definiran Poissonov integral $\tilde{h}(z)$ ponuja razširitev funkcije h do zvezne funkcije na $\overline{\mathbb{D}}$, harmonične v \mathbb{D} in velja, da se njena zožitev na $\partial\mathbb{D}$ ujema s h .

Definicija

Zvezna funkcija h , definirana na območju $D \subseteq \mathbb{C}$, ima *lastnost povprečne vrednosti*, če za vsak $z_0 \in D$ obstaja $\epsilon_0 > 0$, da je $\overline{\mathbb{D}}(z_0, \epsilon_0) \subseteq D$ in za vsak $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ velja:

$$h(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_0 + \epsilon e^{i\theta}) d\theta.$$

Definicija

Zvezna funkcija h , definirana na območju $D \subseteq \mathbb{C}$, ima *lastnost povprečne vrednosti*, če za vsak $z_0 \in D$ obstaja $\epsilon_0 > 0$, da je $\overline{\mathbb{D}}(z_0, \epsilon_0) \subseteq D$ in za vsak $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ velja:

$$h(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_0 + \epsilon e^{i\theta}) d\theta.$$

Izrek (Karakterizacija harmoničnih funkcij)

Naj bo $h(z)$ zvezna funkcija na območju D . Potem je $h(z)$ harmonična na D natanko tedaj, ko ima $h(z)$ lastnost povprečne vrednosti na D .

Schwarzov princip zrcaljanja za harmonične funkcije

Izrek (Schwarzov princip zrcaljenja za harmonične funkcije)

Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ območje, simetrično glede na realno os. Označimo $D^+ = D \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$ in $D^- = D \cap \{\operatorname{Im} z < 0\}$.

Naj bo $u(z) : D^+ \rightarrow \mathbb{R}$ harmonična funkcija, za katero velja, da gre $u(z) \rightarrow 0$, ko gre $z \in D^+$ proti poljubni točki $D \cap \mathbb{R}$ t.j.:

$$\lim_{\operatorname{Im}(z) \rightarrow 0^+} u(z) = 0.$$

Potem obstaja harmonična razširitev $u(z)$ na D , ki jo podaja predpis $u(\bar{z}) = -u(z)$ za $z \in D$:

$$u^e(z) = \begin{cases} u(z) & z \in D^+ \\ -u(\bar{z}) & z \in D^- \\ 0 & z \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

