Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko
Finančna matematika - 1. stopnja

Matej Škerlep

Problem največje množice neodvisnih vozlišč (kratko poročilo)

Finančni praktikum

Mentorja: prof. dr. Riste Škrekovski in asist. dr. Janoš Vidali

Ljubljana, december 2019

1 Navodila za delo

- Definirajte problem največje množice nesosednjih vozlišč kot CLP in ga rešite za nekaj primerov.
- Eksperimentalno rimerjajte rezultate CLP in njegove relaksacije na LP in ugotovite, za koliko se lahko razlikujejo med sabo po velikosti.
- Napišite algoritem za lokalno iskanje po grafu in njegov rezultate primerjajte s prejšnjimi.
- Ugotovite za kako velike grafe je posamezen izmed primerov rešljiv.

2 Definicije pojmov

Definicija 1. Naj bo $G = (V, E)$ graf in $I \subseteq V$. Množica vozlišč I je ***neodvisna***, če ne vsebuje sosednjih vozlišč.
Formalno, če za $\forall v, u \in V$, $uv \in E$ velja: $v \in I \Leftrightarrow u \notin I$

3 Dosedanje delo

3.1 Celoštevilski linearen program

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{p.p.} & x_u + x_v \leq 1, \quad \text{za vsak par } uv \in E \\ & x_v \in \{0, 1\}, \quad \forall v \in V \end{array}$$

Opomba 1. Vsakemu vozlišču $v \in V$ priredimo spremenljivko x_v z vrednostmi 0 ali 1. Pri tem je $x_v = 1$ natanko tedaj ko, $v \in I$ in $x_v = 0$ natanko tedaj ko, $v \notin I$. Pogoj $x_u + x_v \leq 1$ pa nam zagotovalja, da ima vsaka povezava $uv \in E$ največ eno vozlišče v množici I.

3.2 Relaksacija linearnega programa

V primeru relaksacije LP, pogoj $x_v \in \{0, 1\}$ zamenjamo s pogojem
$0 \leq x_v \leq 1$:

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{p.p.} & x_u + x_v \leq 1, \quad \text{za vsak par} uv \in E \\ & 0 \leq x_v \leq 1, \quad \forall v \in V \end{array}$$

V tem primeru dobimo trivialno rešitev $x_v = \frac{1}{2}$ za $\forall v \in V$. Moč možice I je v tem primeru enaka $\frac{|V|}{2}$, torej je $|I| \geq \frac{|V|}{2}$ v primeru relaksacije LP.

Kot primer neučinkovitosti relaksacije LP si oglejmo primer polnega grafa na n vozliščih (t.j. graf kjer je vsako vozlišče povezano z vsemi ostalimi vozlišči). Trivialno lahko vidimo, da je moč množice I v tem primeru enaka 1, saj vsebuje zgolj natanko eno vozlišče. A kot smo videli zgoraj, je optimalna moč množice I za relaksacijo LP vsaj $\frac{n}{2}$.

Zdi se torej, da nam optimalna rešitev relaksiranega LP o moči neodvisne množice vozlišč ne pove kaj dosti. Zgornjo ugotovitev bom poskušal tudi empirično preveriti.

3.3 Ideja za lokalno iskanje

Začnemo z množico nesosednjih vozlišč (naj bo to recimo I) in nato naključno zamenjamo eno iz vozlišč iz množice I z vozliščem, ki ga v nožici ni. Pri tem upamo, da bo po zadosti menjavah eno izmed vozlišč postalo prosto. Torej ga lahko dodamo v množico I in s tem njeno moč povečamo za 1.

4 Plan prihodnjega dela

V nadaljevanju nameravam zgornje dva linearna programa sprogramirati in nato izvesti poskuse na grafih. Poskusil bom pokazati, da je relaksacija LP v primeru iskanja največje množice neodvisnih vozlišč neučinkovita. Idejo za lokalno iskanje bom sprogramiral in jo poskusil še izboljšati. Rezultate CLP, relaksacije LP in lokalnega iskanja bom nato primerjal med sabo. Ugotovil bom, kateri od algoritmov je najučinkovitosti in ali se morda učinkovitosti algoritmov razlikujejo glede na velikosti grafov.