

Simetrična diskretna verižnica z liho členki

Projekt pri predmetu Matematično modeliranje

Matej Novoselec

30. junij 2023

1 Naloga 2

Vredno je zapisati nekoliko bolj matematično interpretacijo problema/navodila. Podatki pripadajo trem različnim eksperimentom, ki bodo določali končne vrednosti in rezultate, a so problemi, ki jih podajajo, teoretično iste narave. Za podan problem sedaj razvijemo teoretični pristop in se lotimo reševanja podnaloge a) in b).

Imamo n neodvisnih, enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk, označimo jih z R_1, R_2, \dots, R_n . Porazdeljene naj bodo Rayleighovo, t.j. z gostoto:

$$f_{R_i}(r_i | \theta) = \begin{cases} \frac{r_i}{\theta^2} \exp\left(-\frac{r_i^2}{2\theta^2}\right) & ; \quad r > 0 \\ 0 & ; \quad \text{sicer} \end{cases}.$$

Zaradi predpostavljene neodvisnosti, je potem (R_1, R_2, \dots, R_n) porazdeljen z gostoto:

$$\prod_{i=1}^n f_{R_i}(r_i | \theta) = \left(\frac{1}{\theta^{2n}} \prod_{i=1}^n r_i \right) \exp\left(-\frac{1}{2\theta^2} \sum_{i=1}^n r_i^2\right); \quad r_i > 0.$$

Lotimo se podnaloge a). Velja:

$$L(\theta | (r_1, r_2, \dots, r_n)) = \prod_{i=1}^n L_i(\theta | r_i) = \prod_{i=1}^n f_{R_i}(r_i | \theta)$$

in

$$l(\theta | (r_1, r_2, \dots, r_n)) = \ln L(\theta | (r_1, r_2, \dots, r_n)) = \sum_{i=1}^n \ln(f_{R_i}(r_i | \theta)),$$

ter zato:

$$l(\theta | (r_1, r_2, \dots, r_n)) = -2n \ln(\theta) + \sum_{i=1}^n \ln(r_i) - \frac{1}{2\theta^2} \sum_{i=1}^n r_i^2.$$

Iščemo cenilko za θ po metodi največjega verjetja, zato si ogledamo enakost:

$$0 = \frac{\partial l(\theta \mid (r_1, \dots, r_n))}{\partial \theta} = -\frac{2n}{\theta} + \frac{1}{\theta^3} \sum_{i=1}^n r_i^2.$$

Za cenilko po metodi največjega verjetja tako dobimo:

$$\hat{\theta} = \sqrt{\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n r_i^2}.$$

Za rešitev podnaloge b) si oglejmo pričakovano vrednost (Rayleighove) slučajne spremenljivke R :

$$\mathbb{E}(R) = \int_0^\infty r f(r \mid \theta) dr = \int_0^\infty \frac{r^2}{\theta^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\theta^2}\right) dr.$$

Uvedemo $\tau = \frac{r^2}{2\theta^2}$ in dobimo

$$\mathbb{E}(R) = \int_0^\infty \sqrt{2\tau} \theta e^{-\tau} d\tau = \theta\sqrt{2} \int_0^\infty \tau^{1/2} e^{-\tau} d\tau = \theta\sqrt{2} \Gamma(3/2) = \theta\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Cenilka po metodi momentov je zato:

$$\hat{\theta} = \bar{R}\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Literatura

- [1] E. Zakrajšek, *Verižnica*, [ogled 30. 6. 2023], dostopno na https://ucilnica.fmf.uni-lj.si/pluginfile.php/8283/mod_resource/content4/predavanja/veriznica/veriznica.pdf.
- [2] E. Žagar *Zapiski predavanj 22.3.2021 - Problem diskretne verižnice* [ogled 29. 6. 2023], dostopno na https://ucilnica.fmf.uni-lj.si/pluginfile.php/100122/mod_resource/content/1/mm_uni_22_3_21.pdf.