# 1 Uvod

Sustav linearnih jednadžbi $Ax = b$ rješavamo Jacobijevom i Gauss-Seidelovom metodom. Jacobijeva i Gauss-Seidelova metoda spadaju u klasične iterativne metode. Razvoj tih metoda započeo je pedesetih godina prošloga stoljeća kada i počinje sustavno korištenje računala u rješavanju numeričkih problema. Iako su klasične metode, a time i dosta dobro proučene, i dalje su predmet interesa i istraživanja. Naime, te su metode iznimno efikasne za određene klase problema, a s druge strane su i vrlo jednostavne te ih se može koristiti kao dijelove u implementaciji složenijih algoritama. Također, su doprinijele i razvoju novih, poboljšanih metoda za rješavanje problema sustava linearnih jednadžbi.

Jacobijevu metodu definiramo za matricu $A \in \mathbb{M}_n$ za koju je $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, ..., n$. Komponenta vektora $x$ na $i$-tom mjestu u $k$-toj iteraciji dana je preko preostalih $n - 1$ komponenti vektora $x$ u prethodnoj iteraciji:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)}) \tag{1}$$

Ako matricu $A$ zapišemo kao

$$A = D(I - L - U)$$

gdje je $D = \mathrm{diag}(A)$, $U$ strogo gornje trokutasta, a $L$ strogo donje trokutasta matrica, onda iteracije u Jacobijevoj metodi možemo zapisati matrično:

$$x^{(k)} = Jx^{(k-1)} + D^{-1}b, \quad J = D^{-1}(D - A) \tag{2}$$

U trenutku kada se računa $x_i^{(k)}$ prethodno su već izračunate vrijednosti $x_1^{(k)}, ..., x_{i-1}^{(k)}$. Također, očekujemo da će iteracije konvergirati pa su vrijednosti u $k$-toj iteraciji bolje aproksimacije od odgovarajućih vrijednosti u prethodnoj iteraciji. Stoga je ideja kod izračuna $x_i^{(k)}$ formulom (1), koristiti vrijednosti prvih $i - 1$ komponenti iz tekuće iteracije, a vrijednosti preostalih komponenti uzeti iz prethodne iteracije:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)}) \tag{3}$$

Formulom (3) reprezentirana je Gauss-Seidelova iterativna metoda za rješavanje sustava linearnih jednadžbi.

Analogno formuli (2) možemo i Gauss-Seidelove iteracije prikazati u matričnom zapisu:

$$D(I-L)x^{(k)} = DUx^{(k-1)} + b$$

$$x^{(k)} = Gx^{(k-1)} + (I-L)^{-1}D^{-1}b, \quad G = (I-L)^{-1}U \tag{4}$$

Konvergencija pojedine metode ovisi o matrici iteracija, tj. matricama $J$ i $G$ za Jacobijevu i Gauss-Seidelovu metodu, redom. Općenito nužan i dovoljan uvjet za konvergenciju neke iterativne metode dan je u sljedećem teoremu:

**Teorem 1.** *Iteracije $x^{(k)} = Fx^{(k-1)} + c$ konvergiraju fiksnoj točki $x$ za svaki početni $x^{(0)}$ ako i samo ako je* $\mathrm{spr}(F) < 1$.

Dakle, u slučaju Jacobijeve i Gauss-Seidelove metode također je potrebno proučiti spekralne radijuse matrica $J$ i $G$. No, spektar matrice nije baš jednostavno odrediti i numerički je taj problem zahtijevniji nego rješavanje sustava linearnih jednadžbi. U sljedećem teoremu dani su neki dodatni uvjeti koji osiguravaju konvergenciju Jacobijeve i Gauss-Seidelove metode:

**Teorem 2.** *(Stein-Rosenberg) Neka je $J = L + U$ nenegativna matrica, pri čemu je $L$ strogo donje trokutasta, a $U$ strogo gornje trokutasta matrica. Neka je $G = (I-L)^{-1}U$. Tada vrijedi samo jedna od četiri tvrdnje:*

1. $\mathrm{spr}(J) = \mathrm{spr}(G) = 0$.
2. $\mathrm{spr}(J) = \mathrm{spr}(G) = 1$.
3. $0 < \mathrm{spr}(G) < \mathrm{spr}(J) < 1$.
4. $1 < \mathrm{spr}(J) < \mathrm{spr}(G)$.

Također određena struktura matrice iteracija osigurat će konvergenciju.

**Teorem 3.** *Neka je $A \in \mathbb{M}_n$ strogo dijagonalno dominantna ili ireducibilno dijagonalno dominantna. Tada su i Jacobijeva i Gauss-Seidelova metoda konvergentne sa svakom početnom iteracijom.*

# 2 Metoda

Sustav linearnih jednadžbi $Ax = b$ rješavamo Jacobijevom i Gauss–Seidelovom iterativnom metodom. Prema konstrukciji ovih iterativnih metoda, brzina konvergencije Jacobijeve metode ovisi o tome koliko je matrica $A$ "blizu" dijagonalne, a brzina Gauss– Seidelove o tome koliko je $A$ "blizu" donje trokutaste matrice.

Cilj je zadatka eksperimentalno ispitati brzinu konvergencije na skupu slučajno generiranih matrica za nekoliko različitih redova $n$. Svaka pojedina matrica A generira se u obliku $A = L + U$, gdje je $L$ donja trokutasta (s dijagonalom), a $U$ strogo gornja trokutasta matrica (bez dijagonale). U slučajno generiranim matricama kontrolira se dominacija matrice $L$ nad $U$ parametrom $\sigma \geq 1$ u 3 različita *mode*-a dominacije tako da budu zadovoljene sljedeće relacije:

- Ako je MODE = 1, onda mora vrijediti

$$\sum_{i,j=1}^{n} |l_{ij}| = \sigma \sum_{i,j=1}^{n} |u_{ij}| \tag{5}$$

- Ako je MODE = 2, onda mora vrijediti

$$\sum_{j=1}^{i} |l_{ij}| = \sigma \sum_{j=i+1}^{n} |u_{ij}| \;\; i = 1, ..., n. \tag{6}$$

- Ako je MODE = 3, onda mora vrijediti

$$|l_{ij}| = \sigma |u_{ij}|, \;\; i \neq j \tag{7}$$

Uzet ćemo da je $x^T = (1, 1, ..., 1)$ egzaktno rješenje sustava i na temelju toga izračunati vektor slobodnih članova $b$, tj. desnu stranu sustava. Početna aproksimacija rješenja je u svakom eksperimentu $x^{(0)} = 0$ tako da je greška ove aproksimacije $||e^{(0)}||_\infty$. Brzinu konvergencije pratimo pomoću parametra $p = (||e^{(N)}||_\infty)^{1/N}$ gdje je $||e^{(N)}||_\infty$ greška zadnje aproksimacije u generiranom nizu od $N \leq 100$ iteracija. Greška se u svakom koraku iteracije smanjuje (ili povećava) upravo za faktor $p$. Dakle što je $p$ manji metoda brže konvergira (ako konvergira).

Dakle, za matricu $A = L + U$ reda $n$, gdje su $L$ i $U$ slučajno generirane matrice za dani MODE i za neki dani raspon vrijednosti $\sigma$ algoritam će provjeriti konvergenciju i ispitati brzinu konvergencije za dani MODE Jacobijeve i Gauss-Seidelove metode.

# 3 Opis algoritma

Algoritam koji rješava prethodni problem, odnosno testira brzinu konvergencije Jacobijeve i Gauss-Seidelove metoda napisan je u programskom jeziku C, koristeći LAPACK i BLAS programske pakete dok su grafičke vizualizacije načinjene u MATLAB-u.

Korisnik u algoritam učitava red matrice sustava ($n$) te se generira slučajna matrica $A$ (uniformna distribucija) zadanog reda $n$. Potom korisnik odabire koju iterativnu metodu želi testirati te unosom odabire parametar MODE. Algoritam potom prilagođava matricu sustava $A$ tako da vrijede relacije (5)-(7) ovisno o odabranom *mode*-u i to tako da gornji trokut matrice $A$ ostaje nepromijenjen dok se donji trokut prilagođava. Također korisnik unosi raspon parametra $\sigma \in [\sigma_{min}, \sigma_{max}]$ te korak $k$ za koji će se povećavati parametar $\sigma$, tj. način ekvidistantne diskretizacije intervala $[\sigma_{min}, \sigma_{max}]$. Tada je $\sigma = \sigma_{min} + k\xi$, gdje je $\xi = 0, 1, ..., \lceil \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{k} \rceil$.

Nadalje algoritam za svaki $\sigma$ generira matricu sustava $A$ u odabranom MODE-u te rješava sustav $Ax = b$ zadanom iterativnom metodom. Po završetka rješavanja sustava (broj iteracija je odozgo omeđen sa $N < 100$) izračunava brzinu konvergencije koju pratimo pomoću parametra $p$ te ispisuje izračunate parametre $p$ u ovisnosti o parametru $\sigma$.

# 4 Rezultati i zaključak

Algoritam je testiran na slučajnoj matrici $A \in \mathbb{R}^4$ koja je modificirana ovisno o parametru MODE, za različite raspone vrijednosti $\sigma$.

$$A = \begin{pmatrix} 0.6551 & 0.9597 & 0.7513 & 0.8909 \\ 0.1626 & 0.3404 & 0.2551 & 0.9593 \\ 0.1190 & 0.5853 & 0.5060 & 0.5472 \\ 0.4984 & 0.2238 & 0.6991 & 0.1386 \end{pmatrix}$$

Jacobijev algoritam očekivano sve bolje konvergira kako $\sigma$ raste za MODE $\in \{1, 2\}$ (Fig. 1 i 2). No metoda tek konvergira kad je otprilike $\sigma > 50$ (tj. kada je $p < 1$). Da bi Jacobijev algoritam konvergirao k rješenju, dominacije donjeg trokuta matrice $A$ mora značajno dominirati nad gornjim trokutom. Za MODE=1 i MODE=2 nema značajne razlike u rezultatu, osim što za MODE=2 se nešto ranije postigne konvergencija,tj. za manju vrijednost $\sigma$. U slučaju MODE=3 (Fig 3.) povećavanjem parametra $\sigma$ matrica postaje sve lošija, u smislu konvergencije Jacobijeve metode i ovisnost $p(\sigma)$ je rastuća. Za MODE=3 transformira se donji trokut matrice $A$, ali bez dijagonale dok je za MODE$\in \{1, 2\}$ transformacija uključivala i dijagonalu. Dakle, donji trokut porastom parametra $\sigma$ sve više dominira nad dijagonalom, a za konvergenciju Jacobijeve metode trebalo bi biti upravo obrnuto, tj. dijagonala bi trebala dominirati nad ostatkom matrice. Ovaj zaključak je u skladu s ranije izrečenim Teoremom 3 koji jamči konvergenciju Jacobijeve metode dijagonalno dominantnih matrica.

Ovisnost brzine konvergencije Gauss-Seidelove metode o $\sigma$ u MODE$\in \{1, 2\}$ kvalitativno izlgeda isto kao i ovisnost brzine konvergencije Jacobijeve metode o $\sigma$ u istim modovima dominacije (Fig. 4 i 6). No, kod Gauss-Seidelove metode već za $\sigma > 4$ vrijednost $p$ pada ispod 1 (MODE=1), odnosno za $\sigma > 10$ (MODE=2) što je značajna razlika u odnosu na Jacobijevu metodu. Dakle, čim donji trokut matrice $A$ (s dijagonalom) dovoljno "nadjača" gornji trokut, Gauss-Seidelova metoda će konvergirati ka rješenju. Za MODE=3 događa se ista situacija kao i kod Jacobijeve metode, iz istih razloga (Fig 7). Nadalje na slici 5. (Figure 5) izdvojen je i uvećan dio grafa 4. za raspon $\sigma \in [4.5, 4.6]$. U tom području događaju se velike oscilacije funkcije $p$. Grafički, ali i uvidom u numeričke podatke, uočavamo

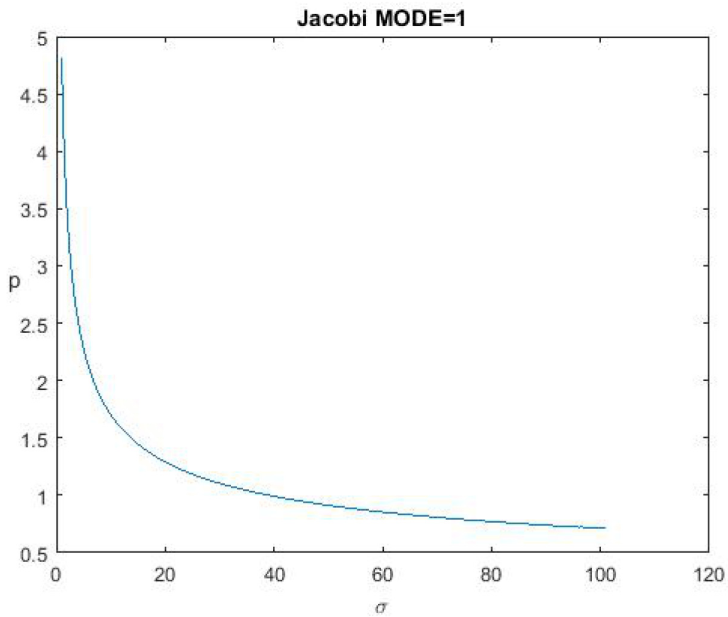


Figure 1:

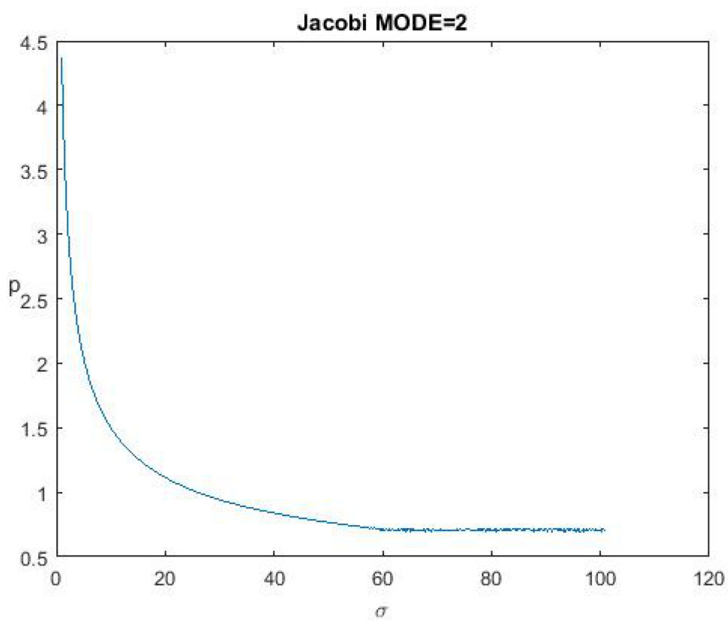


Figure 2:

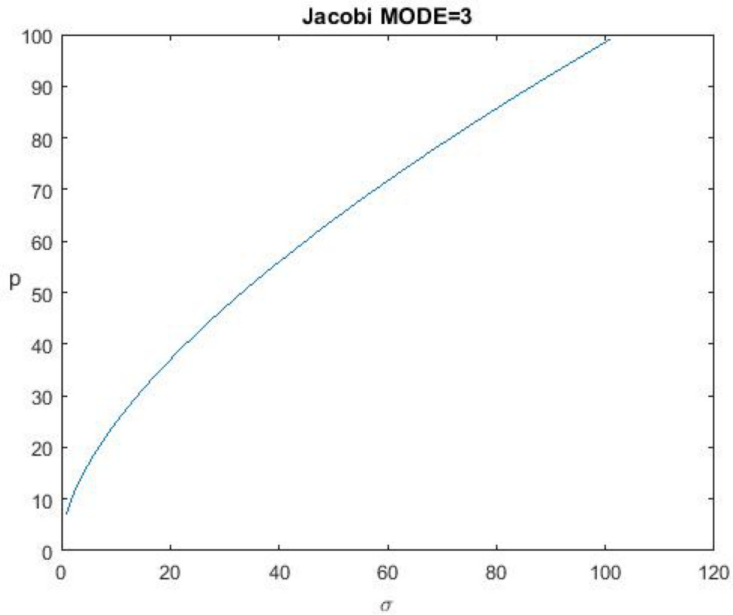


Figure 3:

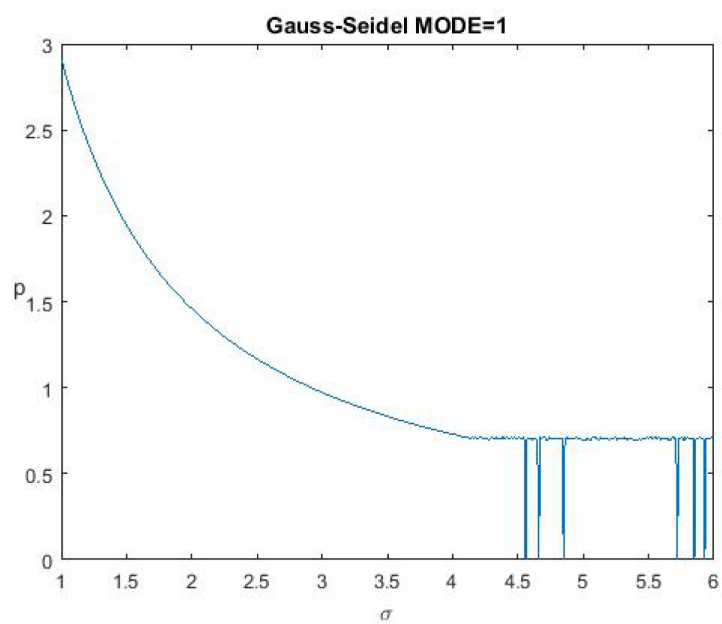


Figure 4:

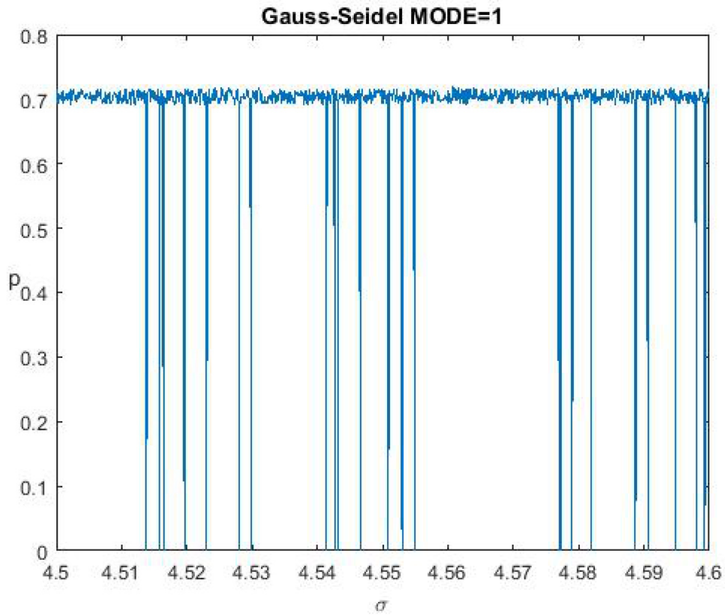


Figure 5:

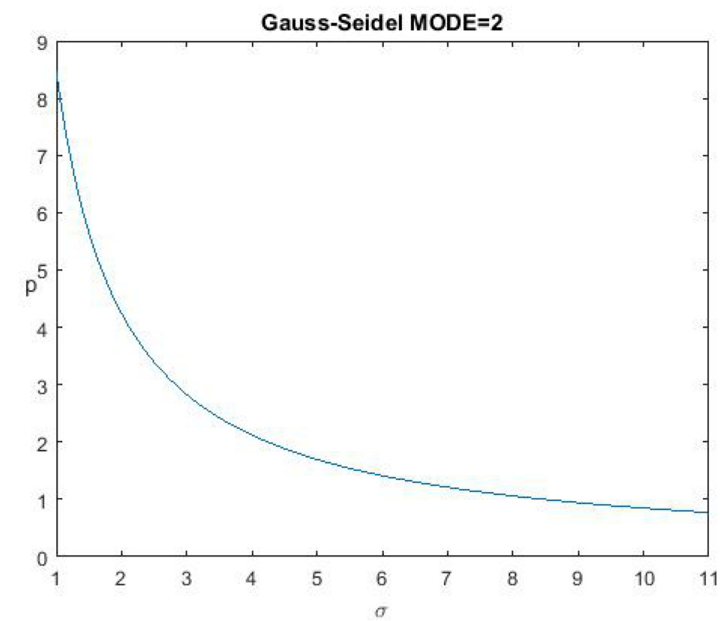


Figure 6:

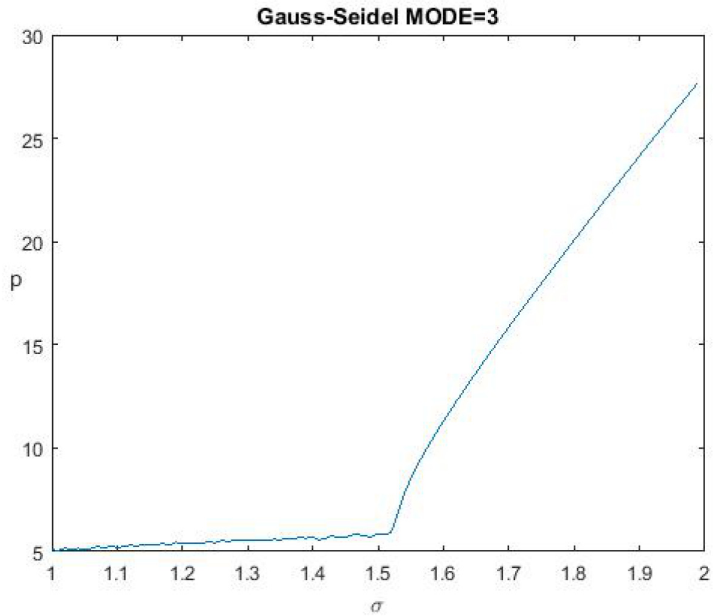


Figure 7:

da se vrijednosti grupiraju oko 0.7 i oko 0. Vrijednost $p$ se izračunava tako da se izračuna $N$-ti korijen (u našem slučaju $N$=100) iz $\infty$-norme apsolutne pogreške, tj. $p = (||e^{(N)}||_\infty)^{1/N}$. Kako radimo u aritmetici konačne preciznosti kada $||e^{(N)}||_\infty$ dođe blizu nule, računalo ga više ne može precizno odrediti, tako da će rezultat korijenovanja izuzetno neprecizan i vrijednost $p$ ćemo u dobiti 0. Pretpostavka je da su ti rezultati također trebali biti u nekom rasponu $< 0.7 - \epsilon, 0.7 + \epsilon >$, za neki $\epsilon > 0$.

Na kraju, ovisnost $p(\sigma)$ je padajuća za MODE $\in \{1, 2\}$, ali je zanimljivo da je i odozdo omeđena. Grafički, ali i iz numeričkih podataka vidimo da kako $\sigma \to \infty$, $p$ oscilira oko vrijednosti 0.7 u MODE$\in \{1, 2\}$ i u Jacobijevoj i u Gauss-Seidelovoj metodi.