# 1. domácí úlohy

## 1)

### Zadání

Graf nazvěme *asymetrickým* obsahuje-li jeho grupa automorfismů pouze identitu. Zkonstruujte nekonečně mnoho navzájem neisomorfních asymetrických grafů.

### Řešení

Jako naši množinu neisomorfních asymetrických grafů vezměme
množinu $\mathcal{G} = \{G_7, G_8, ...\}$.
$G_n$ definujeme jako

$$G_n = ([n], \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{3,4\}, \{1,5\}, \{5,6\}, \{6,7\}, ..., \{n-1, n\}\})$$

Protože se jedná a grafy s různým počtem vrcholů neexistuje mezi nimi isomorfní zobrazení.

Ukažme, že se jedná o asymetrické grafy.
Aby zobrazení $f$ bylo automorfismus, tak musí platit $f(1) = 1$, protože se jedná o a jediný uzel stupně 3.
Dále určitě musí platit $f(2) = 2$, protože to je jediný uzel stupně 1, který je zároveň spojený s uzlem stupně 3.
Nakonec musí platit, že $f(3) = 3$ a $f(4) = 4$, protože uzel 4 musí sousedit s uzlem, který sousedí s uzlem stupně 3.
Podobné tvrzení tedy platí i pro uzly $5, ..., n$. Tedy existuje pouze jedno zobrazení a to identita.

## 2)

### Zadání

Pro daný graf $G = (V, E)$, uvažujme následující relaci $\rightsquigarrow$ na $V$: pro dva (ne nutně různé) vrcholy $u, v \in V$ řekneme, že $u$ je v relaci s $w$, tzn. $u \rightsquigarrow w$, jestliže existuje cesta v $G$ z $u$ do $w$. Dokažte, že $\rightsquigarrow$ je ekvivalence na $V$

### Řešení

Aby relace byla ekvivalencí, musí být reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Předpokládáme tedy graf $G = (V, E)$, $v_i \in V$, $e_j \in E$, kde $i, j \in [n+k]$.

Dokažme reflexivitu, tj. $\forall u \in V : u \rightsquigarrow u$.
Toto tvrzení platí triviálně, jako cestu volíme jednočlennou posloupnost $(u)$.

Dokažme symetrii, tj. $\forall u, w \in V : u \rightsquigarrow w \implies w \rightsquigarrow u$.
Předpokládáme tedy existenci cesty z $u$ do $w$, tedy posloupnost

$$(u, e_1, v_1, e_2, ..., v_{n-1}, e_{n-1}, w)$$

Zřejmě existuje cesta z $w$ do $u$, stačí přetočit předchozí posloupnost, tedy

$$(w, e_{n-1}, v_{n-1}, ..., v_1, e_1, w)$$

Nakonec dokažme tranzitivitu, tj. $\forall u, w, x \in V : u \rightsquigarrow w \wedge w \rightsquigarrow x \implies u \rightsquigarrow x$
Existuje tedy cesta z $u$ do $w$ a cesta z $w$ do $x$, tedy

$$(u, e_1, v_1, e_2, ..., v_{n-1}, e_{n-1}, w)$$

$$(w, e_{n+1}, v_{n+1}, e_{n+2}, ..., v_{n+k-1}, e_{n+k-1}, x)$$

Nejprve řešme triviální případ, kdy $\nexists a \in [n], b \in \{n+1, n+2, ..., n+k\}, v_a = v_b$
.
V tomto případě existuje cesta ve tvaru

$$(u, e_1, v_1, e_2, ..., v_{n-1}, e_{n-1}, w, e_{n+1}, v_{n+1}, e_{n+2}, ..., v_{n+k-1}, e_{n+k-1}, x)$$

Nakonec řešme případ kdy $\exists a \in [n], b \in \{n+1, n+2, ..., n+k\}, v_a = v_b$.
Nejmenší $a$ pro které $\exists b$ tak, že rovnost $v_a = v_b$ platí označme jako $h$, korespondující $b$ (existuje pouze jedno) označme jako $g$. Jako cestu můžeme poté volit jako

$$(u, e_1, v_1, e_2, ..., v_{j-1}, e_{j-1}, v_h = v_g, e_{g+1}, v_{g+1}, ..., v_{n+k-1}, e_{n+k-1}, x)$$

Tímto jsme ukázali, že $\rightsquigarrow$ je ekvivalence. $\square$

## 3a)

### Zadání

Dokažte, že každý graf $G$ s alespoň dvěma vrcholy obsahuje dvojici různých vrcholů se stejným stupněm. Jinými slovy, $\exists u, w \in V(G)$ tak, že $u \neq w$ a $deg_G(u) = deg_G(w)$.

### Řešení

Ukážeme sporem.
Jako $V$ vezměme $[n]$.
Předpokládáme, že existuje graf $G = (V, E)$ ve kterém neexistuje dvojice různých vrcholů se stejným stupněm.

Proto tedy můžeme vrcholy označit tak, že $deg_G(v_0) = 0, deg_G(v_1) = 1, ..., deg_G(v_n) = n$.
Ale toto je spor, protože vrchol $v_0$ nemá být spojen s žádným dalším vrcholem ale, vrchol $v_n$ má být spojen se všemi vrcholy.

Tím jsme ukázali, že každý graf obsahuje dvojici různých vrcholů se stejným stupněm.

## 3b)

### Zadání

Buď $\delta$ přirozené číslo. Dokažte, že každý nenulový graf, kde každý vrchol má stupeň alespoň $\delta$, obsahuje cestu s $\delta$ hranami.

### Řešení

Důkaz provedeme sestrojením cesty v obecném nenulovém grafu $G = ([n], E)$, kde každý vrchol má stupeň alespoň $\delta$.

Počátek cesty označme jako $v_0$. Zvolme jednu hranu z $E$ (je jich alespoň $\delta$) které obsahují $v_0$, tu označme jako $e_1$. Druhý vrchol, který $e_1$ obsahuje, označme jako $v_1$.
Počet hran z $E$ obsahujících $v_1$, které ještě součástí hledané cesty nejsou, je alespoň $\delta - 1$. Jednu z nich zvolme a označme $e_2$, vrchol který v hledané cestě ještě není označme $v_2$.

Tento krok opakujeme, v $k$-tém kroku máme cestu $v_0, e_1, v_1, ..., v_k$.
Počet hran z $E$, které obsahují $v_k$ a neobsahují žádný z vrcholů $v_j, j \in [k-1]$ je $\delta - k$.
Jednu z těchto hran zvolíme a označíme $e_{k+1}$.
Vrchol který v hledané cestě ještě není označme $v_{k+1}$.

Tento krok můžeme opakovat dokud $k \neq \delta$. Poté není zaručena existence hrany z $E$, která by spojovala $v_\delta$ s vrcholem, který v námi konstruované cestě není.

V grafu tedy existuje cesta $v_0, e_1, v_1, ..., e_\delta, v_\delta$, která zřejmě obsahuje $\delta$ hran.

$\square$

## 4)

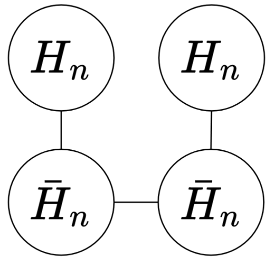
### Zadání

Nazvěme graf $G$ *doplňkem sebe sama* platí-li, že $G$ je isomorfní svému doplňku $\bar{G}$. Zkonstruujte nekonečně mnoho navzájem neisomorfních grafů $G$ jež jsou doplňkem sebe sama.

### Řešení

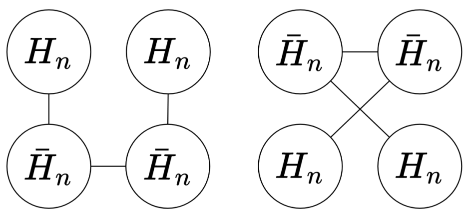
Označme $H_n$ graf s $n$ vrcholy, kde každý vrchol je propojený s každým, tedy $(n-1)$-regulární graf. Jeho doplněk označme jako $\bar{H}_n$.

Sestrojme graf jako na obrázku.




Čarou mezi dvěma grafy rozumíme to, že každý vrchol z jednoho grafu je spojený s každým vrcholem v druhém grafu.

Pokuď provedeme doplněk tohoto grafu, dostaneme graf jak je vidět na následujícím obrázku. Je zřejmé, že podgraf $H_n$ se stane svým doplňkem a že pokuď mezi dvěma podgrafy jsou všechny vrcholy spojeny, tak po provedení doplňku nebudou spojeny žádné.




Levý graf je tedy doplněk pravého, a tyto grafy jsou isomorfní. Graf je tedy námi hledaným doplňkem sebe sama.

Grafy pro různá $n$ jsou mezi sebou zřejmě neisomorfní, protože mají různý počet vrcholů.

Tím jsme zkonstruovali nekonečně mnoho navzájem neisomorfních grafů $G$ jež jsou doplňkem sebe sama.

## 5)

### Zadání

Graf nazvěme *d-regulárním*, jestliže všechny jeho vrcholy mají stupeň přesně $d$. Určete všechny dvojice čísel $n$ a $d$, kde $0 \leq d \leq n-1$, takové, že existuje $d$-regulární graf s $n$ vrcholy.

### Řešení

Předpokládejme graf s $n$ vrcholy, $\mathbb{V} = [n]$.

Zaveďme následující značení pro $k > 0$

$E_k = \{\{0, k \bmod n\}, \{1, 1 + k \bmod n\}, \{2, 2 + k \bmod n\}, ..., \{n-1, k-1 \bmod n\}\}$

Všimněme si, že každé číslo se objeví právě ve dvou neuspořádaných dvojící.

Pro $k = 0$ definujme

$$E_0 = \{\}$$

Vidíme, že triviálně platí následující tvrzení $\forall a, b < n/2 \in \mathbb{N}_0, a \neq b \implies E_a \cap E_b = \emptyset$.

Nyní můžeme explicitně konstruovat $d$-regulární grafy následujícím způsobem.

$d$-regulární graf označme jako $G_d$, vezměme $2h = n-1$ pro $n$ liché, $2h = n-2$ pro $n$ sudé.

$$\begin{aligned}
G_0 &= (\mathbb{V}, E_0) \\
G_2 &= (\mathbb{V}, E_0 \cup E_1) \\
G_4 &= (\mathbb{V}, E_0 \cup E_1 \cup E_2) \\
G_6 &= (\mathbb{V}, E_0 \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3) \\
&\cdots\cdots\cdots \\
G_{2h-2} &= (\mathbb{V}, \bigcup_{i=0}^{h-1} E_i) \\
G_{2h} &= (\mathbb{V}, \bigcup_{i=0}^{h} E_i)
\end{aligned}$$

Tímto způsobem jsme zkonstruovali všechny sudé regulární grafy pro libovolný počet vrcholů.

Dále využijme následujícího tvrzení.

**Lemma.** Pokud pro $n$ vrcholů existuje $d$-regulární graf, tak pro $n$ vrcholů existuje i $(n-1-d)$-regulární graf.

*Důkaz.* Důkaz je triviální, stačí si uvědomit že v $d$-regulárním grafu s $n$ vrcholy, má každý vrchol $d$ hran z $n-1$ možných.
Jeho doplněk je poté $(n-1-d)$-regulární graf. □

Díky tomuto lematu a předchozí konstrukci dokážeme pro každé sudé $n$ zkonstruovat všechny $d$-regulární grafy, kde platí $0 \leq d \leq n-1$.

Nakonec se zabývejme zbývajícím případem, kdy $n$ a $d$ jsou lichá čísla. Vyjděme z principu sudosti a $d$-regularity hledaného grafu.

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in V} deg_G(V) &= 2|E| \\
\sum_{v \in V} d &= 2|E| \\
nd &= 2|E|
\end{aligned}$$

Jak vidíme tak pro $n$ a $d$ liché tato rovnost není splněna, protože na levé straně je liché a na pravé straně sudé číslo. A tedy neexistuje $d$-regulární graf s $n$ vrcholy, pro $n$ a $d$ lichá.

Množina všech uspořádaných dvojic $(n, d)$ tak, že pro ně existuje $d$-regulární graf s $n$ vrcholy nakonec vypadá následovně.

$$\left\{(n, d) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \leq d \leq n-1 \wedge nd \text{ je sudé číslo}\right\}$$