

Statistična analiza podatkov  
Projekt pri predmetu Statistika

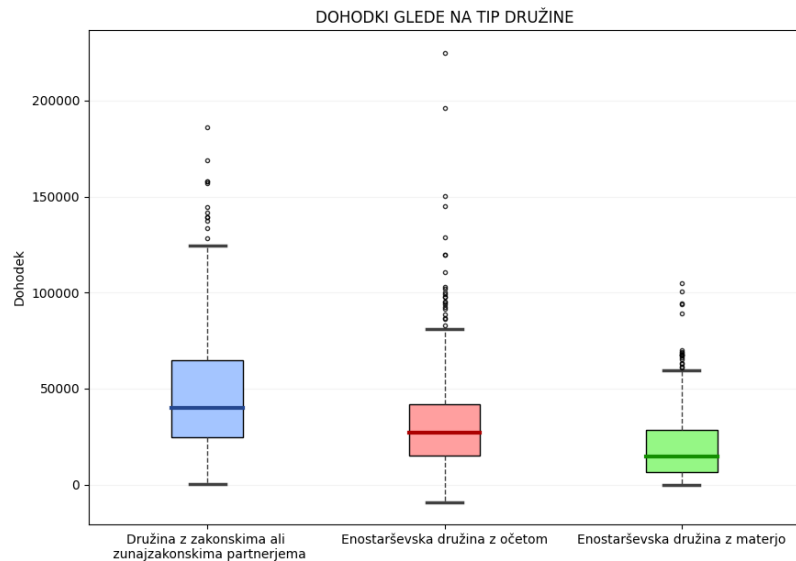
Matej Novoselec

junij, julij 2023

# 1 Kibergrad

Podani so nam podatki o dohodkih 43886 družin iz mesta Kibergrad. Podatke o dohodkih bomo analizirali v odvisnosti od tipa družin, ki je posredovala podatke. Pri obdelavi podatkov si bomo pomagali z datoteko *statistika\_naloga\_1.py*, ki je namenjena predvsem izrisu grafov, ter numeričnim izračunom željenih vrednosti, prek danih podatkov.

Družine razdelimo v 3 tipe: tip 1 - družina z zakonskima ali zunajzakonskima partnerjema, tip 2 - enostarševska družina z očetom, tip 3 - enostarševska družina z materjo. Imamo 33403 podatkov od družin tipa 1, 2054 podatkov od družin tipa 2 in 8429 podatkov od družin tipa 3. Za vsak tip družine izberemo enostaven slučajen vzorec velikosti 500 in narišemo pripadajočo škatlo z brki.



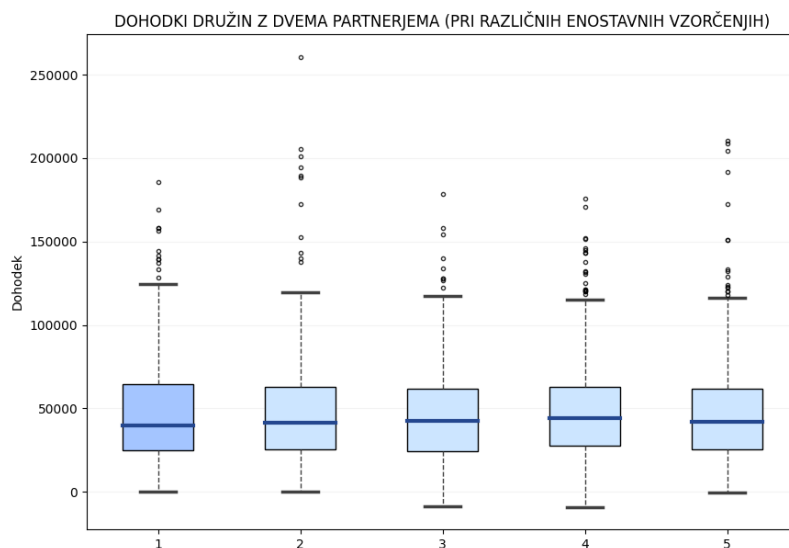
Slika 1: Škatle z brki za dohodke različnih tipov družin

Hitro vidimo, da so vrednosti prvega, drugega in tretjega kvartila pri družinah tipa 1 (družinah z zakonskima ali zunajzakonskima partnerjema) višji od prvega, drugega in tretjega kvartila pri družinah tipa 2 in tipa 3. Iz tega lahko sklepamo, da so v povprečju dohodki omenjenega tipa družin večji od obeh ostalih tipov. Na podoben način lahko sklepamo tudi, da so dohodki v enostarševski družini z očetom v povprečju nekoliko višji od dohodkov enostarševskih družin z materjo. Opazimo tudi, da je varianca dohodkov pri družinah tipa 1 večja od variance podatkov o dohodkih družin preostalih tipov. Osamelcev opazimo največ pri družinah tipa 2, podatki pri družinah tipa 3 pa so najmanj razpršeni. Vredno je omeniti tudi, da je pri družinah tipa 1 in tipa 3 porazdelitev dohodkov

nekoliko nagnjena k dohodkom višje vrednosti.

Povzeli bi lahko, da nekoliko izstopajo podatki o družinah tipa 1, ki imajo povprečno najvišji dohodek, a imajo obenem tudi veliko varianco, njihova porazdelitev pa je nagnjena k višjim vrednostim. Vseeno moramo biti s sklepanjem nekoliko pazljivi, saj je vzorec velikosti 500 za 33403 podatkov relativno majhen.

Sedaj se osredotočimo na družine tipa 1 in iz podatkov izberimo še štiri enostavne slučajne vzorce. Opažanja so prikazana z vzporednimi škatlami z brki, pri čemer temnejše obarvana škatla z brki pripada podatkom, ki so bili izbrani kot enostavni slučajni vzorec za družine tega tipa iz prejšnje podnaloge.



Slika 2: Škatle z brki za dohodke družin z dvema partnerjema

Opazimo, da je bil zgoraj izbrani vzorec, kljub temu, da je bil dokaj majhen glede na število vseh podatkov, v veliki meri (vsaj iz vidika ostalih štirih vzorcev) reprezentativen. Vidno je namreč, da so vrednosti prvega in tretjega kvartila pri vzorcih dokaj usklajeni. Tudi iz vidika števila osamelcev je prvotno izbran vzorec reprezentativen. Nekoliko se od reprezentativnosti odmaknemo le pri vrednosti drugega kvartila, ki je pri našem vzorcu nekoliko nižje kot pri ostalih, podatki o dohodkih prvotno izbranega vzorca pa so tudi nekoliko nagnjeni k višjim vrednostim.

Zadnje podnaloge se za začetek lotimo nekoliko bolj teoretično, ter šele nato vstavimo podatke za izračun željenih vrednosti. Z  $n$  označimo število vseh numeričnim podatkov, t.j. skupni numerus je enak  $n$ . Podatki so razdeljeni v

skupine (glede na tip družine),  $n_i$  naj označuje število podatkov za skupino s tipom družine  $i$  ( $i$  seveda tu 1, 2 ali 3). Definirajmo še uteži za posamezno skupino, kot  $w_i = n_i/n$ .

Pričakovano vrednost za celoten Kibergrad lahko izrazimo prek pričakovanih vrednosti za posamezne skupine (označimo jih z  $\mu_i$ ) kot:

$$\mu = w_1\mu_1 + w_2\mu_2 + w_3\mu_3.$$

Če z  $\sigma_i^2$  označimo varianco znotraj  $i$ -te skupine, lahko na podoben način varianco dohodka za celoten Kibergrad izrazimo kot:

$$\sigma^2 = \sigma_P^2 + \sigma_N^2, \quad \text{kjer: } \sigma_P^2 = \sum_{i=1}^3 w_i(\mu_i - \mu)^2 \quad \text{in} \quad \sigma_N^2 = \sum_{i=1}^3 w_i\sigma_i^2.$$

Izpeljava je navedena v [2]. V zgornjem zapisu  $\sigma_P^2$  označuje s tipom družine pojasnjeno varianco,  $\sigma_N^2$  pa nepojasnjeno varianco. Naloga nas sprašuje po obeh. Numerično v *python* datoteki poračunamo približke za pričakovane vrednosti in variance za posamezne skupine, ter po zgoraj zapisanih formulah dobimo, da s tipom družine pojasnjena varianca znaša 113781161.94, nepojasnjena varianca pa 912604507.95. Omenimo še, da delež pojasnjene variance ( $\eta^2 = \frac{\sigma_P^2}{\sigma^2}$ ) znaša 0.11085, pojasnjeni standardni odklon pa 10666.83.

Oglejmo si novo pridobljene podatke v luči preteklih opažanj, predvsem iz vidika povprečnih dohodkov različnim tipov družin. Že v komentarju prve podnaloge smo omenili, da so med povprečnimi dohodki tipov družin opazne razlike. Sedaj opazimo, da je tudi vrednost pojasnjenega standardnega odklona visoka glede na povprečne dohodke posameznih tipov družin (te znašajo 47187.48 za tip 1, 31637.36 za tip 2 in 20508.19 za tip 3), kar dodatno nakazuje na razlike med povprečnimi dohodki posameznih tipov družin. Vrednost deleža pojasnjene variance le dodatno potrdi že zapisano, saj vidna oddaljenost od vrednosti 0 potrjuje, da je povprečje v dokajšni meri odvisno tudi od skupine.

## 2 Kromatin

Vredno je zapisati nekoliko bolj matematično interpretacijo problema/navodila. Podatki pripadajo trem različnim eksperimentom (podatki so ločeni glede na vrsto opazovanega Kromatina), ki bodo določali končne vrednosti in rezultate, a so problemi, ki jih podajajo, teoretično iste narave. Za podan problem sedaj razvijemo teoretični pristop in se lotimo reševanja podnaloge a) in b).

Opazimo  $n$  neodvisnih, enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk, označimo jih z  $R_1, R_2, \dots, R_n$ . Porazdeljene naj bodo Rayleighovo, t.j. z gostoto:

$$f_{R_i}(r_i | \theta) = \begin{cases} \frac{r_i}{\theta^2} \exp\left(-\frac{r_i^2}{2\theta^2}\right) & ; \quad r > 0 \\ 0 & ; \quad \text{sicer} \end{cases}.$$

Zaradi predpostavljene neodvisnosti, je potem  $(R_1, R_2, \dots, R_n)$  porazdeljen z gostoto:

$$\prod_{i=1}^n f_{R_i}(r_i | \theta) = \left( \frac{1}{\theta^{2n}} \prod_{i=1}^n r_i \right) \exp\left(-\frac{1}{2\theta^2} \sum_{i=1}^n r_i^2\right); \quad r_i > 0.$$

Lotimo se podnaloge a). Velja:

$$L(\theta | (R_1, R_2, \dots, R_n)) = \prod_{i=1}^n L_i(\theta | R_i) = \prod_{i=1}^n f_{R_i}(r_i | \theta)$$

in

$$l(\theta | (R_1, R_2, \dots, R_n)) = \ln L(\theta | (R_1, R_2, \dots, R_n)) = \sum_{i=1}^n \ln(f_{R_i}(r_i | \theta)),$$

ter zato:

$$l(\theta | (R_1, R_2, \dots, R_n)) = -2n \ln(\theta) + \sum_{i=1}^n \ln(R_i) - \frac{1}{2\theta^2} \sum_{i=1}^n R_i^2.$$

Iščemo cenilko za  $\theta$  po metodi največjega verjetja, zato si ogledamo enakost:

$$0 = \frac{\partial l(\theta | (R_1, \dots, R_n))}{\partial \theta} = -\frac{2n}{\theta} + \frac{1}{\theta^3} \sum_{i=1}^n R_i^2.$$

Tu je vredno omeniti, da si je dovolj ogledati zgornjo enakost, ker iščemo maksimum zapisane funkcije, ki ga v limitah definicijskega območja (v našem primeru) ne bomo zavzeli. Za cenilko po metodi največjega verjetja tako dobimo:

$$\hat{\theta}_{MNV} = \sqrt{\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n R_i^2}.$$

Za rešitev podnaloge b), si oglejmo pričakovano vrednost (Rayleighove) slučajne spremenljivke  $R$ :

$$\mathbb{E}(R) = \int_0^\infty r f(r | \theta) dr = \int_0^\infty \frac{r^2}{\theta^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\theta^2}\right) dr.$$

V integral uvedemo  $\tau = \frac{r^2}{2\theta^2}$  in dobimo

$$\mathbb{E}(R) = \int_0^\infty \sqrt{2\tau} \theta e^{-\tau} d\tau = \theta\sqrt{2} \int_0^\infty \tau^{1/2} e^{-\tau} d\tau = \theta\sqrt{2} \Gamma(3/2) = \theta\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Cenilka po metodi momentov, je zato podano s predpisom:

$$\hat{\theta}_{MM} = \bar{R}\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Iz izpeljave cenilke, dobljene po metodi momentov, je jasno vidno, da je cenilka nepristranska (hitro bi lahko tudi direktno preverili, da res velja  $\mathbb{E}(\hat{\theta}_{MM}) = \theta$ ). Na podoben način, kot smo to storili zgoraj, se dokopljemo do pomožnega rezultata, ki nam bo prav prišel kasneje. Velja:

$$\mathbb{E}(R^2) = \int_0^\infty r^2 f(r | \theta) dr = 2\theta^2.$$

Sedaj se lotimo reševanja podnaloge c). Ker je cenilka za  $\theta$  po metodi momentov nepristranska, velja  $MSE(\hat{\theta}_{MM}) = Var(\hat{\theta}_{MM})$ . Sedaj varianco tudi poračunajmo.

$$\begin{aligned} Var(\hat{\theta}_{MM}) &= Var\left(\bar{R}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) = \frac{2}{\pi} \left( \frac{Var(R)}{n} = \frac{2}{\pi} \left( \frac{\mathbb{E}(R^2) - (\mathbb{E}(R))^2}{n} \right) \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{2\theta^2 - \left(\frac{\pi}{2}\theta\right)^2}{n} \right) = \frac{\theta^2}{n} \left( \frac{4 - \pi}{\pi} \right) \end{aligned}$$

Po zgornjem komentarju torej velja:

$$MSE(\hat{\theta}_{MM}) = \frac{\theta^2}{n} \left( \frac{4 - \pi}{\pi} \right) \approx \frac{\theta^2}{n} \cdot 0,273.$$

Pri izračunu asimptotične srednje kvadratične napake, pri cenilki za  $\theta$  po metodi največjega verjetja, nam na pomoč priskoči Fischerjeva informacija. Velja:

$$\begin{aligned} FI(\theta) &= -\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 l(\theta | (R_1, \dots, R_n))}{\partial \theta^2}\right) = -\mathbb{E}\left(\frac{1}{\theta^4} \left(2n\theta^2 - 3 \sum_{i=1}^n R_i^2\right)\right) = \\ &= -\left(\frac{1}{\theta^4} \left(2n\theta^2 - 3n \mathbb{E}(R^2)\right)\right) = -\left(\frac{1}{\theta^4} \left(2n\theta^2 - 3n\left(\frac{\pi}{2}\theta^2 + \frac{4 - \pi}{2}\theta^2\right)\right)\right) = \frac{4n}{\theta^2}, \end{aligned}$$

oziroma:

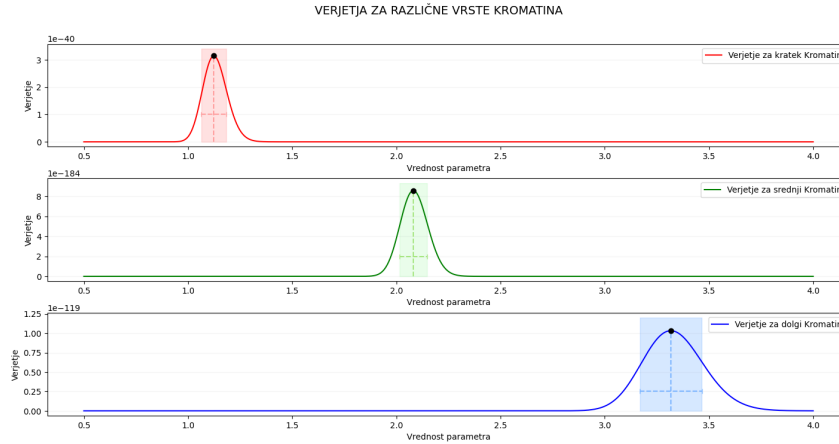
$$FI^{-1}(\theta) = \frac{1}{4} \frac{\theta^2}{n}, \text{ zato asimptotično velja: } MSE(\hat{\theta}_{MNV}) \approx \frac{\theta^2}{n} \cdot 0,25.$$

Opazimo, da je faktor pred asimptotično srednje kvadratično napako za cenilko, dobljeno po metodi največjega verjetja nekoliko manjši, zato je vsaj asimptotično cenilka  $\hat{\theta}_{MNV}$  nekoliko boljša od cenilke  $\hat{\theta}_{MM}$ .

Podnalog a) d) nam narekuje oddaljitve od teoretičnih zapisov in izračun številskih ocen. Pomagajmo si z datoteko *statistika\_naloga\_2.py*. Ta nam po obdelavi podatkov za posamezno vrsto Kromatina pove, da številska ocena za  $\theta$  po metodi največjega verjetja pri kratkem Kromatinu znaša 1.1238, pri srednjem Kromatinu znaša 2.0812, pri dolgem Kromatinu pa 3.3168. Standardno napako lahko sedaj številsko ocenimo s pomočjo številske ocene za  $\theta$  (po metodi največjega verjetja). Natančneje, za oceno uporabimo:

$$\widehat{SE}(\hat{\theta}_{MNV}) = \sqrt{\frac{1}{4n}} \cdot \hat{\theta}_{MNV}.$$

Številska ocena za standardno napako tako pri kratkem Kromatinu znaša 0.059735, pri srednjem Kromatinu 0.065743, ter pri dolgem Kromatinu 0.148161. Zapisane številske ocene si oglejmo na spodnji sliki.



Slika 3: Grafi funkcij verjetja pri različnih vrstah Kromatina

Na sliki so prikazani grafi funkcij verjetja posamezne vrste Kromatina, v odvisnosti od parametra modela  $\theta$ . Kot je zapisano v legendi, so grafi funkcij verjetja za različne vrste Kromatina različno obarvani. Navpična črtkasta črta pri vsaki vrsti Kromatina povezuje vrednost številske ocene za  $\theta$  po metodi največjega verjetja (tiste vrste Kromatina) z vrednostjo funkcije verjetja pri dani

številski oceni (točka funkcijske vrednosti označena s črno piko). Na grafu je dobro vidno tudi analitično ozadje metode največjega verjetja, za vsako vrsto Kromatina namreč grafično opazimo, da ima funkcija verjetja (za tisto vrsto Kromatina) v (oziroma blizu) številski oceni za  $\theta$  stacionarno točko. Natančneje, opazimo, da v številski oceni zavzamemo maksimum funkcije verjetja.

Komentirajmo še pomen velikosti (pri nas ocene) standardne napake. Funkcijo verjetja določajo (za vsako vrsto Kromatina) dani podatki (o tisti vrsti Kromatina), ki obenem v model vnašajo slučaj. Zaradi slučajnosti, ki jih vnašajo podatki, bi radi ocenili napako, ki se morebiti pojavi pri tem, ko iz njih konstruiramo oceno (po metodi največjega verjetja) za parameter našega modela, t.j.  $\hat{\theta}_{MNV}$ . Nekoliko bolj direktno, gre v resnici za statistično vrednost, ki kvantificira, koliko se lahko ocenjena vrednost parametra razlikuje od dejanske neznane vrednosti pri ponovljenem vzorčenju. Vrednost standardne napake, oziroma v našem primeru njena ocena, nam torej določata velikost intervala okoli naše poračunane ocene za  $\theta$  po metodi največjega verjetja. Na sliki je za vsako vrsto Kromatina to tudi označeno s prosojno obarvanim območjem, pri čemer meje intervala dodatno nakazuje vodoravna črtkasta črta.

Vredno je omeniti tudi grafično opaženo korelacijo med položnostjo zavzetja maksimuma funkcije verjetja in velikostjo (ocene) standardne napake za pripadajočo vrsto Kromatina. Vidno je namreč, da sta številski oceni za standardni napaki kratkega in srednjega Kromatina skoraj enaki, kar se ujema z skoraj enakima širinama "hriba" na vrhu katerega funkcija zavzame maksimum. V primerjavi s kratkim in srednjim Kromatinom, je številška ocena za standardno napako pri dolgem Kromatinu večja. Prav tako hitro vidimo, da pri grafu verjetja za dolgi Kromatin maksimum zavzamemo nekoliko bolj položno, oziroma je širini že omenjenega "hriba" vidno večja. Opaženo je v resnici iz teoretičnega vidika pričakovano že iz zgornje interpretacije vrednosti standardne napake.

Sedaj se lotimo podnaloge e). Že zgoraj omenjena *python* datoteka nam poda številске ocene tudi za  $\theta$  po metodi momentov. Te znašajo 1.1706 za kratek Kromatin, 2.0748 za srednji Kromatin in 3.4045 za dolgi Kromatin. Oceno za napako iščemo na podoben način, kot smo to storili pri metodi največjega verjetja. Tokrat bo številška ocena za  $\theta$  tista iz metode momentov, faktor pred napako pa ustrezno drugačen. Natančneje, za oceno uporabimo:

$$\widehat{SE}(\hat{\theta}_{MM}) = \sqrt{\frac{4 - \pi}{\pi n}} \cdot \hat{\theta}_{MM}.$$

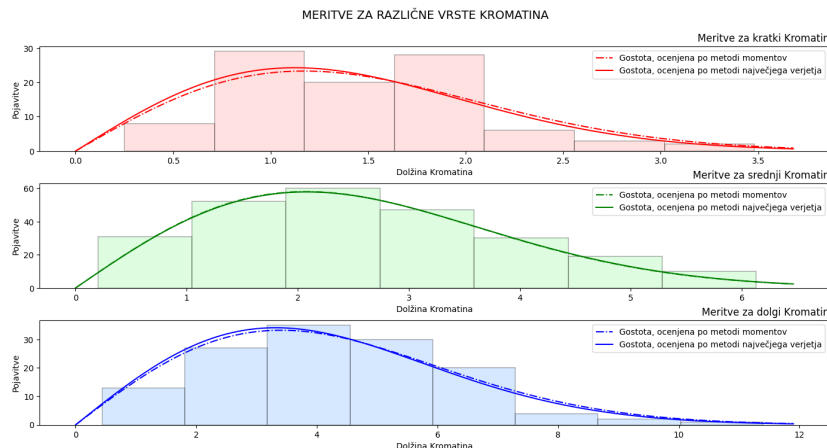
Številске ocene znašajo 0.06245 za kratek Kromatin, 0.068731 za srednji Kromatin in 0.154895 za dolgi Kromatin.

Opazimo, da so številске vrednosti ocen standardnih napak (za  $\theta$  po metodi momentov in po metodi največjega verjetja) pri enaki vrsti Kromatina skoraj enake. Slednje je seveda razumljivo, saj sta že vrednosti ocen za  $\theta$  skoraj enaki, za oceno standardne napake pa smo vzeli koren asimptotične ocene srednje kvadratične napake, pri čemer smo  $\theta$  nadomestili z glede na metodo določeno cenilko. Ker nam metoda največjega verjetja asimptotične da boljšo cenilko, je tudi ocena za



standardno napako, pridobljena prek te metode manjša. Pomen (ocene) standardne napake je enak tistemu, ki smo ga komentirali na začetku obravnave ocene standardne napake pri metodi največjega verjetja. Če le ponovimo, gre za vrednost, ki meri/nam pomaga razumeti, kako se ocenjena vrednost parametra lahko razlikuje od dejanske neznane vrednosti pri ponovljenem vzorčenju.

Podatke znotraj vrste Kromatina sedaj predstavimo še s histogramom. Pri tem določimo širino bloka oziroma število blokov histograma s pomočjo modificiranega Freedman–Diaconisovega pravila. Ta nam prek medkvartilnega razmika določi optimalno širino blokov histograma. Omenjena optimalna širina bloka pri kratkem Kromatinu znaša 0.4685, za srednji Kromatin 0.7976, za dolgi Kromatin pa 1.4145. Zapisane vrednosti širine blokov, se glede na razpon podatkov najbolje ujemajo (najbližje naravno število) s 7 bloki pri kratkem Kromatinu, s 7 bloki pri srednjem Kromatinu in z 8 bloki pri dolgem Kromatinu. Za vsako vrsto Kromatina, na pripadajoč histogram (določen s zgoraj zapisanim številom blokov) dorišimo še pripadajoči oceni za gostoti, ki smo ju dobili iz ocene za  $\theta$  po metodi momentov in po metodi največjega verjetja.

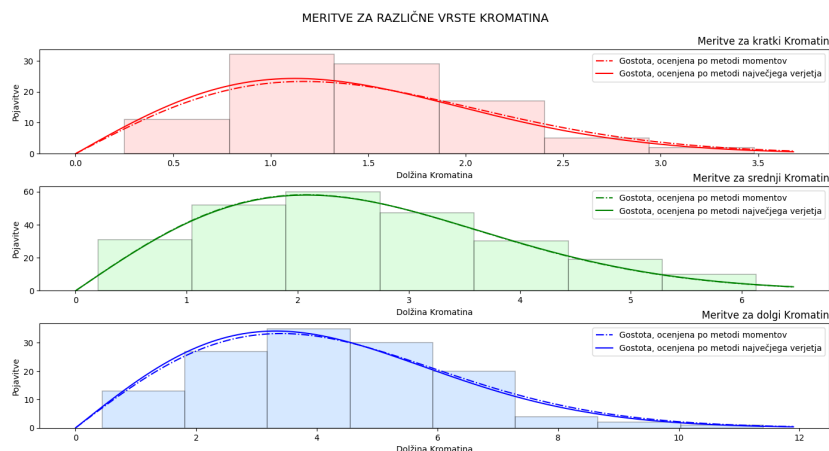


Slika 4: Histogrami in ocenjene gostote za različne vrste Kromatina

Kot je to zapisano že v legendi, sta gostoti na pripadajočem histogramu dorisani z barvno usklajeno črto, tip katere pa se razlikuje glede na metodo, ki nam je omogočala izračun ocene gostote. Vredno je omeniti, da gre za prikaz skaliranih (množili smo s skupno površino histograma) gostot, saj bomo le na ta način lahko smiselno komentirali prileganje.

Sedaj zapišimo nekaj splošnih opazk. Pri histogramu za srednji Kromatin opazimo, da se grafa ocen gostot skoraj ujemata, obenem pa se (izmed vseh vrst Kromatina) oceni gostot najbolj prilegata podatkom, predstavljenim s histogramom. Skorajšno prekrivanje ocen gostot na omenjenem grafu, je posledica bližine vrednosti cenilk po obeh metodah (2.0748 pri metodi momentov, in 2.0812

pri metodi največjega verjetja). Ocenjena gostota se pri dolgem Kromatinu dokaj dobro ujema z obliko histograma okoli vrednosti 4, ter v desnem robu prikaza, drugod pa se obe gostoti minimalno odmakneta od histograma. Nekoliko manj smo lahko navdušeni nad ujemanjem grafov gostot s histogramom pri podatkih kratkega Kromatina. Tu je pomanjkanje ujemanja nekoliko posledica tudi tega, da pri izbiri števila blokov za ta primer število zaokrožimo navzgor. Če število blokov za ta primer ročno zmanjšamo za 1, pridemo do nekoliko lepšega ujemanja, vidnega na spodnji sliki.



Slika 5: Popravljen histogram za kratek Kromatin

Opazimo, da je tako nekoliko manj neujemanja, moteče je le pomanjkanje podatkov histograma na levem delu grafa, ter zato presežek podatkov na sredini histograma. Kljub temu smo lahko nad ujemanjem gostot (med seboj) in histograma pri vseh vrstah Kromatina zadovoljni in lahko trdimo, da so rezultati razumni.

### 3 Temperatura

Naloga nam pove, da imamo podane mesečne temperature (torej 12 podatkov letno) za  $n$  zaporednih let (v našem primeru podatki med letoma 1986 in 2020, torej  $n = 35$ ). Smiselno je podatke o meritvah zapisati kot urejene pare, da se bomo lahko problema lotili z enostavno linearno regresijo. Opažene meritve so smiselno časovne urejene (leto-mesec), zato si podatke lahko predstavljamo kot pare  $(x_i, y_i)_{i=1, 2, \dots, 12n}$ , kjer  $x_i$  predstavlja časovno komponento problema,  $y_i$  pa opaženo temperaturo pri časovno  $i$ -ti meritvi. V resnici lahko le pretvorimo podatek oblike:  $(leto, mesec, temperatura)$  v par  $(leto + mesec/12, temperatura)$ . Lotimo se najprej podnaloge a), z enostavno linearno regresijo. Označimo:

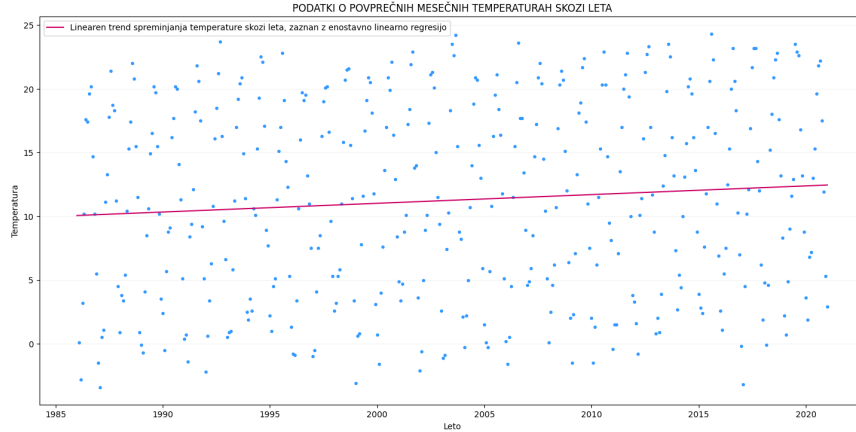
$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{12n} \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{12n} \end{bmatrix} \text{ in } \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}.$$

V duhu enostavne linearne regresije iščemo  $\beta_0$  in  $\beta_1$ , tako da se bo  $X\beta$  po metodi najmanjših kvadratov najboljše prilegal  $Y$ . Teorija nam pove, da lahko  $\beta$  ocenimo s cenilko:

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y.$$

Podane podatke bomo sedaj obdelali s pomočjo datoteke *statistika\_naloga\_3.py*. Konstruiramo zgoraj definirane matrike in po formuli za  $\hat{\beta}$  poračunamo tudi številsko oceno za  $\beta$ . Ta pri danih podatkih za  $\beta_0$  znaša  $-125.5905$ , za  $\beta_1$  pa znaša  $0.068303$ .

Številska ocena za  $\beta_1$  je za nas (iz vidika podnaloge a)) nekoliko bolj zanimiva, saj njena vrednost opisuje (glede na podatke) opažen linearen trend (v tem primeru zaradi pozitivnosti številske ocene) naraščanja temperature skozi leta. Ta nam nakazuje, da se v povprečju temperatura letno dvigne za  $0.068303$  stopinje. Podatki so grafično predstavljeni na spodnji sliki.



Slika 6: Temperature skozi leta in linearen trend enostavne linearne regresije

Vseeno z opazkami, predvsem o naraščajočem linearnem trendu, ravnajmo nekoliko bolj previdno. Oglejmo si, ali je opisan linearen trend spreminjanja temperature s časom statistično značilen.

Na tej točki je vredno omeniti, da je za nadeljevanje potrebno predpostaviti, da so šumi med seboj neodvisni in porazdeljeni normalno. Vemo, da številska ocena za  $\beta_1$  znaša 0.068303. Radi bi preverili, ali bomo uspeli zavrniti ustrezno ničelno domnevo (ki bo predpostavljala, da ni linearnega trenda) pri standardni stopnji tveganja. V resnici bo potrebno konstruirati ničelno in alternativno hipotezo, ter testno statistiko, ki bo uporabila oceno za  $\beta_1$  (torej bo vezana na  $\hat{\beta}_1$ ). Želeli bi, da bo le-ta zavrnila ničelno hipotezo, ko bo ta v resnici izpolnjena, z verjetnostjo, ki bo manjša ali enaka 0.05.

Zapišimo sedaj hipotezi:

ničelna hipoteza,  $H_0 : \beta_1 = 0$ , ter alternativna hipoteza,  $H_1 : \beta_1 \neq 0$ .

Kot omenjeno, iščemo testno statistiko, ki bo vsebovala  $\hat{\beta}_1$ , ter bo spoštovala:

$$P(H_0 \text{ zavrnemo} \mid H_0 \text{ drži}) \leq \alpha = 0.05.$$

Opazimo, da lahko  $\beta_1$  zapišemo tudi kot  $[0, 1]\beta = c^T\beta$ , oziroma  $\hat{\beta}_1 = c^T\hat{\beta}$ . To nam koristi, saj si sedaj lahko pomagamo z iz predavanj znanim dejstvom, ki nam pove, da:

$$\frac{c^T\hat{\beta} - c^T\beta}{\sigma\sqrt{c^T(X^TX)^{-1}c}} \sim N(0, 1),$$

oziroma, za nas nekoliko bolj koristno (ker bomo varianco morali nepristransko oceniti s pomočjo podatkov):

$$\frac{c^T\hat{\beta} - c^T\beta}{\hat{\sigma}_+\sqrt{c^T(X^TX)^{-1}c}} \sim \text{Student}(m-p), \text{ ter } \hat{\sigma}_+ = \frac{\|Y - X\hat{\beta}\|}{\sqrt{m-p}}.$$

Omenimo, da tu  $m$  predstavlja število podatkov (pri nas  $m = 12n = 420$ ),  $p$  pa število koeficientov regresije (pri nas  $p = 2$ ). Sedaj konstruirajmo test, pri katerem bo relevantno, ali velja:

$|\hat{\beta}_1| = |c^T \hat{\beta}| < D$ . Tu bomo  $D$  še določili prek zgornjega pogoja za verjetnost.

Prek testa bomo  $H_0$  zavrnili, če bo  $|\hat{\beta}_1| = |c^T \hat{\beta}| \geq D$ . Torej želimo, tak  $D$ , da bo veljalo:

$$P(|c^T \hat{\beta}| \geq D \mid c^T \beta = 0) \leq \alpha = 0.05.$$

Sedaj bomo z računsko manipulacijo prešli na pogoj, pri katerem si bomo lahko pomagali z zgoraj zapisano znano (Studentovo) porazdelitvijo. Opomnimo še, da bomo pogojno verjetnost pretvorili v brezpogojno, ter ob tem upoštevali  $c^T \beta = 0$ . Za  $D$  tako dobimo pogoj:

$$P\left(\left|\frac{c^T \hat{\beta}}{\hat{\sigma}_+ \sqrt{c^T (X^T X)^{-1} c}}\right| \geq \frac{D}{\hat{\sigma}_+ \sqrt{c^T (X^T X)^{-1} c}}\right) \leq \alpha = 0.05.$$

Sedaj upoštevamo simetričnost in izrazimo z inverzom Studentove porazdelitve, ter neenakost za verjetnost spremenimo v enakost, da bo moč testa največja. Dobimo:

$$\frac{D}{\hat{\sigma}_+ \sqrt{c^T (X^T X)^{-1} c}} = F_{\text{Student}}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right),$$

oziroma:

$$D = F_{\text{Student}}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \left(\hat{\sigma}_+ \sqrt{c^T (X^T X)^{-1} c}\right).$$

Vredno je omeniti, da gre tu za Studentovo porazdelitev s  $m - p = 420 - 2 = 418$  prostorskimi stopnjami. Po zgornji formuli za  $D$  številska vrednost (s pomočjo [3] in pomožne datoteke) znaša 0.0718.

Ker je  $\hat{\beta}_1 = 0.068303 < D = 0.0718$ , ničelne hipoteze pri standardni stopnji tveganja ne bi zavrnili, zato nimamo statistične značilnosti linearnega trenda spreminjanja temperature s časom. To v resnici pomeni, da nimamo dovolj izrazitih podatkov, da bi zavrnili ničelno hipotezo oziroma v našem primeru sklepali, da obstaja linearen trend spreminjanja temperature s časom.

Sedaj poračunajmo še p-vrednost preizkusa, ki ga določa številska ocena  $\hat{\beta}_1$ . Kot smo to storili že zgoraj, zapišimo  $[0, 1] \hat{\beta} = c^T \hat{\beta} = \hat{\beta}_1$ . Zanima nas v resnici mejna stopnja tveganja, t.j. meja med zavrnitvijo in nezavrnitvijo. Torej pri višji stopnji tveganja bi domnevo zavrnili, pri nižji pa ne. Iščemo torej  $\alpha_p$ , tako da bo veljalo:

$$P\left(|Z| \geq \frac{c^T \hat{\beta}}{\hat{\sigma}_+ \sqrt{c^T (X^T X)^{-1} c}}\right) = \alpha_p, \text{ kjer } Z \sim \text{Student}(418).$$

Upoštevamo simetričnost, program *python* pa nam problem reducira na:

$$P(Z \leq 0.9689) = 1 - \frac{\alpha_p}{2}, \text{ s pomočjo [3] pa dobimo še oceno } \alpha_p = 0.0622.$$

Opomnimo, da bi si statistično značilnost lahko ogledali tudi prek p-vrednosti. Če je p-vrednost manjša od standardne stopnje tveganja, potem imamo statistično značilnost, če pa je p-vrednost večja, statistične značilnosti nimamo. Hitro opazimo, da je v tem primeru seveda p-vrednost večja od standardne stopnje tveganja, zato še dodatno potrdimo, da nimamo statistične značilnosti linearne trenda spreminjanja temperature s časom.

Drugega dela (podnaloge b)) se lotimo z modifikacijo prvega dela. Želimo konstruirati model, ki bo vključeval tudi letno nihanje temperature. Podatke spet obravnavamo kot pare  $(x_j, y_j)$ . Definirajmo:

$$\mathbb{1}_i(x_j) = \begin{cases} 1; & i \equiv j \pmod{12} \\ 0; & \text{sicer} \end{cases} \quad ; \quad i \in \{1, 2, \dots, 12\}, j \in \{1, 2, \dots, 12n\}.$$

V resnici vsaka izmed indikatorskih funkcij predstavlja svoj (z zaporednim indeksom določen) mesec,  $x_j$  pa so časovno (z letom in mesecem) urejene meritve. Opazimo, da je vrednost indikatorske funkcije za nek mesec na meritvi neničelna (enaka 1) natanko tedaj, ko je bila meritev opravljena v mesecu, ki določa indikatorsko funkcijo. Indikatorske funkcije nam bodo omogočale zamik podatkov vsakega meseca tako, da bomo upoštevali nihanje temperature znotraj leta. Vredno je poskusiti z modelom oblike:

$$y_j = \beta_0 x_j + \sum_{i=1}^{12} \beta_i \mathbb{1}_i(x_j) + \epsilon_j, \quad j \in \{1, 2, \dots, 12n\}.$$

Zapisan model, si v resnici lahko predstavljamo kot posplošitev modela iz prve podnaloge z različno vrednostjo konstantne člena za podatke vsakega meseca. Sedaj lahko zapišimo v matrični obliki in postopamo prek postopka za linearno regresijo.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ x_{n+1} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_{n+2} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_{n+3} & 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{2n} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{11n+1} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_{11n+2} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_{11n+3} & 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{12n} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{12n} \end{bmatrix} \text{ in } \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{12} \end{bmatrix}.$$

Podatke spet vnesemo v zgoraj omenjeno *python* datoteko, ki nam (po formuli za cenilko  $\hat{\beta}$ ) vrne številske ocene za posamezne koordinate  $\beta$ . Številska vrednost ocene v našem primeru za  $\beta_0$  znaša 0.064636, za preostale koordinate pa dobimo številske ocene:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1 &= -128.6196, \hat{\beta}_2 = -126.9164, \hat{\beta}_3 = -122.6018, \hat{\beta}_4 = -118.0643, \\ \hat{\beta}_5 &= -113.4983, \hat{\beta}_6 = -109.8351, \hat{\beta}_7 = -107.8233, \hat{\beta}_8 = -108.3830, \\ \hat{\beta}_9 &= -113.4112, \hat{\beta}_{10} = -118.1481, \hat{\beta}_{11} = -123.4162, \hat{\beta}_{12} = -128.2103. \end{aligned}$$

Opazimo, da se vrednosti številskih ocen za  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{12}$  gibljejo okoli vrednosti iz prejšnjega primera (enostavna linearna regresija, kjer je bila vrednost številске ocene za  $\beta_1$  enaka  $-125.5905$ ). To je bilo seveda za pričakovati, saj kot smo že omenili, gre pri vrednostih  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{12}$  le za prek meseca določeno konstanto (mesecu pripada njegova zaporedna številka, zaporedni številki pa pripadajoča zaporedna ocena koordinate za  $\beta$ ), v primeru enostavnega slučajnega vzorčenja, pa je  $\beta_1$  predstavljala konstanto, določeno ne glede na mesec (torej za vse mesece hkrati). Vredno je omeniti tudi, da so konstante pri tipično bolj toplih mesecih (na primer maj-5, junij-6, julij-7) nekoliko večje, pri tipično nekoliko hladnejših mesecih (na primer november-11, december-12, januar-1), pa nekoliko manjše. Zgoraj omenjene opazke, se ujemajo z intuicijo spreminjanja temperature skozi leto in nakazujejo ustrezno posplošitev modela enostavne linearne regresije na model, ki upošteva tudi letno nihanje temperature.

Sedaj si oglejmo linearen trend spreminjanja temperature (skozi leta), v tako zastavljenem modelu. V ta namen se osredotočimo na številsko vrednost ocene za  $\beta_0$ . Ta je dokaj blizu številski vrednosti ocene za  $\beta_1$  iz enostavne linearne regresije (v tem modelu dobimo oceno, ki znaša 0.064636, v modelu enostavne linearne regresije pa 0.068303). Novejši model nam torej nakazuje nekoliko položnejše naraščajoč linearen trend spreminjanja temperature, oziroma ocenjuje, da se temperatura letno dvigne povprečno za 0.064636 stopinje.

Izračuna p-vrednosti, pri tem delu naloge, se lotimo podobno kot pri prejšnjem. Zapišimo  $\hat{\beta}_0 = c^T \hat{\beta}$ , kjer tokrat  $c^T = [1, 0, \dots, 0]$ . Spet išemo  $\alpha_p$ , tokrat pa bo moralo veljati:

$$P\left(|Z| \geq \frac{c^T \hat{\beta}}{\hat{\sigma}_+ \sqrt{c^T (X^T X)^{-1} c}}\right) = \alpha_p, \text{ kjer } Z \sim \text{Student}(407).$$

Upoštevamo simetričnost Studentove porazdelitve in ponovno numerično reduciramo na  $P(Z \leq 7.95704896) = 1 - \frac{\alpha_p}{2}$ , kar nam da  $\alpha_p = 1.7764 \times 10^{-14}$ .

Komentirajmo sedaj razliko v številski vrednosti p-vrednosti modela enostavne regresije in modela, ki vključuje tudi nihanje temperature. P-vrednost prvega modela (modela enostavne regresije), je opazno večja, preseže tudi vrednost standardne stopnje tveganja (znaša približno 0.0622), p-vrednost pri drugem modelu, pa je dokaj manjša (znaša namreč le okoli  $1.7764 \times 10^{-14}$ ). Ker p-vrednost pri modelu enostavne linearne regresije preseže vrednost 0.05, prvi model nakazuje, da bi lahko vrednost ocene za koeficient linearne rasti temperature (torej pri enostavni linearni regresiji  $\hat{\beta}_1 = 0.068303$ ) bil posledica slučaja, ter da je pri interpretaciji potrebno biti previden. Velike p-vrednosti preizkusa, nam namreč nakazujejo šibkost argumentov, prek katerih bi nasprotovali ničelni hipotezi (oziroma jo zavrgli in v našem primeru tako potrdili linearni trend). Obratno nam (zelo) nizka p-vrednost, pri modelu, ki upošteva tudi spreminjanje temperature skozi leto, nakazuje, da imamo dobro argumentativno osnovo, na podlagi katere lahko nasprotujemo ničelni hipotezi. To v našem primeru pomeni, da imamo osnovo, na podlagi katere lahko sklepamo, da do linearnega trenda spreminjanja temperature prihaja.

Lotimo se sedaj napovedovanja novih vrednosti, oziroma po željah naloge, napovedovanj temperatur v letu 2040. Predpostavimo, da je model Gaussov, oziroma, da so šumi, ki so vključeni v model porazdeljeni normalno ( $\sim N(0, \sigma^2)$ ), ter da so šumi pri prihajajočih mesecih neodvisni od preostalih шумov. Iz teorije vemo, da je osnova za napovedovanja naslednje vrednosti pri Gaussovem modelu linearne regresije zapis:

$$y_{m+1} = x_{m+1,1}\beta_1 + x_{m+1,2}\beta_2 + \dots + x_{m+1,p}\beta_p + \epsilon_{m+1}.$$

Ta je naveden na četrti strani [1], kjer si je možno ogledati tudi nekoliko več matematičnega ozadja in nadaljno izpeljavo intervala zaupanja za takšno napovedovanje naslednje vrednosti. Izpeljavo bom tu izpustil, ter jo le apliciral na



primerih, ki jih od nas zahteva naloga.

V modelu, ki upošteva nihanje letne temperature, smo se že dokopali do vrednosti cenilke za  $\beta$ , oziroma že poznamo številsko vrednost  $\hat{\beta}$ . Za cenilko temperature januarja 2040 je zato smiselno vzeti kar  $c_1^T \hat{\beta}$ , kjer s  $c_1$  označujemo:

$$c_1 = \begin{bmatrix} 2040 + 1/12 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Opomnimo, da bi na enak način lahko ocenili temperaturo poljubnega meseca v letu 2040, le  $c_1$  bi morali ustrezno zamenjati za vektor  $c_i$  (tu naj  $i$  označuje zaporedno številko meseca), ki ima na prvi komponenti vrednost  $2040 + i/12$ , ter enico le na  $i$ -ti komponenti (prve komponente nismo šteli). Če bi želeli zamenjati leto ocene, bi 2040 v vektorju ustrezno zamenjali z letom proizvodbe. Naloga nas sprašuje po številski vrednosti ocene, zato jo zapišimo. Za mesec januar po izračunu s pomočjo datoteke znaša 3.243.

Za konstrukcijo intervala zaupanja se skličemo na formulo/izpeljavo iz [1], ki nam pove, da:

$$\frac{c^T \hat{\beta} - y_{m+1}}{\hat{\sigma}_+ \sqrt{1 + c^T (X^T X)^{-1} c}} \sim \text{Student}(m - p),$$

zato bo imel interval zaupanja za  $\hat{y}_{m+1}$  obliko:

$$c^T \hat{\beta} - F_{\text{Student}}^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \widehat{SEP}_+ < \hat{y}_{m+1} < c^T \hat{\beta} + F_{\text{Student}}^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \widehat{SEP}_+.$$

V zgornjem zapisu velja:

$$\widehat{SEP}_+ = \hat{\sigma}_+ \sqrt{1 + c^T (X^T X)^{-1} c} \quad \text{in} \quad \hat{\sigma}_+ = \frac{\|Y - X\hat{\beta}\|}{\sqrt{m - p}},$$

vredno pa je omeniti še, da  $m$  predstavlja število podatkov (v našem primeru  $12n = 420$ )  $p$  pa število koeficientov v modelu (pri nas so to v modelu, ki upošteva tudi letno nihanje temperature  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{12}$ , torej  $p = 13$ ).

Ker smo cenilko za januarsko temperaturo leta 2040 zapisali kot  $c_1^T \hat{\beta}$ , bo interval zaupanja po zgornji formuli oblike:

$$\left[ c_1^T \hat{\beta} - F_{\text{Student}}^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \widehat{SEP}_+, c_1^T \hat{\beta} + F_{\text{Student}}^{-1} \left( 1 + \frac{\alpha}{2} \right) \widehat{SEP}_+ \right].$$

Sedaj se za pomoč pri izračunavi ponovno obrnemo na program *python*, pri iskanju približka vrednosti inverza Studentove porazdelitve (pri nas prostorske stopnje  $420 - 13 = 407$ ) pa nam na pomoč priskoči [3]. Navodila iz začetka projektne naloge narekujejo, da moramo interval zaupanja izračunati tako pri  $\alpha = 0.01$ , kot tudi pri  $\alpha = 0.05$ . Izračuni nam povedo, da stopnji tveganja

0.05 pripada interval zaupanja  $[-0.1607, 6.6466]$ , pri stopnji tveganja 0.01 pa je interval zaupanja pričakovano nekoliko večji in je enak  $[-1.2379, 7.7238]$ .

Podobno se lotimo ocenjevanja povprečne temperature za leto 2040. Za cenilko bomo vzeli kar aritmetično sredino cenilk mesecev leta 2040, t.j.:

$$\frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} c_i^T \hat{\beta}, \text{ kjer } c_i \text{ predstavlja ustrezne podatke za } i \text{ ti mesec v letu 2040.}$$

Zgornjo cenilko za povprečno temperaturo leta 2040 lahko zapišemo tudi kot  $\tilde{c}^T \hat{\beta}$ , kjer je:

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} (2040 + i/12) \\ 1/12 \\ 1/12 \\ \vdots \\ 1/12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2040 + \frac{1}{144} \sum_{i=1}^{12} i \\ 1/12 \\ 1/12 \\ \vdots \\ 1/12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2040 + \frac{13}{24} \\ 1/12 \\ 1/12 \\ \vdots \\ 1/12 \end{bmatrix}.$$

Številska vrednost zgoraj zapisane ocene znaša 13.6482, kar je torej naša ocena povprečne temperature v letu 2040.

Določimo še intervala zaupanja za oceno povprečne temperature v letu 2040. Postopamo po enakem postopku, kot smo to storili zgoraj, le da tokrat  $c_1$  zamenja  $\tilde{c}$ , torej bo interval zaupanja oblike:

$$[\tilde{c}^T \hat{\beta} - F_{\text{Student}}^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \widehat{SEP}_+, \tilde{c}^T \hat{\beta} - F_{\text{Student}}^{-1} \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \widehat{SEP}_+].$$

Številske vrednosti intervala so pri stopnji tveganja 0.05 enake  $[10.2445, 17.0519]$ , pri stopnji tveganja 0.01 pa  $[9.1673, 18.1291]$ .

## Literatura

- [1] M. Raič *Zapiski predavanj - Statistično sklepanje pri Gaussovi linearni regresiji* [ogled 5. 7. 2023], dostopno na [https://ucilnica.fmf.uni-lj.si/pluginfile.php/135057/mod\\_resource/content/2/Regresija\\_sklepanje.pdf](https://ucilnica.fmf.uni-lj.si/pluginfile.php/135057/mod_resource/content/2/Regresija_sklepanje.pdf).
- [2] M. Raič *Zapiski predavanj - Izražava povprečja in variance pri podatkih, organiziranih po skupinah* [ogled 3. 7. 2023], dostopno na [https://ucilnica.fmf.uni-lj.si/pluginfile.php/135261/mod\\_resource/content/2/Razcep\\_var.pdf](https://ucilnica.fmf.uni-lj.si/pluginfile.php/135261/mod_resource/content/2/Razcep_var.pdf).
- [3] M. Bognar *Student's t-Distribution* [ogled 5. 7. 2023], dostopno na <https://homepage.divms.uiowa.edu/~mbognar/applets/t.html>.