

# Schwarzov princip zrcaljenja za harmonične funkcije

Matej Novoselec

FMF Fakulteta za matematiko in fiziko

4. september 2023

# Lastnost povprečne vrednosti

## Definicija (Lastnost povprečne vrednosti)

Naj bo  $h$  kompleksna zvezna funkcija, definirana na območju  $D$ . Pravimo, da ima funkcija  $h$  na  $D$  **lastnost povprečne vrednosti**, če za vsak  $z_0 \in D$  obstaja  $\epsilon_0 > 0$ , da je  $\overline{\mathbb{D}}(z_0, \epsilon_0) \subseteq D$  in za vsak  $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$  velja

$$h(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_0 + \epsilon e^{i\theta}) d\theta.$$

# Lastnost povprečne vrednosti

## Definicija (Lastnost povprečne vrednosti)

Naj bo  $h$  kompleksna zvezna funkcija, definirana na območju  $D$ . Pravimo, da ima funkcija  $h$  na  $D$  **lastnost povprečne vrednosti**, če za vsak  $z_0 \in D$  obstaja  $\epsilon_0 > 0$ , da je  $\overline{\mathbb{D}}(z_0, \epsilon_0) \subseteq D$  in za vsak  $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$  velja

$$h(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_0 + \epsilon e^{i\theta}) d\theta.$$

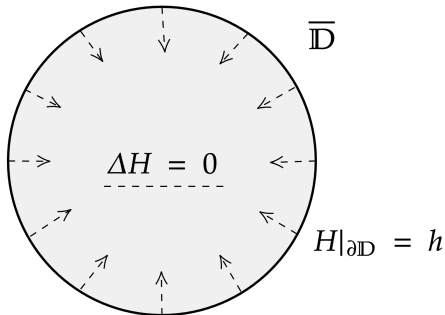
## Izrek (Princip maksima za funkcije z lastnostjo povprečne vrednosti)

Naj bo  $h$  zvezna kompleksna funkcija, definirana na območju  $D$ . Naj ima  $h$  na  $D$  lastnost povprečne vrednosti in naj obstaja  $M \in \mathbb{R}$ , da velja  $|h(z)| \leq M$  za vsak  $z \in D$ . Če obstaja  $z_0 \in D$ , da je  $|h(z_0)| = M$ , potem je funkcija  $h$  na  $D$  konstantna.

# Dirichletov problem za enotski disk

## Dirichletov problem za enotski disk

Naj bo  $h$  kompleksna zvezna funkcija, definirana na  $\partial\mathbb{D}$ . Ali obstaja razširitev  $H$ , ki je zvezna na  $\overline{\mathbb{D}}$  in harmonična na  $\mathbb{D}$ ?



## Definicija

**Poissonovo jedro** je funkcija, definirana s predpisom

$$P_r(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik\theta}, \text{ kjer je } \theta \in [-\pi, \pi] \text{ in } 0 \leq r < 1.$$

# Reševanje Dirichletovega problema za enotski disk

## Definicija

**Poissonovo jedro** je funkcija, definirana s predpisom

$$P_r(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik\theta}, \text{ kjer je } \theta \in [-\pi, \pi] \text{ in } 0 \leq r < 1.$$

## Definicija

Naj bo  $h$  zvezna funkcija, definirana na robu enotskega diska.

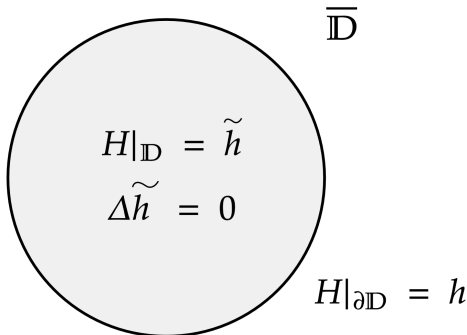
**Poissonov integral** funkcije  $h$ , ki ga označimo s  $\tilde{h}$ , je funkcija, definirana na notranjosti enotskega diska s predpisom

$$\tilde{h}(z) = \int_0^{2\pi} h(e^{i\varphi}) P_r(\theta - \varphi) \frac{d\varphi}{2\pi}, \quad z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}.$$

# Rešitev Dirichletovega problema za enotski disk

## Izrek

Naj bo  $h$  zvezna kompleksna funkcija, definirana na  $\partial\mathbb{D}$ . Rešitev Dirichletovega problema, z robnim pogojem  $h$ , za enotski disk obstaja in je na  $\mathbb{D}$  definirana kot Poissonov integral funkcije  $h$ .


$$\begin{aligned} H|_{\mathbb{D}} &= \tilde{h} \\ \Delta \tilde{h} &= 0 \end{aligned}$$
$$H|_{\partial\mathbb{D}} = h$$

## Izrek (Karakterizacija harmoničnih funkcij)

Naj bo  $h$  zvezna funkcija, definirana na območju  $D \subseteq \mathbb{C}$ . Velja, da je  $h$  harmonična funkcija natanko tedaj, ko ima na  $D$  lastnost povprečne vrednosti.



# Karakterizacija harmoničnih funkcij

## Izrek (Karakterizacija harmoničnih funkcij)

Naj bo  $h$  zvezna funkcija, definirana na območju  $D \subseteq \mathbb{C}$ . Velja, da je  $h$  harmonična funkcija natanko tedaj, ko ima na  $D$  lastnost povprečne vrednosti.

## Izrek Morera

Naj bo  $D$  območje in  $f$  kompleksna zvezna funkcija, definirana na  $D$ . Denimo, da za vsak zaprt trikotnik  $T \subseteq D$  velja

$$\int_{\partial T} f(\xi) d\xi = 0.$$

Tedaj je  $f$  holomorfna na  $D$ .

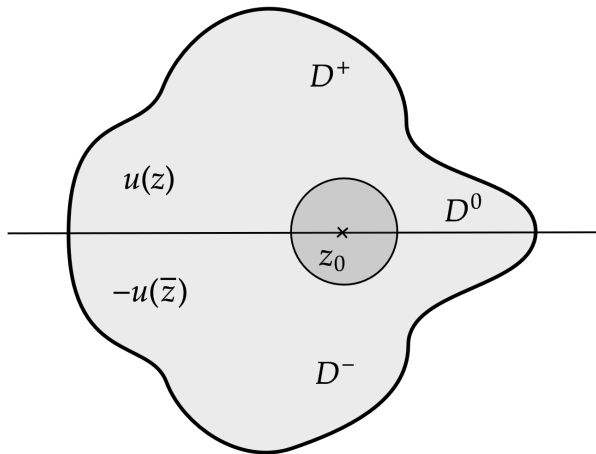
## Izrek (Schwarzov princip zrcaljenja za harmonične funkcije)

Naj bo  $D \subseteq \mathbb{C}$  območje, simetrično glede na realno os. Označimo  $D^+ = \{z \in D \mid \operatorname{Im}[z] > 0\}$ ,  $D^- = \{z \in D \mid \operatorname{Im}[z] < 0\}$  in  $D^0 = \{z \in D \mid \operatorname{Im}[z] = 0\}$ . Naj bo  $u$  realna zvezna funkcija, definirana na  $D^+ \cup D^0$ . Naj bo  $u$  na  $D^+$  harmonična in naj za vsak  $z \in D^0$  velja  $u(z) = 0$ . Potem je funkcija  $U$ , definirana s predpisom

$$U(z) = \begin{cases} u(z) & , \quad z \in D^+ \\ 0 & , \quad z \in D^0 \\ -u(\bar{z}) & , \quad z \in D^- \end{cases} ,$$

na območju  $D$  harmonična.

# Schwarzov princip zrcaljenja za harmonične funkcije



## Izrek (Schwarzov princip zrcaljenja za holomorfne funkcije)

Naj bo  $D \subseteq \mathbb{C}$  območje, simetrično glede na realno os. Označimo  $D^+ = \{z \in D \mid \operatorname{Im}[z] > 0\}$ ,  $D^- = \{z \in D \mid \operatorname{Im}[z] < 0\}$  in  $D^0 = \{z \in D \mid \operatorname{Im}[z] = 0\}$ . Naj bo  $f$  zvezna funkcija, definirana na  $D^+ \cup D^0$ . Naj bo  $f$  na  $D^+$  holomorfna in naj  $f$  na  $D^0$  zavzame realne vrednosti. Potem je funkcija  $F$ , definirana s predpisom

$$F(z) = \begin{cases} f(z) , & z \in D^+ \cup D^0 \\ \overline{f(\bar{z})} , & z \in D^- \cup D^0 \end{cases} ,$$

na območju  $D$  holomorfna.