Těžká úloha 3

Zadání a)

Dokažte, že počet neisomorfních stromů s n vrcholy je nejvýše 4^n.

Řešení a)

Zabývejme se počtem neisomorfních uspořádaných orientovaných stromů na n vrcholech. Jejich počet je větší než počet neisomorfních neuspořádaných orientovaných stromů, a ten je větší než počet neisomorfních neorientovaných stromů. Toto plyne z pozorování, že každý isomorfismus na orientovaném grafu funguje také pro neorientovaný graf, navíc změněním dvou navzájem neisomorfních orientovaných stromů na neorientované, mohou vzniknout neorientované stromy isomorfní.

Mějme tedy libovolný uspořádaný orientovaný strom $T = (V, E)$. Označme jeho kořen jako v_0.

Pro jednoduchost definujme množinu $L(k) = \{v \in V \mid dist(v_0, v) = k\}$.

Dále definujme k-té patro jako uspořádanou $|L(k)|$-tici vrcholů, která obsahuje všechny vrcholy z $L(k)$.

Navíc definujme pozici vrcholu v k-tém patře následovně, řekněme, že vrchol v je nalevo od vrcholu w, pokud se v v uspořádané $|L(k)|$-tici vyskytuje před w. Řekněme, že v je napravo od w, právě pokud w je nalevo od v.

V této úloze pro uspořádání stromu požadujme následující. Pokud pro předka v platí, že je nalevo od předka w, tak musí platit že v je nalevo od w.

V této úloze navíc zaveďme následující značení pro binární posloupnosti. Místo psaní například $(1, 0, 1, 0, 1, 1, 0)$ pišme 1010110.

Definujme následující prosté zobrazení f_n mezi orientovaným stromem s n vrcholy T_n a binární posloupností b složenou z číslic 1 a 0.

$f_n : T_n \mapsto (b)_{i=1}^{2n}$ funguje následujícím způsobem. Stromem T postupně projdeme všechny vrcholy po patrech zleva doprava a u každého vrcholu do výsledné posloupnosti zapisujeme tolik jedniček, jaký je počet jeho potomků. Po zapsání počtu potomků zapišme do posloupnosti 0 (i v případě, že vrchol potomka nemá). Výsledná posloupnost má délku $2n - 1$ (ukážeme později), přidáme tedy jednu 0 aby měla délku $2n$.

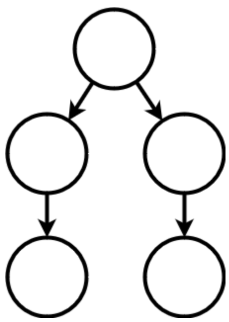
Výsledkem je tedy posloupnost o délce $2n$.

Příklad. Předpokládejme strom $R = ([5], \{(1, 2), (2, 3), (1, 4), (4, 5)\})$.
Začněme tedy ve vrcholu 1, ten obsahuje dva potomky, proto do výsledné posloupnosti zapisujeme 110.
Zvolme jeden z potomků v prvním patře stromu, například 2, ten obsahuje jednoho potomka, do posloupnosti tedy přidáme 10.
Následně zvolme druhého potomka v prvním patře, tedy 4, tento vrchol obsahuje jednoho potomka, do posloupnosti přidáme 10.
Protože jsme prošli všechny vrcholy v prvním patře pokračujeme do druhého patra.
V druhém patře se nachází 2 vrcholy (3 a 5), protože ale požadujeme aby byly

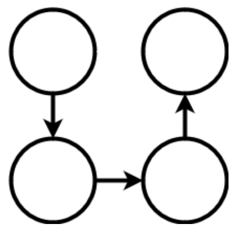
správně uspořádané musí vzít vrchol 3, ten nemá potomka, do posloupnosti zapisujeme tedy 0, nakonec zbývá vrchol 5, ten potomky nemá, do posloupnosti tedy přidejme 0.
Máme posloupnost délky 9, přidáme 0 abychom měli posloupnost délky 10.

Celkem dostáváme $f_5(R) = 1101010000$.

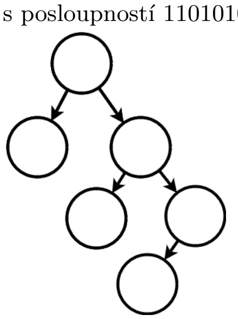
Na následujících obrázcích můžeme vidět několik dalších příkladů. V druhém řádku vidíme dva grafy, které mají různou posloupnost pouze díky různému uspořádání, pokud bychom je uvažovali jako neuspořádané orientované stromy tak by byli isomorfní.



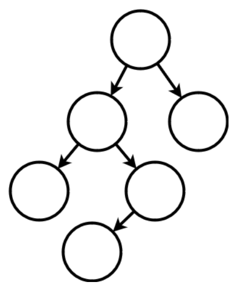
Graf s posloupností 1101010000



Graf s posloupností 10101000



Graf s posloupností 110011001000



Graf s posloupností 110110001000

f_n má zřejmě jako svůj definiční obor všechny orientované grafy s n vrcholy, protože algoritmus pro vytvoření výsledné posloupnosti který používáme funguje pro každý orientovaný strom. f_n není surjektivní, například pro posloupnost $2n$ jedniček neexistuje inverzní zobrazení.

Ukažme, že f_n vždy zobrazí do posloupnosti o délky $2n$

Důkaz. Toto plyne z pozorování, že každý člen (kromě kořene) přispěje do posloupnosti jednou číslicí 1 a jednou číslicí 0. 1 protože se vyskytuje jako potomek právě jednoho vrcholu, 0 poté co projdeme všechny jeho potomky. Jedinou výjimkou je kořen, který předka nemá a proto do posloupnosti přispěje jednou 0.

Z toho tedy máme že vrcholy kromě kořene přispějí, $2(n-1)$ členy, kořen jedním členem a funkce samotná na konec posloupnosti přidá jednu 0. Z toho

máme
$$2(n-1)+1+1=2n$$
$\square$

Ukažme nyní, že f_n je injektivní.

Důkaz. Stačí ukázat, že existuje zobrazení $g_n : (b)_{i=1}^{2n} \mapsto T_n$ tak aby $g_n(f_n(x)) = x, \forall x \in T_n$, tj. že zobrazení f_n je invertibilní zleva.

Toto zobrazení ale určitě existuje, stačí posloupnost procházet zleva doprava a postupně vrcholům přidávat potomky pro každou 1. Poté co v posloupnosti narazíme na 0 tak se buď přesuneme do vrcholu, který je napravo, nebo pokud takový vrchol neexistuje tak se přesuneme do vrcholu nejvíce vlevo v dalším patře.

Pro posloupnosti které nejsou obrazem nějakého grafu z T_n podle f_n (a tedy naše inverzní funkce je pro ně špatně definovaná) definujme BŮNO (protože nás zajímá inverzní zobrazení pouze pro posloupnosti které obrazem jsou) výsledek jako následující graf $([n], \bigcup_{i=2}^{n}\{(1,i)\})$. $\square$

Protože f_n je injektivní a není surjektivní, tak platí, že množina do které f_n zobrazuje je větší než definiční obor $D(f_n) = T_n$.

Počet všech binárních posloupností o velikosti $2n$ označme jako P_{2n} a platí $P_{2n} = 2^{2n} = 4^n$.

Konečně tedy platí,

$$\begin{aligned}&\#\text{neisomorfních stromů s } n \text{ vrcholy} \leq \\ &\qquad \leq \#\text{orientovaných stromů s } n \text{ vrcholy} = D(f_n) < 4^n\end{aligned}$$

$\square$