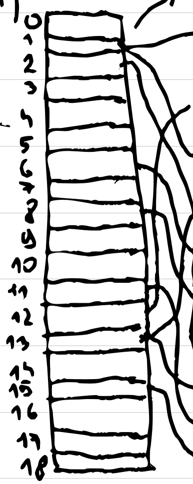
Zadaća 1

Zadatak 1. : 1.)

a)

$\boxed{77} \to \boxed{39} \to \boxed{\cdot}$



$h(77) = 77 \bmod 19 = 1$

$h(69) = 69 \bmod 19 = 12$

$h(39) = 39 \bmod 19 = 1$

$h(70) = 70 \bmod 19 = 13$

$h(6) = 6 \bmod 19 = 6$

$h(8) = 8 \bmod 19 = 8$

$h(40) = 40 \bmod 19 = 2$

$h(89) = 89 \bmod 19 = 13$

$h(49) = 49 \bmod 19 = 11$

$h(15) = 15 \bmod 19 = 15$

b) $h(k,i) = (h_1(k) + i * h_2(k)) \bmod m$

$h_1(k) = k \bmod m$, $h_2(k) = 1 + (k \bmod (m-1))$

$h(77,0) = (h_1(77) + 0 \cdot h_2(77)) \bmod 19 = 1$

$h(69,0) = (h_1(69) + 0 \cdot h_2(69)) \bmod 19 = 12$

$h(39,0) = 1$ => kolizija => $h(39,1) = (h_1(39) + h_2(39)) \bmod 19 = 5$

$h(70,0) = h_1(70) \bmod 19 = 13$

$h(6,0) = h_1(6) \bmod 19 = 6$

$h(8,0) = h_1(8) \bmod 19 = 8$

$h(40,0) = h_1(40) \bmod 19 = 2$

$h(89,0) = h_1(89) \bmod 19 = 13$ => koliziju

$h(89,1) = (h_1(89) + h_2(89)) \bmod 19 = 12$ => kolizija

$h(89,2) = (h_1(89) + 2h_2(89)) \bmod 19 = 11$

$h(49,0) = h_1(49) \bmod 19 = 11 \Rightarrow$ kolizija

$h(49,1) = (h_1(49) + h_2(49)) \bmod 19 = 6 \Rightarrow$ kolizija

$h(49,2) = (h_1(49) + 2h_2(49)) \bmod 19 = 1 \Rightarrow$ kolizija

$h(49,3) = (h_1(49) + 3h_2(49)) \bmod 19 = \underline{\underline{15}}$

$h(15,0) = h_1(15) \bmod 19 = 15 \Rightarrow$ kolizija

$h(15,1) = (h_1(15) + h_2(15)) \bmod 19 = 12 \Rightarrow$ kolizija

$h(15,2) = (h_1(15) + 2h_2(15)) \bmod 19 = \underline{\underline{9}}$

0	
1	77
2	10
3	
4	
5	39
6	6
7	
8	7
9	15
10	
11	89
12	69
13	70
14	
15	49
16	
17	
18	

2.) $x_1 x_2 \ldots x_n \; (x_i \in \{0,1,\ldots,9\})$

$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \pmod 8$ univerzalna?

za a_i, $i = 1,2,\ldots,n$ iz $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

F-ja nije univerzalna jer postoji kontraprimjer:

npr. $n = 2$, $a_1 = a_2 = 1$

$x = 97$

$x' = 17$

$\Rightarrow (9 \cdot 1 + 7 \cdot 1) \bmod 8 = 16 \bmod 8 = 0$

$(1 \cdot 1 + 7 \cdot 1) \bmod 8 = 8 \bmod 8 = 0$

+ vjerojatnost je veća od $\frac{1}{8}$

Zadatak 2.:

Pod pretpostavkom jednostavnog uniformnog haširanja, koristit ćemo linearnost očekivanja da bi izračunali ovo.

Recimo da su svi ključevi iz totalno uređenog skupa $\{k_1, \dots, k_n\}$

Neka je X_i broj l koji su veći od k_i $(l > k_i)$ t. d. vrijedi $h(l) = h(k_i)$

Onda, zbog linearnosti očekivanja, broj kolizija je suma svih kolizija za svaki mogući najmanji element u koliziji. Taj broj kolizija iznosi:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{m} = \frac{n^2 - \frac{n(n+1)}{2}}{m} = \frac{n^2 - n}{2m}$$

Zadatak 3.:

3. $\Pr\{X > 2\lg n\} = O\left(\frac{1}{n}\right)$

$X = \max X_i,\ 1 \le i \le n$ (n = broj ubacivanja)

$$\Pr\{X > 2\lg n\} = \Pr\{X_1 > 2\lg n \text{ and } X_2 > 2\lg n \text{ and} \dots \text{and } X_n > 2\lg n\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Pr\{X_i > 2\lg n\} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \Rightarrow \Theta\left(\frac{1}{n}\right)$$

4. $E[X] = \sum_{i=1}^{n} i \cdot P\{X = i\} \le \Pr\{X \le 2\lg n\} 2\lg(n) + \Pr\{X > \lg n\} n$

$$\le \frac{n-1}{n} 2\lg n + \frac{1}{n} \cdot n = 2\lg n - \frac{2\lg n}{n} + 1 \in \Theta(\lg n)$$