2. domácí úlohy

1a)

Zadání

Pro každé přirozené $\delta \geq 1$ dokažte, že souvislý graf $G = (V, E)$ s $\delta(G) = \delta$ obsahuje cestu s $\min\{2\delta, |V| - 1\}$ hranami.

Řešení

Zvolme nejdelší cestu v grafu G, tj. posloupnost $v_0, e_1, v_1, ..., e_n, v_n$ kde n je délka cesty. Množinu všech vrcholů cesty označme jako P.

Platí následující 2 pozorování:

Lemma. Sousedé vrcholů v_0 a v_n musí být v množině P, tj.
$N_G(v_0) \subseteq P \wedge N_G(v_n) \subseteq P$

Důkaz. Pokud by tomu tak nebylo, tak by P nebyla nejdelší cesta v G, stačilo by totiž do cesty přidat bod který je v sousedství jednoho z koncových vrcholů a ještě v cestě není. Což je spor s tím, že P je nejdelší cesta. □

Lemma. Pro žádné $i \in \{1, 2, ..., n-2\}$ neplatí, že $v_i \in N_G(v_n) \wedge v_{i+1} \in N_G(v_0)$ nebo $P = V$.

Důkaz. Sporem, tj $\exists i, v_i \in N_G(v_n) \wedge v_{i+1} \in N_G(v_0)$.

Pokud by tomu tak bylo, šlo by z cesty vytvořit cyklus. Jeho sled by pak byl

$$v_{i+1}, e_{i+2}, v_{i+2}, ..., v_n, \{v_n, v_i\}, v_i, e_i, v_{i-1}, ..., e_1, v_0, \{v_0, v_{i+1}\}, v_{i+1}$$

Protože ale víme, že G je souvislý, někde v cestě musí existovat vrchol, který má souseda mimo množinu P (jedinou výjimkou je pokud $P = V$), tento vrchol označme v_k.

Můžeme pak vytvořit cestu, která je delší než P, stačí začít v sousedu v_k a pak projít cyklus.

To je ale spor s tím, že P je nejdelší cesta. □

Nejprve vyřešme případ pro $2\delta < |V|$:
Z předchozích 2 pozorování tedy víme, že posloupnost vrcholů které tvoří cestu musí být alespoň následující.

Cesta začíná ve v_0 poté následuje $\delta - 1$ sousedů v_0,pak společný soused v_0 a v_n, pak $\delta - 1$ sousedů v_n a konečně v_n.

Tato cesta má celkem $2\delta + 1$ vrcholů, jde tedy o cestu délky 2δ.

Případ $2\delta \geq |V|$ plyne z druhé části druhého tvrzení. v_0 a v_n mají δ sousedů, proto mají alespoň 2 společné vrcholy, z toho neplatí první část druhého tvrzení a proto platí druhá, tedy $P = V$

Máme tedy cestu s $|V|$ vrcholy, ta má délku $|V| - 1$.

Spojením těchto dvou případů dostaneme námi hledané tvrzení. □

1b)

Zadání

Pro každé přirozené $\delta \geq 1$ zkonstruujte nekonečně velkou množinu grafů $\mathcal{G}_\delta$ takovou, že každý $G \in \mathcal{G}_\delta$ je souvislý, má $\delta(G) = \delta$ a zároveň G neobsahuje cestu s $2\delta + 1$ hranami.

Řešení

Zvolme libovolné pevné δ.

Vytvořme následující množinu grafů $\{G_2, G_3, ...\}$.

G_i vytvořme následovně.

Vezměme i úplných grafů s δ vrcholy, označme H_k, mezi těmito grafy zatím neexistuje cesta.

Do grafu pak přidejme vrchol v_0, tento vrchol bude propojený s každým jiným vrcholem.

Je zřejmé, že indukované podgrafy G_i které mají vrcholy $V(H_k) + v_0$ jsou úplné grafy s $\delta + 1$ vrcholy, mají tedy stupeň δ.

Z toho plyne, že pro celkový graf platí $\delta(G_i) = \delta$. Tento graf je také zřejmě souvislý. Navíc platí, že každá cesta mezi 2 podgrafy H_k musí procházet přes v_0.

Z tohoto plyne, že každá cesta navštíví nejvíce 2 podgrafy H_k a z toho dostáváme, že nejdelší možná cesta má délku 2δ.

V podgrafu H_k totiž nalezneme cestu délky $\delta - 1$, pak se cestou přes 2 hrany dostaneme do jiného podgrafu H_j, kde nalezneme cestu o nejvíce $\delta - 1$ vrcholech.

Celkem tedy jako délku nejdelší cesty máme $2(\delta - 1) + 2 = 2\delta$.

2a)

Zadání

Pro každé n a $k \leq n$ určete (a následně dokažte!) minimální počet hran grafu s n vrcholy a k komponentami souvislosti.

Řešení

Zvolme libovolné pevné n.

Nejprve řešme případ s jednou komponentou souvislosti, tedy $k = 1$:

Hledáme tedy souvislý graf s minimálním počtem vrcholů, to je ale z definice strom. Pro něj platí $|E| = n - 1$

Případ $k > 1$:

Vezměme $G = (V, E) = (\bigcup_{i=1}^{k} V_i, \bigcup_{i=1}^{k} E_i)$, kde $G_i = (V_i, E_i)$ jsou různé komponenty souvislosti G. Navíc $n = |V|$

Platí, že $|E| = \sum_{i=1}^{k} |E_i|$. Protože $|E_i| > 0$ stačí minimalizovat jednotlivé E_i.

Protože ale platí, že jednotlivé komponenty souvislosti jsou souvislé podgrafy, tak z případu pro $k = 1$ víme, že to nastává pro $|E_i| = |V_i| - 1$.

Celkem tedy dostáváme

$$|E| = \sum_{i=1}^{k} |E_i| = \sum_{i=1}^{k} (|V_i| - 1) = |V| - k = n - k$$

$\square$

2b)

Zadání

Pro každé n a $k \leq n$ určete (a následně dokažte!) maximální počet hran grafu s n vrcholy a k komponentami souvislosti.

Řešení

Zvolme libovolné pevné n.

Definujme graf $G = (V, E) = (\bigcup_{i=1}^{k} V_i, \bigcup_{i=1}^{k} E_i)$, kde $G_i = (V_i, E_i)$ jsou různé komponenty souvislosti G.Navíc $n = |V|$

Nejprve řešme případ s jednou komponentou souvislosti, tedy $k = 1$:

Nejvíce hran má úplný graf K_n, pro který platí $E(K_n) = \binom{|V|}{2} = \frac{(n-1)n}{2}$.

Případ $k = 2$:

Hledáme maximum $|E| = |E_1| + |E_2|$, navíc platí, že každá komponenta musí být úplný graf (jinak bychom do ní mohli přidat hranu).

Platí, že $|V_1| = n - |V_2|$

Platí tedy

$$|E| = |E_1| + |E_2| = \binom{|V_1|}{2} + \binom{|V_2|}{2} = \binom{n - |V_2|}{2} + \binom{|V_2|}{2} = (|V_2| - \frac{1}{2}n)^2 + \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2}$$

Výraz maximalizujeme pro $|V_2|$, n je pevné, navíc platí $0 < |V_2| < n$.

Jediné podezřelé body jsou pro $|V_2| = 1, n-1, \lceil \frac{n}{2} \rceil, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, jednoduchým dosazením zjišťujeme, že maxima dosahujeme pro $|V_2| = 1$ a $|V_2| = n - 1$

G tedy má maximum hran, pokud je jeden vrchol osamocený, a druhá komponenta souvislosti je úplný graf. Máme tedy

$$|E| = \binom{n-1}{2}$$

Případ $k > 2$:

Hledáme maximum $|E| = \sum_{i=1}^{k} |E_i|$.

Musí platit, že každé 2 různé komponenty souvislosti G_j, G_k maximalizují $|E_j| + |E_k|$. Pokud by tomu tak nebylo, mohli bychom vzít vrcholy V_j a V_k a vytvořit z nich 2 nové komponenty, které by měli více hran.

Z toho plyne, že mezi každou dvojicí různých komponentů souvislosti, je jeden z nich osamocený vrchol a jeden z nich úplný graf (osamocený vrchol je také úplný graf).

Z této podmínky plyne, že máme $k-1$ osamocených vrcholů, a jeden úplný graf s $n-k+1$ vrcholy.

Celkově tedy dostáváme

$$|E| = \binom{n-k+1}{2}$$

3a)

Zadání

Nechť $T = (V, E)$ je strom obsahující vrchol stupně $k \geq 3$. Dokažte, že T má alespoň k listů.

Řešení

Označme vrchol stupně k jako v_0. Vytvořme zakořeněný strom (tj. orientovaný graf) tak, že vrchol v_0 bude kořenem. Orientace stran je určena tak, aby hrany vedly směrem od kořene.
Definujme potomka vrcholu a jako vrchol do kterého vede hrana z vrcholu a.

Dokažme pomocné tvrzení

Lemma. Z každého vrcholu v orientovaném stromu existuje cesta která je zakončená listem.

Důkaz. Existují 2 možnosti. Buď je vrchol listem (v tom případě je cesta triviální), nebo zvolíme libovolný z jeho potomků a strom postupně procházíme. Protože má strom konečný počet vrcholů a neobsahuje cyklus, vždy dorazíme do vrcholu který potomek nemá, tedy listu. □

Vrchol v_0 je stupně k, má tedy k potomků. Na každý z těchto vrcholů aplikujeme pomocné tvrzení. Je tedy zřejmé, že strom má alespoň k listů. □

3b)

Zadání

Buď $G = (V, E)$ graf. Dokažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní.

(a) G je strom

(b) G neobsahuje kružnici a $|V| = |E| + 1$

Řešení

Z (a) dokažme (b):

Kružnici neobsahuje z definice.
Vezměme libovolný list stromu a odeberme ho (i s hranou která do něj vede). Ze stromu jsme tedy odebrali jednu hranu a jeden vrchol. Graf který vznikl, je stále stromem, protože odebáním listu graf nepřestal být souvislý a odebráním

hrany jsme nemohli vytvořit cyklus.
Toto můžeme tedy opakovat. Nakonec se dostaneme do situace kdy nám v grafu zůstane pouze jeden vrchol.
Jak jsme zmínili i toto je strom, a pro něj platí rovnice $|V| = |E| + 1$ triviálně. Protože jsme se do tohoto stavu dostali postupným odečítáním 1 z obou stran rovnice, tak vztah musí platit i pro původní strom.

Z (b) dokažme (a):

Chceme ukázat že $\forall x, y \in V, \exists_1$ cesta v G z x do y.

Potřebujeme tedy ukázat, že mezi všemi vrcholy existuje nějaká cesta (tj. graf je souvislý) a poté, že existuje pouze jedna.

Lemma. Pokud G neobsahuje kružnici a $|V| = |E|+1$, tak potom je G souvislý.

Důkaz. Pro spor předpokladáme, že není souvislý.
Existují tedy alespoň 2 komponenty souvislosti.
Graf označme jako $G = (G_V, G_E) = \bigcup_{i=1}^{k} K_i, K_i = (V_i, E_i)$, kde K_i jsou jednotlivé komponenty souvislosti.

Navíc platí, že souvislý graf o n vrcholech, má nejméně $n-1$ hran, jak bylo ukázáno v úkolu 2a)
Z předpokladu platí

$$|G_V| = |G_E| + 1$$
$$\sum_i |V_i| = \sum_i (|E_i|) + 1 > \sum_i (|V_i| - 1) + 1$$

Kde nerovnost platí pro $i > 1$, tj. pro každý nesouvislý graf.
Z toho plyne, že alespoň jedna komponenta souvislosti má více než $n-1$ hran, označme ji jako H. Navíc z definice platí, že komponenta souvislosti je souvislá.

Z toho, ale plyne, že H není strom, protože H není do inkluze vůči hranám minimální souvislý graf.
Nakonec využijme definice stromu, která říká, že strom je souvislý graf bez cyklů. Protože H není strom, ale je souvislý, tak musí obsahovat cyklus, což je spor. □

Z pomocného tvrzení tedy plyne, že mezi každými 2 vrcholy tedy existuje nějaká cesta. To, že existuje právě jedna plyne z předpokladu o neexistenci kružnici v grafu. Pokud by totiž v grafu existovali 2 různé cesty z vrcholu a do b, šlo by z nich triviálně vytvořit cyklus.
Dokážeme sporem.
Stačilo by vzít 2 vrcholy s nejmenší vzdáleností pro které existují alespoň 2 různé cesty, cyklus by šel pak vytvořit tím, že nejprve z bodu a půjdeme do bodu b jednou cestou a pak z bodu b do bodu a. Tyto 2 cesty by měli společné pouze vrcholy a a b (jinak by existovaly 2 vrcholy s kratší vzdáleností) a tvořili by cyklus, což je spor s předpokladem.

Tímto jsme dokázali ekvivalenci tvrzení. □

4)

Zadání

Dokažte, že pro posloupnost $n \geq 2$ celých čísel $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ jsou následující dvě podmínky ekvivalentní:

(a) Existuje strom, který má skóre $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$

(b) $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$

Řešení

Z (a) dokažme (b):

Nechť existuje strom $T = (V, E)$, který má skóre $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$. T je tedy souvislý a $|E| = |V| - 1$.

Potom platí (z handshaking lemmatu)

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{v \in V} deg(v) = 2|E| = 2(|V| - 1) = 2(n - 1)$$

Z (b) dokažme (a):

Dokážeme indukcí.

Pro $n = 2$: $1 \leq d_1 \leq d_2$, $d_1 + d_2 = 2$. Z toho máme $d_1 = d_2 = 1$.

Jako strom zvolme $T = ([2], \{1, 2\})$. Tento strom má zřejmě skóre $(1, 1)$.

Indukční krok:

Indukční předpoklad tedy je, že tvrzení platí pro n, tj. pokud $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$ tak existuje strom který má skóre $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$.

Tvrzení dokažme pro $n + 1$.

Víme, že

$$\sum_{i=1}^{n+1} d_i = 2(n + 1) - 2$$

kde $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_{n+1}$.

Z tohoto plyne, že $d_1 = 1$ (jinak by suma byla větší než pravá strana) a $d_{n+1} \geq 2$ (jinak by suma byla menší než pravá strana).

Z posloupnosti $(d_1, d_2, ..., d_{n+1})$ odeberme d_1 a d_{n+1} zaměňme za $d_{n+1} - 1$.

Z této posloupnosti, vytvoříme neklesající posloupnost čísel $g_1, ..., g_n$, (g_n nemusí nutně být d_{n+1}) pro kterou platí

$$\sum_{i=1}^{g+1} d_i = 2(n + 1) - 2$$

Podle indukčního předpokladu pro tuto posloupnost existuje strom T_n s jejím skóre.

Tento strom obsahuje $v \in V$, $deg(v) = d_{n+1} - 1$, k tomuto vrcholu připojíme list, a tím se změní stupeň v na, $deg(v) = d_{n+1}$, zároveň má list stupeň 1, dáme ho na začátek posloupnosti. Tím dostáváme strom se skóre $(d_1, d_2, ..., d_n)$.

Nakonec doplníme, že tento nový graf je stále stromem, neboť přidáním listu nemůže vzniknout cyklus nebo vzniknout nová komponenta souvislosti.

5)

Zadání

Nechť K_n^- je (až na izomorfismus jednoznačně určený) graf s n vrcholy a $\binom{n}{2} - 1$ hranami. Určete počet koster K_n^- pro každé $n \geq 3$.

Řešení

Nejprve najděme počet koster, které obsahují jednu konkrétní hranu. Provedeme to tak, že spočteme celkový počet hran všech koster úplného grafu s n vrcholy dvěma různými způsoby.

Z Caleyho formule víme, že na úplném grafu existuje n^{n-2} koster. Dále víme, že každá kostra úplného grafu má $n-1$ hran, (plyne z definice stromu jako do inkluze vůči hranám minimálního a souvislého grafu a z cvičení 2)), proto celkem dostáváme $n^{n-2}(n-1)$ hran.

Dále víme, že na úplném grafu patří každá hrana do stejného počtu koster (plyne ze symetrie úlohy, není možné aby se jedna hrana lišila), toto číslo označme jako k. Dále víme, že v úplném grafu máme $\binom{n}{2}$ hran. Tedy každá hrana patří do k stromů a celkem tedy máme $\binom{n}{2}k$ hran.

Tyto dva vztahy se ale zřejmě musí rovnat. Dostáváme tedy

$$n^{n-2}(n-1) = \binom{n}{2}k$$

Upravme a dostaneme

$$k = n^{n-2}\frac{(n-1)}{\binom{n}{2}} = n^{n-2}\frac{2}{n} = 2n^{n-3}$$

Toto je tedy počet koster úplného grafu, které obsahují jednu konkrétní hranu.

Abychom dostali počet koster K_n^- stačí tedy toto číslo odečíst od celkového počtu koster.

$$n^{n-2} - 2n^{n-3} = (n-2)n^{n-2}$$

Celkově tedy počet koster pro K_n^- je $(n-2)n^{n-2}$.