4. domácí úlohy

Na tomto úkolu jsem pracoval spolu s Janem Plecháčkem.

1a)

Zadání

Buď $G = (V, E)$ graf s n vrcholy a spektrem $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Dokažte, že

$$\sum_{i \in [n]} \lambda_i^2 = 2|E|$$

Řešení

Využijeme dvě věty z lineární algebry.

Lemma. Nechť má matice $\mathbb{A}$ vlastní číslo λ, poté má matice $\mathbb{A}^2$ vlastní číslo λ^2

Důkaz. Víme, že platí $\mathbb{A}x = \lambda x$. Pak jednoduše máme

$$\mathbb{A}^2 x = \mathbb{A}(\mathbb{A}x) = \mathbb{A}(\lambda x) = \lambda \mathbb{A}x = \lambda^2 x$$

□

Lemma. Stopa matice $\mathbb{A}$ je rovna součtu vlastních čísel matice (včetně násobnosti).
Bez důkazu.

Graf má matici sousednosti A_G, její prvky značme a_{ii}. Pak za pomoci předchozích dvou vět platí

$$\sum_{i \in [n]} \lambda_i^2 = tr(A_G^2)$$

Označme prvky matice A_G^2 jako b_{ii}. Nyní stačí explicitně spočítat stopu. Máme

$$\sum_{i \in [n]} \lambda_i^2 = tr(A_G^2) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{ki} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}$$

V posledním kroku jsme využili vlastnosti, že matice A_G je symetrická a navíc toho, že její hodnoty jsou buď 1 nebo 0. Poslední člen je navíc zřejmě roven $2|E|$, protože počítáme počet jedniček v matici sousednosti, a každá hrana spojuje právě dva vrcholy.

Celkem tedy dostáváme hledané

$$\sum_{i \in [n]} \lambda_i^2 = 2|E|$$

□

1b)

Zadání

Buď G souvislý graf s maximálním stupněm D, a nechť spektrum G má největší vlastní číslo λ_1. Dokažte, že $D = \lambda_1$ právě když G je D-regulární.

Řešení

Dokažme $\Longleftarrow$:

Plyne z tvrzení z přednášky $D = \delta \leq \lambda_1 \leq \Delta = D$. Z toho zřejmě $D = \lambda_1$.

Dokažme $\Longrightarrow$:

Platí $D = \lambda_1$, vezměme libovolný vlastní vektor (označme x) tohoto vlastního čísla. Označme x_k v absolutní hodnotě jeho největší prvek. Vezměme vektor $y = \frac{1}{x_k}x$ (vlastní vektor D) a jeho největší hodnota je 1.

Vezměme k-tý řádek matice A_G a označme ho jako a_k

Platí, že $A_G y = Dy$ a také platí $a_K^T y = Dy$. Z tohoto dostáváme následující sadu nerovností.

$$D = D \cdot y_k = a_k^T y = \sum_{i=1}^{n} a_{k,i} y_i \leq \sum_{i=1}^{n} a_{k,i} y_k = \sum_{i=1}^{n} a_{k,i} = deg(k) \leq D$$

Proto u nerovnosti $\sum_{i=1}^{n} a_{k,i} y_i \leq \sum_{i=1}^{n} a_{k,i} y_k$ vždy nastává rovnost. Protože $y_j \leq 1, \forall j \in [n]$ dostáváme $y_k = y_j = 1$.

Pokud v nerovnosti použijeme místo k řádek j (kde j je soused k v grafu) dostaneme $deg(j) = D$. Opakováním procesu dospějeme k tomu, že $y_j = 1$ a $deg(j) = D$ protože graf je souvislý.

2)

Zadání

Buď $G = (V, E)$ graf s n vrcholy a spektrem $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Dokažte, že graf je bipartitní právě tehdy když $\lambda_i = -\lambda_{n-i+1}$ pro každé $i \in [n]$

Řešení

Dokažme $\Longleftarrow$:

Nechť $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ a platí $\lambda_i = -\lambda_{n-i+1}$. Ze symetrie A_G víme, že je diagonalizovatelná, a pro k-tou mocninu pak platí, $A_G^k = XD^kX^{-1}$. Vlastní čísla matice A_G^k jsou tedy λ_i^k.

Z přednášky víme, že $(A_G^k)_{ij}$ je počet sledů délky k z vrcholu i do j. Chci ukázat, že graf nemá cyklus liché délky, tedy chci ukázat, že $(A_G^k)_{ii} = 0$ pro každé liché k_3.

Protože máme $\lambda_i = -\lambda_{n-i+1}$, tak také platí $\lambda_i^k = (-\lambda_{n-i+1})^k$ a proto tedy $Tr(A_G^K) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k = 0$ pro každé liché k.

Protože, ale jsou všechny prvky matice nezáporné, tak platí, že $(A_G^k)_{ii} \geq 0$, protože je ale stopa matice rovna nule, tak musí platit $(A_G^k)_{ii} = 0$.

Graf tedy neobsahuje cyklus liché délky a proto je bipartitní.
Dokažme $\implies$:

Nechť $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ a G bipartitní. Označme vrcholy v množině L čísly od 1 do i, v R od $i+1$ do n. Matice sousednosti pak vypadá následovně.

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$$

To plyne z toho, že vrcholy z L a R nejsou spojeny.

Nechť $\vec{x}$ je libovolný vlastní vektor A_G k nějakému vlastnímu číslu λ, označme prvních i prvků jako $\vec{y}$ a zbylé prvky jako $\vec{z}$.Pak máme

$$A_G\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix} = \lambda\vec{x}$$

Z prostřední rovnosti víme, že $B^T\vec{y} = \lambda\vec{z}$ a $B\vec{z} = \lambda\vec{y}$. Pak je ale i vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} \vec{y} \\ -\vec{z} \end{pmatrix}$ vlastním vektorem, protože

$$A_G\vec{w} = \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{y} \\ -\vec{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B\vec{z} \\ B^T\vec{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda\vec{y} \\ \lambda\vec{z} \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} \vec{y} \\ -\vec{z} \end{pmatrix} = -\lambda\vec{w}$$

Z toho dostáváme, že pokud je λ vlastní číslo, tak pak je i $-\lambda$ vlastní číslo.

Protože A_G je symetrická tak víme, že je diagonalizovatelná. To znamená, že pro všechny vlastní čísla se rovná geometrická a algebraická násobnost. Z tohoto a předchozího pozorování pak plyne, že má-li vlastní číslo λ_k algebraickou násobnost i, tak i vlastní číslo $-\lambda_k$ bude mít násobnost i. To plyne z toho, že λ_k má i nezávislých vlastních vektorů, a ty můžeme podle předchozího upravit na i vlastních vektorů $-\lambda_k$.

Když seřadíme vlastní velikosti, tak již dostaneme námi hledané tvrzení, tj. $\lambda_i = -\lambda_{n-i+1}$ pro každé $i \in [n]$