

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Matej Novoselec

**Schwarzov princip zrcaljenja za harmonične funkcije**

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Barbara Drinovec Drnovšek

Ljubljana, 2023

## KAZALO

1. Uvod	4
2. Harmonične funkcije	5
3. Lastnost povprečne vrednosti	6
4. Dirichletov problem za enotski disk	10
5. Schwarzov princip zrcaljenja za harmonične funkcije	22
Literatura	25

# Schwarzov princip zrcaljenja za harmonične funkcije

POVZETEK

# Schwarz Reflection Principle for Harmonic Functions

ABSTRACT

Math. Subj. Class. (2020):

Ključne besede:

Keywords:

## 1. UVOD

V diplomski nalogi bomo spoznali osnovne lastnosti harmoničnih funkcij, ki jih bomo proti koncu s pridom uporabili za dokaz glavnega izreka, katerega ime nosi naslov naloge. Vlekli bomo številne vzporednice s kompleksno analizo, gre namreč za področje, močno povezano s študijo holomorfnih funkcij.

V prvem poglavju bomo spoznali, kaj so harmonične funkcije in poudarili, katere njihove lastnosti bodo za nadaljevanje pomembne. Ogledali si bomo tudi njihov odnos s holomorfnimi funkcijami. V drugem poglavju bomo spoznali Dirichletov problem za enotski disk, ki nam bo dal osnovo za definicijo Poissonovega jedra in Poissonovega integrala. Ogledali si bomo nekaj lastnosti obeh definiranih pojmov in z njuno pomočjo rešili Dirichletov problem za enotski disk. Tretje poglavje je namenjeno karakterizaciji harmoničnih funkcij s pomočjo lastnosti povprečne vrednosti in analizi pomembnosti te karakterizacije. V zadnjem poglavju bomo s pomočjo orodij, spoznanih v prejšnjih poglavjih, navedli in dokazali glavni izrek diplomskega dela - Schwarzov princip zrcaljenja za harmonične funkcije.

## 2. HARMONIČNE FUNKCIJE

**Definicija 2.1.** Naj bo  $U$  odprta podmnožica v  $\mathbb{R}^n$ . Naj bo  $u$  funkcija, definirana na  $U$  in naj bo na definicijskem območju dvakrat zvezno odvedljiva. Pravimo, da je funkcija  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  *harmonična*, če velja

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0.$$

Operatorju  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$  pravimo *Laplaceov operator* in pišemo

$$\Delta u = 0.$$

Pogoj za harmoničnost podaja Laplaceovo parcialno diferencialno enačbo, zapisano bodisi s Laplaceovim operatorjem ali razpisano s parcialnimi odvodi drugega reda. Funkcija je torej harmonična, če zadošča zgoraj zapisani parcialni diferencialni enačbi.

**Opomba 2.2.** Vredno je omeniti, da v zgornji definiciji nismo specificirali, ali gre pri funkciji  $u$  za realno ali kompleksno funkcijo. Pojem harmoničnosti smo definirali v splošnem, torej tako za kompleksne kot tudi realne funkcije. Znotraj diplomske naloge se bomo omejili na funkcije dveh realnih spremenljivk ali funkcijo ene kompleksne spremenljivke, ki jo bomo nato delili na realni in imaginarni del ( $z = x + iy$ ) in na ta način prešli nazaj na funkcije dveh realnih spremenljivk.

Pogoj za harmoničnost takrat zapišemo kot:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

**Definicija 2.3.** *Območje*  $D$  je povezana odprta množica v  $\mathbb{R}^n$ . Če obstaja  $a \in D$ , da za vse  $b \in D$  in vse  $t \in [0, 1]$  tudi  $ta + (1 - t)b \in D$ , pravimo, da je  $D$  *zvezdasto območje*.

**Trditev 2.4.** Naj bo  $U \subseteq \mathbb{C}$  odprta množica. Naj bo  $f = u + iv$  holomorfná funkcija,  $u$  in  $v$  pa realni funkciji, definirani na  $U$ . Potem sta realni funkciji  $u$  in  $v$  harmonični na  $U$ .

*Dokaz.* Ker je  $f$  holomorfná, zadošča Cauchy-Riemannovemu sistemu enačb prek katerih lahko bralec sam hitro preveri, da trditev drži. Dokaz je natančneje naveden v [1], na strani 55. □

**Opomba 2.5.** Če označimo  $u = \operatorname{Re} f$  in  $v = \operatorname{Im} f$ , nam zgornja trditev v resnici pove, da sta realni in imaginarni del holomorfne funkcije harmonični funkciji.

**Definicija 2.6.** Naj bo  $u$  realna harmonična funkcija, definirana na območju  $D$ . Če obstaja realna harmonična funkcija  $v$ , definirana na  $D$ , da je funkcija  $f = u + iv$  na  $D$  holomorfná, potem funkciji  $v$  pravimo *harmonična konjugiranka funkcije  $u$  na  $D$* .

**Trditev 2.7.** Naj bo  $u$  realna harmonična funkcija, definirana na zvezdastem območju  $D$ . Potem za  $u$  na  $D$  obstaja harmonična konjugiranka  $v$  in je do konstante natančno enolično določena.

*Dokaz.* Konstrukcijo harmonične konjugiranke, si bralec za primer, ko je zvezdasto območje kar odprt disk lahko ogleda v [1], na strani 56 in 57. Ideja dokaza za splošno zvezdasto območje je podobna. □

**Opomba 2.8.** V duhu zgornjih dveh trditev, je velikokrat smiselno na realno harmonično funkcijo  $u$  gledati kot na realni del holomorfne funkcije  $f = u + iv$ , kjer je  $v$  njena harmonična konjugiranka. To že nakazuje, da se bodo nekatere lepe lastnosti holomorfnih funkcij prenesle tudi na harmonične funkcije.

**Opomba 2.9.** Zaradi linearnosti parcialnih odvodov, je tudi linearna kombinacija harmoničnih funkcij harmonična. To bomo pri reševanju enega izmed glavnih problemov diplomskega dela s pridom uporabili.

**Opomba 2.10.** V literaturi se v definiciji harmoničnosti za funkcijo  $u$  pojavlja tudi zahteva, da je funkcija gladka, oziroma  $u \in C^\infty$ . V zgornji definiciji zahtevamo le obstoj drugih parcialnih odvodov, oziroma  $u \in C^2$ . Da sta definiciji med seboj ekvivalentni, potrdi spodnja trditev.

**Trditev 2.11.** *Naj bo  $u$  realna harmonična funkcija, definirana na območju  $D$ . Potem je  $u$  na  $D$  gladka, oziroma  $u \in C^\infty(D)$ .*

*Dokaz.* Ker je  $D$  odprta množica, lahko za vsako točko  $z \in D$  najdemo dovolj majhno zvezdasto okolico  $U_z$ , da bo okolica v celoti vsebovana v  $D$ . Dovolj je vzeti kar dovolj majhen disk. Po trditvi 2.7 na  $U_z$  obstaja harmonična konjugiranka  $v$ , da je  $f = u + iv$  na  $U_z$  holomorfna, ter zato na  $U_z$  tudi gladka. Sledi, da je na  $U_z$  gladka tudi funkcija  $u$ . Ker smo za vsako točko iz  $D$  našli odprto okolico na kateri je funkcija  $u$  gladka, je  $u$  gladka na celotnem definicijskem območju.  $\square$

### 3. LASTNOST POVPREČNE VREDNOSTI

**Definicija 3.1.** Naj bo  $h$  zvezna funkcija, definirana na območju  $D$ . Denimo, da za  $z_0 \in D$  in  $r > 0$  velja  $\mathbb{D}(z_0, r) \subseteq D$ . Povprečje funkcije  $h$  na  $\mathbb{D}(z_0, r)$  definiramo kot:

$$A(r) = \int_0^{2\pi} h(z_0 + re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

**Trditev 3.2.** *Naj bo  $h$  zvezna funkcija, definirana na območju  $D$ , ter denimo, da za  $z_0 \in D$  in  $r > 0$  velja  $\mathbb{D}(z_0, r) \subseteq D$ . Potem je  $A(r)$  zvezna na  $(0, r]$  in velja:  $\lim_{r \rightarrow 0} A(r) = h(z_0)$ .*

*Dokaz.* Ker je povprečje zvezne funkcije definirano kot integral zvezne funkcije, je funkcija  $A(r)$  zvezna na  $(0, r]$ . Drugi del trditve dokažimo po definiciji. Naj bo  $\epsilon > 0$  poljubno majhen. Velja:

$$|A(r) - h(z_0)| = \left| \int_0^{2\pi} [h(z_0 + re^{i\theta}) - h(z_0)] \frac{d\theta}{2\pi} \right| \leq \int_0^{2\pi} |h(z_0 + re^{i\theta}) - h(z_0)| \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Ker je  $h$  zvezna, obstaja  $\delta > 0$ , da za vsak  $|r| < \delta$  in vsak  $\theta \in [0, 2\pi]$  velja  $|h(z_0 + re^{i\theta}) - h(z_0)| < \epsilon$ . Za vsak  $r$ , ki je manjši od  $\delta$  torej  $|A(r) - h(z_0)| < \epsilon$ . Ker je bil  $\epsilon$  poljubno majhen, res velja  $\lim_{r \rightarrow 0} A(r) = h(z_0)$ .  $\square$

**Definicija 3.3.** Naj bo  $h$  zvezna funkcija, definirana na območju  $D \subseteq \mathbb{C}$ . Pravimo, da ima funkcija  $h$  na  $D$  lastnost povprečne vrednosti, če za vsak  $z_0 \in D$  obstaja  $\epsilon_0 > 0$ , da je  $\mathbb{D}(z_0, \epsilon_0) \subseteq D$  in za vsak  $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$  velja:

$$h(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_0 + \epsilon e^{i\theta}) d\theta.$$

**Opomba 3.4.** Definicija nam pove, da ima zvezna funkcija  $h$  na območju  $D \subseteq \mathbb{C}$  lastnost povprečne vrednosti, če za vsak  $z_0$  iz  $D$  velja, da je  $h(z_0)$  povprečje vrednosti  $h(z)$ , kjer  $z$  teče po majhni krožnici s središčem v  $z_0$ .

Smiselno se je vprašati, zakaj je pogoj, da ima funkcija lastnost povprečne vrednosti, definiran prek krivuljnega integrala po robu diska in ne ploskovnega integrala po območju, ki ga omejuje rob diska. Naslednja trditev nam pove, da funkcija, ki ima lastnost povprečne vrednosti, torej je vrednost v središču enaka povprečju vrednosti na robu majhnega diska, zadošča tudi pogoju, da je vrednost v središču enak povprečju vrednosti na celotnem disku.

**Trditev 3.5.** Naj bo  $u$  zvezna funkcija, definirana na območju  $D$ . Naj ima  $u$  na  $D$  lastnost povprečne vrednosti, ter denimo da za  $z_0 \in D$  in  $r > 0$  velja  $\mathbb{D}(z_0, r) \subseteq D$ . Potem velja:

$$u(z_0) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\mathbb{D}(z_0, r)} u(x + iy) \, dx dy.$$

*Dokaz.* Dvojni integral po disku, lahko z uvedbo polarnih koordinat  $x = z_0 + \rho \cos(\theta)$ ,  $y = z_0 + \rho \sin(\theta)$  prevedemo na dvakratnega. Velja:

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint_{\mathbb{D}(z_0, r)} u(x + iy) \, dx dy = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \rho \left[ \int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{i\theta}) \, d\theta \right] d\rho.$$

Ker ima  $u$  na  $D$  lastnost povprečne vrednosti, velja:

$$2\pi u(z_0) = \int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta, \text{ za vsak } \rho \in [0, r].$$

Sledi:

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint_{\mathbb{D}(z_0, r)} u(x + iy) \, dx dy = \frac{2}{r^2} \int_0^r \rho [u(z_0)] d\rho = u(z_0) \left[ \frac{2}{r^2} \int_0^r \rho d\rho \right] = u(z_0).$$

□

**Trditev 3.6.** Linearna kombinacija funkcij z lastnostjo povprečne vrednosti je funkcija z lastnostjo povprečne vrednosti.

*Dokaz.* Trditev sledi iz linearnosti integrala. □

**Trditev 3.7** (Princip maksima za funkcije z lastnostjo povprečne vrednosti). Naj bo  $h$  zvezna kompleksna funkcija, definirana na območju  $D$ . Naj ima  $h$  na  $D$  lastnost povprečne vrednosti in naj obstaja  $M \in \mathbb{R}$ , da velja  $|h(z)| \leq M$  za vsak  $z \in D$ . Če obstaja  $z_0 \in D$ , da je  $|h(z_0)| = M$ , potem je funkcija  $h(z)$  na  $D$  konstantna.

*Dokaz.* Ker je  $|h(z_0)| = M$ , obstaja  $\varphi \in [0, 2\pi]$ , da velja:  $h(z_0) = M e^{i\varphi}$ . Definirajmo:  $H(z) = h(z) e^{-i\varphi}$ ,  $z \in D$ . Po trditvi 3.6 ima  $H$  na  $D$  lastnost povprečne vrednosti. Opazimo, da velja:  $|H(z)| \leq M$  za vsak  $z \in D$ , obenem pa  $H(z_0) = M$ . Ker je funkcija  $H$  na  $D$  zvezna,  $\{H(z_0)\}$  pa zaprta množica, je njena praslika  $A = \{z \in D \mid H(z) = H(z_0) = M\}$  prav tako zaprta množica. Po definiciji dokažimo, da je  $A$  tudi odprta množica. Naj bo  $z_1 \in A$ . Ker je  $D$  odprta, obstaja  $\rho_{z_1}$ , da je za vsak  $0 < r < \rho_{z_1}$  tudi  $\mathbb{D}(z_1, r) \subseteq D$ . Funkcija  $H$  ima na  $D$  lastnost povprečne vrednosti, zato velja:

$$H(z_1) = \int_0^{2\pi} H(z_1 + r e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}, \text{ za vsak } 0 < r < \rho_{z_1}.$$

Ker je  $z_1 \in A$ , velja  $H(z_1) = M$ , ter zato  $\operatorname{Re}[H(z_1)] = H(z_1)$ . Sledi:

$$H(z_1) = \operatorname{Re}[H(z_1)] = \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}[H(z_1 + re^{i\theta})] \frac{d\theta}{2\pi}, \text{ za vsak } 0 < r < \rho_{z_1},$$

oziroma:

$$0 = \int_0^{2\pi} (H(z_1) - \operatorname{Re}[H(z_1 + re^{i\theta})]) \frac{d\theta}{2\pi}, \text{ za vsak } 0 < r < \rho_{z_1}.$$

Vemo, da za vsak  $z \in D$  velja:  $|H(z)| \leq M = H(z_1)$ , zato za vsak  $z \in D$  velja:  $\operatorname{Re}[H(z)] \leq |H(z)| \leq H(z_1)$ . Sedaj vemo, da je integrand integrala ne-negativen in zvezen, integral pa enak nič, zato je integrand enak nič. Sledi, da je  $H(z_1) = \operatorname{Re}[H(z_1 + re^{i\theta})]$ , za vsak  $\theta \in [0, 2\pi]$  in vsak  $0 < r < \rho_{z_1}$ . Definicija absolutne vrednosti nam da:  $|H(z)| = \sqrt{\operatorname{Re}[H(z)]^2 + \operatorname{Im}[H(z)]^2}$ . Ker vemo, da za vsak  $z \in D$  velja:  $|H(z)| \leq H(z_1) = M$ , za vsak  $w \in \mathbb{D}(z_1, \rho_{z_1})$  pa  $H(z_1) = \operatorname{Re}[H(w)]$ , sledi, da je za vsak  $w \in \mathbb{D}(z_1, \rho_{z_1})$ :  $\operatorname{Im}[H(w)] = 0$ , oziroma:  $H(w) = H(z_1)$ . Poljuben  $z_1 \in A$  ima torej odprto okolico, ki je vsebovana v  $A$ . Torej je  $A$  odprta. Predpostavka trditve nam pove, da  $A$  ni prazna, saj  $z_0 \in A$ . Ker je  $D$  povezana,  $A$  pa odprta in hkrati zaprta neprazna množica, velja  $A = D$ . Po definiciji množice  $A$  je zato funkcija  $H(z)$  na  $D$  konstantna. Posledično je na  $D$  konstantna tudi funkcija  $h(z)$ .  $\square$

**Posledica 3.8.** *Naj bo  $h$  kompleksna funkcija, definirana na omejenem območju  $D$ . Naj bo  $h$  zvezna na  $\overline{D}$  in naj ima na  $D$  lastnost povprečne vrednosti. Če obstaja  $M \in \mathbb{R}$ , da velja  $|h(z)| \leq M$  za vsak  $z \in \partial D$ , potem velja  $|h(z)| \leq M$  za vsak  $z \in \overline{D}$ .*

*Dokaz.* Ker je funkcija  $h$  zvezna na kompaktnem območju  $\overline{D}$ , na  $\overline{D}$  zavzame minimum in maksimum. Posledično funkcija  $|h|$  na  $\overline{D}$  zavzame maksimum. Torej  $|h|$  zavzame maksimum na  $D$  ali na  $\partial D$ . Če funkcija  $|h|$  maksimum zavzame na  $D$ , potem je po trditvi 3.7 funkcija  $h$  na  $D$  konstantna. Ker je  $h$  zvezna na  $\overline{D}$ , je  $h$  konstantna celo na  $\overline{D}$ . Sledi, da  $h$  maksimum gotove zavzame na  $\partial D$  iz česar lahko sklepamo želeno.  $\square$

**Trditev 3.9.** *Naj bo  $f$  holomorfna funkcija na območju  $D$ . Potem ima funkcija  $f$  na  $D$  lastnost povprečne vrednosti.*

*Dokaz.* Ker je funkcija  $f$  na območju  $D$  holomorfna, lahko uporabimo Cauchyjevo integralsko formulo za vsak zaprt disk, ki je v celoti vsebovan v  $D$ . Za vsak  $z \in D$  in vsak  $r > 0$ , kjer je  $\overline{\mathbb{D}}(z, r) \subseteq D$  torej velja:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}(z, r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Ko rob diska parametriziramo z  $\xi = z + re^{i\varphi}$ , dobimo:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\varphi}) d\varphi.$$

$\square$

**Trditev 3.10.** *Naj bo  $u$  harmonična funkcija, definirana na območju  $D \subseteq \mathbb{C}$ . Naj bo  $z_0 \in D$  in  $\rho > 0$ , da velja  $\mathbb{D}(z_0, \rho) \subseteq D$ . Za vsak  $0 < r < \rho$  potem velja:*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$



*Dokaz.* Na  $\overline{\mathbb{D}}(z_0, \rho) \subseteq D$  označimo  $P = -\frac{\partial u}{\partial y}$  in  $Q = \frac{\partial u}{\partial x}$ , ter uporabimo Greenovo integralno formulo:

$$\int_{\partial \overline{\mathbb{D}}(z_0, \rho)} P dx + Q dy = \iint_{\overline{\mathbb{D}}(z_0, \rho)} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Sedaj upoštevajmo harmoničnost funkcije  $u$  in vstavimo v Greenovo formulo:

$$\int_{\partial \overline{\mathbb{D}}(z_0, \rho)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy = \iint_{\overline{\mathbb{D}}(z_0, \rho)} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy = 0.$$

Rob diska lahko pri  $z_0 = x_0 + iy_0$  parametriziramo z  $x(\theta) = x_0 + \rho \cos(\theta)$ ,  $y(\theta) = y_0 + \rho \sin(\theta)$ . Ko to vstavimo v zgornjo enakost, dobimo:

$$0 = \rho \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\theta) + \frac{\partial u}{\partial y} \sin(\theta) \right] d\theta = \rho \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \rho}(z_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta.$$

Ker je  $u$  harmonična, je po trditvi 2.11 gladka, zato lahko zamenjamo limitna procesa integriranja in odvajanja. Delimo z  $2\pi\rho$  in zapišemo:

$$0 = \frac{\partial}{\partial \rho} \int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Sledi, da je vrednost zgornjega integrala konstantna, za vsak  $0 < r < \rho$ . Obstaja torej  $c \in \mathbb{C}$ , da je:

$$\int_0^{2\pi} u(z_0 + r e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} = c, \text{ za vsak } 0 < r < \rho.$$

Potrebno je le še pokazati, da  $c = u(z_0)$ . Ker je  $u$  zvezna, po trditvi 3.2 velja, da v limiti  $r \rightarrow 0$  dobimo:

$$c = \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \int_0^{2\pi} u(z_0 + r e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \right] = \int_0^{2\pi} u(z_0) \frac{d\theta}{2\pi} = u(z_0).$$

□

**Opomba 3.11.** Dokazali smo že, da imajo holomorfne funkcije lastnost povprečne vrednosti, zgornja trditev pa nam pove, da imajo lastnost povprečne vrednosti tudi harmonične funkcije.

**Posledica 3.12** (Princip maksima za harmonične funkcije). *Naj bo  $h$  kompleksna funkcija, definirana na območju  $D$ . Naj bo funkcija  $h$  na  $D$  harmonična in naj obstaja  $M \in \mathbb{R}$ , da velja  $|h(z)| \leq M$  za vsak  $z \in D$ . Če obstaja  $z_0 \in D$ , da je  $|h(z_0)| = M$ , potem je funkcija  $h(z)$  na  $D$  konstantna.*

*Dokaz.* Ker je funkcija  $h$  na  $D$  harmonična, ima po trditvi 3.10 na  $D$  lastnost povprečne vrednosti. Sedaj funkcija  $h$  zadošča pogojem za trditev 3.7, zato je na  $D$  konstantna. □

**Posledica 3.13.** *Naj bo  $h$  kompleksna funkcija, definirana na omejenem območju  $D$ . Naj bo  $h$  zvezna na  $\overline{D}$  in naj bo na  $D$  harmonična. Če obstaja  $M \in \mathbb{R}$ , da velja  $|h(z)| \leq M$  za vsak  $z \in \partial D$ , potem velja  $|h(z)| \leq M$  za vsak  $z \in \overline{D}$ .*

*Dokaz.* Ker je funkcija  $h$  na  $D$  harmonična, ima po trditvi 3.10 na  $D$  lastnost povprečne vrednosti. Sedaj funkcija  $h$  zadošča pogojem za trditev 3.8, ki dokazuje želeno. □

**Opomba 3.14.** Vredno je že na tej točki omeniti, da za harmonične funkcije velja celo več, kot nam to narekuje trditev 3.10. Harmonične funkcije, se da namreč karak-terizirati s pomočjo lastnosti povprečne vrednosti. Motivacija za ogled naslednjega razdelka temelji ravno na dokazu omenjenega rezultata.

#### 4. DIRICHLETOV PROBLEM ZA ENOTSKI DISK

Za začetek navedimo problem, ki ga bomo znotraj poglavja reševali. Naj bo  $\mathbb{D}$  enotski disk. Zvezno kompleksno funkcijo  $h$ , definirano na  $\partial\mathbb{D}$ , bi želeli razširiti do zvezne funkcije  $H$ , da bo  $H$  harmonična na  $\mathbb{D}$  in zvezna na  $\overline{\mathbb{D}}$ , ter se bo zožitev  $H$  na  $\partial\mathbb{D}$  ujemala s  $h$ .

Kot smo že komentirali po definiciji 2.1 so funkcije harmonične, natanko tedaj ko zadoščajo Laplaceovi parcialni diferencialni enačbi. Vredno je omeniti, da lahko na Dirichletov problem za enotski disk gledamo tudi iz stališča teorije diferencialnih enačb. Gre za problem iskanja funkcije, ki na notranjosti območja reši Laplaceovo diferencialno enačbo ob robnem pogoju, ki ga določa v naprej podana funkcija na robu območja. V našem primeru, je notranjost območja kar notranjost enotskega diska, roben pogoj zvezne funkcije pa podaja začetna zvezna funkcija, podana na enotski krožnici. Navadno se v teoriji parcialnih diferencialnih enačb srečamo s tako imenovanimi dobro postavljenimi matematičnimi problemi, o katerih si bralec več lahko prebere na REFERENCA. Spodaj se bomo le seznanili z njihovo definicijo in pokazali, da zgoraj zastavljen Dirichletov problem ustreza definiciji.

**Definicija 4.1** (J. Hadamard 1902). Pravimo, da je matematičen problem parcialni diferencialni enačb z robnimi in začetnimi pogoji *dobro postavljen*, če zanj velja:

- A) rešitev problema obstaja,
- B) rešitev problema je ena sama, oziroma rešitev je enolično določena,
- C) rešitev je zvezno odvisna od začetnih podatkov problema.

**Lema 4.2.** Če rešitev za Dirichletov problem na enotskem disku obstaja, je enolično določena.

*Dokaz.* Denimo, da obstajata dve različni rešitvi,  $H_1$  in  $H_2$ , Dirichletovega problema za enotski disk z začetnim pogojem  $h$ . Oglejmo si razliko  $H_1 - H_2$ . Vemo, da je njuna razlika na  $\partial\mathbb{D}$  enaka 0, saj sta tam enaki  $h$ . Ker sta funkciji  $H_1$  in  $H_2$  na  $\mathbb{D}$  harmonični, po opombi 2.9 vemo, da je tudi njuna razlika harmonična funkcija. Po posledici 3.12, oziroma principu maksima za harmonične funkcije, vemo, da je  $H_1 - H_2 \equiv 0$  tudi na  $\mathbb{D}$ . Sledi enakost  $h_1$  in  $h_2$  tudi na  $\mathbb{D}$  in protislovje.  $\square$

**Opomba 4.3.** Lema 4.2 nam pove, da je rešitev problema največ ena, zato se je dovolj posvetiti konstrukciji potencialne rešitve. Opazimo, da lahko točke  $z \in \partial\mathbb{D}$  zapišemo z  $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$ , kjer  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Funkcijo  $h(z)$ ,  $z \in \partial\mathbb{D}$  lahko tako pišemo kot kompozitum  $h(e^{i\theta})$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Sedaj poskusimo skonstruirati harmonično razširitev, ki bo zadoščala Dirichletovemu problemu za zvezno funkcijo  $h(e^{i\theta})$ .

Za začetek se posvetimo enostavnim primerom in si šele za tem teorijo oziroma konstrukcijo oglejmo v splošnem. Naravno je za enostavne zvezne funkcije, definirane na  $\partial\mathbb{D}$ , vzeti kar polinome. V luči opombe 4.3 je polinomska spremenljivka lahko kar  $e^{i\theta}$ , kjer bo  $\theta$  iz intervala  $[0, 2\pi]$ . Zaradi linearnosti Laplaceovega operatorja, se problem preveda na iskanje rešitve za monome. Zato si oglejmo funkcije oblike  $h(e^{i\theta}) = e^{ik\theta}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , ter za njih poskusimo skonstruirati željeno razširitev. Hitro opazimo, da se nam v tem primeru pojavlja preprosta eksplcitna razširitev s predpisom

$\tilde{h}(re^{i\theta}) = r^{|k|}e^{ik\theta}$ , za  $r \in [0, 1]$  in  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Tako predpisana razširitev je za  $k \geq 0$  na  $\mathbb{D}$  harmonična, saj je  $r^k e^{ik\theta} = z^k$  celo holomorfná funkcija in zato harmonična. Pri  $k < 0$  dobimo razširitev  $r^{-k} e^{ik\theta} = \bar{z}^{-k}$ , ki v splošnem ni holomorfná, a je vseeno harmonična. Gre namreč za monom v konjugirani spremenljivki, harmoničnost katerega lahko preverimo po definiciji prek parcialnih odvodov. Obenem je za vsak  $k \in \mathbb{Z}$  razširitev zvezna na  $\bar{\mathbb{D}}$  in se na  $\partial\mathbb{D}$  ujema z začetnimi pogoji. Razširitev torej zadošča pogojem za rešitev Dirichletovega problema na enotskem disku, ki je po lemi 4.2 enolično določena. Z upoštevanjem linearnosti Laplaceovega operatorja lahko za začetne funkcije oblike  $h(e^{i\theta}) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{ik\theta}$ ;  $\theta \in [0, 2\pi]$ , konstruiramo harmonično razširitev s predpisom  $\tilde{h}(re^{i\theta}) = \sum_{k=-N}^N a_k r^{|k|} e^{ik\theta}$ ;  $r \in [0, 1]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Smiselno bi bilo koeficiente  $a_k$  izraziti direktno prek funkcije  $h$ . V ta namen si oglejmo  $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ij\theta} e^{-ik\theta} d\theta$ , kjer  $k, l \in \mathbb{Z}$ . Prek integracije zapisane kompleksne funkcije preverimo tako imenovano ortogonalno relacijo med kompleksnimi eksponenti:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ij\theta} e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} = \begin{cases} 1; & j = k \\ 0; & j \neq k \end{cases}.$$

Zgornja relacija nam pri  $h(e^{i\theta}) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{ik\theta}$  omogoča izražavo koeficientov  $a_k$  kot:

$$a_k = \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{i\theta}) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Z uporabo zgornje zveze izrazimo:

$$\sum_{k=-N}^N a_k r^{|k|} e^{ik\theta} = \sum_{k=-N}^N \left( \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{i\varphi}) e^{-ik\varphi} \frac{d\varphi}{2\pi} \right) r^{|k|} e^{ik\theta}.$$

Zamenjamo vsoto in integral, ter množico, po kateri teče indeks vsote razširimo na vsa cela števila. Pri tem se rezultat ne spremeni, saj je sumand pri dodanih indeksih enak nič. Dobimo ekspliciten zapis:

$$(1) \quad \tilde{h}(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{i\varphi}) \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{-ik\varphi} e^{ik\theta} \right] \frac{d\varphi}{2\pi}, \quad re^{i\theta} \in \bar{\mathbb{D}}.$$

Zgornji ekspliciten zapis razširitve je le drugače zapis že komentirane rešitve Dirichletovega problema na enotskem disku, za polinom v spremenljivki  $e^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Sedaj bomo zgornjo funkcijo, ki smo jo na intuitiven način konstruirali s pomočjo predpostavljene polinomske oblike funkcije  $h$  vzeli za definicijo novega pojma in z njegovo pomočjo prišli do razširitve za splošne zvezne funkcije  $h$ .

**Definicija 4.4.** *Poissonovo jedro* je funkcija definirana s predpisom

$$P_r(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik\theta}, \text{ kjer je } \theta \in [-\pi, \pi] \text{ in } r < 1.$$

**Opomba 4.5.** Na Poissonovo jedro lahko gledamo kot funkcijo dveh spremenljivk,  $\theta$  in  $r$ , ali pa kot na družino funkcij, indeksiranih s parametrom  $r$ .

Smiselno se je vprašati, ali za vsako vrednost iz definicijskega območje Poissonovega jedra vrsta na desni strani definicijske enakosti sploh konvergira. Potencialne strahove pomiri naslednja trditev.

**Trditev 4.6.** *Naj bo  $\rho < 1$ . Vrsta, definirana s Poissonovim jedrom konvergira enakomerno na množici  $\{(r, \theta) \mid r \in [0, \rho], \theta \in [0, 2\pi]\}$ .*

*Dokaz.* Na množici  $\{(r, \theta) \mid r \in [0, \rho), \theta \in [0, 2\pi]\}$  velja  $|r^{|k|} e^{ik\theta}| \leq \rho^{|k|}$ . Ker je  $\rho < 1$ , številna vrsta  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho^{|k|}$  konvergira. Po Weierstrassovem M-testu zato Poissonovo jedro konvergira enakomerno na množici  $\{(r, \theta) \mid r \in [0, \rho), \theta \in [0, 2\pi]\}$ .  $\square$

Poissonovo jedro lahko zapišemo na več načinov. Če vrsto v definiciji Poissonovega jedra razbijemo na tri dele, glede na predznačenost indeksa vrste, dobimo:

$$(2) \quad \begin{aligned} P_r(\theta) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{ik\theta} + \sum_{j=1}^{\infty} r^j e^{-ij\theta}; & r \in [0, 1), \theta \in [0, 2\pi] \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} z^k + \sum_{j=1}^{\infty} \bar{z}^j; & z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}. \end{aligned}$$

Ker je Poissonovo jedro definirano na notranjosti enotskega diska, kjer je absolutna vrednost kompleksne spremenljivke manjša od ena, obe vrsti v zapisu (2) konvergirata. Ko ju seštejemo s formulo za geometrijsko vrsto dobimo:

$$(3) \quad P_r(\theta) = 1 + \frac{z}{1-z} + \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}; \quad z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}.$$

Opazimo, da bi (3) lahko zapisali tudi nekoliko drugače:

$$(4) \quad \begin{aligned} P_r(\theta) &= 1 + \frac{z}{1-z} + \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}} = 1 + \left( \frac{z}{1-z} \right) + \overline{\left( \frac{z}{1-z} \right)} \\ &= 1 + 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{z}{1-z} \right] = \operatorname{Re} \left[ \frac{1+z}{1-z} \right]; & z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}. \end{aligned}$$

Enakost  $|1-z|^2 = (1-\bar{z})(1-z) = (1-\bar{z})(1-z) = 1 + r^2 - 2r \cos(\theta)$  pa nam omogoči zapis:

$$(5) \quad P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos(\theta)}; \quad r \in [0, 1), \theta \in [0, 2\pi].$$

Preden se lotimo uporabe Poissonovega jedra, si s pomočjo zgornjih zapisov oglejmo še nekaj njegovih lastnosti, ki so zbrane v spodnjih trditvah.

**Trditev 4.7.** *Poissonovo jedro ima naslednje lastnosti:*

- a) kot funkcija spremenljivke  $\theta$  je periodično s periodo  $2\pi$ ,
- b) za vsak  $r \in [0, 1)$  in vsak  $\theta \in [0, 2\pi]$  je  $P_r(-\theta) = P_r(\theta)$ ,
- c) za vsak  $r \in [0, 1)$ :  $P_r(\theta)$  za  $\theta \in [-\pi, 0]$  narašča in za  $\theta \in [0, \pi]$  pada,
- d) za vsak  $r \in [0, 1)$  in vsak  $\theta \in [0, 2\pi]$  je  $P_r(\theta) > 0$ ,
- e) za vsak  $r \in [0, 1)$  velja  $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta) \frac{\theta}{2\pi} = 1$ .

*Dokaz.* Lastnosti a), b) in c) sledijo iz zapisa (5). Opazimo, da je v tem zapisu od  $\theta$  odvisen le člen s funkcijo kosinus. Ta zagotavlja  $2\pi$ -periodičnost in sodost, ter podaja želen interval naraščanja in padanja Poissonovega jedra, v odvisnosti od spremenljivke  $\theta$ .

Za dokaz točke d) si oglejmo zapis (3). Ker je Poissonovo jedro definirano na notranjosti enotskega diska, je absolutna vrednost v zapisu uporabljene kompleksne spremenljivke manjša od ena. Sledi, da sta števec in imenovalec v zapisu strogo pozitivna, kar dokazuje trditev.

Pri dokazu točke e) si pomagajmo z izpeljavo rešitve za Dirichletov problem na enotskem disku. Za robni pogoj, bomo na robu enotskega diska vzeli funkcijo, ki je identično enaka 1. Označimo torej  $h(z) \equiv 1$ ,  $z \in \partial\mathbb{D}$ . Opazimo, da

je  $\tilde{h}(z) \equiv 1$ ,  $z \in \mathbb{D}$  trivialna rešitev tako postavljenega Dirichletovega problema za enotski disk. Lema 4.2 nam pove, da je rešitev za tako podan Dirichletov problem enolično določena. Vemo tudi, da je harmonična razširitev eksplicitno podana prek formule (1). Velja torej:

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik(\theta-\varphi)} \right] \frac{d\varphi}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - \varphi) \frac{d\varphi}{2\pi}.$$

Sedaj v integral uvedemo novo spremenljivko  $\tau = \theta - \varphi$ , ter upoštevamo točko a). Dobimo:

$$1 = \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} P_r(\tau) \frac{d\tau}{2\pi} = \left( \int_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\theta-\pi} + \int_{\pi}^{\theta+\pi} \right) \left[ P_r(\tau) \frac{d\tau}{2\pi} \right] = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\tau) \frac{d\tau}{2\pi}.$$

□

**Posledica 4.8.** Za vsak  $r \in [0, 1)$  funkcija  $\frac{1}{2\pi} P_r(\theta)$ ,  $\theta \in [-\pi, \pi]$  določa gostoto zvezno porazdeljene slučajne spremenljivke.

*Dokaz.* Iz zapisa (5) je jasno, da je pri poljubnem  $r \in [0, 1)$  zapisana funkcija v odvisnosti od  $\theta$  zvezna na intervalu  $[-\pi, \pi]$ , točki d) in e) trditve 4.7 pa nam dokazujeta, da je na definicijskem območju funkcija strogo pozitivna in se pointegrira v 1. □

**Definicija 4.9.** Naj bo  $\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda$ , kjer je  $\Lambda$  povezana podmnožica v  $[0, \infty)$  družina omejenih integrabilnih funkcij, definiranih na  $\partial\mathbb{D}$ . Pravimo, da je družina funkcij *približna enota*, če velja:

- A)  $\int_{\partial\mathbb{D}} F_\lambda = 1$ , za vsak  $\lambda \in \Lambda$ ,
- B)  $\sup\{\int_{\partial\mathbb{D}} |F_\lambda| \mid \lambda \in \Lambda\} < \infty$ ,
- C) za vsak  $\delta > 0$  velja:  $\lim_{\lambda \rightarrow \mu} \int_{\{|x|>\delta\}} |F_\lambda(x)| dx = 0$ , kjer  $\mu$  označuje supremum množice  $\Lambda$ , oziroma  $\infty$ , če supremum množice  $\Lambda$  ne obstaja.

**Trditev 4.10.** Naj bo  $\delta > 0$ . Potem gre  $\max\{P_r(\theta) \mid \delta \leq |\theta| \leq \pi\} \rightarrow 0$  ko gre  $r \rightarrow 1$ .

*Dokaz.* Ker je za vsak  $r$  Poissonovo jedro v odvisnosti od spremenljivke  $\theta$  na intervalu  $[-\pi, \pi]$  zvezna funkcija, maksimum na kompaktu  $[-\pi, \pi]$  gotovo zavzamemo. Točki a) in b) trditve 4.7 nam povesta, da bomo za vsak  $r$  maksimum zavzeli kar v  $\delta$ . Oglejmo si torej  $P_r(\delta) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\delta)}$ . Ker je  $\delta > 0$ , bo imenovalec ulomka strogo pozitiven, števec ulomka pa gre proti 0, ko gre  $r \rightarrow 1$ . Sledi, da gre  $\max\{P_r(\theta) \mid \delta \leq |\theta| \leq \pi\} = P_r(\delta) \rightarrow 0$ , ko gre  $r \rightarrow 1$ . □

**Posledica 4.11.** Naj bo  $\delta > 0$ . Potem gre  $\int_{\{\pi \geq |\theta| \geq \delta\}} P_r(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \rightarrow 0$ , ko gre  $r \rightarrow 1$ .

*Dokaz.* Trditev 4.10 nam pove, da za vsak  $r \in [0, 1)$  obstaja  $c_r \in \mathbb{R}$ , da velja  $c_r = \max\{P_r(\theta) \mid \delta \leq |\theta| \leq \pi\}$ . Zato velja:

$$\int_{\{\pi \geq |\theta| \geq \delta\}} P_r(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \leq \int_{\{\pi \geq |\theta| \geq \delta\}} c_r \frac{d\theta}{2\pi} \leq c_r.$$

Ponovno uporabimo trditev 4.10, ki nam pove, da gre  $c_r \rightarrow 0$ , ko gre  $r \rightarrow 1$ . Sledi, da gre tudi zapisan integral proti 0, ko gre  $r \rightarrow 1$ . □

**Trditev 4.12.** Družina funkcij  $\{\frac{1}{2\pi} P_r \mid r \in [0, 1)\}$  je približek enote.

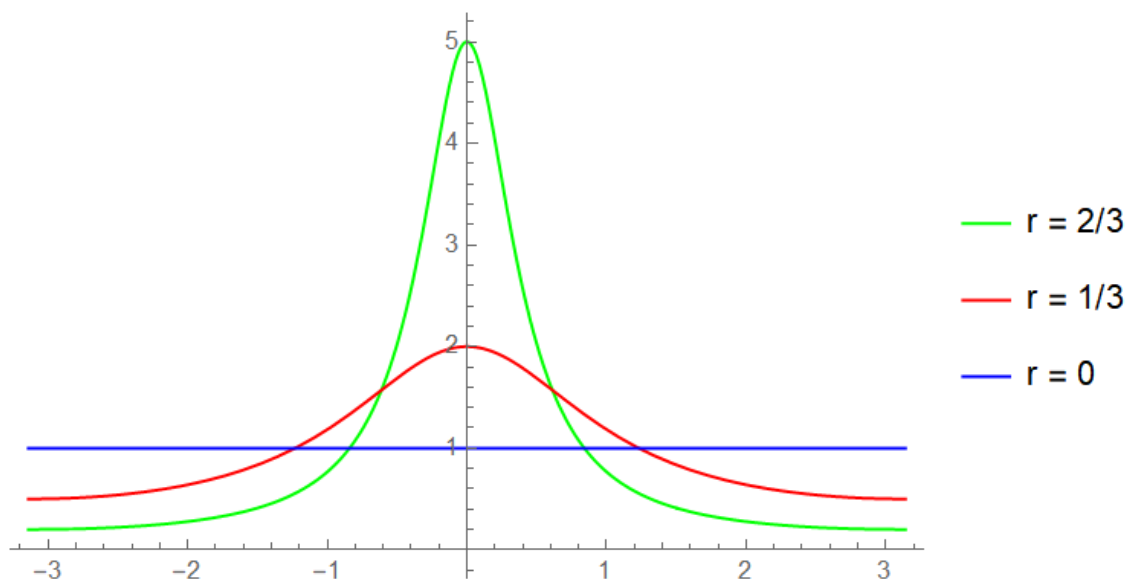
*Dokaz.* Zahteve glede definicijskega območja, omejenosti in integrabilnosti so izpolnjene, zato je dovolj komentirati, da družina zadošča pogojem A), B) in C). Da družina zadošča pogojem točke A) nam pove točka e) trditve 4.7, točka d) trditve 4.7 pa nam pove, da je s tem zadoščeno tudi pogojem točke B). Posledica 4.11 nam pove, da družina zadošča tudi pogojem iz točke C).  $\square$

**Opomba 4.13.** Vredno je, s pomočjo zgoraj zapisanih trditev, komentirati obnašanje funkcije Poissonovega jedra, ko pošljemo  $r \rightarrow 1$ . Trditev 4.10 nam pove, da se vrednosti funkcije v odvisnosti od spremenljivke  $\theta$ , ki so poljubno malo oddaljene od izhodišča približujejo 0. Dodatno zapisano potrjuje tudi posledica 4.11. Oglejmo si sedaj, kaj se zgodi z vrednostjo funkcije pri  $\theta = 0$ , ko pošljemo  $r \rightarrow 1$ . Iz zapisa (5) vemo, da velja:

$$P_r(0) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r} = \frac{1 - r^2}{(1 - r)^2} = \frac{1 + r}{1 - r}, \quad r \in [0, 1).$$

Ko gre  $r \rightarrow 1$ , gre torej  $P_r(0)$  proti  $\infty$ . Zapisani opažanja nam skupaj z ugotovitvijo iz točke e) trditve 4.7 nakazujeta, da se funkcija Poissonovega jedra, ko pošljemo  $r \rightarrow 1$  približuje tako imenovani Diracovi delti. O tem si bralec več lahko prebere na REFERENCA.

**Opomba 4.14.** Lastnosti Poissonovega jedra, navedene v trditvi 4.7 in 4.10, so tudi dobro razvidne na spodnji sliki.



SLIKA 1. Graf Poissonovega jedra glede na vrednost spremenljivke  $r$ .

**Trditev 4.15.** *Poissonovo jedro je na enotskem disku harmonična funkcija.*

*Dokaz.* Trditev 2.4 nam pove, da je dovolj pokazati, da lahko Poissonovo jedro zapišemo kot realni del holomorfne funkcije, definirane na enotskem disku. Zapis (4) nam pove, da je Poissonovo jedro realni del funkcije  $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ ,  $z \in \mathbb{D}$ . Ker je  $f$  na enotskem disku tudi holomorfna, je trditev s tem dokazana.  $\square$

Ker je enotski disk zvezdasto območje, Poissonovo jedro pa po trditvi 4.15 harmonična funkcija, po trditvi 2.7 obstaja harmonična konjugiranka Poissonovega jedra. Opazimo, da smo v zapisu (4) Poissonovo jedro prikladno zapisali kot realni del holomorfne funkcije, zato se nam ponuja harmonična konjugiranka Poissonovega jedra kot imaginarni del zapisane holomorfne funkcije. Velja:

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} \left[ \frac{1+z}{1-z} \right] &= \frac{\frac{1+z}{1-z} - \overline{\left( \frac{1+z}{1-z} \right)}}{2i} = \frac{(1+z)(1-\bar{z}) - (1+\bar{z})(1-z)}{|1-z|^2 2i} \\ &= \frac{2 \operatorname{Im} z}{|1-z|^2} = \frac{2r \sin(\theta)}{1+r^2-2r \cos(\theta)} ; \quad z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}.\end{aligned}$$

Prav to nas sedaj pripelje do naslednje definicije.

**Definicija 4.16.** *Konjugirano Poissonovo jedro*, je funkcija definirana s predpisom:

$$(6) \quad Q_r(\theta) = \frac{2r \sin(\theta)}{1+r^2-2r \cos(\theta)} ; \quad r \in [0, 1), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

**Opomba 4.17.** Zapišimo zvezi, ki jih narekujeta zgornji komentar in definicija. Velja:

$$P_r(\theta) + i Q_r(\theta) = \left[ \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos(\theta)} \right] + i \left[ \frac{2r \sin(\theta)}{1+r^2-2r \cos(\theta)} \right] = \frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} ; \quad re^{i\theta} \in \mathbb{D},$$

Sedaj se vrnimo k reševanju Dirichletovega problema za enotski disk. Spomnimo se, da smo za polinomske funkcije  $h$  skonstruirali predpis razširitve, ki je rešila zastavljen problem. Opazimo, da bi si pri zapisu enačbe (1) lahko pomagali z definiranim pojmom Poissonovega jedra. Lahko zapišemo:

$$\tilde{h}(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{i\varphi}) \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{-ik\varphi} e^{ik\theta} \right] \frac{d\varphi}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{i\varphi}) P_r(\theta - \varphi) \frac{d\varphi}{2\pi}, \quad re^{i\theta} \in \overline{\mathbb{D}}.$$

Posvetimo se sedaj spet iskanju splošne rešitve Dirichletovega problema na enotnem disku. Zgoraj smo z intuitivno izpeljavo nevede že zapisali funkcijo, ki jo bomo sedaj vzeli za definicijo novega pojma. Pokazali bomo, da to tudi v splošnem omogoča zapis rešitve Dirichletovega problema na enotnem disku.

**Definicija 4.18.** Naj bo  $h(e^{i\theta})$  zvezna funkcija, definirana na robu enotskega diska. *Poissonov integral* funkcije  $h(e^{i\theta})$ , ki ga označimo z  $\tilde{h}(z)$ , je funkcija, definirana na notranjosti enotskega diska s predpisom

$$\tilde{h}(z) = \int_0^{2\pi} h(e^{i\varphi}) P_r(\theta - \varphi) \frac{d\varphi}{2\pi}, \quad \text{kjer je } z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}.$$

**Opomba 4.19.** Če v zgornji integral uvedemo novo spremenljivko  $\tau = \theta - \varphi$ , ter upoštevamo točko a) trditve 4.7, lahko Poissonov integral funkcije  $h$ , zapišemo tudi kot:

$$\tilde{h}(z) = \int_0^{2\pi} h(e^{i(\theta-\varphi)}) P_r(\varphi) \frac{d\varphi}{2\pi}, \quad \text{kjer } z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}.$$

Natančneje si opisan postopek, ki pripelje do zgornjega zapisa Poissonovega integrala bralec lahko ogleda v dokazu točke e) trditve 4.7.

**Opomba 4.20.** Če definiramo funkcijo  $f(w) = h(e^{iw})$ , lahko Poissonov integral zapišemo še nekoliko drugače. Velja:

$$\begin{aligned} \tilde{h}(z) &= \int_0^{2\pi} h(e^{i\varphi}) P_r(\theta - \varphi) \frac{d\varphi}{2\pi} = \int_0^{2\pi} f(\varphi) P_r(\theta - \varphi) \frac{d\varphi}{2\pi} \\ (7) \quad &= \frac{1}{2\pi} [(f * P_r)(\theta)] = \frac{1}{2\pi} [(P_r * f)(\theta)], \quad z = re^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad r \in [0, 1). \end{aligned}$$

Zadnja enakost v zgornjem zapisu je posledica komutativnosti konvolucije, ter še na nekoliko drugačen način dokazuje zapis iz opombe 4.19. Velja namreč:

$$\begin{aligned} \tilde{h}(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} [(P_r * f)(\theta)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\varphi) f(\theta - \varphi) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} h(e^{i(\theta - \varphi)}) P_r(\varphi) \frac{d\varphi}{2\pi}, \quad z = re^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad r \in [0, 1). \end{aligned}$$

**Opomba 4.21.** Ogledali smo si alternativni zapis Poissonovega integrala s konvolucijo Poissonovega jedra. Smiselno se je vprašati, kako na zgornji postopek zapisa s konvolucijo vpliva zamenjava Poissonovega jedra s konjugiranim Poissonovim jedrom. Opazimo, da lahko po enakem postopku tudi integral s konjugiranim Poissonovim jedrom izrazimo kot konvolucijo. Ponovno definiramo  $f(w) = h(e^{iw})$ , ki nam omogoča zapis:

$$\int_0^{2\pi} h(e^{i\varphi}) Q_r(\theta - \varphi) \frac{d\varphi}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) Q_r(\theta - \varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} [(f * Q_r)(\theta)], \quad re^{i\theta} \in \mathbb{D}.$$

Konvolucijska zapisa integrala iz opombe 4.20 in 4.21 bomo uporabili nekoliko kasneje, sedaj pa se še nekoliko posvetimo lastnostim Poissonovega integrala.

**Trditev 4.22.** Naj bo  $\Phi$  preslikava, ki zvezni funkciji  $h$ , definirani na robu enotskega diska, prireredi njen Poissonov integral  $\tilde{h}$ , t.j.  $\Phi : h \mapsto \tilde{h}$ . Potem velja:

- a)  $\Phi$  je  $\mathbb{C}$ -linearna preslikava, t.j. za vsak  $h_1, h_2 \in C^0(\partial\mathbb{D})$  in vsak  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$  velja:  $\Phi(c_1 h_1 + c_2 h_2) = c_1 \Phi(h_1) + c_2 \Phi(h_2)$ ,
- b)  $\Phi$  ohranja omejenost, t.j. če za poljuben  $h \in C^0(\partial\mathbb{D})$  obstaja  $M \in \mathbb{R}$ , da velja  $|h(z)| \leq M$ , za vsak  $z \in \partial\mathbb{D}$ , potem je  $|[\Phi(h)](z)| \leq M$  za vsak  $z \in \mathbb{D}$ .

*Dokaz.* Dokažimo najprej točko a). Naj bosta  $h_1$  in  $h_2$  poljubni zvezni funkciji, definirani na robu enotskega diska, ter  $c_1, c_2$  poljubni kompleksni števili. Potem je na robu enotskega diska zvezna tudi funkcija  $c_1 h_1 + c_2 h_2$ . Oglejmo si sedaj najprej Poissonov integral za zapisano linearno kombinacijo.

$$\begin{aligned} \widetilde{[c_1 h_1 + c_2 h_2]}(z) &= \int_{-\pi}^{\pi} ([c_1 h_1 + c_2 h_2](e^{i\varphi})) P_r(\theta - \varphi) \frac{d\varphi}{2\pi} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} ([c_1 h_1](e^{i\varphi}) + [c_2 h_2](e^{i\varphi})) P_r(\theta - \varphi) \frac{d\varphi}{2\pi} \\ &= c_1 \int_{-\pi}^{\pi} h_1(e^{i\varphi}) P_r(\theta - \varphi) \frac{d\varphi}{2\pi} + c_2 \int_{-\pi}^{\pi} h_2(e^{i\varphi}) P_r(\theta - \varphi) \frac{d\varphi}{2\pi} \\ &= c_1 \tilde{h}_1(z) + c_2 \tilde{h}_2(z) = [c_1 \tilde{h}_1 + c_2 \tilde{h}_2](z), \quad z \in \mathbb{D} \end{aligned}$$

Po definiciji preslikave  $\Phi$  sedaj sledi  $\Phi(c_1 h_1 + c_2 h_2) = c_1 \Phi(h_1) + c_2 \Phi(h_2)$ .

Dokažimo še točko b). Naj bo  $h$  poljubna omejena zvezna funkcija, definirana na robu enotskega diska. Naj za  $M \in \mathbb{R}$  velja  $|h(z)| \leq M$  za vsak  $z \in \partial\mathbb{D}$ . Ponovno si



najprej oglejmo Poissonov integral funkcije  $h$  in uporabimo zapisano neenakost, ter točki d) in e) trditve 4.7.

$$\begin{aligned} |\tilde{h}(z)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{i\varphi}) P_r(\theta - \varphi) \frac{d\varphi}{2\pi} \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |h(e^{i\varphi})| P_r(\theta - \varphi) \frac{d\varphi}{2\pi} \\ &\leq M \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - \varphi) \frac{d\varphi}{2\pi} = M, \quad z \in \mathbb{D} \end{aligned}$$

Po definiciji preslikave  $\Phi$  zato  $|\Phi(h)(z)| \leq M$  za vsak  $z \in \mathbb{D}$ .  $\square$

**Lema 4.23.** *Naj bo  $u$  realna zvezna funkcija, definirana na  $\partial\mathbb{D}$ . Potem je Poissonov integral funkcije  $u$  na  $\mathbb{D}$  harmonična funkcija.*

*Dokaz.* Pomagajmo si z zapisom (4). Za  $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$  lahko zapišemo:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(z) &= \tilde{u}(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{i\varphi}) P_r(\theta - \varphi) \frac{d\varphi}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{i\varphi}) \operatorname{Re} \left( \frac{1 + re^{i(\theta-\varphi)}}{1 - re^{i(\theta-\varphi)}} \right) \frac{d\varphi}{2\pi} \\ (8) \quad &= \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{i\varphi}) \operatorname{Re} \left( \frac{e^{i\varphi} + re^{i\theta}}{e^{i\varphi} - re^{i\theta}} \right) \frac{d\varphi}{2\pi} = \operatorname{Re} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{i\varphi}) \left( \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} \right) \frac{d\varphi}{2\pi} \right]. \end{aligned}$$

Tako smo  $\tilde{u}(z)$  za  $z \in \mathbb{D}$  izrazili kot realni del holomorfne funkcije, kar po trditvi 2.4 dokazuje harmoničnost Poissonovega integrala funkcije  $u$ , na notranjosti enotskega diska.  $\square$

Osredotočimo se na predpis holomorfne funkcije iz zapisa (8). Opazimo, da smo jo konstruirali s pomočjo podane realne funkcije  $u$ . Sedaj začnimo nekoliko drugače. Denimo da imamo podano funkcijo  $F = U + iV$ , ki je na  $\overline{\mathbb{D}}$  zvezna in na  $\mathbb{D}$  holomorfna. Vredno je omeniti, da sta tu v zapisu  $U$  in  $V$  realni funkciji, ki predstavljata realni oziroma imaginarni del funkcije  $F$ , ter sta zato na  $\overline{\mathbb{D}}$  zvezni in na  $\mathbb{D}$  harmonični. Iz realnega dela holomorfne funkcije  $F$ , torej funkcije  $U$  lahko na enak način, kot smo to storili v (8) konstruiramo holomorfno funkcijo  $\tilde{F}$  kot:

$$(9) \quad \tilde{F}(z) = \int_0^{2\pi} U(e^{i\varphi}) \left( \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} \right) \frac{d\varphi}{2\pi}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Enakost (8) nam pove, da za  $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$  velja:  $\operatorname{Re}(\tilde{F})(z) = U(z)$ , zato se je smiselno vprašati ali lahko kaj podobnega na  $\mathbb{D}$  trdimo tudi za  $\tilde{F}$  in  $F$ . O tem nam več pove naslednja posledica.

**Posledica 4.24** (Schwarzova integralska formula). *Naj bo  $F = U + iV$  holomorfna na  $\mathbb{D}$  in zvezna na  $\overline{\mathbb{D}}$ . Potem velja:*

$$F(z) = \int_0^{2\pi} U(e^{i\varphi}) \left( \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} \right) \frac{d\varphi}{2\pi} + iV(0), \quad z \in \mathbb{D}.$$

*Dokaz.* Enako kot smo to storili v (8) in (9), lahko definiramo holomorfno funkcijo:

$$\tilde{F}(z) = \int_0^{2\pi} U(e^{i\varphi}) \left( \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} \right) \frac{d\varphi}{2\pi}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Komentirali smo že, da po (8) velja  $\operatorname{Re}(\tilde{F}) \equiv \operatorname{Re}(F)$ , oziroma  $\operatorname{Re}[\tilde{F} - F](z) = 0$ , za vsak  $z \in \mathbb{D}$ . Razlika holomorfnih funkcij zadošča Cauchy-Riemannovemu sistem

enačb, zato obstaja  $C \in \mathbb{C}$ , da velja  $\operatorname{Im}[\tilde{F} - F](z) = C$ , za vsak  $z \in \mathbb{D}$ . Ker je  $U$  na  $\mathbb{D}$  harmonična, ima na  $U$  lastnost povprečne vrednosti. Zato velja:

$$\tilde{F}(0) = \int_0^{2\pi} U(e^{i\varphi}) \left( \frac{e^{i\varphi} + 0}{e^{i\varphi} - 0} \right) \frac{d\varphi}{2\pi} = \int_0^{2\pi} U(e^{i\varphi}) \frac{d\varphi}{2\pi} = U(0).$$

Ker je  $F(0) = U(0) + iV(0)$ , sledi  $\operatorname{Im}[F - \tilde{F}] \equiv V(0)$ . Torej velja:

$$F(z) = \tilde{F}(z) + iV(0) = \int_0^{2\pi} U(e^{i\varphi}) \left( \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} \right) \frac{d\varphi}{2\pi} + iV(0), \quad z \in \mathbb{D}.$$

□

**Opomba 4.25.** Spomnimo se zapisa iz opomb 4.20 in 4.21. Schwarzovo integralno formulo za holomorfnost funkcije  $F = U + iV$  lahko alternativno zapišemo kot konvolucijo. Velja:

$$F(re^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} U(e^{i\varphi}) \left[ \frac{e^{i\varphi} + re^{i\theta}}{e^{i\varphi} - re^{i\theta}} \right] \frac{d\varphi}{2\pi} + iV(0); \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad r \in [0, 1).$$

Označimo  $G(w) = U(e^{iw})$ , ter poenostavimo. Dobimo:

$$\begin{aligned} F(re^{i\theta}) &= \int_0^{2\pi} G(\varphi) \left[ \frac{1 + re^{i(\theta-\varphi)}}{1 - re^{i(\theta-\varphi)}} \right] \frac{d\varphi}{2\pi} + iV(0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{2\pi} G(\varphi) [(P_r + iQ_r)(\theta - \varphi)] d\varphi \right] + iV(0) \\ &= \frac{1}{2\pi} [G * (P_r + iQ_r)](\theta) + iV(0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ (G * P_r)(\theta) + i[(G * Q_r)(\theta) + 2\pi V(0)] \right], \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad r \in [0, 1). \end{aligned}$$

Vrnimo se k bistvu razdelka. Za preproste zvezne funkcije smo že dokazali, da rešitev Dirichletovega problema na enotskem disku obstaja. To nas je pripeljalo do definicije Poissonovega jedra in Poissonovega integrala, s pomočjo katerih bomo sedaj pokazali, da lahko za poljubno zvezno funkcijo obstaja rešitev Dirichletovega problema na enotskem disku.

**Trditev 4.26.** *Naj bo  $h$  zvezna kompleksna funkcija, definirana na  $\partial\mathbb{D}$ . Rešitev Dirichletovega problema, z robnim pogojem  $h$ , za enotski disk obstaja in je na  $\mathbb{D}$  definirana kot Poissonov integral funkcije  $h$ .*

**Opomba 4.27.** Pred dokazom trditve še na nekoliko drugačen način zapišimo, kaj nam trditev v resnici pove. Definirajmo funkcijo  $H$ , na  $\overline{\mathbb{D}}$ , kot:

$$H(z) = \begin{cases} h(z); & z \in \partial\mathbb{D} \\ \tilde{h}(z); & z \in \mathbb{D} \end{cases}.$$

Trdimo, da je funkcija  $H$  na  $\overline{\mathbb{D}}$  zvezna, ter na  $\mathbb{D}$  harmonična. Po definiciji funkcije  $H$  opazimo, da v resnici trdimo, da je na  $\mathbb{D}$  harmoničen Poissonov integral funkcije  $h$ . Ker se zožitev tako definirane funkcije  $H$  na  $\partial\mathbb{D}$  ujema s  $h$ , želimo dokazati, da je ravno funkcija  $H$  rešitev za Dirichletov problem na enotskem disku, z robnim pogojem  $h$ .

*Dokaz.* Trditev bomo dokazali v dveh korakih. Najprej dokažimo, da je Poissonov integral na  $\mathbb{D}$  harmonična funkcija. Vemo, da lahko kompleksno funkcijo  $h$  razcepimo na njen realni in imaginarni del kot  $h = u + iv$ , pri čemer sta  $u$  in  $v$  realni funkciji. Točka a) trditve 4.22 nam pove, da velja  $\tilde{h} = \tilde{u} + i\tilde{v}$ . Ker sta  $u$  in  $v$  realni zvezni funkciji, definirani na robu enotskega diska, lahko uporabimo lemo 4.23. Ta nam pove, da sta  $\tilde{u}$  in  $\tilde{v}$  na  $\mathbb{D}$  harmonični funkciji. Dokaz prvega dela zaključimo opomba 2.9, ki pove, da je potem tudi  $\tilde{h} = \tilde{u} + i\tilde{v}$  na  $\mathbb{D}$  harmonična funkcija.

Za dokaz zveznosti na  $\overline{\mathbb{D}}$  se moramo nekoliko bolj potruditi. Tako kot smo to storili v opombi 4.27, s  $H$  označimo funkcijo, ki se na robu enotskega diska ujema s  $h$ , na notranjosti enotskega diska pa je definirana kot Poissonov integral funkcije  $h$ . Na  $\mathbb{D}$  je  $\tilde{h}$  oziroma  $H$  harmonična, zato je tam tudi zvezna. Predpostavka trditve pa nam pove, da je  $h$  zvezna na  $\partial\mathbb{D}$ , zato po definiciji tudi  $H$ . Dovolj je torej dokazati, da je funkcija  $H$  zvezna do roba enotskega diska.

Naj bo  $\epsilon > 0$ . Dokazati je potrebno, da obstaja  $\delta > 0$ , da za vsak  $z \in \mathbb{D}$  in  $w \in \partial\mathbb{D}$  iz  $|z - w| < \delta$  sledi  $|H(z) - H(w)| < \epsilon$ . Označimo  $z = re^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$  in  $r \in [0, 1)$ , ter  $w = e^{i\tau}$ ,  $\tau \in [0, 2\pi]$ . Po definiciji funkcije  $H$  torej iščemo  $\delta > 0$ , da bo za  $\theta, \tau \in [0, 2\pi]$  in  $r \in [0, 1)$  iz  $|re^{i\theta} - e^{i\tau}| < \delta$  sledilo  $|\tilde{h}(re^{i\theta}) - h(e^{i\tau})| < \epsilon$ . Pomagajmo si s trikotniško neenakostjo. Velja:

$$\begin{aligned} |\tilde{h}(re^{i\theta}) - h(e^{i\tau})| &= |\tilde{h}(re^{i\theta}) - h(e^{i\theta}) + h(e^{i\theta}) - h(e^{i\tau})| \\ (10) \qquad \qquad \qquad &\leq |\tilde{h}(re^{i\theta}) - h(e^{i\theta})| + |h(e^{i\theta}) - h(e^{i\tau})|. \end{aligned}$$

Ocenimo najprej prvi sumand, iz zapisa (10). Uporabimo točko e) trditve 4.7, ter po definiciji Poissonovega integrala zapišemo:

$$|\tilde{h}(re^{i\theta}) - h(e^{i\theta})| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} [h(e^{i(\theta-\varphi)}) - h(e^{i\theta})] P_r(\varphi) \frac{d\varphi}{2\pi} \right|.$$

Sedaj uporabimo točko d) trditve 4.7, ter ocenimo:

$$|\tilde{h}(re^{i\theta}) - h(e^{i\theta})| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |h(e^{i(\theta-\varphi)}) - h(e^{i\theta})| P_r(\varphi) \frac{d\varphi}{2\pi}.$$

Ker je  $h$  zvezna funkcija na kompaktnem  $\partial\mathbb{D}$ , je omejena in enakomerno zvezna. Obstaja torej  $M \in \mathbb{R}$ , da velja  $|h(z)| \leq M$ , za vsak  $z \in \partial\mathbb{D}$ , ter  $\delta_0 > 0$ , da za vsak  $\mu, \lambda \in [0, 2\pi]$  iz  $|\mu - \lambda| < \delta_0$  sledi  $|h(e^{i\mu}) - h(e^{i\lambda})| < \frac{\epsilon}{3}$ . Zgornji integral, lahko sedaj razdelimo na dva dela, da bomo lahko uporabili enakomerno zveznost funkcije  $h$ :

$$|\tilde{h}(re^{i\theta}) - h(e^{i\theta})| \leq \left( \int_{-\delta_0}^{\delta_0} + \int_{\delta_0 \leq |\varphi| \leq \pi} \right) \left[ |h(e^{i(\theta-\varphi)}) - h(e^{i\theta})| P_r(\varphi) \frac{d\varphi}{2\pi} \right].$$

Absolutno vrednost znotraj prvega integrala lahko zaradi enakomerne zveznosti funkcije  $h$  navzgor ocenimo z  $\frac{\epsilon}{3}$ , vrednosti znotraj drugega integrala pa lahko zaradi omejenosti funkcije  $h$  navzgor ocenimo kar z  $2M$ . Velja torej:

$$|\tilde{h}(re^{i\theta}) - h(e^{i\theta})| < \frac{\epsilon}{3} \int_{-\delta_0}^{\delta_0} P_r(\varphi) \frac{d\varphi}{2\pi} + 2M \int_{\delta_0 \leq |\varphi| \leq \pi} P_r(\varphi) \frac{d\varphi}{2\pi}.$$

Vsakega od integralov lahko sedaj navzgor ocenimo s pomočjo točke e) trditve 4.7:

$$|\tilde{h}(re^{i\theta}) - h(e^{i\theta})| < \frac{\epsilon}{3} + 2M \max\{P_r(\varphi) \mid \delta_0 \leq |\varphi| \leq \pi\}.$$

Trditev 4.10 nam pove, da obstaja  $\delta_1 > 0$ , da iz  $1 - r < \delta_1$  sledi  $\max\{P_r(\varphi) \mid \delta_0 \leq |\varphi| \leq \pi\} < \frac{\epsilon}{6M}$ . Zato lahko pri zapisanih pogojih ocenimo:

$$\left| \tilde{h}(re^{i\theta}) - h(e^{i\theta}) \right| < \frac{2\epsilon}{3}.$$

Ocenimo še drugi sumand, ki smo ga dobili pri (10). Enakomerna zveznost nam pove, da iz  $|\theta - \tau| < \delta_0$  sledi  $|h(e^{i\theta}) - h(e^{i\tau})| < \frac{\epsilon}{3}$ .

Združimo oceni in konstruirajmo  $\delta > 0$ . Dokazali smo, da za vsak  $\theta, \tau \in [0, 2\pi]$  in vsak  $r \in [0, 1]$  iz  $|\theta - \tau| < \delta_0$ , ter  $1 - r < \delta_1$  sledi:

$$\left| \tilde{h}(re^{i\theta}) - h(e^{i\tau}) \right| \leq \left| \tilde{h}(re^{i\theta}) - h(e^{i\theta}) \right| + |h(e^{i\theta}) - h(e^{i\tau})| < \frac{2\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Zadošča  $\delta = \min\{\delta_1, \frac{\delta_0}{4}\}$ , saj iz  $|re^{i\theta} - e^{i\tau}| < \delta$  sledi:

$$\delta_1 \geq \delta > |re^{i\theta} - e^{i\tau}| \geq ||re^{i\theta}| - |e^{i\tau}|| \geq |r - 1| \geq 1 - r,$$

ter:

$$\delta_0 \geq 4\delta > 2[|e^{i\theta} - re^{i\theta}| + |re^{i\theta} - e^{i\tau}|] \geq 2|e^{i\theta} - e^{i\tau}| \geq |\theta - \tau|.$$

□

**Posledica 4.28.** *Dirichletov problem za enotski disk je dobro postavljen matematičen problem.*

*Dokaz.* Dokažimo, da Dirichletov problem za enotski disk ustreza zahtevam A), B) in C) iz definicije 4.1. Zahtevo A), oziroma obstoj rešitve za vsako zvezno funkcijo definirani na robu enotskega diska, nam preko eksplcitne konstrukcije zagotavlja trditev 4.26. Enoličnost rešitve oziroma zahtevo B) pa nam potrjuje lema 4.2.

Osredotočimo se na zahtevo C). Naj bo  $\epsilon > 0$  poljubno majhen in  $h$  zvezna funkcija, definirana na  $\partial\mathbb{D}$ . Naj bo  $g$  poljubna zvezna funkcija, definirana na  $\partial\mathbb{D}$ , za katero za vsak  $z \in \partial\mathbb{D}$  velja:  $|h(z) - g(z)| < \epsilon$ . Definirajmo  $f(z) = h(z) - g(z)$ . Opazimo, da velja  $|f(z)| < \epsilon$ , za vsak  $z \in \partial\mathbb{D}$ . Točka b) trditve 4.22 nam pove, da potem za vsak  $z \in \mathbb{D}$  velja  $|\tilde{f}(z)| < \epsilon$ , po točki a) trditve 4.22 pa sledi  $|\tilde{h}(z) - \tilde{g}(z)| < \epsilon$ , za vsak  $z \in \mathbb{D}$ . Definirajmo funkciji  $H$  in  $G$  kot:

$$H(z) = \begin{cases} h(z); & z \in \partial\mathbb{D} \\ \tilde{h}(z); & z \in \mathbb{D} \end{cases}, \quad G(z) = \begin{cases} g(z); & z \in \partial\mathbb{D} \\ \tilde{g}(z); & z \in \mathbb{D} \end{cases}.$$

Trditev 4.26 nam pove, da je rešitev za Dirichletov problem na enotskem disku, z začetnim pogojem  $h$ , funkcija  $H$ , za začetni pogoj  $g$  pa funkcija  $G$ . Zapisali smo, da se funkciji  $G$  in  $H$  na  $\partial\mathbb{D}$  in  $\mathbb{D}$  po absolutni vrednosti razlikujeta za manj kot  $\epsilon$ . Sledi, da velja  $|H(z) - G(z)| < \epsilon$  za vsak  $z \in \mathbb{D}$ . Ker je bil  $\epsilon$  poljubno majhen, smo s tem dokazali zvezno odvisnost problema od začetnih pogojev. □

**Opomba 4.29.** Dirichletov problem smo formulirali in reševali za enotski disk. Problem bi na podoben način lahko formulirali za poljubno območje  $U$ . Kot začetni/robni pogoj bi podali zvezno funkcijo  $f$  (definirano na  $\partial U$ ), ter iskali njeno razširitev  $\tilde{f}$  (na  $\overline{U}$ ), tako da bi bila na  $\overline{U}$  zvezna, na  $U$  harmonična, ter bi se zožitev  $\tilde{f}$  na  $\partial U$  ujemala z  $f$ . V splošnem Dirichletovega problema znotraj diplomske naloge ne bomo reševali, vredno pa je omeniti, da je bil prav enotski disk izbran zaradi preprostosti in bi lahko zgornji rezultat na podoben način zapisali za poljuben disk. To naredimo s pomočjo vpeljave novih spremenljivk ( $z \mapsto az + b$ ) v Poissonov integral. DOKONCAJ IZPELJAVO!

## TO SPET OKEJ

**Opomba 4.30.** Spomnimo se glavne motivacije za razdelek, ki smo jo navedli v opombi 3.14. Z znanjem, pridobljenim znotraj razdelka, je sedaj dokaz karakterizacije harmoničnih funkcij na dlani.

**Trditev 4.31.** *Naj bo  $h$  zvezna funkcija, definirana na območju  $U \subseteq \mathbb{C}$ . Velja, da je  $h$  harmonična funkcija natanko tedaj, ko ima lastnost povprečne vrednosti.*

*Dokaz.* Trditev 3.10 nam dokaže eno implikacijo. Dokazati je potrebno torej le še, da je zvezna funkcija  $h$  z lastnostjo povprečne vrednosti na  $U$  harmonična. Dokaz temelji na obstoju rešitve Dirichletovega problema za poljuben disk.

Ker je  $U$  območje, za poljubno točko  $z_0 \in U$  obstaja  $r > 0$ , da je  $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r) \subseteq U$ . Ker je  $h$  zvezna na  $U$ ,  $h$  na  $\partial\mathbb{D}(z_0, r)$  določa začetne pogoje za Dirichletov problem za disk  $\mathbb{D}(z_0, r)$ . Trditev 4.26 in opomba 4.29 potrdirata, da rešitev obstaja. Rešitev označimo s  $H(z)$ . Kot harmonična funkcija na  $\mathbb{D}(z_0, r)$ , ima po trditvi 3.10  $H$  na  $\mathbb{D}(z_0, r)$  lastnost povprečne vrednosti. Oglejmo si sedaj funkcijo  $g(z) = h(z) - H(z)$  za  $z \in \overline{\mathbb{D}}(z_0, r)$ . Kot razlika funkcij z lastnostjo povprečne vrednosti ima po trditvi 3.6 tudi  $g$  na  $\mathbb{D}(z_0, r)$  lastnost povprečne vrednosti in je kot razlika dveh zveznih funkcij zvezna na  $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r)$ . Vemo celo, da na  $\partial\overline{\mathbb{D}}(z_0, r)$  velja  $g \equiv 0$ , saj je zožitev  $H$  na  $\partial\overline{\mathbb{D}}(z_0, r)$  enaka  $h$ . Po posledici 3.8 je potem  $g \equiv 0$  na  $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r)$ , oziroma  $H(z) = h(z)$ , za vsak  $z \in \overline{\mathbb{D}}(z_0, r)$ . Sledi, da je  $h$  harmonična na  $\mathbb{D}(z_0, r)$ , oziroma ima poljubna točka  $z_0$  v  $U$  okolico, na kateri je  $h$  harmonična. Posledično je funkcija  $h$  harmonična na  $U$ .  $\square$

**Posledica 4.32.** *Naj bo  $u$  zvezna funkcija z lastnostjo povprečne vrednosti, definirana na območju  $D$ . Potem je  $u$  na  $D$  gladka, oziroma  $u \in C^\infty(D)$ .*

*Dokaz.* Po trditvi 4.31 je  $u$  harmonična, po trditvi 2.11 pa zato tudi gladka.  $\square$

## 5. SCHWARZOV PRINCIP ZRCALJENJA ZA HARMONIČNE FUNKCIJE

V tretjem poglavju, smo se že srečali s problemom razširitve podane funkcije do funkcije, ki mora zadoščati dodatnim pogojem. Pri Dirichletovem problemu smo zahtevali harmoničnost razširitve na notranjosti območja/diska in zveznost razširitve na zaprtju območja/diska. Pokazali smo, da to lahko naredimo s pomočjo Poissonovega integrala  $\tilde{h}$  kot:

$$h^e(z) = \begin{cases} h(z) & z \in \partial\mathbb{D} \\ \tilde{h}(z) & z \in \mathbb{D} \end{cases}.$$

Problem, ki ga Schwarzov princip zrcaljenja reši je ne glede na drugačne začetne pogoje, iz vidika iskanja razširitve kljub temu blizu že rešenemu Dirichletovemu problemu. Glavna razlika je, da pri Schwarzovem principu zrcaljenja harmoničnost na območju vzamemo že za predpostavko, ter s pomočjo robnih zveznih začetnih pogojev poskušamo konstruirati harmonično razširitev na povsem novem območju podobne oblike. Kot že nakazuje beseda zrcaljanje v imenu principa, bomo razširitev želeli konstruirati na žrcalni sliki prvotno definiranega območja. Prav zato bo potrebno predpostaviti nekaj simetrije. Spoznajmo sedaj nekaj osnovnih pojmov, ki nas bodo pripeljali do glavnega izreka.

**Definicija 5.1.** Naj bo  $U$  območje. Zrcaljenje območja  $U$  čez realno os definiramo kot  $U^* = \{\bar{z} \mid z \in U\}$ .

Pravimo, da je območje  $U$  simetrično glede na realno os, če velja  $U^* = U$ .

Naj bo  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Potem lahko pri zgornjih oznakah definiramo  $u^* : U^* \rightarrow \mathbb{R}$ , kot  $u^*(z) = u(\bar{z})$ .

Naravno je pričakovati, da se zaradi dokaj preproste definicije  $u^*$  lastnosti  $u$  "prenesejo" tudi na  $u^*$ . Spodnja lema nam to potrdi.

**Lema 5.2.** Naj bo  $U$  območje in  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Če je  $u$  harmonična na  $U$ , je  $u^*$  harmonična na  $U^*$ .

*Dokaz.* Trditev lahko dokažemo na dva načina. Dokažimo najprej s pomočjo karakterizacije harmoničnih funkcij z lastnostjo povprečne vrednosti. Ker je  $u$  na  $U$  harmonična ima na  $U$  lastnost povprečne vrednosti. Sedaj je hitro jasno, da ima lastnost povprečne vrednosti tudi  $u^*$  na  $U^*$ . Iz trditve 4.31 potem sledi, da je  $u^*$  na  $U^*$  tudi harmonična.

Trditev je možno dokazati tudi kar direktno po definiciji, t.j. dokazati, da velja:  $\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} = 0$ . Opazimo, da lahko  $u^*$  (s pomočjo identifikacije  $z = x + iy \leftrightarrow (x, y)$ ) zapišemo tudi kot kompozitum  $u \circ ((x, y) \mapsto (x, -y))$ . Sedaj po definiciji parcialno odvajamo in dobimo enakosti:

$$\frac{\partial u^*}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

ki implicirajo:

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

□

**Lema 5.3.** Če je  $f$  holomorfna na območju  $U$ , je  $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$  holomorfna na  $U^*$ .

*Dokaz.* Iz kompleksne analize vemo, da je dovolj pokazati, da tudi  $g$  zadošča Cauchy-Riemannovemu sistemu enačb.

Pišimo:  $f(z) = u(z) + iv(z)$  in  $g(z) = p(z) + iq(z)$ . Potem je  $g(z) = u(\bar{z}) - iv(\bar{z})$  in zato  $p(z) = u(\bar{z})$  ter  $q(z) = -v(\bar{z})$ .

Velja:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \stackrel{C-R}{=} \frac{\partial v}{\partial y} = - \left( - \frac{\partial q}{\partial y} \right) = \frac{\partial q}{\partial y} \quad \text{in} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = - \frac{\partial u}{\partial y} \stackrel{C-R}{=} \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Alternativen dokaz si bralec lahko ogleda v REFERENCA.  $\square$

Sedaj smo pripravljeni na formulacijo in dokaz glavnega izreka.

**Izrek 5.4.** Naj bo  $D \subseteq \mathbb{C}$  območje, simetrično glede na realno os. Označimo  $D^+ = D \cap \{Im > 0\}$  in  $D^- = D \cap \{Im < 0\}$ .

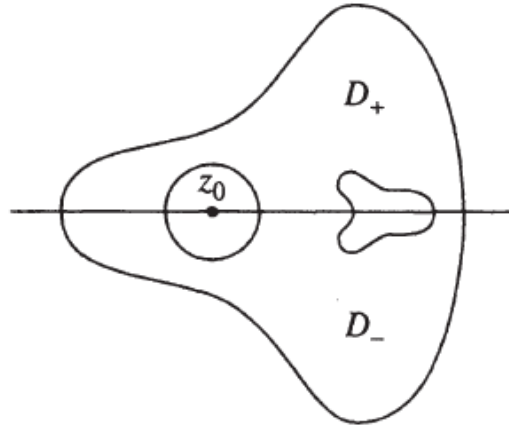
Naj bo  $u(z) : D^+ \rightarrow \mathbb{R}$  harmonična funkcija, za katero velja, da gre  $u(z) \rightarrow 0$ , ko gre  $z \in D^+$  proti poljubni točki  $D \cap \mathbb{R}$  t.j.:

$$\lim_{Im(z) \rightarrow 0^+} u(z) = 0.$$

Potem obstaja harmonična razširitev  $u(z)$  na  $D$ , ki jo podaja predpis  $u(\bar{z}) = -u(z)$  za  $z \in D$ :

$$u^e(z) = \begin{cases} u(z) & z \in D^+ \\ -u(\bar{z}) & z \in D^- \\ 0 & z \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Preden se posvetimo dokazu, si na sliki oglejmo, kaj nam Schwarzov princip zrcaljenja zares omogoča.



Slika prikazuje glede na  $\mathbb{R}$  simetrično območje  $D \subseteq \mathbb{C}$ .  $D^+$  označuje območje, na katerem harmonično funkcijo  $u$  poznamo,  $D^-$  pa območje, na katerem lahko po izreku eksplicitno konstruiramo razširitev prek predpisa  $u(\bar{z}) = -u(z)$ . Vodoravna črta prikazuje odsek realne osi, na kateri bodo zaradi zahtevane zveznosti vrednosti trivialno poračunljive. Točka  $z_0$  in "majhen" disk okoli nje nakazujeta, da se bomo dokaza lotili z lastnostjo povprečne vrednosti.

*Dokaz.* Opazimo, da je  $D$  disjunktna unija  $D^+$ ,  $D^-$  in  $D^0 = D \cap \mathbb{R}$ . Hitro je razvidno, da je  $u^e$  na  $D$  zaradi predpostavljene limite in ničelnih vrednosti na  $D^0$  res zvezna. Posvetimo se dokazu harmoničnosti. Ker je  $u^e$  na  $D$  zvezna, je po trditvi 4.31 dovolj

pokazati, da ima  $u^e$  na  $D$  lastnost povprečne vrednosti. Na  $D^+$  je  $u^e$  harmonična po predpostavki, na  $D^-$  pa harmoničnost hitro preverimo prek leme 5.2. Za poljubno točko  $z_0 \in D^0$  pri dovolj majhnem  $r$  (tako da je  $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r) \subseteq D$ ) velja, da se ob računanju povprečja paroma žrcalne vrednosti zaradi predpisa  $u(\bar{z}) = -u(z)$  ravno odštejejo. To pa že implicira, da je povprečje vrednosti na  $\partial\overline{\mathbb{D}}(z_0, r)$  v poljubnem  $z_0 \in D^0$  enaka 0 in  $u^e$  tudi v  $z_0 \in D^0$  izpolnjuje lastnost povprečne vrednosti.  $\square$

HOLOMORFNE ?



## LITERATURA

- [1] Theodore W. Gamelin *Complex Analysis*, Springer (2001), Chapter X, str. 274 - 288
- [2] Weisstein, Eric W. *Mean-Value Property*, v: From MathWorld—A Wolfram Web Resource, [ogled 22. 2. 2023], dostopno na <https://mathworld.wolfram.com/Mean-ValueProperty.html>