Schwarzov princip zrcaljenja za harmonične funkcije

Matej Novoselec

FMF Fakulteta za matematiko in fiziko

5. december 2022

Harmonične funkcije

Definicija

Funkcija $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je harmonična, če velja

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0.$$

Operatorju $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ pravimo Laplaceov operator in pišemo

$$\Delta u = 0.$$

Harmonične funkcije

Definicija

Funkcija $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je harmonična, če velja

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0.$$

Operatorju $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ pravimo Laplaceov operator in pišemo

$$\Delta u = 0.$$

Harmonične funkcije lahko gledamo kot realne dele holomorfnih funkcij.

Princip maksima

Izrek (Princip maksima za holomorfne funkcije)

Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ območje v $\mathbb{C}$ in $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfna in omejena funkcija. Tedaj je f konstantna ali pa lokalnega maksimuma na D ne zavzame.

Princip maksima

Izrek (Princip maksima za holomorfne funkcije)

Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ območje v $\mathbb{C}$ in $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfna in omejena funkcija. Tedaj je f konstantna ali pa lokalnega maksimuma na D ne zavzame.
Če je f definirana in zvezna na $\overline{D}$, potem maksimum zavzame na ∂D.

Princip maksima

Izrek (Princip maksima za holomorfne funkcije)

Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ območje v $\mathbb{C}$ in $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfna in omejena funkcija. Tedaj je f konstantna ali pa lokalnega maksimuma na D ne zavzame.
Če je f definirana in zvezna na $\overline{D}$, potem maksimum zavzame na ∂D.

Princip maksima za harmonične funkcije

Dovolj je zahtevati, da je f na D harmonična in omejena, ter na $\overline{D}$ zvezna.

Dirichletov problem za enotski disk

Problem (Dirichletov problem za enotski disk)

Podano imamo zvezno funkcijo h na $\partial\mathbb{D}$. Radi bi skonstruirali harmonično funkcijo $\widetilde{h}$ na $\mathbb{D}$, tako da ko $z \in \mathbb{D} \to \xi \in \partial\mathbb{D}$, tudi $\widetilde{h}(z) \to h(\xi)$.

Dirichletov problem za enotski disk

Problem (Dirichletov problem za enotski disk)

Podano imamo zvezno funkcijo h na $\partial\mathbb{D}$. Radi bi skonstruirali harmonično funkcijo $\widetilde{h}$ na $\mathbb{D}$, tako da ko $z \in \mathbb{D} \to \xi \in \partial\mathbb{D}$, tudi $\widetilde{h}(z) \to h(\xi)$.
Iščemo funkcijo, zvezno na $\overline{\mathbb{D}}$ in harmonično na $\mathbb{D}$, tako da se bo njena zožitev na $\partial\mathbb{D}$ ujemala s h.

Poskusimo rešiti...

Dirichletov problem za enotski disk

Problem (Dirichletov problem za enotski disk)

Podano imamo zvezno funkcijo h na $\partial\mathbb{D}$. Radi bi skonstruirali harmonično funkcijo $\widetilde{h}$ na $\mathbb{D}$, tako da ko $z \in \mathbb{D} \to \xi \in \partial\mathbb{D}$, tudi $\widetilde{h}(z) \to h(\xi)$.
Iščemo funkcijo, zvezno na $\overline{\mathbb{D}}$ in harmonično na $\mathbb{D}$, tako da se bo njena zožitev na $\partial\mathbb{D}$ ujemala s h.

Poskusimo rešiti...

Če razširitev obstaja je enolično določena.

Dirichletov problem za enotski disk

Problem (Dirichletov problem za enotski disk)

Podano imamo zvezno funkcijo h na $\partial\mathbb{D}$. Radi bi skonstruirali harmonično funkcijo $\widetilde{h}$ na $\mathbb{D}$, tako da ko $z \in \mathbb{D} \to \xi \in \partial\mathbb{D}$, tudi $\widetilde{h}(z) \to h(\xi)$.
Iščemo funkcijo, zvezno na $\overline{\mathbb{D}}$ in harmonično na $\mathbb{D}$, tako da se bo njena zožitev na $\partial\mathbb{D}$ ujemala s h.

Poskusimo rešiti...

Če razširitev obstaja je enolično določena.
Zapišimo $h = h(e^{i\theta})$ in poskusimo na enostavnih funkcijah h.

Poissonovo jedro

Definicija

Poissonovo jedro je funkcija definirana s predpisom

$$P_r(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik\theta}, \text{ kjer je } \theta \in [-\pi, \pi] \text{ in } r < 1.$$

Poissonovo jedro

Definicija

Poissonovo jedro je funkcija definirana s predpisom

$$P_r(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik\theta}, \text{ kjer je } \theta \in [-\pi, \pi] \text{ in } r < 1.$$

Spomnimo se...

Naj D zadošča pogojem za Greenovo formulo. Naj bo $f \in \mathcal{O}(D) \cap \mathcal{C}^1(\overline{D})$. Za $z \in D$ velja Cauchyjeva formula:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi.$$

Poissonovo jedro

Definicija

Poissonovo jedro je funkcija definirana s predpisom

$$P_r(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik\theta}, \text{ kjer je } \theta \in [-\pi, \pi] \text{ in } r < 1.$$

Spomnimo se...

Naj D zadošča pogojem za Greenovo formulo. Naj bo $f \in \mathcal{O}(D) \cap \mathcal{C}^1(\overline{D})$. Za $z \in D$ velja Cauchyjeva formula:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi.$$

Funkciji $(\xi, z) \mapsto \frac{1}{\xi - z}$ pravimo Cauchyjevo jedro.

Poissonov integral

Poskusimo sedaj iz druge smeri ...

Definicija

Poissonov integral, ki ga označimo z $\widetilde{h}(z)$, od $h(e^{i\theta})$ je funkcija na enotskem disku s predpisom

$$\widetilde{h}(z) = \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{i\phi}) P_r(\theta - \phi) \, \frac{d\phi}{2\pi} \text{ , kjer } \; z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}.$$

Poissonov integral

Poskusimo sedaj iz druge smeri ...

Definicija

Poissonov integral, ki ga označimo z $\widetilde{h}(z)$, od $h(e^{i\theta})$ je funkcija na enotskem disku s predpisom

$$\widetilde{h}(z) = \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{i\phi}) P_r(\theta - \phi) \, \frac{d\phi}{2\pi} \text{ , kjer } \; z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}.$$

Izrek (Poissonov integral)

Naj bo $h(e^{i\theta})$ zvezna funkcija na enotski krožnici. Potem nam zgoraj definiran Poissonov integral $\widetilde{h}(z)$ ponuja razširitev funckije h do zvezne funckije na $\overline{\mathbb{D}}$, harmonične v $\mathbb{D}$ in velja, da se njena zožitev na $\partial\mathbb{D}$ ujema s h.

Lastnost povprečne vrednosti

Definicija

Zvezna funckija $h(z)$ ima na območju D lastnost povprečne vrednosti, če za vsak z_0 iz D velja, da je $h(z_0)$ povprečje vrednosti $h(z)$, kjer z teče po majhni krožnici s središčem v z_0.

Lastnost povprečne vrednosti

Definicija

Zvezna funckija $h(z)$ ima na območju D lastnost povprečne vrednosti, če za vsak z_0 iz D velja, da je $h(z_0)$ povprečje vrednosti $h(z)$, kjer z teče po majhni krožnici s središčem v z_0.

Holomorfne funkcije imajo lastnost povprečne vrednosti.

Lastnost povprečne vrednosti

Definicija

Zvezna funckija $h(z)$ ima na območju D lastnost povprečne vrednosti, če za vsak z_0 iz D velja, da je $h(z_0)$ povprečje vrednosti $h(z)$, kjer z teče po majhni krožnici s središčem v z_0.

Holomorfne funkcije imajo lastnost povprečne vrednosti.

Izrek (Karakterizacija harmoničnih funkcij)

Naj bo $h(z)$ zvezna funkcija na območju D. Potem je $h(z)$ harmonična na D natanko tedaj, ko ima $h(z)$ lastnost povprečne vrednosti na D.

Spomnimo se...

Izrek (Morera):
Naj bo $f : D \to \mathbb{C}$ zvezna in D odprta. Denimo, da za vsak zaprt trikotnik $T \subseteq D$ velja

$$\int_{\partial T} f(\xi)\, d\xi = 0$$

Tedaj je f holomorfna na D.

Izrek (Schwarzov princip zrcaljenja za harmonične funckije)

Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ območje simetrično glede na realno os. Označimo $D^+ = D \cap \{\mathrm{Im} > 0\}$. Naj bo $u(z) : D^+ \to \mathbb{R}$ harmonična funkcija, za katero velja, da gre $u(z) \to 0$, ko gre $z \in D^+$ proti poljubni točki $D \cap \mathbb{R}$.

Potem obstaja harmonična razširitev $u(z)$ na D, ki je eksplicitno podana s predpisom $u(\bar{z}) = -u(z)$ za $z \in D$.

Izrek (Schwarzov princip zrcaljenja za harmonične funckije)

Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ območje simetrično glede na realno os. Označimo $D^+ = D \cap \{\mathrm{Im} > 0\}$. Naj bo $u(z) : D^+ \to \mathbb{R}$ harmonična funkcija, za katero velja, da gre $u(z) \to 0$, ko gre $z \in D^+$ proti poljubni točki $D \cap \mathbb{R}$.
Potem obstaja harmonična razširitev $u(z)$ na D, ki je eksplicitno podana s predpisom $u(\bar{z}) = -u(z)$ za $z \in D$.